NIEWEGŁOWSKI

Arytmetyka

606

ARYTMETYKA

DZIEŁA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

Geometrya. Kurs elementarny, zawierający teoryę poprzecznych, biegunowych, stosunek nieharmoniczny, oś pierwiastną, inwolucyę, etc. Wiele rozwiązanych zagadnień, i ćwiczenia. In-8 z figurami w tekscie. Paryż, 1852. fr. 5.

Arytmetyka. Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, teoryę przybliżeń liczebnych, i noty dotyczące własności liczb. Przeszło 100 zagadnień rozwiązanych, i ćwiczenia. In-8. Paryż, 1866. fr. 4.

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, ulica Mignon, 2

ARYTMETYKA

Z TEORYĄ PRZYBLIŻEŃ LICZEBNYCH

I Z NOTAMI

PRZEZ

G-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

Professora Analizy w Szkole Wyższej Polskiej
(Montparnasse),
Examinatora matematyki w Cesarskiem Liceum Śgo Ludwika, w Paryżu.

« Οἱ ἀριθμοὶ νέμουσι τὸν κόσμον. »
Πυθαγόρας.

PARYŻ

W KSIĘGARNI KAROLA KROLIKOWSKIEGO

ULICA DE SEINE, 20

1866

DO CZYTELNIKA.

Czy to dzieło byłoby kiedy wyszło na świat, nie wiem. Ale że dziś wychodzi, to dzięki mojemu dawnemu uczniowi, Hr. Janowi Działyńskiemu, który mi podał myśl jego napisania, i usilnie nalegał na wykonanie, ofiarując, z całą szlachetnością, ponieść wszystkie koszta wydawnictwa.

O samem dziele nie mam nic do powiedzenia, chyba to że jest ścisłym kursem arytmetyki który, od wielu lat, wykładam w Szkole Wyższej Polskiej, zwanej *Szkołą Montparnasse*, w Paryżu. Czytelnik, ze spisu rzeczy, będzie miał dostateczne wyobrażenie o rozkładzie książki. Nie znajdzie tylko logarytmów, bo one należą do algebry; ale za to znajdzie działania skrócone, zupełną teoryę przybliżeń liczebnych, i różne noty zawierające, między innemi, niektóre twierdzenia własności liczb.

Nie mogę jednak przemilczeć że, mimo rzetelnego wstrętu do nowych wyrazów, któremi nierozważni zaciemniają język;

musiałem, w koniecznej potrzebie, utworzyć *wielownik*, *wielowny*, *wskaz* i *zatrzymkę*. Spodziewam się że one zostaną przyjęte, jako już powszechnie przyjęto wyrazy: *możebny* i *wynik*, które, lat temu blisko trzydzieści, wprowadziłem do naszej mowy.

A teraz, łaskawy czytelniku, jeśli moja praca odda ci tyle usług ile życzę, dopełniłem powinności.

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

Pisałem w Paryżu dnia 21 maja 1866 r.

SPIS RZECZY.

GŁÓWNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

Str.	12,	linia	2 z dołu,	*zam.* odpowiedzić	*czyt.*	odpowiedzieć.
—	18,	—	11 z dołu,	— 1678304	—	1078304.
—	34,	—	13 z dołu,	— 315569931	—	31556931.
—	93,	—	13 z góry,	— *niepażystą*	—	*nieparzystą*.
—	125,	—	9 z dołu,	— ułatwienia	—	utkwienia
—	155,	—	3 z dołu,	— $12+^{2}$	—	$12+\frac{2}{3}$.
—	173,	—	10 z dołu,	— zmniejszemy	—	zmniejszamy.
—	175,	—	6 z dołu,	— tego mnożenia skróconego dzielnika *czyt.* mnożenia skróconego tego dzielnika.		
—	176,	—	10 z góry,	— *takę*	*czyt.*	*taką*.
—	183,	—	7 z dołu,	na końcu linii, dodaj: przez zbytek.		
—	237,	—	9 z góry,	*zam.* z jakim	*czyt.*	z jakiem.

ARYTMETYKA.

WSTĘP.

1. Wielość przedmiotów które około siebie spostrzegamy rodzi w nas wyobrażenie *liczby*.

Przedmiot z którym porównywamy inne przedmioty tej samej natury nazywa się ich *jednością*. Zbiór jedności stanowi *liczbę*.

I tak, kiedy mówimy: spotkałem *trzy* osoby, widziałem *cztery* konie, kupiłem *dziesięć* książek, etc.; osoba, koń, książka są *jednościami*; a zaś *trzy*, *cztery*, *dziesięć*, LICZBAMI tych jedności.

Liczby nazywają się *mianowanemi* (concreti numeri) gdy wyrażają jedności mianowane, jako *siedem kolorów*, *dwie góry;* albo *oderwanemi* (abstracti numeri), gdy wyrażają jedności niemianowane, jakoby oderwane od przedmiotów, np. *pięć*, *siedem*, *osiem*, *sto*, etc.

Ale trzeba dobrze uważać że liczbę mianowaną stanowią jedności oddzielne, nie zaś jedności składające jedną całość. I tak, *dziesięć łokci* sukna wyrażają liczbę mianowaną łokci, jeśli każdy łokieć jest osobny; a przeciwnie, te dziesięć łokci wyrażają tylko pewną *wielkość*, jeśli oznaczają jedną sztukę sukna.

2. Arytmetyka jest umiejętnością własności liczb, i ma za przedmiot działania na liczbach.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

LICZENIE.

Najpierwszym przedmiotem Arytmetyki jest *liczenie.*

Umieć liczyć jestto znać imiona liczb po sobie idących, i umieć wyrażać te liczby pewnemi znakami. Zatem liczenie jest dwojakie : *ustne* i *pisane.*

§ I. — LICZENIE USTNE.

3. Liczenie ustne jestto sztuka tworzenia imion liczb.

Imiona liczb nie są wszystkie dowolne, i tworzą się jako następuje :

Mianujemy liczby jedną po drugiej, od jedności aż do dziesięciu, mówiąc: *jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć. siedem, osiem, dziewięć, dziesięć.* Mówimy potem, idąc dalej, *jedenaście,* to jest dziesięć i jeden; *dwanaście,* to jest dziesięć i dwa ; a następnie *trzynaście, czternaście, piętnaście, szesnaście, siedemnaście, osiemnaście, dziewiętnaście.*

Dodając jeszcze jedność, mamy *dwadzieścia,* to jest dwa dziesiątki.

Liczymy następnie *dwadzieścia jeden, dwadzieścia dwa,* i tak dalej, aż do *dwadzieścia dziewięć.*

Poczem, dodając jedność, otrzymujemy *trzydzieści*; liczymy na dziesiątki jakeśmy liczyli na jedności, mówiąc: *trzydzieści jeden, trzydzieści dwa,* etc. ; *czterdzieści jeden, czterdzieści dwa,* etc. ; *piędziesiąt jeden, piędziesiąt dwa,* etc. ; *sześdziesiąt jeden, sześdziesiąt dwa,* etc. ; *siedemdziesiąt jeden, siedemdziesiąt dwa,* etc. ; *osiemdziesiąt jeden, osiemdziesiąt dwa,* etc. ; *dziewiędzie-*

siat jeden, dziewiędziesiat dwa, etc. aż do *dziewiędziesiat dziewięć.*

Dodając jedność mamy liczbę STO;

Potem liczymy: *sto jeden, sto dwa*, etc.; *sto dziesięć, sto jedenaście*, etc.; *sto dwadzieścia, sto dwadzieścia jeden*, etc.; i tak podobnie, aż do *sto dziewiędziesiat dziewięć.*

Poczem, dodając jedność mamy *dwieście*, a następnie *dwieście jeden*, etc., aż do *dwieście dziewiędziesiat dziewięć.*

Liczymy na sta jakeśmy liczyli na jedności i dziesiątki, i otrzymujemy następujące liczby, mówiąc: *trzy sta, trzysta jeden*, etc.; *czterysta, czterysta jeden*, etc.; *pięćset, pięćset jeden*, etc.; *sześćset, sześćset jeden*, etc.; *siedemset, siedemset jeden*, etc.; *osiemset, osiemset jeden*, etc.; *dziewięćset, dziewięćset jeden*, etc.; aż do *dziewięćset dziewiędziesiat dziewięć.*

Następująca liczba jest TYSIĄC, a po niej idzie: *tysiąc jeden, tysiąc dwa*, i t. d.

Tu dobrze uważać należy że, nietylko liczymy na tysiące, jakośmy liczyli na jedności, dziesiątki i sta; ale jeszcze liczba tysiąc stanowi drugą klassę jedności, i zawiera trzy rzędy, to jest jedności tysięcy, dziesiątki tysięcy i sta tysięcy. Mówimy tedy: *tysiąc, dwa tysiące, trzy tysiące*, etc.; *dziesięć tysięcy, jedenaście tysięcy*, etc.; *sto tysięcy, dwieście tysięcy, trzysta tysięcy*, (1); aż do *dziewięćset dziewiędziesiat dziewięć tysięcy.*

Idzie następnie liczba MILION, która stanowi trzecią klassę jedności i zawiera także trzy rzędy, to jest jedności milionów, dziesiątki milionów i sta milionów. I mówimy:

Milion, dwa miliony, etc.; *dziesięć milionów, jedenaście milionów.* etc.; *sto milionów, dwieście milionów*, etc.; aż do *dziewięćset dziewiędziesiat dziewięć milionów.*

Potem idzie liczba BILION albo miliard. Stanowi ona czwartą klassę jedności i składa się także, jako poprzednie klassy, ze trzech rzędów, to jest z jedności bilionów, z dziesiątków bi-

(1) Mówią także *dwa kroć sto tysięcy, trzy kroć sto tysięcy*, etc. zwłaszcza gdy te liczby stoją same jedne; np. kupił dom za cztery kroć sto tysięcy złotych, i t. p.

lionów i ze set bilionów, i mówimy *bilion*, *dwa biliony*, *dziesięć bilionów, sto bilionów*, etc. Idą następnie *tryliony*, po nich *kwatryliony*, i t. d.

To co poprzedza dostatecznie pokazuje że liczenie jest *dziesiętne* i *troiste*. Jest ono dziesiętne, bo liczymy od jednej aż do dziesięciu jedności czyli do dziesiątka; potem od jednego aż do dziesięciu dziesiątków czyli do sta, etc. Liczenie jest troiste, bo liczymy po trzy rzędy w każdej klassie jedności, i mamy naprzód jedności, dziesiątki i sta; potem jedności tysięcy, dziesiątki tysięcy i sta tysięcy; następnie miliony, dziesiątki milionów i sta milionów; i tak dalej.

§ II. — LICZENIE PISANE.

4. Aby można pismem wyrażać liczby, trzeba nietylko mieć pewne znaki któreby, różną postacią swoją, oznaczały wielkość liczb początkowych, tak jako litery abecadła oznaczają pierwotne dźwięki mowy ludzkiej; ale trzeba jeszcze, za pomocą małej liczby tych znaków, umieć wyrazić wszelkie liczby.

Tych znaków, które się nazywają *cyframi*, jest tylko dziesięć. Oto ich postać i wartość w naturalnym porządku:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
jeden	*dwa*	*trzy*	*cztery*	*pięć*	*sześć*	*siedem*	*osiem*	*dziewięć*	*zero*

Zero nie wyraża samo przez się żadnej wartości, ale jego użytek jest bardzo ważny, jak to niebawem zobaczymy.

Mając te dziesięć cyfer, aby za pomocą nich wyrazić wszelką liczbę, przyjęto następującą, fundamentalną ugodę, na której się opiera liczenie pisane: *wszelka cyfra, postawiona na lewej stronie drugiej, oznacza jedności* DZIESIĘĆ RAZY WIĘKSZE *niż jedności tej drugiej*.

I tak, cyfry 3, 6, napisane osobno, wyrażają pierwsza *trzy*, a druga *sześć* jedności. Ale, jeśli je napiszemy obok siebie, jako 36, wtedy, cyfra 6 oznacza jeszcze *sześć* JEDNOŚCI, a zaś cyfra 3, stojąca po lewej stronie cyfry 6, wyraża, na mocy powyższej ugody, *trzy* DZIESIĄTKI, to jest jedności dziesięć razy większe od jedności oznaczonych cyfrą 6. Więc 36 wyraża *trzydzieści sześć* jedności, albo po prostu, liczbę *trzydzieści sześć*. Tak samo 63 oznacza liczbę *sześdziesiąt trzy*.

Szukajmy teraz co znaczy wyrażenie 798.

Rozumując jako dopiero co, pojmiemy łatwo że cyfra 8, stojąca na pierwszem miejscu, idąc od prawej ręki ku lewej, oznacza *osiem* JEDNOŚCI; następująca cyfra 9, która stoi na drugiem miejscu, to jest po lewej stronie cyfry jedności 8, oznacza *dziewięć* DZIESIĄTKÓW; nakoniec cyfra 7, stojąca na trzeciem miejscu a po lewej stronie cyfry 9 dziesiątków, oznacza *siedem* SET, to jest jedności dziesięć razy większe od dziesiątków cyfry 9. Widzimy więc jasno że wyrażenie 798 oznacza liczbę *siedemset dziewiędziesiąt osiem*.

Jakże teraz napisać liczbę *dziesięć?* jak wyrazić że jedność stoi na drugiem miejscu, kiedy pierwsze, niczem niezajęte, nie jest oznaczone? Otoż właśnie dla usunięcia tej trudności użyto cyfry 0. Pisząc 10, to jest kładąc *zero* na miejscu jedności których niema, wyrażamy że cyfra 1 stoi na drugiem miejscu. A więc, na mocy przyjętej ugody, wyrażamy *dziesięć*.

Podobnie postępując, wyrazimy liczbę *sto* jeśli napiszemy 100. I w samej rzeczy, kładąc dwa zera po prawej stronie cyfry jedności, wskazujemy że ona stoi na trzeciem miejscu, a więc wyrażamy istotnie jedność trzeciego rzędu, to jest *sto*.

Umiejąc pisać liczby złożone ze trzech cyfer, potrafimy, bez najmniejszej trudności, napisać liczbę tak wielką jak się podoba; bacząc tylko na to że każdą klassę jedności, liczby wysłowionej, należy wyrazić trzema przyzwoitemi cyframi; kładąc zero na miejscu brakujących jedności każdego rzędu, aby tym sposobem zachować w każdej cyfrze wartość względną do miejsca. Pamiętajmy albowiem że każda cyfra ma dwie wartości, jedną *samoistą* (absolutną) a drugą *względną*. I tak, w liczbie 3605, cyfra 3 oznacza naprzód wartość samoistą *trzy*, zależącą od jej postaci, a potem wartość względną *trzy tysiące*, zależącą od miejsca na którem ta cyfra stoi. Dla tego też zamiast mówić *trzy tysiące*, można powiedzieć *trzy* jedności *czwartego* rzędu; a zamiast *cztery tryliony*, powiedzieć *cztery* jedności *trzynastego* rzędu, i t. d.

Zrozumiawszy dobrze liczenie pisane, nic łatwiejszego jak napisać liczbę: *trzy tryliony, sześćset piędziesiąt trzy bilionów, siedemset czterdzieści pięć milionów, sto siedemdziesiąt sześć tysięcy, osiemset osiem.*

Jakoż, dosyć jest idąc za wysłowieniem wyrazić cyframi oddzielnie każdą klassę jedności, zaczynając od najwyższej. Tak postępując znajdujemy liczbę:

3 653 745 176 808 (1)

Nawzajem, aby łatwo przeczytać napisaną liczbę, trzeba ją podzielić przecinkami położonemi u dołu, na przedziały ze trzech cyfer, zaczynając od prawej ręki, jeśli te podziały nie są już odstępami dostatecznie oznaczone. To uczyniwszy, mianuje się przedziały jeden po drugim, mówiąc: *jedności* (pierwszy przedział), *tysiące* (drugi), *miliony* (trzeci), *biliony* (czwarty), nakoniec *tryliony*; jako w powyższej liczbie.

Więc liczba napisana powyżej wyraża istotnie, jakeśmy już powiedzieli: *trzy tryliony*, *sześćset piędziesiąt trzy bilionów, siedemset czterdzieści pięć milionów, sto siedemdziesiąt sześć tysięcy*, *osiemset osiem.*

Dla wprawy rachunków dobrze jest dać kilka przykładów.

Napisać liczbę: *pięćset trzy kwatryliony*, *siedemset dwa miliony*, *sto sześć.*

Przeczytać liczbę:

40 764 000 798 012 345.

5. Rzymianie nie znali liczenia pisanego; nie mieli cyfer

(1) « *Daj mi dźwignię i punkt oparcia a świat podniosę*, » rzekł *Archimedes* do *Hierona* króla Syrakuzy. Otóż, *Ozanam* wyrachował że *Archimedes* potrzebowałby 3 653 745 176 808 *wieków*, aby podnieść ziemię *na jeden cal* tylko.

osobnych. Wyrażali liczby literami, jako następująca pokazu tablica:

I *jeden*, II *dwa*, III *trzy*, IV *cztery*, V *pięć*, VI *sześć*, VII *siedem*, VIII *osiem*, IX *dziewięć*, X *dziesięć*, XI *jedenaście*, XII *dwanaście*, XIII *trzynaście*, XIV *czternaście*, etc.; XX *dwadzieścia*, XXI *dwadzieścia jeden*, XXX *trzydzieści*, XL *czterdzicści*, L *pięćdziesiąt*, LX *sześćdziesiąt*, etc.; XC *dziewięćdziesiąt*, C *sto*, CC *dwieście*, etc.; CD *czterysta*, D *pięćset*, DC *sześćset*, etc.; CM *dziewięćset*, M *tysiąc*.

Widzimy łatwo naczem polega układ cyfer rzymskich. Oto, liczba mniejsza, postawiona na prawej stronie większej, zwiększa ją swoją wartością, jako LX, co znaczy pięćdziesiąt więcej dziesięć czyli *sześćdziesiąt*; a zaś postawiona na lewej stronie, zmniejsza ją tąż wartością, jako XL, co znaczy pięćdziesiąt mniej dziesięć, czyli *czterdzieści*.

Taki sposób pisania liczb, nietylko że jest niedogodny i niedostateczny, bo daje podwójne wyrażenia na niektóre liczby, np. IIII i IV, a nie daje liczb wielkich; ale, co gorsza, nie można go użyć w żadnej kombinacyi liczb między sobą. Nie dziw przeto dlaczego Rzymianie nie mogli mieć arytmetyki.

Cyfry rzymskie służą w napisach dat, na pomnikach, wyrażają godziny na zegarach, i t. p.

Cyfry których używamy nazywają się *arabskiemi*, dlatego że je do Europy przynieśli, podobno w wieku IX, Arabi którzy się zapewne nauczyli arytmetyki od Fenicyan i Greków.

ĆWICZENIA.

I. Pewna osoba chce utoczyć z beczki cztery kwarty wina; ale niema kwarty tylko są dwa naczynia próżne, jedno *trzykwartowe* a drugie *pięciokwartowe*. Jakże, za pomocą tych dwóch naczyń, wziąć z beczki cztery kwarty wina?

II. Przeczytać rok MDCXLIX.

III. Napisać rok 1866 cyframi rzymskiemi.

ROZDZIAŁ DRUGI.

RACHUNEK LICZB.

Powiedzieliśmy że zbiór jedności stanowi liczbę. Ale można sobie wyobrazić jedność podzieloną na pewną ilość równych części, i wziąć jedną tylko albo kilka z tych części, jako np. *pół* kwarty, *ćwierć* funta, *dwie trzecie* talara, i t. d. Takie zbiory części jedności nazywają się także *liczbami* ale *łamanemi*, albo krócej *ułamkami*; i dlatego też liczby oznaczające zbiór całych jedności, jako *trzy* konie, *dwie* morgi, *pięć* (jedności), i t. d., nazywają się *liczbami całkowitemi*. O ułamkach później mówić będziemy; teraz zaś wyłożymy działania na liczbach całkowitych, jako najprostszych.

Cztery są działania główne na liczbach całkowitych, to jest dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie.

DODAWANIE.

6. Określenie. — Dodawanie *jestto działanie, za pomocą którego zbieramy wiele liczb w jedną która się nazywa ich* summą.

Dodaje się dwie liczby jednocyfrowe do siebie, dodając do jednej z nich po kolei wszystkie jedności zawarte w drugiej. I tak, jeśli chcemy dodać 3 i 4, dosyć dodać do liczby 4 każdą z jedności liczby 3, mówiąc: 4 i 1 czynią 5; 5 i 1 czynią 6; 6 i 1 czynią 7. Liczba 7 jest summą liczb 3 i 4.

Znak dodawania jest $+$ i czyta się *więcej*. I tak, $3 + 4 = 7$ znaczy 3 więcej 4 równa się 7.

Aby módz łatwo dodawać liczby wszelkiej wielkości, trzeba naprzód umieć dodawać odrazu liczby mające jedną tylko cyfrę. I tak, trzeba wiedzieć że np. 5 więcej 3 czynią 8; że 5 i 7 czynią 12 ; że 7 i 8 czynią 15; że 6 i 9 czynią 15 ; że 8 i 9 czynią 17; i t. d.

Na pierwszy przykład dodawania liczb jednocyfrowych weźmy następujące zagadnienie.

Zagadnienie I. *Pewna osoba wydała na różne potrzeby, raz rubli* 9, *drugi raz* 7, *trzeci raz* 8; *pożyczyła swojej sąsiadce rubli* 6; *zostało jej rubli* 5. *Ileż miała pieniędzy?*

Chąc odpowiedzieć na to pytanie, dosyć jest napisać dane liczby jedną pod drugą, jako następuje :

$$\begin{array}{rr} & 9 \\ & 7 \\ & 8 \\ & 6 \\ & \underline{5} \\ \text{summa} & 35 \end{array}$$

podkreślić, i dodawać, zacząwszy np. od dołu, mówiąc: 5 i 6 czynią 11, a 8 to (czyni) 19, a 7 to 26, a 9 to 35. Piszę 5 pod jednościami, posuwam o jedno miejsce ku lewej ręce, i piszę 3 dziesiątki. Znajduję tym sposobem szukaną summę pieniędzy, to jest 35 rubli, które posiadała rzeczona osoba.

7. Próba dodawania. Powiedzieliśmy że osoba miała 35 rubli, w przekonaniu że dodawanie dobrze było zrobione. Ale gdzie dowód że niema pomyłki w działaniu? Aby się zapewnić o rzetelności znalezionej summy, trzeba powtórzyć dodawanie, uskuteczniając je w porządku odwrotnym poprzedzającego. W naszym przykładzie dodawaliśmy idąc z dołu do góry, dodajmyż znowu idąc z góry na dół, i mówiąc: 9 i 7 16; a 8, 24; a 6, 30; a 5, 35. Otrzymując tę samą summę 35 rub., wnosimy że dokładna. To drugie działanie, którem sprawdzamy pierwsze, nazywa się *próba*. Uważajmy dobrze że próba

nie jest dowodem dokładności rachunku; bo trzebaby jeszcze próby na próbę. Daje ona tylko prawdopodobieństwo, nie zaś pewność, że otrzymany wynik jest dokładny.

8. Zajmijmy się teraz dodawaniem liczb jakichkolwiek.

Uważajmy że, aby znaleźć summę liczb jakichkolwiek, dosyć jest oczywiście dodać osobno ich jedności, dziesiątki, sta, etc. i potem zjednoczyć te cząstkowe summy. To pokazuje że trzeba naprzód napisać liczby jedne pod drugiemi tak aby cyfry, wyrażające jedności tego samego rzędu, stały w jednej kolumnie; potem podkreślić i dodać jedności każdej kolumny.

Niech będą do dodawania liczby 340, 5621, 1005, 12.

Piszemy te liczby jako następuje:

$$\begin{array}{rr} & 340 \\ & 5621 \\ & 1005 \\ & 12 \\ \cline{2-2} \text{summa} & 6978 \end{array}$$

Podkreśliwszy ostatnią liczbę, dodajemy jedności proste, sposobem już wiadomym, to jest mówiąc: 1 i 5, 6; a 2, 8. Piszemy 8 jedności na miejscu jedności, i przechodzimy do kolumny dziesiątków. Tu znowu mówimy: 4 i 2, 6; a 1, 7. Piszemy cyfrę 7 dziesiątków na miejscu dziesiątków, i przechodzimy do kolumuy set. Summa set jest 9; piszemy tę cyfrę 9 na właściwem miejscu, i nakoniec przechodzimy do kolumny tysięcy która daje summę 6 tysięcy. Znajdujemy tym sposobem że 6978 jest summą liczb zadanych.

W powyższym przykładzie, summa jedności każdej kolumny nie przewyższa 9; dlatego dodawanie odbywa się łatwo, i obojętnem jest zaczynać je od kolumny z prawej strony albo z lewej.

Ale, niech będą teraz do dodawania liczby 809, 8765, 5908, 9612.

Piszemy je, jako poprzednio :

	809
	8765
	5908
	9612
Summa	25094

Poczem, zaczynając od jedności prostych, dodajemy pierwszą kolumnę mówiąc: 9 i 5, 14; a 8, 22; a 2, 24. Ta summa 24 jedności prostych stanowi 2 dziesiątki i 4 jedności. Piszemy cyfrę 4 na miejscu jedności, a *zatrzymujemy* 2 dziesiątki aby je złączyć z dziesiątkami kolumny następującej.

Przechodzimy do kolumny dziesiątków i mówimy: *zatrzymka* 2 a 6 czynią 8, a 1, 9; 9 jest summą dziesiątków, piszemy więc cyfrę 9 na miejscu dziesiątków.

Przechodzimy do kolumuy set i mówimy: 8 i 7, 15; a 9, 24; a 6, 30. Owoż, 30 set stanowią 3 tysiące; piszemy tedy 0 w rzędzie set, aby zachować ich miejsce; a zatrzymujemy 3 tysiące do złączenia z tysiącami następującej kolumny.

Przychodząc nakoniec do kolumny tysięcy, mówimy: zatrzymka 3 a 8, 11; a 5, 16; a 9, 25. Te 25 tysięcy stanowią 2 dziesiątki tysięcy i 5 tysięcy. Więc piszemy 5 na miejscu tysięcy a 2 po lewej stronie tej cyfry.

Tak otrzymana liczba 25094, jest summą liczb zadanych. — Ale dla pewności, trzeba zawsze sprawdzić rachunek próbą którąśmy pokazali.

Uwaga. W praktyce wykonywa się dodawanie mówiąc krótko: 9 i 5, 14; a 8, 22; a 2, 24. Piszę 4 a zatrzymuję 2; 2 i 6, 8; a 1, 9; piszę 9; 8 i 7, 15; a 9, 24; a 6, 30; piszę 0 i zatrzymuję 3. 3 i 8, 11; a 5, 16; a 9, 25. Piszę 25.

9. Z tego wszystkiego wynika następujące prawidło dodawania:

Aby dodać ilekolwiek liczb, pisze się jedne pod drugiemi, tak żeby jedności tego samego rzędu stały w jednej kolumnie, i podkreśla się ostatnią liczbę; potem, zacząwszy od prawej strony *dadaje się liczby każdej kolumny następnie i, pod linijką, pisze się jedności rzędu tej kolumny, a jej dziesiątki odnosi się do kolumny następującej.*

10. Dla zastosowania tego prawidła, i zarazem jako ćwiczenie rozumowania i biegłości rachunku, dajemy następujące kilka zagadnień.

Zagadnienie II. *Pewien kupiec nakupił towarów za* 170820 *zł. Przewóz tych towarów kosztował* 12976 *zł. Cła wynosiły* 8541 *zł. Za straż i dozór* 157 *zł. Różne wydatki w drodze uczyniły* 1809 *zł. Zostało jeszcze kupcowi* 13987 *zł. Ileż kupiec wydał pieniędzy, a ile miał przed wydatkiem?*

Chcąc wiedzieć ile kupiec wydał pieniędzy, piszemy wydatki jeden pod drugim, i dodajemy :

$$\begin{array}{lr} & 170820 \\ & 12976 \\ & 8541 \\ & 157 \\ & 1809 \\ \hline \text{Summa} & 194303 \end{array}$$

Znajdujemy że kupiec wydał 194303 zł.

Dodając do tej summy pozostałe pieniądze 13987, będziemy mieli :

$$\begin{array}{r} 194303 \\ 13987 \\ \hline 208290 \end{array}$$

Co pokazuje że kupiec miał przed wydatkiem summę 208290 zł.

Zagadnienie II. *Europa liczy* 235 *milionów mieszkańców, Azya* 400 *milionów, Afryka* 60 *milionów, Ameryka* 50 *milionów, a Oceania* 20 *milionów. Jaka jest ludność całej ziemi?*

Aby odpowiedzić na to pytanie, piszemy liczby jedne pod drugiemi, i dodajemy :

	235
	400
	60
	50
	20
Summa	765

Ludność całej ziemi jest 765 milionów mieszkańców.

ZAGADNIENIE III. *Trzy osoby podzieliły się pewnym majątkiem w taki sposób: pierwsza osoba dostała* 12800 *tal.*; *druga wzięła* 1867 *tal. więcej niż trzecia*; *a ta ostatnia* 2456 *więcej niż pierwsza. Ileż wzięła każda, a ile cały majątek wynosił?*

ROZWIĄZANIE. Ponieważ trzecia osoba dostała 2456 tal. więcej niż pierwsza, a zaś pierwsza otrzymała 12800 tal. więc oczywiście, dodawszy te dwie liczby, będziemy wiedzieli ile trzecia osoba otrzymała.

Wykonywając dodawanie, mamy:

12800
2456
15256

Znaleziona summa 15256 tal. jest działem trzeciej osoby. Następnie, ponieważ druga osoba wzięła 1867 tal. więcej niż trzecia, a ta ostatnia, jakośmy dopiero co znaleźli, otrzymała 15256 tal.; więc dział drugiej osoby jest summą liczb 15256 i 1867. Dodając je, znajdziemy 17123 tal. na dział drugiej osoby.

Wiedząc teraz ile każda osoba dostała w podziale, jeśli dodamy trzy działy, ich summa okaże ile cały wynosił majątek.

Wykonywając to dodawanie, mamy:

dział *pierwszej*	osoby	12800
dział *drugiej*	»	17123
dział *trzeciej*	»	15256
	Summa	45179

Było więc 45179 tal. całego majątku.

ZAGADNIENIE IV. *Pewny chłopiec urodził się roku* 1807, *dnia*

18 *stycznia. W lat* 9 *miesięcy* 8 *dni* 12 *poszedł do szkół. Ukończył nauki za lat* 8 *miesięcy* 10 *dni* 15. *Po* 3 *miesiącach i* 8 *dniach, pojechał do uniwersytetu w którym przebył lat* 3 *miesięcy* 9 *i dni* 27. *Nareszcie, po latach* 6, *miesiącach* 6 *i dniach* 11, *ożenił się. W którymże to roku miesiącu i dniu miało miejsce?*

Odpowiedź nie trudna; potrzeba tylko pewnej ostrożności. Trzeba naprzód wyrazić nie datę ale czas upłyniony, i oznaczyć miesiące liczbą porządku w jakim idą, a potem dopiero dodawać wszystkie liczby, jako wzór pokazuje.

lata	miesiące	dnie
1806	0	17
9	8	12
8	10	15
	3	8
3	9	27
6	6	11
1835	2	30

Napisaliśmy naprzód czas upłyniony do dnia urodzenia chłopca, to jest lat 1806 dni 17 ery chrześciańskiej, i pod tą liczbą położyliśmy wszystkie inne lata wskazane zagadnieniem. Dodawszy dnie, znaleźliśmy 90 dni. Aby je zamienić na miesiące trzeba wiedzieć jaki jest ostatni miesiąc upłyniony. Owoż, dodając miesiące, znajdujemy 36 miesięcy, co właśnie czyni 3 lata. To pokazuje że nasze 90 dni liczą się od początku roku i czynią miesiące *styczeń* i *luty*. Tu mała zachodzi trudność. Ile wziąć dni na miesiąc luty? Aby odpowiedzieć na to pytanie, dodajmy kolumnę lat, z zatrzymką 3 lat pochodzącą ze 36 miesięcy, i znajdujemy lat 1835. Ztąd wnosimy że zaczynający się rok 1836 jest *przestępny* (1), zatem miesiąc luty ma dni 29. Bierzemy tedy, z 90 dni, 31 na styczeń a 29 na luty, i pozostałe

(1) Według kalendarza *juliańskiego* (Juliusza Cezara) rokiem *Przestępnym* nazywa się ten którego data jest podzielna przez 4: dlatego też rok 1836 jest przestępny. Na mocy reformy *gregoryańskiej* (Papieża Grzegorza XIII w roku 1582), rok wyrażający liczbę wieków niepodzielną przez 4 nie jest przestępny, jako 1900.

30 dni kładziemy w kolumnie dni. Poczem, piszemy 2 w kolumnie miesiący, a zaś 1835 w kolumnie lat.

Wynika ztąd że chłopiec w mowie będący ożenił się dnia 31 Marca 1836 roku.

Cwiczenia.

I. Gwiazdy gołem okiem widzialne klassują się na sześć rzędów wedle blasku: najwięcej jaśniejące nazywają się gwiazdami *pierwszej wielkości* albo pierwszego rzędu, i jest ich około 20; drugi rzęd zawiera 65; trzeci 190; czwarty 425; piąty 1100; szósty 3200. Gwiazdy rzędów następujących nazywają się teleskopnemi, bo tylko za pomocą teleskopu mogą być widziane. Jaka jest liczba gwiazd gołem okiem widzialnych.

Odpowiedź. *Około* 5000.

II. Pewien podróżny wyjechał z Polski dnia 1 Maja 1832 roku, i za dni 5 stanął w Paryżu. Przepędził w tem mieście rok i 2 miesiące. Pojechał potem do Londynu, gdzie zabawił 3 miesiące i dni 20. Poczem w Ostendzie przepędził 6 tygodni. Ztamtąd udał się do Rzymu, gdzie stanął za dni 24, i przepędziwszy tam rok i 6 niedziel, wrócił do Polski, gdzie się dostał za dni 15. Któregoż dnia miesąca i roku przyjechał?

Odpowiedź. *Dnia* 26 *Lutego* 1835.

III. Trzech ludzi podzieliło się pewną summą pieniędzy. Pierwszy dostał 1860 zł.; drugi 50 zł. więcej od pierwszego; a trzeci tyle ile dwaj pierwsi, i zostało 3 zł. Ileż było pieniędzy?

Odpowiedź. 7543 *zł.*

ODCIĄGANIE albo ODEJMOWANIE.

11. Określenie. *Odciąganie jestto działanie za pomocą którego znajdujemy przewyżkę jednej liczby nad drugą.*

Albo to samo innemi słowy: *Od jednej liczby odciągnąć drugą jestto znaleźć trzecią liczbę któraby dodana do drugiej wydała pierwszą.*

Wynik z odciągania nazywa się *resztą* albo *różnicą*, albo jeszcze *zbytkiem*.

I tak, 5 odciągnięte od 9 daje resztę 4; bo dodając 4 do 5 znajdujemy 9.

Oczywiście większa z dwóch liczb danych jest summą mniejszej liczby i reszty. Ztąd wynika że

Celem odciągania jest, mając daną summę dwóch części i jedną z tych części, znaleźć drugą część.

Znak odciągania jest — i czyta się *mniej*. I tak 9 — 5 znaczy 9 mniej 5.

12. Odciągauia liczb iednocyfrowych trzeba się nauczyć na pamięć i wiedzieć odrazu że np. odciągając 5 od 9 zostaje 4, czyli, jako się mówi przez skrócenie, 5 od 9, 4. Podobnie 8 od 17, 9; 7 od 12, 5: 8 od 15, 7.

13. Przejdźmy teraz do odciągania liczb złożonych z wielu cyfer i uważajmy że, aby otrzymać różnicę dwóch liczb, dosyć jest oczywiście odciągnąć jedności, dziesiątki, sta, etc. mniejszej liczby, od jedności, dziesiątków, set, etc. większej, jeśli te odciągania są możebne. To pokazuje że, w tym przypadku, dosyć jest napisać mniejszą liczbę pod większą tak aby cyfry, wyrażające jedności tego samego rzędu, stały w jednej kolumnie; potem podkreślić, i pod linijką napisać różnice liczb każdej kolumny.

Niech będzie naprzykład liczba 56089, od której chcemy odciągnąć 4032.

Mamy:
$$\begin{array}{r} 56089 \\ 4032 \\ \hline 52057 \end{array}$$

Napisawszy liczby jakośmy powiedzieli, odciągamy jedności proste mówiąc: 2 od 9 zostaje 7; cyfrę 7, która wyraża jedności szukanej reszty, piszemy pod linijką w kolumnie jedności. Przechodzimy do kolumny dziesiątków i mówimy: 3 od 8, 5; piszemy cyfrę 5 na miejscu dziesiątków. Idziemy do kolumny set; aże dane liczby nie mają set, piszemy cyfrę 0 na miejscu set, i przechodzimy do kolumny tysięcy mówiąc: 4 od 6, 2; piszemy cyfrę 2 na miejscu tysięcy. Nakoniec, w kolumnie dziesiątków tysięcy, niema nic do odjęcia od 5 dziesiątków tysięcy; piszemy więc cyfrę 5 na miejscu dziesiątków tysięcy.

Działanie skończone, i szukana reszta jest 52057.

14. Przypadek ogólny odciągania liczb jakichkolwiek przywodzi się do poprzedzającego.

Dajmy że trzeba odciągnąć 4276 od 5038.

$$\begin{array}{lr} & 5038 \\ & 4276 \\ \hline \text{Reszta} & 762 \end{array}$$

Napisawszy liczby jako poprzednio, i podkreśliwszy, odciągamy 6 jedności prostych od 8 jedności, i resztę 2 piszemy na miejscu jedności.

Przechodzimy do kolumny dziesiątków. Tu trzebaby odciągnąć 7 dziesiątków liczby niższej od 3 dziesiątków liczby wyższej; a to odciąganie niemożebne. Aby trudność usunąć, uważajmy że, jeśli dodamy 10 dziesiątków do liczby większej, odciąganie 7 dziesiątków od 13 dziesiątków stanie się możebnem; i reszta się nie zmieni, byle tylko dodano także 10 dziesiątków do liczby mniejszej. Jakoż, znaleziona tym sposobem reszta, dodana do liczby mniejszej powiększonej o 10 dziesiątków, wydaje liczbę większą także powiększoną o 10 dziesiątków; zatem, dodana do liczby mniejszej bez powiększenia, wyda liczbę większą bez powiększenia: więc jest szukaną resztą. To zrozumiawszy dobrze, odciągamy dziesiątki mówiąc: 7 od 3 nie można, dodaję 10 dziesiątków do 3, i mówię 7 od 13, 6; piszę cyfrę 6 na miejscu dziesiątków a *zatrzymuję* 10 dziesiątków czyli 1 sto, aby je dołączyć do set liczby mniejszej.

Przechodzimy do kolumny set, i mówimy: *zatrzymka* 1 sto a 2, to 3; od 0 odjąć 3 nie można. Dodajemy znowu 10 set czyli 1 tysiąc, do liczby większej i do mniejszej, aby nie zmienić reszty, i mówimy: 3 od 10, 7; piszemy 7 w kolumnie set, a *zatrzymujemy* 1 tysiąc. Nakoniec przychodzimy do kolumny tysięcy, i mówimy: 1 z *zatrzymki* a 4, 5; od 5, 0.

Niema potrzeby pisać zera po lewej stronie ostatniej cyfry 7, i działanie skończone.

Otrzymujemy tym sposobem szukaną resztę 762.

Uwaga. Aby uczynić możebem odciąganie liczb każdej kolumny, dodajemy 10 jedności rzędu tej kolumny. Liczba 10 jest *dostateczna*, bo liczby do odciągania w kolumnie mogą być najwięcej 10. Nadto liczba 10 jest *konieczna*, bo oczywiście mniej niż 10 do liczby mniejszej w kolumnie dodać nie można.

15. Ztego wszystkiego wynika następujące prawidło odciągania.

Aby znaleźć różnicę dwóch liczb, pisze się mniejszą pod większą tak aby cyfry, wyrażające jedności tego samego rzędu, stały w jednej kolumnie, i podkreśla się mniejszą liczbę; potem, zaczynając od prawej strony, odciąga się każdą cyfrę liczby niższej od odpowiedającej cyfry liczby wyższej, i pisze się resztę pod linijką. Gdy odciąganie cząstkowe jest niemożebne, dodaje się 10 *do cyfry liczby wyższej; ale po odciąganiu, aby się reszta nie zmieniła, dodaje się jedność do cyfry liczby niższej w kolumnie następującej.*

16. Dla zastosowania tego prawidła, i nabycja wprawy rachunku, odciągnijmy 3929586 od 5007890.

Piszemy liczby jako wzór pokazuje:

$$\begin{array}{r} 5007890 \\ \underline{3929586} \\ 1078304 \end{array}$$

i odciągamy, mówiąc: 6 od 10, 4; zatrzymuję 1: 1 a 8, 9; od 9, 0: 5 od 8, 3: 9 od 17, 8; zatrzymuję 1: 1 a 2, 3; od 10, 7; zatrzymuję 1: 1 a 9, 10; od 10, 0; zatrzymuję 1: 1 a 3, 4; od 5, 1. Szukana reszta jest 1678304.

Uwaga. Dobrze jest wykonywać odciąganie przez dodawanie. I tak, aby znaleźć resztę z odciągania *np.* 8 od 17, zamiast mówić 8 od 17, 9; można mówić 8 do 17, 9, dodając myślą do 8 naprzód 2 co daje 10, a potem 7 co daje 17,

W handlu gdy, kupując jaki towar np. za 3 ruble 27 kopiejek, daje się kupcowi 4 ruble; kupiec kładzie te pieniądze na kantorze i mówi, wskazując przedany towar, 3 ruble 27 kopiejek, a 23 kopiejek (które dokłada) czynią 3 ruble i pół, a półtynnik to 4 ruble. Kupujący zabiera zapłacony towar, a kupiec kładzie 4 ruble do szuflady.

Tak czyniąc, wykonywa się naocznie odciąganie i zarazem jego próbę.

Uwaga ogólna. Z przyczyny zatrzymek, odciąganie jako dodawanie powinno się wykonywać zaczynając od prawej strony; bo tym sposobem dwa działania odrazu uskutecznić można. Gdyby zaczęto działanie od lewej strony, a odciągania cząstkowe nie były możebne, rachunek byłby daleko dłuższy.

16. Próba odciągania. Robi się próba odciągania dodając resztę do mniejszej liczby; jeśli otrzymana summa wydaje liczbę większą, wtedy jest prawdopodobieństwo że rachunek dobrze wykonany.

Z teoryi odciągania wynika że:

Różnica dwóch liczb nie zmienia się, gdy się powiększa albo zmniejsza obie liczby, tą samą liczbą.

17. Następujące zagadnienia, które rozwiązujemy ze wszystkiemi szczegółami, wyjaśnią resztę trudności, jeśliby jakie pozostały.

Zagadnienie V. *Pewna osoba miała* 170 *zł. i* 5 *gr., a wydała* 87 *zł. i gr.* 26; *ileż jej zostało?*

Piszemy naprzód summę którą osoba posiadała, a pod tą summą wydatek, i podkreśliwszy, odciągamy jako wzór pokazuje.

$$\begin{array}{rr} 170^{\text{zł.}} & 5^{\text{gr.}} \\ 87 & 26 \\ \hline 82^{\text{zł.}} & 9^{\text{gr.}} \end{array}$$

Zaczynając od prawej strony widzimy zaraz, że nie można odciągnąć 26 gr. od 5 gr. Ale, uważając że w następującej kolumnie są złote, dodajemy 1 złoty czyli 30 gr. do 5 gr., co razem czyni 35 gr. i odciągamy 26 gr. od 35 gr.; resztę 9 gr. piszemy w kolumnie groszy, a zatrzymujemy 1 zł. Przechodzimy do kolumny złotych, i mówimy 1 (złoty z zatrzymki) a 7, to 8; od 10, 2: nakoniec 1 a 8, 9; od 17, 8.

Znajdujemy, tym sposobem, że osobie rzeczonej zostało 82 zł. 9 gr.

Zagadnienie VII. *Pewien bankier włożył do kassy raz* 12567 *duk.* 15 *zł.* 20 *gr.; drugi raz* 15847 *duk.* 5 *gr.; trzeci raz* 10896 *duk.* 10 *zł.* 10 *gr. Z tego wydał raz* 24806 *duk.* 6 *zł.* 20 *gr.; drugi raz* 6014 *duk.* 3 *zł.* 25 *gr. Ilez w kassie zostało?*

Dodajemy naprzód pieniądze które bankier do kassy włożył, mamy:

	12567d.	15zł.	20gr.
	15847	»	5
	10896	10	10
Summa	39311d.	8zł.	5gr.

Uważając że 35 gr. czynią 1 zł. i 5 gr. piszę 5 gr. w kolumnie groszy, a zatrzymuję 1 zł. Dodaję zatrzymkę 1 zł. do kolumny złotych i znajduję 26 zł. co czyni 1 dukat i 8 zł. licząc 18 zł. na dukat. Piszę 8 zł. w kolumnie złotych, a zatrzymuję 1 dukat. Przechodzę nakoniec do kolumny dukatów i, dodając zatrzymkę 1 duk. znajduję 39311 dukatów.

To zrobiwszy, dodaję wydatek bankiera, i podobnie otrzymuję:

	24806d.	6zł.	20gr.
	6014	3	25
Summa	30820d.	10zł	15gr.

Jeśli teraz odciągniemy wydatek 30820 duk. 10 zł. 15 gr., od summy 39311 duk. 8 zł. 5 gr. którą bankier włożył do kassy, dowiemy się ile pozostało w kassie.

Ten rachunek, wykonany sposobem już wyłożonym, daje:

	39311d.	8zł.	5gr.
	30820	10	15
Reszta	8490d.	15zł.	20gr.

Pozostało więc w kassie bankiera 8490 duk. 15 zł. 20 gr.

Zagadnienie VII. *Pewna osoba ma dochody: z jednych dóbr* 6254 *talarów i* 25 *groszy; z drugich* 3814 *talarów* 4 *złote* 20 *groszy. Kamienica w Warszawie przynosi jej* 2010 *talarów* 5 *zł.* 10 *gr. Płaci podatku* 1015 *tal.* 5 *zł.* 5 *gr. Spłaca dług rocznie* 7645 *tal.* 3 *zł.* 25 *gr. Nadto płaci procent* 1871 *tal.* 2 *zł.* 24 *gr. Jaki jest czysty dochód tej osoby?*

Dodaję naprzód dochody, i otrzymuję:

	6254tal.		25gr.
	3814	4zł.	20
	2010	5	10
Summa	12079tal.	4zł.	25gr.

Dodaję potem wydatki, i znajduję:

	1015 tal.	5 zł.	5 gr.
	7645	3	25
	1871	2	24
Summa	10532 tal.	5 zł.	24 gr.

Odciągając teraz summę wydatków 10532 tal. 5 zł. 24 gr. od summy dochodów 12079 tal. 4 zł. 25 gr. znajduję

	12079 tal.	4 zł.	25 gr.
	10532	5	24
Reszta	1546 tal.	5 zł.	1 gr.

Więc czysty dochód tej osoby jest 1546 tal. 5 zł. 1 gr.

Zagadnienie VIII. *Ojciec urodził się dnia* 18 *stycznia* 1807 *roku, a syn dnia* 15 *maja* 1846 *roku. O ileż syn jest młodszy od ojca?*

Aby rozwiązać zadane zagadnienie, uważam że styczeń jest pierwszym a maj piątym miesiącem roku, i piszę naprzód datę urodzenia ojca, tak aby lata miesiące i dnie sobie odpowiedały; potem odciągam jako już powiedziano. Co daje:

	rok.	mies.	dnie.
	1846	5	15
	1807	1	18
Różnica	39 lat	3 m.	27 d.

Znajduję więc że syn jest młodszy od ojca o lat 39, miesięcy 3 i dni 27.

Ćwiczenia.

I. Mikołaj Kopernik, sławny astronom polski, który pierwszy dowiódł że nie słońce i gwiazdy obracają się około ziemi, jako mniemali starożytni, ale przeciwnie ziemia i inne planety obracają się około słońca, urodził się dnia 19 Lutego 1473 roku, w Toruniu, a umarł dnia 23 Maja 1543 roku w Frauenburgu. Ileż lat żył?

Odpowiedź. 70 lat 3 miesiące i 4 dni.

II. Galileusz, sławny uczony włoski, urodził się w Pizie w Italii, roku 1564, a umarł 1642 roku. Ileż lat żył?

Odpowiedź. 78.

III. Pewna osoba urodziła się roku 1764, 19 Kwietnia, o godzinie 6 rano; żyła lat 87, miesięcy 10 dni 20 i godzin 15. Którego roku, miesiąca, dnia i godziny umarła? (Pamiętać o latach przestępnych).

IV. Najwyższa góra na ziemi Dawalagiri (pasmo gór Himalaia w Azyi) ma 8588 metrów (26438 stóp) wzniesienia ponad poziom morza. Biała góra, najwyższa w Europie, ma 4810 metrów (14807 stóp) wzniesienia. O ileż pierwsza przewyższa drugą?

V: Znaleźć dwie liczby których summa czyni 54 a różnica 36.

Odpowiedź. 45 i 9.

MNOŻENIE.

18. Określenie. *Mnożenie jednej liczby przez drugą jestto działanie, za pomocą którego tworzy się trzecią liczbę z tyle razy pierwszej ile druga ma jedności.*

Liczba którą się mnoży nazywa się *mnożną*, a ta przez którą się mnoży, *mnożnikiem* ; wynik z mnożenia, nazywa się *wieloczynem* albo iloczynem. (1)

Mnożnik i mnożna nazywają się także *czynnikami* wieloczynu. Wynika ztąd że, *aby otrzymać wieloczyn dwóch liczb, trzeba powtórzyć mnożnę tyle razy ile mnożnik ma jedności i zrobić summę.*

I tak, aby pomnożyć 3 przez 2, trzeba powtórzyć 2 razy liczbę 3, co daje $3+3$, i dodać, co uczyni summę 6. W tym przykładzie 3 jest *mnożną*, 2 *mnożnikiem* a summa 6 *wieloczynem*. Liczby 2 i 3 są czynnikami liczby 6.

Znak mnożenia jest $\times$ albo tylko punkt . , położony między mnożną i mnożnikiem, jako $3\times2=6$, albo $3.2=6$; to się czyta : 3 pomnożone przez 2 równa się 6.

19. Aby umieć mnożyć wszelkie liczby, dosyć znać wieloczyny liczb jednocyfrowych pomnożonych jedna przez drugą ; to jest wiedzieć na pamięć że 6 razy 6 czyni 36 ; 5 razy 8 czyni 40 ; 9 razy 7 czyni 63, etc.

Te wieloczyny dziewięciu pierwszych liczb ułożono w pewnym porządku w tak zwaną *tablicę mnożenia*.

Tablica mnożenia tworzy się następującym sposobem :

Pisze się naprzód pierwsza linia liczb od 1 aż do 9, to jest:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

(1) Wolimy raczej *wieloczyn* niż *iloczyn* który się mięsza z *ilorazem*.

Potem, dodaje się każdą z tych liczb do siebie samej; to daje drugą linię liczb, które są wieloczynami liczb pierwszej linii pomnożonych przez 2, to jest:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Jeśli teraz do liczb ostatniej linii dodamy odpowiedne liczby pierwszej linii, otrzymamy wieloczyny liczb pierwszej linii pomnożonych przez 3, to jest:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Dodając podobnie liczby pierwszej linii do ostatnich wieloczynów, otrzymamy wieloczyny liczb pierwszej linii pomnożonych przez 4, to jest:

4, 8, 12. 16, 20, 24, 28, 32, 36.

I tak następnie, dodając zawsze liczby pierwszej linii do ostatnich wieloczynów, otrzymamy wszystkie wieloczyny liczb jednocyfrowych, pomnożonych jedna przez drugą, od 1×1, aż do 9×9.

Oto właśnie tablica tych wieloczynów:

TABLICA MNOŻENIA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Chcąc w tej tablicy znaleźć wieloczyn, np. 7 przez 6, bierzemy 7 w pierwszej kolumnie pionowej, a zaś 6 w pierwszej linii poziomej. Potem, zaczynając od 7, idziemy linią poziomą aż dojdziemy do kolumny na czele której stoi 6. Liczba 42, napisana w kratce spólnej kolumnie i linii poziomej, jest właśnie wieloczynem liczb 7 i 6.

Można jeszcze otrzymać ten sam wynik, biorąc liczbę 7 w pierwszej linii poziomej a zaś 6 w pierwszej kolumnie pionowej. W kratce która jest spólna kolumnie zaczynającej się od 7, i linii poziomej zaczynającej się od 6, znajduje się liczba 42, to jest szukany wieloczyn liczb 7 i 6.

Dla tej właśnie przyczyny, mówi się że tablica mnożenia ma dwa wejścia. Ale taki układ tablicy mnożenia, acz bardzo dowcipny, nie jest dogodny do uczenia początkujących. Ci którzy jeszcze nie umieją tablicy mnożenia, łatwo się jej nauczą sposobem niżej wskazanym.

Niema potrzeby pisać że raz 1 czyni 1, że raz 2 czyni 2, i t. d. Zaczynamy więc tablicę mnożenia od 2, i mówimy: 2 razy 2, czynią 4; 2 razy 3 czynią 6, i t. d. To wszystko piszemy jako następuje:

2 razy 2 = 4	4 razy 4 = 16	6 razy 9 = 54
2 » 3 = 6	4 » 5 = 20	6 » 10 = 60
2 » 4 = 8	4 » 6 = 24	—
2 » 5 = 10	4 » 7 = 28	7 razy 7 = 49
2 » 6 = 12	4 » 8 = 32	7 » 8 = 56
2 » 7 = 14	4 » 9 = 36	7 » 9 = 63
2 » 8 = 16	4 » 10 = 40	7 » 10 = 70
2 » 9 = 18	—	—
2 » 10 = 20	5 razy 5 = 25	8 razy 8 = 64
—	5 » 6 = 30	8 » 9 = 72
3 razy 3 = 9	5 » 7 = 35	8 » 10 = 80
3 » 4 = 12	5 » 8 = 40	—
3 » 5 = 15	5 » 9 = 45	9 razy 9 = 81
3 » 6 = 18	5 » 10 = 50	9 » 10 = 90
3 » 7 = 21	—	—
3 » 8 = 24	6 razy 6 = 36	10 razy 10 = 100
3 » 9 = 27	6 » 7 = 42	—
3 » 10 = 30	6 » 8 = 48	12 razy 12 = 144

Uwaga. Radzimy naszym uczniom aby, mając do mnożenia np 6 przez 8, wykonywali wieloczyn w porządku wskazanym, mówiąc 8 razy 6 czynią 48; nie zaś przekręcali, mówiąc 6 razy 8 czynią 48. Nadto, dopóty nie powinni uważać się za umiejących tablicę mnożenia, dopóki nie będą wiedzieli odrazu z jakich dwóch czynników składa się każdy wieloczyn tej tablicy; że np. 72 pochodzi z pomnożenia 9 przez 8; ze 36 pochodzi z pomnożenia 6 przez 6, albo z pomnożenia 9 przez 4 i t. d. Że wieloczyny tablicy zakończone na cyfrę 2 pochodzą z pomnożenia 4 przez 3, co czyni 12; albo z pomnożenia 8 przez 4, co czyni 32; albo pomnożenia 7 przez 6, co czyni 42; albo nareszcie z pomnożenia 9 przez 8, co czyni 72; i t. p.

Dla łatwiejszego zrozumienia teoryi mnożenia rozróżnimy trzy przypadki.

20. Pierwszy przypadek, *gdy mnożnik ma jedną tylko cyfrę.* Gdy mnożnik i mnożna są jednocyfrowe, mnożenie wykonywa się za pomocą tablicy mnożenia, którąśmy już wyłożyli. Teraz więc nie może być mowy tylko o mnożeniu liczby jakiejkolwiek przez liczbę jednocyfrową.

Niech będzie, jako przykład, liczba 8045 do pomnożenia przez 7. Ponieważ liczba 8045 jest summą 8 tysięcy 4 dziesiątków i 5 jedności, aby ją pomnożyć przez 7 dosyć jest oczywiście wziąć 7 razy każdą z jej części, to jest *pomnożyć każdą cyfrę mnożnej* 8045 *przez* 7, *i dodać cząstkowe wieloczyny.* Rachunek wykonywa się następującym sposobem:

$$\begin{array}{r} 8045 \\ 7 \\ \hline 56315 \end{array}$$

Pisze się naprzód mnożnę a pod nią mnożnik, i podkreśla się; potem, zaczynając od prawej strony, mnoży się mówiąc: 7 razy 5 jedności czynią 35 jedności, czyli 3 dziesiątki i 5 jedności; piszę cyfrę 5 jedności na miejscu jedności, a zatrzymuję 3 dziesiątki, aby je dodać do wieloczynu dziesiątków mnożnej przez mnożnik. Przechodzę do dziesiątków i mówię: 7 razy 4 czynią 28 a 3 (zatrzymka) to 31 dziesiątków, czyli 3 sta i 1 dziesiątek. Piszę 1 na miejscu dziesiątków a zatrzymuję

3 sta. Ale, ponieważ w tym przykładzie mnożna nie zawiera set, wieloczyn będzie miał tylko sta pochodzące z zatrzymki; piszę więc cyfrę 3 set na miejscu set, i przechodzę nakoniec do tysięcy, mówiąc: 7 razy 8 czynią 56, i piszę te dwie cyfry na lewej stronie cyfer już napisanych.

Tym sposobem znajduje się wieloczyn 56315.

21. Drugi przypadek, *gdy mnożnikiem jest jedność z zerami*.

Niech będzie do pomnożenia 567 przez 100.

Aby pomnożyć 567 przez 100, dosyć jest oczywiście dopisać *dwa* zera po prawej stronie tej liczby. Jakoż, pisząc 56700, posuwamy o *dwa* rzędy na lewo każdą cyfrę mnożnej; zatem, na mocy układu liczenia dziesiętnego, czynimy każdą część mnożnej 567 sto razy większą, to jest mnożymy tę liczbę przez 100. Więc wieloczyn liczby 567 przez 100 jest 56700.

Ztąd wnosimy że, *aby pomnożyć liczbę całkowitą przez jedność z zerami, dosyć jest tylko napisać te zera na prawej stronie mnożnej*.

22. Trzeci przypadek, *mnożnik i mnożna jakiekolwiek*.

Ten ogólny przypadek przywodzi się do dwóch poprzedzających, i zawiera całą teoryę mnożenia.

Niech będzie 5432 do pomnożenia przez 789. Mnożyć liczbę 5432 przez 789 jest ją wziąć 789 razy; czyli, co wychodzi na jedno, powtórzyć ją naprzód 9 razy, potem 80 razy, a nakoniec 700 razy, i dodać; to jest, pomnożyć mnożnę 5432 naprzód przez 9 potem przez 80 a nakoniec przez 700, i zrobić summę tych cząstkowych wieloczynów, która będzie szukanym wieloczynem.

Rachunek wykonywa się jako wzór pokazuje:

$$\begin{array}{r} 5432 \\ 789 \\ \hline 48888 \\ 43456 \\ 38024 \\ \hline 4285848 \end{array}$$

Pisze się mnożnik pod mnożną tak aby jedności tego samego rzędu sobie odpowiedały i, podkreśliwszy mnożnik, mnoży się naprzód mnożnę 5432 przez 9 jedności mnożnika, co daje, na mocy pierwszego prawidła, wieloczyn 48888; poczem przechodzi się do mnożenia przez 80, czyli przez 8 dziesiątków mnożnika. Owoż, jako wiemy, mnożyć mnożnę 5432 przez 80 znaczy ją wziąć 80 razy; ale 80 mnożnych jest oczywiście to samo co 10 razy 8 mnożnych, czyli to samo co 10 razy 8 razy mnożna; więc aby pomnożyć mnożnę 5432 przez 80 czyli przez 8 dziesiątków mnożnika, dosyć jest pomnożyć ją przez 8 a potem otrzymany wynik pomnożyć przez 10. To wszystko odbywa się odrazu, mnożąc tylko 5432 przez 8 i pisząc wieloczyn 43456 w rzędzie cyfry 8 dziesiątków mnożnika, to jest tak aby ostatnia cyfra tego wieloczynu stała pod cyfrą mnożącą 8.

Rozumując podobnie, widzimy łatwo że, aby pomnożyć mnożnę 5432 przez 700 czyli przez 7 set mnożnika, dosyć jest pomnożyć ją przez 7 i napisać wieloczyn 38024 w rzędzie cyfry 7 set mnożnika.

To zrobiwszy, dodajemy cząstkowe wieloczyny, i otrzymujemy szukany wieloczyn 4285848.

23. Z tego cośmy dotąd powiedzieli wynika ogólne prawidło mnożenia:

Aby pomnożyć liczbę jakąkolwiek przez liczbę złożoną z wielu cyfer, pisze się mnożnik pod mnożną tak aby cyfry wyrażające jedności tego samego rzędu sobie odpowiedały, i podkreśla się mnożnik; potem, zaczynając od prawej strony, mnoży się mnożnę, przez każdą następnie cyfrę mnożnika, i pisze się cząstkowy wieloczyn w rzędzie cyfry mnożącej; nakoniec dodaje sie te wszystkie cząstkowe wieloczyny, ich summa jest wieloczynem szukanym.

24. Dobrze jest teraz uważać szczególne przypadki mnożenia, w których działanie uprościć się może.

I tak, weźmy przykład w którym mnożna kończy się na zera; i niech będzie do mnożenia 567000 przez 24.

W tym razie, dosyć jest napisać mnożnik pod mnożną, tak aby ostatnia cyfra mnożnika stała pod ostatnią *znaczącą* cyfrą mnożnej a zera występowały, i wykonać mnożenie; a dopiero w otrzymanym wieloczynie napisać opuszczone zera mnożnej, jako poniżej wzór pokazuje:

```
 567000
   24
 ------
  2268
 1134
 --------
 13608000
```

Ten sposób mnożenia sam się usprawiedliwia. Jakoż, mnożąc 567 *tysięcy* mnożnej przez 24, powinniśmy na wieloczyn otrzymać *tysiące*; to właśnie wyrażamy dopisując do wieloczynu 13608 *trzy* opuszczone zera mnożnej.

25. Weźmy teraz przykład w którym mnożnik kończy się na zera, i niech będzie 708 do mnożenia przez 3600.

Dosyć jest pod mnożną napisać mnożnik tak aby jego zera występowały, wykonać mnożenie nie zważając na te zera, i dopiero w otrzymanym wieloczynie dopisać opuszczone zera mnożnika, jako wzór poniżej okazuje:

```
   708
    3600
  ------
  4248
 2124
 -------
 2548800
```

Rozumowanie w ogólnym przypadku użyte usprawiedliwia to mnożenie. Jakoż, mnożyć 708 przez 36 *set* jestto mnożyć 708 przez 36 i napisać otrzymany wieloczyn w rzędzie set. Cośmy właśnie zrobili, dopisując do tego wieloczynu *dwa* opuszczone zera mnożnika.

26. Weźmy nakoniec przykład mnożenia dwóch liczb zakończonych obie na zera, jako 78900 i 56000.

W tym przypadku, pisze się mnożnik pod mnożną tak aby ich ostatnie *znaczące* cyfry stały w jednym rzędzie, a zera występowały, i wykonywa się mnożenie jako wzór pokazuje.

$$
\begin{array}{r}
78900 \\
56000 \\
\hline
4734 \\
3945 \\
\hline
4418400000.
\end{array}
$$

To wszystko łatwo się usprawiedliwia. Jakoż, aby pomnożyć 78900 przez 56000 dosyć pomnożyć 78900 przez 56, i w znalezionym wieloczynie dopisać trzy zera. Ale wieloczyn 78900×56 otrzymuje się (24) mnożąc 789 przez 56 i dopisując dwa zera. Więc, aby znaleźć wieloczyn 78900 × 56000, dosyć pomnożyć 789 przez 56 i dopisać opuszczone zera mnożnej i mnożnika. Cośmy właśnie zrobili.

27. Kończymy teoryę mnożenia przerabiając jako ćwiczenie następujący przykład:

$$
\begin{array}{r}
890705 \\
203004 \\
\hline
3562820 \\
2672115 \\
1781410 \\
\hline
180816677820
\end{array}
$$

28. Liczba cyfer wieloczynu. — *Wieloczyn dwóch liczb ma* NAJWIĘCEJ *tyle cyfer ile jest w obydwóch liczbach, a* NAJMNIEJ *tyle mniej jedną.*

Niech będzie wieloczyn dwóch liczb 9876 × 567. Mnożna 9876, jako złożona ze *czterech* cyfer, jest mniejsza od 10000, a zaś mnożnik złożony ze *trzech* cyfer jest mniejszy od 1000. Zatem wieloczyn 9876 × 567 jest oczywiście mniejszy od wieloczynu 10000 × 1000, to jest mniejszy od liczby 10000000, która jest najmniejsza z liczb mających *osiem* cyfer. Więc ten wieloczyn ma najwięcej *siedem* cyfer, to jest *najwięcej* tyle ile jest w obydwóch liczbach.

Że istotnie może mieć tyle, tego dowodzi przykład 5×2=10.

Uważajmy powtóre że mnożna 9876, złożona ze czterech cyfer, jest większa od 1000; a zaś mnożnik 567 jest większy od 100. Zatem wieloczyn 9876 × 567 jest oczywiście większy od 1000 × 100, to jest wiekszy od liczby 100000, która jest najmniejsza z liczb mających *sześć* cyfer. Więc ten wieloczyn ma przynajmniej *sześć* cyfer, to jest *przynajmniej* tyle ile jest w obydwóch liczbach mniej jedną.

Uwaga. Potrzeba czasem znać dokładną liczbę cyfer wieloczynu dwóch liczb : dochodzi się do niej łatwo, uważając pierwsze cyfry tych liczb.

29. Próba mnożenia. — Można zrobić próbę mnożenia mnożąc mnożnik przez mnożnę; znaleziony tym sposobem wieloczyn powinien się zgadzać z już otrzymanym. Ale takie sprawdzenie rachunku wystawia na nowe błędy, a jest zanadto mozolne aby mogło być użyteczne. Damy później inną próbę w praktyce łatwą.

Powyższy sposób próby opiera się na następującem twierdzeniu :

30. *Wieloczyn dwóch liczb nie zmienia się gdy się przemienia porządek mnożenia tych liczb.*

To znaczy że, na przykład, wieloczyn liczb 4×3 równa się wieloczynowi 3×4. Aby tego dowieśdź, uważajmy że mnożyć 4 przez 3 jest powtórzyć 4 jedności 3 razy i dodać. Co się może uskutecznić pisząc 4 jedności, jedną obok drugiej, w linii poziomej, i powtarzając tę linię 3 razy; jako poniżej :

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Jeśli teraz dodamy te wszystkie jedności licząc je liniami *poziomemi*, otrzymamy wieloczyn 4 jedności pomnożonych przez 3 ; jeśli zaś dodamy te jedności biorąc je liniami *pionowemi*, otrzymamy wieloczyn 3 jedności, pomnożonych przez 4. Owoż, dodajemy zawsze tę samą liczbę jedności, zmieniając tylko porządek dodawania; więc dwa wieloczyny 4×3 i 3×4, wyrażające tę samą summę jedności, są równe.

31. Uwaga. Na pozór zdaje się rzeczą błahą i wcale niepotrzebną udowodniać że wieloczyny 4×3 i 3×4 są równe : bo któż nie wie że 3 razy 4 czyni 12 tak dobrze jako 4 razy 3. Na cóż więc dowodzić tego co samo

z siebie widoczne? Owoż, uważajmy że, z niewątpliwej równości wieloczynów 4×3 i 3×4, nie wynika konieczna i niezaprzeczalna równość wieloczynów 567×894 i 894×567, Możemy wprawdzie przewidywać przez podobieństwo, że tak jest istotnie ; ale dopóty nie mamy pewności dopóki jej nie dowiedziemy. Dlatego też dowodzenie powyższego twierdzenia było niezbędne.

Z tego twierdzenia wynika że, w mnożeniu dwóch liczb, można wziąć mnożnę za mnożnik, i nawzajem. Dla tej właśnie przyczyny mnożnę i mnożnik nazwano ogólnie *czynnikami*

32. Wieloczyn wielu czynników. Nazywa się *wieloczynem wielu liczb* wynik który się otrzymuje mnożąc pierwszą liczbę przez drugą, potem ich wieloczyn przez trzecią, następnie ten wieloczyn przez czwartą, i tak dalej aż do ostatniej. Na przykład, wieloczyn $12 \times 5 \times 10 \times 8$ znaczy że się naprzód mnoży 12 przez 5 co daje 60, potem 60 przez 10 co daje 600 które się mnoży przez 8 i daje 4800.

33. *Wieloczyn ilukolwiek czynników nie zmienia wartości gdy się przemienia porządek tych czynników.*

Niech będzie wieloczyn $12 \times 5 \times 10 \times 8 \times 36 \times 4$. Aby dowieśdź twierdzenia, dosyć tylko okazać że można przemienić porządek dwóch czynników sąsiednich, np. 10 i 8, to jest dosyć okazać że wieloczyny $12 \times 5 \times 10 \times 8 \times 36 \times 4$ i $12 \times 5 \times 8 \times 10 \times 36 \times 4$ są równe.

Owoż, wieloczyn $12 \times 5 \times 10$ jest oczywiście 10 razy większy od wieloczynu 12×5; jeśli więc pomnożymy oba wieloczyny przez 8, otrzymamy dwa nowe wieloczyny, z których pierwszy $12 \times 5 \times 10 \times 8$ będzie także 10 razy większy od drugiego $12 \times 5 \times 8$; zatem, mnożąc drugi wieloczyn przez 10, uczynimy go równym pierwszemu. Co okazuje że wieloczyny $12 \times 5 \times 10 \times 8$ i $12 \times 5 \times 8 \times 10$ są równe. Ztąd wnosimy że, mnożąc te wieloczyny równe, naprzód przez 36 a następnie przez 4, otrzymamy dwa wyniki równe; więc wieloczyny $12 \times 5 \times 10 \times 8 \times 36 \times 4$ i $12 \times 5 \times 8 \times 10 \times 36 \times 4$ są równe. Co właśnie dowodzi że, w wieloczynie ilukolwiek czynników, można przemienić miejsce dwóch sąsiednich, jako 10 i 8.

Łatwo teraz, podobnem rozumowaniem, okazać że czynnik 8 może przemienić miejsce z czynnikiem sąsiednim 5 albo z sąsiednim 36; a następnie z każdym innym. Więc każdy czynnik wieloczynu może wziąć miejsce każdego innego czynnika: czyli co to samo, że można przemienić miejsce czynników wieloczynu. Co było do dowodzenia.

Uwaga. Powyższe dowodzenie stosuje się także do wieloczynu dwóch czynników; dosyć tylko uważać że np. $3 \times 4 = 1 \times 3 \times 4$, etc.

34. Z dowiedzionego twierdzenia dwa ważne wypływają wnioski:

1°. *Aby pomnożyć wieloczyn kilku czynników przez daną liczbę, dosyć pomnożyć jeden z czynników przez tę liczbę.*

Niech będzie wieloczyn $36 \times 4 \times 8$ który chcemy pomnożyć przez 10. Powiedam że dosyć jest pomnożyć np. czynnik 4 przez 10. Jakoż, wskazujemy że dany wieloczyn ma być pomnożony przez 10 pisząc $36 \times 4 \times 8 \times 10$. (32). Ale wiemy że można, przemieniając miejsce czynników 4 i 10, sprowadzić je na początek, i wykonać ich wieloczyn; to jest że $36 \times 4 \times 8 \times 10 = 4 \times 10 \times 36 \times 8 = 40 \times 36 \times 8$. Więc $36 \times 4 \times 8 \times 10 = 36 \times 40 \times 8$. Co było do dowiedzenia.

2°. *Aby pomnożyć liczbę przez wieloczyn wielu czynników, dosyć wykonać mnożenia następne tej liczby przez czynniki wieloczynu.*

Niech będzie liczba 17 do pomnożenia przez wieloczyn 60 który się składa z czynników 2, 5, 6. Powiedam że dosyć pomnożyć 17 przez 2, potem otrzymany wieloczyn przez 5, a potem ten drugi wieloczyn przez 6. Jakoż, $17 \times 60 = 60 \times 17$; aże $60 = 2 \times 5 \times 6$, więc $17 \times 60 = 2 \times 5 \times 6 \times 17$, albo równe $17 \times 2 \times 5 \times 6$, przenosząc czynnik 17 z ostatniego miejsca na pierwsze. Co było do dowodzenia.

Z tych dwóch wniosków wynika oczywiste następstwo że, *w wieloczynie wielu czynników można zastąpić pewną liczbę tych czynników przez ich wieloczyn.* I tak, $2 \times 15 \times 12 \times 7 \times 5 = 30 \times 60 \times 7$.

35. Dla zastosowania mnożenia dajemy kilka zagadnień.

Zagadnienie IX. *Pewna osoba kupiła 25 łokci sukna po 36 zł. łokieć. Ileż zapłaciła?*

Ponieważ *jeden* łokieć sukna kosztuje 36 złotych, 25 łokci sukna będą kosztowały 25 razy 36 złotych. Więc, aby wiedzieć ile zapłacono za sukno, trzeba pomnożyć 36 złotych przez 25. Wykonawszy to mnożenie, jako wzór pokazuje

$$\begin{array}{r} 36 \\ 25 \\ \hline 180 \\ 72 \\ \hline 900 \end{array}$$

znajdujemy że osoba zapłaciła 900 złotych za sukno.

Uwaga. Rozumowanie, za pomocą którego rozwiązaliśmy zagadnienie, pokazuje że, chociaż w zagadnieniu mnożna i mnożnik są *mianowane*, w mnożeniu jednak mnożnik jest zawsze *liczbą oderwaną*. Nie mnożyliśmy albowiem 36 złotych przez 25 łokci, ale tylko powtórzyliśmy 36 złotych, czyli cenę jednego łokcia, tyle razy ile było łokci, to jest pomnożyliśmy 36 złotych przez liczbę oderwaną 25.

Mnożenie przez siebie dwóch liczb mianowanych nie ma żadnego sensu.

Zagadnienie X. 25 *robotników skończyło pewną robotę w* 14 *dniach: w ilu dniach jeden robotnik skończyłby tę samą robotę?*

Przypuszczając że ci 25 robotnicy jednakowo pracowali, jeden robotnik potrzebowałby oczywiście 25 razy więcej czasu niż wszyscy razem, do wykonania tej roboty. Pomnożywszy 14 dni przez 25, znajdziemy że jeden robotnik skończyłby rzeczoną robotę w dniach 350.

Zagadnienie XI. *Pewien kupiec kupił sztukę płótna długą* 120 *łokci, po* 4 *złote łokieć. Sprzedał* 80 *łokci po* 5 *złotych łokieć; a resztę po* 3 *złote łokieć. Ileż zarobił?*

Płótno kosztowało 4 zł. $\times$ 120 = 480 zł. Sprzedane 80 łokci, po 5 zł. łokieć, dały 5 zł. $\times$ 80 = 400 zł. Zostało 120 łokci, mniej 80 łokci, czyli 40 łokci; ta reszta sprzedana po 3 złote łokieć, dała 3 zł. $\times$ 40 = 120 zł. Sprzedane płótno dało 400 zł. + 120 zł. czyli 520 zł, aże kosztowało 480 zł. więc kupiec zarobił na niem 40 złotych.

Ćwiczenia.

I. Dowieśdź że, aby pomnożyć jedną summę liczb przez drugą summę liczb, dosyć pomnożyć każdą liczbę pierwszej summy przez każdą drugiej, i zrobić summę tych wieloczynów

II. Dowieśdź że wieloczyn z liczby 12345679 przez 9 i przez cyfrę jakąkolwiek składa się tylko z tej cyfry.

III. Dowieśdź że wieloczyn dwóch czynników maleje gdy się powiększa jeden czynnik a zmniejsza drugi tą samą liczbą, byle tylko czynnik powiększony przewyższał drugi czynnik dany.

IV. Światło przebiega 77000 mil na sekundę, a wiadomo że przychodzi do nas od Słońca w 8 minut 18 sekund. Jakaż jest odległość Słońca od Ziemi?

Odpowiedź, 38 346 000 mil.

V. Dzień zwyczajny, średni słoneczny, dzieli się na 24 godzin, godzina na 60 minut, minuta na 60 sekund. Ile dzień średni ma sekund?

Odpowiedź. 86 400 sekund.

VI. Rok *zwrotnikowy* (to jest przedział czasu między dwoma przejściami słońca przez punkt porównania wiosennego) zawiera prawie dokładnie 365 dni 5 godzin 48 minut 51 sekund. Ileż jest sekund w roku zwrotnikowym?

Odpowiedź. 315569931 sekund.

VII. Wiadomo że Olimpiady są okresy ze 4 lat, z których pierwsza zaczyna się 776 lat przed erą chrześciańską. Alexander Wielki umarł pierwszego roku 114ej Olimpiady. Znaleźć datę jego śmierci według ery chrześciańskiej.

DZIELENIE.

36. Określenie. *Dzielenie jednej liczby przez drugą jestto działanie za pomocą którego znajdujemy ile razy pierwsza liczba zawiera drugą.*

Liczba którą się dzieli nazywa się *dzielną*, a ta przez którą się dzieli *dzielnikiem*; wynik z dzielenia nazywa się *ilorazem*.

Znak dzielenia jest : np. 12 : 4, to się czyta 12 *podzielone przez* 4. Znajdujemy łatwo że 4 mieści się 3 razy w 12; bo razy 4 czyni 2. Liczba 12 jest tutaj dzielną, 4 dzielnikiem, a 3 ilorazem

Ale nie wszystkie liczby tak się dzielić mogą. Jakoż, jeśli chcemy podzielić 17 przez 5, widzimy zaraz że 3 razy 5 czyni 15, co jest mniej niż 17; a zaś 4 razy 5 czyni 20, co znowu więcej niż 17. To pokazuje że szukany iloraz, to jest liczba która mnożąc dzielnik 5 ma wydać dzielnę 17, jest większy od 3, ale mniejszy od 4. Więc ten iloraz składa się z części całkowitej, 3 i z pewnego ułamka o którym później będzie mowa. Otóż, dzielenie liczb całkowitych ma właśnie za cel wyznaczenie części całkowitej ilorazu; i dlatego, *dzielić jedną liczbę całkowitą przez drugą jestto znaleźć ile razy* NAJWIĘCEJ *pierwsza zawiera drugą.*

I tak, dzielić 17 przez 5 jest szukać ile razy najwięcej 5 mieści się w 17. Widzimy odrazu że 5 mieści się 3 razy w 17; bo 3 razy 5 czyni 15, i jeszcze zostaje 2. Liczba 17, jako już wiemy, nazywa się dzielną, a 5 dzielnikiem; liczba całkowita 3 nazywa się *ilorazem niezupełnym* albo po prostu *ilorazem*, a liczba 2 *resztą dzielenia.*

37. Wynika ztąd że *dzielna równa się wieloczynowi z dzielnika przez iloraz więcéj resztą.*

I tak, $17 = 5 \times 3 + 2$.

Reszta jest *zero*, gdy dzielna zawiera dzielnik dokładną liczbę razy: wtedy dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez iloraz, jako $20 = 5 \times 4$.

38. Można jeszcze dać inne określenie dzielenia, i powiedzieć że, *dzielić jedną liczbę przez drugą jestto rozdzielić pierwszą na tyle części równych ile druga ma jedności.*

To drugie określenie jest następstwem pierwszego. Jakoż, niech będzie do podzielenia liczba 36 przez 4. Szukany iloraz jest 9, bo 9 razy 4 czyni 36. Zatem

mamy $36 = 4 \times 9$; ale także $36 = 9 \times 4$.

Owoż, ostatnia równość pokazuje że *iloraz* 9 mieści się dokładnie 4 razy w dzielnej 36; więc ten iloraz jest *czwartą* częścią dzielnej. To dowodzi że dzielić 36 przez 9 jest to samo co rozdzielić 36 na 4 części równe, to jest na tyle części równych ile dzielnik ma jedności.

Dla łatwości wykładu dzielenia rozróżnimy *trzy* przypadki.

39. PIERWSZY PRZYPADEK. *Dzielnik ma jedną tylko cyfrę.* Gdy dzielnik i iloraz mają tylko jedną cyfrę, wtedy iloraz znajduje się odrazu za pomocą tablicy mnożenia. I tak, jeśli chcemy podzielić 63 przez 9, znajdujemy zaraz iloraz 7; bo wiemy że 7 razy 9 czyni 63. Jeśli znowu chcemy podzielić 44 przez 8, widzimy łatwo że 8 mieści się w 44 najwięcej 5 razy; bo 44 jest większe niż 5 razy 8 czyli 40, ale mniejsze niż 6 razy 8 czyli 48. Więc prawdziwy iloraz jest większy od 5, ale mniejszy od 6; zatem 5 jest jego częścią całkowitą.
Gdy, poprzestając na części całkowitej, bierzemy 5 na iloraz liczby 44 podzielonej przez 8, wtedy mówi się że iloraz 5 jest *przybliżony* PRZEZ NIEDOSTATEK, *na mniej niż jedność.*

Gdy zaś bierzemy 6 na ten iloraz, wtedy mówi się że iloraz 6 jest *przybliżony* PRZEZ ZBYTEK, *na mniej niż jedność.*

Nie mając nic do powiedzenia o ilorazach które się wyznaczają wprost za pomocą tablicy mnożenia, bo każdy powinien łatwo umieć je znajdować, przechodzimy do dzielenia liczby jakiejkolwiek przez liczbę jednocyfrową.

Niech będzie na przykład liczba 38152 do podzielenia przez 8.

Widzimy łatwo że szukany iloraz ma dziesiątki, bo oczywiście wieloczyn z dzielnika 8 przez 10, to jest 80, mieści się w dzielnej 38152. Ten iloraz, jakąkolwiek ma liczbę cyfer, może się uważać jako złożony z *dwóch* tylko części: z *jedności* i *dziesiątków*, licząc do tych ostatnich *sta*, *tysiące*, i t. d. Uważajmy teraz że dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez iloraz, więcej resztą jeśli jest jaka. Owoż, wieloczyn z dzielnika przez *wszystkie dziesiątki* ilorazu, będąc dokładną liczbą dziesiątków, nie może się znajdować tylko w 3815 *dziesiątkach* dzielnej, które mogą jeszcze zawierać dziesiątki pochodzące z zatrzymek mnożenia dzielnika przez jedności ilorazu, i nawet z reszty.

Więc, jeśli weźmiemy największą liczbę razy jaką dzielnik mieści się w 3815 dziesiątkach dzielnej, otrzymamy *wszystkie dziesiątki* ilorazu, albo tylko liczbę za wielką. Ale ta liczba nie jest za wielka, bo oczywiście iloraz z podzielenia części tylko dzielnej, to jest jej dziesiątków 3815 przez 8, nie może mieć więcej dziesiątków niż iloraz z podzielenia całej dzielnej przez 8. Więc, aby otrzymać wszystkie dziesiątki ilorazu, trzeba szukać ile razy najwięcej dzielnik 8 mieści się w 3815 *dziesiątkach* dzielnej. Owoż, dzielnik mieści się w 381 dziesiątkach dzielnej więcej niż 10 razy. Ztąd wnosimy że iloraz ma dziesiątki dziesiątków czyli *sta.* Więc znowu, powtarzając powyższe rozumowanie, widzimy że tyle jest set w ilorazie ile razy dzielnik 8 mieści się w 38 stach dzielnej. I tak dalej.

Wynika ztąd że, *aby wyznaczyć cyfrę najwyższych jedności ilorazu czyli pierwszą cyfrę, trzeba wziąć z lewej strony dzielnej taką liczbę która zawiera dzielnik ale mniej niż* 10 *razy ; cyfra wyrażająca ile razy dzielnik mieści się w tej liczbie będzie pierwszą cyfrą ilorazu.* Bierzemy tedy 38 tysięcy ; dzielnik 8 mieści się 4 razy w 38 ; więc 4 jest *pierwszą* cyfrą szukanego ilorazu i oznacza jego tysiące. Znalazłszy tę cyfrę 4, mnożymy przez nią dzielnik 8, i odciągamy wieloczyn 32 *tysięcy* od 38 *tysięcy* dzielnej; co daje resztę 6 *tysięcy*, którą piszemy pod dzielną w rzędzie tysięcy. Reszta 6, będąc mniejsza od dzielnika 8, dowodzi że cyfra 4 ilorazu jest dobrze wyznaczona.

Teraz uważamy że cząstkowa reszta 6, z następującemi cyframi dzielnej, stanowi liczbę 6152 która jest wieloczynem z dzielnika przez następujące cyfry ilorazu, więcej resztą. Więc, na mocy już wiadomego rozumowania, aby znaleźć *drugą* cyfrę ilorazu, to jest cyfrę jego *set*, trzeba szukać ile razy dzielnik 8 mieści się w 61 *stach* liczby 6152. Owoż 8 mieści się 7 razy w 61 ; zatem 7 jest drugą cyfrą ilorazu. Jako widzimy, cyfra 7 otrzymuje się spuszczając 1 do cząstkowej reszty 6 i dzieląc 61 przez 8. Teraz znowu mnożymy dzielnik 8 przez drugą cyfrę 7 ilorazu, i odciągamy wieloczyn 56 *set* od 61 *set* pozostałych dzielnej ; co daje drugą cząstkową resztę 5 *set.*

Ta reszta, z następującemi cyframi dzielnej, stanowi liczbę 552 która jest wieloczynem z dzielnika przez następujące cyfry ilorazu, więcej resztą. Więc, na mocy tego co już wiemy, piszemy cyfrę 5 dzielnej po prawej stronie cząstkowej reszty 5, dzielimy 55 przez 8, i otrzymujemy *trzecią* cyfrę 6 ilorazu, to jest cyfrę jego *dziesiątków.* Mnożymy dzielnik 8 przez tę cyfrę 6 i odciągamy wieloczyn 48 dziesiątków od 55 dziesiątków; co daje cząstkową resztę 7. Ta reszta z ostatnią cyfrą 2 dzielnej, stanowi liczbę 72 która się równa wieloczynowi z dzielnika przez cyfrę jedności ilorazu, więcej resztą jeśli jest jaka. Dzielimy 72 przez 8, i znajdujemy właśnie cyfrę jedności 9; mnożymy przez nią 8, i odciągamy wieloczyn 72 od ostatniej liczby 72; co daje resztę 0, i dzielenie skończone.

Znajdujemy tym sposobem iloraz 4769.

Całe wyłożone działanie wykonywa się wedle następującego wzoru, który nie potrzebuje już dalszego wyjaśnienia.

$$\begin{array}{r|l} 38152 & 8 \\ \cline{2-2} 61 & 4769 \\ 55 & \\ 72 & \\ 0 & \end{array}$$

40. Weźmy jeszcze drugi przykład dzielenia, aby tem lepiej zrozumieć co poprzedza. Podzielmy 60239 przez 7.

Napisawszy dzielnę i dzielnik jako należy,

$$\begin{array}{r|l} 60239 & 7 \\ \cline{2-2} 42 & 8605 \\ 39 & \\ 4 & \end{array}$$

dzielimy, zaczynając od prawej strony dzielnej i mówiąc: 7 w 60, mieści się 8 razy; piszemy iloraz 8 pod linijką, i odciągamy w myśli wieloczyn 8 razy 7, to jest 56, od 60; co daje cząstkową resztę 4. Spuszczamy do tej reszty następującą cyfrę 2 dzielnej, co daje 42; dzielimy 42 przez 7 i otrzymujemy drugą cyfrę 6 ilorazu; odciągamy wieloczyn 6 razy 7 czyli 42 od reszty 42, i znajdujemy, na cząstkową resztę, *zero* którego pisać niema potrzeby. Spuszczamy następującą cyfrę 3 dziesiątków dzielnej: aże 7 nie mieści się w 3; więc iloraz nie ma dziesiątków; co wyrażamy pisząc 0 w ilorazie. Poczem spuszczamy następującą cyfrę dzielnej, i mamy 39; 7 w 39, 5; piszemy 5 w ilorazie, i odciągamy wieloczyn 5 razy 7 czyli 35, od 39; co daje resztę 4, i dzielenie skończone.

Znajdujemy tym sposobem że iloraz, z podzielenia liczby 60239 przez 7, jest 8605 i reszta 4. Zatem 8605 jest ilorazem przybliżonym przez niedostatek, na mniej niż jedność.

41. W praktyce dzielenie przez dzielnik jednocyfrowy wykonywa się odrazu, nie pisząc reszt cząstkowych. Biorąc poprzedzający przykład, rachunek tak się urządza:

$$\begin{array}{r|l} 60239 & 7 \\ 8605 & \\ 4 & \end{array}$$

Dzieli się mówiąc: 7 w 60, 8 dla 56; pisze się iloraz 8 tysięcy pod cyfrą 0 tysięcy dzielnej; a resztę 4, która czyni 40 jedności cyfry następującej 2, dodaje się do tej cyfry, co razem daje 42; teraz, 7 w 42, 6 dla 42; pisze się iloraz 6 pod 2; i znowu, 7 w 3, 0; pisze się 0 pod 3; nakoniec, 7 w 39, 5 dla 35: pisze się 5 pod 9, a resztę 4 pod ilorazem, jako wzór pokazuje. Działanie skończone daje iloraz 8605 i resztę 4. Wynik już wiadomy.

42. Drugi przypadek. *Dzielnik i dzielna jakiekolwiek, ale iloraz jednocyfrowy.*

Niech będzie do podzielenia 47026 przez 8639.

Widzimy na spojrzenie że iloraz ma tylko jedną cyfrę; bo 10 razy dzielnik, to jest 86360, przewyższa dzielnę 47026. Aby znaleźć tę jedyną cyfrę ilorazu, uważajmy że dzielna równa się wieloczynowi z dzielnika przez iloraz, więcej resztą jeśli jest jaka. Owoż, wieloczyn z pierwszej cyfry dzielnika, to jest z 8 tysięcy, przez szukaną cyfrę, będąc *dokładną liczbą tysięcy*, mieści się tylko w 47 *tysiącach* dzielnej; ale te ostatnie mogą w części pochodzić z zatrzymek mnożenia innych cyfer dzielnika przez iloraz, a nawet i z reszty ; więc, jesli podzielimy 47 przez 8, cyfra 5, którą otrzymujemy, będzie dokładną cyfrą ilorazu albo za wielką, ale nigdy za małą. Dosyć się przeto zapewnić czy ta cyfra nie jest za wielka. Co się łatwo robi dzieląc dzielnę 47026 przez 5. Owoż, 5 w 47 mieści się 9 razy. Ta pierwsza cyfra 9, będąc już większa od pierwszej 8 dzielnika, pokazuje że *piąta część* dzielnej przewyższa dzielnik ; więc 5 razy dzielnik może się odciągnąć od dzielnej; a zatem 5 jest cyfrą szukanego ilorazu. Gdybyśmy, dzieląc dzielnę przez 5, znaleźli iloraz mniejszy od dzielnika, to byłoby dowodem że cyfra 5 jest za wielka : wtedy trzebaby zmniejszyć tę cyfrę 5 jednością, i znowu tak samo probować.

Wyznaczywszy jedyną cyfrę 5 ilorazu, mnożymy przez nią dzielnik 8639, i odciągamy od dziélnej aby znaleźć resztę. Te dwa działania wykonywają się razem, mnożąc każdą cyfrę dzielnika przez cyfrę 5 ilorazu, i odciągając wieloczyny cząstkowe od dzielnej, następującym sposobem :

$$\begin{array}{r|l} 47026 & 8639 \\ \cline{2-2} 3831 & 5 \end{array}$$

mnożymy 9 przez 5, i wieloczyn 45 odciągamy od 6: aby uczynić to odciąganie możebnem, dodajemy 4 dziesiątki do 6 jedności dzielnej co czyni 46, ale dodamy także 4 dziesiątki do następującego wieloczynu który potem odciągać mamy ; przez to nie zmieniamy bynajmniej reszty (16). To zrobiwszy, mówimy: 45 od 46, 1 ; piszemy 1 pod 6, a zatrzymujemy 4 dziesiątki. Mnożymy teraz 3 przez 5 i mamy 15, a 4 z zatrzymki to czyni 19 dziesiątków które odciągamy od 2 dziesiątków ; aże znowu odciąganie niemożebne, dodajemy 2 *sta* do 2 dziesiątków dzielnej, i odciągamy, mówiąc : 19 od 22, 3; piszemy 3 pod cyfrą 2 dziesiątków a zatrzymujemy 2 (sta). Podobnie działając dalej, mówimy 5 razy 6, 30 ; a 2, 32 ; od 0 nie można, od 40, 8 ; a zatrzymuję 4 : 5 razy 8, 40 ; a 3, 43 ; od 47, 4 ; piszemy 4 na właściwem miejscu.

Otrzymujemy tym sposobem iloraz 5 i resztę 3831.

43. Dla nabycia biegłości rachunku, szukajmy jeszcze ilorazu i reszty z podzielenia 54003 przez 6769.

Mamy
$$\begin{array}{r|l} 54003 & 6769 \\ \cline{2-2} 6620 & 7 \end{array}$$

Widzimy że iloraz ma jedną cyfrę; żeby ją znaleźć, dzielimy 54 przez 6, co daje 9. Oczywiście cyfra 9 jest za wielka. Probujemy cyfry 8, mówiąc: 8 w 54, 6 dla 48. Ponieważ znaleziona cyfra 6 jest ta sama co pierwsza dzielnika 6, nie można z niej sądzić czy 8 razy dzielnik nie jest większy od dzielnej. Dla usunięcia tej wątpliwości, posuwamy dalej dzielenie dzielnej przez 8, i mówimy: 8 w 60, 7 dla 56; jeszcze wątpliwość. Idziemy dalej, 8 w 40, 5 dla 40. Ta trzecia cyfra 5, mniejsza od trzeciej cyfry 6 dzielnika, pokazuje że probowana cyfra 8 jest za wielka. Probujemy cyfry 7, i odrazu widzimy że jest dobra; bo 7 w 54 mieści się razy 7, a cyfra 7 przewyższa pierwszą dzielnika.

Wyznaczywszy cyfrę 7 szukanego ilorazu, mnożymy przez nią dzielnik, i odciągamy wieloczyn częściami od dzielnej, jakośmy wyżej wyłożyli, mówiąc w skróceniu, 7 razy 9, 63; od 63, 0; zatrzymuję 6. — 7 razy 6, 42, a 6 (z zatrzymki), 48; od 50, 2: zatrzymuję 5. — 7 razy 7, 49; a 5, 54; od 60, 6; zatrzymuję 6. — 7 razy 6, 42; a 6, 48; od 54, 6. Działanie skończone daje iloraz 7 i resztę 6620.

44. Gdybyśmy mieli do podzielenia liczbę 78651 przez 18694; żeby znaleźć jedyną cyfrę ilorazu, uważajmy że 18 jest blisko równe 20. Owoż 20 mieści się prawie 4 razy w 78; probujemy tedy cyfry 4 mówiąc: 4 w 7, 1 dla 4; trzeba iść dalej: 4 w 38, 9 dla 36. To pokazuje że cyfra 4 nie jest za wielka. Ale nie wiedząc czy ona nie jest za mała, probujemy 5 mówiąc: 5 w 7, 1 dla 5: dalej, 5 w 27, 5 dla 25; — cyfra 5 jest za wielka. Więc 4 jest szukaną cyfrą ilorazu. Resztę rachunku już wykonać umiemy.

$$\begin{array}{r|l} 78651 & 18694 \\ \cline{2-2} 3875 & 4 \end{array}$$

Iloraz jest 4 a reszta 3875.

Zrozumiawszy dobrze to co poprzedza, łatwo będzie pojąć dzielenie liczb jakichkolwiek, które teraz wyłożymy.

45. Trzeci przypadek. *Dzielnik, dzielna i iloraz są złożone z wielu cyfer.*

Niech będzie do podzielenia 7654321 przez 8765.

Oto wzór działania :

$$\begin{array}{r|l} 7654321 & 8765 \\ \cline{2-2} 64232 & 873 \\ 28771 & \\ 2476 & \end{array}$$

Widzimy zaraz że iloraz ma dziesiątki ; aby je wyznaczyć, dosyć powtórzyć rozumowanie w pierwszym przypadku użyte. Jakoż, wiemy że dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez iloraz, więcej resztą. Owoż, wieloczyn z dzielnika przez *wszystkie dziesiątki* ilorazu, będąc dokładną liczbą dziesiątków, mieści się tylko w dziesiątkach dzielnej ; a te ostatnie mogą jeszcze pochodzić z zatrzymek mnożenia i z reszty ; więc jeśli weźmiemy największą liczbę razy jaką dzielnik 8765 mieści się w 765432 *dziesiątkach* dzielnej, znajdziemy *wszystkie dziesiątki* ilorazu, albo liczbę za wielką. Aliści ta liczba za wielką być nie może ; bo oczywiście iloraz z podzielenia części tylko dzielnej przez dzielnik, nie może mieć więcej dziesiątków niż iloraz z podzielenia całej dzielnej przez ten dzielnik. Więc, aby znaleźć wszystkie dziesiątki ilorazu, trzeba podzielić 765432 dziesiątki dzielnej przez 8765. Ale tu jeszcze dzielnik mieści się więcej niż 10 razy w dzielnej : ztąd wnosimy że iloraz ma dziesiątki dziesiątków czyli *sta*. Więc znowu, aby znaleźć wszystkie sta ilorazu, trzeba podzielić 76543 set dzielnej przez 8765. I tak dalej.

Wynika ztąd że, *aby wyznaczyć cyfrę najwyższych jedności ilorazu, trzeba wziąć z lewej strony dzielnej taką liczbę która zawiera dzielnik mniej niż 10 razy ; cyfra, wyrażająca ile razy najwięcej dzielnik mieści się w tej liczbie, będzie pierwszą cyfrą ilorazu.* Dzielimy tedy 76543 przez 8765, i sposobem już wiadomym (42), znajdujemy iloraz 8, który jest pierwszą cyfrą szukanego ilorazu, i wyraża *sta*. Mnożymy teraz dzielnik 8765 przez 8, i odciągamy *częściami* wieloczyny od cząstkowej dzielnej 76543 ; co daje resztę 6423 set, która, będąc mniejsza od dzielnika 8765, dowodzi że cyfra 8 ilorazu jest dobra. Ta cząstkowa reszta, z następującemi cyframi dzielnej, stanowi liczbę 642321 która jest wieloczynem dzielnika przez dziesiątki i jedności ilorazu, więcej resztą. Więc znowu, aby znaleźć dziesiątki ilorazu, trzeba szukać ile razy dzielnik 8765 mieści się w pozostałych 64232 dziesiątkach dzielnej. Jako widzimy, druga cząstkowa dzielna otrzymuje się spuszczając, do cząstkowej reszty 6423 set, cyfrę 2 dziesiątków dzielnej ; co daje właśnie liczbę 64232. Podzieliwszy 64232 przez 8765, znajdujemy iloraz 7 i resztę 2877. Cyfra 7 jest drugą cyfrą szukanego ilorazu i wyraża jego dziesiątki. Nakoniec, aby znaleźć cyfrę jedności, do ostatniej cząstkowej reszty 2877 dziesiątków, spuszczamy cyfrę 1 jedności dzielnej, i dzielimy liczbę 28771 przez 8765 ; co daje iloraz 3 i resztę 2476. Ta reszta, będąc mniejsza od dzielnika 8765, dowodzi że cyfra 3 jedności ilorazu jest dobra.

Otrzymujemy tym sposobem iloraz 873, i resztę 2476 która okazuje że iloraz jest przybliżony przez niedostatek.

46. Z tego co poprzedza wynika następujące ogólne prawidło dzielenia liczb całkowitych jakichkolwiek.

Aby podzielić jedną liczbę przez drugą, pisze się dzielnik po prawej stronie dzielnej, odłączając linijką pionową, i podkreśla się dzielnik, a pod nim kładzie się iloraz.

Potem bierze się, z lewej strony dzielnej, dosyć cyfer aby liczba która wyrażają zawierała dzielnik ale mniej niż 10 razy. Ta liczba jest pierwszą cząstkową dzielną która, podzielona przez dzielnik, daje cyfrę najwyższych jedności ilorazu, to jest pierwszą jego cyfrę ; odciąga się od pierwszej dzielnej cząstkowej wieloczyn z dzielnika przez pierwszą cyfrę ilorazu, co daje cząstkową resztę ; po prawej stronie tej reszty spuszcza się pierwszą z niewziętych jeszcze cyfer dzielnej, i tak się tworzy drugą cząstkową dzielnę która, podzielona przez dzielnik, daje drugą cyfrę ilo-

razu : i tak dalej, aż się wyczerpnie wszystkie cyfry dzielnej.

47. Uwaga. Każda cząstkowa reszta jest mniejsza od dzielnika; zatem każda cząstkowa dzielna, jako mniejsza od 10 razy dzielnika, daje iloraz mniejszy od 10. Ale może się zdarzyć że cząstkowa dzielna nie zawiera dzielnika, wtedy odpowiedająca cyfra ilorazu jest 0, a tworzy się następującą cząstkową dzielnę dopisując do poprzedzającej nową cyfrę dzielnej.

Dla lepszego objaśnienia, podzielmy 765038040 przez 3678, co daje

```
765038040 | 3678
  29438   |-------
    14040 | 208003
     3006
```

iloraz 208003 i resztę 3006.

48. Teorya dzielenia nie byłaby zupełna, gdybyśmy nie mówili o szególnym przpadku w którym działanie uprościć się może.

Niech będzie do podzielenia 2345670 przez liczbę 56000 zakończoną na zera.

Wiemy że dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez iloraz więcej resztą. Owoż, dzielnik 56000 jest dokładną liczbą *tysięcy*; więc *wszystkie tysiące* dzielnej 2345670 pochodzą tylko z wieloczynu *tysięcy* dzielnika przez iloraz, i z reszty jeśli jest jaka. Ale reszta jest mniejsza od dzielnika; ztąd wnosimy że aby znaleźć iloraz, dosyć jest szukać ile razy najwięcej 56 *tysięcy* dzielnika mieszczą się w 2345 *tysiącach* dzielnej. Ztąd prawidło:

Aby *podzielić liczbę jakąkolwiek przez dzielnik zakończony na zera, dosyć odciąć tyle ostatnich cyfer dzielnej ile ostatnich zer w dzielniku, i podzielić pozostałą dzielnę przez dzielnik, nie zważając na te zera; ale do otrzymanej reszty trzeba dopisać wszystkie odcięte cyfry dzielnej.*

Oto rachunek

```
2345670 | 56000
  105   |------
  49670 | 41
```

Iloraz jest 41 a reszta 49670.

48. Można czasem skrócić nieco rachunek dzielenia, tworząc naprzód wieloczyny dzielnika przez każdą z dziewięciu cyfer. To skrócenie jest istotnem, gdy dzielnik ma wiele cyfer, a iloraz przynajmniej dziewięć.

I tak, niech będzie liczba 31415926535897932 3 do podzielenia przez 271828.

Ponieważ iloraz ma więcej niż *dziewięć* cyfer, zróbmy naprzód wieloczyny z dzielnika przez 1, 2, 3.....9, prostem dodawaniem, tak jakośmy tworzyli tablicę mnożenia. Napisawszy te wieloczyny na boku dzielnej, wykonywamy dzielenie jako wzór pokazuje.

	314159265358979323	271828
	423312	1155728127194
	1514846	
	1557065	
	1979253	
	764575	
1 raz dzielnik = 271828	2209198	
2 razy » = 543656	345749	
3 » » = 815484	739217	
4 » » =1087312	1955619	
5 » » =1359140	528233	
6 » » =1630968	2564052	
7 » » =1902796	1176003	
8 » » =2174624	88691	
6 » » =2446452		

Na samo spojrzenie widzimy że cząstkowa dzielna 314159 zawiera raz tylko dzielnik 271828 i daje resztę 42331. Spuszczamy następującą cyfrę 2; i znowu cząstkowa dzielna 423312 zawiera raz tylko dzielnik i daje resztę 151484. Spuszczamy potem cyfrę 6, i mamy cząstkową dzielnę 1514846. Teraz, przebiegając tablicę utworzonych wieloczynów z dzieinika przez każdą z dziewięciu cyfer, spostrzegamy że wieloczyn 1359140 jest największy z tych które się mieszczą w cząstkowej dzielnej 1514846. Bierzemy przeto odpowiedającą cyfrę 5 na iloraz, i odciągamy powyższy wieloczyn od cząstkowej dzielnej, co daje resztę 155706. Spuszczamy następującą cyfrę 5, i znowu szukamy największego wieloczynu jaki się mieści w cząstkowej dzielnej 1557065; znajdujemy że nim jest wieloczyn 1359140, który nam daje cyfrę 5 ilorazu. I tak dalej postępując, otrzymujemy iloraz 1155728127194, na mniej niż jedność, i resztę 88691.

50. PRÓBA DZIELENIA. Można zrobić próbę dzielenia mnożąc dzielnik przez iloraz, i do wieloczynu dodając resztę; jeśli summa równa się dzielnej, działanie sprawdzone. Ale ten sposob próby, za długi i zmudny, wystawia na nowe błędy. Damy później krótszy i w zastosowaniu łatwy.

Zakończymy teoryę dzielenia następującemi twierdzeniami.

51. *Gdy się mnoży albo dzieli dzielnik i dzielnę przez tę samą liczbę, iloraz się nie zmienia, ale reszta jest pomnożona albo podzielona przez tę liczbę.*

Niech będą dzielna 15 i dzielnik 6, dające iloraz 2 i resztę 3.

Mamy $$15=6\times2+3.$$

Pomnóżmy obie strony tej równości prze 10. Uważając że, mnożyć wieloczyn dosyć jest mnożyć jeden z jego czynników, a zaś mnożyć summę dosyć mnożyć każdą z jej części; otrzymujemy $15\times10=6\times10\times2+3\times10$ albo $150=60\times2+30$.

Owoż, liczba 3, jako reszta, jest mniejsza od dzielnika 6; zatem 3×10 jest mniejsze od 6×10, czyli 30 mniejsze od 60, To dowodzi że dzielnik 60 mieści się w dzielnej 150 najwięcej 2 razy; więc 2 jest ilorazem z podzielenia 150 przez 60, a tem samem 30 jest resztą. Więc mnożąc dzielnę 15 i dzielnik 6 przez 10, iloraz 2 nie zmienił się, ale reszta 3 została pomnożona przez 10.

Ztąd wynika że, *gdy się dzieli dzielnik i dzielnę przez tę samą liczbę, ilaraz się nie zmienia także, ale reszta zostaje podzielona przez tę liczbę*. Bo inaczej, pierwsza część twierdzenia, już dowiedziona, nie byłaby prawdziwa.

UWAGA. Oczywiście twierdzenie powyższe nie przestaje być prawdziwe gdy reszta jest zero.

52. W dzieleniu liczb całkowitych, *liczba cyfer ilorazu ró-*

wna się różnicy liczb cyfer dzielnej i dzielnika, albo tej różnicy powiększonej jednością.

Jakoż, jeśli dla znalezienia pierwszéj cyfry ilorazu, trzeba wziąć, z lewej strony dzielnej, tyle cyfer więcej jedną ile ich w dzielniku, wtedy liczba cyfer ilorazu jest różnicą między liczbą cyfer dzielnej i dzielnika; bo w dzieleniu każda cyfra spuszczona daje jedną cyfrę ilorazu. Jeśli zaś, dla znalezienia pierwszej cyfry ilorazu, trzeba wziąć tyle tylko pierwszych cyfer dzielnej ile jest w dzielniku, wtedy oczywiście liczba cyfer ilorazu przewyższa jednością różnicę liczb cyfer dzielnej i dzielnika.

I tak, w przedostatnim przykładzie, dzielna ma 8 cyfer a dzielnik 6, ale trzeba siedem pierwszych cyfer dzielnej żeby zawierały dzielnik; dlatego też liczba cyfer ilorazu jest 8 więcej 1 a mniej 7, co czyni 2 cyfry; ta liczba równa się różnicy liczb 8 i 6. W ostatnim przykładzie, dzielna ma 18 cyfer a dzielnik 6; aże 6 pierwszych cyfer dzielnej zawierają dzielnik, więc liczba cyfer ilorazu jest 18 mniej 6 a więcej jedną, co czyni 13 cyfer; ta liczba równa się różnicy liczb 18 i 6 więcej jednością.

53. *Aby podzielić liczbę przez wieloczyn kilku czynników, dosyć wykonać dzielenia następne przez czynniki tego wieloczynu.*

Niech będzie 360 do podzielenia przez wieloczyn 120 czynników 4, 5, 6. Powiedam że dosyć podzielić 360 naprzód pzzez 4, potem otrzymany iloraz przez 5, a nakoniec ostatni iloraz przez 6. Jakoż, iloraz z podzielenia 360 przez 120 jest 3; zatem $360 = 120 \cdot 3$ albo $360 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3.$

Więc dzieląc dzielnę 360 przez 4, otrzymujemy iloraz równy wieloczynowi $5 \cdot 6 \cdot 3$; następnie dzieląc ten iloraz przez 5, otrzymujemy drugi iloraz równy wieloczynowi $6 \cdot 3$; nakoniec dzieląc ostatni iloraz przez 6, znajdujemy liczbę 3, która jest właśnie ilorazem z podzielenia 360 przez 120.

Uwaga. Powyższe dowodzenie przypuszcza że dzielenia następne przez czynniki dzielnika wykonywają się dokładnie, to jest bez reszty.

Jednakże, nawet w przeciwnym razie, dzieląc liczbę przez wieloczyn czynników, albo też wykonywając dzielenia następne przez czynniki tego wieloczynu, nie zważając na reszty, otrzymuje się ten sam iloraz. Niech będzie 906 do podzielenia przez wieloczyn 120 czynników 4, 5, 6. Iloraz z podzielenia 906 przez 120 jest 7 i reszta 66. Zatem dzielna 906 jest mniejszą od wieloczynu 4.5.6.8 a większa od 4.5.6.7. Ztąd wynika że dzieląc przez czynnik 4 dzielnę i wieloczyny, *iloraz zupełny* z dzielnej będzie mniejszy od 5.6.8 a większy od 5.6.7. Owoż, ten iloraz zupełny składa się z części całkowitej 226 i z części mniejszej od jedności; więc część całkowita 226 jest mniejsza od 5.6.8 ale większa od 5.6.7, a przynajmniej nie jest mniejsza od 5.6.7. Dzieląc następnie przez 5, znajdziemy część całkowitą 45 ilorazu z dzielnej mniejszą od 6.8 ale większą od wieloczynu 6.7 albo mu równą. Nakoniec jeśli podzielimy przez 6, otrzymamy ostatni iloraz z dzielnej, który będzie mniejszy od 8, ale nie mniejszy od 7. Więc ten iloraz równa się właśnie ilorazowi 7, któryśmy otrzymali dzieląc 906 przez 120.

Mnożenie i dzielenie potęg.

54. Określenie. Wieloczyn czynników równych jednej liczbie nazywa się potęgą tej liczby; potęga bierze swoje nazwisko od liczby czynników równych; i tak, wieloczyn $5\times5\times5\times5$ równy 625 jest *czwartą* potęgą liczby 5, i pisze się 5^4. Liczba 4, która, napisana u góry i po prawej stronie liczby 5, wskazuje ile jest czynników równych tej liczbie, nazywa się wykładnikiem potęgi.

Na mocy tych określeń 7×7 pisze się 7^2; liczba 7^2 jest *drugą potęgą* liczby 7; dla skrócenia drugą potęgę liczby nazwano jej *kwadratem*. Podobnie $4\times4\times4$ pisze się 4^3; liczba 4^3 jest *trzecią potęgą* liczby 4; ale, także dla skrócenia, trzecią potęgę liczby nazwano jej *sześcianem*. Kwadrat i sześcian są wyrazy wzięte z Geometryi. Dla podobieństwa, nazywa się *pierwszą potęgą* liczby ta sama liczba z wykładnikiem 1 którego się nie pisze, i tak 3 jest to samo co 3^1. Działanie za pomocą którego tworzy się potęgę liczby, nazywa się *wynoszeniem do potęg*.

Mnożenie i dzielnie potęg tej samej liczby, między sobą, na dwóch następujących opiera się prawidłach.

55. *Wieloczyn potęg jednej liczby jest potęgą tej liczby, i ma za wykładnik summę wykładników*,

I tak $5^4.5^2 = 5^6$. Jakoż, $5^2 = 5.5$; aże, mnożyć liczbę przez wieloczyn czynników jest wykonać mnożenia następne przez te czynniki; więc $5^4 \times (5.5) = 5^4 \times 5 \times 5 = 5^5 \times 5 = 5^6$.

56. *Iloraz potęg jednej liczby jest potęgą tej liczby, i ma za wykładnik różnicę wykładników dzielnej i dzielnika.*

Niech będzie do podzielenia 15^6 przez 15^4. Na mocy mnożenia potęg jednej liczby, wykładnik dzielnej powinien być summą wykładników dzielnika i ilorazu; więc wykładnik ilorazu jest różnicą wykładników dzielnej i dzielnika dla potęg tej samej liczby. Zatem iloraz z podzielenia 15^6 przez 15^4 jest 15^{6-4}, albo 15^2.

57. *Aby podnieść wieloczyn czynników do danej potęgi, dosyć podnieść każdy czynnik do tej potęgi.*

Niech będzie wieloczyn $10^4 \times 12^3 \times 7$, który chcemy podnieść do potęgi *drugiej*; czyli innemi słowy, zrobić *kwadrat tego wieloczynu*. Na mocy określenia potęgi, mamy:

$$(10^4 \times 12^3 \times 7)^2 = (10^4 \times 12^3 \times 7)\,(10^4 \times 12^3 \times 7)$$

albo, przemieniając miejsce czynników,

$$(10^4 \times 12^3 \times 7)^2 = 10^4.10^4 \times 12^3.12^3 \times 7.7 = 10^8 \times 12^6 \times 7^2$$

To pokazuje że się podnosi do kwadratu wieloczyn czynników, mnożąc przez 2 wykładnik każdego z tych czynników.

Rozumując podobnie, widzimy że się podnosi do *trzeciej potęgi*, czyli do *sześcianu*, wieloczyn $10^4 \times 12^3 \times 7$, mnożąc przez 3 wykładnik każdego czynnika; co daje

$$(10^4 \times 12^3 \times 7)^3 = 10^2 \times 12^9 \times 7^3.$$

Tak samo o innych potęgach.

58. Weźmy teraz kilka zagadnień na zastosowanie.

Zagadnienie XII. *Pewien kupiec zapłacił* 6723 *zł.* 15 *gr. za* 357 *funtów towaru; poczemu płacił funt?*

Ponieważ 357 funtów kosztują 6723 zł. 15 gr., jeden funt kosztuje oczywiście 357 razy mniej, to jest kosztuje 357ma część ceny 6723 zł. 15 gr. Więc, aby znaleźć cenę funta trzeba, podzielić 6723 zł. 15 gr. przez liczbę 357. Wykonywając to dzielenie, znajdujemy:

$$\begin{array}{r|l} 6723 & 357 \\ \cline{2-2} 3153 & 18 \\ 297 & \end{array}$$

iloraz 18 zł. i resztę 297.

Zamieniamy resztę 297 zł, na grosze, co daje 8910; dodajemy 15 gr., i summę 8925 gr. dzielimy przez 357, co daje

$$\begin{array}{r|l} 8925 & 357 \\ \cline{2-2} 1785 & 25 \\ 0 & \end{array}$$

iloraz 25 groszy.

Więc funt towaru kosztuje 18 złotych i 25 groszy.

Zagadnienie XIII. *Za 159 rubli 4 złote kupiono cztery razy więcej sukna niż płótna. Sukno płacono po 3 ruble 10 groszy, a płótno po 1 rublu i 20 groszy. Ileż każdego towaru kupiono?*

Za 4 łokcie sukna zapłacono 4 razy 3 ruble 10 groszy, czyli 12 rubli 40 groszy; a za łokieć płótna 1 rubel 20 groszy. To czyni razem 13 rubli 60 groszy. Ztąd wynika że, ile razy cena 13 rubli 60 groszy mieści się w summie 159 rubli 4 złote, tyle jest łokci płótna, a 4 razy tyle łokci sukna. Jeśli więc podzielimy 159 rubli 4 zł. przez 13 rubli 60 gr., iloraz będzie liczbą łokci płótna. Aby to dzielenie uskutecznić, trzeba zamienić wszystko na grosze. Owóż, 159 rubli 4 zł. czynią 31920 groszy; a zaś 13 rubli 60 groszy czynią 2660 groszy. Wykonywając dzielenie, otrzymujemy

$$\begin{array}{r|l} 31920 & 2660 \\ \cline{2-2} 532 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Iloraz 12 oznacza że kupiono 12 łokci płótna; zatem kupiono 48 łokci sukna.

Zagadnienie XIV. *11 robotników wykonali pewną robotę w 60* *godzinach*; 12 *robotników w ilu godzinach taką samą wykonają robotę?*

Ponieważ 11 robotników wykonywają pewną robotę w 60 godzinach, jeden robotnik potrzebowałby 11 razy więcej godzin, to jest 660 godzin, do wykonania tej samej roboty; więc 12 robotników potrzebują tylko *dwónastej* części z 660 godzin, czyli 55 godzin.

Żagadnienie XV. 20 *żniwaków, pracując razem, pożęli* 15 *morgów zboża*; 12 *żniwaków ile pożną morgów tego zboża?*

Gdyby jeden żniwak pożął sam 15 morgów zboża, 12 żniwaków pożęliby 12 razy tyle, to jest 15 m. × 12 = 180 morgów; ale że nie jeden żniwak tylko 20, to jest 20 razy więcej żniwaków, pożęli 15 morgów; więc 12 żniwaków nie pożną 180 morgów, tylko 20 razy mniej, to jest pożną 9 morgów zboża.

Zagadnienie XVI. 24 *młocków pracując razem wymłócili sąsiek zboża w* 35 *dniach. Ile trzeba młocków aby taki sam sąsiek wymłócili w* 30 *dniach?*

Ponieważ 24 młocków wymłócili sąsiek w 35 dniach, aby ten sąsiek wymłócić w jednym dniu, trzebaby 35 razy 24 młocków, to jest 24×35 = 840 młocków. Więc, żeby wymłócić taki sąsiek w 30 dniach, trzeba 30 razy mniej młocków, to jest trzydziestą część z 840 młocków, czyli 28 młocków.

Zagadnienie XVII. *Dwaj robotnicy zarabiają, jeden trzecią część więcej niż drugi. Pierwszy pracował* 6 *dni więcej od drugiego; i odebrał* 96 *złotych; drugi odebrał tylko* 54 *zł. Ileż każdy zarabia na dzień?*

Ponieważ pierwszy zarabia *trzecią* część więcej niż drugi, a ten ostatni zarobił 54 zł.; więc w tym samym czasie pierwszy zarobił 54+18 czyli 72 zł. Aże odebrał za swoją pracę 96 zł., a pracował 6 dni więcej od drugiego, więc za te 6 dni dostał 96 zł. mniej 72 zł., to jest 24 zł. Zatem na dzień zarabiał 4 zł., i pracował dni 24. Drugi pracował 18 dni i zarabiał 3 zł. na dzień.

Zagadnienie XVIII. *Rożdzielić* 690 *złotych między dwie osoby,* *tak żeby dział pierwszej był dwa razy większy od działu drugiej.*

W summie 690 znajduje się dział drugiej osoby i dział pierwszej, czyli raz dział drugiej osoby i dwa razy dział tej drugiej, to jest trzy razy dział drugiej osoby. Więc dział drugiej osoby jest *trzecią* częścią summy 690, to jest 230 złotych; zatem dział pierwszej, jako podwójny działu drugiej, czyni 460 złotych. Co się łatwo sprawdza.

I w samej rzeczy 460 + 230 = 690 ; etc.

Zagadnienie XIX. *Rozdzielić 369 złotych miedzy trzy osoby, tak aby dział drugiej był dwa razy większy od działu pierwszej, a dział trzeciej trzy razy większy od działu drugiej.*

W summie 369 zł. znajduje się dział *pierwszej* osoby więcej dział *drugiej* więcej dział *trzeciej*; to jest: *raz* dział pierwszej osoby więcej *dwa razy* dział pierwszej więcej *sześć razy* dział pierwszej; to czyni razem 1+2+6 albo 9 razy dział pierwszej osoby. Więc dział pierwszej osoby jest *dziewiątą* częścią summy 369, to jest 41 zł. Zatem dział drugiej jest 82, a dział trzeciej 246. Co się sprawdza; bo 41+82+246 = 369; etc.

Zagadnienie XX. *Rozdzielić 560 zł. między 3 osoby tak żeby druga wzięła 124 zł. więcej od pierwszej, a trzecia 51 zł. więcej od drugiej.*

W summie 560 zł. znajduje się dział *pierwszej* osoby więcej dział *drugiej* czyli dział pierwszej więcej 124 zł., więcej dział *trzeciej* czyli dział drugiej więcej 51 zł. albo dział pierwszej więcej 124+51. To czyni 3 razy dział pierwszej więcej 124+124+51, albo 3 razy dział pierwszej więcej 299. Więc 3 razy dział pierwszej osoby równa się summie 560 zmniejszonej liczbą 299, to jest czyni 261 zł. Ztąd wynika że dział pierwszej osoby jest *trzecią* częścią liczby 261 zł., to jest 87 złotych. Zatem dział drugiej osoby jest 211 zł., a dział trzeciej 262 zł. Co się sprawdza, bo 87+211+262 = 560 ; etc.

Zagadnienie XXI. *Znaleźć dwie liczby których summa jest 88 a różnica 22.*

Summa 88 składa się z mniejszej liczby i z większej, albo z dwa razy mniejszej więcej różnicą 22. Więc, jeśli od summy 88 odciągniemy różnicę 22, reszta 88 — 22 czyli 66 będzie zawierała 2 razy mniejszą liczbę. Zatem mniejsza liczba jest 33; a następnie większa liczba równa się 33 + 22 to jest 55.

Liczby 55 i 33 rozwiązują zagadnienie; bo, ich summa

$$55 + 33 = 88, \quad \text{a różnica} \quad 55 - 22 = 33.$$

Uwaga. Można wprost znaleźć większą liczbę. Jakoż, summa 88, powiększona różnicą 22, zawiera oczywiście 2 razy większą liczbę. Zatem większa liczba jest połową summy 88+22, to jest równa się 55. Ztąd wynika że,

Mając dane summę i różnicę dwóch liczb, większa równa się połowie summy liczb danych, a mniejsza połowie ich różnicy.

Zagadnienie XXII. *Znaleźć liczbę złożoną ze trzech cyfer, wiedząc że cyfra jedności jest trzy razy większa od cyfry set, a cyfra dziesiątków dwa razy od niej większa; jeśli zaś do tej liczby doda się 594, otrzymuje się liczbę złożoną z tych samych cyfer co szukana, ale w porządku odwrotnym.*

Cyfra set, pomnożona przez 100, wyraża *sta* szukanej liczby; *dwa* razy cyfra set, pomnożona przez 10, wyraża jej *dziesiątki*; *trzy* razy wzięta cyfra set wyraża *jedności*: zatem cyfra set, pomnożona przez 100+20+3 czyli przez 123, wyraża szukaną liczbę. Tak samo rozumując, widzimy że liczba, złożona z tych samych cyfer ale w porządku odwrotnym, wyraża się przez 300+20+1 czyli przez 321 razy wziętą cyfrę set. Owoż, ta druga liczba jest większa od pierwszej liczbą 594; więc różnica, 321 razy cyfra set mniej 123 razy ta cyfra, równa się 594; to jest 198 razy cyfra set równa się 594. Ztąd wynika że cyfra set równa się ilorazowi z 594 przez 198, to jest liczbie 3.

Zatem cyfra dziesiątków jest 6, a cyfra jedności jest 9. Więc szukana liczba jest 369.

Zagadnienie XXIII. *Pewien właściciel winnicy mówi: gdybym sprzedał mój zbiór wina po* 308 *złotych beczkę, kupiłbym dom, i jeszczeby mi zostało* 770 *złotych; ale, jeśli sprzedam to wino tylko po* 286 *złotych beczkę, muszę wtedy dodać* 682 *złote, aby* *zapłacić dom. Ileż ten właściciel ma beczek wina, a ile dom kosztuje?*

Wedle wysłowienia zagadnienia, liczba 308 złotych, wzięta tyle razy ile jest beczek wina, wyraża cenę domu za wielką o 770 złotych; a znowu liczba 286 złotych, wzięta tyle razy ile jest tych beczek, wyraża także cenę domu ale za małą o 682 złote; zatem różnica 308—286, czyli 22 złote, wzięta tyle razy ile jest beczek, równa się summie 682+770=1452. Jeśli więc podzielimy 1452 przez 22, otrzymamy iloraz 66 który wyraża liczbę beczek wina.

Znając liczbę beczek, łatwo znaleźć cenę domu. Jakoż, ta cena równa się 308 zł.×66 *mniej* 770 złotych. Co daje 19558 złotych. Więc właściciel winnicy ma 66 beczek wina, a dom kosztuje 19558 złotych.

Zagadnienie XXIV. *Dwie osoby składają sobie obiad: pierwsza daje* 2 *potrawy a druga* 3. *Nadchodzi trzecia osoba i bierze udział w tym obiedzie, płacąc* 5 *zł. za swoją część wydatku. Jak dwie pierwsze osoby powinny się podzielić tą summą, aby koszt obiadu był równy dla wszystkich?*

Ponieważ koszt obiadu jest równy dla trzech osób, a trzecia zapłaciła 5 złotych za siebie; więc obiad kosztował 5 zł.×3, czyli 15 złotych. Ztąd wynika że każda z 5 potraw kosztowała 3 złote. Owoż, pierwsza osoba dała dwie potrawy; to czyni 6 złotych; aże jadła za 5 złotych, więc się jej należy 1 złoty. Tak samo, druga osoba dała 3 potrawy które warte 9 złotych; aże jadła za 5 złotych, więc się jej należy 4 złote. Tym sposobem, z 5 złotych pierwsza dostaje 1 złoty a druga 4 złote.

Zagadnienie XXV. *Pewien gracz, pierwszą razą wygrywa* 9 *razy tyle ile posiada pieniędzy, ale zaraz przegrywa* 100000 *zł.: drugą razą wygrywa znowu* 9 *razy tyle ile mu zostało, ale potem przegrywa* 100000 *zł. nakoniec trzecią razą wygrywa jeszcze* 9 *razy tyle ile mu zostało, ale zaraz potem przegrywa* 100000 *zł. Opuszcza grę mając* 12500 *zł. Z jakąż summą przyszedł do gry?*

Po pierwszej wygranej i przegranej zostaje graczowi 9 razy summa którą przyniósł mniej 100000 zł.: po drugiej, zostaje mu 81 razy summa którą przyniósł mniej 900000 zł. i mniej 100000 zł. czyli razem 81 razy summa przyniesiona mniej 1000000 zł.: nakoniec po trzeciej grze, zostaje mu 729 razy summa którą przyniósł mniej 9000000 zł. i jeszcze mniej 100000 zł. czyli razem 729 razy summa przyniesiona mniej 9100000 zł. Aże opuszcza grę mając 12500 zł., więc 729 razy summa którą przyniósł mniej 9100000 zł. równa się 12500 zł albo 729 razy ta summa równa się 9100000 zł. więcej 12500 zł,. to jest równa się 9112500 zł. Zatem, dzieląc 9112500 przez 729, znajdziemy szukaną summę, to jest 12500 zł. Więc gracz przyniósł do gry summę 12500 zł. i z nią odszedł; zatem ani wygrał ani przegrał.

Zagadnienie XXVI. *Pewna osoba, trzymając liczbony w obydwóch rękach, mówi: gdybym przełożyła jeden liczbon z prawej ręki do lewej, byłaby ta sama liczba w obydwóch rękach; a gdybym przeciwnie, z lewej ręki przełożyła jeden liczbon do prawej, wtedy w prawej ręce byłoby dwa razy więcej niż w lewej. Ileż jest liczbonów w każdej ręce?*

Pierwszy warunek pokazuje że w prawej ręce jest *dwa* liczbony więcej niż w lewej. Więc, jeśli przełożymy jeden liczbon z lewej ręki do prawej, będzie w prawej 4 liczbony więcej niż w lewej. Ale wtedy, na mocy drugiego warunku, prawa ręka powinna zawierać *dwa razy* więcej niż lewa; więc w prawej ręce znajduje się 8 liczbonów a w lewej 4. Zatem było w prawej ręce 7 liczbonów a w lewej 5.

Zagadnienie. XXVII. *Napisać liczbę* 789 *w układzie liczenia* ósemnym, *i nawzajem.*

Układ liczenia ósemny opiera się na ugodzie że, ***wszelka** cyfra postawiona na lewej stronie drugiej wyraża jedności* osiem *razy większe niż jedności tej drugiej*. Zatem układ ósemny potrzebuje tylko *siedmiu* pierwszych cyfer znaczących i ósmej *zero*, do wyrażenia wszelkiej liczby. Układ *dwójny* potrzebowałby tylko dwóch cyfer to jest: 1 i 0.

Po tem krótkiem objaśnieniu, nie trudno będzie napisać liczbę 789 w układzie ósemnym. Jakoż, ta liczba zawiera więcej niż 7 jedności *pierwszego* rzędu ósemnego; zamieniamy je tedy na jedności *drugiego* rzędu, dzieląc przez 8: iloraz 98 oznacza jedności *drugiego* rzędu, a reszta 5 jedności *pierwszego*. Zamieniamy znowu 98 jedności drugiego rzędu na jedności *trzeciego*, dzieląc przez 8; iloraz 12 oznacza jedności *trzeciego* rzędu, a reszta 2 jedności *drugiego*. Nakoniec dzieląc 12 przez 8 znajdujemy 1 jedność *czwartego* rzędu, i 4 jedności *trzeciego*.

Więc liczba 789, napisana w układzie liczenia ósemnym, wyraża się przez 1425.

Nawzajem, aby przełożyć liczbę układu *ósemnego* na dziesiętny, dosyć wiedzieć że układ liczenia ósemny opiera na *podstawie* 8, to jest że każda cyfra oznacza jedności 8 razy większe od jedności cyfry stojącej po prawej stronie. To zrozumiawszy, weźmy liczbę 1425, napisaną w układzie *ósemnym*, i przełóżmy ją na *dziesiętny*. Zamieniamy jedności *czwartego* rzędu na *trzeci*, mnożąc je przez 8; co daje $1.8=8$: dodajemy 4 jedności *trzeciego* rzędu, co razem czyni 12 jedności *trzeciego* rzędu. Tak samo, mnożymy 12 przez 8 i dodajemy 2; co daje $96+2$ czyli 98 jedności *drugiego* rzędu: nakoniec, mnożymy prez 8 i dodajemy 5; co daje $784+5$ czyli 789 jedności pierwszego rzędu.

Więc liczba 1425 układu *ósemnego* znaczy 789 w układzie dziesiętnym. Co sprawdza nasz rachunek.

Uwaga. Możnaby przełożyć liczbę 1425 układu *ósemnego* na *dziesiętny*, takim samym sposobem jakim przełożyliśmy liczbę 789 układu dziesiętnego na ósemny, to jest przez dzielenie; dosyć byłoby podzielić 1425 przez podstawę 10, wyrażoną w układzie *ósemnym*, to jest przez 12, i wykonać dzielenie wedle tego układu; znalezionoby iloraz 116, i resztę 11 która oznacza cyfrę 9 jedności układu *dziesiętnego*. Następnie trzebaby podzielić 116 przez 12; i tak dalej.

Cwiczenia.

I. Dowieśdź że w każdem dzieleniu reszta jest mniejsza od połowy dzielnej.

II. Reszta z dzielenia nie zmienia się, gdy do dzielnej dodaje się albo od niej odejmuje pewną liczbę razy dzielnik, ale iloraz zwiększa się albo zmniejsza tą liczbą.

III. Reszta z podzielenia wieloczynu przez liczbę całkowitą równa się reszcie z podzielenia wieloczynu reszt czynników przez tę liczbę.

IV. Gwiazda najbliższa ziemi jest 226665 razy odleglejsza od ziemi niż Słońce. Znaleźć ile światło potrzebuje czasu, aby przyjść od tej gwiazdy do nas, wiedząc że przychodzi do nas od Słońca w 8 minut 18 sekund.

Odpowiedź. Około 3 lata 7 miesięcy.

V. Dwie osoby, z których jedna ma lat 40 a druga 60, pytają trzeciej jaki jej wiek? Ta odpowieda: mój wiek mieści się między waszemi; a jeśli podzielicie liczbę moich lat przez 4, przez 6, przez 8, przez 12, znajdziecie zawsze tę samą resztę 3. Ileż ma lat trzecia osoba?

Odpowiedź. 51 lat.

VI. Znaleźć liczbę która o tyle przewyższa 18, o ile jej poczwórność przewyższa 90.

Odpowiedź. 24.

VII. Dzieląc dzielnę przez 20 znajduje się pewny iloraz, dodając 48 do dzielnej i dzieląc przez 22, znaleziono ten sam iloraz. Jakaż jest dzielna?

Odpowiedź. 480.

VIII. Znaleźć liczbę która, podzielona przez 30, daje pewny iloraz i resztę 13; a podzielona przez 25, daje iloraz większy o 3 jedności od pierwszego, i tę samą resztę.

Odpowiedź. 463.

IX. Mając dwie liczby 402 i 253 napisane w układzie liczenia którego podstawą jest 6, odciągnąć drugą od pierwszej. Potem przełożyć wszystko na układ liczenia dziesiętny i sprawdzić.

X. Do jednej stągwi napełnionej wodą przyprawiono trzy kurki. Pierwszym odpływa 10 kwart wody w 3 minutach, drugim 18 kwart w 6 minutach, trzecim 25 kwart w 15 minutach. Otworzono wszystkie trzy kurki razem; ileż odpłynie wody w 2 godzinach? przypuszczając że stągiew ciągle się zkądinąd napełnia.

Odpowiedź. 960 kwart.

XI. Wieloczyn dwóch liczb jest 692742. Jeśli się powiększy o 7 jedną z tych liczb i wykona mnożenie, wieloczyn będzie 698888. Znaleźć te liczby.

Odpowiedź. 878 i 789.

XII. Pewien kupiec zakupił dwa równe stada baranów. Pierwszego stada płacił 192 złote zł. tuzin baranów, drugiego 336 zł. tuzin. Sprzedał potem ryczałtem te barany po 25 złotych sztukę, i zarobił 516 złotych. Ileż kupił baranów ?

Odpowiedź. 172 baranów.

XIII. Mnożąc pewną liczbę przez summę dwóch innych, powiększono ją 18 razy jej wartością ; a zaś mnożąc przez różnicę tych liczb, powiększono ją tylko 10 razy jej wartością. Wiedząc że summa trzech liczb czyni 144, znaleźć te liczby.

Odpowiedź, 125, 15, 4.

XIV. Dwa zegarki wskazują oba godzinę 2gą 3 minut 21 sekund. Pierwszy spieszy się 2 sekundy a drugi spóźnia się 1 sekundę, co 15 godzin. Po jakim czasie te dwa zegarki będą wskazywały tę samą godzinę?

XV. Znaleźć trzy liczby takie żeby summa dwóch pierwszych była 60, summa dwóch drugich 80, a summa pierwszej i trzeciej 68.

Odpowiedź. 24, 36, 44.

XVI. Ojciec ma 59 lat a syn 13 ; za ile lat ojciec będzie trzy razy starszy od syna ?

Odpowiedź. Za 10 lat.

XVII. Robotnik z żoną pracują razem. Pierwszy raz robotnik pracował 12 dni a żona 10 dni, i dostali 90 złotych ; drugi raz robotnik pracował 9 dni a żona 7 dni, i dostali 66 złotych. Ileż na dzień zarabiał robotnik a ile jego żona ?

Odpowiedź. Robotnik zarabiał 5 złotych a żona 3 złote.

XVIII. Dwie osoby przynoszą na spólny obiad ; pierwsza 7 potraw a druga 2. Trzecia osoba, która bierze udział w tym obiedzie, płaci za siebie 6 złotych pierwszej osobie, Ileż druga ma zapłacić pierwszej aby każda ten sam poniosła koszt ?

Odpowiedź. 2 złote.

XIX. 63 sztuk pięciozłotówek i dwozłotówek czynią summę 195 zł. Ileż jest pięciozłotówek a ile dwózłotówek ?

Odpowiedź. 40 dwózłotówek, 23 pięciozłotówek.

XX. Gdy dwie liczby a i b niesą podzielne przez 3, dowieśdź że wtedy różnica $a^6 - b^6$ jest podzielna przez 9.

ROZDZIAŁ TRZECI.

PODZIELNOŚĆ LICZB.

Własności liczb są bardzo obszerne i równie głębokiej jak rozległej wymagają umiejętności. Arytmetyka o niektórych tylko, całkiem elementarnych, własnościach liczb mówić może.

59. Określenie. Mówi się że jedna liczba jest *podzielna* przez inną gdy iloraz *zupełny* z podzielenia pierwszej przez drugą jest liczbą całkowitą. I tak, 12 jest podzielne przez 4, bo iloraz zupełny z podzielenia 12 przez 4 jest liczbą całkowitą 3: albo innemi słowy, 12 jest podzielne przez 4, bo 12 zawiera 4 *dokładnie* 3 razy. Tak samo 12 jest podzielne przez 2, 3, 6, 12. Nawzajem, liczby 1, 2, 3, 4, 6, 12 które dzielą dokładnie 12, nazywają się *dzielnikami* liczby 12.

Wynika z określenia że wszelka liczba *całkowita* jest *podzielna* przez siebie samą i przez *jedność*.

60. Liczba podzielna przez inną nazywa się jej *wielownikiem*. I tak, 10 jest wielownikiem liczb 2 i 5. Widzimy że wszelki wielownik liczby jest podzielny przez tę liczbę, i nawzajem wszelka liczba podzielna przez inną jest jej wielownikiem.

Dzielniki liczby nazywają się jej *czynnikami* albo czasem *pod-wielownikami*. I tak, dzielniki 4, 5 liczby 20 są jej pod-wielownikami albo czynnikami.

Cecha podzielności liczb przez 2, 4, 8; 5, 25; 3, 9; 11.

Cechy podzielności liczb opierają się na dwóch następujących zasadach.

61. *Wszelka liczba która dzieli inne liczby, dzieli ich summę.* Niech będą liczby 8, 12, 40 podzielne przez 4. Powiedam że

summa tych liczb jest także podzielna przez 4. Jakoż, każda z tych liczb jest wielownikiem liczby 4; więc ich summa jest widocznie wielownikiem liczby 4; czyli, co to samo, jest podzielna przez 4.

62. Wynika ztąd następujący wniosek:

Wszelka liczba, dzieląca inną, dzieli tem samem jej wielowniki. I tak, 3 dzieli 12; powiedam że 3 dzieli także wszelki wielownik z 12, jako 24, 36, 48... Bo wielowniki liczby 12 są summą utworzoną z tej liczby powtórzonej pewną liczbę razy: więc są podzielne przez 3.

63. *Wszelka liczba, dzieląca dwie inne, dzieli ich różnicę.*

Niech będą dwie liczby 25 i 15 podzielne przez 5; powiedam że ich różnica 10 jest podzielna przez 5. Jakoż, każda z dwóch liczb danych jest wielownikiem liczby 5; więc ich różnica, będąc różnicą wielowników liczby 5, jest wielownikiem tej liczby; czyli, co to samo, jest podzielną przez 5.

64. Wynika ztąd oczywiście że:

Wszelka liczba, która dzieli summę złożoną z dwóch części i jedną z tych części, dzieli tem samem drugą część.

Dodamy tu jeszcze jedno twierdzenie które, chociaż nam obecnie nie jest potrzebne, może być gdzieindziej użyteczne.

65. *Gdy dwie liczby, podzielone przez trzecią, dają tę samą resztę, ich różnica jest podzielna przez tę trzecią. I nawzajem.*

Niech będą dwie liczby, jako 61 i 33 które, podzielone przez 7, dają tę samą resztę 5. Powiedam że różnica tych dwóch liczb, to jest 28, jest podzielną przez 7. Jakoż, dzieląc 61 przez 7, mamy

$$61 = 7 \times 8 + 5.$$

Dzieląc 33 przez 7, mamy także

$$33 = 7 \times 4 + 5.$$

Odciągając te dwie równości od siebie, wynika

$$61 - 33 = 7 \times 8 - 7 \times 4.$$

Druga strona tej równości pokazuje że różnica 61 — 33 dwóch liczb zadanych jest wielownikiem liczby 7; a więc jest podzielną przez 7. Co właśnie dowodzi naszego twierdzenia.

Nawzajem, *gdy różnica dwóch liczb jest podzielna przez trzecią, wtedy każda z dwóch liczb, podzielona przez tę trzecią, daje tę samą resztę.*

I w samej rzeczy, na mocy powyższych równości, różnica dwóch liczb zadanych jest wielownikiem liczby 7 więcej różnicą reszt, jeśli jest jaka. Owoż, liczba 7 dzieląc z założenia różnicę dwóch liczb, i dzieląc oczywiście wielownik liczby 7, musi dzielić różnicę reszt. Więc ta różnica reszt jest zero; czyli, co to samo, te reszty są równe.

Cecha podzielności przez 2, 4, 8.

66. Podzielność przez 2. Wszelka liczba może się uważać jako złożona z dwóch tylko części, to jest z *dziesiątków* i *jedności*, np. 2456 może się pisać $2456 = 2450 + 6$. Owoż, dziesiątki są podzielne przez 2; bo każdy dziesiątek jest wielownikiem z 2, to jest $10 = 2 \times 5$. Więc, jeśli jedności są podzielne przez 2, cała liczba, jako summa wszystkich dziesiątków i jedności, jest podzielna przez 2. A jeśli jedności nie są podzielne przez 2, cała liczba nie może być podzielna przez 2 (zasada II wnios.). Ztąd wnosimy że, *aby dana liczba była podzielna przez 2, trzeba i dosyć jest aby ostatnia jej cyfra, to jest cyfra jedności, była podzielna przez 2.*

Zatem liczba 2456 jest podzielna przez 2.

Gdy liczba nie jest podzielna przez 2, otrzymuje się resztę dzieląc tylko ostatnią cyfrę przez 2.

Uwaga. Cyfry podzielne przez 2 są 2, 4, 6, 8 i 0.

Określenie. Liczba nazywa się *parzystą* albo *nieparzystą*, według tego jak jest albo niejest podzielna przez 2.

68. Podzielność przez 4. *Liczba jest podzielna przez 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.*

Jakoż, wszelka liczba może się uważać jako złożona ze *set* i z liczby którą tworzą dwie ostatnie cyfry, np. $7836 = 7800 + 36$.

Owoż, sta są podzielne przez 4, bo $100 = 4 \times 25$. Więc, aby liczba była podzielna przez 4, trzeba i dosyć jest *aby dwie ostatnie jej cyfry tworzyły liczbę podzielną przez 4*. Zatem liczba 7836 jest podzielna przez 4, bo 4 dzieli liczbę 36.

Wynika ztąd że, gdy dana liczba nie jest podzielna przez 4, otrzymuje się resztę dzieląc tylko przez 4 liczbę utworzoną z dwóch ostatnich cyfer.

Liczba podzielna przez 4 nazywa się czasem *podwójnie parzystą*.

69. Podzielność przez 8. *Liczba jest podzielna przez 8, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8.*

Jakoż, wszelka liczba może się uważać jako złożona z *tysięcy* i z liczby którą tworzą trzy ostatnie jej cyfry; np. $54128 = 54000 + 128$. Owoż, tysiące są podzielne przez 8, bo $1000 = 8 \times 125$. Więc, aby liczba była podzielna przez 8, trzeba i dosyć jest *aby trzy ostatnie jej cyfry składały liczbę podzielną przez* 8. Zatem 54128 jest podzielne przez 8, bo 8 dzieli 128.

Gdy dana liczba nie jest podzielna przez 8, otrzymuje się resztę dzieląc tylko przez 8 liczbę którą tworzą trzy ostatnie cyfry. I tak, będziemy mieli resztę z podzielenia liczby 17845 przez 8, dzieląc tylko 845 przez 8; ta reszta jest 5.

Uwaga. Rozumując podobnie jako wyżej, znajduje się łatwo cecha podzielności liczb przez 16, 32, etc.

Cecha podzielności przez 5 i 25.

70. Podzielność przez 5. *Liczba jest podzielna przez 5, gdy się kończy na cyfrę podzielną przez* 5.

Jakoż, wszelka liczba może się uważać jako złożona z *dziesiątków* i jedności, np. $1235 = 1230 + 5$. Owoż, dziesiątki są podzielne przez 5; bo $10 = 5 \times 2$. Więc, aby liczba była podzielna przez 5, trzeba i dosyć jest aby jej ostatnia cyfra była podzielna przez 5. Zatem 1235 jest podzielne przez 5.

Gdy liczba nie jest podzielna przez 5, otrzymuje się resztę dzieląc tylko ostatnią cyfrę przez 5.

71. Podzielność przez 25. *Liczba jest podzielna przez 25, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 25.*

Jakoż, wszelka liczba może się uważać jako złożona ze *set* i z liczby którą tworzą dwie ostatnie cyfry; np. $1675 = 1600 + 75$. Owoż, sta są podzielne przez 25; bo $100 = 25 \times 4$. Więc, aby liczba była podzielna przez 25, trzeba i dosyć jest *aby dwie ostatnie jej cyfry tworzyły liczbę podzielną przez* 25.

Zatem 1675 jest podzielne przez 25, bo 25 dzieli 75.

Gdy liczba nie jest podzielna przez 25, otrzymuje się resztę dzieląc tylko przez 25 liczbę którą tworzą dwie ostatnie jej cyfry. I tak, aby mieć resztę z podzielenia liczby 57896 przez 25, dosyć jest podzielić 96 przez 25; co daje resztę 21.

72. Uwaga. Widzimy łatwo że cecha podzielności przez 5 i 25 jest taka sama jak cecha podzielności przez 4 i 8.

Nie trudno także, rozumując jako powyżej, znaleźć że *liczba jest podzielna przez* 125 *jeśli trzy ostatnie jej cyfry tworzą liczbę podzielną przez* 125.

Cecha podzielności przez 3 i 9.

73. Podzielność przez 9. *Liczba jest podzielna przez 9, gdy summa jej cyfer jest podzielna przez* 9.

Uważajmy najpierwej, że jedność wszelkiego rzędu jest wielownikiem z 9, więcej 1; i tak np. $1000 = 999 + 1$. A zaś 1 może się uważać jako wielownik *zera* przez *dziewięć* więcej *jeden*, to jest wyraźniej $1 = 9 \times 0 + 1$. To zrozumiawszy, niech będzie liczba jakakolwiek 7893. Ponieważ jedność każdego rzędu jest wielownikiem *dziewięciu* więcej 1; więc liczba jedności, wyrażona każdą cyfrą, jest wielownikiem *dziewięciu* więcej tą cyfrą. I mamy

$$\begin{aligned} 7000 &= w^k\,9 + 7 \\ 800 &= w^k\,9 + 8 \\ 90 &= w^k\,9 + 0 \\ 3 &= 0 \times 9 + 3 \end{aligned}$$

Dodając, znajdujemy $7893 = w^k\,9 + 7 + 8 + 3$. To pokazuje że liczba 7893 jest wielownikiem *dziewięciu* więcej summą cyfer. Ztąd wnosimy że, *aby liczba była podzielna przez 9, trzeba i dosyć jest aby summa jej cyfer była podzielna przez 9.* Zatem 7893 jest podzielne przez 9; bo summa cyfer $7+8\times9+3$, która czyni 27, jest podzielna przez 9.

Uwaga. Obliczając summę cyfer, niema potrzeby zważać na cyfrę 9. Można nawet opuszczać wielowniki z 9, w miarę jak się do nich dochodzi, i zatrzymywać w pamięci samą tylko przewyżkę nad 9. I tak, jeśli chcemy wiedzieć czy liczba 649875325 jest podzielna przez 9, liczymy summę cyfer, mówiąc 6 i 4, 10; przewyżka 1. Dalej, 1 i 8. 9; przewyżka 0. Dalej, 8 i 7, 15; przewyżka 6 : a 5, 11; przewyżka 2; a 3, 5; a 2, 7; a 5, 12; przewyżka 3. To pokazuje że zadana liczba nie jest podzielna przez 9, i daje 3 na resztę.

74. Podzielność przez 3. Ponieważ wielownik z 9 jest zarazem wielownikiem ze 3; przeto, na mocy powyższego rozumowania, wszelka liczba jest wielownikiem ze 3 więcej summą jej cyfer. A więc, *liczba jest podzielna przez 3, gdy summa jej cyfer jest podzielna przez 3.*

Zatem liczba 78654 jest podzielna przez 3; bo 3 dzieli summę cyfer $7+8+6+5+4$, która czyni 30.

Z tego co poprzedza wynika że, aby mieć resztę z dzielenia liczby przez 3 albo przez 9, dosyć jest podzielić, przez 3 albo przez 9, summę cyfer tej liczby.

I tak, liczba 6981964 podzielona przez 9 daje resztę 7, a podzielona przez 3 daje na resztę 1.

Cecha podzielności przez 11.

75. Uważajmy najpierwej, że 1 ani 10 nie dzielą się przez 11: ale możemy uważać że 1 jest wielownikiem z 11 przez zero więcej 1, i podobnie 10 wielownikiem z 11 przez zero więcej 10. Tak że mamy

$$1 = 11\times0 + 1$$
$$10 = 11\times0 + 10$$

Uważajmy potem że jedność *trzeciego* rzędu, to jest 100, podzielona przez 11, daje 1 na resztę, bo $100=99+1=11\times9+1$. A zaś jedność *czwartego* rzędu, to jest 1000, podzielona przez 11, daje 10 na resztę; bo $1000=990+10=11\times 90+10$. Tak samo, dzieląc jedność *piątego* rzędu, to jest 10000, przez 11, mamy 1 na resztę; bo $10000=9999+1=11\times 909+1$. A zaś dzieląc jedność *szóstego* rzędu, to jest 100000, przez 11, otrzymujemy 10 na resztę; bo $100000=99990+10 =11\times 9090+10$.

To wszystko jasno pokazuje że jedność rzędu *nieparzystego* jest wielownikiem z 11 więcej 1; a zaś jedność rzędu *parzystego* jest wielownikiem z 11 więcej 10.

Niech będzie teraz liczba jakakolwiek 264795135. Jeśli, zaczynając od prawej strony, podzielimy ją na kolumny po *dwie* cyfry zawierające, każda z tych kolumn, na mocy powyższej uwagi, będzie wyrażała jedności rzędu nieparzystego. Zatem każda kolumna jest wielownikiem z 11 więcej tyle jedności ile ich zawiera. Ztąd wnosimy że dana liczba jest wielownikiem z 11 więcej summą tych kolumn.

Owoż, pierwsza kolumna 35 jest wielownikiem z 11 więcej *przewyżką* 2; bo $35=33+2=11\times 3+2$. Podobnie, druga kolumna 51 jest wielownikiem z 11 więcej przewyżką 7; bo $51=44+7=11\times 4+7$.

I tak następnie, trzecia kolumna 79 jest wielownikiem z 11 więcej przewyżką 2; bo $79=77+2$. Potem czwarta kolumna 64 jest wielownikiem z 11 więcej przewyżką 9; bo $64=55+9$. A nakoniec piąta kolumna 2 jest wielownikiem z 11 więcej przewyżką 2.

Więc dana liczba 264795135 jest wielownikiem z 11 więcej summą przewyżek nad 11 wziętych w każdej kolumnie. Ztąd wnosimy że *liczba będzie podzielna przez* 11, *jeśli summa tych przewyżek jest podzielna przez* 11.

Rzeczone przewyżki łatwo się otrzymują, bacząc tylko na to że wielowniki z 11, zawarte w kolumnach, składają się z dwóch tych samych cyfer, jako 11, 22, 33... Dosyć przeto odciągnąć od każdej kolumny największą liczbę, złożoną z dwóch tych samych cyfer, jaka się w niej zawiera; reszta będzie przewyżką nad 11. Stosując to do liczby 264795135, znajdziemy że summa przewyżek w kolumnach jest $2+7+2+9+2$, czyli 22. Ta summa jest wielownikiem z 11. Więc dana liczba 264795135 jest podzielna przez 11.

Gdy liczba nie jest podzielna przez 11, wtedy reszta jest przewyżką nad 11 summy przewyżek wziętych jakośmy dopiero co okazali. I tak, w liczbie 36789451, summa rzeczonych przewyżek jest $7+6+1+3 = w^k\ 11+6$. To pokazuje że reszta z podzielenia zadanej liczby przez 11 jest 6 (*).

Próba mnożenia i dzielenia przez 9 i 11.

76. Tu jest miejsce pokazać jakim sposobem można łatwo sprawdzić czy wykonane mnożenie albo dzielenie jest dokładne; czyli, jako się zwykle mówi, zrobić próbę mnożenia albo dzielenia.

Dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy, weźmy przykład. Zaczynając od *próby mnożenia*, szukajmy najpierwej wieloczynu liczby 3786 przez 458.

Wykonywając mnożenie, otrzymujemy

$$\begin{array}{r} 3786 \\ 458 \\ \hline 30288 \\ 18930 \\ 15144 \\ \hline 1733988 \end{array}$$

Aby się przekonać czy znaleziony wieloczyn jest prawdziwy, a przynajmniej aby mieć prawdopodobieństwo że nim jest, uważajmy że, wedle cechy podzielności przez 9, mnożna 3786 jest wielownikiem z 9 więcej przewyżką 6; a zaś mnożnik 458 jest wielownikiem z 9 więcej przewyżką 8. Zatem mamy:

$$\begin{array}{r} 3786 = w^k\ 9 + 6 \\ 458 = w^k\ 9 + 8 \\ \hline 3786 \times 458 = w^k\ 9 + 6.8 = w^k\ 9 + 3. \end{array}$$

(*) O podzielności przez 7, 13, 37, zobacz notę na końcu dzieła.

Owoż, wykonywając mnożenie, otrzymaliśmy wieloczyn 1733988; wykonywając zaś mnożenie wielowników, mnożymy naprzód mnożnę w^k 9+6 przez pierwszy wyraz mnożnika, to jest przez wielownik z 9; co daje wielownik z 9: potem mnożymy tę mnożnę przez drugi wyraz mnożnika, to jest przez 8, co daje w^k $9+6\times 8$. Ale wieloczyn przewyżek, 6×8, czyli 48, jest wielownikiem z 9 więcej przewyżką 3. Więc cała druga strona jest wielownikiem z 9, więcej przewyżką 3; czyli, jakośmy napisali, w^k $9+3$. Jeśli przeto znaleziony wieloczyn 1733988 jest dokładny, to musi być wielownikiem z 9 więcej 3; to jest jego przewyżka nad 9 powinna się równać znalezionej przewyżce 3 wieloczynu przewyżek. Co właśnie ma miejsce.

Pamiętajmy wszakże że ta zgodność przewyżek daje tylko prawdopodobieństwo dokładności, nie zaś pewność wyniku. Możnaby albowiem przemienić porządek cyfer wieloczynu, albo położyć 0 za 9 i nawzajem, a próba jeszczeby się udała i nie ostrzegłaby o błędzie. Ale taki zbieg okoliczności, chociaż możebny, rzadko się zdarzać musi; i próba przez 9, dla swej prostoty w zastosowaniu, jest nader użyteczna.

77. UWAGA. Gdy jeden z czynników daje przewyżkę 0, niema potrzeby szukać przewyżki drugiego czynnika; bo już wiemy że wieloczyn przewyżek jest *zero*.

I tak, w wieloczynie $534\times 702=374868$, drugi czynnik daje przewyżkę 0; więc przewyżka wieloczynu powinna być 0; co też znajdujemy.

78. *Próba dzielenia.* Na zastosowanie, niech będzie do podzielenia 37569 przez 860.

Wykonywając działanie, znajdujemy

$$\begin{array}{r|l} 37569 & 860 \\ \cline{2-2} 3169 & 43 \\ 589 & \end{array}$$

Aby sprawdzić, czy otrzymane wyniki są dokładne, uważajmy że, ponieważ dzielna jest wieloczynem z dzielnika przez iloraz więcej resztą, przewyżka dzielnej nad 9 równa się przewyżce wieloczynu z przewyżek dzielnika i ilorazu, więcej przewyżką reszty. To pokazuje że rachunek z przewyżkami jest ten sam co z odpowiednemi liczbami. Nie wchodząc zatem w dalsze szczegóły, powiedamy że próba dzielenia odbywa się następującym sposobem. Dzielnik 860 daje przewyżkę 5, a iloraz 43 przewyżkę 7; wieloczyn tych przewyżek jest $5 \times 7 = 35$, i daje przewyżkę 8; reszta 589 daje przewyżkę 4. Owoż, summa dwóch ostatnich przewyżek czyni 12, i daje przewyżkę 3: a że dzielna 37569 daje także przewyżkę 3; więc, wedle prawdopodobieństwa, znaleziony iloraz 43 i reszta 589 są dokładne.

Uwaga. Próba przez 9 stosuje się także do dodawania i odciągania, ale ten sposób sprawdzania summy albo różnicy nie jest dość prosty.

79. Można także robić próbę mnożenia i dzielenia przez 11, działając z przewyżkami nad 11 tak jakośmy powyżej działali z przewyżkami nad 9. Wykładać tego nie widzimy już potrzeby; przykład wystarczy. I tak, w powyższem mnożeniu, przewyżka mnożnej nad 11 jest 2, a mnożnika 7; wieloczyn 14 tych przewyżek daje przewyżkę 3. Owoż, przewyżka wieloczynu 1733988 jest także 3; ta zgodność przewyżek sprawdza niejako rachunek.

W ostatniem dzieleniu, przewyżka dzielnika nad 11 jest 2, przewyżka ilorazu jest 10: wieloczyn tych przewyżek czyni 20, i daje przewyżkę 9; a zaś reszta daje przewyżkę 6. Summa dwóch ostatnich przewyżek czyni 15, i daje przewyżkę 4. Ale dzielna daje także przewyżkę 4; więc jest prawdopodobieństwo że rachunek dobrze wykonany.

Uwaga. Próba przez 11 daje może więcej pewności niż próba przez 9; bo ostrzega o przemianie *zer* na *dziewiątki* i nawzajem, jak równie o przemianie miejsca cyfer między sobą; ale rachunek sprawdzania jest nieco dłuższy. Dlatego też próba przez 9 zachowuje swoją zaletę, która gdzieindziej jeszcze jest użyteczniejsza.

LICZBY PIERWSZE.

80. OKREŚLENIE. Liczba nazywa się *pierwszą* gdy jest podzielna tylko przez siebie samą i przez jedność, jako 2, 3, 5, 7... Znajomość liczb pierwszych jest użyteczna w wielu zastosowaniach ; dlatego ułożono ich tablice dosyć rozciągłe.

Oto prosty sposób ułożenia *tablic liczb pierwszych.*

Wiemy już że, oprócz 2, liczby parzyste nie są pierwsze. Piszemy tedy w naturalnym porządku tyle liczb nieparzystych, ile chcemy. Ograniczając się na 100 pierwszych liczbach nieparzystych, mamy

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67,
69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99,
101, 103. 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123,
125, 127. 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147,
149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171,
173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195,
197, 199, 201.

Uważajmy teraz że te liczby tworzą się dodając następnie po dwie jedności. Na mocy tej ustawy, każda *trzecia* liczba, idąca po liczbie 3, jest jej wielownikiem. Przekreślamy więc wszystkie trzecie liczby idące po liczbie 3, jako 9, 15, 21 etc. Przekreślamy potem wszystkie liczby zakończone na 5, jako wielowniki tej liczby, zostawiając samo 5. Następnie uważamy że każda *siódma* liczba, idąca po liczbie 7, jest jej wielownikiem. Ale wielowniki 3 razy 7, 5 razy 7 już zostały przekreślone, jako wielowniki ze 3 i z 5 ; zostaje tylko 7 razy 7 to jest 49, *kwadrat* z 7, i następujące. Zaczynając tedy od kwadratu z 7, przekreślamy ten kwodrat i każdą siódmą liczbę po nim idącą, Przechodzimy potem do następującej liczby pierwszej 11, i widzimy że każda *jedenasta* liczba, po niej idąca, jest jej wielownikiem. Ale 3 razy 11, 5 razy 11, 7 razy 11, 9 razy 11, już przekreślone jako wielowniki z 3, 5 i 7. Zostaje tylko kwadrat z 11 to jest 121, i następujące. Aż do kwadratu 121 wszystkie nie przekreślone liczby są widocznie *pierwsze*. Przekreślamy tedy kwadrat z 11 to jest 121, i każdą jedenastą liczbę po nim idącą. Przechodzimy teraz do liczby 13, i widzimy, rozumując jako wyżej, że każda *trzynasta* liczba, po niej idąca, jest jej wielownikiem, i że wielowniki niższe od 13 razy 13, to jest mniejsze od kwadratu z 13, są już przekreślone. Zatem, przekreślamy kwadrat ze 13, to jest 169, i każdą trzynastą liczbę po nim idącą. Pozostałe liczby aż do kwadratu z 17, to jest aż do 289, są pierwsze. Ograniczając się na liczbach napisanych, i dołączając do liczb pierwszych któreśmy znaleźli, liczbę 2, która jest jedyną liczbą pierwszą między parzystemi, będziemy mieli następującą tablicę z 47 liczb pierwszych w porządku naturalnym idących:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17; 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 479, 181, 191, 193, 197, 199.

81. Eratostenes ułożył tablicę liczb pierwszych, pisząc je w kształcie spiralnej przetaka, którego dziurki stanowiły liczby niepierwsze. Dlatego ten układ nazwano *przetakiem Eratostenesa* (*).

82. Twierdzenie. *Ciąg liczb pierwszych jest nieskończony.*

Czyli, innemi słowy, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Jakoż, przypuśćmy, jeśli można, że największa liczba pierwsza jest 199. Ze wszystkich liczb pierwszych zróbmy wieloczyn i do niego dodajmy 1, będziemy mieli summę $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots 199 + 1$.

Teraz, z dwóch rzeczy jedna, albo ta summa jest liczbą pierwszą, albo nie jest. W pierwszym razie, jeśli summa $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \ldots \times 199 + 1$ jest liczbą pierwszą, to dowodem

(*) Eratostenes żył w Alexandryi 280 lat przed J. C.

że są liczby pierwsze większe od 199 ; a tem samem większe od wszelkiej innej. Więc wtedy twierdzenie dowiedzione, to jest że ciąg liczb pierwszych nie ma końca. W drugim razie, jeśli summa $1\times2\times3\times5\times7...\times199+1$ nie jest liczbą pierwszą, to znakiem że jest liczba pierwsza która ją dzieli. Owoż, tym dzielnikiem nie może być żadna z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7,... aż do 199 : bo, dzieląc summę i jedną z dwóch jej części, musiałaby dzielić część drugą, to jest jedność ; co nie możebne. Więc ta liczba pierwsza, dzieląca summę $1\times2\times3\times5\times7...\times199+1$ jest większa od 199. A zatem są liczby pierwsze większe od tak wielkiej liczby pierwszej jak się podoba. Co właśnie było do dowodzenia.

83. Gdyby zapytano, liczba 211 jest czy nie, liczbą pierwszą ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba probować dzielników pierwszych. I tak, liczby 2, 3, 5, 7, 11 widocznie nie są dzielnikami liczby 211.Dzielimy przez 13, i znajdujemy iloraz 16 i resztę 3. Dzielimy następnie przez 17, i znajdujemy iloraz 12 i resztę 7. Ponieważ otrzymaliśmy iloraz 12 mniejszy od dzielnika 17 ale z resztą 7, ztąd wnosimy że liczba 211 jest pierwsza. Iakoż, gdyby liczba większa od 17 mogła dzielić dokładnie 211, to dałaby iloraz mniejszy od 17, który byłby dzielnikiem liczby 211. Owóż, jesteśmy już pewni że żadna liczba mniejsza od 17 nie dzieli 211. A więc żadna liczba większa od 17 nie dzieli jej także. To pokazuje że dopóty trzeba probować dzielników pierwszych, dopóki dają ilorazy większe od siebie, i reszty ; a skoro tylko przychodzi się do dzielnika który daje iloraz równy albo mniejszy, ale z pewną resztą, należy już wnosić że dana liczba jest pierwszą. Iako widzimy, ten rachunek jest bardzo mozolny, a można powiedzieć niepraktyczny, gdy liczby są wielkie.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK.

84. Największym spólnym dzielnikiem dwóch liczb jest największa liczba możebna która je dzieli dokładnie. I tak,

niech będą dwie liczby 12 i 18. Widzimy łatwo że ich spólne dzielniki są 2, 3 i 6. Więc 6 jest największym spólnym dzielnikiem tych dwóch liczb.

85. Dwie liczby całkowite mają zawsze największy spólny dzielnik, choćby tylko jedność, jako 3 i 5.

Aby znaleźć największy spólny dzielnik dwóch liczb, np., 18 i 66 uważajmy że ten dzielnik, mając dzielić mniejszą z dwóch liczb, nie może być od niej większy. Gdyby przeto mniejsza liczba 18 dzieliła dokładnie większą 66, toby wtedy ona była największym spólnym dzielnikiém szukanym. Sprobujmyż więc czy 18 nie dzieli dokładnie 66. Wykonywając dzielenie, znajdujemy że 18 mieści się 3 razy w 66, ale jest jeszcze reszta 12.

To pierwsze działanie pokazuje że 18 nie jest największym spólnym dzielnikiem liczb 18 i 66. Chociaż ono nie wyznacza tego największego dzielnika, daje nam jednak równość $66=18\times3+12$ która posłuży do jego znalezienia.

Jakoż, na mocy tej równości, łatwo widzimy że największa liczba która dzieli dzielnę 66 i dzielnik 18, dzieli tem samem wieloczyn 18×3; a zatem dzieli resztę 12 która jest różnicą między dzielną 66 i wieloczynem, 18×3, dzielnika przez iloraz. I nawzajem, największa liczba która dzieli dzielnik 18 i resztę 12, dzieli także dzielnę 66 która jest summą wieloczynu 18×3 i reszty 12. Ztąd wnosimy że, aby znaleźć największy spólny dzielnik między dzielną 66 i dzielnikiem 18, dosyć jest szukać go między dzielnikiem 18 i resztą 12. To drugie poszukiwanie będzie łatwiejsze od poprzedzającego, bo się wykona na liczbach mniejszych.

Więc znowu probujemy czy mniejsza liczba 12 nie dzieli dokładnie większej 18. Wykonawszy dzielenie, znajdujemy iloraz 1 i resztę 6.

Powtarzając teraz powyższe rozumowanie, widzimy bez najmniejszej trudności, że największy spólny dzielnik liczb 18 i 12 jest ten sam co liczb 12 i 6. Więc znowu poszukiwanie uproszczone.

Widzimy jasno że tak postępując, otrzymamy reszty coraz mniejsze. A ponieważ te reszty zmniejszają się za każdym razem, przynajmniej o jedność ; więc, albo dojdziemy do reszty zero, a wtedy odpowiedny dzielnik będzie największym spólnym dzielnikiem dwóch liczb danych ; albo też dojdziemy do reszty 1 która będzie, ona sama, największym spólnym dzielnikiem tych liczb.

W naszym przykładzie, dzieląc dzielnik 12 prrez resztę 6, otrzymujemy iloraz 2 i resztę zero. Co pokazuje że liczba 6 jest największym spólnym dzielnikiem liczb danych 66 i 18.

Rachunek poszukiwania największego spólnego dzielnika dwóch liczb tak się urządza

	3	1	2
66	18	12	6
		0	

Ilorazy piszą się nad dzielnikami, żeby mieć miejsce pod spodem na cząstkowe reszty, gdy dzielnik, zostając z kolei dzielną, zawiera poprzedzającą resztę więcej niż 9 razy. Następujący przykład wyraźniej to okaże.

86. Szukajmy największego spólnego dzielnika liczb 27852 i 9180.

Wykonywając działania, jakośmy wyżej powiedzieli, znajdujemy

	3	29	2	2	1	3
27852	9180	312	132	48	36	12
	2940				0	
	132					

Dzieląc 27852 przez 9180, piszemy iloraz 3 nad dzielnikiem, a mnożąc dzielnik przez iloraz, odciągamy cząstkowe wieloczyny od dzielnej, i piszemy cząstkowe reszty zaraz obok dzielnika : co daje resztę 312. Przez 312 dzielimy 9180, a ponieważ iloraz ma więcej niż jedną cyfrę, wykonywamy dzielenie zwyczajne, i znajdujemy resztę 132, którą piszemy obok dzielnika 312. Widzimy teraz dlaczego trzeba kłaśdź iloraz ponad dzielnikiem. Następnie, dzielimy 312 przez 132, i mamy resztę 48. Dzielimy dalej 132 przez 48, i mamy resztę 36. Teraz, widząc na spójrzenie że 36 mieści się raz tylko w 48, odciągamy zaraz 36 od 48 i znajdujemy resztę 12, która dzieli dokładnie dzielnik 36. Zatem 12 jest największym spólnym dzielnikiem liczb 9180 i 27852.

87. Niech będą jeszcze dwie liczby 727 i 69, których chcemy znaleźć największy spólny dzielnik.

Postępując wedle wskazanego prawidła, otrzymujemy

	10	1		6	2	
727	69	37	32	5	2	1
37						

Ostatnia reszta 1 pokazuje że największym i *jedynym* spólnym dzielnikiem dwóch liczb 727 i 69 jest 1.

88. Określenie. *Dwie liczby mające tylko jedność za największy spólny dzielnik nazywają się* PIERWSZEMI MIĘDZY SOBĄ.

I tak, liczby 4 i 9 są pierwsze między sobą, podobnie jako 727 i 69 którešmy dopiero co widzieli.

89. *Dwie liczby po sobie idące są pierwsze między sobą.*

Jakoż, wiemy że wszelka liczba, która dzieli dwie inne, dzieli ich różnicę; aże dwie liczby, po sobie idące, mają za różnicę jedność; więc tylko jedność może być ich spólnym dzielnikiem; czyli, co to samo, takie dwie liczby są pierwsze między sobą.

90. *Dwie liczby nieparzyste, po sobie idące, są pierwsze między sobą.*

Jakoż, dwie liczby nieparzyste, po sobie idące, mają za różnicę 2; więc ich spólnym dzielnikiem może być 1 albo 2. Ale 2 nie może dzielić liczb nieparzystych; więc dwie liczby nieparzyste po sobie idące, mając tylko jedność za spólny dzielnik, są pierwsze między sobą.

Dowodzi się podobnie że *dwie liczby nieparzyste, których różnica jest* 2^n , *są pierwsze między sobą.*

91. Uwaga. W poszukiwaniu największego spólnego dzielnika dwóch liczb, można czasem, nie prowadząc rachunku aż do końca, przekonać się że te liczby są pierwsze między sobą. To się zdarza gdy otrzymujemy na resztę liczbę pierwszą z dzielnikiem, a w szczególności liczbę pierwszą nie dzielącą dzielnika. W takim razie niema potrzeby iść dalej; bo oczywiście dwie zadane liczby są pierwsze między sobą. I tak, w poprzedzającym przykładzie, gdyśmy doszli do reszty 37, która jest liczbą pierwszą i nie dzieli dzielnika 69, mogliśmy na niej poprzestać; bo te dwie liczby, nie mając, prócz jedności, żadnego spólnego dzielnika, dostatecznie oznajmiają że liczby dane 727 i 69 są pierwsze między sobą. Jeśliśmy kontynowali rachunek, to jedynie dlatego aby służył na przykład działania, i zarazem na ćwiczenie (*).

Nim wyłożymy metodę znalezienia największego spólnego dzielnika wielu liczb, potrzebujemy kilku twierdzeń, któremi się teraz zajmiemy.

92. Twierdzenie. *Mnożąc albo dzieląc dwie liczby przez trzecią, mnoży się tem samem albo dzieli ich największy spólny dzielnik przez tę trzecią.*

Wiemy że, gdy się mnoży albo dzieli dzielnę i dzielnik przez tę samą liczbę, iloraz się nie zmienia, ale reszta zostaje pomnożona albo podzielona przez tę liczbę. Owoż, metoda znalezienia największego spólnego dzielnika dwóch liczb, którąśmy dopiero co wyłożyli, zależy na tem że się dzieli naprzód większą liczbę przez mniejszą, potem dzielnik przez resztę; następnie pierwszą resztę przez drugą; i tak dalej, aż się dojdzie do reszty która dzieli dokładnie poprzedzającą. Ta ostatnia reszta jest właśnie największym spólnym dzielnikiem dwóch liczb danych.

Wynika ztąd oczywiście że, jeśli się pomnoży albo podzieli dwie liczby przez trzecią, pierwsza reszta i wszystkie po niej

(*) Ile trzeba wykonać działań aby znaleźć największy spólny dzielnik dwóch liczb? — Zobacz notę na końcu dzieła.

idące, a tem samem największy spólny dzielnik, zostaną pomnożone albo podzielone przez tę liczbę.

Więc, innemi słowy, *wszelka liczba która mnoży albo dzieli dwie inne, mnoży tem samem albo dzieli ich największy spólny dzielnik.*

Weźmy, jako przykład, dwie liczby 40 i 24, których największy spólny dzielnik jest 8. Jeśli pomnożymy te liczby przez 10, wynikające ztąd liczby 400 i 240 będą miały największy spólny dzielnik 80, który jest 10 razy większy od 8. A jeśli przeciwnie, podzielimy 40 i 24 przez 2, ilorazy 20 i 12 będą miały spólny dzielnik 4, który jest dwa razy mniejszy od 8.

93. Twierdzenie. *Dwie liczby, podzielone przez ich największy spólny dzielnik, dają ilorazy pierwsze między sobą. I nawzajem.*

To twierdzenie jest widocznem następstwem poprzedzającego. Ale go można wprost tak dowieśdź.

Niech będą dwie liczby 42 i 60 które mają 6 za największy spólny dzielnik. Jeśli podzielimy te dwie liczby przez 6, powiedam że wynikłe ztąd ilorazy 7 i 10 są pierwsze między sobą. I w samej rzeczy, te ilorazy nie mogą mieć żadnego spólnego dzielnika, prócz jedności; bo, inaczej, liczba 6 nie byłaby największym spólnym dzielnikiem liczb 42 i 60.

Nawzajem, *jeśli dwie liczby, podzielone przez trzecią, dają ilorazy pierwsze między sobą, ta trzecia liczba jest największym spólnym dzielnikiem dwóch pierwszych.*

Niech będą dwie liczby 24 i 54 które, podzielone przez 6, dają ilozazy 4 i 9 pierwsze między sobą. Powiedam że 6 jest największym spólnym dzielnikiem liczb 24 i 54. Jakoż, z założenia największym spólnym dzielnikiem ilorazów 4 i 9 jest 1. Aże, mnożąc te ilorazy przez 6, mnożymy tem samem ich największy dzielnik przez 6; więc wieloczyny 4×6 i 9×6, to jest dane liczby 24 i 54, mają za największy spólny dzielnik wieloczyn 1×6, to jest liczbę 6.

Zrozumiawszy dobrze te twierdzenia, nie trudno będzie rozwiązać następujące zadanie.

94. Zagadnienie. *Znaleźć największy spólny dzielnik liczb* 360, 540, 1890 i 2820.

Szukajmy najpierwej największego spólnego dzielnika dwóch którychkolwiek z tych liczb, np. liczb 360 i 540. Największym spólnym dzielnikiem liczb 360 i 540 jest 180. Owoż, wiemy już (92) że wszelka liczba, która dzieli cztery dane liczby 360, 540, 1890 i 2820, dzieli tem samem największy spólny dzielnik 180 dwóch liczb 360 i 540. I nawzajem, wszelka liczba, która dzieli 1890, 2920 i największy spólny dzielnik 180 liczb 360 i 540, dzieli oczywiście te ostatnie. Ztąd wynika że największy spólny dzielnik *czterech* liczb danych 360, 540, 1890 2820 jest ten sam co *trzech* liczb 180, 1890 i 2820.

Powtarzając znowu powyższe rozumowanie, łatwo widzimy że największy spólny dzielnik *trzech* liczb 180, 1890 i 2820 jest ten sam co liczb 90 i 2820.

Tym sposobem rzecz największego spólnego dzielnika czterech liczb 360, 540, 1890 i 2820 przywodzi się do znalezienia największego spólnego dzielnika dwóch liczb 90 i 2820. Owoż te ostatnie mają 30 za największy spólny dzielnik. Więc liczba 30 jest największym spólnym dzielnikiem czterech liczb danych 360, 540, 1890 i 2820.

95. Wyłożona metoda znalezienia największego spólnego dzielnika wielu liczb, nie przedstawiając żadnej trudności, nie potrzebuje więcej przykładów do wyjaśnienia. Poprzestając na powyższym, zakończymy ten przedmiot następującemi zadaniami na ćwiczenia:

I. Znaleźć największy spólny dzielnik liczb 2400, 3120, 720, 1024 i 727.

II. Jeśli się pomnoży albo podzieli dane liczby przez tę samą liczbę, wtedy największy spólny dzielnik liczb danych zostanie pomnożony albo podzielony przez tę liczbę.

III. Jeśli się podzieli dane liczby przez ich największy spólny dzielnik, ilorazy, wzięte wszystkie razem, będą miały tylko jedność za największy spólny dzielnik, czyli, jako się zwykle mówi, będą pierwsze między sobą.

IV. Jeśli jedna liczba, dzieląc inne liczby, daje ilorazy które, wzięte razem, są pierwsze między sobą, ta liczba jest największym spólnym dzielnikiem liczb zadanych.

ZASADY PODZIELNOŚCI LICZB.

96. Zasada główna. *Wszelka liczba, która dzieli wieloczyn dwóch czynników i jest pierwsza z jednym z nich, dzieli drugi czynnik.*

Niech będzie liczba 6, która dzieli wieloczyn dwóch czynników 35×12, i jest pierwsza z czynnikiem 35; powiedam że liczba 6 dzieli drugi czynnik 12.

Jakoż, liczby 35 i 6, będąc z założenia pierwsze między sobą, mają tylko jedność za największy spólny dzielnik. Jeśli przeto pomnożymy te liczby przez 12, wieloczyny 35×12 i 6×12 będą miały 12 za największy spólny dzielnik (92). Owoż, 6 dzieli z założenia wieloczyn 35×12, i dzieli także wieloczyn 6×12 jako swój wielownik; więc dzieli największy spólny dzielnik tych wieloczynów, to jest 12. Co właśnie było do dowodzenia.

97. Zasada. *Liczba* pierwsza, *która dzieli wieloczyn kilku czynników, dzieli przynajmniej jeden z tych czynników.*

Niech będzie liczba *pierwsza* 5 która dzieli wieloczyn czynników $15 \times 2 \times 8 \times 9 \times 24$. Ten wieloczyn można uważać jako utworzony z dwóch tylko czynników $(15 \times 2 \times 8 \times 9)$ i 24. Owoż, jeśli liczba pierwsza 5 dzieli czynnik 24, twierdzenie jest dowiedzione; jeśli zaś nie dzieli, to, będąc liczbą pierwszą samoistą, jest tem samem pierwszą z czynnikiem 24; więc, na mocy poprzedzającego twierdzenia, musi dzielić drugi czynnik, to jest wieloczyn $15 \times 2 \times 8 \times 9$. Teraz znowu można uważać ostatni wieloczyn jako utworzony z dwóch tylko czynników $(5 \times 2 \times 8)$ i 9. Powtarzając powyższe rozumowanie powiemy podobnie: jeśli liczba 5 dzieli ostatni czynnik 9, twierdzenie jest dowiedzione, jeśli zaś nie dzieli, to, będąc liczbą pierwszą samoistą która nie dzieli czynnika 9, jest tem samem pierwszą z nim. Więc musi dzielić drugi czynnik $2\times15\times8$. I tak następnie, zmniejszając liczbę czynników, dojdziemy nakoniec do wieloczynu dwóch tylko czynników 15×2, który powinien być podzielny przez 5. Więc liczba pierwsza 5, nie dzieląc czynnika 2, musi dzielić przynajmniej ostatni czynnik 15. Co właśnie było do dowodzenia.

98. Wniosek I. *Gdy dwie liczby są pierwsze między sobą, jako 4 i 9, ich potęgi, np. 4^3 i 9^2, są także pierwsze między sobą.*

Jakoż, potęga 4^3 jest wieloczynem trzech czynników równych $4\times4\times4$, a zaś potęga 9^2 jest wieloczynem dwóch czynników 9×9. Aże, na mocy powyższego twierdzenia, liczba pierwsza którаby dzieliła te potęgi musiałaby dzielić ich czynniki 4 i 9; co niemożebne, bo te czynniki są pierwsze między sobą z założenia; więc potęgi 4^3 i 9^2 są pierwsze między sobą.

99. Wniosek II. *Wszelka liczba, pierwsza z każdym czynnikiem wieloczynu, jest pierwsza z tym wieloczynem.*

I nawzajem, *wszelka liczba, pierwsza z wieloczynem, jest pierwsza z każdym jego czynnikiem.*

Dowodzenie, jako całkiem podobne do poprzedzejącego, zostawiamy czytelntkowi.

100. Zasada. *Wszelka liczba, podzielna przez liczby pierwsze między sobą po dwie, jest podzielna przez ich wieloczyn.*

Weźmy np. 360. Ta liczba jest podzielna przez liczby 4, 5, 9, które są *pierwsze między sobą po dwie*; to znaczy że 4 i 5 są pierwsze między sobą; 4 i 9 są także pierwsze między sobą, jako też 5 i 9. Powiedam że liczba 360 jest podzielna przez wieloczyn $4\times5\times9$. I w samej rzeczy, ponieważ 4 dzieli 360, mamy $360=4\times90$. Owoż, z założenia 5 dzieli 360, czyli wieloczyn 4×90, a 5 jest pierwsze z czynnikiem 4; więc 5 dzieli 90. Co daje $90=5\times18$.

Teraz znowu, liczba 9 dzieli 360 czyli wieloczyn 4×99, a 9 jest pierwsze z czynnikiem 4; więc 9 dzieli 90, to jest dzieli wieloczyn 5×18. Aże 9 jest także pierwsze z czynnikiem 5, więc dzieli 18. Co daje $18=9\times2$.

Pomnożywszy te wszystkie równości stronami, otrzymujemy

$$360\times90\times18=4\times90\times5\times18\times9\times2.$$

A redukując, to jest dzieląc obie strony przez te same czynniki 90 i 18, znajdujemy ostatecznie $360=4\times5\times9\times2$,

Ta równość pokazuje że liczba 360 jest wielownikiem wieloczynu $4\times5\times9$; czyli, co to samo, jest podzielna przez wieloczyn $4\times5\times9$.

101. Wniosek. Ztąd wynika to ważne następstwo. *Aby dana liczba była podzielna przez liczbę złożoną, trzeba i dosyć jest żeby była podzielna przez czynniki tej liczby,* PIERWSZE MIĘDZY SOBĄ PO DWA.

I tak, jeśli chcemy wiedzieć czy liczba 336 jest podzielna przez 12, rozkładamy 12 na czynniki pierwsze między sobą po dwa. Widzimy łatwo że $12=3\times4$. Czynniki 3 i 4 są pierwsze między sobą. Więc dana liczba 336 będzie podzielna przez 12, jeśli jest podzielna przez 3 i 4. Co właśnie ma miejsce.

Tak samo, liczba podzielna przez 60, musi być podzielna przez 3, 4, 5.

102. Zagadnienie. *Rozłożyć liczbę, np. 360, na czynniki pierwsze.*

Aby ten rozkład zrobić porządnie, wykonywamy dzielenia następne danej liczby 360, przez dzielniki pierwsze po sobie idące, pisząc ilorazy pod spodem dzielnej a zaś dzielniki na boku, i oddzielając je linią pionową, jako wzór pokazuje.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Widzimy że liczba 360 jest podzielna przez liczbę pierwszą 2. Piszemy tedy dzielnik 2 na prawej stronie dzielnej a zaś iloraz 180 pod spodem. Ten iloraz jest jeszcze podzielny przez 2; wykonywamy drugie dzielenie przez 2, jako poprzednie. Następnie, trzecie dzielenie przez 2 daje iloraz 45, który już nie jest podzielny przez 2. Przechodzimy do następującego dzielnika pierwszego 3, który daje iloraz 15. Ten iloraz jeszcze jest podzielny przez 3; wykonawszy dzielenie, otrzymujemy iloraz 5, który jest liczbą pierwszą. Piszemy nakoniec dzielnik 5 w rzędzie dzielników, a zaś pod spodem dzielnej iloraz 5, i działanie skończone.

Wieloczyn wszystkich dzielników $2\times2\times2\times3\times3\times5$ czyli $2^3\times3^2\times5$ wydaje oczywiście liczbę 360, rozłożoną na czynniki pierwsze 2, 3, 5.

Można często użyć krótszego sposobu do rozłożenia danej liczby na czynniki pierwsze. I tak, biorąc tę samą liczbę 360, widzimy zaraz że

$$360=36\times10=4\times9\times10=2^2\times3^2\times2\times5;$$

więc $$360=2^3\times3^2\times5.$$

Wynik otrzymany powyżej.

Jakimkolwiek sposobem rozłożymy liczbę na czynniki pierwsze, znajdziemy zawsze te same liczby pierwsze. Dowodzenie tej prawdy jest przedmiotem następującego twierdzenia.

103. Zasada. *Wszelka liczba może się rozłożyć na jeden tylko układ czynników pierwszych.*

Niech będzie liczba 360 która, jako wiemy, równa się wieloczynowi $2^3\times3^2\times5$. Przypuśćmy że ta liczba równa się jeszcze innemu wieloczynowi czynników pierwszych. Jeśli tak jest, te dwa wieloczyny muszą być równe. Owoż, czynnik 2, dzieląc pierwszy wieloczyn, dzieli tem samem drugi; a że 2 jest liczbą pierwszą, więc dzieli jeden z czynników tego wieloczynu. Podzieliwszy oba wieloczyny przez 2, widzimy że pierwszy jeszcze jest podzielny przez 2; więc drugi musi także być podzielny przez 2; i tak dalej. Podobnie o innych czynnikach. Ztąd wnosimy że oba wieloczyny składają się z tych samych czynników pierwszych i podniesionych do tej samej potęgi; więc się niczem nie różnią. Co się wyraża mówiąc że *liczba* 360 *może się rozłożyć na jeden tylko układ czynników pierwszych.*

104. **Wniosek.** *Wieloczyn zawiera wszystkie liczby pierwsze swoich czynników, z wykładnikami które są summą ich wykładników.*

I tak, wieloczyn $36 \times 120 = 2^2.3^2 \times 2^3.3.5 = 2^5.3^3.5$.
Bo inaczej, możnaby rozłożyć ten wieloczyn na dwa układy czynników pierwszych; co niemożebne.

105. **Wniosek II.** Ztąd dwa wynikają następstwa:

Aby dzielna była podzielna przez dzielnik, trzeba żeby zawierała wszystkie jego czynniki pierwsze, i z wykładnikami PRZYNAJMNIEJ *równemi.*

Aby zaś dzielnik dzielił dzielnę, trzeba żeby nie zawierał czynników pierwszych obcych dzielnej, ani z wykładnikami większemi.

Z tego co poprzedza wypływa następujące, oczywiste twierdzenie, które stanowi nowe określenie największego spólnego dzielnika liczb.

106. **Twierdzenie.** *Największy spólny dzielnik liczb jest wieloczynem czynników pierwszych,* SPÓLNYCH *tym liczbom, wziętych z najmniejszemi wykładnikami.*

I tak, największy spólny dzielnik liczb

$36 = 2^2.3^2$, $120 = 2^3.3.5$ i $240 = 2^4.3.5$, jest $2^2.3 = 12$.

Ta, na pozór prosta, metoda znalezienia największego spólnego dzielnika liczb, wtedy tylko jest dogodna, gdy dane liczby łatwo się na czynniki pierwsze rozkładają.

107. Opierając się na powyższem określeniu największego spólnego dzielnika liczb, można czasem znacznie skrócić jego rachunek. Niech będą np. dwie liczby 37800 i 63360, których chcemy znaleźć największy spólny dzielnik.

Widzimy najpierwiej że te liczby są podzielne przez 10 i przez 9; a więc także przez 90 (100). Zatem liczba 90 jest jednym z czynników największego dzielnika tych liczb. Wykonywamy dzielenie przez 90, i znajdujemy ilorazy 420 i 704 które widocznie mają spólny dzielnik 4. Wykonywamy znowu dzielenie przez 4, i otrzymujemy ilorazy 105, 176.

Uważajmy teraz że liczby 3 i 5 dzielą 105 a nie dzielą 176. Ztąd wnosimy że liczby 3 i 5 nie są czynnikami największego spólnego dzielnika: przeto możemy podzielić 105 przez 3 i 5, nie zmieniając bynajmniej tego spólnego dzielnika.

Wykonawszy to ostatnie dzielenie, mamy dwie liczby 7 i 176, które są pierwsze między sobą, bo liczba pierwsza 7 nie dzieli 176. Owoż wieloczyn wszystkich czynników *spólnych*, przez któreśmy dzielili obie liczby dane, jest $90\times4=360$. Więc 360 jest największym spólnym dzielnikiem liczb 37800 i 63360 (93 wzaj.).

108. Zagadnienie. *Znaleźć największy spólny dzielnik liczby 2520 i wieloczynu* $119\times1816\times549$, *nie wykonywając mnożenia.*

Szukamy naprzód największego spólnego dzielnika między liczbą 2520 i jednym z czynników wieloczynu, np. 119. Znajdujemy że nim jest 7. Liczba 7 jest jednym z czynników największego spólnego dzielnika szukanego.

Przez 7 dzielimy 2520; i, między ilorazem 360 i drugim czynnikiem 1816, szukamy największego spólnego dzielnika. Znajdujemy że nim jest 8. Przez 8 dzielimy 360; i, między ilorazem 45 i ostatnim czynnikiem 549, szukamy największego spólnego dzielnika, i znajdujemy że nim jest 9.

Powiedamy teraz że wieloczyn największych spólnych dzielników cząstkowych, $7\times8\times9=504$, jest największym spólnym dzielnikiem liczby 2520 i wieloczynu $119\times1816\times549$.

Aby tego dowieśdź, dosyć okazać że, dzieląc 2520 i wieloczyn $119\times1816\times549$, przez wieloczyn $7\times8\times9$, otrzymujemy ilorazy, 5 i $17\times227\times61$, pierwsze między sobą. Otóż, iloraz 5 jest pierwszy z czynnikiem 61; bo 5 i 61 są ilorazy z podzielenia liczb 45 i 549, przez ich największy spólny dzielnik 9. Następnie, liczba 5 jest pierwsza z czynnikiem 227; bo jej wielownik 45 jest pierwszy z tym czynnikiem (93). Nakoniec, liczba 5 jest pierwsza z czynnikiem 17; bo jej wielownik 360 jest już pierwszy z tymże czynnikiem. Zatem liczba 5, pierwsza z każdym czynnikiem wieloczynu $17\times227\times61$, jest pierwsza z tym wieloczynem. Ztąd wynika że wieloczyn $7\times8\times9$ jest największym spólnym dzielnikiem liczby 2520 i wieloczynu $119\times1816\times549$.

109. ZAGADNIENIE. *Znaleźć wszystkie dzielniki danej liczby.*

Weźmy jeszcze liczbę 360 która, jako wiadomo, rozłożona na czynniki pierwsze, daje $360=2^3\times3^2\times5$. Uskuteczniwszy ten rozkład, widzimy łatwo że 360 jest podzielne przez 2, 2^2, 2^3; przez 3, 3^2; i nakoniec przez 5. Owoż, dzielniki każdego z tych trzech rzędów są pierwsze z dzielnikami dwóch innych rzędów; więc, na mocy już wiadomej zasady (100), liczba 360 jest podzielna przez wieloczyny tych dzielników pierwszych, utworzone po dwa, biorąc każdy dzielnik jednego rzędu z każdym dzielnikiem dwóch innych rzędów, po jednemu albo po dwa. Nadto, liczba 360 nie może mieć innych dzielników (105). Aby więc otrzymać wszystkie dzielniki liczby 360, dosyć byłoby wykonać wieloczyny liczb które składają trzy następujące szeregi : $1+2+2^2+2^3$, $1+3+3^2$, $1+5$, mnożąc wieloczyny dwóch szeregów przez każdą liczbę trzeciego.

Jakoż, kładąc 1 na czele każdego szeregu dzielników, i mnożąc np. liczby pierwszego szeregu przez każdą liczbę drugiego, otrzymujemy naprzód dzielniki proste 1, 2, 4, 8, potem dzielniki dwoiste 1×3, 2×3, 4×3, 8×3, 2×9, 4×9, 8×9. Mnożąc następnie te wieloczyny przez każdą liczbę trzeciego szeregu, otrzymujemy: naprzód, już znalezione dzielniki 1, 2... 1×3, 2×3, 4×3,.... 8×9; potem, dzielniki dwoiste 5, 2×5.... ; nakoniec, dzielniki troiste $1\times3\times5$, $2\times3\times5$,... $8\times9\times5$.

Ten sposób znalezienia dzielników danej liczby nie jest dogodny, ale jasno pokazuje ile jest tych dzielników. Albowiem oczywiście liczba dzielników liczby 360, równa się wieloczynowi (3+1) (2+1) (1+1).

Ztąd wnosimy że

Liczba dzielników danej liczby równa się wieloczynowi wykładników jej czynników pierwszych, zwiększonych każdy jednością.

To twierdzenie zastosowane do liczby 360 wskazuje 24 dzielników.

Żądane dzielniki otrzymują się następującym rachunkiem, daleko prostszym od wyżej okazanego.

Wzór rachunku dzielników liczby 360.

		1
360	2	2
180	2	4
90	2	8
45	3	3, 6, 12, 24.
15	3	9, 18, 36, 72.
5	5	5, 10, 20, 40; 15, 30, 60, 120;
		45, 90, 180, 360.

Ten obraz dzielników tak się formuje. Rozkładamy naprzód liczbę 360 na czynniki pierwsze, jakośmy to już pokazali. Co zrobiwszy, piszemy na czele dzielników *jedność*, ten naturalny dzielnik wszelkiej liczby całkowitej. Mnożymy tę jedność przez pierwszy czynnik 2, co daje 2; potem mnożymy wynik 2 przez drugi czynnik 2, co daje 4; nakoniec mnożymy wynik 4 przez ostatni czynnik 2, co daje 8. Przechodzimy do następującego czynnika 3, i przez niego mnożymy otrzymane dzielniki 1, 2, 4, 8; co daje dzielniki dwoiste 3, 6, 12, 24. Poczem, mnożymy ostatnie dzielniki przez drugi czynnik 3; co daje także dzielniki dwoiste 9, 18, 36, 72. Przechodzimy nakoniec do ostatniego czynnika 5, i przezeń mnożymy wszystkie dotąd otrzymane dzielniki; co daje: 5, 10, 20, 40; 15, 30, 60, 120; 45, 90, 180, 360. Przyczyna tych działań zanadto jest widoczna i prosta, aby trzeba było jeszcze obszerniejszych objaśnień. Wskazana wyżej liczba dzielników daje sposób sprawdzenia czy którego z nich nie opuszczono.

Najmniejszy wielownik liczb.

110. Określenie. Nazywa się *najmniejszym wielownikiem* liczb danych najmniejsza możebna liczba podzielna przez każdą z tych liczb. I tak, najmniejszym wielownikiem liczb 4 i 6 jest oczywiście 12.

Zajmiemy się najpierwej wyznaczeniem najmniejszego wielownika dwóch liczb.

111. *Pierwsza metoda, przez rozkład na czynniki pierwsze.* Niech będą np. dwie liczby 54 i 60. Chodzi o znalezienie liczby, jak można najmniejszej, któraby była podzielna zarazem przez 54 i 60. Ponieważ szukana liczba powinna być podzielna przez 54 i 60, i do tego jeszcze najmniejsza możebna, musi przeto, na mocy wiadomej zasady (105), zawierać wszystkie czynniki pierwsze tych dwóch liczb, i nie zawierać innych czynników. Owoż, rozkładając na czynniki pierwsze, znajdujemy $54 = 2 \times 3^3$, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Więc, jeśli weźmiemy wszystkie czynniki pierwsze tych liczb, i z wykładnikami największemi jakie mają, to jest 2^2, 3^3, 5, wieloczyn $2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$ będzie najmniejszym wielownikiem liczb 54 i 60. Jakoż, liczba 540 jest podzielna przez 54 i 60; bo zawiera wszystkie czynniki pierwsze tych dwóch liczb, z wykładnikami największemi jakie mają. Nadto, wszelka liczba mniejsza od 540 nie może być wielownikiem liczb 54 i 60. Bo, albo nie zawiera wszystkich czynników pierwszych, z wykładnikami największemi jakie mają w tych liczbach, a wtedy nie jest podzielna przez te liczby; albo też je zawiera z czynnikami obcemi liczbom 54 i 60, a wtedy oczywiście nie jest najmniejszą liczbą podzielną przez te liczby. — Więc, powtarzamy, liczba 540 jako wieloczyn wszystkich czynników pierwszych, wziętych z największemi wykładnikami jakie mają w dwóch liczbach 54 i 60, jest najmniejszym wielownikiem tych liczb.

Ta metoda wyznaczenia najmniejszego wielownika dwóch liczb, przez rozkładanie na czynniki pierwsze, wtedy tylko jest użyteczna, kiedy te czynniki łatwo otrzymać można; co się rzadko zdarza, zwłaszcza gdy liczby są wielkie. Jest jeszcze inna główna wada tej metody. Dwie dane wielkości mogą mieć najmniejszy wielownik, chociaż się nie rozkładają na czynniki pierwsze których, z natury swojej, nie mają; jako dwa ułamki, dwie linie proste, etc.: o czem później będzie mowa. Dla tych przyczyn, dajemy drugą metodę, ogólną, znalezienia najmniejszego wielownika dwóch liczb.

113. Metoda znalezienia najmniejszego wielownika dwóch liczb, za pomocą ich największego dzielnika.

Niech będą dwie liczby 540 i 720. Ponieważ ich najmniejszy wielownik powinien być podzielny przez 540, musi przeto być wieloczynem tej liczby pomnożonej przez pewną *liczbę całkowitą*, którą, jako niewiadomą, oznaczamy przez x. Tym sposobem, szukany najmniejszy wielownik wyraża się przez wieloczyn $540\times x$. Teraz, liczba 720 powinna dzielić ten najmniejszy wielownik $540\times x$. Owoż, gdyby liczba 720 była pierwsza z czynnikiem 540, toby musiała, na mocy wiadomej zasady, dzielić drugi czynnik x. Właśnie dlatego, aby można było zastosować tę zasadę do naszego przykładu, podzielmy liczby 540 i 720 przez ich największy spólny dzielnik 180; co da ilorazy 3 i 4 pierwsze między sobą. Tem działaniem nic się nie zmienia; bo wiemy (51) że iloraz z podzielenia dzielnej $540x$ przez dzielnik 720 jest ten sam co z podzielenia dzielnej $3x$ przez dzielnik 4. Ale teraz liczba 4, która powinna dzielić wieloczyn $3x$, jest pierwsza z czynnikiem 3; więc musi dzielić drugi czynnik x. Ztąd wnosimy, że liczba całkowita x jest wielownikiem liczby 4, to jest wielownikiem ilorazu liczby 720 podzielonej przez największy spólny dzielnik 180, i może się wyrazić przez $\frac{720k}{180}$; oznaczając przez k liczbę całkowitą jakąkolwiek. Jeśli przeto za x podstawimy wartość $\frac{720k}{180}$, wieloczyn $540x$ stanie się $\frac{540.720}{180}\times k$, i będzie wyrażał wszystkie wielowniki liczb 540 i 720. Więc, dając dla k najmniejszą wartość możebną, to jest biorąc $k=1$, znajdziemy najmniejszy wielownik $\frac{540 \times 720}{180}$ liczb danych 540 i 720.

To pokazuje że *najmniejszy wielownik dwóch liczb równa się ich wieloczynowi podzielonemu przez największy spólny dzielnik.*

Wykonawszy wskazane działania, otrzymujemy

$$\frac{540 \,.\, 720}{180} = 540 \,.\, 4 = 2160.$$

Więc liczba 2160 jest najmniejszym wielownikiem liczb 540 i 720.

114. Wniosek. Wyrażenie $\frac{540 \times 720}{180} \times k$ dowodzi że

Wszelki wielownik dwóch liczb 540 *i* 720 *jest wielownikiem ich najmniejszego wielownika.*

Ten ważny wniosek będzie nam wkrótce potrzebny.

115. Uwaga. Nazwijmy a i b dwie liczby całkowite jakiekolwiek; d ich największy spólny dzielnik, w najmniejszy wielownik.

Mamy, na mocy tego co poprzedza, $w = \frac{a \times b}{d}$.

Ztąd, mnożąc obie strony przez d, wynika $d \times w = a \times b$.

Ta równość wyraża związek między największym dzielnikiem i najmniejszym wielownikiem dwóch liczb a i b.

Jeśli podzielimy obie strony równości $w = \frac{ab}{d}$ naprzód przez liczbę a, potem przez b, otrzymamy $\frac{w}{a} = \frac{b}{d}$ i $\frac{w}{b} = \frac{a}{d}$

To dowodzi że dzieląc najmniejszy wielownik dwóch liczb przez każdą z nich, otrzymuje się dwa ilorazy pierwsze między sobą. I nawzajem.

116. Aby się lepiej obeznać z wyłożoną metodą znalezienia najmniejszego wielownika dwóch liczb, zastosujmy ją do liczb 51264 i 407232.

Szukamy naprzód największego spólnego dzielnika tych liczb, i znajdujemy 576.

Zatem, najmniejszy wielownik liczb 51264 i 407232 jest

$$\frac{51264 \times 407232}{576}$$

Dzielimy potem 51264 przez 576, i otrzymujemy iloraz 89 przez który mnożymy 407232; co daje ostatecznie wieloczyn 36243648, który jest najmniejszym wielownikiem danych liczb 51264 i 407232.

Gdybyśmy, za pomocą rozkładu na czynniki pierwsze, chcieli znaleźć ten najmniejszy wielownik, rachunek byłby znacznie dłuższy i daleko mozolniejszy; co, na samo spojrzenie na dane liczby, łatwo się przewiduje.

117. Następujący przykład dobitniej jeszcze okazuje wyższość metody wyznaczenia najmniejszego wielownika dwóch liczb jakichkolwiek, za pomocą ich największego spólnego dzielnika.

Niech będą dwie liczby 560 i 727, których chcemy wyznaczyć najmniejszy wielownik.

Stosując metodę największego spólnego dzielnika, widzimy zaraz, po małym rachunku, że dwie dane liczby są pierwsze między sobą, Ztąd wnosimy że najmniejszym wielownikiem tych liczb jest ich wieloczyn 560×727.

Używając metody rozkładania na czynniki pierwsze, znaleźlibyśmy najpierwej, dość łatwo, że $560 = 2^4 . 5 . 7$; ale potem, dopiero po wielu działaniach, przekonalibyśmy się że 727 jest liczbą pierwszą. Ztąd wnieślibyśmy, jako wyżej, że najmniejszym wielownikiem dwóch liczb 560 i 727, pierwszych między sobą, jest ich wieloczyn 560×727. Zatem rozkładanie na czynniki pierwsze liczby 560 było działaniem straconem, bo do niczego nie służyło.

Nie trzeba przecież mniemać żeby metoda rozkładania na czynniki pierwsze była wcale nieużyteczną; i owszem, służy ona wtedy zwłaszcza gdy dane liczby są małe, i rozkład na czynniki pierwsze jest łatwy.

Jako zastosowanie wyłożonej teoryi, rozwiążmy następujące zagadnienie.

Zagadnienie XXVIII. *Znaleźć dwie liczby których największy spólny dzielnik jest* 24 *a najmniejszy spólny wielownik* 2880.

Wiemy że wieloczyn, największego spólnego dzielnika dwóch liczb przez najmniejszy spólny wielownik, równa się wieloczynowi tych liczb; wiemy nadto że ilorazy, z podzielenia dwóch liczb przez ich największy spólny dzielnik, są pierwsze między sobą. Więc, aby rozwiązać zagadnienie, dosyć jest podzielić 2880 przez 24, co daje iloraz 120; rozłożyć ten iloraz na dwa czynniki pierwsze między sobą, i pomnożyć każdy z nich przez 24: wieloczyny będą liczbami szukanemi (115). Jakoż, iloraz 120, rozłożony na czynniki pierwsze między sobą, równa się wieloczynowi $1\times3\times5\times8$;

więc $$120=1\times120=3\times40=5\times24=8\times15.$$

Ztąd wnosimy że liczby rozwiązujące zagadnienie są: 24 i 2880, 72 i 960, 120 i 576, 192 i 360. Co stanowi cztery rozwiązań.

118. Zajmijmy się teraz wyznaczeniem najmniejszego wielownika wielu liczb.

Niech będą cztery liczby 324, 450, 1858 i 600.

Aby otrzymać najmniejszy wielownik tych czterech liczb, szukajmy naprzód najmniejszego wielownika dwóch którychkolwiek z nich, np. 324 i 450. Za pomocą już wiadomego działania (113), znajdujemy że najmniejszym wielownikiem liczb 324 i 450 jest wieloczyn 450×18.

To zrobiwszy, uważajmy że wszelki wielownik czterech liczb 324, 450, 1858 i 600 jest wielownikiem najmniejszego wielownika 450×18 dwóch liczb 324 i 450; i nawzajem, wszelki wielownik liczb 1858, 600 i najmniejszego wielownika 450×18 dwóch liczb 324 i 450, jest oczywiście wielownikiem tych ostatnich. Ztąd wnosimy że najmniejszy wielownik czterech liczb 324, 450, 1858 i 600 jest ten sam co najmniejszy wielownik trzech liczb 450×18, 1858 i 600. Więc cała rzecz przywodzi się do znalezienia najmniejszego wielownika tych trzech liczb ostatnich; co już nie przedstawia żadnej trudności. Albowiem pojmujemy łatwo że teraz należy szukać najmniejszego wielownika liczb 450×18 i 1858. Wykonywając wiadomy rachunek (n^ro^ 108 i 113), znajdujemy że tym wielownikiem jest wieloczyn $450 \times 18 \times 929$.

Powtarzając znowu powyższe rozumowanie, widzimy bardzo łatwo, że najmniejszy wielownik czterech liczb danych 324, 450, 1858 i 600 jest ten sam co znalezionego wieloczynu $450 \times 18 \times 929$, i pozostałej liczby 600.

Szukamy więc najmniejszego wielownika wieloczynu $450 \times 18 \times 929$ i liczby 600, i znajdujemy że nim jest wieloczyn $450 \times 18 \times 929 \times 2$.

A zatem wieloczyn $450 \times 18 \times 929 \times 2$ jest najmniejszym wielownikiem czterech liczb danych 324, 450, 1858 i 600.

Ztąd PRAWIDŁO: *aby znalcźć najmniejszy wielownik wielu liczb, dosyć szukać najpierwej najmniejszego wielownika dwóch którychkolwiek z tych liczb; potem, między tym wielownikiem i trzecią liczbą, szukać znowu najmniejszego wielownika; następnie, między tym ostatnim wielownikiem i czwartą liczbą, szukać także najmniejszego wielownika. I tak dalej, aż do ostatniej danej liczby. Ostatni najmniejszy wielownik będzie najmniejszym wielownikiem liczb danych.*

119. Możnaby teraz wyłożyć kilka własności liczb które, w wyższej matematyce, znakomitą grają rolę. Atoli, ponieważ wykład tych własności mógłby nieco utrudzać początkujących, wolimy go odesłać do not na końcu dzieła umieszczonych, dając tu kilka następujących ćwiczeń.

Ćwiczenia.

1. Dowieśdź że wszelka liczba pierwsza większa od 3 jest wielownikiem z 6, powiększonym albo zmniejszonym jednością. Co dla krótkości, tak się wyraża: $N = 6k \pm 1$.

II. Znaleźć największą liczbę taką aby, dzieląc przez nią 57 i 66, otrzymano reszty 9 i 6. ODPOWIEDŹ. 12.

III. Dowieść że wieloczyn czterech liczb całkowitych po sobie idących jest podzielny przez 24.

IV. Znaleźć najmniejszą liczbę mającą 36 dzielników. ODP. 1800.

V. Dowieść że *wszelka* potęga liczby całkowitej, zmniejszona jednością, jest podzielna przez tę liczbę zmniejszoną jednością. I tak 5^3-1 jest podzielne przez $5-1$.

VI. Dowieść że potęga *parzysta* liczby całkowitej, *zmniejszona* jednością, jest podzielna przez tę liczbę *zwiększoną* jednością. I tak 7^4-1 jest podzielne przez $7+1$.

VII. Dowieść że potęga *nieparzysta* liczby całkowitej, *zwiększona* jednością, jest podzielna przez tę liczbę *zwiększoną* jednością. I tak 8^3+1 jest podzielna przez $8+1$.

VIII. Dowieść że *połowa* wieloczynu dwóch liczb po sobie idących, podzielona przez 3, nie daje nigdy reszty 2.

IX. Gdy dwie liczby nie są podzielne przez 3, wtedy: 1° różnica ich *kwadratów* jest podzielna przez 3; a 2° różnica ich *szóstych potęg* jest podzielna przez 9.

X. Jeśli podzielimy najmniejszy wielownik kilku liczb a, b, c, d przez te liczby, otrzymane ilorazy, wzięte wszystkie razem, będą pierwsze między sobą.

I nawzajem, jeśli ilorazy z podzielenia liczby m przez a, b, c, d są pierwsze między sobą, wzięte wszystkie razem; wtedy liczba m jest najmniejszym wielownikiem liczb a, b, c, d.

XI. Różnica dwóch liczb, utworzonych z tych samych cyfer znaczących, w porządku jakimkolwiek napisanych, jest podzielna przez 9.

XII. Wieloczyn liczb $n(n+1)(2n+1)$ jest zawsze podzielny przez 6.

XIII. Wieloczyn liczb $m(m+1)(m+2)\ldots(m+k)$ jest zawsze podzielny przez wieloczyn $1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r$; byle tylko summa liczb $p+q+r$ równała się liczbie $m+k$.

XIV. Liczba p^2-1 jest podzielna przez 12, byle tylko liczba *pierwsza* p była większa od 3.

XV. Gdy liczba nieparzysta nie jest podzielna przez 5, wtedy między jej wielownikami są które się składają z samej cyfry 9.

XVI. Dowieść że summa kwadratów ze *trzech* liczb, które ciągiem idą po każdym wielowniku liczby 7, jest wielownikiem tej liczby.

XVII. Dowieść że summa kwadratów ze *czterech* liczb, które ciągiem idą po każdym wielowniku liczby 8, jest wielownikiem tej liczby.

XVIII. Gdy dwie liczby są pierwsze między sobą, wtedy ich summa i wieloczyn są także pierwsze między sobą.

XIX. Liczba jest podzielna przez 4, gdy cyfra jedności i podwójna cyfra dziesiątków czynią summę podzielną przez 4.

XX. Liczba jest podzielna przez 8, gdy cyfra jedności, podwójna cyfra dziesiątków i poczwórna cyfra set czynią summę podzielną przez 8.

XXI. Liczba jest podzielna przez 6, jeśli summa ostatniej cyfry i 4 razy każdej innej cyfry jest podzielna przez 6.

XXII. Trzy miasta A, B i C obchodzą pamiętne rocznice; miasto A co 12 lat, miasto B co 15 lat, a miasto C co 18 lat. Zdarza się że te trzy rocznice w jednym przypadają roku. Co ile lat takie zdarzają się rocznice?

XXIII. Gdy liczba ma *nieparzystą* liczbę cyfer, dowieśdź że wtedy *różnica* tej liczby i liczby w odwrotnym porządku napisanej jest podzielna przez 11; np. 345 i 543.

A gdy liczba ma *parzystą* liczbę cyfer, wtedy *summa* tych dwóch liczb jest podzielna przez 11; np. 4567 i 7654.

XXIV. Dowieśdź że niema żadnej liczby którаby, podzielona przez 12, dała 10 na resztę, a podzielona przez 15 dała 6 na resztę.

XXV. Jeśli dwie liczby nie są podzielne przez 3, różnica ich *szóstych* potęg jest podzielna przez 9.

XXVI. Dowieśdź że wieloczyn n liczb po sobie idących, począwszy od parzystej $2n$, podzielony przez n pierwszych liczb *nieparzystych*, daje na iloraz potęgę 2^n, to jest że

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)(n+1)}{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)} = 2^n .$$

XXVII. Znaleźć największy spólny dzielnik dwóch wieloczynów $5256\times12936\times5523$ i 25432×91728, nie wykonywając mnożenia ani rozkładu na czynniki.

XXVIII. Trzy liczby po sobie idące, albo trzy liczby różniące się o *dwa*, po sobie idące, dają wieloczyn podzielny przez 3.

XXIX. Znaleźć dwie liczby których największym spólnym dzielnikiem jest 12, a zaś ilorazy po sobie idące, przy szukaniu tego spólnego dzielnika, są 2, 4 i 8.

XXX. Summa dwóch liczb jest 36, a ich najmniejszy spólny wielownik 80. Jakie są te liczby? ODPOWIEDŹ. 16 i 20.

XXXI. Znaleźć najmniejsze dwie liczby których największy spólny dzielnik 324 wymaga 4 dzieleń. ODPOWIEDŹ. 2592 i 4212.

XXXII. Jeśli a i b są dwie liczby pierwsze między sobą, wtedy $a^2-2ab+b^2$ i $a+b$ nie mogą mieć innego czynnika spólnego tylko 3.

XXXIII. Oznaczając przez a i b dwie liczby całkowite, dowieśdź że wieloczyn $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ jest podzielny przez 30.

XXXIV. Summa dwóch liczb jest 243 a ich największy spólny dzielnik 27. Jakie są te liczby?

Odpowiedź. 27 i 216; albo 54 i 189; albo 108 i 135.

XXXV. Dowieśdź że, gdy liczba złożona ze trzech cyfer jest podzielna przez 27, to jeszcze nią jest gdy się położy cyfrę set po prawej stronie cyfry jedności, albo nawzajem cyfrę jedności po lewej stronie cyfry set. I tak liczby 216, 162, i nawzajem 6210 są podzielne przez 27.

XXXVI. Reszta z podzielenia liczby przez 2^n albo przez 5^n, jest ta sama co reszta z podzielenia liczby którą tworzą n ostatnie cyfry.

XXXVII. Dowieśdź że reszta z podzielenia liczby np. 5869 przez dzielnik mniejszy od 10, jest ta sama co reszta z podzielenia liczby

$$[(8k+5)k+6]k+9. \quad \text{przez ten dzielnik.}$$

k jest dopełnieniem dzielnika do 10.

XXXVIII. Gdy dwie liczby nie są podzielne przez 5, wtedy summa ich czwartych potęg jest podzielna przez 5.

XXXIX. Dwie liczby całkowite, podzielone każda przez ich różnicę, dają te same reszty.

XL. Zagadnienie. *Mając dany kwadrat podzielony na dziewięć równych kwadratów, napisać w każdym z tych kwadratów jedną z dziewięciu pierwszych liczb* 1, 2, 3, ... 9, *tak aby summy trzech liczb, stojących w linii prostej, były równe.*

Dowodzi się łatwo że: 1° każda z tych summ jest 15; 2° liczba umieszczona we środku kwadratu jest 5; a 3° liczby umieszczone na kątach kwadratu są parzyste. To okazawszy, piszemy 2 na jednym kącie a 8 na drugim, a zaś liczby 4 i 6 na dwóch innych kątach; nakoniec dopełniamy reszty kwadratu liczbami 7 i 3, 9 i 1.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Zagadnienie, jako widać, ma 8 rozwiązań.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

UŁAMKI.

WIEDZE WSTĘPNE.

Dotąd zajmowaliśmy się liczbami całkowitemi; wyłożymy teraz teoryę ułamków, to jest liczb które są częściami jedności.

120. Określenie. *Nazywa się ułamkiem jedna albo kilka części jedności podzielonej na równe części.*

I tak, wyobraźmy sobie jedność podzieloną np. na *pięć* równych części. Jeśli weźmiemy *trzy* tych *piątych* części, będziemy mieli ułamek który wyrazimy mówiąc : *trzy piąte* ; i napiszemy go tak: $\frac{3}{5}$. Liczba 5, która wskazuje na ile równych części jedność została podzielona, nazywa się *mianownikiem* ; a zaś liczba 3, która oznacza ile wzięto takich części, nazywa się *licznikiem.*

Wyraża się ułamek pisząc naprzód licznik, podkreślając go linijką poziomą, i pod nią kładąc mianownik, jakośmy powyżej napisali $\frac{3}{5}$. Podobnie, *sześć ósmych* piszą się $\frac{6}{8}$; *siedem dziesiątych* piszą się $\frac{7}{10}$.

121. Aby wysłowić ułamek, czyta się najpierwej jego licznik jako liczbę zwyczajną, a potem mianownik tworząc z niego przymiotnik liczbowy. Naprzykład, $\frac{3}{4}$ czyta się *trzy c rte* ; $\frac{5}{9}$ czyta się *pięć dziewiątych* ; etc.

122. Uwaga. Ułamek $\frac{1}{2}$ może się wprawdzie czytać *jedna druga* albo *jedna wtóra* ; ale zwykle dla skrócenia mówi się *pół*. A zamiast mówić : talar i pół, dwa łokcie i pół, trzy mile i pół, mówi się potocznie : półtora talara, półtrzecia łokcia, półczwartej mili.

123. Ułamek może mieć licznik większy od mianownika jako $\frac{7}{3}$, $\frac{60}{8}$, $\frac{20}{5}$. Takie liczby nazywają się *ułamkami niewłaściwemi* albo *liczbami ułamkowemi*. A dla przeciwieństwa, ułamki w których licznik jest mniejszy od mianownika, jako $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{8}$, nazywają się *ułamkami włościwemi*. Ale zwykle wyraz *ułamek* oznacza zarówno ułamek właściwy i niewłaściwy; a gdy trzeba odróżnić, to wtedy mówi się: ułamek mniejszy od jedności jako $\frac{3}{5}$; albo, ułamek większy od jedności jako $\frac{10}{7}$.

Licznik i mianownik nazywają się, mówiąc ogólnie, *wyrazami ułamka*.

124. Twierdzenie. *Ułamek jest ilorazem z podzielenia licznika przez mianownik.*

Niech będzie $\frac{5}{7}$. Ułamek *pięć siódmych* wyraża jedną siódmą powtórzoną pięć razy, to jest równa się $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. Otóż, ta summa jest to samo co *siódma* część każdej z *pięciu* jedności, albo *siódma* część *pięciu* jedności; więc *pięć siódmych* jedności jest to samo co *siódma część pięciu* jedności. Zatem $\frac{5}{7}$ jest *ilorazem* w którym licznik 5 jest dzielną a mianownik 7 dzielnikiem.

To twierdzenie pokazuje całą ważność ułamków jako ilorazów dzielenia którego całkowicie wykonać nie można. I tak, niech będzie do podzielenia liczba 59 przez 12; iloraz, na mocy tego co poprzedza, jest $\frac{59}{12}$. Jeśli chcemy wiedzieć część całkowitą tego ilorazu, czyli jako się mówi, wyciągnąć całkowitę z liczby ułamkowej $\frac{59}{12}$, dzielimy licznik przez mianownik, i znajdujemy że $\frac{59}{12}=4+\frac{11}{12}$.

Więc część całkowita wskazanego ilorazu $\frac{59}{12}$, jest 4, a zupełny iloraz z podzielenia 59 przez 12 jest 4 więcej ułamek $\frac{11}{12}$, albo krócej, $4\frac{11}{12}$.

Nawzajem, aby zamienić całkowitę 4 i ułamek $\frac{11}{12}$ na liczbę ułamkową, czyli, jako się mówi, *złączyć całkowitę z ułamkiem*, uważajmy że jedność zawiera w sobie 12 *dwónastych*; zatem 4 jedności zawierają 4 razy 12 *dwónastych*, to jest 48 dwónastych: te 48 dwónastych, dodane do 11 dwónastych, czynią razem 59 dwónastych. Więc $4\frac{11}{12}=\frac{59}{12}$.

Ztąd prawidło, *aby złączyć całkowitę z ułamkiem, mnoży się całkowitę przez mianownik ułamka, do wieloczynu dodaje się licznik, i pod summą podpisuje się mianownik.*

125. Powyższe twierdzenie służy jeszcze do znalezienia przybliżonej wartości ułamka. I tak, jeśli chcemy wiedzieć ile wartają $\frac{4}{5}$ złotego, uważamy że złoty ma 30 groszy, i że jedna *piąta* złotego jest piątą częścią *trzydziestu* groszy; co czyni 6 groszy. Zatem $\frac{4}{5}$ złotego wartają 4 razy 6 groszy, to jest 24 grosze.

Można inaczej do tego samego dojść wyniku. Wiemy już, że $\frac{4}{5}$ złotego jest to samo co *piąta* część *czterech* złotych. Owoż, 4 złote wartają 4 razy 30 groszy, to jest 120 groszy; a zaś *piąta* część 120 groszy czyni 24 grosze. Więc $\frac{4}{5}$ złotego wartają 24 grosze. Co właśnie jest wynikiem otrzymanym.

Ale, gdybyśmy chcieli wiedzieć ile wartają $\frac{7}{8}$ złotego; stosując pierwszy sposób, trzebaby naprzód znaleźć *ósmą* część złotego, to jest *ósmą* część *trzydziestu* groszy; a potem wziąć ją siedem razy. Owoż, dzieląc 30 groszy przez 8, znajdujemy iloraz przybliżony 3 grosze; a biorąc 7 razy 3 gr., otrzymujemy 21 gr. Co jest właśnie przybliżoną wartością ułamka $\frac{7}{8}$ zł.

Zastosujmy teraz drugi sposób. Okazaliśmy że $\frac{7}{8}$ złotego jest to samo co *ósma* część *siedmiu* zlotych. Owoż 7 złotych czynią 210 groszy; dzieląc 210 przez 8 mamy iloraz 26 $\frac{2}{8}$, więc $\frac{7}{8}$ złotego czynią 26 groszy, więcej jeszcze *ułamkiem* $\frac{2}{8}$ grosza który możemy zaniedbać.

Widzimy tedy że drugi sposób nie tylko daje wartość ułamka. więcej przybliżoną do prawdziwej, ale jeszcze okazuje czem się przybliżona wartość różni od prawdziwej. W pierwszym razie błąd może przechodzić jedność, a nawet dosięgać kilka jedności, jako powyżej; w drugim zaś razie błąd jest zawsze tylko ułamkiem jedności.

Przejdźmy teraz do głównych własności ułamków.

126. *Gdy się mnoży licznik ułamka przez jedną liczbę, ułamek staje się tę liczbę razy większym.*

Niech będzie ułamek $\frac{5}{8}$. Jeśli pomnożymy jego licznik przez 3, otrzymamy ułamek $\frac{15}{8}$, *trzy* razy większy od $\frac{5}{8}$. Bo obydwa ułamki, mając ten sam mianownik 8, składają się z *ósmych* części jedności; a że jest 3 razy więcej tych części w ułamku $\frac{15}{8}$ niż w $\frac{5}{8}$, więc ułamek $\frac{15}{8}$ jest 3 razy większy od $\frac{5}{8}$.

Nawzajem, ułamek $\frac{5}{8}$ jest *trzy* razy mniejszy od ułamka $\frac{15}{8}$; bo zawiera *trzy* razy mniej tych samych *ósmych* części jedności. Ztąd wnosimy że,

Gdy się dzieli licznik ułamka przez jedną liczbę, ułamek staje się tę liczbę razy mniejszym.

127. *Gdy się mnoży mianownik ułamka przez jedną liczbę, ułamek staje się tę liczbę razy mniejszym.*

Niech będzie ułamek $\frac{4}{7}$. Jeśli pomnożymy jego mianownik przez 5, otrzymamy ułamek $\frac{4}{35}$, który jest *pięć* razy mniejszy od $\frac{4}{7}$. Jakoż, mnożąc mianownik ułamka $\frac{4}{7}$ przez 5, dzielimy tem samem jedność na 5 razy więcej równych części, to jest na 35; zatem każda 35ta część jedności jest oczywiście *pięć razy mniejsza* od każdej 7ej części. A że bierzemy w obydwóch ułamkach tę samą liczbę części, to jest 4, więc ułamek $\frac{4}{35}$ jest *pięć razy mniejszy* od ułamka $\frac{4}{7}$.

Nawzajem, ułamek $\frac{4}{7}$ jest *pięć razy większy* od $\frac{4}{35}$; bo mają oba tę samą liczbę 4 części jedności, a te części są *pięć razy mniejsze* w ułamku $\frac{4}{35}$ niż w $\frac{4}{7}$. Ztąd wnieść należy że

Gdy się dzieli mianownik ułamka przez jedną liczbę, ułamek staje się tę liczbę razy większym.

128. Z dwóch poprzednich własności ułamków wypływa następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Ułamek nie zmienia wartości, gdy się mnoży albo dzieli oba jego wyrazy przez tę samą liczbę.*

Niech będzie ułamek $\frac{4}{7}$. Mnożąc jego licznik np. przez 3, otrzymujemy drugi ułamek $\frac{4\times3}{7}$, który jest *trzy* razy *większy* od pierwszego $\frac{4}{7}$. A że, mnożąc mianownik drugiego ułamka $\frac{4\times3}{7}$, także przez 3, otrzymujemy ułamek $\frac{4\times3}{7\times3}$ *trzy* razy *mniejszy* od $\frac{4\times3}{7}$; więc ułamek $\frac{4\times3}{7\times3}$ jest równowarty ułamkowi $\frac{4}{7}$. Co dowodzi że ułamek nie zmienia wartości, gdy się mnoży oba jego wyrazy przez tę samą liczbę.

Z tego rozumowania wynika że, nawzajem, wartość ułamka $\frac{4\times3}{7\times3}$, czyli $\frac{12}{21}$, nie zmienia się gdy się dzieli oba jego wyrazy przez tę samą liczbę 3. I w samej rzeczy, wykonawszy to dzielenie, znajdujemy ułamek $\frac{4}{7}$ równowarty danemu $\frac{12}{21}$.

Można zresztą wprost tego dowieśdź. Jakoż, dzieląc przez 3 licznik ułamka $\frac{12}{21}$, otrzymujemy drugi ułamek $\frac{4}{21}$ który jest *trzy* razy *mniejszy* od $\frac{12}{21}$. A że, dzieląc mianownik drugiego ułamka $\frac{4}{21}$, także przez 3, znajdujemy ułamek $\frac{4}{7}$ *trzy* razy *większy* od $\frac{4}{21}$; więc ułamek $\frac{4}{7}$ jest równowarty ułamkowi $\frac{12}{21}$.

129. Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie: co się staje z ułamkiem gdy oba jego wyrazy powiększamy zarazem, albo zmniejszamy, tą samą liczbą? Odpowiedź w następującem zawiera się twierdzeniu.

Twierdzenie. *Ułamek zbliża się do jedności gdy dodajemy tę samą liczbę do obydwóch jego wyrazów; a zaś przeciwnie, ułamek oddala się od jedności gdy odejmujemy tę liczbę.*

Aby łatwiej zrozumieć to twierdzenie, rozróżnijmy dwa przypadki.

Uważajmy najpierwej ułamek mniejszy od jedności jako $\frac{5}{8}$. Dodając np. 4 jedności do licznika i mianownika ułamka $\frac{5}{8}$, otrzymujemy drugi ułamek $\frac{9}{12}$, który jest większy od pierwszego. Jakoż, widzimy łatwo że pierwszemu ułamkowi $\frac{5}{8}$ brakuje $\frac{3}{8}$ aby się równał jedności, a zaś drugiemu $\frac{9}{12}$ brakuje $\frac{3}{12}$. Owoż, ułamki $\frac{3}{8}$ i $\frac{3}{12}$ mają równe liczniki; bo te liczniki wyrażają, pierwszy różnicę wyrazów ułamka $\frac{5}{8}$, a drugi różnicę wyrazów ułamka $\frac{9}{12}$; wiadomo zaś że różnica dwóch liczb niezmienia się gdy się do nich dodaje, albo odciąga, tę samą liczbę. A że nadto *ósme* części jedności, zawarte w ułamku $\frac{4}{8}$, są większe od *dwónastych* części zawartych w ułamku $\frac{3}{12}$; więc ułamek $\frac{3}{8}$ jest większy od ułamka $\frac{3}{12}$. To pokazuje że drugiemu ułamkowi $\frac{9}{12}$ braknje *mniej* do jedności niż pierwszemu $\frac{5}{8}$. Zatem ułamek $\frac{9}{12}$ jest większy od $\frac{5}{8}$.

Ztąd wnosimy że *ułamek, mniejszy od jedności, zwiększa się gdy do obydwóch jego wyrazów dodajemy tę samą liczbę.*

Uważajmy teraz ułamek większy od jedności, jako $\frac{20}{3}$. Dodając 7 do obydwóch jego wyrazów, otrzymujemy drugi ułamek $\frac{27}{10}$, który jest mniejszy od pierwszego.

Jakoż, pierwszy $\frac{20}{3}$ przewyższa jedność ułamkiem $\frac{17}{3}$, a zaś drugi $\frac{27}{10}$ przewyższa ją ułamkiem $\frac{17}{10}$. Owoż, ułamki $\frac{17}{3}$ i $\frac{17}{10}$ mają równe liczniki, z przyczyny już wyżej okazanej; a mianownik 3 pierwszego ułamka jest mniejszy od mianownika 10 drugiego; więc ułamek $\frac{17}{3}$ jest większy od $\frac{17}{10}$; bo oba zawierają równą liczbę części jedności, a te części są większe w ułumku $\frac{17}{3}$ niż w $\frac{17}{10}$. To pokazuje że ułamek $\frac{27}{10}$ przewyższa jedność mniej niż ułamek $\frac{20}{3}$, czyli że ułamek $\frac{27}{10}$ jest mniejszy od $\frac{20}{3}$.

Ztąd wnosimy że *ułamek, większy od jedności, zmniejsza się gdy do obydwóch jego wyrazów dodajemy tę samą liczbę.*

Z powyższych rozumowań wynika oczywiście że, nawzajem, *odejmując tę samą liczbę od obydwóch wyrazów ułamka, zmniejszamy jego wartość, jeśli ona jest mniejsza od jedności*; a zaś przeciwnie, *zwiększamy, jeśli jest większa od jedności.* I tak, odejmując 4 od obydwóch wyrazów ułamka właściwego $\frac{9}{12}$ otrzymujemy drugi ułamek $\frac{5}{8}$, mniejszy od pierwszego $\frac{9}{12}$: a zaś przeciwnie, odejmując 7 od liczby ułamkowej $\frac{27}{10}$, otrzymujemy drugą liczbę ułamkową $\frac{20}{3}$, większą od pierwszej $\frac{27}{10}$.

Cztery powyższe twierdzenia zbierają się w jednem ogólnem wysłowieniu któreśmy, dla tego właśnie, na czele położyli.

Uproszczenie ułamków.

130. Uprościć dany ułamek jest to zamienić go na inny mający tę samą wartość, ale którego licznik i mianownik wyrażają się liczbami mniejszemi.

Niech będzie ułamek $\frac{468}{780}$. Wiemy już (128) że można, nie zmieniając wartości ułamka, podzielić jego wyrazy przez tę samą liczbę. Owoż, łatwo widzimy że 4 dzieli oba wyrazy ułamku $\frac{468}{780}$. Wykonawszy to dzielenie, otrzymujemy ułamek $\frac{117}{195}$ równowarty danemu $\frac{468}{780}$, i mający wyrazy prostsze. Ale nie trudno spostrzedz że liczby 117 i 195 są podzielne przez 3. Wykonawszy to ostatnie dzielenie, znajdujemy ułamek $\frac{39}{65}$, zawsze równy danemu $\frac{468}{780}$, a mający wyrazy jeszcze prostsze od poprzedzającego.

Widziemy nakoniec że wyrazy ostatniego ułamku $\frac{39}{65}$ są podzielne przez 13; wykonawszy to dzielenie, znajdujemy ułamek $\frac{3}{5}$, równy danemu, a mający wyrazy daleko prostsze. Już więcej dzieleniem uprościć ułamka $\frac{3}{5}$ nie można, bo jego wyrazy 3 i 5 są liczbami pierwszemi między sobą.

Pojmuje się bez trudności że, aby odrazu otrzymać ułamek $\frac{3}{5}$ z danego $\frac{468}{780}$, dosyć znaleźć największy spólny dzielnik 156 licznika 468 i mianownika 780, i podzielić przezeń te wyrazy.

131. *Ułamek* jest NIEZREDUKOWNY, *to jest najprostszy możebny, gdy jego wyrazy są pierwsze między sobą.*

Weźmy ułamek $\frac{8}{9}$, którego wyrazy są liczbami pierwszemi między sobą. Powiedam że niema ułamka równowartego danemu $\frac{8}{9}$ któryby miał wyrazy prostsze od niego.

Jakoż, ułamek $\frac{8}{9}$ równa się np. ułamkowi $\frac{24}{27}$; co wyrażamy pisząc

$$\frac{8}{9}=\frac{24}{27}.$$

Owoż, jeśli pomnożymy liczniki obydwóch ułamków przez 27, te ułamki staną się 27 razy większe, oczywiście nie przestaną być sobie równe; więc mamy

$$\frac{8\times 27}{9}=\frac{24\times 27}{27}.$$

Drugi ułamek może się uprościć przez 27; wykonawszy to uproszczenie otrzymujemy

$$\frac{8 \times 27}{9} = \frac{24}{1}. \text{ Ztąd wynika że licznik } 24 = \frac{8 \times 27}{9}.$$

Ten wynik pokazuje że 9 dzieli wieloczyn 8×27. Ale, z założenia, liczba 9 jest pierwsza z 8; więc, na mocy wiadomej zasady (96), 9 dzieli czynnik 27. Co daje $27 = 9 \times 3$. Jeśli podstawimy tę wartość w poprzedzającem wyrażeniu, będziemy mieli

$$24 = \frac{8 \times 9 \times 3}{9};$$

a wykonawszy wskazane dzielenie, znajdziemy że licznik $24 = 8 \times 3$. Ztąd wnosimy że, nie tylko wyrazy ułamka $\frac{24}{27}$ nie są prostsze od wyrazów odpowiednych ułamka równowartego $\frac{8}{9}$, ale owszem są ich równowielownikami. Zatem ułamek $\frac{8}{9}$, którego wyrazy są pierwsze między sobą, jest *niezredukownym*; to znaczy że jest najprostszym ze wszystkich ułamków mającyph tę samą wartość.

Weźmy jeszcze, jako przykład, ułamek $\frac{374}{935}$. Największy spólny dzielnik licznika 374 i mianownika 935 jest 187: podzieliwszy te wyrazy przez 187, znajdujemy ilorazy 2 i 5: więc ułamek zadany $\frac{374}{935}$ równa się ułamkowi uprosczonemu $\frac{2}{5}$.

132. Ztego co poprzedza wynikają dwa ważne wnioski.

1° Wyrazy wszelkiego ułamka, równego ułamkowi niezredukownemu, są *równowielownikami* odpowiednych jego wyrazów. Co właśnie powyższe rozumowanie pokazuje.

2° Dwa ułamki niezredukowne równe mają te same liczniki i te same mianowniki.

Bo, ponieważ te ułamki są niezredukowne, ich liczniki i mianowniki muszą być, odpowiednio i nawzajem, jedne drugich wielownikami; zatem liczniki są równe między sobą, i mianowniki równe między sobą.

133. Przedstawia się teraz pytanie, co można dodać do

licznika i mianownika ułamka, nie zmieniając jego wartości?

Nazwijmy ogólnie x i y dwie *niewiadome* całkowite które, dodane do wyrazów ułamka np. $\frac{9}{12}$, nie przeinaczają jego wartości, tak że jest

$$\frac{9+x}{12+y}=\frac{9}{12}, \text{ albo } \frac{9+x}{12+y}=\frac{3}{4}.$$

Ponieważ, na mocy powyższego wniosku (131), ułamek $\frac{3}{4}$ jest niezredukowny, wyrazy ułamka równego $\frac{9+x}{12+y}$ muszą być równowielownikami jego wyrazów; ale 9 i 12 są już odpowiednio równowielownikami wyrazów 3 i 4; więc x i y powinny być także ich równowielownikami, to jest musi być $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.

To pokazuje że liczby całkowite x i y które można dodać, pierwszą do licznika a drugą do mianownika ułamka $\frac{9}{12}$, nie przeinaczając jego wartości, powinny stanowić ułamek $\frac{x}{y}$ równy $\frac{9}{12}$.

Dowiedzionoby podobnie że dwie liczby całkowite które można odjąć, pierwszą od licznika a drugą od mianownika ułamka, nie przeinaczając jego wartości, powinny stanowić ułamek równy danemu.

Na mocy tej własności, do wyrazów ułamka $\frac{9}{12}$ można dodać, albo od nich odjąć, odpowiednio liczby 6 i 9 które stanowią ułamek $\frac{6}{9}$ równy ułamkowi $\frac{9}{12}$, tak że jest

$$\frac{9+6}{12+8}=\frac{9}{12}, \text{ jako też } \frac{9-6}{12-8}=\frac{9}{12}$$

134. Ztąd wypływa następujący wniosek

Gdy dwa ułamki są równe, wtedy dodając je, albo odejmując, wyrazami, to jest liczniki między sobą i mianowniki między sobą, otrzymuje się ułamek tej samej wartości.

I tak, niech będą dwa ułamki równe $\frac{6}{9}$ i $\frac{10}{15}$.

Mamy $$\frac{10+6}{15+9}=\frac{6}{9} \quad \text{i} \quad \frac{10-6}{15-9}=\frac{6}{9}.$$

A że dwie ilości, równe każda trzeciej, są oczywiście równe między sobą, więc

$$\frac{10+6}{15+9}=\frac{10-6}{15-9}.$$

135. Uwaga. To wszystko się zogólnia i daje następujące twierdzenie: *Gdy kilka ułamków są równe między sobą, wtedy dodając je wyrazami, to jest liczniki do liczników a mianowniki do mianowników, otrzymuje się widocznie ułamek równowarty.*

I tak, niech będą ułamki: $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{4}{8}$ równe między sobą.

Mamy oczywiście:

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\frac{4}{8}=\frac{1+3+5+4}{2+6+10+8}.$$

Uważny czytelnik łatwo pojmie dlaczego powyższe równości istnieją. Jakoż, wiemy że wyrazy ułamków równych są równowielownikami odpowiednych wyrazów ułamka niezredukownego równego. Zatem, dodając albo odejmując liczniki między sobą i mianowniki między sobą, tych ułamków, tworzymy ułamek mający wyrazy równowielowne odpowiednych wyrazów ułamka niezredukownego równego; więc tak otrzymany ułamek równa się danym. Otóż przyczyna równości wszystkich powyższych wyrażeń, któremi się później zajmować będziemy.

Sprowadzenie ułamków do jednakowego mianownika.

136. Sprowadzić ułamki do jednakowego mianownika, jest to zamienić je na inne równowarte i mające ten sam mianownik.

Uważajmy najpierwej dwa ułamki, i weźmy np. $\frac{5}{6}$ i $\frac{4}{9}$. Jeśli pomnożymy wyrazy 5 i 6 pierwszego ułamka, przez mianownik 9, drugiego, otrzymamy

$$\text{ułamek } \frac{5\times 9}{6\times 9} \text{ równy ułamkowi } \frac{5}{6}.$$

Podobnie, jeśli pomnożymy wyrazy 4 i 9 drugiego ułamka przez mianownik 6 pierwszego, otrzymamy

$$\text{ułamek } \frac{4\times 6}{9\times 6} \text{ równy ułamkowi } \frac{4}{9}.$$

Owoż wieloczyny 6×9 i 9×6 są równe; więc otrzymujemy tym sposobem dwa ułamki $\frac{45}{54}$ i $\frac{24}{54}$, równe odpowiednio danym $\frac{5}{6}$ i $\frac{4}{9}$, i mające ten sam mianownik. Czegośmy właśnie żądali.

Ztąd prawidło, *aby sprowadzić dwa ułamki do jednakowego mianownika, dość pomnożyć oba wyrazy jednego przez mianownik drugiego, i nawzajem.*

137. Weźmy teraz kilka ułamków, np. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$ które chcemy sprowadzić do jednakowego mianownika.

Jeśli pomnożymy wyrazy 2 i 3 pierwszego ułamka, przez wieloczyn mianowników $6 \times 8 \times 12$, wszystkich innych ułamków, wartość ułamka $\frac{2}{3}$ nie zmieni się, i będziemy mieli ułamek

$$\frac{2 \times 6 \times 8 \times 12}{3 \times 6 \times 8 \times 12} \text{ równy ułamkowi } \frac{2}{3}.$$

Podobnie, mnożąc oba wyrazy 5 i 6 drugiego ułamka $\frac{5}{6}$ przez wieloczyn mianowników $3 \times 8 \times 12$, wszystkich innych ułamków, wartość się jego nie zmienia, i otrzymujemy ułamek

$$\frac{5 \times 3 \times 8 \times 12}{6 \times 3 \times 8 \times 12} \text{ równy ułamkowi } \frac{5}{6}.$$

Mnożąc następnie oba wyrazy ułamka $\frac{3}{8}$ przez wieloczyn mianowników $3 \times 6 \times 12$, wszystkich innych ułamków, znajdujemy ułamek

$$\frac{3 \times 3 \times 6 \times 12}{8 \times 3 \times 6 \times 12} \text{ równy ułamkowi } \frac{3}{8}.$$

Nakoniec, mnożąc oba wyrazy ułamka $\frac{7}{12}$, przez wieloczyn mianowników $3 \times 6 \times 8$, wszystkich innych ułamków, mamy ułamek

$$\frac{7 \times 3 \times 6 \times 8}{12 \times 3 \times 6 \times 8} \text{ równy ułamkowi } \frac{7}{12}.$$

Mianowniki czterech znalezionych ułamków są równe, bo się składają z tych samych czynników, tylko w różnym porządku ustawionych (33).

Więc ułamki

$$\frac{2\times6\times8\times12}{3\times6\times8\times12},\ \frac{5\times3\times8\times12}{6\times3\times8\times12},\ \frac{3\times3\times6\times12}{8\times3\times6\times12},\ \frac{7\times3\times6\times8}{12\times3\times6\times8}$$

albo $$\frac{1152}{1728},\ \frac{1140}{1728},\ \frac{648}{1728},\ \frac{1008}{1728}.$$

są właśnie szukane.

Ztąd prawidło, *aby sprowadzić ułamki do tego samego mianownika, dość pomnożyć oba wyrazy każdego z nich przez wieloczyn mianowników wszystkich innych*.

138. Weźmy teraz trzy ułamki $\frac{3}{12}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{5}{6}$.

Nim zastosujemy powyższe prawidło, uważajmy że pierwszy ułamek może się uprościć przez 3, a zaś drugi przez 8. Wykonawszy to uprosczenie, otrzymujemy trzy ułamki $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ które, sprowadzone do jednakowego mianownika, stają się

$$\frac{1\times3\times6}{4\times3\times6},\ \frac{2\times4\times6}{3\times4\times6},\ \frac{5\times4\times3}{6\times4\times3}$$

albo $$\frac{18}{72},\ \frac{48}{72},\ \frac{60}{72}.$$

139. Uwaga. Powyższe przykłady jasno pokazują że sprowadzenie ułamków do jednakowego mianownika na dwóch opiera się zasadach : 1° Można mnożyć albo dzielić, przez jedną liczbę, oba wyrazy ułamka, nie zmieniając jego wartości ; 2° wieloczyn nie zmienia wartości gdy się przemienia porządek czynników.

Sprowadzenie ułamków do najmniejszego spólnego mianownika.

140. Prawidło sprowadzenia ułamków do jednakowego mianownika, któreśmy dopiero wyłożyli, daje zwykle spólny mianownik za wielki. Ułamki wielkiemi wyrażone liczbami nie są w rachunku dogodne ; a są i takie kwestye które wymagają aby ułamki były sprowadzone do najmniejszego spólnego mianownika.

Tą właśnie rzeczą teraz się zajmiemy.

Niech będą ułamki $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, które chcemy sprowadzić do najmniejszego spólnego mianownika.

Uważajmy naprzód że gdy ułamki są niezredukowne, to jest, do najprostszego przywiedzione wyrażenia, wszelki ułamek, równy jednemu z nich, musi mieć oba wyrazy równowielowne wyrazów tego ostatniego. Ztąd wynika że, wszelki spólny mianownik ułamków *niezredukownych* jest spólnym wielownikiem ich mianowników. Zatem, najmniejszym spólnym mianownikiem ułamków niezredukownych jest najmniejszy spólny wielownik ich mianowników. To zrozumiawszy, zapewniamy się przedewszystkiem czy dane ułamki $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, są niezredukowne. Widzimy łatwo że niemi są, bo ich wyrazy są liczbami pierwszemi między sobą (130). Po czem, szukamy najmniejszego wielownika mianowników 6, 8, 12, i znajdujemy, sposobem już wiadomym, że nim jest liczba 24.

Jeśli teraz, w pierwszym ułamku $\frac{5}{6}$, zamiast mianownika 6 położymy 24, wtedy pomnożymy ten mianownik przez 4, to jest przez iloraz z podzielenia 24 przez 6; więc, aby ułamek nie zmienił wartości, trzeba pomnożyć jego licznik 5 także przez 4; co da ułamek $\frac{20}{24}$ równy danemu $\frac{5}{6}$.

Tak samo postępujemy z drugim ułamkiem $\frac{3}{8}$; dzielimy naprzód, przez jego mianownik 8, spólny mianownik 24, co daje iloraz 3; przez ten iloraz mnożymy oba wyrazy ułamka $\frac{3}{8}$, i otrzymujemy ułamek równy $\frac{9}{24}$.

Nakoniec, dzielimy spólny mianownik 24, przez mianownik 12 ostatniego ułamka $\frac{7}{12}$, i znajdujemy iloraz 2, przez który mnożymy oba wyrazy tego ułamka; co nam daje ułamek $\frac{14}{24}$ równy ostatniemu $\frac{7}{12}$.

Mamy tedy ułamki $\frac{20}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{14}{24}$ równowarte danym, i sprowadzone do najmniejszego spólnego mianownika.

Ztąd wywodzimy następujące

Ogólne prawidło. *Aby sprowadzić ułamki do najmniejszego spólnego mianownika, trzeba je naprzód przywieśdź do najprost-*

szego wyrażenia, to zrobiwszy, wziąć za spólny mianownik, najmniejszy spólny wielownik mianowników, i pomnożyć każdy licznik ułamka, przez liczbę razy jaką jego mianownik mieści się we spólnym mianowniku.

141. Weźmy jeszcze, jako ćwiczenie, ułamki $\frac{4}{9}$, $\frac{65}{156}$, $\frac{56}{120}$, $\frac{51}{340}$.

Aby sprowadzić te ułamki do najmniejszego spólnego mianownika, przywodzimy je naprzód do najprostszego wyrażenia, jednym ze sposobów wskazanych w n^e^ 129, i otrzymujemy ułamki niezredukowne $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{20}$.

Szukamy teraz najmniejszego wielownika mianowników. W tym celu rozkładamy mianowniki na czynniki pierwsze, i znajdujemy $9=3^2$, $12=2^2\times3$, $15=3\times5$, $20=2^2\times5$.

Ztąd łatwo wnosimy że najmniejszym wielownikiem tych mianowników jest wieloczyn $2^2\times3^2\times5=180$.

Liczba 180 będzie najmniejszym mianownikiem danych ułamków.

Dzielimy teraz spólny mianownik 180 przez mianownik każdego ułamka, i mnożymy licznik przez odpowiedny iloraz.

I tak, dla pierwszego ułamka $\frac{4}{9}$, dzielimy 180 przez 9, co daje iloraz 20: mnożymy licznik 4 przez 20, i otrzymujemy ułamek

$$\frac{80}{180} \text{ równy danemu } \frac{4}{9}.$$

Następnie, dla ułamka $\frac{5}{12}$, dzielimy 180 przez 12, albo jeszcze krócej, dzielimy wieloczyn $2^2\times3^2\times5$ przez $2^2\times3$, i znajdujemy, na spojrzenie, iloraz $3.5=15$, odtrącając tylko czynniki spólne. Przez 15 mnożymy licznik 5, i mamy ułamek $\frac{75}{180}$ równy ułamkowi $\frac{5}{12}$.

Podobnie czyniąc z ułamkami $\frac{7}{15}$ i $\frac{3}{20}$, otrzymujemy ułamki odpowiednio równe $\frac{84}{180}$ i $\frac{27}{180}$.

Ułamki $\frac{80}{180}$, $\frac{75}{180}$, $\frac{84}{180}$, $\frac{27}{180}$ są odpowiednio równe danym, i mają spólny mianownik najmniejszy możebny.

142. Uwaga. Gdybyśmy sprowadzili cztery powyżej zadane ułamki do jednakowego tylko mianownika, nie szukając najmniejszego, otrzymalibyśmy, po dość mozolnym rachunku, stosując ogólne prawidło (140), ułamki daleko większemi niż poprzednie wyrażone liczbami. To już pokazuje użytek najmniejszego spólnego mianownika.

Jest w tem jeszcze inna korzyść.

Gdy dane ułamki, przywiedzione do najprostszego wyrażenia, mają mianowniki pierwsze między sobą po dwa, wtedy najmniejszym spólnym wielownikiem tych mianowników jest ich wieloczyn, i prawidło sprowadzenia ułamków do najmniejszego spólnego mianownika, wchodzi w ogólne prawidło sprowadzenia do jednego mianownika. Zdawałoby się że w tym razie jest rzeczą obojętną użyć jednego albo drugiego prawidła. Ale uważajmy że ogólne prawidło, na samem tylko polegające mnożeniu, na częste wystawia pomyłki których się trudno ustrzedz. Dlatego, wtedy nawet gdy chodzi tylko o proste sprowadzenie ułamków do jednakowego mianownika, dobrze jest wyznaczyć naprzód spólny mianownik, biorąc najmniejszy spólny wielownik mianowników, albo też sam tylko ich wieloczyn, i wykonać potem rachunki ostatniem prawidłem wskazane.

Przykład jaśniej to pokaże.

Niech będą ułamki $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{15}$, które chcemy sprowadzić do najmniejszego spólnego mianownika.

Na samo spojrzenie widzimy że te ułamki są niezredukowne, i ich mianowniki są pierwsze między sobą po dwa. Moglibyśmy więc zastosować ogólne prawidło; ale, jakośmy okazali, lepiej wziąć wieloczyn wszystkich mianowników, to jest, $7 \times 8 \times 11 \times 15 = 9240$; który będzie ich najmniejszym wielownikiem, a zatem najmniejszym spólnym mianownikiem tych ułamków. Po czem, dzielimy spólny mianownik 9240 przez mianownik 7 pierwszego ułamka, i, przez iloraz 1320, mnożymy jego licznik 3; co daje ułamek $\frac{3960}{9240}$ równy pierwszemu $\frac{3}{7}$.

Wykonawszy podobne rachunki dla trzech następujących ułamków, otrzymamy ostatecznie cztery ułamki $\frac{3960}{9240}, \frac{5775}{9240}, \frac{3360}{9240}, \frac{4312}{9240}$ równe odpowiednio czterem danym $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{11}$.

DZIAŁANIA NA UŁAMKACH.

DODAWANIE.

143. Określenie. *Dodawanie, ogólnie mówiąc, jest działanie za pomocą którego zbiera się w jedną liczbę wszystkie jedności i części jedności zawarte w wielu danych liczbach.*

Niech będą najpierwej do dodania ułamki $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{8}{9}$ mające jednakowy mianownik.

Dodać te ułamki jest to zebrać w jeden ułamek wszystkie dziewiąte części jedności, których liczbę wyrażają liczniki. Zatem, summa danych ułamków, zawierając $2+5+8$ dziewiątych, jest $\frac{2+5+8}{9}$ czyli $\frac{15}{9}$, albo jeszcze $1+\frac{2}{3}$.

Ztąd prawidło, *aby dodać ułamki mające ten sam mianownik, trzeba dodać liczniki, i podzielić ich summę przez spólny mianownik.*

Niech będą teraz do dodania ułamki $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{20}$ mające różne mianowniki. Sprowadzając te ułamki do spólnego mianownika 60, zamieniamy je na równowarte $\frac{45}{60}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{51}{60}$. Więc summa danych ułamków jest $\frac{45+25+51}{60}$ czyli $\frac{121}{60}$, albo $2\frac{1}{60}$.

Ztąd ogólne prawidło, *Aby dodać ułamki mające różne mianowniki, trzeba naprzód sprowadzić te ułamki do jednakowego mianownika, potem dodać znalezione liczniki i podzielić ich summę przez spolny mianownik.*

144. Zastosujmy to prawidło.

Zagadnienie XXVIII. *Pewna osoba wydała raz zł.* $100\frac{3}{5}$, *drugi raz zł.* $115\frac{1}{2}$, *potem zł.* $320\frac{5}{6}$, *nakoniec zł.* $5\frac{1}{3}$. *Ileż wydała pieniędzy?*

Aby znaleźć wydaną summę, trzeba, jako zwykle, napisać liczby jedne pod drugiemi; dodać naprzód ułamki, wyciągnąć całkowitę jeśli jest, i dołączyć ją do całkowitych danych.

Oto wzór działania

$$\begin{array}{r} 100\frac{3}{5} \\ 115\frac{1}{2} \\ 320\frac{5}{6} \\ 5\frac{1}{3} \\ \hline 542\frac{4}{15} \end{array}$$

Summa ułamków jest $\frac{68}{30}$ albo $2+\frac{4}{15}$. Dodając te 2 jedności do danych całkowitych, otrzymujemy ostatecznie summę 542 złotych i $\frac{4}{15}$ złotego, które osoba wydała.

Rozwiązanie tego małego zagadnienia pokazuje jak się dodają liczby całkowite mieszane z ułamkami.

Zagadnienie XXIX. *Trzy osoby zmierzyły, każda oddzielnie, pewną odległość. Pierwsza znalazła sążni* $1024\frac{1}{4}$, *druga* $1024\frac{1}{3}$, *trzecia* $1023\frac{5}{12}$. *Chodzi o to jak wyznaczyć tę odległość możebnie najdokładniej.*

Ponieważ trzy wyniki są różne, być może że żaden z nich nie jest dokładny. Przypuszczając że prawdziwa wartość zawiera się między największym i najmniejszym ze trzech wyników, dodajmy je; tym sposobem, błędy poczynione przez niedostatek zmniejszają, w części przynajmniej, błędy przez zbytek; tak że, prawdopodobnie, summa będzie więcej przybliżoną do trzy razy wziętej prawdziwej odległości, niż trzy razy wzięty jeden ze trzech wyników. Więc trzecia część tej summy będzie, także prawdopodobnie, bardziej przybliżona do prawdziwej odległości, niżeli jedna którakolwiek ze trzech liczb otrzymanych. Wykonywając rachunek, znajdujemy że odległość szukana równa się

$$\frac{1024+\frac{1}{4}+1024+\frac{1}{3}+1023+\frac{5}{12}}{3}=1024.$$

Ta odległość nazywa się *średnią odległością*, bo trzyma niejako środek między trzema zmierzonemi odległościami.

Odciąganie.

145. Określenie odciągania ułamków jest to samo co w liczbach całkowitych:

Od jednego ułamka odciągnąć drugi jest znaleźć trzeci ułamek który dodany do drugiego wydaje pierwszy.

Wynika ztąd że, ogólnie, *odciąganie jest działaniem za pomocą ktorego, mając daną summę dwoch części i jedną z tych części, znajduje się drugą część.*

Niech będą najpierwej dwa ułamki $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{7}$, mające spólny mianownik 7, z których chcemy odciągnąć drugi $\frac{3}{7}$ od pierwszego $\frac{5}{7}$. Wedle określenia, trzeba znaleźć liczbę *siódmych* która dodana do 3 *siódmych* wydaje 5 *siódmych*. Tą liczbą jest oczywiście różnica między 5 i 3 *siódmych*; więc żądana różnica ułamków jest $\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$.

Widzimy tedy że, *gdy dwa ułamki mają ten sam mianownik, odciąga się jeden od drugiego, odciągając licznik pierwszego ułamka od licznika drugiego, i dzieląc znalezioną rożnicę przez spolny mianownik.*

Niech będą teraz dwa ułamki $\frac{11}{15}$ i $\frac{7}{12}$, z różnemi mianownikami.

Jeśli chcemy odciągnąć drugi ułamek od pierwszego, sprowadzamy je naprzód do jednakowego mianownika, i mamy ułamki równowarte $\frac{44}{60}$ i $\frac{35}{60}$. Wykonywając odciąganie, znajdujemy resztę $\frac{44-35}{60}=\frac{9}{60}$ albo $\frac{3}{20}$

Widzimy tedy że, ogólnie, *aby odciągnąć jeden ułamek od drugiego, trzeba je sprowadzić do jednakowego mianownika, wziąć rożnicę znalezionych licznikow i podzielić ją przez spolny mianownik.*

Przypuśćmy nakoniec że chcemy odciągnąć ułamek $\frac{5}{8}$ od całkowitej 7. Z tej całkowitej bierzemy *jedność* i od niej odciągamy ułamek $\frac{5}{8}$, co daje $\frac{3}{8}$. Więc szukana różnica, między całkowitą 7 i ułamkiem $\frac{5}{8}$, jest $6\frac{3}{8}$.

146. Zastosujmy.

Zagadnienie XXX. *Pewna osoba miała dukatow $100\frac{5}{6}$ a wydała dukatow $56\frac{1}{4}$. Ileż jej zostało?*

Aby znaleźć resztę, pisze się naprzód pierwszą liczbę, a zaraz pod nią tę którą odciągać mamy, tak żeby całkowite stały pod całkowitemi a ułamki pod ułamkami; potem się podkreśla, i odciąga naprzód ułamki od siebie a następnie całkowite. Oto wzór działania

$$\begin{array}{r} 100\frac{5}{6} \\ 56\frac{1}{4} \\ \hline 44\frac{7}{12} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{10}{12} \\ \frac{3}{12} \end{array}$$

Sprowadziwszy ułamki do najmniejszego mianownika 12, piszemy je z boku naprzeciwko i, odciągając drugi od pierwszego, znajdujemy resztę $\frac{7}{12}$ Potem odciągamy całkowite, i otrzymujemy 44.

Te dwa wyniki okazują że osobie rzeczonej zostało 44 dukatów i $\frac{7}{12}$ dukata.

Zagadnienie XXXI. *Pewien kupiec zakupił towary za talarow* $18476\frac{1}{2}$, *a miał tylko talarów* $15079\frac{2}{3}$. *Ileż mu brakowało?*

Chcąc wiedzieć ile kupcowi brakowało pieniędzy, trzeba odciągnąć summę którą posiadał od summy którą za towary zapłacić powinien, to jest odciągnąć talarów $15079\frac{2}{3}$ od talarów $18476\frac{1}{2}$; różnica pokaże ile brakuje do zapłacenia.

Rachunek wykonywa się jako wyżej.

$$\begin{array}{r} 18476\frac{1}{2} \\ 15079\frac{2}{3} \\ \hline 3396\frac{5}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} \end{array}$$

Sprowadzamy ułamki do jednego mianownika, zamieniając je na $\frac{3}{6}$ i $\frac{4}{6}$. Trzebaby teraz odciągnąć $\frac{4}{6}$ od $\frac{3}{6}$, jako chce zagadnienie: a że to niemożebne, do pierwszego ułamka $\frac{3}{6}$ dodajemy 1 czyli $\frac{6}{6}$, co czyni $\frac{9}{6}$; dopiero od tej summy odciągamy $\frac{4}{6}$, i znalezioną różnicę $\frac{5}{6}$ piszemy pod ułamkami, zatrzymując w pamięci *jedność* którąśmy dodali. Tę zatrzymkę dodajemy, jako należy, do liczby całkowitej 15079, i summę 15080 odciągamy od 18476; co daje resztę całkowitą 3396. Działanie skończone okazuje że kupcowi brakuje talarów $3396\frac{5}{6}$ do zapłacenia kupionych towarów.

Zagadnienie XXXII. *Pewien podróżnik miał w gotówce* *dukatów* $10\frac{4}{5}$ *i weksel na dukatów* $100\frac{5}{8}$. *Zmiana weksla kosztowała* $\frac{13}{15}$ *dukata, a wydatek podróży dukatów* $99\frac{5}{6}$. *Ileż się zostało?*

Szukamy naprzód ile podróżnik miał pieniędzy, biorąc summę dukatów $10\frac{4}{5}$ i $100\frac{5}{8}$, którą znajdujemy, pisząc

$$\begin{array}{r} 10\frac{4}{5} \\ 100\frac{5}{8} \\ \hline 111\frac{17}{40} \end{array}$$

Szukamy potem ile podróżnik wydał, biorąc summę dukatów $\frac{13}{15}$ i $99\frac{5}{6}$; co wyrażamy, pisząc

$$\begin{array}{r} \frac{13}{15} \\ 99\frac{5}{6} \\ \hline 100\frac{7}{10} \end{array}$$

Te dwie summy pokazują że podróżnik miał dukatów $111\frac{17}{40}$, a wydał dukatów $100\frac{7}{10}$; zatem, dowiemy się ile zostało podróżnikowi, odciągając drugą summę od pierwszej. Rachunek wykonywa się sposobem już wiadomym, jako następuje

$$\begin{array}{lr} & 111\frac{17}{40} \\ & 100\frac{7}{10} \\ \hline \text{Różnica} & 10\frac{29}{40} \end{array}$$

Otrzymana różnica pokazuje że zostało podróżnikowi dukatów $10\frac{29}{40}$.

MNOŻENIE.

147. W mnożeniu liczb całkowitych, *mnożyć jedną liczbę przez drugą jestto znaleźć trzecią liczbę która się składa z tyle razy pierwszej ile druga ma jedności.*

To jasne określenie nie stosuje się wprost do ułamków; bo cóż znaczy mnożyć np. 5 przez $\frac{3}{4}$? Pojmujemy jednakże że działanie mnożenia nie może, i logicznie nie powinno, mieć dwóch różnych określeń, jednego dla liczb całkowitych a drugiego dla ułamków. Aby więc znaleźć ogólne określenie mnożenia, uważajmy że, mnożyć np. 4 przez 3 jestto wziąć 3 razy 4, co daje 12. To pokazuje że wieloczyn 12 składa się takim samym sposobem z mnożnej 4, jakim się mnożnik 3 składa z jedności; to jest, mnożnik jest 3 razy jedność, a wieloczyn 3 razy mnożna. Ztąd wynika że, *mnożyć jedną liczbę przez drugą jestto znaleźć trzecią liczbę która tak się tworzy z pierwszej jak się druga tworzy z jedności.*

Otóż, to ogólne określenie mnożenia, które jest rozciągnięciem powyżej danego, stosuje się tak dobrze do ułamków jako do liczb całkowitych. Możemy teraz powiedzieć co znaczy mnożyć np. 2 przez $\frac{3}{4}$. Jakoż, na mocy określenia, mnożyć 2 przez $\frac{3}{4}$ jest znaleźć liczbę która tak się tworzy z mnożnej 2 jak się tworzy mnożnik $\frac{3}{4}$ z jedności: owoż, $\frac{3}{4}$ jest 3 razy 4ta część jedności; zatem wieloczyn jest 3 razy 4ta część mnożnej 2. Więc mnożyć liczbę 2 przez $\frac{3}{4}$ jest wziąć *trzy czwarte* tej liczby. Takie jest znaczenie mnożenia przez ułamek.

To zrozumiawszy, nie trudno będzie pojąć mnożenie ułamków, które, dla jaśniejszego wykładu, rozdzielamy na *cztery* przypadki.

148. 1° Mnożenie ułamka przez całkowitę. Niech będzie $\frac{3}{5}$ do mnożenia przez 4; wieloczyn jest oczywiście summą czterech ułamków równych $\frac{3}{5}$, to jest równa się

$$\frac{3+3+3+3}{5}\ ;\ \text{zatem}\ \frac{3}{5}\times 4=\frac{3\times 4}{5}\ \text{albo}\ \frac{12}{5}.$$

Więc, aby pomnożyć ułamek przez całkowitę, dosyć pomnożyć licznik tego ułamka przez całkowitę.

149. Gdyby dano ułamek $\frac{5}{12}$ do pomnożenia przez 4, stosując powyższe prawidło, otrzymanoby wieloczyn $\frac{20}{12}$. Owoż, wyrazy ostatniego ułamka są podzielne oba przez 4; wykonawszy to uprosczenie, otrzymuje się $\frac{5}{3}$. Ten wynik pokazuje że

Aby pomnożyć ułamek przez całkowitę, dosyć jest, jeśli można, podzielić mianownik tego ułamka przez całkowitę.

Jako widzimy, drugie prawidło, gdy jest zastosowalne, daje wieloczyn prostszy od pierwszego. I tak, $\frac{5}{7}\times 7=5$.

150. 2°. Mnożenie całkowitej przez ułamek. Niech będzie 4 do mnożenia przez $\frac{3}{5}$. Wiemy już że mnożyć 4 przez $\frac{3}{5}$ jest wziąć 3 razy 5^{tą} część mnożnej 4. Owoż 5ta część 4^{ch} jest $\frac{4}{5}$ (124), a wziąć 3 razy ułamek $\frac{4}{5}$ dosyć pomnożyć jego licznik 4 przez 3; co daje szukany wieloczyn

$$4\times\frac{3}{5}=\frac{4\times 3}{5} \text{ albo } \frac{12}{5}.$$

Więc, aby pomnożyć całkowitę przez ułamek, dosyć pomnożyć tę całkowitę przez licznik ułamka i, przez jego mianownik, podzielić wieloczyn.

Widzimy tedy że mnożyć całkowitę 4 przez ułamek $\frac{3}{5}$ jest to samo co mnożyc ułamek $\frac{3}{5}$ przez całkowitę 4.

151. 3° Mnożenie ułamka przez ułamek. Niech będzie $\frac{5}{7}$ do mnożenia przez $\frac{3}{4}$. Mnożyć przez $\frac{3}{4}$ jest wziąć 3 razy 4^{tą} część mnożnej $\frac{5}{7}$. Owoż, 4ta część ułamka $\frac{5}{7}$ jest ułamek 4 razy mniejszy od $\frac{5}{7}$; aby go otrzymać, dość pomnożyć przez 4 mianownik ułamka $\frac{5}{7}$ (127), co daje $\frac{5}{7\times 4}$. Trzeba teraz wziąć 3 razy ten ostatni; co się otrzymuje mnożąc tylko jego licznik przez 3 : zatem szukany wieloczyn jest $\frac{5\times 3}{7\times 4}$. Więc

Prawidło ogólne. *Aby pomnożyć jeden ułamek przez drugi, trzeba pomnożyć ich liczniki przez siebie i mionowniki przez siebie.*

Uwaga. Nazwaliśmy ogólnem prawidło mnożenia dwóch ułamków jeden przez drugi, dlatego że ono zawiera wszystkie przypadki mnożenia. I w samej rzeczy, jeśli jest ułamek $\frac{5}{7}$ do mnożenia przez całkowitę 6, albo nawzajem, można wyrazić całkowitę 6 w postaci ułamka dając jej za mianownik 1, to jest pisząc $\frac{6}{1}$. Tym sposobem mnożenie całkowitej przez ułamek ' przywodzi się do mnożenia pzzez siebie dwóch ułamków $\frac{6}{1}$ i $\frac{5}{7}$; co się właśnie wykonywa wedle powyższego prawidła, i daje $\frac{6}{1}\times\frac{5}{7}=\frac{6\times 5}{7}$. Wynik już znany

152. 4° Mnożenie liczb złożonych z całkowitej i ułamka. Niech będzie $9+\frac{3}{4}$ do pomnożenia przez $2+\frac{6}{7}$. Zamieniwszy całkowitę na ułamek (124), zadane liczby stają się $\frac{39}{4}$ i $\frac{20}{7}$; zatem ich wieloczyn jest $\dfrac{39\times20}{4\times7}=\dfrac{39\times5}{7}$.

Więc, aby pomnożyć przez siebie dwie liczby złożone z całkowitej i ułamka, dosyć jest złączyć całkowitę z ułamkiem, i pomnożyć, jeden przez drugi, tak otrzymane ułamki.

Uwaga. Gdy jeden czynnik jest złożony z całkowitej i ułamka a drugi jest liczbą całkowitą, wtedy otrzymuje się wieloczyn, mnożąc po prostu całkowitę i ułamek pierwszego czynnika przez czynnik całkowity. I tak, niech będzie $10+\frac{3}{4}$ do pomnożenia przez 7; mnożymy naprzód $\frac{3}{4}$ przez 7, co daje $\frac{21}{4}$ czyli $5+\frac{1}{4}$; mnożymy potem 10 przez 7, co daje 70. Dodając te dwa wieloczyny, otrzymujemy summę $75+\frac{1}{4}$, która jest szukanym wieloczynem.

153. Można, nie zamieniając na ułamki, otrzymać wieloczyn dwóch czynników złożonych z całkowitej i ułamka. Niech będzie, jako w poprzedzającym numerze, $9+\frac{3}{4}$ do pomnożenia przez $2+\frac{6}{7}$. Aby otrzymać wieloczyn, dosyć jest oczywiście pomnożyć całkowitę 9 i ułamek $\frac{3}{4}$, naprzód przez 2 a potem przez $\frac{6}{7}$, i dodać te cztery cząstkowe wieloczyny. Owoż, mnożąc przez 2, znajdujemy $18+\dfrac{6}{4}$ albo $19+\dfrac{1}{2}$; mnożąc potem tę samą mnożnę przez $\frac{6}{7}$,

mamy $$\frac{54}{7}+\frac{18}{28}\ \text{albo}\ 7+\frac{19}{14};$$

nakoniec, dodając wszystkie liczby, otrzymujemy summę $27\frac{6}{7}$ która jest żądanym wieloczynem. Ale rachunek jest daleko dłuższy od już wiadomego. Daliśmy go jedynie dlatego aby pokazać możebność innego sposobu mnożenia, który nam później będzie użyteczny.

Ztego co poprzedza wynika twierdzenie

Aby pomnożyć jedną summę liczb jakichkolwiek przez drugą, *dosyć jest pomnożyć każdy wyraz pierwszej summy przez każdy wyraz drugiej, i dodać cząstkowe wieloczyny.*

154. Dobrze teraz dowieśdź następującego twierdzenia, które jest zogólnieniem odpowiedniego w liczbach całkowitych.

Wieloczyn ułamków nie zmienia wartości, gdy się przemienia porządek czynników.

Bo, w jakimkolwiek porządku wykona się mnożenie, licznik i mianownik szukanego wieloczynu będą wieloczynami liczb całkowitych, a wiemy już że te wieloczyny są równe (33).

155. *Wieloczyn ułamków właściwych jest mniejszy od każdego z nich.*

Bo jest ułamkiem każdego czynnika.

156. Ułamek z ułamka. Wziąć np. $\frac{3}{5}$ ze $\frac{4}{7}$, to jest wziąć 3 razy 5^{tą} część ze $\frac{4}{7}$, co daje $\frac{3\times4}{5\times7}$, nazywa się *wziąć ułamek z ułamka.*

Jako widzimy, ułamek z ułamka jest wieloczynem tych dwóch ułamków. Zatem $\frac{3}{5}$ ze $\frac{4}{7}$ jest to samo co $\frac{4}{7}$ ze $\frac{3}{5}$.

Podobnie, $\frac{3}{4}$ z 10^u jest to samo co 10 razy $\frac{3}{4}$; bo jedno i drugie daje wieloczyn $\frac{10\times3}{4}=\frac{3\times10}{4}$.

Można wziąć kilka razy ułamek z ułamka, i mieć np. $\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{6}$ z $\frac{7}{10}$ z $\frac{8}{9}$. To znaczy że trzeba wziąć naprzód $\frac{7}{10}$ z $\frac{8}{9}$, co daje $\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}$; potem wziąć $\frac{5}{6}$ z tego wieloczynu, co daje $\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}\times\frac{5}{6}$; nakoniec $\frac{3}{4}$ tego wyniku

czyni $$\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4} \text{ albo } \frac{7}{18}.$$

Samo z siebie rozumie się że ułamek z ułamków nie zmienia wartości, gdy się przemienia porządek tych ułamków.

157. Kończymy teoryę mnożenia ułamków, następującą uwagą, która zawsze w rachunku jest użyteczną. Oto, gdy oba wyrazy wskazanego wieloczynu ułamków mają spólne czynniki, trzeba naprzód znieść te czynniki, a dopiero potem wy-

konać działania. Tym sposobem, często się rachunek uprościć może; a jest niezaprzeczalną prawdą że, im mniej się wykonywa liczebnych działań, tem się mniej naraża na błędy.

Niech będzie do wykonania wieloczyn ułamków $\frac{12}{25}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{8}$; znosząc czynniki spólne 3, 4, 5, otrzymujemy

$$\frac{12}{25}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{5.3}=\frac{2}{15}.\text{ Tak samo }\frac{11}{12}\times\frac{8}{15}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{8}\times\frac{120}{121}=\frac{1}{11}.$$

Przeróbmy teraz parę zagadnień.

Zagadnienie XXXIII. *Pewna osoba chce kupić $\frac{3}{4}$ łokcia sukna, po 6 talarów łokieć: ileż ma zapłacić?*

Ponieważ łokieć kosztuje 6 talarów, *ćwierć* łokcia kosztować będzie *jedną czwartą* 6$^{\text{ciu}}$ talarów, to jest $\frac{6}{4}$ tal; zatem 3 *ćwiercie* łokcia kosztować będą 3 razy $\frac{6}{4}$ tal.,

to jest $\frac{6\times3}{4}$ tal. albo $\frac{9}{2}$ tal. czyli 4 tal. i $\frac{1}{2}$.

Więc ta osoba zapłaci za sukno talarów 4 i pół.

Zagadnienie XXXIV. *Za jeden rubel można dostać półtorej kwarty wina; ileż za rubli 3 $\frac{2}{5}$?*

Dodawszy całkowitę do ułamka, mamy $\frac{3}{2}$ kwarty, i $\frac{17}{5}$ rubla. Teraz tak rozumujemy: kiedy za jeden rubel kupuje się $\frac{3}{2}$ kwarty, za $\frac{1}{5}$ rubla kupi się 5 razy mniej, to jest $\frac{3}{2\times5}$ kwarty $\frac{17}{5}$ rubla kupi się 17 razy więcej, to jest $\frac{3\times17}{2\times5}$ kwarty, czyli $\frac{51}{10}$ kwarty; albo nakoniec 5 kwart i $\frac{1}{10}$.

Więc, za rubli 3 i $\frac{2}{5}$ kupuje się wina kwart 5 $\frac{1}{10}$.

Jako ćwiczenie, rozwiązać dwa następujące zagadnienia.

Zagadn. XXXV. *W pewnym lesie, odległym na mil 10 $\frac{4}{5}$ od stolicy, fura drew kosztuje złotych $5\frac{1}{2}$; ale dowóz do stolicy płaci się 5 groszy na milę. W drugim lesie fura drew kosztuje zł. 5; ale las odległy od stolicy na mil 15 $\frac{1}{3}$, a dowóz płaci się groszy $4\frac{1}{2}$ na milę. Zkądże korzystniej sprowadzać drwa do stolicy?*

Odp. *Wszystko jedno*

Zagadn. XXXVI. *Winiarz ma w 2 beczkach równą ilość wina różnego gatunku. Odlewa $\frac{1}{4}$ wina z pierwszej beczki i wlewa do drugiej, po czem odlewa $\frac{1}{3}$ mieszaniny drugiej beczki i wlewa do pierwszej. Bierze znowu z pierwszej beczki $\frac{1}{5}$ i wlewa do drugiej. Ile teraz wziąć trzeba z drugiej beczki aby, wlawszy do pierwszej, była równa ilośc wina w obydwóch beczkach?*

Odp. $\frac{1}{3}$.

DZIELENIE.

158. *Dzielić jedną liczbę przez drugą*, jakośmy już powiedzieli, *jest znaleźć trzecią liczbę która, pomnożona przez drugą, wydaje pierwszą.*

Widzieliśmy że tak ogólne określenie dzielenia nie zawsze może się zastosować do liczb całkowitych. I dlatego, w tych ostatnich, dzielenie jednej liczby przez drugą ma tylko na celu znalezienie największej liczby razy jaką dzielnik mieści się w dzielnej, to jest wyznaczenie samej części całkowitej ilorazu, która zwykle nie jest zupełnym ilorazem, ale tylko przybliżonym na mniej niż jedność.

Otoż właśnie, w ułamkach dzielenie ma za cel wyznaczenie zupełnego ilorazu, to jest takiej liczby która, pomnożona przez dzielnik, wydaje dzielnę.

Wiemy już że ułamek, np. $\frac{3}{5}$, jest ilorazem z podzielenia licznika przez mianownik; i nawzajem, iloraz z podzielenia całkowitej 3 przez całkowitę 5 jest ułamkiem $\frac{3}{5}$. Te oba twierdzenia łatwo się tutaj dowodzą. W samej rzeczy, na mocy określenia dzielenia, iloraz z podzielenia liczby 3 przez 5, jest liczbą która, pomnożona przez dzielnik 5, powinna wydać dzielnę 3; owoż ułamek $\frac{3}{5}$ pomnożony przez mianownik 5 wydaje licznik 3; więc ułamek $\frac{3}{5}$ jest ilorazem z podzielenia licznika 3 przez mianownik 5. I nawzajem.

Aby łatwiej objąć wszystkie szczegóły dzielenia ułamków, rozróżnimy cztery przypadki.

159. 1° Dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą. Niech będzie do podzielenia ułamek $\frac{3}{5}$ przez 4.

Wedle określenia dzielenia, trzeba znaleźć iloraz który, pomnożony przez dzielnik 4 wydaje dzielnę $\frac{3}{5}$: więc ten iloraz jest 4 razy mniejszy od $\frac{3}{5}$; znajdziemy go zatem czyniąc 4 razy mniejszym ułamek $\frac{3}{5}$, to jest mnożąc mianownik tego ułamka przez 4. Co daje szukany iloraz $\frac{3}{5\times4}$. Ztąd wynika że,

Aby podzielić ułamek przez liczbę całkowitą, dosyć pomnożyć mianownik ułamka przez tę całkowitą.

Uwaga. Gdy licznik ułamka, który chcemy podzielić przez całkowitę, jest jej wielownikiem, otrzymuje się iloraz dzieląc licznik ułamka przez tę całkowitą. I tak, iloraz z podzielenia ułamka $\frac{6}{7}$ przez 3 jest wedle, poprzedniego prawidła, $\frac{6}{7\times3}$, Dzieląc oba wyrazy przez 3, znajdujemy $\frac{2}{7}$. Co się właśnie otrzyma odrazu, dzieląc licznik dzielnej 6 przez dzielnik 3.

160. 2° Dzielenie liczby całkowitej przez ułamek. Niech będzie do podzielenia 7 przez $\frac{5}{8}$. Na mocy określenia dzielenia, iloraz pomnożony przez dzielnik $\frac{5}{8}$ powinien wydać dzielnę 7. To pokazuje że $\frac{5}{8}$ ilorazu czynią 7. Więc $\frac{1}{8}$ ilorazu, jako 5 razy mniejsza, równa się $\frac{1}{5}$ ze 7, to jest czyni $\frac{7}{5}$. A zatem szukany iloraz jest 8 razy $\frac{7}{5}$, czyli $\frac{7\times8}{5}$, albo $7\times\frac{8}{5}$. Więc

Aby podzielić liczbę całkowitą przez ułamek, trzeba pomnożyć tę liczbę przez ułamek przewrócony.

161. Określenie. Dwie liczby, jako $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$, są *odwrotnemi* jedna drugiej, gdy ich wieloczyn $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}$ równa się jedności.

Iloraz z podzielenia jedności przez liczbę jakąkolwiek nazywa się *odwrotnością* tej liczby. I tak, odwrotnością liczby 3 jest $\frac{1}{3}$. Odwrotnością ułamka $\frac{2}{5}$ jest iloraz $1:\frac{2}{5}=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$. Jako widzimy, *dowrotność ułamka jest ten sam ułamek przewrócony.*

162. Dzielenie ułamka przez ułamek. Niech będzie do podzielenia $\frac{8}{9}$ przez $\frac{5}{7}$. Na mocy określenia dzielenia, iloraz pomnożony przez dzielnik $\frac{5}{7}$ powinien wydać dzielnę $\frac{8}{9}$. Zatem $\frac{1}{7}$

ilorazu równa się jednej *piątej* dzielnej $\frac{8}{9}$, to jest czyni $\frac{8}{9\times5}$. A więc iloraz, jako 7 razy większy, równa się $\frac{8}{9\times5}\times7$, albo $\frac{8\times7}{9\times5}$.

Ztąd PRAWIDŁO OGÓLNE, *aby podzielić ułamek przez ułamek, trzeba pomnożyć dzielnę przez dzielnik przewrócony*

UWAGA. To prawidło obejmuje wszystkie przypadki dzielenia. Jakoż, gdy jest do podzielenia, ułamek przez liczbę całkowitą, albo całkowita przez ułamek, można dać całkowitej jedność za mianownik, i tym sposobem przywieśdź do dzielenia dwóch ułamków. I tak, $5:\frac{3}{4}$ jest to samo co

$$\frac{5}{1}:\frac{3}{4}=\frac{5}{1}\times\frac{4}{3}=\frac{5.4}{3}.$$

Ztąd wnosimy że, *aby podzielić liczbę* JAKĄKOLWIEK *przez drugą, dosyć pomnożyć dzielnę przez odwrotność dzielnika.*

Jest przeto jedno tylko prawidło dzielenia ułamków, tak jako jedno tylko prawidło ich mnożenia; i dlatego nazwaliśmy je ogólnem.

163. 4° DZIELENIE LICZB ZŁOŻONYCH Z CAŁKOWITEJ I UŁAMKA. Niech będzie do podzielenia $12+\frac{3}{4}$ przez $2+\frac{5}{6}$. Zamieniamy całkowite na ułamki, i mamy do podzielenia $\frac{51}{4}$ przez $\frac{17}{6}$. Wykonywając iloraz, otrzymujemy

$$\frac{51}{4}:\frac{17}{6}=\frac{51\times6}{4\times17} \text{ albo, uprosczając, } \frac{3\times3}{2} \text{ czyli } \frac{9}{2};$$

albo nakoniec $4+\frac{1}{2}$.

Widzimy tedy że, *aby podzielić, jedną przez drugą, dwie liczby złożone z całkowitej i ułamka, trzeba zamienić całkowitę na ułimek*, i zastosować ogólne prawidło dzielenia ułamków.

164. UWAGA OGÓLNA. Iloraz z podzielenia liczby jakiejkolwiek przez ułamek właściwy czyli mniejszy od jedności, jest zawsze większy od dzielnej. Bo ten iloraz równa się wieloczynowi dzielnej przez liczbę większą od jedności.

I tak, $10:\frac{3}{5}=10\times\frac{5}{3}=\frac{50}{3}$ albo $16\frac{2}{3}$.

Widzieliśmy już że wieloczyn liczby jakiejkolwiek, przez ułamek właściwy czyli mniejszy od jedności, jest zawsze mniejszy od mnożnej.

To wszystko pokazuje że mnożyć nie koniecznie znaczy zwiększać, ani też dzielić nie zawsze znaczy zmniejszać. Mnożenie i dzielenie ułamków nie są działaniami prostemi, jako w liczbach całkowitych, ale złożonemi. Czytelnik pojmuje teraz dlaczego z tak staranną ścisłością daliśmy teoryę ułamków, i dlaczego tak wielką przywiązujemy wagę do określenia każdego działania. Cenimy albowiem wyżej rozumowanie niż sam wynik: a mamy na widoku wyższą matematykę, i do niej uczącym się torujemy drogę.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK I NAJMNIEJSZY SPÓLNY WIELOWNIK LICZB UŁAMKOWYCH.

165. Określenie. Mówi się że jedna liczda jest dzielnikiem drugiej gdy się w niej mieści całkowitą liczbę razy.

I tak, $\frac{5}{12}$ jest dzielnikiem liczby $\frac{25}{6}$; bo iloraz, $\frac{25}{6} \times \frac{12}{5} = 10$; jest liczbą całkowitą. Ale na tem nie koniec; liczba $\frac{25}{6}$ jest jeszcze podzielna przez $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{25}{6}; \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{25}{12}$; i t. d.

166. Jako widzimy, liczby ułamkowe mają nieskończoną liczbę dzielników ułamkowych, ale nie są podzielne przez *jedność;* gdy przeciwnie, liczby całkowite są zawsze podzielne przez jedność.

Liczby ułamkowe, jako i całkowite, mają nieskończoną liczbę spólnych dzielników *ułamkowych.*

I tak, $\frac{4}{15}$ i $\frac{6}{25}$ mają za spólne dzielniki

$$\frac{1}{75}, \frac{2}{75}; \quad \frac{1}{150}, \frac{1}{225}, \frac{2}{225}, \text{ etc.}$$

To pokazuje że niema liczb *ułamkowych pierwszych,* ani pierwszych między sobą.

167. Zagadnienie. *Znaleźć największy spólny dzielnik dwóch liczb ułamkowych.*

Niech będą, jako przykład, dwa ułamki $\frac{4}{25}$ $\frac{14}{15}$. Rozumując jako w liczbach całkowitych, mówimy: gdyby mniejsza liczba $\frac{4}{25}$ dzieliła większą $\frac{14}{15}$, toby ona była największym spólnym dzielnikiem. Dzielimy więc $\frac{14}{15}$ przez $\frac{4}{25}$, i znajdujemy iloraz $\frac{35}{6}$ który się składa z części całkowitej 5 i ułamka $\frac{5}{6}$. Ztąd wnosimy że $\frac{4}{25}$ nie jest spólnym dzielnikiem szukanym, bo nie dzieli $\frac{14}{15}$ całkowicie. A że dzielna równa się wieloczynowi dzielnika przez iloraz;

$$\text{więc}\quad \frac{14}{15}=\frac{4}{25}\left(5+\frac{5}{6}\right),\quad \text{albo}\quad \frac{14}{15}=\frac{4}{25}\times 5+\frac{2}{15}.$$

Ta równość pokazuje że wszelka liczba, która dzieli dzielnę $\frac{14}{15}$ i dzielnik $\frac{4}{25}$, dzieli tem samem resztę $\frac{2}{15}$; bo inaczej liczba całkowita równałaby się liczbie ułamkowej. Dla tej samej przyczyny, wszelka liczba, która dzieli resztę $\frac{2}{15}$ i dzielnik $\frac{4}{25}$, dzieli tem samem dzielnę $\frac{14}{15}$. Wynika ztąd oczywiście że, w liczbach ułamkowych, jako w liczbach całkowitych, największy spólny dzielnik między dzielną i dzielnikiem jest ten sam co między dzielnikiem i resztą.

Więc znowu szukamy największego spólnego dzielnika między $\frac{4}{25}$ i $\frac{2}{15}$. W tym celu, dzielimy $\frac{4}{25}$ przez $\frac{2}{15}$, i znajdujemy iloraz $\frac{6}{5}$, albo $1+\frac{1}{5}$. Co daje

$$\frac{4}{25}=\frac{2}{15}\times 1+\frac{2}{75}.$$

Rozumując jako wyżej, widzimy że największy spólny dzielnik między $\frac{4}{25}$ i $\frac{2}{15}$ jest ten sam co między $\frac{2}{15}$ i $\frac{2}{75}$. Dzielimy przeto $\frac{2}{15}$ przez $\frac{2}{75}$ i znajdujemy iloraz całkowity 5. Co daje

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{75}\times 5.$$

Więc $\frac{2}{75}$ jest największym spólnym dzielnikiem liczb ułamkowych $\frac{14}{15}$ i $\frac{4}{25}$.

168. Daliśmy tę teoryę, nie dlatego żeby za jej pomocą szukać największego spólnego dzielnika dwóch liczb ułamkowych, ale dlatego że ona indziej ma swoje zastosowanie, a

obecnie prowadzi do dwóch wniosków które nam zaraz będą potrzebne.

Jakoż, na mocy powyższej teoryi, łatwo widzimy że, w liczbach ułamkowych, tak jako w całkowitych,

1° *Mnożąc albo dzieląc dwie liczby przez trzecią, mnoży się albo dzieli ich największy spólny dzielnik przez tę liczbę.*

2° *Ilorazy z podzielenia dwóch liczb, przez ich największy spólny dzielnik, są pierwsze między sobą.*

Te oba wnioski łatwo się wprost dowodzą, już wiadomem rozumowaniem.

168. Za pómocą powyższych wniosków, metoda największego spólnego dzielnika liczb ułamkowych przywodzi się do liczb całkowitych. I tak, niech będą dwa ułamki $\frac{4}{15}$ i $\frac{8}{9}$, których chcemy znaleźć największy spólny dzielnik. Sprowadzając do spólnego mianownika, mamy $\frac{12}{45}$ i $\frac{40}{45}$. Wiemy już że, odtrącając mianownik 45, mnożymy przezeń największy spólny dzielnik tych ułamków. Owoż, największy spólny dzielnik liczników 12 i 40 jest 4; więc największy spólny dzielnik ułamków $\frac{12}{45}$ i $\frac{40}{45}$, równych danym ułamkom $\frac{4}{15}$ i $\frac{8}{9}$, jest $\frac{4}{45}$.

170 Zagadnienie. *Znaleźć najmniejszy spólny wielownik dwóch liczb ułamkowych.*

Niech będą, dla ułatwienia myśli, dwa ułamki $\frac{12}{25}$ i $\frac{16}{15}$ których chcemy znaleźć najmniejszy spólny wielownik.

Wszelki wielownik dwóch danych ułamków, jako podzielny przez $\frac{12}{25}$, musi być oczywiście wieloczynem z $\frac{12}{25}$ przez pewną liczbę całkowitą. Nie znając tej całkowitej, oznaczmy ją przez x; tym sposobem, szukany wielownik wyrazi się przez wieloczyn $\frac{12}{25}x$. Owoż, ten wielownik powinien być podzielny przez $\frac{16}{15}$; więc iloraz $\dfrac{\frac{12}{25}x}{\frac{16}{15}}$ jest liczbą całkowitą. Nie zmienimy tego ilorazu, jeśli podzielimy dzielnę $\frac{12}{25}$ i dzielnik $\frac{16}{15}$

przez ich największy spólny dzielnik $\frac{4}{75}$; co da ilorazowi postać $\frac{9}{20}x$. Ale teraz, liczba 20 powinna dzielić wieloczyn $9x$ a że jest pierwsza z czynnikiem 9 (168), więc dzieli x. Zatem niewiadoma x jest wielownikiem liczby 20, i wyraża się przez $20y$; oznaczając przez y pewną całkowitę niewiadomą. Jeśli podstawimy tę wartość $20y$ zamiast x, wyrażenie $\frac{12}{25}x$ szukanego wielownika staje się $\frac{12}{25} \times 20y$; a ponieważ 20 jest ilorazem z podzielenia dzielnika $\frac{16}{15}$ przez największy spólny dzielnik $\frac{4}{75}$, to wyrażenie wielownika bierze ostatecznie postać

$$\frac{\frac{12}{25} \times \frac{16}{15}}{\frac{4}{75}} \times y.$$

Oczywiscie ten wielownik będzie najmniejszy możebny, jeśli, za liczbę całkowitą y, podstawimy 1; co daje $\frac{\frac{12}{25} \times \frac{16}{15}}{\frac{4}{75}}$.

To pokazuje że *najmniejszym wielownikiem dwóch liczb ułamkowych*, tak jako całkowitych, *jest ich wieloczyn podzielony przez największy spólny dzielnik*.

Wykonywając rachunek, znajdujemy że najmniejszym wielownikiem ułamków $\frac{12}{25}$ i $\frac{16}{15}$ jest $\frac{48}{5}$.

171. Wynika ztąd dwa ważne wnioski, których dowodzi samo wyrażenie spólnego wielownika dwóch liczb.

1° *Wielownik dwóch liczb jest wielownikiem ich najmniejszego wielownika.*

2° *Mnożąc albo dzieląc dwie liczby przez trzecią, mnoży się albo dzieli ich najmniejszy wielownik przez tę liczbę.*

172. Na mocy tych wniosków łatwo się znajduje najmniejszy wielownik liczb ułamkowych.

Niech będą dwa ułamki $\frac{12}{25}$ i $\frac{16}{15}$; sprowadziwszy do jednakowego mianownika, mamy $\frac{36}{75}$ i $\frac{80}{75}$. Jeśli odtrącimy spólny mianownik tych ułamków, pomnożymy przez 75 ich najmniejszy spólny wielownik. Owoż, najmniejszy wielownik liczników 36 i 80 jest 720; więc najmniejszy wielownik dwóch ułamków $\frac{12}{25}$, $\frac{16}{15}$ jest $\frac{720}{75}$ albo $\frac{48}{5}$.

Co się zgadza z poprzednio otrzymanym wynikiem.

Uwaga. Jako widzimy, wyznaczenie najmniejszego wielownika dwóch liczb ułamkowych, tak jako wyznaczenie ich największego dzielnika, sprowadza się do liczb całkowitych, w teoryi i praktyce; byle uważano liczby ogólne, nie zaś szczególne przypadki rozkładania na czynniki, które tylko w liczbach całkowitych służyć może.

Ztąd wnosimy że, jakiekolwiek są dwie liczby a i b, nazywając d ich największy spólny dzielnik, w najmniejszy wielownik, między temi czterema liczbami istnieje zawsze związek $d.w = a.b$.

173. Gdy dwie liczby ułamkowe są niezredukowne, jako $\frac{12}{25}$ i $\frac{16}{15}$, można wprost znaleźć ich największy spólny dzielnik; bo widocznie jest nim ułamek, mający największy spólny dzielnik liczników 12 i 16 za licznik, a najmniejszy spólny wielownik mianowników 25 i 15 za mianownik. Co daje odrazu największy spólny dzielnik $\frac{4}{75}$.

Tak samo, najmniejszym spólnym wielownikiem dwóch ułamków niezredukownych $\frac{12}{25}$ i $\frac{16}{15}$ jest ułamek którego licznikiem jest najmniejszy wielownik liczników 12 i 16, a mianownikiem największy spólny dzielnik mianowników 25 i 15. Co daje odrazu najmniejszy spólny wielownik $\frac{48}{5}$.

174. Zaledwie mówić widzimy potrzebę, tak rzecz sama przez się widoczna, że wyznaczenie największego spólnego dzielnika i najmniejszego spólnego wielownika wielu liczb ułamkowych, na tych samych co w liczbach całkowitych, opiera się zasadach.

Przejdźmy teraz do zagadnień które każdy uczeń sam przerobić powinien.

Zagad. XXXVII. *Za 14 gruszek płaci się 5 groszy; ileż za 8 groszy dostać można gruszek?*

Gdybyśmy wiedzieli ile za 1 grosz dostać można gruszek, łatwobyśmy znaleźli ile za 8 groszy. Owoż, za 5 groszy kupuje się 14 gruszek; więc, za 1 grosz będzie 5 razy mniej, to jest będzie *piąta* część 14tu gruszek, czyli $\frac{14}{5}$. Zatem, za 8 groszy dostaniemy 8 razy więcej, to jest $\frac{14}{5}\times 8=\frac{112}{5}$ gruszek. Wykonywając dzielenie, otrzymujemy $22+\frac{2}{5}$. Więc za 8 groszy dostaniemy 22 gruszek i niemal pół gruszki.

Chociaż ten przykład dostatecznie wyświeca niezaprzeczalny użytek, a nadewszystko ogólność działań ułamkowych, za pomocą których wszystko się sprowadza do jedności i ułatwia rachunek; nieźle przecież wiedzieć że można, bez ułamków, rozwiązać powyższe zagadnienie, rozumowaniem któregośmy już gdzieindziej użyli. Jakoż, gdyby za jeden grosz kupowano 14 gruszek, wtedy, za 8 groszy, kupionoby 8 razy więcej, to jest 14×8, czyli 112 gruszek. Ale, ponieważ gzuszki kosztują 5 razy drożej, więc się kupi 5 razy mniej niż 112, to jest *piątą* część ze 112; co daje $\frac{112}{5}=22$ gruszek i $\frac{2}{5}$, jako powyżej.

Zagadn. XXXVIII. *Za $\frac{5}{6}$ łokcia sukna zapłacono 24 złote; poczemuż łokieć?*

Ponieważ $\frac{5}{6}$ łokcia kosztują 24 złote, $\frac{1}{6}$ łokcia kosztuje $\frac{1}{5}$ z 24 złotych, tojest $\frac{24}{5}$; zatem łokieć kosztuje 6 razy więcej,

to jest $\dfrac{24\times 6}{5}$ zł. albo $\dfrac{144}{5}$ złotych.

Uskuteczniając dzielenie, znajdujemy że łokieć sukna kosztuje 28 zł. i $\frac{4}{5}$ czyli 28 zł. i 24 gr.

Zagadn. XXXIX. *$\frac{3}{4}$ łasztu zboża kosztują 22 rub. $\frac{1}{2}$; ile 5 łaszt. $\frac{2}{5}$ kosztować będą?*

Ponieważ $\frac{3}{4}$ łasztu kosztuje $22\frac{1}{2}$ rub. czyli $\frac{45}{2}$ rub. $\frac{1}{4}$ łasztu będzie kosztowała 3 razy mniej, to jest $\frac{45}{2\times 3}$ rub. albo $\frac{15}{2}$ rub.; azaś łaszt kosztować będzie 4 razy więcej, to jest $\frac{15}{2}\times 4=30$ rub. Więc 5 łaszt. i $\frac{2}{5}$, czyli $\frac{27}{5}$ łasztu, będą kosztowały $\frac{27}{5}$ ze 30 rub.

to jest $\dfrac{30\times 27}{5}=6\times 27$ albo 162 rubli.

Zagadn. XL. *Jaka jest liczba, do $\frac{3}{5}$ której dodając 2 otrzymuje się 17?*

Ponieważ $\frac{3}{5}$ szukanej liczby, zwiększone o 2, czynią 17, więc $\frac{3}{5}$ tej liczby czynią tylko 15. Zatem $\frac{1}{5}$ liczby jest *trzecią* częścią z 15, to jest $\frac{15}{3}$, albo 5; a nakoniec szukana liczba jest 5 razy 5, to jest 25.

Zagadn. XLI. *Jaka jest liczba której $\frac{3}{4}$ więcej $\frac{5}{6}$, zmniejszone o 5, czynią 90?*

Dodajmy naprzód te dwa ułamki; znajdziemy summę $\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$. Widzimy teraz że $\frac{19}{12}$ szukanej liczby, zmniejszone o 5, czynią 90. Ztąd wnosimy że $\frac{19}{12}$ liczby czynią 90 więcej 5, czyli 95. Zatem $\frac{1}{12}$ liczby jest $\frac{95}{19}=5$; więc cała liczba równa się 12 razy 5, to jest 60.

Zagadn. XLII. *Za 15 $\frac{1}{2}$ funtów towaru zapłacono 200 $\frac{5}{6}$ złotych; ileżby 12 $\frac{2}{5}$ funtów kosztowały?*

Dadajemy całkowite do ułamków, i otrzymujemy liczby odpowiedne $\frac{31}{2}$ funta, $\frac{1205}{6}$ zł., $\frac{62}{5}$ funt. Teraz powiedamy, funtów $\frac{31}{2}$ kosztują złotych $\frac{1205}{6}$; zatem jeden funt kosztuje

złotych $\frac{1205}{6}:\frac{31}{2}=\frac{1205}{6}\times\frac{2}{31}$ albo $\frac{1205}{93}$ złotych.

A więc funtów $\frac{62}{5}$ kosztować będą złotych

$$\frac{1205}{93}\times\frac{62}{5}=\frac{241\times 2}{3}=\frac{482}{3} \quad \text{albo} \quad 160 \text{ zł. } 20 \text{ gr.}$$

Uwaga. Wskazaliśmy ogólnie tylko działania które wykonać trzeba, nie dając szczegółów które do nich prowadzą; bo zagadnienie jest zanadto łatwe i podobne do poprzedzających. Z resztą, widoczną jest rzeczą że rozwiązanie nie zależy od wielkości liczb danych; więc, aby wiedzieć za pomocą jakich działań rozwiązuje się zagadnienie z liczbami ułamkowemi, dosyć jest, nie zważając na mianowniki, rozumować na liczbach całkowitych; a wtedy łatwo się zobaczy działania których użyć należy. I tak, funtów $\frac{31}{2}$ kosztują złotych $\frac{1205}{6}$, poczemu funt? Odrącamy myślą mianowniki, i mówimy; 31 funtów kosztują 1205 złotych; więc jeden funt kosztuje *trzydziestą jedną* część 1205 złotych, to jest znajdzie się cenę jednego funta dzieląc 1205 przez 31. Ztąd wnosimy że, gdy $\frac{31}{2}$ funta kosztują $\frac{1205}{6}$ złotego, znajdziemy także cenę jednego funt *dzieląc* $\frac{1205}{6}$ przez $\frac{31}{2}$; co daje $\frac{1205}{6}\times\frac{2}{31}$; i t. p.

Zagadn. XLIII. *Pewna osoba spotyka ubogich. Chciałaby dać każdemu po* 3 *grosze, ale jej brakuje* 15 *groszy; daje przeto po* 2 *grosze, i zostaje jej* 9 *groszy. Ileż było ubogich, a ile osoba miała przy sobie pieniędzy?*

Dając po 3 grosze, ta osoba miała 3 razy tyle groszy ile było ubogich, ale mniej 15 groszy. Dając znowu po 2 grosze, ta osoba miała 2 razy tyle groszy ile było ubogich i jeszcze 9 gr, więcej. Ztąd wnosimy że 3 razy liczba ubogich mniej 15 jedności, jest to samo co 2 razy liczba tychże ubogich więcej 9 jedności, Zatem, 3 razy liczba ubogich mniej 2 razy *ta liczba* jest to samo co 9 więcej 15 czyli 24. Więc liczba ubogich jest 24. Chcąc dać każdemu po 3 grosze, trzebaby mieć 3×24, t. j. 72 grosze; a że brakowało 15 groszy, więc osoba miłosierna miała tylko przy sobie 57 groszy. I w samej rzeczy, dając każdemu ubogiemu po 2 grosze, co czyni 48 groszy, zostaje jej 9 groszy. Co właśnie sprawdza rozwiązanie.

Zagadn. XLIV. *Gdy zegar zwiastuje południe, indeksy godzin i minut spotykają się na godzinie dwónastej. O którejże godzinie te indeksy spotkają się znowu?*

Uważajmy że od godziny 12ej aż do 1szej niema spotkania. Ale między godziną 1szą a 2gą jest oczywiście spotkanie, jak równie przed każdą inną godziną; więc od 12tej godziny do drugiej 12tej jest 11 spotkań. Te spotkania przypadają oczywiście w równych przedziałach czasu; a że ich jest 11 na 12 godzin, zatem na jedno spotkanie trzeba godzin $\frac{12}{11}$. Co daje 1 godzinę i $5\frac{5}{11}$ minut. Pierwsze tedy spotkanie się indeksów, po godzinie 12ej, przypada o godzinie 1szej 5 min. $\frac{5}{11}$. Drugie spotkanie znajduje się, dodając do pierwszego 1 godzinę 5 minut $\frac{5}{11}$; więc ono przypada o godzinie 2giej 10 min. $\frac{10}{11}$. I tak dalej.

Zagadn. XLV. *Dwaj gońcy wyjeżdżają jednocześnie na przeciw siebie, z dwóch miast A i B odległych o mil 22. Pierwszy goniec ujeżdża na godzinę mil $2\frac{1}{3}$, a drugi mil $2\frac{4}{5}$. W jakiej odległości od miasta A spotkają się ci gońcy, i po ilu godzinach?*

Ponieważ pierwszy goniec ujeżdża na godzinę mil $2\frac{1}{3}$, a drugi mil $2\frac{4}{5}$; zatem na godzinę zbliżają się ku sobie o mil $2\frac{1}{3}+2\frac{4}{5}$ czyli o mil $\frac{77}{15}$. Ztąd wynika że trzeba tym gońcom do spotkania się tyle godzin ile $\frac{77}{15}$ mieści się w 22, to jest godzin

$$\frac{22\times15}{77}=\frac{2\times15}{7}=\frac{30}{7}; \quad \text{albo 4 godz. 17 min. } \tfrac{1}{7}.$$

Żeby teraz wiedzieć w jakiej odległości od pierwszego miasta A dwaj gońcy spotykają się, uważajmy że pierwszy goniec ujeżdża na godzinę mil $2\frac{1}{3}$ czyli $\frac{7}{3}$ mili: więc po $\frac{30}{7}$ godzinach ujedzie mil $\frac{7}{3}\times\frac{30}{7}=10$.

Więc dwaj gońcy spotykąją się o mil 10 od miasta A, i za godzin 4 minut $17\frac{1}{7}$.

Zagadn. XLVI. *Dwaj gońcy wyjeżdżają jednocześnie z dwóch miast A i B, odległych o mil 70, i udają się do miasta C. Pierwszy ujeżdża na godzinę mil $12\frac{1}{2}$, a drugi $6\frac{2}{3}$. W jakiej odległości od drugiego miasta B spotkają się ci gońcy, i za ile godzin?*

Oba gońcy jadą w jedną stronę; pierwszy ujeżdża na godzinę mil $12\frac{1}{2}$, a drugi mil $6\frac{2}{3}$. Zatem, na godzinę zbliżają się do siebie o mil $12\frac{1}{2}$ mniej $6\frac{2}{3}$,

to jest o mil $\frac{25}{2}-\frac{20}{3}$ albo $\frac{35}{6}$ mil.

Więc tym gońcom trzeba do spotkania się tyle godzin ile $\frac{35}{6}$ mili mieści się w odległości 70 mil, która ich oddziela. Wykonywając dzielenie, mamy $\frac{70\times6}{35}=12$ godzin.

Ponieważ tedy dwaj gońcy spotykają się po 12 godzinach, a drugi goniec, który wyjeżdża z miasta B, ujeżdża na godzinę mil $6\frac{2}{3}$, czyli mil $\frac{20}{3}$; więc ten drugi, za godzin 12, ujedzie mil $\frac{20}{3}\times12$, to jest 80 mil.

Więc dwaj gońcy spotykają się na 80 mil od miasta B, i za godzin 12.

Uwaga. Zagadnienie XLII może się łatwo rozwiązać na sposób powyższego. Jakoż, uważając że wskazówka minut idzie pierwsza, i przebiega na godzinę 60 przedziałów; zaś wskazówka godzin, która idzie po niej, przebiega na godzinę 5 tych samych przedziałów; a odległość między dwiema wskazówkami zawiera przedziałów 60; łatwo widzimy że to zagadnienie jest zupełnie podobne do zagadnienia dwóch gońców, któreśmy dopiero co rozwiązali.

Zagadn. XLVII. *Wieśniaczka niesie jaja na sprzedaż do miasta. Nim jeszcze doszła do targu, na pierwszej ulicy sprzedała* POŁOWĘ *jaj, więcej* POŁOWĘ JEDNEGO. *Na drugiej ulicy sprzedała* TRZECIĄ CZĘŚĆ *tego co jej zostało, więcej* JEDNĄ TRZECIĄ *jaja. Na trzeciej ulicy sprzedała* CZWARTĄ CZĘŚĆ *tego co jej zostało, więcej* TRZY CZWARTE JAJA. *Nakoniec, na targu sprzedała resztę 30 jaj. Ileż miała jaj wychodząc z domu, a ile na każdej sprzedała ulicy?* (ma się rozumieć że nigdzie żadnego nie tłukła jaja).

Reszta 30 jaj, sprzedanych na targu, powiększona ułamkiem $\frac{3}{4}$ jaja, to jest $\frac{123}{4}$ jaja, stanowi $\frac{3}{4}$ jaj które wieśniaczka przyniosła na trzecią ulicę. Zatem $\frac{1}{4}$ jaj przyniesionych na trzecią ulicę równa się $\frac{1}{3}$ ze $\frac{123}{4}$, to jest czyni $\frac{41}{4}$ jaj. Więc wieśniaczka przyniosła 41 jaj na trzecią ulicę. Te 41 jaj powiększone ułamkiem $\frac{1}{3}$ jaja, to jest razem $\frac{124}{3}$ jaja, stanowią $\frac{2}{3}$ jaj które wieśniaczka przyniosła na drugą ulicę. Więc ona przyniosła na drugą ulicę jaj $\frac{124}{3}:\frac{2}{3}=\frac{124}{3}\times\frac{3}{2}$ albo 62 jaj.

Nakoniec, te 62 jaj, przyniesionych na drugą ulicę, powiększone ułamkiem $\frac{1}{2}$ jaja, to jest $\frac{125}{2}$ jaja, stanowią połowę jaj które wieśniaczka przyniosła z domu na pierwszą ulicę. Więc, wychodząc z domu, wieśniaczka miała jaj 125,

Zobaczmy teraz ile wieśniaczka przedała jaj na każdej ulicy. Wyniosła z domu jaj 125; na pierwszej ulicy sprzedała połowę tych jaj, to jest $62+\frac{1}{2}$, i więcej jeszcze połowę jednego; co razem czyni $62+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=63$. Więc, na pierwszej ulicy sprzedała 63 jaj. Idzie teraz na drugą ulicę, niosąc resztę jaj to jest 62. Tu sprzedaje trzecią część z 62 jaj, czyli $20+\frac{2}{3}$, więcej jeszcze $\frac{1}{3}$ jaja; co razem czyni 21 jaj. Zostaje przeto 41 jaj które niesie na trzecią ulicę. Na tej ulicy, sprzedaje czwartą część z 41 jaj, to jest $10+\frac{1}{4}$, i zarazem $\frac{3}{4}$ jaja; co wszystko czyni 11 jaj. Więc zostało właśnie 30 jaj, które sprzedała na rynku.

Zagadn. XLVIII. *Woda morska zawiera $4\frac{1}{2}$ na sto soli. Ileż trzeba wyparować wody, z 540 funtów wody morskiej, aby pozostała mieszanina była* NASYCONA, *to jest zawierała 27 na sto soli?*

Ponieważ 100 funtów wody morskiej zawierają $4\frac{1}{2}$ funta soli, czyli $\frac{9}{2}$; więc na 1 funt soli trzeba $100:\frac{9}{2}$ czyli $\frac{200}{9}$ funta wody morskiej, a na 27 funtów soli trzeba $\frac{200}{9}\times 27$, czyli 600 funtów wody morskiej. Jeśli teraz odciągniemy 100 funtów od 600 funtów, otrzymamy różnicę 500 funtów, która pokazuje że z 600 funtów wody morskiej trzeba wyparować 500 funtów, aby pozostałe 100 funtów mieszaniny zawierały 27 funtów soli. Ztąd wnosimy że z jednego funta wody morskiej trzeba wyparować $\frac{500}{600}$ czyli $\frac{5}{6}$ funta. Więc, z 540 funtów wody morskiej trzeba wyparować $\frac{5}{6}\times 540$ czyli 450 funtów.

Odciągnąwszy te 450 funtów od 540 funtów, pozostanie 90 funtów mieszaniny która zawierać będzie 27 na sto soli.

Można to łatwo sprawdzić. Jakoż, woda morska zawiera $4\frac{1}{2}$ na sto soli, to znaczy że każde 100 funtów tej wody zawierają $4\frac{1}{2}$ funtów soli. Zatem, 1 funt zawiera $\frac{9}{200}$ funta soli; a następnie 540 funtów zawierają $\frac{9}{200}\times 540$ czyli $\frac{9\cdot 27}{10}$ funtów soli. To pokazuje że, po wyparowaniu wody, pozostałe 90 funtów mieszaniny zawierają $\frac{9\times 27}{10}$ funtów soli. Więc 1 funt tej mieszaniny zawiera $\frac{9\times 27}{10\times 90}$ czyli $\frac{27}{100}$ funta soli; a 100 funtów mieszaniny zawierają 27 funtów soli. Co było do sprawdzenia.

Zagadn. XLIX. *Z pełnej beczki, trzymającej 200 garncy okowity, utoczono naprzód $\frac{1}{5}$ okowity i dopełniono wodą; potem, odlano $\frac{1}{4}$ mieszaniny i znowu dopełniono beczki wodą; nakoniec* *utoczono $\frac{1}{3}$ ostatniej mieszaniny, i dopełniono wodą. Ileż zostało okowity w beczce, a ile dolano wody?*

Gdy odlano $\frac{1}{5}$ okowity, zostało jej $\frac{4}{5}$ w beczce; gdy potem odlano $\frac{1}{4}$ mieszaniny, wzięto tym sposobem $\frac{1}{4}$ pozostałej okowity; więc się zostało $\frac{3}{4}$ ze $\frac{4}{5}$ okowity, to jest $\frac{3}{5}$ beczki okowity. Gdy nakoniec utoczono $\frac{1}{3}$ ostatniej mieszaniny, zostało jej $\frac{2}{3}$, a tem samem zostało okowity $\frac{2}{3}$ ze $\frac{3}{5}$, to jest $\frac{2}{5}$ beczki okowity, czyli $\frac{2}{5}$ z 200 garncy; co daje $\frac{200\times2}{5}$ albo 80 garncy.

Więc zostało w beczce 80 garncy okowity.

Co się tycze wody, łatwo widzimy że jej wlano $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ czyli $\frac{47}{60}$ beczki, to jest $\frac{47}{60}$ z 200 garncy;

co daje $$\frac{200\times47}{60}=\frac{10\times47}{3}=156\tfrac{2}{3}.$$

Więc wlano wszystkiej wody garncy $156\frac{2}{3}$.

Sprawdzimy jeszcze to rozwiązanie, aby czytelnikowi nastręczyć sposobność wprawy rachunku, której tylko przerabianiem wielu przykładów nabyć może. I tak, widzieliśmy że w beczce zostało $\frac{2}{5}$ okowity; szukajmyż ile zostało wody. Odlewając $\frac{1}{4}$ pierwszej mieszaniny, odlano tem samem $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{5}$ dolanej wody; co czyni $\frac{1}{20}$ beczki. Zostało więc w beczce wody $\frac{3}{4}$ z $\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$ beczki. Odlewając potem $\frac{1}{3}$ mieszaniny w której jest wody $\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$ beczki, odlano tem samem $\frac{1}{3}$ z $\frac{2}{5}$ wody, t. j. $\frac{2}{15}$ beczki. Zostało zatem wody $\frac{2}{3}$ z $\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ beczki; a że dolano wody $\frac{1}{3}$ beczki, to czyni $\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$ beczki wody. Co właśnie, z pozostałą okowitą $\frac{2}{5}$ beczki, czyni pełną beczkę, i sprawdza nasze rozwiązanie.

Zagadn. L. *Pewna osoba chce pokryć podłogę salonu, mającego 21 stóp długości a 20 szerokości, kobiercem szerokości stóp $3\frac{1}{2}$. Ileż powinna kupić stóp tego kobierca?*

Gdyby salon miał szerokość stóp $3\frac{1}{2}$ czyli $\frac{7}{2}$, trzebaby oczywiście 21 stóp kobierca na pokrycie podłogi; gdyby salon miał szerokość $\frac{1}{2}$, to jest 7 razy mniejszą, wtedy trzebaby także 7 razy mniejszej długości, to jest $\frac{21}{7}$ stóp długości: zatem, na szerokość 1 stopy, trzeba 2 razy większej długości, to jest $\frac{21}{7}\times 2$ stóp. Więc, na szerokość 20 stóp salonu, trzeba 20 razy większej długości kobierca; co daje $\frac{21}{7}\times 2\times 20$ stóp. Wykonywając rachunek, znajdujemy że, na pokrycie podłogi salonu, trzeba 120 stóp długości kobierca.

Zagadn. LI. *Sadzawka może się napełnić dwoma korytami; pierwszem woda płynąca napełniłaby ją sama w 3 godzinach, drugiem zaś, płynąc sama jedna, napełniłaby w 5 godz. Puszczono wodę obydwoma korytami; w ilu godzinach sadzawka będzie pełna?*

Płynąca woda, samem pierwszem korytem, napełnia sadzawkę w 3 godzinach; zatem w jednej godzinie napełnia $\frac{1}{3}$ sadzawki. Płynąc samem drugiem korytem, napełnia sadzawkę w 5 godzinach; zatem w jednej godzinie napełnia $\frac{1}{5}$ sadzawki. Więc, płynąc dwoma korytami zarazem, woda napełnia, w jednej godzinie, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ sadzawki to jest $\frac{8}{15}$ sadzawki. Ztąd wnosimy że, ponieważ woda, płynąc obydwoma korytami, napełnia $\frac{8}{15}$ sadzawki w 1 godzinie; więc napełni $\frac{1}{15}$ sadzawki w 8 razy krótszym czasie to jest w $\frac{1}{8}$ godziny; a zatem napełni całą sadzawkę w 15 razy dłuższym czasie niż $\frac{1}{8}$ godziny, to jest w $\frac{15}{8}$ godzin. Wykonywając rachunek, znajdujemy że sadzawka będzie pełna za 1 godzinę 52 minut 30 sekund.

Zagadn. LII. *Rozdzielić 77 złotych między dwie osoby, tak żeby jeden dział był $\frac{2}{5}$ drugiego.*

Dana liczba 77 składa się z mniejszego i większego działu. Otóż, mniejszy dział jest $\frac{2}{5}$ większego; więc 77 zawiera $\frac{2}{5}$ większego działu, więcej 1 raz wzięty ten dział; co razem czyni $\frac{7}{5}$ większego działu. Wiedząc teraz że $\frac{7}{5}$ większego działu wyraża się liczbą 77, wnosimy ztąd że $\frac{1}{5}$ większego działu równa się $\frac{77}{7}$, to jest 11; więc dział większy równa się 11×5, to jest 55. Zatem mniejszy dział jest $\frac{2}{5}$ z 55 czyli $\frac{55\times 2}{5}=22$.

Co sprawdza zagadnienie, bo $22+55$ daje 77; a już z rachunku wynika że mniejszy dział 22 jest $\frac{2}{5}$ większego 55.

ZAGADN. LIII. *Rożdzielić 150 zł. na 3 części, tak żeby pierwsza była $\frac{2}{3}$ drugiej, a trzecia $\frac{5}{8}$ pierwszej.*

Na mocy zagadnienia, część trzecia jest $\frac{5}{8}$ z $\frac{2}{3}$ drugiej, czyli $\frac{5}{12}$ tej drugiej. Zatem, summa 150 składa się z 1 raz wziętej drugiej części z $\frac{2}{3}$ tej części i jeszcze z jej $\frac{5}{12}$. Co wszystko razem czyni $\frac{12}{12}+\frac{8}{12}+\frac{5}{12}=\frac{25}{12}$ drugiej części.

Ponieważ tedy $\frac{25}{12}$ drugiej części czynią 150, *raz* wzięta druga czyni $\frac{150}{25}$ czyli 6 ; więc ta *druga część* jest 6×12, to jest 72 zł. Ztąd wynika że *pierwsza część*, równa $72\times\frac{2}{3}$, jest 48 zł.; a nakoniec *trzecia część* równa się $48\times\frac{5}{8}=30$ zł. Summa tych trzech części równa ąię liczbie złotych $30+72+48=150$ zł.

Co właśnie sprawdza zagadnienie.

ZAGADN. LIV. *Rożdzielić summę 360 zł. między 4 osoby tak żeby dział pierwszy wynosił 60 zł. więcej niż drugi, a trzeci 40zł. więcej niż czwarty, i żeby dział drugi był $\frac{3}{5}$ czwartego.*

Widzimy odrazu że summa 360 złotych zawiera : raz wzięty dział czwarty; więcej dział trzeci, który wynosi raz wzięty dział czwarty powiększony o 40 zł.; więcej dział drugi, który czyni $\frac{3}{5}$ czwartego; więcej nakoniec dział pierwszy który czyni $\frac{3}{5}$ czwartego i do tego jeszcze 60 zł. To wszystko razem czyni 2 razy wzięty dział czwarty więcej 2 razy $\frac{3}{5}$ czwartego, i więcej 40 zł.+60 zł. Dodając, znajdujemy że $\frac{16}{5}$ działu czwartego więcej 100 zł. czynią 360 zł., czyli że $\frac{16}{5}$ czwartego działu czynią 260 zł. Zatem $\frac{1}{5}$ działu czwartego jest $\frac{260}{16}$; a więc dział *czwarty* jest $\frac{260}{16}\times5=\frac{1300}{16}$ albo 81 zł. $\frac{1}{4}$.

Następnie, dział *trzeci* równa się $81+\frac{1}{4}+40$ albo 121 zł. $\frac{1}{4}$; dział *drugi* równa się $\frac{1300}{16}\times\frac{3}{5}=\frac{780}{16}$ albo 48 zł. $\frac{3}{4}$; a nakoniec dział *pierwszy* równa się $48+\frac{3}{4}+60$ to jest 108 zł, $\frac{3}{4}$. Summa tych czterech działów jest

$$108+\tfrac{3}{4}+48+\tfrac{3}{4}+121+\tfrac{1}{4}+81+\tfrac{1}{4}=360.$$

Co sprawdza zagadnienie.

ZAGADN. LV. *Matka ma 24 lata a córka 5 lat. Za ile lat matka będzie trzy razy starsza od córki?*

Uważajmy że różnica wieku matki i córki zostaje ciągła ta sama, to jest 19 lat. Owoż, po pewnym czasie, wiek matki równa się trzy razy wziętemu wiekowi córki; więc, w tym czasie, 3 razy wiek córki mniej ten wiek, czyli dwa razy wiek córki równa się 19 lat. Ale wtedy, wiek córki jest 5 lat i więcej upłyniony czas; więc 2 razy ten wiek, to jest 10 lat więcej 2 razy upłyniony czas, równa się 19 lat: zatem 2 razy upłyniony czas równa się 19 mniej 10 czyli 9 lat. Więc ten czas jest połową 9 lat, czyli lat $4\frac{1}{2}$.

To jest, po latach 4 i pół, matka będzie trzy razy starsza od córki.

Zagadn. LVI. *Chart ściga lisa który ma* 60 *skoków przed nim. Lis robi* 9 *skoków podczas gdy chart robi tylko* 6; *ale* 3 *skoki charta wartają* 7 *lisich. Ileż chart musi zrobić skoków aby dosięgnął lisa?*

Oczywiście chart dosięgnie lisa gdy, ścigając uciekającego, przebiegnie to co on przebiegł, i jeszcze odległość 60 skoków lisich, która go od lisa oddziela. Owoż, gdy chart robi 6 skoków, lis robi 8 skoków; zatem, na każdy skok charta lis robi $\frac{9}{6}$, czyli $\frac{3}{2}$ swojego skoku. Ale, ponieważ 3 skoki charta wartają 7 skoków lisa, jeden skok charta wart $\frac{7}{3}$ skoku lisa. Więc, po każdym swoim skoku, chart zbliża się do lisa ilością $\frac{7}{3}-\frac{3}{2}$ czyli $\frac{5}{6}$ skoku lisa. A więc, aby dosięgnął lisa, chart musi zrobić tyle skoków ile $\frac{5}{6}$ mieści się w 60. Iloraz $60\times\frac{6}{5}=72$ pokazuje że chart dosięgnie lisa po 72 skokach.

Cwiczenia.

I. Jaka jest liczba której $\frac{7}{12}$ czynią 84? Odp. 144.

II. Jaka jest liczba która przewyższa swoje $\frac{3}{5}$ liczbą 96? Odp. 240.

III. Jaka jest liczba która, powiększona swemi $\frac{7}{9}$, czyni summę 160? Odpowiedź. 90.

IV. Jaka jest liczba która, powiększona swemi $\frac{1}{4}$ a zmniejszona swemi $\frac{2}{5}$, czyni 170? Odp. 200.

V. Ułamek $\frac{3}{8}$ jaką jest częścią ułamku 0,9? Odp. $\frac{5}{12}$.

VI. Dowieśdź że summa albo różnica dwóch ułamków niezredukownych, których mianowniki są pierwsze między sobą, jest ułamkiem niezredukownym.

VII. Dowieśdź że summa dwóch ułamków niezredukownych, nie mających jednego mianownika, nie może być liczbą całkowitą.

VIII. Dowieśdź że, jeśli do ułamku dodaje się ułamek przewrócony, summa dwóch ułamków jest zawsze większa od 2.

IX. 100 części prochu wojennego zawierają 75 części saletry, 12 i pół części siarki, 12 i pół części węgla. Ile trzeba wziąć każdego z tych ciał aby mieć 240 funtów prochu?

Odp. 180 funtów saletry, 30 funtów siarki i 30 funtów węgla.

X. Pewna osoba przegrała najpierwej $\frac{1}{3}$ pieniędzy, a potem $\frac{1}{4}$ reszty. Dowieśdź że strata byłaby ta sama, gdyby ta osoba przegrała najpierwej $\frac{1}{4}$ pieniędzy, a potem $\frac{1}{3}$ reszty.

XI. Pewien kupiec sprzedał naprzód $\frac{1}{16}$ sztuki materyi, potem $\frac{2}{15}$ reszty, a nakoniec $\frac{2}{11}$ drugiej reszty, i zostało mu 90 łokci. Jakaż była długość tej sztuki? Odp. 160 łokci.

XII. Piłka sprężysta odskakuje na $\frac{2}{9}$ wysokości z której spadła; a po 3 odskokach wzniosła się na wysokość $\frac{1}{3}$ łokcia. Z jakiejże spadła wysokości? Odp. 30 łokci i $\frac{3}{8}$.

XIII. Pewna osoba nalewa pełną szklankę wina, pije $\frac{1}{4}$ i dolewa wodą; pije potem $\frac{1}{3}$ mieszaniny i dolewa wodą; pije $\frac{1}{2}$ mieszaniny, i jeszcze dolewa wodą; nakoniec wypija całą szklankę. Ileż wypiła wina i wody za każdą razą, a ile wypiła wody ze wszystkiem?

Odp. Osoba wypiła za każdą razą $\frac{1}{4}$ częsc szklanki wina. Co się tycze wody, wypiła drugą razą $\frac{1}{12}$ szklanki, trzecią razą $\frac{1}{4}$, a ostatnią, $\frac{1}{2}$: ze wszystkiem wypiła wody 1 szklankę i $\frac{1}{12}$.

XIV. Sadzawka może się napełnić dwoma korytami, a trzeciem wypróżnić. Pierwszem korytem woda, płynąc sama, napełniłaby sadzawkę w 3 godzinach; drugiem zaś korytem, płynąc sama, napełniłaby ją w 4 godzinach; a nareszcie trzeciem korytem sadzawka wypróżniłaby się w dwóch godzinach. Sadzawka jest próżna, i otworzono trzy koryta; w ilu godzinach ta sadzawka będzie pełna?

Odpowiedź. W 12 godzinach.

XV. Dwaj gońcy wyjeżdżają, pierwszy z miasta A, drugi z miasta B; i udają się do miasta C; ale pierwszy wyjechał 5 godzin przed drugim. Odległość miast A i C jest 100 mil; a zaś odległość miast B i C, 75 mil. Pierwszy goniec ujeżdża mil 19 w 6 godzinach, a drugi 38 mil w 17 godzinach. W jakiej odległości od miasta B ci gońcy się spotkają?

ODPOWIEDŹ. 22 mil.

XVI. Pewna osoba zapisała testamentem $\frac{1}{3}$ majątku synowi, $\frac{2}{7}$ córce, a resztę 8000 złotych swojej wdowie. Jaki był majątek a jaki dział syna i córki?

ODPOWIEDŹ. Majątek był 21000 zł., dział syna 7000 złotych, a dział córki 6000 złotych.

XVII. Dwie osoby miały razem 636 złotych, a wydały 353 zł. Po tym wydatku, jednej zostało $\frac{2}{5}$ tego co miała a drugiej połowa, Ileż miały pieniędzy?

ODPOWIEDŹ. Pierwsza 350 zł. a druga 286 zł.

XVIII. Uczeń wraca do pensyi z pewną liczbą pomarańcz, i, nie rozcinając żadnej, daje dyrektorowi $\frac{1}{3}$ tej liczby więcej $3\frac{2}{3}$ pomarańczy; inspektorowi $\frac{1}{6}$ tej liczby więcej $1\frac{5}{6}$ pomarańczy; jednemu ze swoich przyjaciół $\frac{1}{7}$ tej liczby więcej $\frac{3}{7}$ pomarańczy; i zostało mu 3 pomarańcze. Ileż uczeń miał pomarańcz, a ile rozdał?

ODPOWIEDŹ. 25; 12, 6, 4.

XIX. $\frac{3}{5}$ upłynionego dnia wartają tyle ile $\frac{4}{3}$ tego co jeszcze zostaje do upłynienia. Któraż jest godzina?

ODPOWIEDŹ. Godzina 4ta 33 i $\frac{3}{29}$ minut po południu.

XX. Pytano owcarza ile ma owiec? Owcarz odpowieda: mam tyle; ale, żebym miał jeszcze tyle i połowę tyle i czwartą część tyle, i gdybym dodał mojego psa do tej liczby, miałbym wszystkiego 100 zwierząt. Ileż mam?

ODPOWIEDŹ. 36 owiec.

XXI. Trzej robotnicy wykonywają razem jedną robotę. Pierwszy, pracując sam, mógłby wykonać tę robotę w 10 dniach, drugi w 12 dniach, a trzeci w 15 dniach. W iluż dniach wszyscy razem skończą robotę?

ODPOWIEDŹ. W 4 dniach.

XXII. Trzy fontanny wpływają do jednej stągwi. Pierwsza, płynąc sama, napełniłaby ją w 2 godzinach; 2ga, płynąc także sama, w 7 godzinach; 3cia, w 5 godzinach. Do próżnej stągwi puszczono, przez 1szą godzinę, dwie pierwsze fontanny; potem zastawiono pierwszą fontannę a puszczono dwie inne. W jakim czasie stągiew będzie pełna?

Odpowiedź. Za 1 godzinę 1 minutę 30 sekund.

XXIII. Diofantes, autor najdawniejszego dzieła algebry jakie doszło aż do nas, przepędził w młodości *szóstą* część swojego życia, *dwónastą* część w wieku dorosłym; potem się ożenił, i przepędził w małżeństwie *siódmą* część życia powiększoną o 5 lat, nim się doczekał syna którego przeżył o 4 lata, a który dosięgnął tylko połowy wieku swojego ojca. Ile żył lat Diofantes ?

Odpowiedź. 84 lat.

XXIV. Do pewnego stawu woda płynie dwoma strumieniami. Puszczają naprzód jeden strumień który napełnia czwartą część stawu, i potem puszczają drugi: wtedy oba strumienie, płynąc razem, dopełniają stawu, i potrzebują 5 kwadransów więcej niż trzeba było pierwszemu strumieniowi do napełnienia ćwierci stawu. Gdyby było puszczono odrazu oba strumienie, staw byłby się napełnił kwadransem wcześniej. W jakim czasie pierwszy strumień, płynąc sam jeden, napełniłby ten staw?

Odpowiedź. W 4 godz.

XXV. Przekupka sprzedała jednej osobie połowę jaj które miała i połowę jaja; drugiej osobie sprzedała $\frac{2}{3}$ tego co zostało więcej $\frac{2}{3}$ jaja; nakoniec trzeciej osobie sprzedała $\frac{3}{4}$ tego co zostało więcej $\frac{3}{4}$ jaja, i nic już nie zostało. Nie stłukła żadnego jaja: ileż miała jaj, a ile każdej osobie sprzedała ?

Odp. 23; 12, 8, 3.

XXVI. Pewna osoba czyta pierwszą połowę książki przebiegając 3 stronice na 5 minut; czyta trzecią jej część, 4 stronice na 5 minut; nakoniec czyta ostatnią ćwierć książki przebiegając 1 stronicę na minutę. Przeczytała całą książkę w 4 godz. i 20 min. Ileż ma stronic ta książka?

Odp. 192 stronic.

XXVII. Gdy zegar bije godzinę dwónastą, indeks godzin i indeks minut znajdują się jeden na drugim. O której godzinie te indeksy będą przedłużeniem jeden drugiego, a o której będą tworzyły kąt prosty?

XXVIII. Czego trzeba żeby ułamek niezredukowny dzielił drugi niezredukowny, albo był jego wielownikiem?

XXIX. Gdy summa dwóch liczb *jakichkolwiek* a i b jest podzielna przez ich różnicę $a - b$, wtedy ta różnica, albo jej połowa, jest największym spólnym dzielnikiem tych dwóch liczb.

XXX. Pewna liczba składa się ze trzech cyfer; cyfra jedności jest cztery razy większa od cyfry set, a cyfra dziesiątków jest trzecią częścią summy wszystkich trzech cyfer; a gdyby dodano 594 do tej liczby, otrzymanoby liczbę złożoną z tych samych cyfer tylko w porządku przewróconym. Jakaż ta liczba?

Odp. 258.

XXXI. Dwie osoby winny razem 678 zł. Mają obie pieniądze, ale nie dosyć aby każda mogła sama zapłacić dług spólny. Pierwszy dłużnik mówi do drugiego: Jeśli mi dasz $\frac{2}{3}$ twoich pieniędzy, zapłacę natychmiast sam cały dług. Drugi odpowieda: Ja także sam mógłbym zapłacić ten dług, gdybyś mi dał $\frac{3}{4}$ twoich. Pytanie ile każdy ma pieniędzy?

Odp. 1szy dłużnik ma 452 zł. a 2gi 339 zł.

XXXII. Cztery punkta ruchome przebiegają okrąg ruchem jednostajnym. Pierwszy spotyka drugi co $\frac{5}{12}$ godziny, drugi spotyka trzeci co $\frac{4}{15}$ godziny, a trzeci spotyka czwarty co $\frac{7}{10}$ godziny. Przypuszczając że te punkta ruchome wychodzą razem z jednego miejsca, po jakim czasie znowu się spotkają?

Odpowiedź. Po 46 godz. 40 minutach.

XXXIII. Na zegarku sekundowym, o godzinie 12tej trzy wskazówki, godzin, minut i sekund, znajdują się razem. O której godzinie przypada następujące tych trzech wskazówek spotkanie?

Odpowiedź. O godzinie 12tej.

Uwaga. Można się jeszcze zapytać: o której godzinie jedna ze trzech wskazówek będzie dwójsieczną kąta dwóch innych?

ROZDZIAŁ PIĄTY.

LICZBY DZIESIĘTNE.

175. Niech będzie liczba 12345,6789. Na mocy ugody liczenia pisanego, wszelka cyfra wyraża jedności 10 razy większe od jedności cyfry która stoi po prawej stronie, a 10 razy mniejsze od jedności cyfry która stoi po lewej stronie. I tak, w powyżej napisanej liczbie, cyfra 5 oznacza jedności 10 razy większe od jedności cyfry 6, a zaś 10 razy mniejsze od jedności cyfry 4. Idąc od prawej strony ku lewej, jedności rosną, i każda jest 10 razy większa od poprzedzającej ; a zaś, idąc od lewej strony ku prawej, jedności maleją, i każda jest dziesiątą częścią poprzedzającej. Jeśli więc położymy przecinek po cyfrze 5, aby oznaczyć że ona wyraża *jedności* proste; wtedy, cyfra 5 będzie wyrażała *dziesiątki*, a cyfra 6 *dziesiąte* części jedności. Tak samo, cyfra 3 wyraża *sta* a cyfra 7 wyraża dziesiąte części dziesiątych, czyli *setne*; dalej, cyfra 2 wyraża *tysiące* a cyfra 8 dziesiąte setnych czyli *tysiączne* ; nakoniec, cyfra 1 wyraża *dziesiątki tysięcy*, a cyfra 9 *dziesięciotysiączne*. Tym sposobem, dwie cyfry równo oddalone od cyfry jedności mają podobne nazwiska ; i tak, 3 jest cyfrą *set* a 7 cyfrą *setnych*; i t. d.

Jako widzimy, jedność zawiera dziesięć *dziesiątych*, albo sto *setnych*, albo tysiąc *tysiącznych*, i t. d.; jedna dziesiąta zawiera dziesięć *setnych*, albo sto *tysiącznych*, i t. d. Te części dziesiąte, setne, tysiączne,... jedności, nazywają się ogólnie *dziesiętnemi*, i biorą imię *jedności rzędów dziesiętnych*; i tak, jedną *dziesiąta* jest jednością pierwszego rzędu dziesiętnego, jedna *setna* jednością drugiego rzędu dziesiętnego, i t. d.

Liczba wyrażająca jedności i części dziesiętne jedności, jako powyższa, nazywa się *liczbą dziesiętną*.

176. Liczby dziesiętne piszą się jako liczby całkowite, kładąc tylko, dla odróżnienia, przecinek między częścią całkowitą i dziesiętną.

I tak, jeśli chcemy wyzazić 12 *jedności* 3 *dziesiąte* 4 *tysiączne* i 5 *dziesięciotysiącznych*, piszemy 12,3045. Położyliśmy zero na miejscu *setnych*, których dana liczba dziesiętna nie zawiera.

Liczba dziesiętna może nie mieć części całkowitej; wtedy na miejscu tej części, pisze się zero i po jego prawej stronie kładzie się przecinek, a następnie pisze się część dziesiętną. I tak, 3 *dziesiąte* 4 *setne* i *pięć dziesięciotysiącznych* wyraża się pisząc 0,3405.

Cyfry które oznaczają część dziesiętną liczby dziesiętnej nazywają się *cyframi dziesiętnemi*, albo po prostu *dziesiętnemi*. I tak, liczba dziesiętna 0,0456 ma *cztery* dziesiętne, a 536,82 ma ich tylko *dwie*.

177. *Liczba dziesiętna nie zmienia wartości gdy się dopisuje albo odcina zera po prawej stronie.*

I tak, liczby dziesiętne 3,45 i 3,45000 mają tę samą wartość; bo ich cyfry znaczące, zachowując to samo położenie względem przecinka, wyrażają tę samą liczbę i wielkość każdej jedności: powyższe liczby przedstawiają obie 3 jedności i 45 setnych.

178. *Mnoży się albo dzieli liczbę dziesiętną przez jedność z zerami, to jest przez* 10, 100, 1000, *posuwając przecinek na prawo albo na lewo o tyle rzędów ile jest zer przy tej jedności.*

Bo, tym sposobem, jedności każdej cyfry stając się 10, 100, 1000... razy większe albo mniejsze, liczba dziesiętna staje się tyle razy większa albo mniejsza.

I tak, $45{,}678 \times 100 = 4567{,}8$; a zaś $\frac{45{,}678}{100} = 0{,}45678$.

Tak samo $\frac{156}{10} = 15{,}6$.

Gdy niema dosyć cyfer aby za nie posunąć przecinek, trzeba je zastąpić zerami. I tak $12{,}3 \times 1000 = 12300$; bo oczywiście $12{,}3 \times 1000$ jest to samo co $12{,}300 \times 1000 = 12{,}300$.

Podobnie, $\frac{1{,}24}{100} = 0{,}0124$; bo $\frac{1{,}24}{100} = \frac{001{,}24}{100} = 0{,}0124$.

Tak samo $\frac{12}{1000} = 0{,}012$.

179. *Aby wysłowić liczbę dziesiętną napisaną, mówi się naprzód część całkowitą, jeśli jest, a następnie część dziesiętną jak gdyby ona wyrażała liczbę całkowitą, wzkazując rzęd dziesiętny ostatniej cyfry.*

Naprzykład 37,4058 wysłowi się mówiąc: *trzydzieści siedem* JEDNOŚCI, *cztery tysiące piędziesiąt osiem* DZIESIĘCIOTYSIĄCZNYCH. W samej rzeczy, liczba dziesiętna 37,4058 zawiera 8 *dziesięciotysiącznych*, 5 *tysiącznych* czyli 50 *dziesięciotysiącznych*, 4 *dziesiąte* czyli 4000 *dziesięciotysiącznych* i 37 *jedności*, to jest razem 37 *jedności* 4058 *dziesięciotysiącznych*.

UWAGA. Uważając że 37 *jedności* znaczą to samo co 370000 *dziesięciotysiącznych*, można wysłowić powyższą liczbę, mówiąc: *trzy sta siedemdziesiąt cztery tysiące piędziesiąt osiem dziesięciotycznych.*

Ale ten sposób wysłowienia, nie trudny gdy mało dziesiętnych, staje się mozolnym gdy ich wiele. Aby łatwo wysłowić liczbę dziesiętną, złożoną z wielu cyfer dziesiętnych, rozkłada się zwykle część dziesiętną na przedziały trzech cyfer, zaczynając od pierwszego rzędu dziesiętnego, a uzupełniając domyślnemi zerami brakujące cyfry ostatniego przedziału. Po czem, wysłowia się najpierwej część całkowitą, a następnie każdy przedział dziesiętny, wskazując rzęd jedności ostatniej cyfry.

I tak, liczba dziesiętna 2,71828182845904 wysłowi się, mówiąc: 2 *jedności*, 718 *tysiącznych*, 281 *milionowych*, 828 *bilionowych*, 459 *trylionowych*, 40 *kwatrylionowych*.

180. ZAMIANA LICZBY DZIESIĘTNEJ NA UŁAMEK ZWYCZAJNY. Niech będzie liczba 5,608 którą chcemy wyrazić ułamkiem zwyczajnym. Uważając że ostatnia cyfra dziesiętna oznacza *tysiączne*, widzimy zaraz że dana liczba przedstawia 5608 *tysiącznych*; zatem równa się ułamkowi który ma za licznik 5608, a za mianownik 1000; to jest $5{,}608 = \frac{5608}{1000}$.

Więc, *aby zamienić liczbę dziesiętną na ułamek, dosyć jest znieść przecinek, i podzielić wynik przez jedność z tyłą zer ile dziesiętnych w zadanej liczbie.*

Nawzajem, *aby wyrazić w postaci liczby dziesiętnej ułamek mający za mianownik jedność z zerami (potęgę podstawy* 10), *dosyć jest napisać licznik i oddzielić, przecinkiem z prawej strony, tyle dziesiętnych ile zer w mianowniku.*

I tak, $\frac{1234}{100}=12,34$; $\frac{56}{1000}=0,056$.

181. Liczby dziesiętne nazywają się także *ułamkami dziesiętnemi.*

Ułamkiem dziesiętnym jest ułamek mający za mianownik, wyraźny albo domyślny, potęgę z 10ᵘ . I tak, $\frac{3}{100}$, albo 0,03 jest ułamkiem dziesiętnym: dla przeciwieństwa, ułamki mające za mianownik liczbę całkowitą jakąkolwiek nazywają się często *ułamkami zwyczajnemi.*

DODAWANIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

182. Dodają się liczby dziesiętne jako całkowite, zachowując tylko przecinki. Jakoż, niech będą do dodania liczby 0,78, 36,069, 1,9085. Dodając jedności każdego rzędu, jako wzór pokazuje, otrzymujemy

$$\begin{array}{r} 0,78 \\ 36,069 \\ 1,9085 \\ \hline 38,7575 \end{array}$$

Summa dziesięciotysiącznych jest 5, pisze się tę cyfrę na miejscu dziesięciotysiącznych; summa tysiącznych czyni 17, pisze się 7 na miejscu tysiącznych a zatrzymuje się 1 setną, aby ją dołączyć do setnych następującego rzędu; summa setnych, z zatrzymką 1 czyni 15; pisze się 5 na miejscu setnych a zatrzymuje 1 dziesiątą do rzędu następującego; i t. d. Ztąd

PRAWIDŁO, *Aby dodać liczby dziesiętne, pisze się jedne pod drugiemi tak aby przecinki sobie odpowiedały, i dodaje się jako liczby całkowite, kładąc przecinek, w otrzymanej summie, pod przecinkami liczb danych.*

ODCIĄGANIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

183. Odciąganie liczb dziesiętnych wykonywa się tym samym sposobem jako w liczbach całkowitych, zachowując tylko przecinki.

Jakoż, przypuśćmy że trzeba odciągnąć 3,726 od 18,05.

Pisze się mniejszą liczbę pod większą, tak aby przecinki sobie odpowiedały, i odciąga się jedności każdego rzędu, jako w liczbach całkowitych.

$$\begin{array}{r} 18,05 \\ \underline{3,726} \\ 14,324 \end{array}$$

Myślą kładziemy zero na miejscu brakującej cyfry tysiącznych w liczbie większej, i odciągamy 6 od 10; co daje resztę 4 którą piszemy na miejscu tysiącznych, i zatrzymujemy 1. Przechodzimy do kolumny setnych dodając zatrzymkę 1 do 2, odciągamy 3 od 5, i otrzymujemy resztę 2 którą piszemy namiejscu setnych. Potem odciągamy 7 od 10, co daje resztę 3 którą piszemy na miejscu dziesiątych, a zatrzymujemy 1. Kładziemy przecinek, i przechodzimy do kolumny jedności; i tak dalej. Ztąd

PRAWIDŁO, *Aby odciągnąć jedną liczbę dziesiętną od drugiej, urządza się i wykonywa rachunek jako w odciąganiu liczb całkowitych, kładąc przecinek, w otrzymanej reszcie, pod przecinkami liczb danych.*

MNOŻENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

MNOŻENIE LICZBY DZIESIĘTNEJ PRZEZ CAŁKOWITĄ. Niech będzie do mnożenia 5,97 przez 24.

Liczba dziesiętna 5,67 równa się ułamkowi $\frac{567}{100}$. Owoż wieloczyn $\frac{567}{100} \times 24$ równa się $\frac{567 \times 24}{100}$; więc,

Aby pomnożyć liczbę dziesiętną przez całkowitą trzeba, nie zważając na przecinek, pomnożyć mnożnę przez mnożnik, i potem *odciąć, z prawej strony wieloczynu, tyle cyfer dziesiętnych ile jest w mnożnej.*

Rachunek tak się wykonywa

$$\begin{array}{r} 5{,}67 \\ 24 \\ \hline 22\,68 \\ 113\,4 \\ \hline 136{,}08 \end{array}$$

Mnożna ma dwie dziesiętne, zatem wieloczyn ma ich także dwie.

185. Mnożenie liczb dziesiętnych przez siebie. Niech będzie do mnożenia 3,6 przez 0,54. Wyrażając te liczby w postaci ułamków, mamy do mnożenia $\frac{36}{10}$ przez $\frac{54}{100}$. Owoż, wieloczyn $\frac{36}{10} \times \frac{54}{100}$ równa się $\frac{36 \times 54}{1000}$. To pokazuje że, otrzyma się wieloczyn liczb dziesiętnych 3,6 i 0,54 mnożąc 36 przez 54 i odcinając na dziesiętne trzy ostatnie cyfry wyniku.

Rachunek wykonywa się pisząc liczby jako niżej

$$\begin{array}{r} 3{,}6 \\ 0{,}54 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 1{,}944 \end{array}$$

Ztąd wynika następujące, ogólne prawidło mnożenia liczb dziesiętnych.

Prawidło ogólne, *aby pomnożyć jedną liczbę dziesiętną przez drugą, trzeba, nie zważając na przecinki, wykonać mnożenie jako liczb całkowitych i odciąć, z prawej strony wieloczynu, tyle cyfer dziesiętnych ile ich jest w obydwóch czynnikach.*

To prawidło obejmuje oczywiście przypadek poprzedzający, jako równie ten w którym mnożna jest liczbą całkowitą.

DZIELENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

186. Dzielenie jednej liczby dziesiętnej przez drugą. Niech będzie do podzielenia 36,9 przez 1,578.

Wyrażając liczby dziesiętne 36,9 i 1,578 w postaci ułamka, mamy do dzielenia $\frac{369}{10}$ przez $\frac{1578}{1000}$. Owoż iloraz $\frac{369}{10} : \frac{1578}{1000}$ równa się wieloczynowi $\frac{369}{10} \times \frac{1000}{1578}$ albo $\frac{36900}{1578}$. Co daje $23 + \frac{101}{263}$.

Wynika ztąd ogólne prawidło dzielenia liczb dziesiętnych.

Prawdło ogólne, *aby podzielić jedną liczbę dziesiętną przez drugą, trzeba je sprowadzić do jednakowej liczby dziesiętnych, zastępując zerami brakujące; potem znieść przecinki, i podzielić jako liczby całkowite.*

187. *Gdy dzielnik jest liczbą całkowitą*, można wprost wykonać dzielenie liczby dziesiętnej, zwłaszcza gdy chodzi o wartość przybliżoną ilorazu. I tak, niech będzie do podzielenia 40,349 przez 12; to znaczy że trzeba wziąć *dwónastą* część z 40349 *tysiącznych;* więc otrzyma się iloraz dzieląc 40349 przez 12 i wyrażając w nim tysiączne.

Rachunek tak się wykonywa

```
40,349|12
 4 3  |3,362
   74
    29
     5
```

Szukany iloraz równa się liczbie dziesiętnej 3,362 powiększonej ułamkiem $\frac{5}{12}$ *tysiącznej*. Zaniedbując ten ułamek *jednej tysiącznej*, popełnia się błąd mniejszy od 0,001; wtedy mówi się że iloraz 3,362 jest przybliżony *przez niedostatek*, na mniej niż 0,001. Jeśli, za ułamek $\frac{5}{12}$ tysiącznej, dodamy 0,001, popełnimy błąd także mniejszy od 0,001; ale wtedy mówi się że iloraz 3,363 jest przybliżony *przez zbytek*, na mniej niż 0,001. Więc, *aby podzielić liczbę dziesiętną przez całkowitą, dosyć jest, nie zważając na przecinek, wykonać dzielenie, i potem, z prawej strony ilorazu, oddzielić tyle dziesiętnych ile jest w dzielnej.*

Tak otrzymany iloraz jest dokładny, albo przybliżony na mniej niż jedność rzędu ostatniej cyfry dzielnej.

188. Łatwo pojmujemy że można wyrachować iloraz z tak wielkiem przybliżeniem z jakiem się podoba, dopisując tylko dostateczną liczbę zer na prawej stronie dzielnej. I tak, jeśli chcemy wyznaczyć iloraz z 49,2 przez 13, na mniej niż 0,0001, działamy jako następuje:

```
49,2 | 13
10 2 |------
 1 10| 3,7846
   60
   80
    2
```

Iloraz jest 3,7846, na mniej niż 0,0001 pzez niedostatek. Czego właśnie żądano.

Zamiast kłaśdź odrazu *trzy* zera w dzielnej aby mieć *dziesięciotysiączne*, spuściliśmy je po kolei do reszt cząstkowych; co wychodzi na jedno.

189. *Dzielenie przez liczbę dziesiętną przywodzi się do dzielenia przez liczbę całkowitą.* Jakoż, niech będzie 56,789 do podzielenia przez 2,34. Dzielnik 2,34 równa się ułamkowi $\frac{234}{100}$; więc otrzyma się iloraz, mnożąc dzielnę 56,789 przez 100 i dzieląc wynik 5678,9 przez 234; co daje

```
5678,9 | 234
 998   |-----
  628  | 24,2
  160
```

Wartość szukanego ilorazu jest 24,2 na mniej niż 0,1 przez niedostatek.

Ztąd wynika że, *aby otrzywać iloraz z liczby całkowitej albo dziesiętnej przez liczbę dziesiętną, trzeba znieść przecinek w dzielniku, pomnożyć dzielnę przez jedność z tylą zer ile dzielnik ma dziesiętnych, i wykonać dzielenie wedle żądanego przybliżenia.*

190. Na zastosowanie, *wyznaczmy* iloraz z 0,123456 przez 0,0245 na mniej niż 0,001.

Mnożąc dzielnik i dzielnę przez 100, widzimy że pierwszą cyfrą ilorazu są jedności. Ztąd wnosimy że szukany iloraz powinien mieć *cztery* cyfry. Wykonywając dzielenie znajdujemy

$$\begin{array}{r|l} 0{,}123456 & 0{,}0245 \\ \cline{2-2} 956 & 5{,}039 \\ 2210 & \\ 5 & \end{array}$$

Iloraz 5,039 jest przybliżony przez niedostatek, na mniej niż 0,001; jakośmy żądali.

Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne.

191. Wiemy że ułamek zwyczajny oznacza iloraz z podzielenia licznika przez mianownik; więc, jeśli wyrazimy licznik w częściach *dziesiętnych* jedności, i podzielimy przez mianownik, wedle prawidła dzielenia liczby dziesiętnej przez całkowitą, otrzymany na iloraz ułamek dziesiętny dokładny albo przybliżony.

I tak, niech będzie ułamek $\frac{5}{8}$ który chcemy zamienić na dziesiętny. Uważajmy że 5 jedności są to samo co 50 *dziesiątych* albo 500 *setnych*, etc.; zatem, dzieląc 50 dziesiątych albo 500 setnych, etc. przez 8, otrzymamy iloraz wyrażony w *dziesiątych, setnych*, etc. Albo jeszcze prościej; 5 jedności są to samo co 5,00... więc, dzieląc przez 8, wedle prawidła (188), znajdziemy

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

ułamek dziesiętny 0,625 równowarty danemu $\frac{5}{8}$.

Ale nie wszystkie ułamki zwyczajne mogą się zamienić na dziesiętne równowarte. Weźmy np. ułamek $\frac{4}{7}$; jeśli go chcemy zamienić na dziesiętny, postępując jako wyżej, znajdziemy

$$\begin{array}{l|l} 4{,}0 & 7 \\ \hline \;\;50 & 0{,}5714285... \\ \;\;\;10 & \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;40 & \end{array}$$

Wyznaczywszy szóstą cyfrę 8 ilorazu, otrzymujemy resztę 4, czyli dzielnę 40 która, będąc równa pierwszej dzielnej, okazuje że następujące cyfry ilorazu będą wszystkie, po kolei, te same *sześć* poprzedzające. Widzimy tedy że ułamek $\frac{4}{7}$ nie może się wyrazić przez ułamek dziesiętny skończony. Ale jeśli, poprzestając na *jednej*, *dwóch* albo *trzech*... cyfrach dziesiętnych, weźmiemy 0,5; 0,57; 0,571;... będziemy mieli, w dziesiętnych, wartość ułamku $\frac{4}{7}$ przybliżoną na mniej niż 0,1; 0,01; albo 0,001...

192. *Ułamek niezredukowny którego mianownik składa się z samych czynników* 2 *i* 5 *podstawy liczenia* 10, *zamienia się na ułamek dziesiętny skończony, w którym liczba cyfer dziesiętnych równa się większemu wykładnikowi czynników* 2 *i* 5 *mianownika.*

Niech będzie ułamek niezredukowny $\frac{51}{40}$ albo $\frac{51}{2^3 \times 5}$ którego mianownik $2^3 \times 5$ jest wieloczynem *trzech* czynników 2 i *jednego* czynnika 5. Jeśli pomnożymy licznik 51 przez *trzy* czynniki 10, to jest przez 10^3, wprowadzimy do dzielnej *trzy* czynniki 2 i *trzy* czynniki 5; więc wieloczyn 51000 będzie podzielny przez 40. A że ułamek $\frac{51}{40}$ jest niezredukowny, jego licznik nie zawiera czynnika 2 mającego największy wykładnik w mianowniku; więc iloraz z podzielenia 51 przez 40 będzie miał *trzy* cyfry dziesiętne. Co też właśnie otrzymujemy.

$$\begin{array}{r|l} 5{,}1 & 4{,}0 \\ 1\ 1 & \overline{1{,}275} \\ 30 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Ponieważ dzielnik 40 kończy się na zero, odcięliśmy to zero w dzielniku i jedną dziesiętnę w dzielnej; co bynajmniej nie zmienia ilorazu, a skraca rachunek który, wykonany wedle prawidła (188), daje iloraz skończony 1,275. Ten iloraz ma *trzy* cyfry dziesiętne, jakośmy powiedzieli.

Tak samo, ułamek $\frac{3}{4}$ albo $\frac{3}{2}$ równa się ułamkowi dziesiętnemu 0,75 który ma *dwie* cyfry dziesiętne.

193. *Ułamek niezredukowny, którego mianownik zawiera czynnik pierwszy różny od* 2 *i* 5, *nie może się zamienić na ułamek dziesiętny skończony.*

Niech będzie ułamek niezredukowny $\frac{13}{55}$ którego mianownik zawiera czynnik 11 i 5. Mnożąc licznik przez 10, 100, 1000... wprowadzamy do dzielnej same tylko czynniki 2 i 5; więc żaden z wyników nie może być dokładnie podzielny przez mianownik 55, który zawiera czynnik 11 różny od 2 i 5 (105). Ztąd wnosimy że, jakkolwiek daleko posuniemy dzielenie, nie przyjdziemy nigdy do reszty zero. Co się wyraża mówiąc że, w tym przypadku, *ułamek zwyczajny zamienia się na dziesiętny nieograniczonej liczby cyfer dziesiętnych.*

W samej rzeczy, dzielenie wykonane wedle prawidła (188) daje

$$\begin{array}{r|l} 13{,}0 & 55 \\ 2\ 00 & \overline{0{,}2363\ldots} \\ 350 & \\ 200 & \\ 350 & \\ \ldots & \end{array}$$

Po trzech dzieleniach, otrzymujemy tę samą resztę 20 którąśmy znaleźli po pierwszem dzieleniu. A że mnożymy każdą resztę przez 10, a dzielimy ciągle przez ten sam dzielnik 55; więc *czwarta* cyfra ilorazu będzie powtórzeniem *drugiej* 3, a następnie *piąta* powtórzeniem *trzeciej* 6; i znowu przyjdziemy do reszty 20: więc znowu dwie następujące cyfry ilorazu będą te same co dwie poprzedzające, i w tym samym porządku. I tak dalej, nieskończenie.

UWAGA. Jeśli, poprzestając na jednej, dwóch, trzech... dziesiętnych, weźmiemy ułamek dziesiętny 0,2; 0,24; 0,236,... będziemy mieli wartości ułamka $\frac{13}{55}$ wyrażone w *dziesiętnych*, i przybliżone na mniej niż 0,1; 0,01; 0,001,... Jako widzimy, błąd jest tem mniejszy im więcej bierze się dziesiętnych; dlatego właśnie ułamek $\frac{13}{55}$ jest *granicą* ułamka dziesiętnego nieograniczonego 0,236363..., którego się bierze coraz większą liczbę cyfer dziesiętnych.

UŁAMKI DZIESIĘTNE OKRESOWE.

194. OKREŚLENIE. Ułamek dziesiętny nazywa się *okresowym*, gdy pewna liczba jego cyfer dziesiętnych powtarza się nieograniczenie w tym samym porządku. Te cyfry dziesiętne, powtarzające się razem okresowo, stanowią liczbę nazwaną *okresem*.

I tak, ułamek 0,23636... jest dziesiętny okresowy, mający okres 36. Ułamek 0,012012... jest także dziesiętny okresowy, którego okres jest 012.

Ułamek dziesiętny okresowy nazywa się *okresowym prostym* albo *okresowym mieszanym*, według tego jak pierwszy okres zaczyna się raraz po przecinku, albo nie zaraz; w ostatnim razie cyfry poprzedzające pierwszy okres stanowią *część nieokresową*. I tak, ułamek 0,126126... jest dziesiętny okresowy prosty mający okres 126; a zaś 0,25454... dziesiętny okresowy mieszany, w którym okres jest 54 a część nieokresowa 2.

195. *Gdy ułamek zwyczajny zamienia się na dziesiętny nieograniczonej liczby cyfer, ten ułamek dziesiętny jest okresowy.* Jakoż, dla utkwienia myśli, weźmy ułamek $\frac{4}{7}$ który, wiemy już dlaczego, nie może się wyrazić przez dziesiętny skończony; zatem, zamieniając go na dziesiętny, nie otrzymamy reszty 0. Ale,

ponieważ każda reszta jest mniejsza od dzielnika, a ten dzielnik jest ciągle 7 ; więc nie może być więcej niż 6 reszt równych. Ztąd wynika że, wyznaczywszy 6 cyfer ilorazu, znajdziemy koniecznie jedną z reszt już otrzymanych. Więc wtedy, rachunek będzie oczywiście w tym samym stanie w jakim był gdyśmy otrzymali pierwszy raz tę resztę ; więc następujące reszty, a tem samem następujące cyfry ilorazu powtórzą się w tym samym porządku, to jest, innemi słowy, powtórzą się okresowo

Zamienić ułamek dziesiętny okresowy na zwyczajny.

196. Dla uproszczenia wykładu, w tem co następuje, będziemy uważali ułamki dziesiętne okresowe bez części całkowitej; łatwo albowiem, mając wartość takiego ułamka okresowego, dodać mu część całkowitą którą się opuściło.

Niech będzie najpierwej ułamek dziesiętny *okresowy prosty*

$$0{,}27272727...$$

którego szukamy wartości wyrażonej ułamkiem zwyczajnym.

Nie widać *a priori* czy istnieje ułamek zwyczajny z którego powstał zadany ułamek okresowy; albowiem napisaliśmy go dowolnie, nie okazując naprzód że taki istnieć może. Aby więc uniknąć wątpliwości, a nadewszystko zachować ścisłość rozumowania, uważajmy ułamek dziesiętny złożony z ograniczonej liczby okresów danego, na przykład ze trzech, dla utkwienia myśli, i weźmy ułamek dziesiętny

$$0{,}272727$$

którego wartość wyraża się niewątpliwie ułamkiem zwyczajnym.

Oddzielmy jeden okres tego ułamka, przenosząc przecinek o dwa rzędy na prawo; otrzymamy ułamek 27,2727 który jest 100 razy większy od 0,272727 , i mamy

$$0{,}272727 \times 100 = 27{,}2727.$$

Jeśli teraz, od 100 *razy* wzięte go ułamka, odciągniemy *raz* ułamek, otrzymamy 100—1 *razy* czyli 99 *razy* ten ułamek. Owoż, różnica ułamków 27,2727 i 0,272727, które mają dwa pierwsze okresy spólne, równa się oczywiście pzzewyżce części całkowitej 27 pierwszego ułamka nad ostatnim okresem drugiego, to jest równa się 27—0,000027, albo $27-\frac{27}{10^6}$. Więc mamy

$$0{,}272727 \times 99 = 27 - \frac{27}{10^6}.$$

A jeśli podzielimy obie strony przez 99, będzie

$$0{,}272727 = \frac{27}{99} - \frac{27}{99} \times \frac{1}{10^6}.$$

To pokazuje że ułamek $\frac{27}{99}$ jest przybliżoną wartością ułamka dziesiętnego 0,272727, na mniej niż jedność *szóstego* rzędu dziesiętnego. Rozumując podobnie, widzimy że, gdybyśmy byli wzięli, z ułamka okresowego danego, 10, 100,... okresów, ułamek $\frac{27}{99}$ byłby przybliżoną wartością ułamka dziesiętnego odpowiednego, na mniej niż jedność *dwódziestego*, *dwóchsetnego*,..... rzędu dziesiętnego. Ztąd wynika że, im więcej weźmiemy okresów z ułamka nieograniczonego 0,27272727... tem bardziej ułamek dziesiętny, złożony z tych okresów, zbliży się do ułamku $\frac{27}{99}$, i może się różnić od niego tak mało jak się podoba. Więc ułamek $\frac{27}{99}$ jest granicą do której dążą ułamki dziesiętne, złożone z coraz większej liczby okresów 27; więc on jest wartością ułamku dziesiętnego okresowego 0,27272727...

Zatem ogólnie, *ułamek dziesiętny okresowy* PROSTY, *równa się ułamkowi zwyczajnemu, którego licznikiem jest okres a mianownikiem liczba utworzona z tylu* 9 *ile dziesietnych w okresie.*

Na mocy tego prawidła ułamek

$$0{,}054054054... = \frac{54}{999}, \quad \text{albo} \quad \frac{2}{37}.$$

A zaś liczba dziesiętna $12{,}666... = 12 + \frac{6}{9}$ albo $12 + \frac{2}{}$

UWAGA. Wyrażenie 0,999... oznacza 1; bo się równa $\frac{9}{9} = 1$; więc nawzajem np. 12 = 11,999...

197. Uważajmy teraz ułamek dziesiętny okresowy mieszany, i niech będzie

$$0,16324324324\ldots$$

Weźmy, jako wyżej, ograniczoną liczbę okresów, na przykład trzy, dla utkwienia myśli, będziemy mieli ułamek dziesiętny skończony

$$0,16324324324.$$

Przenieśmy przecinek, naprzód poza część nieokresową a potem poza pierwszy okres, otrzymamy dwa ułamki $16,324324324$ i $16324,324324$ pierwszy 100 razy a drugi 10000 razy większy od $0,16324324324$; co daje

$$0,16324324324 \times 100 = 16,324324324$$

i $$0,16324324324 \times 100000 = 16324,324324.$$

Jeśli teraz, od 100000 razy wziętego ułamka, odciągniemy 100 razy ułamek, otrzymamy 100000—100 razy albo 99900 razy ułamek, i ten wynik równa się różnicy

$$16324,324324 - 16,324324324.$$

Owoż, ta różnica równa się różnicy części całkowitych, dwóch liczb dziesiętnych, zmniejszonej ostatnim okresem drugiej liczby dziesiętnej, to jest równa się

$$16324 - 16 - 0,000000324 \quad \text{albo} \quad 16324 - 16 - \frac{324}{10^9}.$$

Więc mamy

$$0,16324324324 \times 99900 = 16324 - 16 - \frac{324}{10^9}.$$

Zkąd, jeśli podzielimy obie strony przez 99900, wynika

$$0,16324324324 = \frac{16324-16}{99900} + \frac{324}{99900} \times \frac{1}{10^9}.$$

To pokazuje że ułamek $\frac{16324-16}{99900}$ jest przybliżoną wartością ułamku dziesiętnego $0,16324324324$, na mniej niż jedność 9go rzędu dziesiętnego. Widzimy łatwo że, jeśli z ułamka okresowego danego, weźmiemy 10, 100,... okresów, ułamek dziesiętny z nich złożony będzie się różnił od $\frac{16324-16}{99900}$ mniej niż jednością 30go, 300go... rzędu dziesiętnego. Ztąd wnosimy że ułamek $\frac{16324-16}{99900}$ jest granicą do której dążą ułamki dziesiętne, złożone z części całkowitej danego ułamka okresowego i z jego okresów wziętych w liczbie coraz większej. Więc ułamek $\frac{16324-16}{99900}$ jest wartością ułamka dziesiętnego okresowego 0,16324324324.....

Zatem ogólnie, *ułamek dziesiętny okresowy* MIESZANY, *bez części całkowitej, równa się ułamkowi którego licznikiem jest część nieokresowa razem z jednym okresem, zmniejszona częścią nieokresową, a mianownikiem liczba utworzona z tylu* 9 *ile cyfer w okresie i po nich tyle zer ile dziesiętnych nieokresowych,*

I tak, ułamek $0{,}0243636\ldots = \frac{2436-24}{99000}$ albo $\frac{67}{2750}$.

Tak samo $4{,}055\ldots = 4 + \frac{5}{90}$ albo $4 + \frac{1}{18}$.

198. UWAGA. Można uważać ułamek dziesiętny okresowy, z częścią całkowitą, jako dziesiętny okresowy mieszany, i zastosować do niego powyższe prawidło.

I tak, $5{,}0909\ldots = \frac{509-5}{99} = \frac{504}{99}$ albo $\frac{56}{11}$.

Podobnie $3{,}12727\ldots = \frac{3127-31}{990} = \frac{3096}{990}$ albo $\frac{172}{55}$.

199. Wiemy że mianownik ułamka, równego dziesiętnemu okresowemu prostemu, składa się z samej cyfry 9; zatem, jeśli sprowadzimy ten ułamek do najprostszej formy, jego mianownik nie będzie zawierał ani czynnika 2 ani czynnika 5.

Przeciwnie, mianownik ułamka, równego dziesiętnemu okresowemu mieszanemu, kończy się na tyle zer ile jest cyfer *dziesiętnych* nieokresowych, i tem samem zawiera tyle razy czynniki 2 i 5. Owoż, licznik tego ułamka może mieć tylko jeden z czynników 2 albo 5; bo gdyby je miał obydwa, kończyłby się na zero, a wtedy okres zaczynałby się jedną cyfrą wprzódy niż przypuszczono. Więc, jeśli przywiedziemy ten ułamek do najprostszej formy, jego mianownik zachowa jeden z czynników 2 albo 5, albo nawet oba, tyle razy ile cyfer dziesiętnych nieokresowych w ułamku.

Ztąd oczywiście wynika że

1° *Ułamek niezredukowny, którego mianownik jest liczbą pierwszą z podstawą* 10, *zamieniony na dziesiętny, daje ułamek okresowy prosty.*

2° *Ułamek niezredukowny, którego mianownik zawiera jeden z czynników* 2 *i* 5 *albo oba, mieszane z innemi czynnikami pierwszemi, zamieniony na dziesiętny, daje ułamek okresowy mieszany, w którym liczba cyfer dziesiętnych nieokresowych równa się większemu wykładnikowi czynników* 2 *albo* 5 *mianownika.*

Zagadn. LVII. *Wydano summę* 560,25 *zł. na kupno równej ilości jedwabnego repsu i aksamitu. Reps kosztował* 25,75 *zł. a aksamit* 36,50 *zł. łokieć. Ileż kupiono łokci każdej materyi?*

Odp. 9 łokci.

Zagadn. LVIII. *Pewien kupiec zakupił sukna łokci* 78 *po rubli* 6,75 *i* 54 *łokci po rubli* 3,25 *łokieć. A że płaci gotówką spuszczono mu z ceny* 6 *na sto. Ileż ma zapłacić?*

Odp. Rubli 659,88.

Zagadn. LIX. 35,25 *funtów herbaty kosztują rubli* 95.88. *Ile* 10,50 *funtów kosztują?*

Odp. 28,56 *rubli*.

Zagadn. LX. *Kobierzec ma łokci* 8,60 *długości na* 5,25 *szerokości; chcianoby go podszyć płótnem szerokiem na* 0,85 *łokcia. Ileż trzeba łokci płutna?*

Odp. 37,06 *łokci*, na mniej niż 0,01 przez zbytek.

Zagadn. LXI. *Pewien kupiec kupił kawę po* 2,80 *zł. funt; po upaleniu, kawa straciła* $\frac{1}{5}$ *swej wagi. Po czemu ma sprzedawać funt kawy upalonej, aby zarobić* 16 *na sto zapłaconej ceny?*

Odp. 4,03 albo 4 zł. i prawie grosz.

Zagadn. LXII. *Pewien robotnik miał już tylko* 10,1 *zł. gdy mu zapłacono* 4 *tygodnie jego pracy; po dwóch tygadniach wydał* $\frac{3}{5}$ *wszystkich pieniędzy; ale, odebrawszy wtedy zapłatę za te dwa tygodnie, ma razem złotych* 92,6. *Ileż zarabia na tydzień?*

Odp. 24 złote i 18 groszy.

Zagadn. LXIII. *Pewien kupił konia, i zaraz go sprzedał za* 1000 *złotych. Zapytany ile na nim zarobił, odpowieda: gdybym był sprzedał konia o jeden złoty więcej, mój zarobek byłby* 0,1 *tego com za niego zapłacił. Ileż zarobił?*

Odp. 90 złotych.

Zagadn. LXIV. *Dwa miasta* A. *i* B. *są odległe od siebie na* 124 *wiorst, węgel ziemny kosztuje w mieście* A. 2,2 *zł.* 100 *funtów, a w mieście* B. 2,5 *zł., koszta przewozu są* 0,05 *zł. za każde* 1000 *funtów na wiorstę. Pytanie jaki jest punkt między dwoma miastami w którym, węgiel ziemny przywieziony z miasta* A. *albo z miasta* B. *kosztuje to samo?*

Odp. Punkt między dwoma miastami odległy od miasta A. na wiorst 92. W tym punkcie węgiel jest najdroższy.

Zagadn. LXV. *Pewna massa żelaza, zanurzona w naczynie pełne wody słonej, wypchnęta z niego* 2,6 *funt. wody. Pytanie ile waży ta massa żelaza wiedząc że, pod jednakową objętością, żelazo waży* 7,5 *razy tyle ile woda słodka, a zaś woda słona waży* 1,35 *razy tyle ile woda słodka.*

Odp. Funtów 26,325,

Zagadn. LXVI. *Gdyby gęstość żelaza była dokładnie* $7\frac{21}{25}$ *a gęstość merkuryszu* 13,596, *jaka liczba wyrażiłaby gęstość żelaza względem merkuryuszu?*

Odp. 0,5766 na mniej niż 0,0001.

Zagadn. LXVII. *Woda marznąc powiększa się jedną dziesiątą swojej objętosci. Pytanie jakim ułamkiem swojej objętości massa lodu skurcza się przechodząc do stanu ciekłego?*

Odp. $\frac{1}{11}$.

Cwiczenia.

I. Wyrazić $\frac{3}{10}$ ułamkiem dziesiętnym okresowym.

II. Znaleźć wartość ułamków dziesiętnych okresowych 0,2999..., 0,0999..., 3,999...

III. Dowiśdź, 1° że summa dwóch ułamków okresowych prostych jest ułamkiem okresowym prostym. 2° że summa dwóch ułamków dziesiętnych, skończonego i okresowego prostego, jest ułamkiem okresowym mieszanym.

IV. Dowieśdź że wieloczyn dwóch ułamków okresowych prostych, mniejszych od jedności, jest ułamkiem okresowym prostym.

V. Zamienić każdy z ułamków $\frac{397}{432}$, $\frac{37}{40}$, $\frac{7}{11}$ na summę ułamków których mianowniki są potęgami z 12.

VI. Zamienić $\frac{17}{20}$ na ułamek mający liczbę 8 za mianownik, na mniej niż $\frac{2}{8}$.

VII. Znaleźć ułamek niezredukowny mający za mianownik liczbę pierwszą i który, zamieniony na dziesiętny, dajc ułamek okresowy prosty z okresem 3 cyfer.

VIII. Gdy dzielnik jest większy od jedności, dowieśdź że dzieląc dzielnę przez samą tylko część całkowitą dzielnika, błąd ilorazu przybliżonego jest mniejszy od ilorazu dokładnego podzielonego przez tę część całkowitą dzielnika.

IX. Znaleźć ułamek *niezredukowny* którego licznik jest 66, a który, zamieniony na dziesiętny, daje ułamek okresowy prosty mający okres złożony ze 4 cyfer.

X. Dowieśdź że, gdy ułamek niezredukowny ma za *mianownik liczbę pierwszą*, i daje ułamek okresowy prosty *parzystej liczby cyfer*, wtedy każda cyfra pierwszej połowy okresu z cyfrą odpowiedniego rzędu drugiej połowy czyni summę 9, jako np. $\frac{5}{7}=0,714285$ w którym $7+2=9$, $1+8=9$ $4+5=9$.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

DZIAŁANIA SKRÓCONE.

200. Często nie znając dokładnego wyniku rachunków, można przestać na przybliżonym; byle tylko przybliżenie nie przechodziło pewnej granicy. I tak, wymierzając długość łokciem, mniejsza o to że się mylimy o kilka linij; jeśli ten błąd mało się razy powtarza. Kilka sążni błędu, tam gdzie się mierzy na mile, jest także drobnostką na którą się nie zważa. A nawet kilka tysięcy mil błędu jest niczem, gdy chodzi o odległość słońca od ziemi.

Wyłożone działania na liczbach całkowitych i dziesiętnych dają wyniki dokładne; ale nieraz mozolnego wymagają rachunku, i prowadzą do wielu cyfer których znać niema koniecznej potrzeby. I tak, przypuśćmy że, mając do mnożenia przez siebie dwie liczby zawierające każda *pięć* cyfer dziesiętnych, potrzebujemy wieloczynu na mniej niż 0,001 to jest ze *trzema* tylko dziesiętnemi. Wykonywając rachunek zwyczajny, otrzymalibyśmy wieloczyn mający *dziesięć* cyfer dziesiętnych; więc siedem ostatnich byłyby niepotrzebnie wyrachowane. Otóż, celem działań skróconych jest właśnie nie wykonywać tylko te rachunki które są niezbędnie potrzebne do wyznaczonego przybliżenia.

Nim się zajmiemy temi działaniami, potrzebujemy najpierwej pokazać jak się biorą wartości z przybliżeniem wyznaczonem.

Niech będzie, jako przykład, liczba dokładna 3,017496. Jeśli chcemy mieć wartość przybliżoną tej liczby, na mniej niż jedność *trzeciego rzędu dziesiętnego*, dosyć wziąć 3,017, opuszczając wszystkie cyfry rzędów następujących; wtedy mówi się że wartość 3,017 jest przybliżona przez *niedostatek*. Ale jeśli, powiększając jednością cyfrę ostatnią zachowaną, weźmiemy 3,018, ta wartość będzie przybliżona przez *zbytek*. Uważajmy teraz że, biorąc liczbę przybliżoną 3,017, zamiast prawdziwej 3,017496, popełniamy błąd 0,000496, mniejszy od 0,0005, to jest błąd mniejszy od *pół tysiącznej*: a zaś biorąc 3,018, popełniamy błąd 0,000504, oczywiście mniejszy od 1 *tysiącznej* ale większy od *pół tysiącznej*. W tym przykładzie wartość 3,017, przybliżona przez *niedostatek*, mniej się różni od prawdziwej, niż wartość 3,018 przybliżona przez *zbytek*.

Gdybyśmy, z tej samej liczby dokładnej 3,017496, chcieli wziąć wartość przybliżoną na mniej niż jedność *drugiego rzędu dziesiętnego;* wtedy, biorąc wartość 3,01 przez niedostatek, popełnilibyśmy błąd 0,007496, mniejszy od 1 *setnej* ale większy od $\frac{1}{2}$ *setnej*; przeciwnie, biorąc wartość 3,02 przez zbytek, błąd byłby 0,002504, widocznie mniejszy od $\frac{1}{2}$ *setnej*. W tym razie, wartość przybliżona przez *zbytek* mniej się różni od dokładnej, niż wartość przybliżona przez *niedostatek*.

Ztąd wnosimy że, gdy pierwsza z cyfer zaniedbanych jest mniejsza od 5, wartość przez niedostatek więcej się zbliża do dokładnej niż wartość przez zbytek; przeciwnie, gdy pierwsza z cyfer zaniedbanych jest 5 albo większa od 5, wtedy wartość przez zbytek jest bliższa dokładnej niż wartość przez niedostatek.

Jednakże, dla ścisłości rozumowania, należy dodać, że gdy się zaniedbuje jedną tylko cyfrę 5, w tym szczególnym przypadku, obojętną jest rzeczą brać wartość przez niedostatek albo przez zbytek. I tak, niech będzie liczba dokładna 10,35; czy weźmiemy 10,3 czy też 10,4 zawsze będziemy mieli wartość przybliżoną na $\frac{1}{2}$ *dziesiątej*.

Te przykłady jasno pokazują że, mając daną liczbę jakąkolwiek, można zawsze wziąć jej wartość przybliżoną na mniej niż *pół jedności* ostatniej cyfry zachowanej. Ale zwykle liczby przybliżone są wiadome tylko na mniej niż jedność ostatniej cyfry.

Zrozumiawszy dobrze na czem polega przybliżenie liczb, łatwo pojmiemy działania skrócone na liczbach dokładnych i przybliżonych.

DODAWANIE SKRÓCONE.

201. PRAWIDŁO. *Aby otrzymać summę liczb, całkowitych albo dziesiętnych, na mniej niż jedność danego rzędu*, JEŚLI NIEMA WIĘCEJ NIŻ 11 LICZB, *dosyć wziąć każdą przez* NIEDOSTATEK *z przybliżeniem o jeden rząd więcej niż wyznaczone, i wykonać dodawanie ; potem, odrzucić ostatnią cyfrę otrzymanej summy, i powiększyć jednością cyfrę ostatnią zachowaną.*

Niech będą liczby 7,654321, 6,78, 45,01089, 0,5886784, 12,1334456, których chcemy znaleźć summę przybliżoną na mniej niż 0,01. Stosując się do powyższego prawidła, bierzemy dane liczby ze *trzema* tylko *dziesiętnemi*, dodajemy i mamy

$$\begin{array}{r} 7,654 \\ 6,78 \\ 45,010 \\ 0,588 \\ 12,133 \\ \hline 72,165 \end{array}$$

Jeśli teraz, w znalezionym wyniku 72,165 odrzucimy ostatnią cyfrę 5, i powiększymy poprzednią 6 jednością, otrzymamy liczbę 72,17 która będzie szukaną summą, przybliżoną na mniej niż 0,01, przez niedostatek albo przez zbytek.

I w samej rzeczy, wzięliśmy każdą liczbę z błędem mniejszym od 0,001 ; a że tych błędów jest mniej niż 11, ich summa jest mniejsza od $0,001 \times 11$ czyli 0,011. Nadto, odrzucając ostatnią cyfrę 5 summy 72,165 popełniamy nowy błąd 0,005. Ten błąd może być najwięcej 0,009, co się zdarza gdy ostatnia odrzucona cyfra jest 9. Ztąd wynika że, ponieważ dodano liczby przybliżone przez niedostatek, dokładna summa przewyższa wartość 72,16 liczbą zawsze mniejszą od $0,011 + 0,009$, czyli mniejszą od 0,02. Zatem dokładna summa jest większa od 72,16, ale mniejsza od 72,18. A więc, biorąc 72,17, mamy wartość szukanej summy, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez niedostatek albo przez zbytek.

Uwaga. Powyższe prawidło przypuszcza że się nie dodaje więcej niż 11 liczb. Gdyby zaś było do dodania więcej niż 11 liczb, ale nie więcej niż 101, wtedy trzebaby wziąć każdą z przybliżeniem o *dwa* rzędy więcej niż wyznaczone; potem, w otrzymanej summie, odrzucić *dwie* ostatnie cyfry z prawej strony, i powiększyć jednością cyfrę ostatnią zachowaną.

202. Ogólne prawidło, któreśmy dopiero co zastosowali, daje zawsze summę z przybliżeniem wyznaczonem; ale nie pokazuje czy to przybliżenie jest przez niedostatek czy też przez zbytek. Tę wątpliwość można czasem usunąć. Jakoż, w powyższym przykładzie, dodając liczby przybliżone przez niedostatek, popełniamy błędy których summa jest mniejsza od

$$0,0004+0,0009+0,0007+0,0005 \quad \text{czyli od} \quad 0,0025;$$

ale, z drugiej strony, summa błędów jest większa od

$$0,0003+0,0008+0,0006+0,0004 \quad \text{czyli od} \quad 0,0021.$$

To pokazuje że dokładna summa liczb zadanych jest *mniejsza* od 72,165+0,0025, ale *większa* od 72,165+0,0021; to jest zawiera się między 72,1675 i 72,1671. Więc, biorąc 72,167 otrzymujemy wartość szukanej summy, przybliżoną przez *niedostatek* na mniej niż 0,001.

Zatem wartość 72,17 jest przybliżona na mniej niż 0,01 przez *zbytek*.

ODCIĄGANIE SKRÓCONE.

203. Prawidło. *Aby otrzymać różnicę dwóch liczb, całkowitych albo dziesiętnych, na mniej niż jedność danego rzędu, dosyć wziąć każdą liczbę, z przybliżeniem tego rzędu, i, odrzucając cyfry następujące, wykonać odciąganie.*

Niech będą dwie liczby 4,7654 i 2,47895 których chcemy znaleźć różnicę na mniej niż 0,001.

Bierzemy obie liczby przybliżone na mniej niż 0,001 przez niedostatek, i wykonywamy odciąganie,

$$\begin{array}{r} 4,765 \\ 2,478 \\ \hline 2,287 \end{array}$$

Otrzymany wynik 2,287 wyraża różnicę dwóch liczb danych, przybliżoną przez niedostatek albo przez zbytek, na mniej niż 0,001. Jakoż, odrzucając cyfry rzędu niższego od *tysiacznych*, popełnia się, w każdej z dwóch liczb, błąd przez niedostatek mniejszy od 0,001; więc błąd otrzymanej różnicy tych liczb, równy różnicy ich błędów mniejszych od 0,001, jest tem bardziej mniejszy od 0,001.

MNOŻENIE SKRÓCONE.

204. Prawidło. *Aby otrzymać, na mniej niż jedność danego rzędu, wieloczyn dwóch liczb całkowitych albo dziesiętnych, pisze się mnożnik, w porządku odwrotnym, pod mnożną, tak aby cyfra* JEDNOŚCI *mnożnika stała pod cyfrą mnożnej wyrażającą jedności* STO RAZY MNIEJSZE *od jedności stopnia przybliżenia. Potem, mnoży się mnożnę przez cyfry* mnożnika, *zaczynając każde mnożenie od cyfry mnożnej która stoi ponad cyfrą mnożącą; pisze się cząstkowe wieloczyny jedne pod drugiemi, tak aby ich pierwsze cyfry, z prawej strony, sobie odpowiedały; i dodaje się. Nakoniec, odrzuca się dwie ostatnie cyfry z prawej strony summy, i powiększa się jednością cyfrę ostatnią zachowaną.*

Niech będzie do znalezienia wieloczyn liczb 3,14159265358 i 98,76543201, przybliżony na mniej niż 0,001.

Wedle prawidła, piszemy cyfrę 8 *jedności* mnożnika pod cyfrą 9 mnożnej, która wyraża *stotysiączne*; i wykonywamy mnożenie jako następujący wzór pokazuje.

```
   3,14159265358
1023 456789
-------------
  28 274328
   2 513272
     219905
      18846
       1570
        124
          9
-------------
  310,28054
```

Szukany wieloczyn jest 310,281 na mniej niż 0,001.

Jakoż, widzimy łatwo że wszystkie cząstkowe wieloczyny wyrażają jedności tego samego rzędu co cyfra mnożnej, pod którą stoi cyfra jedności mnożnika, to jest wyrażają *stotysiączne*. Bo, zaczynając mnożenie od cyfry 2 mnożnej, która wyraża milionowe, przez cyfrę 9 mnożnika, która wyraża dziesiątki, otrzymujemy stotysiączne na pierwszy wieloczyn. Owoż, następująca na lewo cyfra 9 mnożnej, oznacza jedności *dziesięć razy* większe od poprzedzających, ale za to następująca na lewo cyfra 8 mnożnika oznacza jedności *dziesięć razy mniejsze* od poprzedzających; więc drugi cząstkowy wieloczyn wyraża jedności tego samego rzędu co poprzedni, to jest stotysiączne. I tak dalej.

Oceńmy teraz błędy pochodzące z zaniedbanych mnożeń. W pierwszym wieloczynie część mnożnej, z prawej strony cyfry 2 od której się zaczyna mnożenie, wyraża liczbę mniejszą od jedności rzędu tej cyfry; zatem, nie mnożąc tej części mnożnej przez cyfrę 9 mnożnika, popełniamy błąd mniejszy od 9 jedności rzędu ostatniej cyfry wieloczynów cząstkowych, t. j. mniejszy od $0,00001 \times 9$. Rozumując podobnie, pojmujemy że błąd drugiego cząstkowego wieloczynu jest mniejszy od $0,00001 \times 8$. I tak następnie dla wszystkich innych cyfer mnożących. *Więc summa błędów*, zmniejszających cząstkowe wieloczyny, *jest mniejsza od summy cyfer mnożących*, to jest mniejsza od

$$0,00001 \times (9+8+7+6+5+4+3), \text{ czyli od } 0,00001 \times 42.$$

Nadto, ponieważ cała mnożna jest mniejsza od 3+1 jedności, zaniedbując jej mnożyć przez część 201 mnożnika która wyraża liczbę mniejszą od 2+1 *dziesiątych* jedności cyfry 3 mnożnika, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{(3+1)\,(2+1)}{10}$ stotysiącznych. Ostatni błąd byłby tylko mniejszy od $\frac{(3+1)\,2}{10}$ stotysiącznych, gdyby cyfra 2 była ostatnią w mnożniku.

Więc summa wszystkich błędów przez niedostatek, któremi się otrzymany wieloczyn różni od dokładnego, jest mniejsza od

$$9+8+7+6+5+4+3+\frac{(3+1)\,(2+1)}{10}\ \textit{stotysiącznych},$$

to jest mniejsza od 43,2 stotysiącznych; a ogólnie mniejsza od 100 *stotysiącznych* albo od 1 *tysiącznej*; przypuszczając że niema więcej nad 10 *cyfer mnożących*. Ztąd wnosimy że dokładny wieloczyn dwóch liczb danych mieści się między 310,28054 i 310,28054+0,001=310,28154 a tem bardziej między 310,280 i 310,282. Więc wynik 310,281, otrzymany wedle wskazanego prawidla, jest przybliżoną wartością szukanego wieloczynu, na mniej niż 0,001, przez niedostatek albo przez zbytek.

205. Uwaga I. Powyższe rozumowanie okazuje że, aby prawidło mnożenia skróconego było dokładne, dosyć jest żeby summa błędów, z tego działania wynikających, nie przechodziła 100 jedności cyfry ostatniej zachowanej. Gdy ta summa błędów zawiera się między 100 i 1000, wtedy trzeba napisać cyfrę jedności mnożnika pod tą cyfrą mnożnej która wyraża jedności 1000 razy mniejsze od jedności danego przybliżenia; a w otrzymanym wieloczynie odrzucić *trzy* ostatnie cyfry z prawej strony, i przydać jedność do ostatniej zachowanej.

Wynika ztąd że, gdy summa błędów mnożenia skróconego nie przechodzi 10, dosyć jest wyrachować cząstkowe wieloczyny z jedną cyfrą więcej niż szukany wieloczyn. To nie potrzebuje już dowodzenia.

Uwaga II. Można się często zapewnić że wieloczyn, otrzymany za pomocą mnożenia skróconego, jeet przybliżony przez niedostatek albo przez zbytek. Weźmy poprzedzający przykład. Wiemy już że wieloczyn 310,28054 jest za mały o mniej niż 43,2 stotysiącznych. Ale ta granica błędu jest za wielka. Aby mieć mniejszą, uważajmy że część mnożnej 65358, którą zaniedbujemy z prawej strony cyfry 2, wyraża liczbę mniejszą od 0,7 jedności tej cyfry: zatem, nie mnożąc tej części pzzez 9, popełniamy błąd mniejszy od 6,3 jedności ostatniego rzędu. Tak samo rozumując, widzimy że błędy, pochodzące z następujących cyfer mnożących, są mniejsze od $0,3\times 8=2,4$; 7 ; 3,6 ; 1 ; 2 ; 0,6. Nakoniec część 201 mnożnika sprawia błąd, jako już wiemy, mniejszy od $\frac{(3+1)(2+1)}{10}=1,2$. Summa tych wszystkich błędów jest mniejsza od 24,1.

Znajdźmy jeszcze granicę niższą błędów. Uważając że część zaniedbana 65368 mnożnej, jest większa od 0,6 jedności cyfry 2, widzimy łatwo że, nie mnożąc tej części przez 9, popełniamy błąd większy od $0,6\times 9=5,4$ jedności ostatniej cyfry wieloczynu. Tak samo następujące cyfry mnożące dają błędy większe od 1,6 ; 6,3 ; 3 ; 0,5 ; 1,6 ; 0.3.

Nareszcie cyfra 2, pierwsza z tych przez które zaniedbujemy mnożyć danej mnożnej, sprawia błąd większy od 0,6. Summa tych błędów jest wieksza od 19,3.

Ztąd wnosimy że dokładny wieloczyn jest większy od

$$310,28054+0,000193$$

ale mniejszy od $310,28054+0,000241$, to jest mieści się między 310,280733 i 310,280781. Więc, biorąc cyfry spólne tym dwóm liczbom, mamy 310,2807 wartość przybliżoną, która się różni od dokładnego wieloczynu o mniej niż 0,0001 przez *niedostatek*.

Gdybyśmy wzięli 310,2808, mielibyśmy wartość przybliżoną przez *zbytek*, na mniej niż *pół dziesięciotysiącznej*.

206. *Gdy przybliżenie jest wyznaczone, wtedy można, w mnożeniu skróconem jako we zwyczajnem, przemienić porządek czynników, a zawsze ten sam będzie wieloczyn.*

Bo, czy się mnoży pierwszy czynnik przez drugi, czy też drugi przez pierwszy, otrzymane wyniki są zawsze summą wieloczynów tych samych cyfer które, odpowiedając sobie w obydwóch czynnikach, dają jedności tego samego rzędu ; a widocznie zaniedbuje się, w obydwóch mnożeniach, te same wieloczyny cyfer które wyrażają jedności stopnia niższego od danego przybliżenia.

Następujący przykład lepiej tę rzecz wyjaśni.

Niech będą dwie liczby 72,1 i 65,04321 których chcemy otrzymać wieloczyn na mniej niż 0,1.

Ponieważ summa cyfer jednego z dwóch czynników nie przechodzi 10, korzystając z uwagi poprzedzającego numeru, szukamy wieloczynu z jedną tylko cyfrą więcej niż dane przybliżenie wymaga, i wykonywamy obydwa rachunki, jako wzór pokazuje

$$\begin{array}{r}65,04321\\127\\\hline 455301\\13008\\650\\\hline 4689,59\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}72,100\\1234\,056\\\hline 432600\\36050\\288\\21\\\hline 4689,59\end{array}$$

Znalezione wieloczyny są te same, jakośmy oznajmili. To wynika ze sposobu jakim się urządza mnożenie skrócone. I w samej rzeczy, w pierwszym przykładzie, cyfra 2 *jedności* mnożnika stoi pod cyfrą 4 *setnych* mnożnej; a zaś w drugim, na odwrot, cyfra 4 stoi pod cyfrą 2. Zatem wieloczyn tych dwóch cyfer zachowuje ten sam stopień przybliżenia. Tak samo rzecz się ma z innemi cyframi. Widzimy tedy jasno że otrzymane wyniki, składające się z wieloczynów tych samych cyfer i jednakowego przybliżenia są sobie równe.

Ta równość dwóch wieloczynów, mających to samo przybliżenie, mogłaby służyć za próbę mnożenia skróconego. Ale jest inny, prosty sposób próby, o którym wkrótce będzie mowa.

Zobaczmy teraz jakie są granice błędów otrzymanego wieloczynu. Posługując się sposobem któryśmy w poprzedzającym numerze wyłożyli, znajdujemy że błąd pochodzący z mnożenia skróconego wpada między 0,024 i 0,034. Ztąd wnosimy że dokładny wieloczyn jest większy od 4689,61 ale mniejszy od 4689,63. Więc 4689,6 jest wartością wieloczynu, przybliżoną na mniej niż 0,1 przez niedostatek.

UWAGA. Gdy mnożna nie ma dosyć cyfer z prawej strony, aby odpowiedały cyfrom przewróconego mnożnika, można je zastąpić zerami; jakośmy to w drugiem mnożeniu zrobili.

207. *W mnożeniu skróconem dwóch liczb dokładnych, ten z wieloczynów jest większy w którym mnożnik ma* MNIEJ *cyfer od mnożnej.*

Niech będą dwie liczby 0,120345 i 98,76 których szukamy wieloczynu za pomocą mnożenia skróconego.

Dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy, wykonywamy oba mnożenia skrócone.

0,120345	98,76
6789	5430 21
1083105	98 76
96272	19 74
8421	27
720	11,8 77
11,88518	

Jako widzimy, otrzymane wyniki sprawdzają nasze twierdzenie. Pierwszy wieloczyn jest większy od drugiego, chociaż naumyślnie wzięliśmy cyfry pierwszego mnożnika daleko większe od cyfer drugiego; co znacznie zwiększa błędy mnożenia skróconego, a tem samem zmniejsza wieloczyn.

Dla dowodzenia tego twierdzenia, dosyć jest uważać że, gdyby w drugiem mnożeniu posunięto mnożnik na prawo, tak aby cyfry z lewej strony mnożnika i mnożnej stały w jednej kolumnie, i wykonano mnożenie; wtedy drugi wieloczyn, mając to samo przybliżenie co pierwszy, byłby mu równy, a składałby się oczywiście z tych samych co teraz wieloczynów i jeszcze powiększonych innemi. Więc obecnie pierwszy wieloczyn jest większy od drugiego.

208. Próba mnożenia skróconego. Można zastosować próbę przez 9 do mnożenia skróconego. Jakoż, weźmy już użyty przykład.

$$\begin{array}{r} 65{,}04321 \\ 127 \\ \hline 455\ 301 \\ 13\ 008 \\ 650 \\ \hline 468\ 9{,}59 \end{array}$$

Widzimy że pierwszy cząstkowy wieloczyn 65043×7 daje przewyżkę nad 9 równą $0 \times 7 = 0$; drugi daje $6 \times 2 = 12$, co czyni przewyżkę 3; a ostatni przewyżkę $2 \times 1 = 2$. Summa tych przewyżek czyni przewyżkę 5. Owoż, znaleziony wieloczyn 4689,59 daje właśnie przewyżkę 5. Więc jest prawdopodobieństwo że rachunek dobrze wykonany.

209. Można, za pomocą mnożenin skróconego, otrzymać wieloczyn dwóch liczb przybliżonych na mniej niż jedność ostatniego rzędu. I tak, niech będą dwie liczby 865,74 i 2,039 których ostatnie cyfry są błędne na mniej niż jedność, przez niedostatek albo przez zbytek.

Aby mieć wieloczyn przybliżony tych liczb, dosyć wykonać mnożenie skrócone, pisząc jedną liczbę pod drugą tak *żeby cyfry błędne nie mnożyły ani były mnożone*; jako wzór pokazuje

$$\begin{array}{r} 865{,}74 \\ 9302 \\ \hline 1730 \\ 24 \\ \hline 1754 \end{array}$$

Błąd z mnożenia skróconego pochodzący jest mniejszy od 12,7 jedności ostatniego rzędu, ale większy od 10,1. Zatem prawdziwy wieloczyn wpada między $1754 + 12{,}7 = 1766{,}7$ i $1754 + 10{,}1 = 1764{,}1$. Owoż te liczby mają *trzy* pierwsze cyfry spólne; więc 1760 jest wartością szukanego wieloczynu, przybliżoną na mniej niż jeden *dziesiątek*, przez niedostatek.

Daliśmy ostatni przykład dla pokazania tylko użyteczności mnożenia skróconego, nie zaś jako sposób otrzymania wieloczynu liczb przybliżonych, o których będzie mowa w ostatnim rozdziale tego dzieła.

DZIELENIE SKRÓCONE.

210. Aby uprościć rozumowanie, wyłożymy teoryę dzielenia skróconego na liczbach całkowitych, a dopiero potem zastosujemy je do liczb dziesiętnych dla których szczególniej jest użyteczne.

Niech będzie do znalezienia iloraz, liczby 10234567890 podzielonej przez 3141592, na mniej niż jedność.

Jedynie dla porównania dwóch działań, obok dzielenia skróconego umieszczamy zwyczajne.

DZIELENIE SKRÓCONE		DZIELENIE ZWYCZAJNE	
10234567890	3141592	10234567890	3141592
8100	3257	8097918	3257
1818		18147349	
248		24393890	
31		2402746	

Otóż, jak się wykonywa dzielenie skrócone.

Zwyczajnym sposobem wyznaczamy pierwszą cyfrę 3 ilorazu, i widzimy że wyraża *tysiące*. Ztąd wnosimy że szukany iloraz, *na mniej niż jedność*, powinien mieć *cztery* cyfry. Bierzemy z lewej strony dzielnika *pięć* cyfer, to jest jedną więcej niż w żądanym ilorazie, i mamy liczbę 31415 która stanowi *pierwszy dzielnik*; zobaczymy później kiedy taki dzielnik jest dostateczny. Potem odcinamy, z lewej strony dzielnej, taką liczbę która zawiera pierwszy dzielnik ale mniej niż dziesięć razy, to jest bierzemy 102345; ta liczba jest *pierwszą dzielną*. Wszystkie inne cyfry danego i dzielnika i dzielnej zostają na boku.

To uczyniwszy, przez znalezioną pierwszą cyfrę 3 ilorazu, mnożymy pierwszy dzielnik, i odciągamy wieloczyn, częściami, od pierwszej dzielnej; co daje *pierwszą resztę* 8100. I w samej rzeczy, pierwsza cyfra 3 ilorazu wyraża *tysiące*, a zaś pierwszy dzielnik 31415 wyraża *sta*; zatem, wieloczyn tych dwóch liczb wyraża *sta tysięcy*. Dlatego właśnie odciągnęliśmy go od *set tysięcy* danej dzielnej, i otrzymaliśmy pierwszą resztę 8100; jako powyższy wzór okazuje.

Ale teraz, zamiast spuszczać, do pierwszej reszty, następującą cyfrę 6 dzielnej, jako w dzieleniu zwyczajnem, przekreślamy tylko ostatnią cyfrę 5 pierwszego dzielnika; i tym sposobem tworzymy *drugi dzielnik* 3141, przez który dzielimy pierwszą resztę 8100. Otrzymawszy na iloraz cyfrę 2, probujemy czy nie za wielka, tak jak gdybyśmy dzielili całą daną dzielnę przez cały dany dzielnik. Widzimy odrazu że cyfra 2 jest dobra. Mnożymy więc przez nią drugi dzielnik, i odciągamy wieloczyn od pierwszej reszty; co daje *drugą resztę* 1818. Po czem, przekreślamy znowu ostatnią cyfrę 1 drugiego dzielnika, i mamy *trzeci dzielnik* 314, przez który dzielimy drugą resztę 1818. I tak dalej; aż nakoniec, przekreślając cyfrę 4 dzielnika, przychodzimy do liczby 31 która jest *ostatnim dzielnikiem*. Podzieliwszy, przez ostatni dzielnik 31, ostatnią przybliżoną dzielnę 248, znajdujemy na iloraz cyfrę 8. Ale ta cyfra jest za wielka; bo spuszczając, do przybliżonej dzielnej 248, zostawione cyfry 678.. danej dzielnej, i dzieląc przez 8, jako chce wiadome prawidło zwyczajnego dzielenia, znajdujemy na iloraz liczbę mniejszą od całego dzielnika 3141592. Zmniejszemy przeto 8 jednością, i zapewniamy się że 7 jest dobrą cyfrą ilorazu. Tu rachunek się kończy, i daje iloraz 3257.

Aby dowieśdź że tak znaleziony iloraz, jeśli nie jest dokładny, różni się od prawdziwego mniej niż jednością, rozpatrzmy każdą jego cyfrę.

Wiemy już że pierwsza 3 jest dokładna, jako otrzymana sposobem dzielenia zwyczajnego.

Ca do drugiej cyfry 2, zastanówmy się nad działaniami które do niej prowadzą. Zaniedbując dwie ostatnie cyfry 92 danega dzielnika; popełniamy błąd mniejszy od 100; a zaś mnożąc pierwszy dzielnik 31415, przez pierwszą dokładną cyfrę 3 ilorazu, która wyraża tysiące, popełniamy błąd wieloczynu mniejszy od $100 \times 3000 = 3 \times 10^5$, to jest mniejszy od 3 jedności rzędu ostatniej zachowanej cyfry w dzielnej. Zatem, odciągając wieloczyn 31415×3 za mały, *pozornie* od pierwszej przybliżonej dzielnej 102345, a *rzeczywiście* od całej dzielnej, chociaż nie bierzemy wszystkich jej cyfer, otrzymujemy pierwszą resztę 8100 która, z opuszczonemi cyframi dzielnej, jest za wielka. Ta reszta, przewyższa oczywiście prawdziwą błędem mniejszym od 3 jedności rzędu ostatniej zachowanej cyfry. Owoż, wyznaczamy drugą cyfrę 2 ilorazu, dzieląc resztę 8100 przez drugi skrócony dzielnik 3141; a właściwie mówiąc, wyznaczamy tę cyfrę tak jak gdybyśmy dzielili przez cały dzielnik 3141592 przybliżoną dzielnę 8100678, to jest przybierając do reszty 8100 zaniedbane cyfry dzielnej. A ponieważ przybliżona *cząstkowa* dzielna 8100678 przewyższa prawdziwą, błędem mniejszym od 3×10^3, a przeto mniejszym od całego dzielnika 3141592; więc zawiera ten dzielnik *tyle razy ile* prawdziwa albo tylko *raz* więcej. To wyraźnie pokazuje że druga cyfra 2 ilorazu, takim sposobem wyznaczona, jest dokładna, albo przewyższa dokładną ale tylko jednością. Owoż, gdyby była za wielka, to zwiększenie pochodziłoby z dodania, do prawdziwej cząstkowej dzielnej, błędu mnożenia skróconego dzielnika przez pierwszą cyfrę 3 ilorazu; więc druga przybliżona reszta, nie zawierając już nic z prawdziwej, byłaby mniejsza od summy błędów tego mnożenia przez dwie pierwsze cyfry 3 i 2 ilorazu, a tem bardziej mniejsza od summy $3+1{,}2=4{,}2$ (205). Wynika ztąd że, jeśli tylko dzielnik przewyższa summę błędów mnożenia skróconego, wtedy, gdyby druga cyfra ilorazu była za wielka, to druga przybliżona dzielna, już mniejsza od ostatniego dzielnika, byłaby tem bardziej mniejsza od każdego z poprzedzających; więc dałaby 0 na wszystkie cyfry żądanego ilorazu które następują po cyfrze za wielkiej. To rozumowanie stosuje się oczywiście do innych cyfer ilorazu, i dowodzi że żadna z nich nie może być za wielka, gdy następujące nie są wszystkie zerami; *byle tylko summa błędów mnożenia skróconego, dzielnika przez cyfry ilorazu* PRÓCZ OSTATNIEJ, *była mniejsza od tego dzielnika.* W powyższem dzieleniu tego warunku dopełniono; bo summa błędów jest mniejsza od summy cyfer 3+2+5 ilorazu, ostatni dzielnik oczywiście od niej większy a tem bardziej cały dzielnik. Zatem, ponieważ ostatnia cyfra ilorazu nie jest zerem, poprzedzające nie są za wielkie; a że nie mogą być za małe z natury dzielenia skróconego, więc są dokładne.

Obejrzmy nakoniec ostatnią cyfrę 7 ilorazu. Dowiedliśmy że wszystkie poprzedzające są dokładne; mamy więc prawo powiedzieć że ostatnia przybliżona dzielna 248 jest różnicą między pierwszą dzielną 102345 i wieloczynem mnożenia skróconego, pierwszego dzielnika 31415 przez cyfry ilorazu prócz ostatniej; to jest innemi słowy, ta dzielna, wzięta z cyframi zaniedbanemi, składa się z prawdziwej cząstkowej dzielny i z summy błędów mnożenia skróconego. Owoż, summa tych błędów jest mniejsza od 3+1,2+1=5,2 jedności rzędu ostatniej zachowanej cyfry dzielnej; a że dany dzielnik przewyższa tę summę, bo ostatni dzielnik z następującą cyfrą jako dziesiętną, czyli 31,4 nie jest mniejszy od 5,2; więc, na mocy tego co poprzedza, ostatnia cyfrai 7 lorazu jest dokładna, albo przewyższa dokładną tylko jednością. Zatem, znaleziony iloraz 3257 jest przybliżony na mniej niż jedność; a nawet może być dokładny.

211. Powyższe dowodzenie jasno pokazuje że dokładność dzielenia skróconego, takiego jakieśmy wyłożyli, na tem jedynie polega aby dzielnik był zawsze większy od summy błędów tego mnożenia skróconego, dzielnika przez cyfry ilorazu *prócz* ostatniej. *Oczywiście temu warunkowi czyni się zadość, gdy ostatni dzielnik* ZAWIERA *summę cyfer ilorazu prócz ostatniej.* Ale z tych cyfer, nie znamy naprzód tylko pierwszą, i wiemy tylko że każda inna jest najwięcej 9. Ztąd wnosimy następujące prawidło:

Prawidło. *Aby, za pomocą dzielenia skróconego, otrzymać iloraz dwóch liczb całkowitych, na mniej niż jedność, trzeba naprzód wyznaczyć liczbę jego cyfer; wziąć następnie, z lewej strony dzielnika, taką liczbę która zawiera summę cyfer ilorazu prócz ostatniej, zastępując przez 9 cyfry niewiadome. Ta liczba będzie* OSTATNIM DZIELNIKIEM. *Potem, do ostatniego dzielnika, trzeba przydać tyle następujących cyfer, mniej jedną, ile ma być w ilorazie, i zaniedbać wszystkie inne. Tak wyznaczona liczba będzie* PIERWSZYM DZIELNIKIEM. *Nakoniec, trzeba oddzielić, z lewej strony dzielnej, takę liczbę która zawiera pierwszy dzielnik ale mniej niż 10 razy; ta liczba będzie* PIERWSZĄ DZIELNĄ, *a wszystkie inne cyfry zostaną na boku.*

To zrobiwszy, wykonywa się dzielenie skrócone, jakośmy pokazali.

Stosując prawidło do naszego przykładu, w którym żądany iloraz powinien mieć *cztery* cylry, widzimy zaraz że dosyć wziąć 31 na ostatni dzielnik; bo $31 > 3 + 2 \times 9$. Zatem pierwszy dzielnik jest 31415 a pierwsza dzielna 102345. Co właśnie usprawiedliwia nasze działanie.

212. Weźmy jeszcze, na zastosowanie, inny przykład. *Podzielmy 4800000 przez 12345, na mniej niż jedność.*

Pierwsza cyfra ilorazu oznacza 3 *sta*; zatem szukany iloraz powinien mieć *trzy* cyfry. Owoż, jakakolwiek jest druga cyfra ilorazu, choćby nawet 9, summa dwóch pierwszych czyni najwięcej 12; więc dosyć wziąć, z danego dzielnika, 12 na ostatni dzielnik. Zatem 1234 jest pierwszym dzielnikiem a 4800 pierwszą dzielną; i mamy

$$\begin{array}{r|l} 4800000 & 12345 \\ \hline 1098 & 389 \\ 114 & \\ 6 & \end{array}$$

Iloraz 389 jest przybliżony na mniej niż jedność. Zobaczymy zaraz czy przez niedostatek czy przez zbytek.

213. Można prawie zawsze łatwo rozpoznać czy otrzymany

iloraz, za pomocą dzielenia skróconego, jest przybliżony przez niedostatek albo przez zbytek.

Jakoż, gdy iloraz jest zupełny, wtedy przybliżona reszta składa się oczywiście z samych tylko błędów mnożenia skróconego. Więc, *gdy reszta jest większa albo mniejsza od summy tych błędów, znaleziony iloraz jest przybliżony przez niedostatek albo przez zbytek.*

Dokładnej summy błędów mnożenia skróconego nie znamy naprzód; ale często dosyć tylko mieć jej granicę wyższą albo niższą, aby rozeznać przybliżenie ilorazu.

I tak, w pierwszym przykładzie, reszta 31 jest, na spojrzenie, większa od summy cyfer ilorazu 3257 a tem bardziej większa od summy błędów mnożenia skróconego; więc iloraz 3257 jest przybliżony *przez niedostatek.*

Przeciwnie w ostatnim przykładzie, summa błędów mnożenia skróconego jest większa od summy $1,5+3,6+3=8,1$ a zaś reszta 6 mniejsza od 8,1; więc iloraz 389 jest przybliżony *przez zbytek.*

214. Pokażemy teraz inny sposób wynaczenia ostatniego dzielnika który, chociaż mniej prosty od wyżej wskazanego, jest często od niego użyteczniejszy. Dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy, uważajmy pierwszy przykład dzielenia skróconego.

Wiemy że, dla dokładności tego dzielenia, dosyć jest aby tylko ostatni dzielnik nie był mniejszy od summy błędów mnożenia skróconego, dzielnika przez cyfry ilorazu prócz ostatniej. Owoż, znajdziemy także granicę summy tych błędów, mnożeniem skróconem dokładnego ilorazu 325 przez dzielnik; byle tylko jedności ostatniej zachowanej cyfry były tego samego rzędu jako w mnożeniu skróconem dzielnika przez iloraz 325. Otrzymamy ten wynik, uważając że pierwsza cyfra 3 ilorazu powinna odpowiadać piątej cyfrze 5 dzielnika, to jest pisząc

$$\begin{array}{r} 325 \\ 2951413 \\ \hline \end{array}$$

W tem mnożeniu skróconem, gdybyśmy je wykonali, trzy pierwsze cyfry 3, 1, 4 mnożnika nie sprawiają żadnego błędu; a wszystkie następujące dają summę błędów mniejszą od $1+5+\frac{(9+1)(3+1)}{10}$ jedności rzędu ostatniej zachowanej cyfry w dzielnej.

Ztąd wynika PRAWIDŁO. NA OSTATNI DZIELNIK *dosyć jest wziąć, z lewej strony danego dzielnika, taką liczbę którąby, z cyfrą sąsiednią jako dziesiętną,* ZAWIERAŁA *summę tylu następujących cyfer*, MNIEJ DWIE, *ile w ilorazie, więcej dziesiątą część wieloczynu pierwszej* ZANIEDBANEJ *cyfry dzielnika przez pierwszą ilorazu a obie powiększone jednością.*

UWAGA. Dla ścisłości prawidła, dodać należy że, gdy się tylko jedną zaniedbuje cyfrę w dzielniku, nie trzeba jej powiększać jednością; a gdy się nie zaniedbuje żadnej, wtedy błąd ztąd pochodzący jest żaden.

To prawidło, zastosowane do pierwsego przykładu, daje zaraz ostatni dzielnik 31; bo oczywiście

$$31,4>1+5+\frac{(9+1)(3+1)}{10} \quad \text{czyli} \quad 31,4>10.$$

Zastosowane do drugiego przykładu, daje ostatni dzielnik 12; bo $12,3>4+2$. Przykłady następujących numerów pokażą wyższość tego prawidła nad pierwszem.

215. Dla ułatwienia wykładu, daliśmy teoryę dzielenia skróconego na liczbach całkowitych. Nie idzie wszakże zatem, aby dzielenie liczb dziesiętnych koniecznie do całkowitych przywodzić należało. I owszem, daleko jest snadniej wprost je wykonywać.

I tak, niech będzie do podzielenia 19048,325432 przez 1582,3469, na mniej niż 0,001

Jeśli chcemy sprowadzić dzielenie liczb dziesiętnych do całkowitych, trzeba naprzód, znosząc przecinki, dopisać *dwa* zera do dzielnika; co daje liczby całkowite 19048325432 i 1582346900. Potem, uważając że pierwsza cyfra ilorazu tych liczb wyraża *dziesiątki*, a żądany iloraz powinien mieć *tysiączne,* trzeba do dzielnej dopisać *trzy* zera; co daje 19048325432000 do podzielenia przez 1582346900. To uczyniwszy, łatwo znajdziemy że dosyć wziąć 15 no ostatni dzielnik; zatem 158234 na pierwszy dzielnik, a 190483 na pierwszą dzielnę; i, wykonawszy dzielenie skrócone, odciąć na dziesiętne, trzy ostatnie cyfry ilorazu.

Widzimy teraz że nietylko dopisane zera zostają bez użytku, ale jeszcze wiele innych cyfer opuścić należy. Niema więc, w tym razie, żadnej korzyści sprowadzać liczby dziesiętne do całkowitych. Ale, żeby wprost wykonać działanie na danych liczbach, uważajmy że pierwsza cyfra 1 szukanego ilorazu, wyrażająca *dziesiątki,* wskazuje że ten iloraz, mając być przybliżony na mniej niż 0,001, powinien zawierać *pięć* cyfer. Nie zważając tedy na przecinki, bierzemy 15 na ostatni dzielnik według drugiego prawidła (214); pierwsze wymagałoby 158. Zatem, 158234 jest pierwszym dzielnikiem a 190484 pierwszą dzielną. I mamy odrazu te same liczby któreśmy dopiero co wyznaczyli sposobem przydłuższym.

Wykonywając dzielenie skrócone, znajdujemy

$$\begin{array}{r|l}
19048,325432 & 1582,3469 \\ \cline{2-2}
3224\ 9 & 12,038 \\
60\ 3 & \\
12\ 9 & \\
9 &
\end{array}$$

Iloraz 12,038 przybliżony na mniej niż 0,001 przez *niedostatek*; bo summa błędów jest mniejsza od

0,7+1+0,8+6,7=9,2 a reszta 9,25... większa od 9,2.

216. Próba dzielenia skróconego. Zawsze jest dobrze sprawdzać otrzymane wyniki, aby mieć przynajmniej prawdopodobieństwo ich dokładności. Próba przez 9 łatwo się do dzielenia skróconego zastosować może; uważając tylko że w tem dzieleniu, jakikolwiek jest iloraz, zupełny albo przy-

bliżony, pierwsza dzielna równa się wieloczynówi skróconego mnożenia pierwszego dzielnika przez iloraz, więcej przybliżoną resztą. Ztąd wynika że przewyżka nad 9 pierwszej dzielnej równa się przewyżce summy przewyżek z wieloczynów cząstkowych i z reszty. I tak, w ostatnim przykładzie, pierwsza dzielna 190483 równa się wieloczynowi skróconego mnożenia pierwszego dzielnika 158234 przez iloraz 12038, więcej resztą 9. Owoż, pierwszy cząstkowy wieloczyn 158234×1 daje przewyżkę 5; drugi 15823×2, daje 2; następnie 1582×0 daje 0; 158×3 daje 6; a ostatni 15×8 przewyżkę 3. Reszta 9 daje przewyżkę 0. Summa tych przewyżek czyni 7; a że przewyżka pierwszej dzielnej jest także 7, więc jest prawdopodobieństwo że dokładnie wykonano działanie.

217. *Podzielić* 532,286 *przez* 190,1029 *na mniej niż* 0,0001.

Pierwsza cyfra 2 ilorazu, wyrażając jedności, wskazuje że szukany iloraz powinien mieć *pięć* cyfer. Stosując nasze prawidło (214), widzimy że dosyć wziąć 1 na ostatni dzielnik; gdy tymczasem pierwsze prawidło wymagałoby liczby 190 (*). Bierzemy tedy 190,10 na pierwszy dzielnik, a 532,28 na pierwszą dzielnę; i, wykonywając dzielenie skrócone, znajdujemy

$$\begin{array}{r|l} 532,286 & 190,1029 \\ \cline{2-2} 152\ 08 & 2,8000 \\ 0 & \end{array}$$

iloraz 2,8000 przybliżony na mniej niż 0,0001 *przez zbytek*; bo summa błędów mnożenia skróconego, większa od 0,5+0,1=0,6 przewyższa resztę 0,6.

218. Szukajmy jeszcze ilorazu liczby 5,4321 przez 123,45, na mniej niż 0,00001.

Pierwsza cyfra ilorazu oznacza 4 *setne*; ztąd wnosimy że żądany iloraz powinien mieć *cztery* cyfry. Więc, dosyć wziąć

(*) Prawidła znanych mi dotąd autorów wymagają *przynajmniej* liczby 19 na ostatni dzielnik w tym przykładzie.

12 na ostatni dzielnik (214). Wykonawszy dzielenie skrócone, otrzymujemy

$$\begin{array}{r|l} 5{,}4321 & \bar{1}2\dot{3},\ddot{4}\ddot{5} \\ \cline{2-2} 4941 & 0{,}04400 \\ 5 & \end{array}$$

iloraz 0,04400 przybliżony na mniej niż 0,00001 przez niedostatek; bo summa błędów jest mniejsza od $2+2=4$, a reszta 5 przewyższa tę summę.

219. Teorya dzielenia skróconego nie byłaby zupełna, gdybyśmy nie uprzątnęli pewnej trudności, którą się napotyka szukając np. ilorazu liczby 140,62 podzielonej przez 7,81239, na mniej niż 0,001. Oto działanie

$$\begin{array}{r|l} 140{,}620 & \bar{7},\dot{8}\ddot{1}\ddot{2}\ddot{3}9 \\ \cline{2-2} 62\,497 & 17{,}999 \\ 7\,813 & \end{array}$$

Nasze prawidło daje 7 na ostatni dzielnik, bo 7,8 zawiera summę $1+2+3+\frac{9(1+1)}{10}$; wziąwszy 78123 na pierwszy dzielnik i 140,620 na pierwszą dzielnę, znajdujemy dwie pierwsze cyfry 1 i 7 ilorazu, jako zwykle. Ale potem otrzymujemy resztę 7813 większą od odpowiedającego dzielnika 7812; dzielimy ją przez następujący dzielnik 781, i znajdujemy iloraz 10, który zdaje się wskazywać że poprzedzająca cyfra 7 jest za mała; a przecież niema wątpliwości że ona dokładna. Kładziemy więc 9 w ilorazie. Owoż, jeśli teraz od dzielnej 7813, która zawiera 10 razy swój dzielnik 781, odciągniemy 9 razy ten dzielnik, reszta będzie go oczywiście zawierała *raz* jeszcze, a 10 razy następujący dzielnik; więc znowu odpowiedająca cyfra ilorazu będzie 9; i tak dalej. Ztąd wnosimy że, gdy przybliżona dzielna zawiera 10 razy swój dzielnik, odpowiedająca cyfra żądanego ilorazu i następujące aż do ostatniej są 9.

Otrzymany tym sposobem iloraz 17,999 jest przybliżony na mniej niż 0,001 przez *niedostatek*; bo reszta, większa od ostatniego dzielnika, przewyższa summę błędów mnożenia skróconego.

220. Jako zastosowanie tego co poprzedza, znajdźmy iloraz liczby 28,1019 przez 2,8102, na mniej niż 0,01.

Mamy 28,1019 | 2,8102
| 9,99

Pierwsza cyfra ilorazu jest 9 i oznacza jedności. Co pokazuje że żądany iloraz powinien mieć 3 cyfry. Owoż, 2 może być ostatnim dzielnikiem, bo $2{,}8 > 1 + \frac{(0+1)\,(9+1)}{10}$; zatem 2,81 jest pierwszym dzielnikiem, a zaś pierwszą dzielną musi być 28,10. Ale ta dzielna zawiera 10 razy swój dzielnik; więc szukany iloraz składa się z samych cyfer 9, i jest 9,99 przez niedostatek.

220. Jako ćwiczenie, weźmy jeszcze następujący przykład. Podzielić 12184,515 przez 98,7 na mniej niż 0,01.

Pierwsza cyfra, 1 *sto*, żądanego ilorazu wskazuje że on powinien mieć *pięć* cyfer. Biorąc tedy liczbę 9 na ostatni dzielnik, trzeba mieć *pięć* cyfer w pierwszym dzielniku; a że ich tylko *trzy*, dopisujemy *dwa* zera, i wykonywamy dzielenie skrócone. Ale zaraz widzimy że, dopisać *dwa* zera w dzielniku albo wykonać *trzy* dzielenia zwyczajne i dwa skrócone, wychodzi na jedno. Uskuteczniając rachunek, znajdujemy

12184,515	98,700
2314	123,45
340 5	
44 4	
5 2	
7	

Aby wiedzieć jakie jest przybliżenie ilorazu, uważajmy że tylko dwie ostatnie jego cyfry sprawiają błąd mnożenia skróconego; to jest: cyfra 4 daje błąd 2,8 a cyfra 5 błąd 4,35.

Owoż, summa tych błędów czyni 7,15; co właśnie stanowi resztę. Więc otrzymany iloraz 123,45 jest zupełny.

221. Uwaga. Dwa podane sposoby wyznaczenia ostatniego dzielnika, nie są niezbędne, i następujący przykład dobrze to wyjaśnia.

Niech będzie do podzielenia 9187,0524 przez 10,234567, na mniej niż 0,01.

Pierwsza cyfra 8 żądanego ilorazu, wyrażająca *sta*, pokazuje że powinien mieć *pięć* cyfer. Oba sposoby (N. 211 i 214) wymagają liczby 102 na ostatni dzielnik, a przeto liczby 1023456 na pierwszy. Mimo to jednak, weźmy na pierwszy dzielnik liczbę 102345, która ma jedną tylko cyfrę *więcej niż szukany iloraz*, i wykonajmy dzielenie skrócone aż do przedostatniej cyfry ilorazu; a dopiero zobaczymy jaką trzeba zachować ostrożność, aby otrzymać ostatnią.

$$
\begin{array}{r|l}
9187{,}0524 & 10{,}234567 \\ \cline{2-2}
999\;45 & 897{,}65 \\
78\;39 & \\
6\;78 & \\
66 & \\
\underline{13{,}9} & \\
52{,}3 & \\
2 &
\end{array}
$$

Zatrzymując się na dzielniku 102, jesteśmy pewni że wszystkie cyfry ilorazu 897,6 są dokładne; bo reszta 66 jest oczywiście większa od summy błędów. Aby pójść dalej, obliczamy te błędy, i znajdujemy że ich summa jest mniejsza od $5{,}6+5{,}4+3{,}5+2{,}4=16{,}9$; ale większa od $4{,}8+4{,}5+2{,}8+1{,}8=13{,}9$. Różnica tych dwóch granic czyni 3. Więc, jeśli od reszty 66,2 odciągniemy 13,9 otrzymamy przybliżoną dzielnę 52,3 która przewyższa prawdziwą błędem mniejszym od 3 jednośc i odpowiedniego rzędu. Ztąd wynika że, biorąc 10 na ostatni dzielnik, znajdziemy ostatnią cyfrę 5 żądanego ilorazu. Więc, 897,65 jest wartością tego ilorazu przybliżoną na mniej niż 0,01.

Największa summa błędów mnożenia skróconego zdarza się gdy mnożna i mnożnik składają się z samych cyfer 9; wtedy każdy z tych błędów jest mniejszy od 9, ale większy od 8,1 jedności ostatniego zachowanego rzędu. Owoż, przypuszczając że iloraz ma 12 cyfer, summa błędów wpływających na iloraz będzie, w najgorszym razie, mniejsza od 99 a większa od 89,1. Różnica tych granic jest 9,9. Więc gdy żądany iloraz nie ma więcej nad 12 cyfer, można go otrzymać za pomocą dzielenia skróconego, biorąc tylko pierwszy dzielnik z jedną cyfrą więcej niż w ilorazie ; choćby nawet ostatni dzielnik był 10 a wszystkie inne cyfry dzielnika i ilorazu były 9. Ale wtedy, ma się rozumieć, trzeba wykonać dzielenie z ostrożnością którąśmy wyżej wskazali. Otoż dla czego powiedzieliśmy, w pierwszym przykładzie, że bierzemy *pierwszy dzielnik z jedną cyfrą więcej niż w szukanym ilorazie.*

Ta uwaga może służyć w dzieleniu liczb przybliżonych, jako zaraz zobaczymy ; ale w liczbach dokładnych, prościej jest wziąć pierwszy dzielnik przydłuższy, niż obliczać granicę wyższą i niższą błędów mnożenia skróconego.

222. Dzielenie skrócone stosuje się także do liczb przybliżonych.

Aby otrzymać iloraz dwóch liczb przybliżonych na mniej niż jedność ostatniego rzędu, *dosyć wziąć*, NA PIERWSZY DZIELNIK, *największą* DOKŁADNĄ *część dzielnika jaka się mieści w* DOKŁADNEJ *części dzielnej ; powiększyć ostatnią cyfrę dzielnej jednością, i wykonać dzielenie skrócone.*

Niech będzie do podzielenia liczba 3,141592 przez 2,718281, obie przybliżone na mniej niż jedność ostatniego rzędu, przez niedostatek albo przez zbytek.

Powiększamy jednością ostatnią cyfrę 2 dzielnej, i dzielimy 3,141593 przez 2,71828 ; co daje

$$\begin{array}{r|l} 3,141593 & 2,71828\dot{1} \\ \cline{2-2} 42331 & 1,1557 \\ 15149 & \\ 1559 & \\ 204 & \\ 15 & \end{array}$$

Summa błędów mnożenia skróconego jest mniejsza od $0,2+0,9+1,5+4,5+1,4=8,5$; a błąd dzielnej mniejszy od 0,2. Owoż liczba 15, mniejsza od reszty, przewyższa 8,7 : więc znaleziony iloraz 1,1557 jest przybliżony przez niedostatek na mniej niż 0,0001.

Możnaby korzystając z uwagi nº 221, otrzymać szóstą cyfrę ilorazu która jest 2, i nawet wiedzieć że iloraz 1,15572 jest przybliżony przez niedostatek.

223. Znaleźć odwrotność liczby 3,141592 przybliżonej na mniej niż 0,000001 przez niedostatek.

Ponieważ dzielnik jest przybliżony przez niedostatek, na mniej niż jedność ostatniego rzędu, ostatnia jego cyfra 2 jest dokładna; dzielimy więc 10000000 przez 3,141592, i mamy

$$\begin{array}{r|l} 10000000 & 3,141592 \\ \cline{2-2} 375224 & 0,318310 \\ 261065 & \\ 9745 & \\ 322 & \\ 8 & \end{array}$$

Znaleziony iloraz 0,318310 jest przybliżony na mniej niż $\frac{1}{10^6}$ przez zbytek.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

MIARY.

UKŁAD METRYCZNY MIAR.

224. Dla łatwiejszego porównania wielkości i prostszego ich obliczania, ułożono miary dziesiętne.

Jest pięć głównych miar czyli jedności do wymierzania wielkości, pospolicie używanych, to jest: 1° jedność *długości*, 2° jedność *powierzchni*, 3° jedność *objętości*, 4° jedność *ciężaru* czyli wagi, i 5° jedność *monety*.

MIARA DŁUGOŚCI.

225. Jedność długości nazwano *metrem*.

Metr jestto jedna *dziesięciomilionowa* część ćwierci południka ziemskiego, czyli jedna *dziesięciomilionowa* część odległości bieguna ziemskiego od równika. Metr jest fundamentalną jednością miar, z której się wszystkie inne wywodzą; dlatego układ miar dziesiętnych nazywa się metrycznym.

Do wyrażenia wielowników metra użyto wyrazów greckich *deka*, *hekto*, *kilo*, *mirya*, które znaczą odpowiednio, *dziesięć*, *sto*, *tysiąc*. *dziesięć tysięcy*. I tak, *dekametr* znaczy dziesięć metrów, *hektometr* sto metrów, *kilometr* tysiąc metrów, *miryametr* dziesięć tysięcy metrów długości.

Do wyrażenia podwielowników metra, wzięto wyrazy łacińskie *deci*, *centi*, *milli* które, położone przed wyrazem metr, mają oznaczać jedną *dziesiątą*, *setną*, *tysiączną* część metra. I tak, decymetr wyraża długość jednej dziesiątej metra; centymetr, długość jednej setnej metra, albo jedną dziesiątą decymetra; millimetr, długość jednej tysiącznej metra, albo też jedną dziesiątą centymetra.

226. Do mierzenia małych długości, używa się zwykle liniałka długości dwóch decymetrów, czyli *padwójnego decymetra.* Ten liniałek jest podzielony na centymetry i millimetry, tak że za jego pomocą można łatwo oszacować małą długość, na mniej niż $\frac{1}{2}$ millimetra błędu.

227. Długości drożne mierzą się zwykle *kilometrem*, a niekiedy i miryametrem.

Mila metryczna zawiera 4 kilometry czyli 4000 metrów.

Mila krajowa zawiera 5 kilometrów czyli 5000 metrów.

Mila morska, a takich mil idzie 20 na stopień, zawiera 5556 metrów.

MIARA POWIERZCHNI.

228. Zwykłą jednością powierzchni jest *metr kwadratowy*, to jest kwadrat mający jeden metr za bok.

Wielownikami metra kwadratowego są: *dekametr kwadratowy, hektometr kwadratowy, kilometr kwadratowy* a nawet i *miryametr kwadratowy*; to jest kwadraty których boki mają za długość: dekametr, hektometr, kilometr, miryametr.

A zaś podwielownikami metra kwadratowego są: *decymetr kwdratowy, centymetr kwadratowy, i millimetr kwadratowy.* Te jedności kwadratowe są kwadratami mającemi za bok: *decymetr, centymetr, i millimetr.*

Każda z tych jedności zawiera 100 razy poprzedzającą, zaczynając od najmniejszej. I tak, hektometr kwadratowy zawiera 100 dekametrów kwadratowych; a kilometr kwadratowy 100 hektometrów kwadratowych. Metr kwadratowy zawiera 100 decymetrów kwadratowych; a decymetr kwadratowy 100 centymetrow kwadratowych; etc.

Dla łatwiejszego pojęcia, weźmy naprzykład metr kwadratowy, i przypuśćmy jego podstawę podzieloną na 10 części równych. Jeśli na każdej z tych części, które są decymetrami, postawimy decymetr kwadratowy, utworzymy tym sposobem rzęd 10 decymetrów kwadratowych. Owoż, takich rzędów jest oczywiście 10 w metrze kwadratowym. Więc, metr kwadratowy zawiera 10×10 to jest 100 decymetrów kwadratowych.

To zrozumiawszy dobrze, nie trudno wyrazić decymetry kwadratowe, centymetry kwadratowe,.. w ułamkach dziesiętnych metra kwadratowego. I tak, jeśi chcemy powiedzieć 36 metrów kwadratowych i 154 centymetrów kwadratowych, piszemy $36^{mk},0154$.

Nawzajem, jeśli chcemy przeczytać liczbę dziesiętną metra kwadratowego, $10^{mk},2465$, mówimy 10 metrów kwadratowych, 24 decymetrów kwadratowych i 65 centymetrów kwadratowych; albo to wszystko razem, 102465 centymetrów kwadratowych.

Ale, gdyby dano do przeczytania liczbę $0^{mk},124$, powiedzielibyśmy że ona wyraża: zero metrów kwadratowych, 12 decymetrów kwadratowych i $\frac{4}{10}$ decymetra kwadratowego. Albo, dopisując zero, przeczytalibyśmy liczbę $0^{mk},1240$ mówiąc że znaczy 1240 centymetrów kwadratowych.

229. W miernictwie, jednością do wymierzania gruntów jest zwykle *dekametr kwadratowy* który nazwano *Arem*.

Ar, zawiera 100 metrów kwadratowych. Jedynym używanym wielownikiem ara jest *hektar*, to jest sto arów, albo hektometr kwadratowy; a jedynym podwielownikiem jest *centiar* to jest setna część ara.

Cała powierzchnia ziemi wynosi około 51 miliardów hektarów.

MIARA OBJĘTOŚCI.

230. Nazywa się *sześcianem* figura przestrzeni ograniczona sześcioma ścianami kwadratowemi. Kostka do grania przedstawia postać sześcianu.

Główną jednością objętości jest *metr sześcienny*, to jest sześcian mający jeden metr za bok.

Jednościami podrzędnemi są: *decymetr sześcienny*, to jest sześcian którego każda krawędź jest decymetrem, a przeto każda ściana decymetrem kwadratowym; *centymetr sześcienny*, *millimetr sześcienny*, i t. d.

Każda z tych jedności zawiera 1000 razy bezpośrednio mniejszą. I tak, centymetr sześcienny zawiera 1000 razy millimetr sześcienny, a zaś metr sześcienny zawiera 1000 razy decymetr sześcienny, etc.

Aby to łatwiej zrozumieć, weźmy naprzykład metr sześcienny. Wiemy że podstawą metra sześciennego jest 1 metr kwadratowy. Owoż, można rozłożyć tę podstawę na 100 decymetrów kwadratowych, i, stawiając na każdym z nich decymetr sześcienny, utworzyć tym sposobem warstwę 100 decymetrów sześciennych. A że takich warstew jest oczywiście 10 w metrze sześciennym, bo jego wysokość ma 10 decymetrów; więc metr sześcienny zawiera 10 razy 100 czyli 1000 metrów sześciennych

Niech będzie teraz dana liczba dziesiętna metra sześciennego

$$13579^{ms},2468$$

która wyzaża 13579 metrów sześciennych więcej 2468 dziesięciotysiącznych metra sześciennego. Aby ją przeczytać, dopisujemy dwa zera, i mamy

$$13579^{ms},246800$$

ta liczba wyraża 13579 metrów sześciennych, więcej 246 decymetrów sześciennych, więcej 800 centymetrów sześciennych. Można jeszcze powiedzieć że dana objętość zawiera 13 hektometrów sześciennych, więcej 579 metrów sześciennych, więcej 246 decymetrów sześciennych, więcej 800 centymetrów sześciennych.

Objętość ziemi, przechodzi 1000 miliardów kilometrów sześciennych.

231. Metr sześcienny nazywa się *sterem* gdy służy do mierzenia drzewa na budowę albo na opał. Od niedawnego czasu, we Francyi, drzewo na opał sprzedaje się zwykle na wagę.

Używa się także *podwójnego steru*, i *dekasteru* który czyni 10 sterów, a nawet i *pół dekasteru* wartającego 5 sterów.

232. Rzeczy ciekłe i sypkie mierzą się za pomocą naczynia walcowego które nazwano *litrem*.

Litr ma objętość jednego decymetra sześciennego.

Wielownikami litra są: *dekalitr* który zawiera 10 litrów, i *hektolitr* który obejmuje 100 litrów.

Podwielownikami litra są: *decylitr* wartający jedną dziesiątą litra, i *centylitr* wartający jedną setną litra.

Do mierzenia cieczy, litr i jego podwielowniki są to naczynia cynowe, kształtu walcowego, mające wysokość podwójną średnicy podstawy; a zaś do mierzenia rzeczy sypkich jako zboża, mąki, i t. p., litr i jego pochodne są naczynia drewniane, także kształtu walcowego, ale w których wysokość równa się średnicy podstawy. Każde z tych naczyń ma swoje podwójne, i swoją połowę.

MIARA CIĘŻARU CZYLI WAGA.

233. Jednością ciężaru jest *gram*. Jestto waga w próżni, jednego centymetra sześciennego wody dystylowanej, w temperaturze 4 stopni termometru stóstopniowego. W tej temperaturze woda ma największą gęstość, a tem samem największy ciężar, a więc najmniej prądów.

Wielownikami gramu są: *dekagram* który zawiera 10 gramów, *hektogram* wartający 100 gramów, i *kilogram* który ma 1000 gramów. Litr wody dystylowanej, największej gęstości, waży kilogram.

Nareszcie *centnar metryczny*, zawierający 100 kilogramów, i *beczka morska* która waży 1000 kilogramów, to jest tyle ile metr sześcienny wody.

Podwielownikami gramu są: *decygram* czyli dziesiąta część gramu, *centygram* czyli setna część gramu, i *milligram* czyli tysiączna część gramu. Te trzy ostatnie miary są w kształcie blaszek, używane szczególniej w aptekach i w gabinetach fizyki i chemii.

Każda z miar dziesiętnych wagi ma swoją podwójną i swoją połowę (*).

Ziemia waży 5 sextilionów 875 kwintilionów beczek morskich; a jej atmosfera, mająca 60 kilometrów wysokości, waży 5 kwatrilionów 263 trilionów beczek morskich.

MONETY.

234. Moneta czyli pieniądz, jest pospolicie złota, srebrna i bronzowa. Od niejakiego czasu w Belgii robią małą monetę nikielową.

Moneta srebrna robi się z alliażu czyli połączenia srebra i miedzi. W układzie dziesiętnym, ten alliaż monetowy składał się z 9 części srebra i jednej części miedzi, co do wagi. Ale niedawno temu, aby nadać więcej twardości monecie, i tym sposobem zaradzić prędkiemu jej zużyciu, postanowiono we Francyi, Italii, Belgii i Szwajcaryi, że alliaż srebrny będzie się składał 0,835 srebra i 0,165 miedzi.

Jednością monety francuskiej jest *frank*. Frank jestto alliaż srebra i miedzi ważący 5 gramów.

Podwielownikami franka są: *decym* czyli dziesiąta część franka, i *centym* czyli setna część franka.

(*) Ciężazy do wożenia towarów są żelazne albo miedziane. Te ciężary są troistego gatunku: *duże ciężary*, przechodzące kilogram; *srednie ciężary*, od kilogramu aż do gramu; i *małe ciężary*, zaczynające się od gramu.

Ciężary z lanego żelazu są: 50 kilogramów, 20 kilogr., 10 kilogr., 5 kilogr., 2 kilogr., 1 kilogr., 5 hektogram., 2 hektogr., 1 hektogr., 5 dekagramów. Razem 10 ciężarów.

Ciężary miedziane są: 20 kilogramów, 10 kilog., 5 kilog., 2 kilog., 1 kilog.; 2 hektogramy, 1 hektogram; 5 dekagramów, 2 dekagramy, 1 dekagram; 5 gramów, 2 gramy, 1 gram; 5 decygramów, 2 decygramy, 1 decygram; 5 centygramów, 2 centygramy, 1 centygram; 5 milligramów, 2 milligramy, 1 milligram. Razem 22 ciężarów miedzianych.

235. Jest *pięć* sztuk monety srebrnej, to jest: *frank* ważący 5 gramów, *dwa franki* ważące 10 gramów, *pięć franków* ważące 25 gamów; a następnie *pół franka* czyli 50 centymów ważące $2\frac{1}{2}$ gramów, i 20 *centymów* ważące 1 gram. 40 sztuk pięciofrankowych ważą 1 kilogram.

236. Moneta złota robi się z alliażu złota i miedzi w który wchodzi 0,9 złota a 0,1 miedzi, co do wagi.

Jest 5 sztuk monety złotej, to jest: 5 *frauków*, 10 *franków*, 20 *franków*, 50 *franków* i 100 *franków*. Sztuka 20 frankowa waży 6,4516 gramów.

237. Moneta zdawkowa robi się z bronzu który się składa, co do wagi, z 0,95 miedzi, z 0,04 cyny i z 0,01 zynku.

Jest cztery sztuki monety bronzowej, to jest: *centym* ważący gram, 2 *centymy* ważące 2 gramy, 5 *centymów* ważące 5 gramów, i 10 *centymów* ważące 10 gramów.

DAWNE MIARY.

238. Każdy kraj ma swoje miary, a niekiedy nawet prowincye jednego państwa mają swoje oddzielne miary, często z sobą niezgodne, i tylko zwyczajem uświęcone. Ta niejednostajność miar, wag i pieniędzy wielce utrudza stosunki społeczno-handlowe między narodami. Należy się spodziewać że kiedyś, postęp oświaty zaprowadzi wszędzie jednostajny układ dziesiętny miar, jako najdogodniejszy. Nim to jednak nastąpi, trzeba koniecznie znać, nietylko miary swojego kraju, ale jeszcze miary krajów sąsiednich. Powiemy naprzód kilka słów o dawnych miarach w ogólności.

Dawne miary, w znacznej większości krajów europejskich używane aż do dzisiaj, są zwykle *dwunastowe*, to jest są podwielownikami albo wielownikami liczby 12. I tak

I. *Jedność długości*. Główną jednością długości jest *sążeń*. Sążeń dzieli się na 6 *stóp*, stopa na 12 *cali*, cal 12 *linij*, a linia na 12 *puuktów*.

Do mierzenia sukna, tkanek i kramarskich towarów służy *łokieć*. Łokieć zawiera 2 stopy. (Dawny łokieć francuski zawierał 3 stopy, 7 cali, i 10 punktów).

Długości polne mierzą się prętem. *Pręt* ma 15 stóp, albo 10 *pręcików*, a pręcik ma 10 *ławek* czyli *cali mierniczych*.

Do mierzenia wielkich odległości służy 1° *mila* (których idzie 20 na stopień). 2° *mila geograficzna* (których idzie 15 na stopień).

II. *Jedność powierzchni*. Jednością powierzchni jest kwadrat mający za bok jedność długości; jako: *sążeń kwadratowy*, *stopa kwadratowa*, *cal kwadratowy*, etc. Zatem, sążeń kwadratowy zawiera 6×6 czyli 36 stóp kwadratowych; stopa kwadratowa obejmuje 12×12 czyli 144 linij kwadratowych; etc. Do mierzenia pola, używano *pręta kwadratowego*.

III. *Jedność objętości*. Jednością objętości jest sześcian mający za bok jedność długości; jako: *sążeń sześcienny*, *stopa sześcienna*, *cal sześcienny*... Sążeń sześcienny zawiera 6×6×6 czyli 216 stóp sześciennych; i t. d.

Do mierzenia rzeczy ciekłych i sypkich używano *kwarty*, która jest prawie równa litrowi.

Każdy kraj ma swoje, różnej wielkości naczynia, wymierzone kwartą.

IV. *Jedność wagi*. Jednością wagi jest *funt*. Funt dzieli się na 2 *grzywny*, albo na 16 *uncyj*; uncya ma 2 *łóty* albo 8 *drachm*; drachma ma 3 *skrupuły*, a skrupuł ma 24 *granów*, gran zawiera 5,5 *graników*.

Wielkie ciężary ważą się na *centnary*. Centnar zawiera 100 *funtów*, albo 4 *kamienie*.

V. *Jedność monety*. Każde państwo ma swoją jedność monety. I tak, we Francyi, Belgii, Szwajcaryi *frank*, w Italii *lira*, są jednością monety. W Polsce i Niemczech liczą na *złote*, w Anglii na *funty sterlingi*, w Prusach na *talary*, w Rossyi na *ruble*, w Turcyi na *piastry*, w Hiszpanii i Portugalii na *reale*, a w Stanach Zjednoczonych Ameryki na *dolary*; etc.

ZAMIANA DAWNYCH MIAR NA NOWE.

229. Aby wyznaczyć metr, zmierzono, z największą możebną dokładnością, część południka ziemskiego, i za pomocą rachunku, znaleziono że długość ćwierci tego południka wynosi 5130740 sążni. A że powiedziano że metr, na mocy ustawy dziesiętnej, ma być jedną *dziesięciomilionową* częścią ćwierci południka ziemskiego, więc 10000000 metrów wartają 5130740 sążni.

Ztąd wynika że długość metra jest $0^{\text{sążni}},5130740$.

Chcąc wyrazić wartość metra w stopach, trzeba pomnożyć ułamek sążnia przez 6; co da na długość metra $3^{\text{stopy}},078444$ przez niedostatek. Zamieniwszy teraz ułamek stopy na linie, to jest pomnożywszy go przez 12×12 czyli 144, znajdziemy że długość metra jest 3^{stopy}, $11^{\text{linij}},296$ z błędem mniejszym od 0,001 linii.

230. Jeśli zaś chcemy wyrazić długość sążnia w metrach, dosyć podzielić 10000000 przez 5130740. Wykonawszy dzielenie aż do siódmej dziesiętnej, którą się opuści, znajdziemy że długość *sążnia* jest $1^{\text{m}},949036$.

Dzieląc tę długość przez 6, otrzymamy wartość stopy; a dzieląc tę ostatnią przez 12, będziemy mieli wartość cala w metrach; etc. Znajdujemy tym sposobem że

$$\begin{array}{ll} \text{długość stopy jest} & 0^{\text{m}},324839. \\ \text{długość cala} & 0^{\text{m}},027070. \\ \text{długość linii} & 0^{\text{m}},002256. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}\text{ przez zbytek}$$

Za pomocą tych wyników, nie będzie trudno odnieść do metra długość daną w sążniach, stopach, calach i liniach. I tak, niech będzie do wyrażenia w metrach, długość mająca 369 sążni, 4 stopy, 11 cali, 10 linij. Dosyć jest pomnożyć wartość sążnia w metrach przez daną liczbę sążni 369, wartość stopy przez 4, wartość cala przez 11, a wartość linii przez 10; i dodać te wyniki. Wykonany rachunek pokazuje, że

369 sążni czynią.	$719^{m},194284$
4 stopy	1 ,299356
10 cali	0 ,270700
1 cal.	0 ,027070
10 linij	0 ,022550

Więc 369 sążni 4 stopy 11 cali 10 linij czynią $720^{m},813960$

W otrzymanym wyniku są błędy pochodzące z mnożenia wartości przybliżonych. Summa tych błędów jest oczywiście mniejsza od $369+4+11+10$ czyli od 394 jedności *szóstego* rzędu dziesiętnego. Co pokazuje że prawdziwa wartość wyniku jest większa od $720^{m},813960$, ale mniejsza od $720^{m},814354$. Jako widzimy, różnica dwóch liczb, między któremi zawiera się szukana, jest mniejsza od 0,001. Więc

369 sążni 4 stopy 11 cali 10 linij czynią $720^{m},814$.

na mniej niż millimetr.

231. Uwaga. Takie rachunki zamiany jednych miar na drugie odbywają się zwykle ze pomocą tablic. Jako przykład, weźmy następującą która zawiera wartości sążni, stóp, cali, linij, od 1 aż do 9.

LICZBY.	SĄŻNIE W METRACH.	STOPY W METRACH.	CALE W METRACH.	LINIE W METRACH.
1	1,949036	0,324839	0,027069	0,002255
2	3,898072	0,649678	0,054139	0,004511
3	5,847108	0,974518	0,081209	0,006767
4	7,796145	1,299357	0,108279	0,009023
5	9,745181	1,624196	0,135349	0,011279
6	11,694217	1,949036	0,162419	0,013534
7	13,643254	2,273875	0,189489	0,015790
8	15,592290	2,598715	0,216559	0,018046
9	17,541326	2,923554	0,243629	0,020302

Ta tablica tworzy się prostem dodawaniem liczb, tak jako tablica mnożenia..., żeby mieć wieloczyny z dostatecznem przybliżeniem, trzeba wyznaczyć liczby pierwszej linii z jedną dziesiętną więcej; i potem, w otrzymanych wieloczynach, opuścić ostatnią dziesiętnę. Co też właśnie zrobiono.

Dla pokazania jak dalece użycie powyższej tablicy ułatwia rachunki, zastosujmy ją do poprzedzającego przykładu.

Niech będzie tedy długość 369 sążni 4 stopy 11 cali 10 linij, którą chcemy wyrazić w metrach.

Uważamy naprzód że wartość 300 sążni w metrach otrzymuje się mnożąc tylko przez 100 wartość 3 metrów wpisaną w tablicy; tak samo otrzymuje się w metrach wartość 60 sążni, mnożąc przez 10 wartość 6 sążni tablicy; i t. d.

300 sążni	czynią	$584^m,7108$
60 sążni	—	$116\ ,9421$
9 sążni	—	$17\ ,5413$
4 stopy	—	$1\ ,2993$
10 cali	—	$0\ ,2706$
1 cal	—	$0\ ,0270$
10 linij	—	$0\ ,0225$
	Summa	$720^m,8136$

Błąd każdego z siedmiu dodanych wieloczynów jest mniejszy od $0^m,0001$; zatem summa wszystkich błędów jest mniejsza od $0^m,0007$, a tem bardziej mniejszy od $0^m,001$; więc, odtrącając ostatnią dziesiętnę wieloczynu, ale za to powiększając jednością cyfrę tysiącznych, będziemy mieli wartość szukaną $720^m,814$ na mniej niż 0,001. Co się właśnie zgadza z wartością dopiero co otrzymaną innym sposobem.

TERAŹNIEJSZE MIARY KRAJOWE.

232. Miary długości, zaprowadzone w roku 1849, mają za podstawę *sążeń*. Ten sążeń zawiera 7 stóp angielskich, i równa się 2,13356157 metrom francuskim.

Sążeń w handlu dzieli się na 3 *arszyny*, arszyn na 16 *werszków*.

Sążeń w inżenierskich robotach dzieli się na 7 stóp, stopa 12 cali, cal na 10 linij.

Miernicy używają łańcucha którego długość ma 10 sążni, a każdy sążeń złożony z 7 ogniw długich na stopę.

Dawny łokieć zawiera 2 stopy, i dzieli się na 4 *ćwiercie* a ćwierć na 6 cali.

Odległości drożne rachują się na *wiorsty*.

Wiorsta zawiera 500 sążni; a *mila* 7 wiorst.

233. Miary powierzchni. *Jednością powierzchni* jest *sążeń kwadratowy* który zawiera $7^2=49$ stóp kwadratowych. *Stopa kwadratowa* zawiera cali kwadratowych $12^2=144$. *Cal kwadratowy* zawiera linij kwadratowych $10^2=100$.

W miernictwie *jednością powierzchni* jest *diesiatyna*, zawierająca 2400 sążni kwadratowych; jestto *prostokąt* mający 80 sążni długości a 30 sążni szerokości. Prócz tego używają jeszcze *diesiatyn gospodarskich* które mają 80 sążni długości na 40 sążni szerokości, zatem zawierają 3200 sążni kwadratowych.

Łokieć kwadratowy zawiera 4 stopy kwadratowe.

Włóka zawiera 30 morgów. *Morg* ma 300 prętów kwadratowych. *Pręt kwadratowy* równa się 18,6624 metrom kwadratowym.

334. Miary objętości. *Jednością objętości* jest *sążeń sześcienny*, który zawiera 7^3 czyli 343 stóp sześciennych, i równa się 9,71215347 metrom sześciennym.

Sążeń drzewa nazywa się pospolicie *sagiem*.

Jednością objętości ciał *sypkich* jest *czetwert*, a ciał *ciekłych wiadro*.

Czetwert zawiera 8 *czetwieryków* a czetwieryk 8 *garncy*.

Garniec dzieli się na 4 *kwarty*, kwarta na 4 *kwaterki*, a kwaterka na 2 *półkwaterki*.

Korzec zawiera 4 ćwiercie czyli 32 garnce.

Laszt handlowy do mierzenia zboża ma 30 korcy albo 12 czetwerti.

Wiadro zawiera 10 *krużek* a krużka 10 *czarek*.

Czetwiert obejmuje cali sześciennych 12809,76; a zaś wiadro ma ich 750,57.

335. Wagi. Jednością wagi, jest *funt* który zawiera 96 *zołotników* a zołotnik 96 *doli*. W handlu funt dzieli się na 16 uncyj czyli 32 łóty, a uncya na 8 drachm.

Pud ma 40 funtów, a *berkowiec* 10 pudów.

Laszt jako waga okrętowa, obejmuje 12 berkowców.

Funt aptekarski dzieli się na 12 *uncyj*, uncya na 8 *drachm*, drachma na 3 *skrupuły*, a skrupuł na 20 *granów*.

Teraźniejszy funt handlowy zawiera gramów francuskich 408,6125501; a zaś funt aptekarski tylko 358,511 gramów.

W niektórych okolicach ważą na *oka*, oko ma 3 funty.

336. Pieniądze. W wielu krajach dzielono *grzywnę* czyli pół funta czystego złota, na 24 części zwane *karatami*, a każdy karat na 12 granów. Jeśli np. do 20 karatów złota domieszano 4 karaty miedzi, wtedy to mieszane złoto nazywa się 20sto karatowe czyli 20tej *próby*.

Grzywnę czystego srebra dzielą na 16 łótów, a każdy łót na 18 granów. Jeśli do 12 łótów srebra domieszano 4 łóty miedzi, wtedy to mieszane srebro jest 12tej *próby*.

We Francyi próba złota i srebra rachuje się na 1000 gramów; i tak, np. próba 850 znaczy że na 1000 gramach mieszanego złota albo srebra jest 850 gramów czystego metalu, a 150 gramów miedzi.

W państwie rossyjskiem próba drogich metali rachuje się do 96 zołotników, które znowu się dzielą na 96 doli: i tak, np. próba 80 znaczy że na 96 zołotnikach mieszanego złota albo srebra jest 80 zołotników czystego metalu, a reszta 16 zołotników miedzi.

Stopa mennicza oznacza ile z jedności wagi, np. z grzywny czystego złota albo srebra, wybito sztuk monety.

Jednością pieniędzy w państwie rossyjskiem jest *rubel*, zawierający 100 kopiejek.

Z funta srebra (czystego) wybija się *rubli* $22\frac{34}{45}$; a z 96 zołotników, $22\frac{8}{15}$. Próba monety srebrnej jest $83\frac{1}{3}$.

Z funta złota (czystego), wybija się *półimperiałów* $68\frac{4}{15}$ próby 88.

Pieniądze w obiegu są następujące:

Złote, półimperiały wartające 5 rubli.

Srebrne, ruble, połtynniki (półruble), czetwertaki (25 kopiejki), dwugrywienniki (20 kopiejek), grywienniki (10 kopiejek), piątaki (5 kopiejek).

Krążą jeszcze dziesięciozłotówki, pięciozłotówki, dwuzłotówki, i złotówki (15 kopiejek).

Papierowe, bilety 100 rublowe, 50 rublowe, 25 rublowe, 10 rublowe, 5 rublowe i 3 rublowe. Nadto są jeszcze banknoty po 10 rubli, po 3 ruble i po rublu.

Bilony, dziesięciogroszówki i pięciogroszówki.

Miedziane, 5, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ kopiejki; trojaki i grosze.

Rachują niekiedy na *ruble assygnacyjne.* Rubel srebrem wart 3,50 rubli assygnacyjnych.

Rachowano także na talary po 6 złotych, i na *talary bite* po 8 złotych; na *dukaty złotem* po 20 złotych, i na *dukaty srebrem* po 18 złotych, chociaż te ostatnie nigdy bite nie były.

JEDNOŚCI CZASU.

Wiadomo że ziemia obraca się około swej osi i zarazem około słońca.

Czas w którym ziemia uskutecznia zupełny obrot około swej osi nazywa się *dniem gwiazdowym.*

Czas upłyniony między dwoma, po sobie idącemi, przejściami południka ziemskiego przez środek słońca nazywa się *dniem słonecznym,* albo *dniem prawdziwym.*

Dzień słoneczny jest większy od dnia gwiazdowego prawie o 4 minut.

Dnie gwiazdowe są równe, a zaś dnie słoneczne nie są ściśle sobie równe. Ale średnia wielkiej liczby dni słonecznych jest ilością stałą, którą nazwano *dniem średnim* albo *dniem cywilnym*; i ten właśnie dzień bierze się za jedność czasu w stosunkach społecznych.

Dzień (średni) dzieli się na 24 godzin, godzina na 60 minut a minuta na 60 sekund. Astronomowie dzielą jeszcze sekundę na 60 tercyj.

Aby wyrazić czas złożony z 7 dni 12 godzin 36 minut i 10 sekund, pisze się $7^{d}\ 12^{g}\ 36^{m}\ 10^{s}$.

Sekunda jest zwykłą jednością czasu w Astronomii, Fizyce i Mechanice rozumowej. W życiu potocznem tą jednością jest godzina.

238. Czas w którym ziemia uskutecznia zupełny obrot około słońca nazywa się *rokiem*.

Rok nazywa się *zwrotnikowym* gdy wyraża przedział czasu między dwoma, po sobie idącemi, powrotami słońca do tego samego punktu porównania nocy ze dniem.

Rok zwrotnikowy zawiera $365^{\text{dni słonecznych}},242256$ albo $366^{\text{d. gw.}},242217$; to jest ma 365 dni słon. śred. 5 god. 48 m. $50^{s},918$.

Egipcyanie liczyli *rok cywilny* naprzód 360 dni, a potem 365 dni. Ten ostatni rok jeszcze jest krótszy od zwrotnikowego prawie o $\frac{1}{4}$ dnia. *Juliusz Cezar*, wsparty radą *Sosigenesa* matematyka Alexandryjskiego, reformując rok egipski, postanowił że rok *cywilny* zwyczajny będzie się składał z 365 dni: ale, *co cztery* lata, rok będzie zawierał 366 dni, i w takim roku, który nazwano *przestępnym*, miesiąc luty będzie miał 29 dni.

Zbór *nicejski*, w roku 325, przyjął kalendarz juliański, i uważając że, w tym roku, porównanie nocy ze dniem przypada 21 marca, uchwalił że rokiem przestępnym będzie ten którego data jest podzielna przez 4; jako 328... 1868.

Reforma juliańska daje rok cywilny za długi; tak że, od zboru nicejskiego do roku 1582, błąd dochodził już blisko 10 dni; i porównanie nocy ze dniem wiosenne przypadało 11 marca. Aby temu złemu zaradzić, papież *Grzegorz XIII*, z poradą uczonego *Lilio* z Kalabryi, wyrzucił 10 dni z roku 1582, i rozkazał że, nazajutrz 4 października będzie, nie 5 ale 15 października. Chcąc ustalić zgodność roku cywilnego z prawdziwym, postanowił że stulecia których liczba, po odtrąceniu zer, jest podzielna przez 4, zostaną latami przestępnemi, a zaś inne będą latami zwyczajnemi. I tak, 1600 był rokiem przestępnym, a zaś 1700, 1800 latami zwyczajnemi.

Reforma gregoryańska nie rozwiązuje zagadnienia zupełnie, bo jeszcze zostawia rok cywilny za długi, ale już tak mało że dopiero w roku 4000 trzeba będzie odrzucić dzień jeden.

Całe chrześciaństwo, wyjąwszy obrządku greckiego, przyjęło reformę gregoryańską. Dlatego też chrześcianie trzymający się jeszcze kalendarza juliańskiego są dziś opóźnieni o dni 12.

239. Jako zastosowanie, przerobimy teraz cztery działania z różnemi podziałami czasu.

1° *Dodać przedziały czasu następujące*: 12 *d*. 20 *g*. 30 *m*. 40 *s*., 10 *d*. 23 *g*. 55 *m*. 25 *s*., 21 *g*. 58 *m*. 59 *s*.

Piszemy, jako zwykle, te liczby jedne pod drugiemi, i mamy

	12^d	20^g	30^m	40^s
	10	23	55	25
		21	58	59
Summa	24^d	18^g	25^m	4^s

Dodając naprzód sekundy, znajdujemy summę 124 s. która czyni 2 m. i 4 s. Piszemy 4 s. pod sekundami, a zaś 2 m. dodajemy do rzędu minut. Summa minut wynosi 145 m., co daje 2 g. i 25 m. Kładziemy 25 m. w rzędzie minut, a zaś 2 g. dodajemy do rzędu godzin. Zebrane godziny czynią summę 66 g. czyli 2 d. i 18 g. Piszemy 18 godzin w ich rzędzie, a zaś 2 d. dodajemy do rzędu dni, które czynią razem summę 24 d.

Co usprawiedliwia powyżej znaleziony wynik.

2° *Odciągnąć* 27 *d.* 20 *g.* 15 *m.* 47 *s. od* 48 *d.* 16 *g.* 26 *s.*

$$\begin{array}{lrrrr} \text{Mamy} & 48^d & 16^g & 0^m & 26^s \\ & 27 & 20 & 15 & 47 \\ \hline & 20^d & 19^g & 44^m & 39^s \end{array}$$

Zaczynamy odciąganie, jako zwykle, od najniższych jedności. Ale zaraz widzimy że 47 s. od 26 s. odciągnąć niemożna. Więc dodajemy 1 m. czyli 60 s. do 26 s., co daje 86 s; od tej summy odciągamy 47 s., i znajdujemy 39 s. które piszemy pod sekundami. Ale teraz, aby szukanej reszty nie zepsuć, dodajemy 1 m. do 15 m., i powinniśmy odciągnąć 16 m. od minut liczby wyższej; a że ona nie zawiera minut, dodajemy jej 1 g. czyli 60 m., od których odciągamy 16 m., i otrzymaną resztę 44 m. piszemy pod minutami, a zaś dodajemy 1 g. do 20 g. liczby niższej. Tu znowu, aby odciąganie zrobić możebnem, dodajemy 1 d. czyli 24 g. do 16 g., co daje 40 g. Od tych 40 g. odciągamy 21 g., i znalezioną resztę 19 g. kładziemy pod godzinami; ale dodajemy 1 d. do 27 d. i odciągnąwszy 28 d. od 48 d., otrzymujemy nakoniec 20 d. To wszystko daje żądaną resztę 20 d. 19 g. 44 m. 39 s.

3° *Pomnożyć liczbę* 15 *d.* 20 *g.* 15 *s. przez* 9.

$$\begin{array}{lrrrr} \text{Mamy} & 15^d & 20^g & & 15^s \\ & & & & 9 \\ \hline & 142^d & 12^g & 2^m & 15^s \end{array}$$

Wieloczyn $15^s \times 9 = 135^s$ czyni 2 m. 15 s. piszemy 15 s. i 2 m. w odpowiednych rzędach. Potem mnożymy 20 g. przez 9, co daje 180 g. Ta liczba godzin czyni 7 d. i 12 g. piszemy tylko 12 g. w rzędzie godzin, a zaś 7 d. dodajemy do wieloczynu $15^d \times 9 = 135^d$, co razem daje 142^d. Szukany wieloczyn jest 142 d. 12 g. 2 m. 15 s.

4° *Podzielić liczbę* 77 *d.* 18 *g.* 40 *m. przez* 12.

Oczywiście dosyć podzielić przez 12 każdą część danej summy.

Oto wzór rachunku.

$$
\begin{array}{llll|l}
77^d & 18^g & 40^m & 56^s & 12 \\
\cline{5-5}
5\times24\ldots & \underline{120^g} & & & 6^d \quad 11^g \quad 33^m \quad 24\tfrac{2}{3}^s \\
 & 138 & & & \\
 & 18 & & & \\
 & 6\times60\ldots & \underline{360^m} & & \\
 & & 400 & & \\
 & & 40 & & \\
 & & 4\times60\ldots & \underline{240^s} & \\
 & & & 296 & \\
 & & & 56 & \\
 & & & 8 & \\
\end{array}
$$

Dzielimy naprzód 77 d. przez 12, co daje iloraz 6 d. i resztę 5 d. Tę resztę 5 d. zamieniamy na godziny, i mamy $5^g\times24=120$ g.; dodajemy ten wieloczyn do 18 g., i summę 138 g. dzielimy przez 12. Znajdujemy iloraz 11 g. i resztę 6 g. Te 6 g. zamieniamy na minuty i dodajemy do 40 m., co czyni 400 m. Dzielimy znowu 400 m. przez 12; otrzymujemy iloraz 33 m., i resztę 4 m. Zamieniamy te 4 m. na 240 s. które, dodane do 56 s. dzielnej, czynią summę 296; nakoniec ta summa, podzielona przez 12, daje iloraz 24 s. i resztę 2 s. Więc szukany iloraz jest 6 d. 11 g. 33 m. $24\frac{2}{3}$ s.

Uwaga. Gdyby chciano pomnożyć ilość 10 d. 5 g. 2 m. przez $\frac{3}{4}$, dosyć byłoby pomnożyć tę ilość naprzód przez 3, a potem otrzymany wieloczyn podzielić przez 4.

Gdyby zaś chciano podzielić tę ilość przez $\frac{3}{4}$, wtedy dosyć jest pomnożyć ją przez ułamek przewrócony $\frac{4}{3}$.

5° *Podzielić 21 d. 16 g. przez 7 d. 9 g. 30 m.*

Aby otrzymać żądany iloraz, dosyć wyrazić dzielnę i dzielnik liczbami najmniejszej jedności, to jest w minutach, i wykonać dzielenie; co nie przedstawia żadnej trudności. Jakoż, dzień ma 24 godzin; zatem 21 dni czynią $24^g\times21=504$ g.; dodając do tego 16 g., otrzymujemy 520 g. : a że 1 g. zawiera 60 m., więc 520 g. wartają $520^m\times60=31200$ m. Tak samo, 7 d. 9 g. 30 m. wartają 10650 m. Dzielimy teraz 31200 m. przez 10650 m. i znajdujemy iloraz $\frac{31200}{10650}=\frac{208}{71}$ albo $2\frac{66}{71}$.

ZAGADN. LXVIII. *W pewnej drukarni machina drukująca, pracując 5 d. 8 g. 30 m., zarobiła 40 rubli. Ileż ta machina zarobi za 14 d. 6 g.? licząc 10 godzin na dzień roboczy.*

Wyraźmy wszystkie liczby w dniach. Uważając że, w danem zagadnieniu, dzień roboczy ma 10 godzin, widzimy zaraz że 8 g. wyrażają się przez $\frac{8}{10}$ czyli przez $\frac{4}{5}$ dnia, a zaś 30 m. czyli $\frac{1}{2}$ g., przez $\frac{1}{20}$ dnia. Zatem 5 d. 8 g. 30 m. wartają $(5+\frac{4}{5}+\frac{1}{20})\,1^d=\frac{117}{20}$ dnia. Tak samo, 14 d. 6 g. wartają $(14+\frac{3}{5})\,1^d=\frac{73}{5}$ dnia roboczego.

Teraz mówimy: ponieważ machina zarabia 40 rub. za $\frac{117}{20}$ dni, zatem na dzień zarabia $40^r\times\frac{20}{117}$; a więc za $\frac{73}{5}$ dni zarobi

$$40^r\times\frac{20}{117}\times\frac{73}{5}=\frac{40^r\times4\times73}{117},\text{ albo }99^r{,}829.$$

to jest, za 14 d. 6 g., ta machina zarobi 99 rubli i prawie 83 kopiejek.

CWICZENIA.

I. Litr merkuryuszu waży 13 kilogramów 598 gramów, centymetr sześcienny żelaza waży 7 gramów 788 milligramów. Jakim ułamkiem swej objętości kawałek żelaza, pływający po merkuryuszu, zanurzy się w tym płynie? wiedząc że wszelkie ciało zanurzone traci ze swego ciężaru tyle ile waży płyn pzzez nie wypchnięty?

II. Wiedząc że 1 decymetr sześcienny złota waży $19{,}^{\text{kilog}}26$, a 1 kilogram złota kosztuje 3100 franków; pytanie ile jest centymetrów sześciennych w sztabie złotej wartającej 29853 franki?

III. Litr powietrza waży $1{,}^{\text{gr}}293187$ a litr węgla ziemnego waży $1{,}^{\text{k}}33$. Jakiż jest ciężar powietrza wypchniętego przez $23{,}^{\text{kil}}48$ węgla ziemnego?

IV. Znaleziono że cała powierzchnia komórek kawałka węgla drewnianego, ważącego $0{,}^{\text{gr}}9565$, jest około 8 metrów kwadratowych. Jakaż jest cała powierzchnia komórek takiego węgla, ważącego 1 hektogram 2 dekagramy 5 gramów i pół?

V. SIRIUS, najaśniejsza ze wszystkich gwiazd naszego półsferza, jest odległy od ziemi na 52 trylionów 174 bilionów mil. Wiedząc że światło przebiega 77000 mil na sekundę, w jakim czasie światło przychodzi od Siriusa do ziemi? ODPOWIEDŹ. We 21 lat 172 dni.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

RACHUNEK LICZB WIELORAKICH.

239. Liczbami *wielorakiemi* nazywają się liczby które wyrażają różne gatunki jedności, zależące jedne od drugich wedle pewnej ustawy, nie jednostajnej dla wszystkich; jako: 10 funtów, 12 uncyj; 24 talary, 5 złotych, 20 groszy; 15 sążni, 4 stopy, 11 linij; etc.

Wyłożymy w tym rożdziale rachunek z liczbami wielorakiemi.

DODAWANIE.

240. *Pewien kupiec zapłacił za jedne towary* 125 *tal.* 5 *zł.* 15 *gr., za drugie* 100 *tal.* 4 *zł.* 25 *gr., za trzecie* 280 *tal.* 3 *zł.* 10 *gr; dał woźnicy za przywóz* 13 *tal.* 2 *zł.* 20 *gr. Ileż wydał pieniędzy?*

Aby znaleźć żądaną summę, dosyć jest napisać dane liczby jedne pod drugiemi, tak żeby jedności tego samego gatunku były w tej samej kolumnie; potem dodać do siebie liczby każdej kolumny, zaczynając od najniższych jedności; i, jeśli summa jednej kolumny zawiera jedności rzędu wyższego, zatrzymać te jedności do kolumny ich rzędu, a napisać pozostałe w odpowiedniej kolumnie.

Oto wzór działania

	125	talarów	5	złotych	15	groszy
	100		4		25	
	280		3		10	
	13		2		20	
Summa	520	talarów	4	złote	10	groszy.

Dodając naprzód grosze, znajduję 70 gr. które wartają 2 zł. 10 gr. Piszę 10 gr. w kolumnie groszy, a zatrzymuję 2 zł. Te 2 zł. dołączone do kolumny złotych, dają summę 16 zł. czyli 2 tal. 4 zł. Piszę 4 zł. w ich kolumnie, a dodaję 2 tal. do kolumny talarów, co czyni 520 tal.

Więc kupiec zapłacił summę 520 tal. 4 zł. 10 gr.

Takim samym sposobem wykonywa się następujące dodawanie.

	40	czetwierti	7	czetwieryk	4	garncy
	12		6		5	
	25		4		3	
Summa	69	czetwierti	2	czetwieryk	4	garncy.

ODCIĄGANIE.

241. *Jedna paka towarów waży* 2 *berkowce* 9 *pudów* 25 *funtów, a druga* 4 *berkowce* 7 *pudów* 20 *funtów. O ileż druga jest cięższa od pierwszej?*

Aby odpowiedzieć na pytanie, trzeba odciągnąć pierwszą liczbę od drugiej. Co się uskutecznia pisząc te liczby, jedna pod drugą, tak aby jedności tego samego gatunku stały w jednej kolumnie; poczem wykonywa się odciąganie zaczynając od *najmniejszych* jedności, jako wzór pokazuje.

	4	berkowce	7	pudów	20	funtów
	2		9		25	
Różnica	1	berkowiec	7	pudów	35	funtów.

Dla odciągania 25 funt., do liczby wyższej 20 funt. dodaję 1 pud czyli 40 funt., co czyni summę 60 funt.; odciągam 25 funt. od 60 funt. i resztę 35 funt. piszę w kolumnie funtów, a zatrzymuję 1 pud. Po czem, dodaję zatrzymkę 1 pud do 9 pudów, i mam do odciągania 10 pud. od 7 pud.; a że to niemożebne, dodaję znowu 1 berk., czyli 10 pud., do 7 pud. i od summy 17 pud. odciągam 10 pud.; co daje resztę 7 pud. którą piszę pod pudami, a zatrzymuję 1 berk. Nakoniec mówię: 1 a 2, 3; od 4, 1. Piszę resztę 1 berk., pod berkowcami, i działanie skończone. Więc, druga paka waży 1 berk. 7 pud. 35 funt. więcej niż pierwsza.

MNOŻENIE.

242. Dwa są główne przypadki mnożenia liczb wielorakich.

1° *Mnożenie liczby wielorakiej przez niewieloraką.*

Weźmy przykład. *Łokieć pewnej materyi kosztuje 4 tal. 5 zł. 14 gr.; ile kosztują 7 łokci?*

Oczywiście 7 łokci kosztują 7 razy cenę jednego łokcia, to jest 7 razy 4 tal. 5 zł. 14 gr. Aby otrzymać wieloczyn, dosyć pomnożyć przez 7 każdy gatunek jedności, zaczynając od *najniższych,* i zamieniając jedności jednego rzędu na następujący. Co daje

	4 tal. 5 zł. 14 gr.
	7
Wieloczyn	34 tal. 2 zł. 8 gr.

Mnożąc 14 gr. przez 7, otrzymuję 98 gr; co czyni 3 zł. 8 gr. Piszę 8 gr., a zatrzymuję 3 zł. Po czem mówię: 7 razy 5, 35; a 3 to czyni 38 zł. czyli 6 tal. 2 zł. Piszę 2 zł., a zatrzymuję 6 tal. Nakoniec 7 razy 4 tal., 28 tal.; a 6 tal. to 34 tal. Piszę 34 tal., i rachunek skończony. Więc 7 łokci kosztują 34 tal. 2 zł. 8 gr.

243. Łatwo pojmujemy że takie mnożenie liczby wielorakiej, aczkolwiek zawsze możebne, staje się tem mozolniejsze im mnożnik większy. Dlatego właśnie dobrze jest umieć, tak zwaną *metodę mnożenia liczb wielorakich przez części podwielowne,* która zależy na tem że się rozkłada liczby różnych nazwisk *na części podwielowne jedności rzędu bezpośrednio wyższego, to jest na ich dzielniki.* Rachunek wykonywa się następującym sposobem.

Niech będzie do mnożenia 12 *tal.* 5 *zł.* 24 *gr. przez* 347.

Aby otrzymać wieloczyn, dosyć pomnożyć każdą część mnożnej przez 347, zaczynając od *najwyższych* jedności, jako wzór pokazuje.

		12 tal.	5 zł.	24 gr.
		347		
		4164 tal.		
Wieloczyn	3 zł. przez 347	173	3 zł.	
	2 zł.	115	4	
	20 gr.	38	3	10 gr.
	4 gr.	7	4	8
		4499 tal.	2 zł.	18 gr.

Mnożymy naprzód 12 tal. przez 347 i otrzymujemy 4164 tal. Potem rozkładamy 5 zł. na *części podwielowne* talara, to jest na 3 zł. + 2 zł. Owoż, 3 zł. są *połową* talara, a zaś 2 zł. *jedną trzecią* talara; więc mnożyć 5 zł. przez 347 czyli mnożyć 3 zł. + 2 zł. przez 347, jest to samo co wziąć *połowę* i *jedną trzecią* z 347 tal. Widzimy łatwo że połowa z 347 tal. jest 173 tal. 3 zł., a zaś jedna trzecia z 347 tal. daje 115 tal. 4 zł. Piszemy te liczby w odpowiednych kolumnach. Po czem, aby pomnożyć 24 gr. przez 347, rozkładamy 24 gr. na 20 gr. i 4 gr.; dlatego że 20 gr. są $\frac{2}{3}$ złotego, czyli *trzecią częścią* 2 zł. których znamy już wieloczyn, a zaś 4 gr. są *piątą częścią* 20 gr. Biorąc trzecią część wieloczynu 2 zł. przez 347, to jest trzecią część z 115 tal. 4 zł., mamy 38 tal. 3 zł. 10 gr.; zatem następnie piąta część wieloczynu 20 gr. przez 347 jest 7 tal. 4 zł. 8 gr. Dodawszy te wszystkie cząstkowe wieloczyny, znajdujemy żądany wieloczyn 4499 tal. 2 zł. 18 gr.

Uwaga. Samo z siebie rozumie się że w mnożeniu małych liczb ten sposób nie jest najlepszy.

2° *Mnożenie liczby jakiejkolwiek przez wieloraką.*

Niech będzie następujący przykład. *Centnar herbaty, dobrego gatunku, wart tyle ile* 111 *korcy* 28 *garncy żyta; ileżby, za* 4 *centnary* 37 *funtów* 6 *drachm tej herbaty, można dostać żyta?*

Aby znaleźć ilość żyta, dosyć oczywiście pomnożyć wartość centnara herbaty, to jest 111 kor. 28 gar., naprzód przez 4 (centnary), potem przez $\frac{37}{100}$ (37 funtów); następnie, wyznaczywszy wartość funta herbaty, pomnożyć ją przez $\frac{6}{128}$ (6 drachm); i nakoniec dodać te cząstkowe wieloczyny. Ale rachunek wykonywa się daleko prościej, za pomocą mnożenia przez części podwielowne, jako wzór pokazuje.

		111 kor.	28 gar.
		4 cent. 37 funt.	6 drachm.
Wieloczyn przez	4 cent.	447 kor.	16 gar.
	25 funt.	27	31
	10	11	6
	2	2	$7\frac{3}{5}$
Wieloczyn posiłkowy	4 unc.	$\cancel{0}$	$\cancel{8\frac{19}{20}}$
	4 dr.	0	$1\frac{19}{160}$
	2	0	$0\frac{179}{320}$
		488 kor.	$30\frac{89}{320}$ gar.

Wieloczyn mnożnej przez 4 centnary otrzymuje się jednym ze sposobów poprzednio okazanych.

Aby znaleźć wieloczyn przez 37 funt., widzimy że 37 równa się summie części podwielownych 25+10+2. Owoż, 25 funt. są *ćwiercią* centnara, 10 funt. jego *dziesiątą* częścią a 2 funt. *piątą* częścią tej ostatniej; więc otrzymamy wieloczyn mnożnej przez 37 funt., biorąc jej ćwierć i dziesiątą część, a potem piątą część tej ostatniej.

Przyszedłszy do mnożenia przez 6 dr., rozkładamy ten mnożnik na 4 dr. + 2 dr.; bo 4 dr. są *połową* uncyi, a 2 dr. *połową* tej połowy. Ale nie mamy wieloczynu mnożnej przez 1 unc. Owoż, uważajmy że 4 unc. są *ósmą* częścią 2 funt., a mamy wieloczyn mnożnej przez 2 funt. Dzielimy więc ten wieloczyn przez 8; co daje wieloczyn *posiłkowy* przez 4 unc., który pisząc przekreślamy zaraz, jako niewchodzący do rachunku. Po czem dzielimy przez 8 wieloczyn posiłkowy, i mamy wieloczyn mnożnej przez 4 dr., bo 4 dr. $=\frac{4}{8}$ unc.; następnie bierzemy połowę ostatniego wyniku, i to czyni wieloczyn mnożnej przez 2 dr.

Dodawszy te cząstkowe wieloczyny, otrzymujemy summę 488 kor. $30\frac{89}{320}$ gar. która wyraża szukaną ilość żyta.

DZIELENIE.

244. Dość rozróżnić dwa główne przypadki, według tego jak dzielnik i dzielna są różnej natury albo tej samej.

1° *Za* 36 *sążni roboty zapłacono* 188 *tal.* 5 *zł.* 24 *gr.; po czemu sążeń?*

Oczywiście sążeń roboty kosztuje 36ta część summy zapłaconej za 36 sążni. Więc znajdziemy cenę sążnia, dzieląc 188 tal. 5 zł. 24 gr. przez 36, sposobem już wiadomym (238, 4°).

Następujący wzór dostatecznie pokazuje działanie.

$$\begin{array}{rrr|l}
188^{\text{tal.}} & 5^{\text{zł.}} & 24^{\text{gr.}} & 36 \\
\cline{4-4}
8\times 6\ldots & 48 & & 5^{\text{tal.}}\ 1^{\text{zł.}}\ 14^{\text{gr.}}\ \frac{5}{6} \\
\cline{2-2}
 & 53 & & \\
 & 17\times 30\ldots & 510 & \\
 & & 174 & \\
 & & 30 &
\end{array}$$

Szukany sążeń roboty kosztuje 5 tal. 1 zł. 14 $\frac{5}{6}$ gr.

Weźmy teraz drugi przykład w którym dzielnik jest liczbą wieloraką.

Za 112 *funt.* 4 *unc.* 1 *łót pewnego towaru zapłacono* 5 *duk.* 16 *zł.* 20 *gr. Ileż byłoby za dukat?*

Zamieńmy dzielnik wieloraki na prosty; co się uskutecznia zważając tylko że 1 duk. wart 18 zł. a złoty wart 30 gr. Zatem 5 duk. 16 zł. 20 gr. wartają $\frac{3200}{540}$ duk. albo $\frac{160}{27}$ duk.

Łatwo teraz pojmujemy że, aby wiedzieć ile się kupi towaru za dukat, trzeba podzielić 112 funt. 4 unc. 1 łót przez $\frac{160}{27}$; to jest pomnożyć dzielnę przez 27, i podzielić wynik przez 160.

Wykonywając oba działania, znajdujemy

$$(112^{\text{funt.}}\ 4^{\text{unc.}}\ 1^{\text{łót}})\times\frac{27}{160}=\frac{3031^{\text{funt.}}\ 9^{\text{unc.}}\ 1^{\text{łót}}}{160}=18^{\text{funt.}}\ 15^{\text{un.}}\ \frac{51}{160}.$$

2° *Zapłacono* 3 *ruble za korzec pewnego zboża; ileż byłoby korcy tego zboża za* 17 *rubli* 56 *kopiejek?*

Będzie oczywiście tyle korcy ile cena jednego, to jest 3 ruble, mieści się w summie 17 rub. 56 kop. Zamieniamy dzielnę na jedności gatunku dzielnika, i mamy 17 rub. 56 kop. $=17^{\text{rub.}},56$.

Teraz widzimy że szukana liczba korcy równa się ilorazowi $\frac{17,56}{3}$, to jest $\frac{17^{\text{kor.}},56}{3}$.

Wykonane dzielenie, daje 5 kor. 3 ćw. 3 gar. 1 $\frac{17}{75}$ kw.

Nakoniec weźmy następujący przykład.

Funt herbaty kosztuje 2 *tal.* 4 *zł.* 20 *gr.*; *ileżby dostać można tej herbaty za* 5 *zł.* 25 *gr.?*

Zamieniwszy dzielnik i dzielnę na jedności tego samego gatunku np. na grosze, mamy: 2 $^{\text{tal.}}$ 4 $^{\text{zł.}}$ 20 $^{\text{gr.}}$ $= 500^{\text{gr.}}$; 5 $^{\text{zł.}}$ 25 $^{\text{gr.}}$ $= 175^{\text{gr.}}$. Rozumując teraz jako w poprzedzającym przykładzie, widzimy zaraz że szukana liczba funtów herbaty jest ilorazem z podzielenia 175 przez 500, to jest

$$\frac{175^{\text{funt.}}}{500} \quad \text{albo} \quad \frac{7^{\text{funt.}}}{20} = 5^{\text{ unc.}}\ 1^{\text{ łót}}\ \tfrac{1}{5}.$$

Uwaga. Można przywieśdź rachunek liczb wielorakich do działań na liczbach prostych, wyrażając tylko poddziały jedności każdej liczby wielorakiej w ułamkach tej jedności.

I tak, w drugim przykładzie n° 244 1°, uważamy że 112 funt. 4 unc. 1 łót wartają 112 funt. $\frac{9}{32}$, a zaś 5 duk. 16 zł. 20 gr. wartają 5 duk. $\frac{25}{27}$. Więc znajdziemy ile będzie funtów za dukat, dzieląc 112 funt. $\frac{9}{32}$ przez $5\frac{25}{27}$. Co nie przedstawia żadnej trudności.

Tak samo, w przykładzie mnożenia n° 243 2°, uważamy że 111 kor. 28 garncy czynią 111 kor. $\frac{7}{8}$, a zaś 4 cent. 37 funt. 6 dr. czynią 4 cent. $\frac{2371}{6400}$. Więc znajdziemy szukaną liczbę korcy żyta mnożąc 111 korcy $\frac{7}{8}$ przez $4\frac{2371}{6400}$. Ale rachunek jest zwykle mozolny.

245. Próba. W dodawaniu i odciąganiu liczb wielorakich próba robi się jako w liczbach prostych. W mnożeniu, dość podzielić znaleziony wieloczyn przez jeden z dwóch czynników i otrzymać drugi; a w dzieleniu, pomnożyć iloraz przez dzielnik albo na odwrot, i otrzymać dzielnę.

ROŹDZIAŁ DZIEWIĄTY.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKÓW.

§ 1. KWADRAT I PIERWIASTEK KWADRATOWY.

246. Wiemy już że wieloczyn czynników równych jednej liczbie nazywa się *potęgą* tej liczby. Dla skrócenia, drugą potęgę liczby nazwano jej *kwadratem*; a zaś trzecią potęgę, *sześcianem*.

Jako widzimy, *kwadratem* liczby jest wieloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie samą; i tak, kwadrat liczby 7 jest 49.

Nawzajem, *pierwiastkiem kwadratowym* liczby jest liczba która, podniesiona do *kwadratu*, wydaje liczbę zadaną; i tak, pierwiastkiem kwadratowym liczby 49 jest 7; bo $7\times7=49$. Podobnie, pierwiastkiem kwadratowym liczby $\frac{4}{9}$ jest $\frac{2}{3}$; bo $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Wyraża się pierwiastek kwadratowy liczby, pisząc znak $\sqrt{\ }$ nazwany *pierwiastnikiem* i kładąc pod nim daną liczbę. I tak, $\sqrt{49}=7$ znaczy że pierwiastkiem kwadratowym liczby 49 jest 7. Podobnie $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

Działanie, za pomocą którego znajdujemy pierwiastek kwadratowy danej liczby, nazywa się *wyciąganiem pierwiastku kwadratowego*.

247. Kwadraty dziewięciu pierwszych liczb w następującej stoją tablicy.

liczby	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
kwadraty	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Tablica pokazuje że kwadratem liczby 4 jest 16, i nawzajem pierwiastkiem kwadratowym liczby 16 jest 4; i t. d.

Liczby, których pierwiastek kwadratowy wyraża się liczbą całkowitą albo ułamkową, nazywają się *kwadratami zupełnemi* albo *kwadratami doskonałemi*. I tak, 36, $\frac{9}{25}$ są kwadratami zupełnemi liczb 6, $\frac{3}{5}$.

Nie wszystkie liczby są kwadratami zupełnemi (*). Jakoż, weźmy liczbę 12. Widzimy w powyższej tablicy, że 12 zawiera się między kwadratami zupełnemi 9 i 16. Ztąd wnosimy że $\sqrt{12}$ mieści się między $\sqrt{9}$ i $\sqrt{16}$, to jest między dwiema liczbami 2 i 3 po sobie idącemi. A że między 2 i 3 niema żadnej liczby całkowitej, więc $\sqrt{12}$ nie jest liczbą całkowitą. Powiedamy nadto że ten pierwiastek nie może być liczbą ułamkową. Bo, jeśli istnieje taka liczba wyrażająca $\sqrt{12}$, można ją zawsze przedstawić w postaci ułamka niezredukownego $\frac{x}{y}$ którego kwadrat $\frac{x^2}{y^2}$ powinienby się równać liczbie 12. Ale ten kwadrat jest także liczbą ułamkową niezredukowną (98), i dlatego nie może być całkowitą. Więc $\sqrt{12}$ nie jest liczbą ułamkową. To rozumowanie dowodzi że nie można przedstawić pierwiastku kwadratowego liczby 12, ani za pomocą jedności, ani za pomocą części jedności. Wyraża się tę okoliczność mówiąc że $\sqrt{12}$ jest liczbą *niespółmierną*. Liczba 12 nazywa się *kwadratem niezupełnym*,

Z powyższego dowodzenia wynika że, *gdy pierwiastek kwadratowy liczby całkowitej nie jest całkowity, to musi być niespółmierny*.

248. Aby umieć wyciągać pierwiastek kwadratowy, trzeba wiedzieć jak się tworzy kwadrat ze swojego pierwiastku.

Uważajmy naprzód że proste mnożenie, za pomocą którego otrzymuje się kwadrat liczby, nie pokazuje bynajmniej związku między tą liczbą i jej kwadratem; z przyczyny właśnie samego układu liczenia w którym jedności, skoro przechodzą 9, za-

(1) W pierwszym *milionie* liczb całkowitych jest tylko *tysiąc* kwadratów doskonałych; bo $1000^2 = 1000000$.

mieniają się na dziesiątki, a dziesiątki na sta, i t. d. Jakoż, kwadrat liczby 17, który jest 289, nie zachowuje nawet śladu swojego pierwiastku, bo nie zatrzymuje żadnej jego cyfry. Aby przeszkodzić zlaniu się cyfer, zróbmy kwadrat liczby rozkładając ją na dwie części, i wskazując tylko mnożenie części między sobą a nie wykonywając rachunku.

Weźmy naprzykład 37. Możemy, rozkładając tę liczbę na dwie części, napisać $37=25+12$. Podnieśmy teraz do kwadratu summę $25+12$, mnożąc ją przez nią samą, ale nie wykonywając wieloczynów tylko je wskazując; będziemy mieli, jako już wiadomo (153):

$$(25+12)^2=(25+12)\ (25+12)=25^2+12\times25+25\times12+12^2.$$

albo, uważając że $12\times25+25\times12=2\times25\times12$,
mamy ostatecznie $(25+12)^2=25^2+2\times25\times12+12^2$.

Ten wynik, stanowiący ważne twierdzenie którego często potrzebować będziemy, tak się wysłowia:

Kwadrat summy dwóch liczb składa się z kwadratu pierwszej liczby, z podwojonego wieloczynu pierwszej liczby przez drugą, i z kwadratu drugiej liczby.

Oznaczając literami a i b dwie części 25 i 12 na które rozłożyliśmy 37, i kładąc te litery zamiast liczb w powyższej równości, otrzymamy następującą *formułę* która wyraża ogólnie wysłowione twierdzenie,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ (*).$$

Wynika ztąd w szczególności że kwadrat *liczby całkowitej*, złożonej z dziesiątków i jedności, *składa się z kwadratu dziesiątków, z podwójnego wieloczynu dziesiątków przez jedności, i z kwadratu jedności.*

I tak, $369^2=(360+9)^2=360^2+2\times360.9+9^2$.

(*) Dwie małe litery, napisane jedna obok drugiej, jako ab, wyrażają wieloczyn dwóch liczb oznaczonych temi literami; zatem $2ab$ znaczy podwójny wieloczyn liczb a i b.

249. Mamy, na mocy powyższej formuły,

$$37^2=(36+1)^2=36^2+2\times36\times1+1.$$

Zkąd $\qquad 37^2-36^2=2\times36+1.$

Albo ogólnie, $\qquad (a+1)^2=a^2+2a+1.$

A ztąd, $\qquad (a+1)^2-a^2=2a+1.$

To pokazuje że *różnica kwadratów, dwóch liczb całkowitych po sobie idących, równa się dwa razy wziętej liczbie mniejszej więcej jednością.*

250. Uwaga. Wyrażenie $2a+1$, które oznacza różnicę dwóch kwadratów całkowitych po sobie idących, jest formułą liczb nieparzystych. Ta uwaga nastręcza łatwy sposób ułożenia tablicy kwadratów liczb całkowitych, od 1 aż do liczby na której się zatrzymać chcemy. Dość jest do pierwszego kwadratu 1, który jest pierwszą liczbą nieparzystą, dodać drugą liczbę nieparzystą 3; co uczyni 4, to jest kwadrat z 2. Potem, dodając do tego kwadratu trzecią liczbę nieparzystą 5, otrzymamy 9, to jest kwadrat ze 3. Następnie dodając 7, znajdziemy 16 to jest kwadrat ze 4; i tak dalej.

251. Często potrzebujemy tylko wiedzieć że dana liczba całkowita nie jest kwadratem doskonałym. W tym razie dobrze jest znać następujące przypadki.

1° *Żadna liczba całkowita, zakończona na* 2, 3, 7, 8, *albo na liczbę nieparzystą zer, nie może być kwadratem zupełnym.* Samo spojrzenie na tablicę dziewięciu pierwszych kwadratów jest dostatecznym tego dowodem.

2° *Żadna liczba zakończona na* 5, *jeśli zarazem nie kończy się na* 25, *nie może być kwadratem zupełnym.* I w samej rzeczy, ponieważ liczba kończy się na 5, jej pierwiastek kwadratowy musi także kończyć się na 5; to jest składać się z jedności 5 i z pewnej liczby dziesiątków którą, dla ogólności, oznaczamy literą k. Tym sposobem, rzeczony pierwiastek może się przedstawić ogólnem wyrażeniem $10k+5$. Zatem jego kwadrat jest

$$(10k+5)^2=10^2k^2+2\times10k\times5+25=100k^2+100k+25.$$

To wyrażenie widocznie pokazuje że, gdy pierwiastek kwadratowy kończy się na 5, jego kwadrat kończy się koniecznie na 25. A więc żadna liczba zakończona na 5 nie może być kwadratem gdy się nie kończy na 25.

3° *Liczba parzysta, nie podzielna przez 4, nie może być kwadratem zupełnym.* Jakoż, pierwiastek kwadratowy liczby parzystej jest oczywiście parzysty, i wyraża się ogólnie przez $2k$. Zatem jego kwadrat wyraża się przez $4k^2$ i jest podzielny przez 4. Więc liczba parzysta nie może być kwadratem zupełnym jeśli nie jest *podwójnie parzysta* czyli podzielna przez 4.

4° *Liczba nieparzysta nie może być kwadratem zupełnym gdy, zmniejszona jednością, nie jest podzielna przez 4.* Jakoż, wszelka liczba nieparzysta składa się z liczby parzystej więcej 1, i wyraża się przez $2k+1$. Zatem kwadrat liczby nieparzystej jest

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1.$$

To pokazuje że kwadrat liczby nieparzystej, zmniejszony jednością, jest podzielny przez 4. Ztąd wnosimy że liczba nieparzysta nie może być kwadratem zupełnym gdy, zmniejszona jednością, nie jest podzielna przez 4.

5° *Żadna liczba, podzielna przez liczbę pierwszą, nie może być kwadratem zupełnym, jeśli nie jest podzielna przez kwadrat tej liczby pierwszej.* Weźmy naprzykład liczbę 321 która jest podzielna przez 3. Jeśli liczba całkowita 321 jest kwadratem zupełnym, jej pierwiastek kwadratowy $\sqrt{321}$ jest liczbą całkowitą; co się wyraża pisząc $321=\sqrt{321}\times\sqrt{321}$. Owoż z założenia liczba pierwsza 3 dzieli wieloczyn $\sqrt{321}\times\sqrt{321}$; więc musi dzielić jeden z jego czynników $\sqrt{321}$. Co wymaga aby iloraz $\frac{\sqrt{321}}{3}$ był liczbą całkowitą, a tem samem aby jego kwadrat $\frac{321}{9}$ był liczbą całkowitą. Więc liczba 321, podzielna przez liczbę pierwszą 3 ale nie podzielna przez 9, nie jest kwadratem zupełnym.

6° *Żadna liczba nie jest kwadratem zupełnym jeśli podzielona przez 3 daje na resztę* 2. Jakoż, wszelka liczba albo jest dokładnym wielownikiem ze 3, to jest $3k$, albo też wielownikiem ze 3 więcej resztą 1 lub 2, to jest $3k+1$ albo $3k+2$. Owoż, kwadrat liczby $3k$ jest $9k^2$, i oczywiście podzielny przez 3; następnie, kwadrat liczby $3k+1$ jest $9k^2+6k+1$, a ten kwadrat podzielony przez 3 daje resztę 1; nakoniec kwadrat liczby $3k+2$ jest $9k^2+12k+4$, i ten ostatni, podzielony przez 3, daje także resztę 1. Ztąd wnosimy że żadna liczba nie może być kwadratem zupełnym jeśli, podzielona przez 3, daje resztę 2.

7° Wiadomo że liczba dzielników danej liczby równa się wieloczynowi który się tworzy mnożąc wykładniki, zwiększone jednością, czynników pierwszych składających tę liczbę. Ztąd wynika że:

Wszelka liczba będąca kwadratem doskonałym ma nieparzystą liczbę dzielników.

Jakoż, wykładniki czynników pierwszych kwadratu są wszystkie parzyste (57); zatem, zwiększone jednością, stają się wszystkie nieparzystemi i dają wieloczyn nieparzysty, który wyraża właśnie liczbę dzielników kwadratu.

Nawzajem, *liczba mająca nieparzystą liczbę dzielników jest kwadratem doskonałym.*

I w samej rzeczy, ponieważ liczba dzielników jest nieparzysta, a ona się równa wieloczynowi wykładników zwiększonych jednością, więc te wykładniki są wszystkie parzyste; zatem czynniki pierwsze składające daną liczbę są wszystkie podniesione do potęg parzystych. Więc dana liczba jest kwadratem doskonałym.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO Z LICZBY CAŁKOWITEJ.

252. Gdy jakakolwiek liczba jest kwadratem zupełnym, wyciągnąć z niej pierwiastek kwadratowy jestto znaleźć liczbę która podniesiona do kwadratu wydaje liczbę zadaną. Ale,

gdy dana liczba całkowita nie jest kwadratem zupełnym, wiemy już że nie istnieje żadna liczba całkowita albo ułamkowa którejby kwadrat równał się tej liczbie; w takim razie można tylko wyznaczyć pierwiastek największego kwadratu całkowitego jaki się w niej mieści; i to właśnie stanowi jej *pierwiastek kwadratowy przybliżony na mniej niż jedność*. Celem naszym obecnie jest pokazać sposób jakim się wyciąga taki pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej.

253. Gdy liczba całkowita nie przechodzi 100, jej pierwiastek kwadratowy wyznacza się za pomocą tablicy dziewięciu pierwszych kwadratów. I tak, jeśli chcemy mieć pierwiastek kwadratowy liczby 73, widzimy zaraz że ta liczba mieści się między dwoma kwadratami po sobie idącemi 64 i 81; co pokazuje że $\sqrt{73}$ jest większy od $\sqrt{64}$ czyli od 8, ale mniejszy od $\sqrt{81}$ czyli od 9. A że dwie liczby 8 i 9, między które wpada $\sqrt{73}$, różnią się jednością; więc biorąc 8, to jest pierwiastek największego kwadratu całkowitego jaki się mieści w 73, mamy wartość *przybliżoną* pierwiastku kwadratowego tej liczby, *na mniej niż jedność*. Odciągnąwszy 8^2 czyli 64 od 73, otrzymujemy resztę 9, która właśnie pokazuje że 8 nie jest pierwiastkiem kwadratowym doskonałym liczby 73.

254. Szukajmy teraz pierwiastku kwadratowego liczby większej niż 100 i weźmy, jako przykład, 1444.

Ponieważ liczba 1444 przewyższa 100, jej pierwiastek kwadratowy przewyższa 10. Owoż, ilekolwiek ma cyfer ten pierwiastek, można go zawsze uważać jako złożony z dwóch tylko części, *z dziesiątków i jedności*; licząc do dziesiątków sta, tysiące, i t. d. Zatem dana liczba 1444 zawiera *kwadrat wszystkich dziesiątków pierwiastku kwadratowego, podwójny wieloczyn dziesiątków przez jedności i kwadrat jedności*; i więcej jeszcze pewną resztę, jeśli ta liczba nie jest zupełnym kwadratem.

Ale kwadrat dziesiątków tego pierwiastku, będąc liczbą do kładną *set*, nie może się znajdować tylko w stach danej liczby, które mogą jeszcze zawierać sta pochodzące z dwóch innych części kwadratu, a nawet i z reszty, jeśli jest jaka. Więc, jeśli odetniemy dwie ostatnie cyfry liczby 1444, i ze 14 *set* wyciągniemy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, otrzymamy liczbę dziesiątków szukanego pierwiastku, albo tylko liczbę za wielką. Aliści ta liczba nie może być za wielka; bo pierwiastek kwadratowy samych set danej liczby, to jest jej części tylko, nie może mieć więcej dziesiątków niż pierwiastek kwadratowy całej liczby. Ztąd wnosimy że, wyciągając pierwiastek kwadratowy, na mniej niż jedność, ze 14 set danej liczby, to jest biorąc 3, znajdujemy wszystkie dziesiątki szukanego pierwiastku.

Teraz, aby znaleźć jedności tego pierwiastku, odciągamy kwadrat dziesiątków od danej liczby 1444; czyli, co wychodzi na jedno, odciągamy 9 *set* od 14 *set* tej liczby, i spuszczamy cały przedział 44; co daje 544. Ta reszta zawiera już tylko podwójny wieloczyn dziesiątków pierwiastku przez jedności i kwadrat jedności, więcej ostatnią resztę jeśli jest jaka. Owoż, podwójny wieloczyn dziesiątków przez jedności, będąc dokładną liczbą dziesiątków, nie może się znajdować tylko w dziesiątkach reszty 544, a te ostatnie mogą jeszcze zawierać dziesiątki pochodzące z kwadratu jedności pierwiastku, i nawet z ostatniej reszty. Jeśli więc podzielimy 54 dziesiątki reszty, przez podwójne dziesiątki pierwiastku to jest przez 6, otrzymamy jedności żądanego pierwiastku, albo cyfrę tylko za wielką. To dzielenie daje iloraz 9. Aby się zapewnić czy cyfra 9 nie przewyższa szukanych jedności, dosyć ją napisać po prawej stronie podwójnych dziesiątków pierwiastku; potem, tak utworzoną liczbę 69 pomnożyć przez 9, i odciągnąć wieloczyn od 544. Tym sposobem działając, robimy odrazu podwójny wieloczyn dziesiątków pierwiastku przez jedności i kwadrat jedności; co właśnie stanowi dwie ostatnie części kwadratu pierwiastku, których summa powinna się mieścić w 544. Ale zaraz widzimy że wieloczyn 69×9 przewyższa 544; co jest wskazem że iloraz 9 przewyższa cyfrę szukanych jedności.

Zmniejszamy tedy 9 jednością i probujemy cyfry 8. Mnożąc, w tym celu, 68 przez 8 i odciągając zarazem cząstkowe wieloczyny od 544, otrzymujemy zero na ostatnią resztę. Ten wynik nietylko dowodzi że 8 jest cyfrą jedności żądanego pierwiastku, ale jeszcze że dana liczba 1444 jest zupełnym kwadratem którego pierwiastek jest 38.

Oto rachunek wykonany tak jakośmy wyłożyli,

$$\begin{array}{r|l} 14'44 & 38 \\ \cline{2-2} 5\ 44 & 68 \\ 0 & \ \ 8 \end{array}$$

255. Zrozumiawszy dobrze to co poprzedza, nie trudno będzie wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczb mających więcej niż cztery cyfry.

Wyciągnijmy pierwiastek kwadratowy liczby 72215325, *na mniej niż jedność*.

Oto wzór działania.

$$\begin{array}{r|l} 72'21'54'25 & 8497 \\ \cline{2-2} 8\ 21 & \begin{array}{r|r|r} 164 & 1689 & 16987 \\ 4 & 9 & 7 \end{array} \\ 1\ 6554 & \\ 135325 & \\ 16416 & \end{array}$$

Dana liczba 72215425 ma więcej niż dwie cyfry; ztąd wnosimy że jej pierwiastek kwadratowy ma dziesiątki i jedności. Owoż, aby znaleźć wszystkie dziesiątki tego pierwiastku, widzimy łatwo, powtarzając rozumowanie powyższego przykładu, że trzeba oddzielić dwie ostatnie cyfry 25, i wyciągnąć pierwiastek największego kwadratu jaki się mieści w 722154 *stach* tej liczby. Ale także liczba 722154 ma więcej niż dwie cyfry; zatem jej pierwiastek kwadratowy ma dziesiątki i jedności. Więc znowu, aby otrzymać wszystkie dziesiątki ostatniego pierwiastku, które są *stami* szukanego, trzeba oddzielić dwie ostatnie cyfry 54, i wyciągnąć pierwiastek największego kwadratu jaki się mieści w 7221. I tak dalej postępując, odcinamy po dwie cyfry, aż nakoniec przychodzimy do ostatniego przedziału 72, z którego wyciągamy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność. Największy kwadrat zawarty w 72 jest 64, a jego pierwiastek 8. Ten pierwiastek, stanowiący pierwszą cyfrę szukanego, wyraża dziesiątki pierwiastku kwadratowego liczby 7221. Więc, aby mieć drugą cyfrę pierwiastku, trzeba znaleźć jedności pierwiastku kwadratowego liczby 7221. Co już właśnie umiemy.

W tym celu, odciągamy kwadrat 64 znalezionych dziesiątków 8 od 72 *set* liczby 7221, co daje resztę 821; dzielimy dziesiątki 82 tej reszty, przez podwójne znalezione dziesiątki to jest przez 16, i biorąc 4 na iloraz, otrzymujemy szukane jedności. Aby się zapewnić czy cyfra 4 nie jest za wielka, piszemy ją na prawej stronie podwójnych dziesiątków 16, i odciągamy wieloczyn 164×4 od 821; co daje 165. To odciąganie możebne dowodzi że cyfra 4 nie jest za wielka; ale trzeba jeszcze sprawdzić, czy ona nie za mała, tem bardziej żeśmy ją otrzymali dzieląc 82 przez 16, a iloraz jest rzeczywiście 5 nie 4. Dla usunięcia tej wątpliwości, dodajemy 4 do 164, i mamy summę 168 która wyraża podwójny znaleziony pierwiastek. Owoż, reszta 165 jest mniejsza od 168 a tem bardziej od $168+1$; więc cyfra 4 nie jest za mała (249). Ztąd wnosimy że cyfra 4 jest dokładna. Zatem 84 jest pierwiastkiem największego kwadratu zawartego w 7221. Ten pierwiastek, stanowiący dwie pierwsze cyfry szukanego, wyraża wszystkie dziesiątki pierwiastku kwadratowego liczby 722154; więc znowu, aby mieć trzecią cyfrę pierwiastku, dość znaleźć jedności pierwiastku kwadratowego liczby 722154.

Dla otrzymania tych jedności, trzeba odciągnąć od powyższej liczby kwadrat znalezionych dziesiątków 84; czyli, co wychodzi na jedno, odciągnąć kwadrat z 84 od 7221 *set*, i na prawej stronie reszty położyć przedział 54. Cośmy już właśnie uczynili; bośmy odciągnęli od 7221 naprzód kwadrat z 8 dziesiątków, a potem, od reszty 821, wieloczyn 164×4 który wyraża podwójny wieloczyn dziesiątków 8 namy po dwie cyfry, aż nakoniec przychodzimy do ostatniego przedziału 72, z którego wyciągamy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność. Największy kwadrat zawarty w 72 jest 64, a jego pierwiastek 8. Ten pierwiastek, stanowiący pierwszą cyfrę szukanego, wyraża dziesiątki pierwiastku kwadratowego liczby 7221. Więc, aby mieć drugą cyfrę pierwiastku, trzeba znaleźć jedności pierwiastku kwadratowego liczby 7221. Co już właśnie umiemy.

W tym celu, odciągamy kwadrat 64 znalezionych dziesiątków 8 od 72 *set* liczby 7221, co daje resztę 821 ; dzielimy dziesiątki 82 tej reszty, przez podwójne znalezione dziesiątki to jest przez 16, i biorąc 4 na iloraz, otrzymujemy szukane jedności. Aby się zapewnić czy cyfra 4 nie jest za wielka, piszemy ją na prawej stronie podwójnych dziesiątków 16, i odciągamy wieloczyn 164×4 od 821 ; co daje 165. To odciąganie możebne dowodzi że cyfra 4 nie jest za wielka; ale trzeba jeszcze sprawdzić, czy ona nie za mała, tem bardziej żeśmy ją otrzymali dzieląc 82 przez 16, a iloraz jest rzeczywiście 5 nie 4. Dla usunięcia tej wątpliwości, dodajemy 4 do 164, i mamy summę 168 która wyraża podwójny znaleziony pierwiastek. Owoż, reszta 165 jest mniejsza od 168 a tem bardziej od 168+1; więc cyfra 4 nie jest za mała (249). Ztąd wnosimy że cyfra 4 jest dokładna. Zatem 84 jest pierwiastkiem największego kwadratu zawartego w 7221. Ten pierwiastek, stanowiący dwie pierwsze cyfry szukanego, wyraża wszystkie dziesiątki pierwiastku kwadratowego liczby 722154 ; więc znowu, aby mieć trzecią cyfrę pierwiastku, dość znaleźć jedności pierwiastku kwadratowego liczby 722154.

Dla otrzymania tych jedności, trzeba odciągnąć od powyższej liczby kwadrat znalezionych dziesiątków 84 ; czyli, co wychodzi na jedno, odciągnąć kwadrat z 84 od 7221 *set*, i na prawej stronie reszty położyć przedział 54. Cośmy już właśnie uczynili; bośmy odciągnęli od 7221 naprzód kwadrat z 8 dziesiątków, a potem, od reszty 821, wieloczyn 164×4 który wyraża podwójny wieloczyn dziesiątków 8 przez jedności 4 i kwadrat tych jedności. To wszystko dało resztę 165. Jeśli więc teraz, do tej reszty spuścimy przedział 54, co daje 16554, i podzielimy dziesiątki tej liczby przez podwójne znalezione dziesiątki 168 pierwiastku, iloraz 9 będzie cyfrą szukanych jedności, albo cyfrą za wielką. Pisząc 9 na prawej stronie podwójnych dziesiątków, co daje 1689, i odciągając wieloczyn 1689×9 od 16554, znajdujemy resztę 1353 która dowodzi że 9 jest dokładną cyfrą jedności pierwiastku kwadratowego liczby 722154. Zatem 9 jest trzecią cyfrą szukanego pierwiastku.

Nakoniec, widzimy łatwo że otrzymana część 849 wyraża wszystkie dziesiątki pierwiastku kwadratowego liczby 72215425; zatem, aby mieć jedności tego pierwiastku, trzeba od danej liczby odciągnąć kwadrat znalezionych dziesiątków 849. Ale i to nawet odciąganie jużeśmy wykonali; bo, poprzedniem działaniem, odciągneliśmy kwadrat z 84 dziesiątków od 7221, co dało resztę 16554; a dopiero co, od tej reszty, odciągnęliśmy wieloczyn 1689×9 który wyraża podwójny wieloczyn dziesiątków 84 przez 9 jedności i kwadrat tych jedności; co dało resztę 1353. Więc, jeśli teraz do reszty 1353, spuścimy ostatni przedział 25, co daje 135325, i podzielimy dziesiątki 13532 przez 1698 to jest przez podwójne znalezione dziesiątki pierwiastku, iloraz 7 będzie cyfrą szukanych jedności. Sprawdzamy tę cyfrę, pisząc ją na prawej stronie dziesiątków 1698, co daje 16987, i odciągając wieloczyn 16987×7 od 135325. Otrzymana reszta 16416 dowodzi że 7 jest dokładną cyfrą szukanych jedności. A zatem 8497 jest pierwiastkiem kwadratowym liczby 72215425, na *mniej niż jedność* przez niedostatek.

256. Wyłożona teorya daje następujące *prawidło* :

Aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy liczby całkowitej, trzeba ją podzielić na przedziały dwóch cyfer, zaczynając od prawej ręki ; ostatni może mieć tylko jedną cyfrę. Liczba tych przedziałów wskazuje liczbę cyfer pierwiastku.

To zrobiwszy, wyciąga się pierwiastek największego kwadratu *całkowitego jaki się mieści w pierwszym przedziale, z lewej strony; co daje pierwszą cyfrę pierwiastku.*

Odciąga się kwadrat tej cyfry od pierwszego przedziału, i po prawej stronie reszty pisze się cały drugi przedział. Po czem oddziela się ostatnią cyfrę tak utworzonej liczby, i dzieli się jej dziesiątki przez podwójną znalezioną cyfrę pierwiastku; część całkowita otrzymanego ilorazu wyznacza drugą cyfrę pierwiastku, albo cyfrę za wielką. Sprawdza się tę cyfrę, pisząc ją na prawej stronie podwójonej pierwszej cyfry, i mnoży się tak utworzoną liczbę przez tę cyfrę; a wieloczyn odciąga się od poprzednio otrzymanej reszty razem z drugim przedziałem. Jeśli odciąganie możebne, probowana cyfra nie jest za wielka; jeśli odciąganie niemożebne, zmniejsza się cyfrę jednością i probuje się podobnie cyfry zmniejszonej; i tak następnie, aż się dojdzie do cyfry dokładnej. Należy pamiętać że reszta powinna być zawsze mniejsza od podwójnej znalezionej części pierwiastku zwiększonej jednością; bo inaczej, probowana cyfra byłaby za mała przynajmniej jednością.

Wyznaczywszy drugą cyfrę pierwiastku, pisze się trzeci przedział po prawej stronie drugiej reszty i, odcinając ostatnią cyfrę ztąd wynikającej liczby, dzieli się dziesiątki przez podwójną liczbę utworzoną z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku; część całkowita tego ilorazu daje trzecią cyfrę pierwiastku, albo cyfrę za wielką. Sprawdza się tę cyfrę, takim samym sposobem jako poprzednie.

I tak dalej, aż się wyczerpa, jeden po drugim, wszystkie przedziały zadanej liczby.

Zaledwie przydać należy, tak rzecz sama z siebie widoczna, że, gdy jedno z działań daje *zero* na iloraz, to zero jest odpowiedającą cyfrą pierwiastku. Wtedy spuszcza się następujący przedział i prowadzi się działanie wedle wskazanego prawidła.

257. Próba. Łatwo przez 9 robi się próba pierwiastku kwadratowego.

Jakoż, w powyższym przykładzie, liczba 72215425 równa się kwadratowi otrzymanego pierwiastku 8497 więcej resztą

16416; więc przewyżka nad 9 tej liczby równa się przewyżce kwadratu z przewyżki pierwiastku kwadratowego więcej przewyżką reszty. Owóż, przewyżka pierwiastku 8497 jest 1, jej kwadrat 1 daje przewyżkę 1; reszta 16416 daje przewyżkę 0. Summa tych przewyżek czyni 1: a że liczba 72215425 daje także przewyżkę 1, więc jest prawdopodobieństwo że rachunek dobrze wykonany.

258. Można łatwo wiedzieć czy znaleziony pierwiastek kwadratowy różni się od prawdziwego mniej albo więcej niż połową jedności. Jakoż, niech będą ogólnie dwie liczby a i $a+\frac{1}{2}$, różniące się połową jedności; mamy oczywiście

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 = a^2+2\times a\times\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} = a^2+a+\tfrac{1}{4},$$

więc $$(a+\tfrac{1}{2})^2 - a^2 = a+\tfrac{1}{4}.$$

Ten wynik pokazuje że, *gdy dwie libzby różnia się połową jedności, różnica ich kwadratów równa się liczbie mniejszej powiększonej jedną czwartą jedności.*

Stosując to twierdzenie do naszego pierwiastku, widzimy że gdyby się on różnił od prawdziwego połową jedności, reszta 16416, która jest różnicą między kwadratem 72215425 prawdziwego pierwiastku a kwadratem przybliżonego 8497, równałaby się pierwiastkowi przybliżonemu więcej $\frac{1}{4}$. A że reszta 16416 przewyższa $8497+\frac{1}{4}$, ztąd wnosimy że znaleziony pierwiastek 8497 różni się od prawdziwego błędem większym od *pół jedności*. Zatem, powiększając jednością, mamy wartość 8498 która wyraża pierwiastek kwadratowy liczby 72215421, przybliżony przez *zbytek, na mniej niż pół jedności.*

Uwaga. Wyznaczywszy pierwszą cyfrę 8 pierwiastka kwadratowego liczby 72215425, otrzymaliśmy resztę 821 która, odniesiona do jedności pierwszego przedziału 72, wyraża liczbę 8,21 mniejszą od znalezionego pierwiastka 8 więcej $\frac{1}{4}$. Ztąd łatwo, na mocy powyższego twierdzenia, przewidujemy że następująca cyfra pierwiastku jest mniejsza od 5.

259. *Aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby ułamko-*

wej, na mniej niż jedność, dość jest wyciągnąć go z całkowitej części tej liczby, na mniej niż jedność.

Jakoż, niech będzie liczba $\frac{869}{12}$, z której mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność. Wykonawszy dzielenie, znajdujemy $\frac{869}{12}=72\frac{5}{12}$. To pokazuje że liczba $\frac{869}{12}$, większa od 72 ale mniejsza od 73, wpada między dwa kwadraty całkowite 64 i 81 po sobie idące. Więc jej pierwiastek kwadratowy mieści się między pierwiastkami 8 i 9 tych kwadratów, to jest wpada między dwie liczby całkowite 8 i 9 po sobie idące; zatem różni się od każdej z nich mniej niż jednością. Ztąd wynika że 8 i 9 są wartościami pierwiastku kwadratowego liczby $\frac{869}{12}$ przybliżonemi *na mniej niż jedność*, pierwsza przez niedostatek a druga przez zbytek. Można powiedzieć nawet że 8 jest pierwiastkiem kwadratowym liczby $\frac{869}{12}$ *na mniej niż pół jedności* przez niedostatek (257).

Tak samo rozumując, widzimy łatwo że pierwiastek kwadratowy liczby dziesiętnej 44,5 jest 6, *na mniej niż jedność* przez niedostatek ; albo 7, *na mniej niż pół jedności* przez zbytek.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO Z PRZYBLIŻENIEM WYZNACZONEM.

Gdy dana liczba nie jest kwadratem doskonałym wtedy, jakośmy już widzieli, nie można wyrazić *liczebnie* jej pierwiastku kwadratowego ; ale można wyznaczyć wartość przybliżoną tego pierwiastku, tak mało różną od prawdziwej jak się podoba. Co właśnie jest przedmiotem następującego zadania.

260. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby jakiejkolwiek N, całkowitej albo ułamkowej, na mniej niż $\frac{1}{k}$.* To znaczy że trzeba znaleźć największy wielownik przybliżenia $\frac{1}{k}$ jaki się mieści w $\sqrt{N}$. Owóż, nazywając x liczbę całkowitą która wy-

raża ile razy $\frac{1}{k}$ mieści się w $\sqrt{N}$, ten pierwiastek będzie oczywiście zawarty między $\frac{x}{k}$ i $\frac{x+1}{k}$; to jest, jako się mówi zwykle, będzie

$$\frac{x}{k} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{k}.$$

Zatem, podnosząc do kwadratu te trzy liczby idące w porządku wielkości, mamy

$$\frac{x^2}{k^2} < N < \frac{(x+1)^2}{k^2}.$$

Zkąd, mnożąc kwadraty przez k^2, otrzymujemy

$$x^2 < Nk^2 < (x+1)^2.$$

To pokazuje że wieloczyn Nk^2 jest zawarty między dwoma kwadratami całkowitemi x^2 i $(x+1)^2$ po sobie idącemi. Więc liczba całkowita x jest pierwiastkiem kwadratowym wieloczynu Nk^2 na mniej niż jedność. Ztąd

PRAWIDŁO: *Aby otrzymać pierwiastek kwadratowy liczby jakiejkolwiek N, na mniej niż $\frac{1}{k}$, trzeba pomnożyć tę liczbę przez kwadrat k^2 odwrotności przybliżenia, wyciągnąć z wieloczynu Nk^2 pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność i podzielić go przez k.*

Widzimy teraz że można zawsze znaleźć dwie liczby $\frac{x}{k}$ i $\frac{x+1}{k}$ zawierające $\sqrt{N}$. Owoż różnica tych liczb jest $\frac{1}{k}$ i może stać się tak małą jak się podoba, byle wzięto liczbę k dostatecznie wielką; więc każda z wartości $\frac{x}{k}$ i $\frac{x+1}{k}$ różni się od $\sqrt{N}$ tak mało jak zechcemy. A więc można otrzymać wartość pierwiastku $\sqrt{N}$ z przybliżeniem wyznaczonem.

261. Jako zastosowanie, szukajmy pierwiastku kwadratowego liczby 15 na mniej niż $\frac{1}{3}$.

Mnożymy 15 przez 9, i z wieloczynu $15 \times 9 = 135$ wyciągamy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność. Ten pierwiastek jest 11 przez *niedostatek*, a 12 przez *zbytek*. Ztąd wnosimy że $\sqrt{15}$ mieści się między dwiema liczbami $\frac{11}{3}$ i $\frac{12}{3}$ które się różnią ułamkiem $\frac{1}{3}$. Więc $\frac{11}{3}$ jest wartością pierwiastku $\sqrt{15}$ na mniej niż $\frac{1}{3}$, przez niedostatek.

Szukajmy jeszcze pierwiastku kwadratowego liczby ułamkowej $\frac{40}{3}$, na mniej niż $\frac{2}{7}$.

Uważając że dowodzenie nº 259 stosuje się do liczby k całkowitej albo ułamkowej, możemy powiedzieć że w obecnym przykładzie przybliżenie $\frac{1}{k} = \frac{2}{7} = \frac{1}{(\frac{7}{2})}$. Mnożymy tedy $\frac{40}{3}$ przez $(\frac{7}{2})^2$, a z wieloczynu $\frac{40}{3} \times (\frac{7}{2})^2$ albo $163\frac{1}{3}$ wyciągamy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, i znajdujemy że jest zawarty między 12 i 13. Dzielimy 12 przez $\frac{7}{2}$ i otrzymujemy $\frac{12 \times 2}{7} = \frac{24}{7}$. Więc $\frac{24}{7}$ jest szukaną wartością pierwiastku $\sqrt{\frac{40}{3}}$, przybliżoną na mniej niż $\frac{2}{7}$ przez niedostatek. I w samej rzeczy, $\sqrt{\frac{40}{3}}$ wpada między dwie liczby $\frac{12 \times 2}{7}$ i $\frac{13 \times 2}{7}$ różniące się ułamkiem $\frac{2}{7}$. Zatem każda z nich jest przybliżoną wartością pierwiastku $\sqrt{\frac{40}{3}}$ na mniej niż $\frac{2}{7}$.

262. Możemy teraz *wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej, na mniej niż jedność danego rzędu dziesiętnego.*

Jakoż, jeśli chcemy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy liczby 6, np. na mniej niż 0,01 dość wedle prawidła nº 259, pomnożyć 6 przez 100^2, z wieloczynu 60000 wyciągnąć pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność i podzielić ten pierwiastek przez 100. Co się uskutecznia jako następuje

$$\begin{array}{r|l}
6{,}0000 & 2{,}44 \\
\cline{2-2}
2\ 00 & 44 \ \big|\ 484 \\
2400 & \ \ 4 \ \big|\ \ \ \ 4 \\
464 &
\end{array}$$

Wynik 2,44 jest wartością pierwiastku kwadratowego liczby 8, na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

Wynika ztąd *prawidło*

Aby wyznaczyć pierwiastek kwadratowy liczby całkowitej, na mniej niż jedność danego rzędu dziesiętnego, dość jest dopisać *na prawej stronie tej liczby* DWA RAZY TYLE *zer ile ma być dziesiętnych w pierwiastku; wyciągnąć z tego wieloczynu pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, i, w otrzymanym wyniku, oddzielić tyle dziesiętnych ile żądano.*

Na zastosowanie tego prawidła wyciągnijmy pierwiastek kwadratowy liczby 2, na mniej niż 0,00001.

Zamiast dopisywać odrazu *pięć par zer*, jako chce prawidło, wyciąga się naprzód część całkowitą pierwiastku kwadratowego z liczby 2, i kładzie się po niej przecinek; dopisuje się potem dwa zera do reszty, i ciągnie się dalej działanie które daje pierwszą dziesiętnę pierwiastku; następnie dopisuje się drugą parę zer do reszty, co prowadzi do drugiej dziesiętnej pierwiastku; i tak dalej, aż do zupełnego wyczerpania *pięciu par zer*, jak gdyby je spuszczano z danej liczby.

Oto wzór działania.

```
  2      | 1,41421
 100     |---------------------------------
   400   | 24 | 281 | 2824 | 28282 | 282841
  11900  |  4 |   1 |    4 |     2 |      1
    60400
    383600
    100759
```

1,41421 jest pierwiastkiem kwadratowym liczby 2, na mniej niż jedną stotysiączną; a nawet na mniej niż *pół stotysiącznej*.

263. UWAGA. Gdybyśmy dalej posuwali powyższy rachunek, otrzymalibyśmy pierwiastek kwadratowy liczby 2 z coraz większem przybliżeniem, i widocznie takiem że różnica, między wartością przybliżoną a prawdziwą, stałaby się mniejszą od wszelkiej ilości tak małej jak się podoba. Dla tej przyczyny pierwiastek kwadratowy liczby 2, *niespółmierny* jakośmy dowiedli, który wyrażamy *symbolicznie* przez $\sqrt{2}$, jest *granicą* wartości: 1; 1,4; 1,41; 1,414; etc., które się do niego coraz bardziej i nieskończenie przybliżają.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO Z UŁAMKÓW.

264. *Gdy oba wyrazy ułamka są kwadratami zupełnemi, wyciąga się jego pierwiastek kwadratowy wyciągając go z licznika i z mianownika.*

I tak, $$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Bo, wynosząc do kwadratu oba wyrazy ułamku $\frac{2}{3}$, otrzymuje się ułamek zadany $\frac{4}{9}$.

265. *Gdy ułamek jest kwadratem doskonałym, ta sama liczba czyni zarazem licznik i mianownik kwadratami doskonałemi.*

Uważajmy ułamek $\frac{18}{50}$ który jest kwadratem ułamku $\frac{3}{5}$. Liczba 2, mnożąc mianownik 50, czyni go kwadratem doskonałym; powiedam że ta sama liczba 2, mnożąc licznik 18, uczyni go także kwadratem doskonałym. Jakoż, mamy

$$\frac{18\times2}{50\times2} = (\tfrac{3}{5})^2; \quad \text{zatem} \quad 18\times2 = (\tfrac{3}{5})^2\times10^2.$$

Co pokazuje że wieloczyn 18×2 jest kwadratem doskonałym.

Dowiedzie się podobnie że ta sama liczba 2 która, dzieląc mianownik 50, czyni go kwadratem doskonałym, dzieląc licznik 18 uczyni go także kwadratem doskonałym.

Ztąd wynika oczywiście że

Aby ułamek był kwadratem doskonałym, trzeba i dość jest żeby wieloczyn obydwóch jego wyrazów był kwadratem doskonałym.

Więc *ułamek niezredukowny, którego wyrazy nie są oba kwadratami zupełnemi, nie może być kwadratem zupełnym, i jego pierwiastek kwadratowy jest* NIESPÓŁMIERNY.

266. Jeśli tylko mianownik ułamka jest kwadratem doskonałym, jako $\frac{44}{25}$, wtedy, wyciągając pierwiastek kwadratowy z licznika 44 na mniej niż jedność, co daje 6, i dzieląc go przez pierwiastek kwadratowy 5 mianownika, otrzymuje się wartość $\frac{6}{5}$ pierwiastku ułamka przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{5}$. I w samej rzeczy, ułamek $\frac{44}{25}$ mieści się oczywiście między dwoma kwadratami $\frac{36}{25}$ i $\frac{49}{25}$; zatem $\sqrt{\frac{44}{25}}$ wpada między $\sqrt{\frac{36}{25}}$ i $\sqrt{\frac{49}{25}}$, to jest między $\frac{6}{5}$ i $\frac{7}{5}$. Owoż, te dwie liczby różnią się ułamkiem $\frac{1}{5}$; więc $\sqrt{\frac{44}{25}}$ różni się od każdej z nich mniej niż o $\frac{1}{5}$.

Więc $\frac{6}{5}$ jest wartością pierwiastku $\sqrt{\frac{44}{25}}$ przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{5}$ przez niedostatek.

Z resztą, to co poprzedza jest następstwem ogólnego prawidła (259). Jakoż, aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułamku $\frac{44}{25}$ na mniej niż $\frac{1}{5}$, trzeba go pomnożyć przez 5^2, z wieloczynu $\frac{44}{25}\times 5^2$, wyciągnąć pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność i podzielić ten pierwiastek przez 5. Co też właśnie zrobiono.

267. Jeśli mianownik ułamka nie jest kwadratem zupełnym, można go nim zrobić, mnożąc tylko oba wyrazy przez mianownik. Tym sposobem wyciąganie pierwiastku kwadratowego przywodzi się do poprzedzającego przypadku. Jakoż, $\frac{7}{12}=\frac{84}{12^2}$; więc $\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{84}{12^2}}$. Ztąd wnosimy że $\frac{9}{12}$ jest wartością pierwiastku $\sqrt{\frac{7}{12}}$ przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{12}$.

Ale niekoniecznie zawsze trzeba mnożyć przez mianownik oba wyrazy ułamka, aby uczynić jego mianownik kwadratem doskonałym. Dosyć rozłożyć mianownik na czynniki pierwsze, i pomnożyć oba wyrazy ułamka przez te tylko z czynników pierwszych których wykładniki są nieparzyste. I tak, weźmy dopiero co uważany ułamek $\frac{7}{12}$. Jego mianownik $12=2^2\times 3$. Mnożymy tedy przez 3 oba wyrazy ułamka $\frac{7}{12}$, i mamy ułamek równowarty $\frac{21}{2^2\times 3^2}$ którego mianownik jest kwadratem doskonałym. Więc $\sqrt{\frac{7}{12}}$ albo $\sqrt{\frac{21}{2^2\times 3^2}}$ ma wartość $\frac{4}{6}$ przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{6}$.

Poprzednio znaleziona wartość $\frac{9}{12}$ tego samego pierwiastku jest więcej przybliżona, bo na mniej niż $\frac{1}{12}$.

268. Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamka, na mniej niż jedność podzieloną przez dokładny pierwiastek kwadratowy mianownika, jest użyteczne mianowicie wtedy

gdy niewiadomo czy dany ułamek jest albo nie jest zupełnym kwadratem. Albowiem tak postępując, znajdujemy dokładny pierwiastek jeśli ułamek jest zupełnym kwadratem, albo jego przybliżoną wartość, jeśli nim nie jest (266).

I tak, biorąc ułamek $\frac{50}{72}$, mamy $\sqrt{\frac{50}{72}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$.

Przeciwnie w ułamku $\frac{17}{20}$; wartość $\sqrt{\frac{17}{20}}=\sqrt{\frac{85}{100}}$, a wartość $\sqrt{85}$ jest 9, na mniej niż jedność; więc $\sqrt{\frac{17}{20}}$ ma wartość przybliżoną $\frac{9}{10}$, na mniej niż $\frac{1}{10}$.

269. Uwaga. Choćby nawet licznik danej liczby ułamkowej był kwadratem doskonałym, to jeszcze i wtedy, gdy chodzi o pierwiastek kwadratowy przybliżony, trzeba uczynić mianownik kwadratem doskonałym; bo inaczej możnaby popełnić błąd wielu jedności. I tak, niech będzie liczba ułamkowa $\frac{4900}{3}$ z której mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. $\sqrt{4900}=70$, a $\sqrt{3}$ wpada między 1 i 2; ztąd wynika że $\sqrt{\frac{4900}{3}}$ jest mniejszy od $\frac{70}{1}$ ale większy od $\frac{70}{2}$ czyli od 35. Owoż pierwiastek $\sqrt{\frac{4900}{3}}=\sqrt{1633+\frac{1}{3}}$ jest zawarty między 40 i 41; więc, biorąc jedną z liczb 70 albo 35 za wartość pierwiastku $\sqrt{\frac{4900}{3}}$, popełnionoby błąd kilku jednosci.

270. Wyciągnijmy nakoniec pierwiastek kwadratowy z liczby ułamkowej $\frac{36}{13}$ na mniej niż 0,01.

Wedle prawideł n^ro 258 i 259, otrzyma się ten pierwiastek, wyciągając z części całkowitej wieloczynu $\frac{36}{13}\times10000$ pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, i dzieląc go przez 100. Owoż, tę część całkowitą znajduje się zamieniając $\frac{36}{13}$ na ułamek dziesiętny, ale ograniczając rachunek do *czterech* dzisiętnych, to jest biorąc *dwa razy tyle dziesiętnych ile chcemy w pierwiastku*, i potem odrzucając przecinek; co daje $\frac{36}{13}=2,7692$; a zaś pierwiastek kwadratowy liczby 27692 jest 166 na mniej niż jedność. Więc $\sqrt{\frac{36}{13}}=1,66$ na mniej niż 0,01.

Uwaga. Pokażemy później, w teoryi przybliżeń liczebnych, że *niekoniecznie* trzeba mieć w kwadracie dwa razy tyle dziesiętnych ile powinno być w pierwiastku.

271. Zobaczmy teraz jak się wyciąga pierwiastek kwadratowy z liczby dziesiętnej. Wynika z mnożenia że kwadrat liczby dziesiętnej ma zawsze parzystą liczbę dziesiętnych. Przeto, jeśli dana liczba dziesiętna nie ma parzystej liczby cyfer dziesiętnych, trzeba przede wszystkiem dopisać zero na prawej stronie, aby tym sposobem uczynić domyślny mianownik kwadratem doskonałym. Po czem, wedle ogólnego prawidła (259), wyciąga się pierwiastek kwadratowy z tej liczby, nie zważając na przecinek, a w otrzymanym wyniku oddziela się połowę tyle dziesiętnych ile było w ostatniej liczbie.

Weźmy naprzód liczbę dziesiętną 12,7449. Mamy

$$\sqrt{12{,}7449}=\frac{\sqrt{12{,}7449\times 100^2}}{100}=\frac{\sqrt{127449}}{100}$$

Owoż $\sqrt{127449}=357$. Więc $\sqrt{12{,}7449}=\frac{357}{100}=3{,}57$.

Wyciągnijmy potem pierwiastek kwadratowy z liczby dziesiętnej 20,364. Dopisując zero z prawej strony, będzie $\sqrt{20{,}364}=\sqrt{20{,}3640}$. Owoż $\sqrt{203640}=451$.. na mniej niż jedność. Więc $\sqrt{20{,}364}=4{,}51$ na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

Niech będzie nakoniec liczba dziesiętna 2,71828182 z której chcemy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy na mniej niż 0,001. Zawsze wedle ogólnego prawidła, mnożymy daną liczbę przez 1000^2, to jest posuwamy przecinek o *sześć* cyfer dziesiętnych. Z wieloczynu 2718281,82 wyciągamy pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, i ten wynik dzielimy przez 1000.

To wszystko tak się praktycznie wykonywa:

2,71828182	1,648		
1 71	26	324	3288
1582	6	4	8
28681			
2377			

Otrzymany wynik 1,648 jest szukaną wartością pierwiastku, przybliżoną na mniej niż 0,001.

Ztąd wynika

Prawidło: *Aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby dziesiętnej, na mniej niż jedność danego rzędu dziesiętnego,* dość jest *wziąć w tej liczbie* dwa razy tyle *dziesiętnych ile mieć chcemy w pierwiastku, dopełniając zerami brakujących; potem, z tak utworzonej liczby nie zważając na przecinek, wyciągnąć pierwiastek kwadratowy na mniej niż jedność, i oddzielić w nim tyle dziesiętnych ileśmy żądali.*

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO Z LICZB PRZYBLIŻONYCH.

273. Dla ogólności rozumowania, oznaczmy przez a liczbę przybliżoną która się różni od prawdziwej błędem α, i nazwijmy ε błąd który popełniamy wyciągając pierwiastek kwadratowy z liczby przybliżonej zamiast prawdziwej.

Rozróżnimy dwa przypadki.

1° Jeśli a jest liczbą przybliżoną przez *niedostatek*, wtedy prawdziwa wyraża się przez $a+\alpha$; zatem błąd pierwiastku jest

$$\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a}=\varepsilon.$$

Odosobniając pierwszy pierwiastnik, mamy:

$$\sqrt{a+\alpha}=\sqrt{a}+\varepsilon.$$

Zkąd, jeśli podniesiemy obie strony do kwadratu, wynika:

$$a+\alpha=a+2\varepsilon\sqrt{a}+\varepsilon^2.$$

A jeśli zniesiemy liczbę a, po obydwóch stronach tej równości, zostanie:

$$\alpha=2\varepsilon\sqrt{a}+\varepsilon^2.$$

Ztąd wynika oczywiście że

$$2\varepsilon\sqrt{a}<\alpha;$$

więc
$$\varepsilon<\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}. \qquad (1).$$

To pokazuje że błąd ε, który popełniamy wyciągając pierwiastek kwadratowy z liczby a przybliżonej przez niedostatek, jest mniejszy od *połowy* błędu przybliżenia α, podzielonego przez pierwiastek kwadratowy tej liczby.

A jeśli $a > 1$, wtedy błąd ε jest mniejszy od $\frac{1}{2}a$.

2° Przypuśćmy teraz że liczba a jest przybliżona przez *zbytek*; zatem liczba prawdziwa wyraża się przez $a-\alpha$, i błąd pierwiastku jest różnicą

$$\sqrt{a}-\sqrt{a-\alpha}=\varepsilon.$$

Odosobniając pierwszy pierwiastnik, będzie

$$\sqrt{a}=\sqrt{a-\alpha}+\varepsilon.$$

Zkąd, podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy:

$$a=a-\alpha+2\varepsilon\sqrt{a-\alpha}+\varepsilon^2;$$

A ztąd, jeśli zniesiemy po obydwóch stronach a, wynika:

$$2\varepsilon\sqrt{a-\alpha}+\varepsilon^2-\alpha=0 \quad \text{albo} \quad 2\varepsilon\sqrt{a-\alpha}+\varepsilon=\alpha.$$

Co pokazuje że: $\quad 2\varepsilon\sqrt{a-\alpha}<\alpha.$

Więc,
$$\varepsilon<\frac{\alpha}{2\sqrt{a-\alpha}}. \qquad (2).$$

Ta formuła i poprzednia dowodzą że, *wyciągając pierwiastek kwadratowy z liczby przybliżonej a, popełniamy błąd ε mniejszy od pół błędu przybliżenia α, podzielonego przez pierwiastek kwadratowy liczby przybliżonej, wziętej przez* NIEDOSTATEK.

Ale trzeba pamiętać że, biorąc pierwiastek kwadratowy przybliżony liczby a, zamiast dokładnego, popełniamy nowy błąd który do błędu ε dodać należy.

274. Jako przykład, szukajmy pierwiastku kwadratowego liczby 11,579 przybliżonej przez niedostatek na mniej niż 0,001.

Wyciągając żądany pierwiastek, z przybliżeniem z jakiem liczba jest dana, znajdujemy

$$\begin{array}{r l|l}
\sqrt{11,579} & = & 3,402 \\
2\ 57 & & 64 \mid 6802 \\
19000 & & 4 \mid \quad 2 \\
5396 & &
\end{array}$$

Obliczmy teraz błędy. Pierwszy błąd pochodzi ztąd że liczba 11,579 jest przybliżona na mniej niż 0,001 ; co daje

$$\varepsilon < \frac{0,001}{2\times 3,402} < \frac{1}{6800} < 0,0002.$$

Popełniamy drugi błąd, zatrzymując wyciąganie pierwiastku kwadratowego na trzeciej dziesiętnej, a zaniedbując następujące których pierwsza jest 7 ; co sprawia błąd mniejszy od 0,0008. A że summa tych dwóch błędów jest mniejsza od 0,001 ; więc 3,402 jest wartością pierwiastku $\sqrt{11,579}$, przybliżoną na mniej niż 0,001 przez niedostatek.

UWAGA. Gdyby dana liczba 11,579 była przybliżona przez zbytek, na mniej niż 0,0001 ; wtedy, zmniejszając jednością jej ostatnią cyfrę dziesiętną, przyprowadzilibyśmy wyciąganie pierwiastku kwadratowego do poprzedzającego przypadku.

276. Weźmy teraz liczbę 0,000123 przybliżoną na mniej niż jedność ostatniej dziesiętnej, ale nie wyłuszczając czy to przybliżenie jest przez niedostatek czy przez zbytek.

Aby wiedzieć z pewnością na jakie przybliżenie pierwiastku kwadratowego tej liczby rachować można, zmniejszamy jednością ostatnią dziesiętnę i, wyciągając pierwiastek z tem samem przybliżeniem co dana liczba, mamy

$$\begin{array}{r l|l}
\sqrt{0,000122} & = & 0,011045 \\
22 & & 21 \mid 2204 \mid 22085 \\
10000 & & \ \ 1 \mid \quad 4 \mid \quad\ \ 5 \\
118400 & & \\
7975 & &
\end{array}$$

Powiększamy potem jednością ostatnią dziesiętnę danej liczby 0,000123 i, wyciągając znowu pierwiastek kwadratowy z tem samem przybliżeniem, otrzymujemy

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{0,000124} = & 0,011135 \\
\begin{array}{r} 24 \\ 300 \\ 7900 \\ 123100 \\ 11775 \end{array} & \begin{array}{r|r|r|r} 21 & 221 & 2223 & 22265 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}
\end{array}$$

Znalezione dwie wartości dowodzą że pierwiastek kwadratowy liczby 0,00123 jest większy od 0,011045, ale mniejszy od 0,0111036; i tem bardziej większy od 0,0110 a zaś mniejszy od 0,0112. Owoż, dwie ostatnie liczby różnią się od siebie o mniej niż 0,0002; więc 0,0111 jest wartością szukanego pierwiastku na mniej niż 0,0001.

277. Nie trudno teraz odpowiedzieć na pytanie następujące: *Z jakiem przybliżeniem wyznaczyć można pierwiastek kwadratowy liczby, której połowa tylko pierwszych cyfer więcej jedną jest wiadoma?*

Dla utkwienia myśli, przypuśćmy że szukamy pierwiastku kwadratowego liczby 5678901 której *cztery* pierwsze cyfry, 5678, są dokładne, a zaś inne niepewne.

Wyciągamy pierwiastek kwadratowy tej liczby, zastępując zerami cyfry niepewne, i znajdujemy

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{5678000} = & 2382 \\
\begin{array}{r} 167 \\ 3880 \\ 13600 \\ 4076 \end{array} & \begin{array}{r|r|r} 43 & 468 & 4762 \\ 3 & 8 & 2 \end{array}
\end{array}$$

pierwiastek kwadratowy 2382, którego *piąta* cyfra byłaby 8.

Widzimy łatwo że, w zadanej liczbie, błąd α jest mniejszy od 1000. Przeto $\varepsilon < \frac{1000}{2 \times 2382} < 0,3$. Zatrzymując wyciąganie pierwiastku na *czwartej* cyfrze 2, popełniamy błąd mniejszy od 0,9. Zatem summa dwóch błędów jest mniejsza od 1,2. Biorąc tedy 2382, na wartość żądanego pierwiastku, zrobionoby błąd *może* większy od jedności. Ale, jeśli się weźmie wartość przez *zbytek*, 2383, summa błędów będzie mniejsza od 0,3+0,2, to jest mniejsza od 0,5. Więc 2383 jest wartością przybliżoną na mniej niż jedność, pierwiastku kwadratowego liczby całkowitej 5678901, której pierwsza połowa cyfer więcej jedna są dokładne.

UWAGA. Z tego co poprzedza wynika że można zawsze otrzymać pierwiastek kwadratowy liczby przybliżonej, byle większej od jedności, z przybliżeniem przynajmniej tego samego rzędu z jakim ta liczba jest dana.

Więc, *ogólnie mówiąc*, niema koniecznej potrzeby znać w danej liczbie dwa razy tyle dziesiętnych ile chcemy w jej pierwiastku kwadratowym, jako wymaga prawidło nº 270.

278. Twierdzenie na mocy którego można przemienić porządek czynników spółmiernych wieloczynu, stosuje się także do czynników niespółmiernych. Ale trzeba naprzód pokazać co należy rozumieć przez wieloczyn liczb niespółmiernych; albowiem określenie mnożenia, dane dla liczb całkowitych i ułamkowych, nie może się tu zastosować. I w samej rzeczy, co znaczy mnożyć $\sqrt{3}$ przez $\sqrt{5}$? gdy wiemy że te pierwiastki nie mogą się wyrazić ani przez jedność ani przez części jedności. Owoż, widzieliśmy że można wyznaczyć liczbę tak się mało różniącą od $\sqrt{3}$, jak się podoba; dlatego powiedzieliśmy że $\sqrt{3}$ jest granicą liczb przybliżonych z któremi jego różnica może stać się mniejszą od wszelkiej małości oznaczonej. Więc, zasadzając się na tej uwadze, określamy wieloczyn liczb $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$, mówiąc że: *wieloczyn liczb niespółmiernych, jest* GRANICĄ *liczb spółmiernych które się do nich coraz bardziej i nieskończenie przybliżają.*

Zrozumiawszy dobrze to określenie, nie trudno będzie dowieść że *można przemienić porządek czynników niespółmiernych wieloczynu.* Jakoż, niech będą dwa wieloczyny $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ różniące się tylko porządkiem czynników. Wartości tych wieloczynów, które się otrzymuje podstawiając, zamiast czynników niespółmiernych, czynniki spółmierne coraz więcej przybliżone, są ciągle równe na wszelkie przybliżenie;

więc granice tych wartości, to jest wieloczyny $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ są równe.

Więc ogólnie, jakiekolwiek są czynniki, spółmierne albo niespółmierne, *wieloczyn nie zmienia wartości gdy się przemienia porządek jego czynników.*

Ztąd wynikają te same dwa wnioski jak w liczbach spółmiernych, których dowodzenie nie przedstawia żadnej trudności; to jest: 1° *Aby pomnożyć wieloczyn czynników niespółmiernych przez liczbę jakąkolwiek, dość pomnożyć jeden z czynników przez tę liczbę.* 2° I nawzajem, *aby pomnożyć liczbę jakąkolwiek przez wieloczyn czynników niespółmiernych, dość wykonać mnożenie następne przez czynniki tego wieloczynu.*

279. Po tem co poprzedza, łatwo się dowodzi dwóch następujących twierdzeń.

1° *Wieloczyn pierwiastków kwadratowych, liczb jakichkolwiek, równa się pierwiastkowi kwadratowemu wieloczynu tych liczb.*

Niech będzie wieloczyn $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{12}$. Nazywając α, β, γ wartości których kwadraty są bardzo blizko równe odpowiednym liczbom 3, 5, 12. Mamy widocznie

$$\sqrt{\alpha^2}.\sqrt{\beta^2}.\sqrt{\gamma^2}=\sqrt{\alpha^2\times\beta^2\times\gamma^2}$$

Owoż, ta równość istnieje ciągle jakkolwiek mało kwadraty α^2, β^2, γ^2 różnią się od liczb odpowiednych 3, 5, 12; a więc granica wieloczynu $\sqrt{\alpha^2}.\sqrt{\beta^2}.\sqrt{\gamma^2}$ równa się granicy pierwiastku $\sqrt{\alpha^2\times\beta^2\times\gamma^2}$, to jest

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times5\times12}.$$

Wynika ztąd ważny wniosek: *Aby pomnożyć pierwiastek, kwadratowy przez daną liczbę, dość jest pomnożyć liczbę będącą pod pierwiastnikiem przez kwadrat danej liczby.*

I tak, niech będzie wieloczyn $5\sqrt{3}$. Liczba 5 znaczy to samo co $\sqrt{25}$; więc dany wieloczyn $5\sqrt{3}$ jest to samo co $\sqrt{25}\times\sqrt{3}$, albo $\sqrt{25\times3}$.

Więc $$5\sqrt{3}=\sqrt{25\times3}.$$

Ta równość okazuje że można *wprowadzić* pod pierwiastnik kwadratowy czynnik 5, wynosząc go do kwadratu; i nawzajem, można *wyprowadzić* z pod pierwiastniku kwadratowego czynnik 25, wyciagając z niego pierwiastek kwadratowy.

2° *Iloraz pierwiastków kwadratowych dwóch liczb równa się pierwiastkowi kwadratowemu ilorazu tych liczb.*

Jakoż, niech będzie iloraz $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$. Wiemy że w ułamku $\frac{5}{7}$, dzielna 5 równa się wieloczynowi z dzielnika 7 przez iloraz $\frac{5}{7}$, to jest $5=7\times\frac{5}{7}$; zatem na mocy 1°, wyciągając pierwiastek kwadratowy, mamy $\sqrt{5}=\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{5}{7}}$.

więc
$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}.$$

280. Uwaga. Z poprzedzającego twierdzenia wywodzi się łatwo prawidło wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczb jakichkolwiek.

I tak, jeśli chcemy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy liczby 7, na mniej niż 0,1, możemy napisać

$$\sqrt{7}=\sqrt{\frac{700}{100}}=\frac{1}{10}\sqrt{700}$$

To pokazuje że, aby otrzymać $\sqrt{7}$ na mniej niż 0,1 dość wyciągnąć z wieloczynu 7×100 pierwiastek kwadratowy na mniej niż 1 i podzielić go przez 10.

Podobnie, jeśli chcemy wyznaczyć pierwiastek liczby ułamkowej $\frac{12}{5}$ na mniej niż $\frac{1}{7}$, uważamy że

$$\sqrt{\frac{12}{5}}=\sqrt{\frac{12\times7^2}{5\times7^2}}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{12\times7^2}{5}}$$

Zatem, aby mieć $\sqrt{\frac{12}{5}}$ na mniej niż $\frac{1}{7}$, dość jest wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z $\frac{12\times7^2}{5}$, na mniej niż 1, i podzielić go przez 7.

Wszystkie te prawidła już nam wiadome; tutaj przyszliśmy do nich inną drogą, którą także znać trzeba.

ĆWICZENIA.

I. Żadna liczba nie może być kwadratem doskonałym gdy, podzielona przez 5 albo przez 8, daje resztę różną od 1 i od 4.

II. Kwadrat summy dwóch kwadratów jest summą dwóch kwadratów.

III. Jeśli dwie liczby, jedna parzysta a druga nieparzysta, są pierwsze między sobą, różnica ich kwadratów nie może być kwadratem zupełnym tylko wtedy gdy summa i różnica tych liczb są kwadratami zupełnemi.

IV. Gdy summa dwóch kwadratów jest parzysta, połowa tej summy jest także summą dwóch kwadratów.

V. Wszelka liczba podwójnie parzysta jest różnicą dwóch kwadratów. Liczba pojedyńczo parzysta nie może być różnicą dwóch kwadratów.

VI. Summa kwadratów dwóch liczb całkowitych nie może być podzielna przez 7, tylko wtedy gdy każda z tych liczb jest podzielna przez 7.

VII. To samo stosuje się do liczby 11.

VIII. Gdy kwadrat jednej liczby jest summą kwadratów dwóch innych liczb, wtedy jedna ze trzech liczb jest podzielna przez 5. Naprzykład $25=9+16$.

IX. Wyrachować na mniej niż 0,01 każdy z pierwiastków

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \sqrt{1-\sqrt{2}}.$$

X. Gdy kwadrat liczby pierwszej, zmniejszony liczbą 13, jest podzielny przez 9, ta liczba podzielona przez 9 daje resztę 2 albo 7.

XI. Diament ważący 1 karat płaci się 234 franki. Pytanie ile waży diament wartający 5582 franków, wiedząc że wartość małego diamentu jest proporcyonalna do kwadratu z jego ciężaru.

XII. Różnica dwóch kwadratów nieparzystych jest podzielną przez 8.

XIII. Wszelka liczba pierwsza formy $4k+1$ jest summą dwóch kwadratów.

§ 2. SZEŚCIAN I PIERWIASTEK SZEŚCIENNY.

281. *Sześcianem* albo trzecią potęgą liczby jest wieloczyn trzech czynników równych tej liczbie; i tak, sześcian ze 4 jest $4 \times 4 \times 4$ albo $4^3 = 64$; sześcian z $\frac{2}{3}$ jest $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ albo $\frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

Nawzajem, *pierwiastkiem sześciennym* liczby jest taka liczba która, podniesiona do *sześcianu*, wydaje zadaną. I tak, pierwiastkiem sześciennym liczby 64 jest 4, bo $4^3 = 64$; a pierwiastkiem sześciennym liczby $\frac{8}{27}$ jest $\frac{2}{3}$, bo $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.

Wskazuje się że trzeba wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby, pisząc tę liczbę pod pierwiastnikiem $\sqrt{\ }$ w którego otworze położono liczbę 3. I tak, $\sqrt[3]{64}$ i $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ wyrażają pierwiastki sześcienne liczb 64 i $\frac{3}{27}$.

282. Aby umieć wyciągać pierwiastek sześcienny, trzeba znać sześciany dziewięciu pierwszych liczb, które stoją w następującej tablicy.

Liczby:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Sześciany:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Tablica pokazuje że sześcianem liczby 5 jest 125; i nawzajem, pierwiastkiem sześciennym liczby 125 jest 5; i t. d.

Liczby których pierwiastek sześcienny wyraża się liczbą całkowitą albo ułamkową, nazywają się *sześcianami zupełnemi* albo *sześcianami doskonałemi*. I tak, 216, $\frac{27}{64}$ są sześcianami doskonałemi liczb 6, $\frac{3}{4}$. Ale łatwo pojmujemy że liczby całkowite są bardzo rzadko sześcianami doskonałemi (*). Rozumując jako w n° 243 widzimy że, *gdy pierwiastek sześcienny liczby całkowitej nie jest całkowity, to musi być* NIESPÓŁMIERNY, to jest nie może się wyrazić ani liczbą całkowitą ani ułamkową; i można tylko mieć jego wartość przybliżoną, jakośmy to wi-

(*) W pierwszym milionie liczb całkowitych jest tylko *sto* sześcianów doskonałych, bo $100^3 = 1000000$.

dzieli w pierwiastku kwadratowym. I tak, $\sqrt[3]{600}$ jest niespółmierny; dlatego liczba 600 nazywa się sześcianem niezupełnym.

Jeśli chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny przybliżony na mniej niż jedność, z liczby mniejszej od 1000, jako 600, powiedamy: 600 zawiera się między dwoma sześcianami 512 i 729; zatem $\sqrt[3]{600}$ wpada między pierwiastki sześcienne tych liczb, to jest między 8 i 9. Więc 8 jest pierwiastkiem sześciennym liczby 600, na mniej niż jedność.

283, Zobaczmy teraz jak się wyciąga pierwiastek sześcienny liczby większej od 1000. Ten pierwiastek składa się oczywiście z *dziesiątków* i jedności, aby więc umieć go znaleźć, trzeba naprzód wiedzieć, jak się tworzy jego sześcian. Owoż, jakakolwiek jest liczba cyfer pierwiastku sześciennego, można go zawsze uważać jako złożony tylko z dziesiątków i jedności, licząc do dziesiątków sta, tysiące, etc. Zatem oznaczając, dla ogólności, przez a liczbę wszystkich dziesiątków, przez b liczbę jedności, kwadrat pierwiastku będzie, jako już wiadomo:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

mnożąc potem ten kwadrat przez $a+b$, otrzymamy sześcian summy $a+b$.

Mnożenie wykonywa się mnożąc każdą część mnożnej przez każdą część mnożnika. Uważając że $a^2\times a=a^3$, $2ab\times a=2a^2b$, $b^2\times a=ab^2$, $2a^2b+a^2b=3a^2b$; znajdujemy

$$\begin{array}{lr}
 & a^2+2ab+b^2 \\
 & a+b \\
\hline
\text{Wieloczyn mnożnej przez } a & a^3+2a^2b+ab^2 \\
\text{Wieloczyn mnożnej przez } b & a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
\text{więc } (a+b)^3= & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{array}$$

Ta formuła dowodzi ogólnie że:

Sześcian summy dwóch części zawiera sześcian pierwszej części, więcej potrójny wieloczyn kwadratu pierwszej części przez drugą, więcej potrójny wieloczyn pierwszej części przez kwadrat drugiej, więcej sześcian drugiej części.

A jeśli, jakośmy powiedzieli, a oznacza dziesiątki, b jedności, powyższa formuła pokazuje że *sześcian liczby, złożonej z dziesiątków i jedności, składa się z sześcianu dziesiątków, z potrójnego wieloczynu kwadratu dziesiątków przez jedności, z potrójnego wieloczynu jedności przez kwadrat dziesiątków, i z sześcianu jedności.*

284. Nie trudno teraz znaleźć różnicę sześcianów dwóch liczb całkowitych po sobie idących. Oznaczając przez a i $a+1$ te dwie liczby, mamy oczywiście:

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1.$$

Ztąd
$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1.$$

Ten wynik pokazuje że *różnica sześcianów dwóch liczb całkowitych po sobie idących, równa się potrójnemu kwadratowi liczby mniejszej, więcej tą liczbą potrójną i więcej jednością.*

285. Po tem co poprzedza, łatwo będzie pojąć teoryę wyciągania pierwiastku sześciennego z liczby jakiejkolwiek, tem bardziej że rozumowanie jest zupełnie podobne do tego któregośmy w teoryi pierwiastku kwadratowego użyli.

Jako przykład, szukajmy pierwiastku sześciennego liczby 678901.

Ponieważ liczba 678901 jest większa od 1000, jej pierwiastek sześcienny składa się z dziesiątków i jedności. Zatem, ta liczba zawiera *sześcian wszystkich dziesiątków pierwiastku, potrójny wieloczyn kwadratu dziesiątków przez jedności, potrójny wieloczyn dziesiątków przez kwadrat jedności i sześcian jedności;* i jeszcze resztę, jeśli nie jest sześcianem doskonałym. Ale sześcian dziesiątków, będąc liczbą dokładną tysięcy, nie może się mieścić tylko w tysiącach danej liczby, między któremi mogą się jeszcze znajdować tysiące pochodzące z trzech innych części sześcianu, a nawet i z reszty jeśli jest jaka. Jeśli więc oddzielimy trzy ostatnie cyfry liczby 678901, i wyciągniemy pierwiastek największego sześcianu jaki się mieści w 678 *tysiącach*, otrzymamy liczbę dziesiątków żądanego pierwiastku, albo liczbę za wielką. Aliści ta liczba nie może być za wielka; bo pierwiastek sześcienny samych tysięcy danej liczby, to jest jej części tylko, nie może mieć więcej dziesiątków niż pierwiastek sześcienny całej liczby. Więc, biorąc pierwiastek największego sześcianu zawartego w 678 tysiącach danej liczby, to jest 8, znajdujemy wszystkie dziesiątki szukanego pierwiastku.

Teraz, aby wyznaczyć jedności tego pierwiastku, odciągamy 512000, sześcian dziesiątków, od 678901; czyli, co wychodzi na jedno, odciągamy 512 *tysięcy* od 678 *tysięcy* danej liczby, i spuszczamy cały przedział 901. Co daje resztę 16690 która zawiera już tylko potrójny wieloczyn kwadratu dziesiątków pierwiastku przez jedności, potrójny wieloczyn dziesiątków przez kwadrat jedności i sześcian jedności, więcej jeszcze ostatnią resztę jeśli jest jaka. Owoż, pierwsza z tych części, potrójny wieloczyn kwadratu dziesiątków przez jedności, będąc dokładną liczbą *set*, nie może się znajdować tylko w *stach* reszty 166901; a te sta mogą jeszcze zawierać sta pochodzące z dwóch innych części sześcianu i nawet z ostatniej reszty. Więc, jeśli podzielimy 1669 *set* reszty, przez potrójny kwadrat znalezionych dziesiątków, to jest przez 192, otrzymamy jedności żądanego pierwiastku, albo cyfrę tylko za wielką. Dzielenie daje iloraz 7. Aby się zapewnić czy iloraz nie jest większy od jedności pierwiastku, dosyć byłoby podnieść znaleziony pierwiastek 87 do sześcianu i zobaczyć czy ten sześcian może się odjąć od danej liczby. Ale to wszystko otrzymuje się daleko prościej, następującym sposobem: na prawej stronie potrójnych dziesiątków 24, pisze się jedności 7, i tak utworzoną liczbę 247 mnoży się przez 7; co daje 1729, potrójny wieloczyn dziesiątków przez jedności i kwadrat jedności: ten wynik dodaje się to do potrójnego kwadratu dziesiątków 19200, i summę 20829 mnoży się przez jedności 7, co daje oczywiście potrójny wieloczyn kwadratu dziesiątków pierwiastku przez jedności, potrójny wieloczyn dziesiątków przez kwadrat jedności, i sześcian jedności. Owoż, te trzy części znajdują się właśnie w pierwszej reszcie 166901, od której ich summa powinna się odjąć. Więc jeśli odciąganie jest nie możebne, to dowodem że wyznaczona cyfra jedności pierwiastku za wielka; wtedy się ją zmniejsza jednością albo więcej, i znowu tym samym sposobem probuje. Jeśli zaś odciąganie możebne, to otrzymana cyfra jest dokładna, albo za mała. W naszym przykładzie to odciąganie możebne; zatem cyfra 7 nie jest za wielka; a że oczywiście iloraz 7 nie za mały, więc 7 jest dokładną cyfrą jedności. Więc pierwiastek sześcienny liczby 678901 jest 87, na mniej niż jedność.

Powyżej wskazane działania wykonywają się jako następuje: dla łatwiejszego ich pojęcia, oznaczyliśmy przez a dziesiątki, przez b jedności pierwiastku 87.

678901	87	64	247
512	$19200=3a^2$	3	7
166901	$1729=3ab+b^2$		
20398	$20929\times7=(3a^2+3ab+b^2)b.$		

286. Szukajmy teraz pierwiastku sześciennego liczby 183732345, na mniej niż jedność.

Oto wzór działania.

183,732,345	568	25	
125	$7500 = 3a^2$	3	156
58732	$936 = 3ab + b^2$		6
8116345	$8436 = 3a^2 + 3ab + b^2$		
481913	$36 = b^2$		
	$9408 = 3a^2+6ab+3b^2 = 3(a+b)^2$		1688
	13504		8
	954304×8		

Ponieważ dana liczba 183732345 jest większa od 1000, jej pierwiastek sześcienny zawiera dziesiątki i jedności. Więc, na mocy wiadomego rozumowania, aby mieć dziesiątki tego pierwiastku, trzeba wyciągnąć pierwiastek największego sześcianu jaki się mieści w 183732 tysiącach danej liczby. Co już właśnie umiemy. Największy sześcian zawarty w 183 jest 125, a jego pierwiastek 5 ; 5 wyraża dziesiątki pierwiastku sześciennego liczby 183732. Aby wyznaczyć jedności, odciągamy sześcian dziesiątkow, 125, od 183 i do reszty spuszczamy cały przedział 732, co daje 58732 ; dzielimy 587 *set* tej liczby przez potrójny kwadrat znalezionych dziesiątków to jest przez 75 *set*, i bierzemy 6 na iloraz ; 6 będzie szukaną cyfrą jedności albo cyfrą za wielką. Sposobem już wyłożonym, sprawdzamy czy cyfra 6 nie jest za wielka ; to jest : piszemy ją na prawej stronie potrójnych dziesiątków, co daje 156 ; mnożymy tę liczbę przez 6 i dodajemy wieloczyn 936 do potrójnego kwadratu dziesiątków pierwiastku, 7500 ; mnożymy nakoniec summę 8436 przez 6, i odciągamy wieloczyn częściami od reszty 58732; co daje resztę 8116, i tem samem pokazuje że cyfra 6 nie jest za wielka. Ale można się obawiać żeby ta cyfra nie była za mała; tem bardziej żeśmy ją wyznaczyli dzieląc 587 przez 75, a iloraz jest rzeczywiście 7. Owoż wiemy że, gdy ostatnia cyfra pierwiastku sześciennego jest za mała, jednością albo więcej, wtedy odpowiedająca reszta zawiera potrójny kwadrat tego pierwiastku, więcej potrójny pierwiastek i więcej jedność; więc, aby się zapewnić że cyfra 6 nie jest za mała, trzeba sprawdzić czy reszta jest mniejsza od summy tych trzech części. W tym celu, utworzmy najpierwej potrójny kwadrat z 56 , który nam gdzieindziej jeszcze będzie potrzebny ; aby go otrzymać, uważajmy że, oznaczając przez a dziesiątki 5 a przez b jedności 7, mamy ogólnie $3(a+b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2$.

Ale powyżej dany wzór, wyciągania pierwiastku sześciennego, pokazuje oczywiście że

$$936 = 3ab + b^2$$
$$8436 = 3a^2 + 2ab + b^2\,;$$

więc jeśli, do tych liczb, dodamy . $36 = b^2$, kwadrat jedności ;

otrzymamy summę $9408 = 3a^2 + 6ab + 3b^2 = 3(a+b)^2$.

która wyraża potrójny kwadrat znalezionego pierwiastku 56. Jeśli teraz do tej summy dodamy potrójny pierwiastek $56 \times 3 = 168$, i jeszcze jedność, będziemy mieli wynik 9577 który, przewyższając resztę 8116, dowodzi że cyfra 6 nie jest za mała; a uważajmy że do tego zapewnienia, w obecnym przykładzie, już sama liczba 8436, większa od reszty 8116, wystarcza. Ztąd wnosimy że cyfra 6 jest dokładna, a tem samem 56 jest pierwiastkiem największego sześcianu jaki się mieści w 183372. Więc pierwiastek sześcienny liczby 183732345 zawiera 56 dziesiątków.

Żeby teraz znaleźć jedności tego pierwiastku, trzeba odjąć od danej liczby sześcian wyznaczonych dziesiątków 56; czyli, co wychodzi na jedno, odjąć ten sześcian, który znaczy tysiące, od 183732 tysięcy liczby i spuścić, po prawej stronie reszty, przedział 345. Cośmy właśnie już uczynili; bośmy odciągnęli od 183732 naprzód sześcian z 5 dziesiątków a potem, od reszty 58732, odciągnęliśmy wieloczyn 8436×6 który wyraża: potrójny kwadrat z 5 dziesiątków przez 6 jedności, więcej potrójny wieloczyn tych dziesiątków przez kwadrat jedności, i więcej sześcian jedności. Jeśli więc, po prawej stronie reszty 8116, spuścimy przedział 345 co daje 8116345, i podzielimy sta tej liczby przez 9408, to jest przez potrójny kwadrat znalezionych 56 dziesiątków któryśmy wyżej utworzyli, iloraz 8 będzie cyfrą jedności. Sprawdzamy tę cyfrę kładąc ją na prawej stronie potrójnych dziesiątków 16, mnożąc tak utworzoną liczbę 1688 przez 8 i pisząc wieloczyn 13504, w miarę jak go znajdujemy, pod 9408 stami; poczem mnożymy summę 954304 dwóch liczb przez 8, i odciągając wieloczyn częściami od reszty 8116345, znajdujemy resztę 481913 która, na samo spojrzenie, mniejsza od potrójnego kwadratu pierwiastku 568, dowodzi że cyfra 8 nie jest za mała. A że oczywiście cyfra 8 nie za wielka; więc 568 jest pierwiastkiem sześciennym liczby 183732345, na mniej niż jedność.

287. Z tego co poprzedza wywodzi się następujące ogólne

PRAWIDŁO: *Aby wyciągnąć, na mniej niż jedność, pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej, trzeba ją podzielić na przedziały trzech cyfer, zaczynając od prawej ręki; ostatni może mieć tylko jedną albo dwie cyfry. Liczba tych przedziałów wskazuje liczbę cyfer pierwiastku.*

To zrobiwszy, wyciąga się pierwiastek największego sześcianu jaki się mieści w pierwszym przedziale z lewej strony; co daje pierwszą cyfrę żadanego pierwiastku.

Odciąga się sześcian tej cyfry od pierwszego przedziału, i po prawej stronie reszty spuszcza się cały drugi przedział. Po czem, oddziela się dwie ostatnie cyfry ztąd wynikającej liczby, i dzieli się jej sta przez potrójny kwadrat znalezionej cyfry pierwiastku; część całkowita ilorazu wyznacza drugą cyfrę szukanego pierwiastku, albo cyfrę za wielką. Probuje się tej cyfry sposobem wiadomym, a jeśli dobra, spuszcza się trzeci przedział, po prawej stronie reszty; i znowu się oddziela dwie ostatnie cyfry tak utworzonej liczby, i dzieli się jej sta przez potrójny kwadrat liczby utworzonej z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku; część całkowita ilorazu daje trzecią cyfrę pierwiastku, albo cyfrę za wielką, którą się sprawdza jako poprzedzające.

I tak następnie, aż się wyczerpa wszystkie przedziały zadanej liczby.

288. Uwaga. Cyfry pierwiastku sześciennego, prócz pierwszej, wyznaczają się dzieleniem, a iloraz może znacznie przewyższać szukaną, zwłaszcza gdy chodzi o drugą a nawet i o trzecią cyfrę pierwiastku którego pierwszą jest jedność. W takim razie dobrze jest znać następujący sposób, który może często oszczędzić mozolnych probowań. Weźmy przykład.

Szukajmy pierwiastku sześciennego liczby 4816789, na mniej niż jedność. Urządzając rachunek, jako w poprzedzającym przykładzie, mamy

$\sqrt[3]{4'816'789} =$	168	
3 816	300	36
720789	216	6
75157	516×6	
	36	
	76800	488
	3904	8
	80704×8	

Aby otrzymać drugą cyfrę pierwiastku, trzebaby, wedle prawidła, dzielić 38 przez 3; co dałoby iloraz 12 daleki od prawdziwej cyfry 6. Ale, nazywając a i b dwie pierwsze cyfry pierwiastku, wiemy że liczba 3816 zawiera wieloczyn $(3a^2\times 100+3a\times 10\times b^3)b$. Owoż, cyfra jedności b jest mniejsza od 10 a tem samem cały nawias mniejszy od $(3a^2+3a+1)100$; więc, jeśli podzielimy 38 przez $3a^2+3a+1$ to jest przez 7, otrzymamy iloraz mniejszy od szukanej cyfry jedności albo mało od niej różny. W naszym przykładzie ten iloraz jest większy od 5. Dlatego wzięliśmy cyfrę 6, i sprawdziliśmy. Następnie, aby wyznaczyć trzecią cyfrę, dzielimy 7207 przez 768; iloraz jest 9; ale dodając $3.16+1=49$ do 768, i przez summę 817 dzieląc 7207 otrzymujemy iloraz 8. Wzięliśmy ten ostatni na trzecią cyfrę, i sprawdziliśmy. Tym sposobem, bez wielkich rachunków, znajdujemy że 168 jest wartością pierwiastku sześciennego liczby 4816789, przybliżoną na mniej niż jedność.

289. Można, jako w pierwiastku kwadratowym, łatwo wiedzieć czy znaleziony pierwiastek sześcienny różni się od prawdziwego mniej albo więcej niż *połową jedności*. Jakoż, niech będą ogólnie dwie liczby a i $a+\frac{1}{2}$ różniące połową jedności; mamy oczywiście

$$(a+\tfrac{1}{2})^3=a^3+\tfrac{3}{2}a^2+\tfrac{3}{4}a+\tfrac{1}{8};$$

więc
$$(a+\tfrac{1}{2})^3-a^3=\tfrac{3}{2}a^2+\tfrac{3}{4}a+\tfrac{1}{8}.$$

Ten wynik jasno pokazuje że, *gdy dwie liczby różnią się połową jedności, różnica ich sześcianów składa się z* $\frac{3}{2}$ *kwadratu liczby mniejszej, więcej* $\frac{3}{4}$ *tej liczby, więcej* $\frac{1}{8}$ *jedności.*

Stosując to twierdzenie do dwóch powyższych przykładów, widzimy że, w ostatnim reszta 75157, na samo spojrzenie, jest większa od *pół* summy $3904+80704+64$, więcej $\frac{3}{4}$ pierwiastku 168, więcej $\frac{1}{8}$; ztąd wnosimy że $\sqrt[3]{4816789}$ różni się od znalezionej wartości 168 więcej niż połową jedności, przez niedostatek. Więc, biorąc 169 mamy wartość pierwiastku sześciennego liczby 4816789, przybliżoną na mniej niż pół jedności ale przez *zbytek*.

Przeciwnie w przedostatnim przykładzie, reszta 481913 jest mniejsza od $\frac{1}{2}$ summy $13504+954304$; więc 568 jest wartością pierwiastku sześciennego liczby 183, przybliżoną na mniej niż pół jedności przez *niedostatek*.

Wyciąganie pierwiastku sześciennego z ułamków albo z liczb jakichkolwiek, z przybliżeniem wyznaczonem, opiera się, z małą różnicą, na tych samych rozumowaniach co w pierwiastku kwadratowym; dlatego pokrótce tylko rzecz tę wyłożymy.

290. *Aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby ułamkowej, na mniej niż jedność, dość wyciągnąć go z całkowitej części tej liczby, na mniej niż jedność.*

I tak, niech będzie liczba $\frac{3846}{15}$ z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, na mniej niż jedność. Iloraz $\frac{3846}{15}$ jest większy od 256 a mniejszy od 257; co pokazuje że on wpada między 6^3 i 7^3. Więc $\sqrt[3]{\frac{3846}{15}}$ jest zawarty między 6 i 7. Ztąd wnosimy że 6 jest wartością pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{3846}{15}}$ przybliżoną na mniej niż jedność.

291. Szukajmy pierwiastku sześciennego liczby jakiejkolwiek N, z przybliżeniem $\frac{1}{k}$.

Pierwiastek sześcienny liczby N, przybliżony na mniej niż $\frac{1}{k}$, jestto oczywiście największy wielownik przybliżenia $\frac{1}{k}$ zawarty w $\sqrt[3]{N}$. Zatem, nazywając x liczbę całkowitą razy jaką $\frac{1}{k}$ mieści się w $\sqrt[3]{N}$, mamy,

$$\frac{x+1}{k} > \sqrt[3]{N} > \frac{x}{k}; \text{ zkąd } \quad (k+1)^3 > Nk^3 > x^3.$$

To dowodzi że liczba całkowita x jest pierwiastkiem sześciennym wieloczynu Nk^3, na mniej niż jedność. Więc, *aby otrzymać pierwiastek sześcienny liczby jakiejkolwiek N, na mniej niż $\frac{1}{k}$, dość wyciągnąć, z wieloczynu Nk^3, pierwiastek sześcienny na mniej niż jedność i podzielić go przez k.*

Na zastosowanie tego prawidła, wyznaczmy pierwiastek sześcienny liczby 7 na mniej niż $\frac{1}{5}$.

Mnożymy liczbę 7 przez 5^3, co daje $7\times5^3=875$. Owoż, $\sqrt[3]{875}$ równa się 9, na mniej niż jedność. Więc $\frac{9}{5}$ jest wartością pierwiastku $\sqrt[3]{7}$ przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{5}$, przez niedostatek. Co widoczne.

392. Niech będzie, na drugi przykład, liczba $\frac{40}{3}$ z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny na mniej niż $\frac{2}{7}$.

Mamy tu $k=\frac{7}{2}$; zatem $\frac{40}{3}\times(\frac{7}{2})^3=571+\frac{2}{3}$. Owoż, $\sqrt[3]{571+\frac{2}{3}}$ równa się 8, na mniej niż jedność; więc $8\times\frac{2}{7}$ jest wartością pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{40}{3}}$ przybliżoną na mniej niż $\frac{2}{7}$. I w samej rzeczy, $\sqrt[3]{571+\frac{2}{3}}$ mieści się między 8 i 9; zatem $\sqrt[3]{\frac{40}{3}}$ jest zawarty między dwiema liczbami $\frac{8\times2}{7}$ i $\frac{9\times2}{7}$, których różnica czyni $\frac{2}{7}$. Ztąd wynika że każda z tych liczb jest wartością przybliżoną pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{40}{3}}$ na mniej niż $\frac{2}{7}$, pierwsza przez niedostatek a druga przez zbytek.

293. Dwa powyższe przykłady jasno pokazują że można otrzymać pierwiastek sześcienny liczby jakiejkolwiek, z takiem przybliżeniem z jakiem się podoba.

294. Powtarzając rozumowanie użyte w n° 279, łatwo się dowodzi dwóch następujących twierdzeń, odpowiednych tym któreśmy w teoryi pierwiastku kwadratowego okazali.

1° *Wieloczyn pierwiastków sześciennych liczb jakichkolwiek, równa się pierwiastkowi sześciennemu wieloczynu tych liczb.* I NAWZAJEM.

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a\times b\times c}.$$

A następnie, 2° *Iloraz pierwiastków sześciennych dwóch liczb jakichkolwiek równa się pierwiastkowi sześciennemu ilorazu tych liczb.* I NAWZAJEM.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

To ostatnie twierdzenie ułatwia znalezienie wartości przybliżonej pierwiastku sześciennego.

295. *Gdy oba wyrazy ułamka są sześcianami zupełnemi, otrzymuje się pierwiastek sześcienny wyciągając go z licznika i z mianownika.*

Jakoż, na mocy powyższego twierdzenia, mamy:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}.$$

296. Jeśli tylko mianownik ułamka jest sześcianem zupełnym, jako $\frac{9}{125}$, wtedy, wyciągając pierwiastek sześcienny z licznika na mniej niż jedność i dzieląc go przez pierwiastek sześcienny mianownika, otrzymujemy wartość przybliżoną pierwiastku, na mniej niż jedność, podzieloną przez pierwiastek sześcienny mianownika.

Jakoż, $$\sqrt[3]{\frac{9}{125}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{5}.$$

A że $\sqrt[3]{9}$ wpada między 2 i 3; więc $\frac{2}{5}$ jest przybliżoną wartością pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{9}{125}}$, na mniej niż $\frac{1}{5}$.

297. Uwaga. Gdy mianownik danego ułamka nie jest sześcianem zupełnym, można go nim zrobić, mnożąc oba wyrazy przez kwadrat mianownika, albo tylko przez czynniki pierwsze tego mianownika przyzwoicie dobrane. I tak, niech będzie ułamek $\frac{28}{48}$. Mnożąc oba wyrazy przez 48^2, mamy

$$\sqrt[3]{\frac{28}{48}}=\frac{\sqrt[3]{28\times48^2}}{48}=\frac{\sqrt[3]{64512}}{48}.$$

Owoż, $\sqrt[3]{64512}$ wpada między 40 i 41: więc $\frac{40}{48}$ albo $\frac{5}{6}$ jest wartością przybliżoną pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{28}{48}}$, na mniej niż $\frac{1}{48}$.

Uważajmy teraz że $$\frac{28}{48}=\frac{7}{12}=\frac{126}{2^3.3^3}.$$

Zatem $$\sqrt[3]{\frac{28}{48}}=\frac{\sqrt[3]{126}}{6}.$$

A że $\sqrt[3]{126}=5$ na mniej niż jedność; więc tu, mamy tylko prawo twierdzić że $\frac{5}{6}$ jest przybliżoną wartością pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{28}{48}}$ na mniej niż $\frac{1}{6}$; chociaż istotnie błąd jest mniejszy od $\frac{1}{48}$, jakośmy dopiero co widzieli.

298. *Gdy ułamek jest sześcianem zupełnym, wtedy ta sama liczba, mnożąc albo dzieląc licznik i mianawnik, czyni je sześcianami zupełnemi.*

Weźmy ułamek $\frac{16}{54}$ równy sześcianowi zupełnemu $\frac{8}{27}$. Liczba 4 mnożąc mianownik $54=27\times2$ czyni go sześcianem zupełnym, i mamy $\frac{16\times4}{27\times2^3}=\frac{8}{27}$; więc $16\times4=\frac{8}{27}\times6^3$. Co dowodzi że wieloczyn 16×4 jest sześcianem zupełnym.

Ztąd wniosek. *Gdy ułamek jest sześcianem zupełnym, wtedy wieloczyn licznika przez kwadrat mianownika jest sześcianem zupełnym.*

Więc, jeśli chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ułamka, nie wiedząc czy jest sześcianem zupełnym, dość wyciągnąć ten pierwiastek na mniej niż jedność, z wieloczynu licznika przez kwadrat mianownika, i podzielić go przez mianownik. Iloraz będzie dokładną albo przybliżoną wartością pierwiastku, wedle tego jak dany ułamek jest albo nie jest sześcianem zupełnym.

I tak, $$\sqrt[3]{\frac{16}{54}}=\frac{\sqrt[3]{16\times54^2}}{54}=\frac{2^2\times3^2}{54}=\frac{2}{3}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{6}{25}}=\frac{\sqrt[3]{6\times5}}{5};$$ owoż $\sqrt[3]{30}=3$ na mniej niż jedność; więc $\frac{3}{5}$ jest wartością przybliżoną pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{6}{25}}$, na mniej niż $\frac{1}{5}$.

299. Ztego co poprzedza wynika oczywiście że, *gdy wyrazy*

ułamka niezredukownego, jako $\frac{8}{25}$, nie są oba sześcianami zupełnemi, pierwiastek sześcienny tego ułamka jest niespółmierny.

300. Zwykle wyciąga się pierwiastek sześcienny, jako kwadratowy, na mniej niż jedność danego rzędu dziesiętnego.

I tak, niech będzie liczba całkowita 2, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny na mniej niż 0,01.

Uważamy że:

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{\frac{2\times100^3}{100^3}}=\frac{\sqrt[3]{2\times100^3}}{100}.$$

Wyciągamy z wieloczynu 2×100^3 pierwiastek sześcienny, i dzielimy go przez 100. To wszystko tak się wykonywa:

2	1,25	
10'00	300	32
2 720'00	64.	2
468 25	364×2	
	4	
	43200	365
	1835	5
	45035×5	

Zamiast dopisać do liczby 2 odrazu *sześć* zer, jako wskazuje prawidło, napisaliśmy je przedziałami, po *trzy*, w miarę potrzeby; i znaleziony pierwiastek sześcienny 125 na mniej niż jedność, podzieliliśmy przez 100. To pokazuje że $\sqrt[3]{2}$ jest zawarty między 1,25 i 1,26. Więc 1,25 jest wartością tego pierwiastku przez niedostatek, na mniej niż 0,01 jakośmy żądali.

Wartość 1,26, przez zbytek, jest więcej przybliżona.

Ztąd wynika

Prawidło: *Aby wyznaczyć pierwiastek sześcienny liczby całkowitej, na mniej niż jedność dziesiętną danego rzędu, trzeba dopisać do tej liczby* TRZY RAZY TYLE ZER ILE *chcemy dziesiętnych w pierwiastku; wyciągnąć z tego wieloczynu pierwiastek sześcienny na mniej niż jedność, i, w otrzymanym wyniku, oddzielić tyle dziesiętnych ileśmy żądali.*

301. Pokażmy teraz jak się wyciąga pierwiastek sześcienny z liczby dziesiętnej.

Wynika z mnożenia że, w sześcianie liczby dziesiętnej, liczba cyfer dziesiętnych jest zawsze wielownikiem ze 3. Więc, jeśli w danej liczbie dziesiętnej, liczba dziesiętnych nie jest wielownikiem ze 3, trzeba przede wszystkiem, uczynić ją tym wielownikiem dopisując, po prawej stronie, jedno albo dwa zera, wedle potrzeby. Potem, z tak przygotowanej liczby nie zważając na przecinek, wyciągnąć pierwiastek sześcienny na mniej niż jedność, i w otrzymanym wyniku oddzielić *trzy razy mniej* dziesiętnych niż było w ostatniej liczbie.

Niech będzie np. 36,789. Wyciągając pierwiastek sześcienny z tej liczby dziesiętnej jakoby z całkowitej, otrzymujemy:

36,789	3,3	
27	2700	93
97'89	279	3
8 52	2979×3	

Więc 3,3 jest wartością pierwiastku $\sqrt[3]{36,789}$, na mniej niż 0,1.

Weźmy na drugi przykład 12,3456. Dopisawszy dwa zera, wyciągamy pierwiastek sześcienny z liczby dziesiętnej 12,345600 jakoby z całkowitej, i znajdujemy

12,345600	2,31	
8	1200	63
4345	189	3
178600	1389×3	
19209	9	
	158700	691
	691	1
	159391	

Więc 2,31 jest przybliżoną wartością pierwiastku $\sqrt[3]{12,3456}$ na mniej niż 0,01.

Niech będzie nakoniec liczba dziesiętna 3,14159265, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny na mniej niż 0,01.

Wedle ogólnego prawidła, *dość* wziąć *sześć* dziesiętnych i wyciągnąć pierwiastek sześcienny. Co daje $\sqrt[3]{3,141592} = 1,46$ na mniej niż 0,01.

302. Wyciągnijmy pierwiastek sześcienny z ułamka $\frac{5}{7}$ na mniej niż 0,01

Stosując rzeczone prawidło, mamy najpierwej

$$\frac{5 \times 100^3}{7} = 714285 + \tfrac{5}{7};\ \text{potem},\ \sqrt[3]{0,714285} = 0,89 \ldots$$

Więc 0,89 jest wartością przybliżoną pierwiastku $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ na mniej niż 0,01.

Zatem, *aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby ułamkowej na mniej niż jedność danego rzędu dziesiętnego, dość jest zamienić liczbę ułamkową na dziesiętną, wyznaczając trzy razy tyle dziesiętnych ile ich w pierwiastku mieć chcemy, i wyciągnąć pierwiastek sześcienny z tej liczby dziesiętnej.*

WYCIĄGANIE PIERWIASTKU SZEŚCIENNEGO Z LICZB PRZYBLIŻONYCH.

303. Nazywamy a liczbę przybliżoną która się różni od prawdziwej błędem α, i oznaczamy przez ε błąd jaki się popełnia wyciągając pierwiastek sześcienny z liczby przybliżonej zamiast dokładnej.

Rozróżniamy dwa przypadki.

1° Jeśli a jest liczbą przybliżoną przez *niedostatek,* wtedy liczba prawdziwa wyraża się przez $a+\alpha$; zatem błąd pierwiastku jest

$$\sqrt[3]{a+\alpha} - \sqrt[3]{\alpha} = \varepsilon.$$

Odosobnijmy pierwszy pierwiastnik i podnieśmy obie strony do sześcianu, otrzymamy

$$(\sqrt[3]{a+\alpha})^3 = (\sqrt[3]{a} + \varepsilon)^3.$$

wykonywając wskazane działanie, będzie

$$a + \alpha = a + 3\varepsilon(\sqrt[3]{a})^2 + 3\varepsilon^2 \sqrt[3]{a} + \varepsilon^3;$$

Ztąd, znosząc po obydwóch stronach liczbę a, zostaje

$$\alpha = 3\varepsilon(\sqrt[3]{a})^2 + 3\varepsilon^2\sqrt[3]{a} + \varepsilon^3.$$

Z tej równości wynika oczywiście że

$$3\,\varepsilon(\sqrt[3]{a})^2 < \alpha. \text{ Więc } \varepsilon < \frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a})^2}.$$

To pokazuje że błąd ε, który popełniamy wyciągając pierwiastek sześcienny z liczby a przybliżonej przez niedostatek, jest mniejszy od *trzeciej części* błędu przybliżenia α, podzielonego przez kwadrat pierwiastku sześciennego liczby a.

A jeśli liczba a jest większa od 1, wtedy błąd ε jest mniejszy od $\frac{1}{3}\alpha$.

2° Przypuśćmy teraz że liczba a jest przybliżona przez *zbytek*; wtedy liczba prawdziwa jest $a-\alpha$, i błąd pierwiastku wyraża się przez

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a-\alpha} = \varepsilon.$$

Odosobniając pierwszy pierwiastnik, i podnosząc do sześcianu obie strony równości, będzie

$$a = a - \alpha + 3\varepsilon(\sqrt[3]{a-\alpha}) + 3\varepsilon^2\sqrt[3]{a-\alpha} + \varepsilon^3.$$

Zkąd, znosząc liczbę a po obydwóch stronach równości, zostaje

$$0 = 3\varepsilon(\sqrt[3]{a-\alpha})^2 + 3\varepsilon^2\sqrt[3]{a-\alpha} + \varepsilon^3 - \alpha$$

albo $$3\varepsilon(\sqrt[3]{a-\alpha})^2 + 3\varepsilon^2\sqrt[3]{a+\alpha} + \varepsilon^3 = \alpha.$$

Co pokazuje że

$$3\varepsilon(\sqrt[3]{a-\alpha})^2 < \alpha. \text{ Więc } \varepsilon < \frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a-\alpha})^2}.$$

Ta formuła i poprzednia dowodzą że, wyciągając pierwiastek sześcienny z liczby α, popełniamy błąd ε mniejszy od *trzeciej części* błędu przybliżenia α, podzielonego przez kwadrat pierwiastku sześciennego liczby przybliżonej, *wziętej* przez niedostatek.

Ale trzeba pamiętać że, biorąc pierwiastek sześcienny przybliżony liczby a, zamiast dokładnego, popełniamy nowy błąd który do błędu ε dodać należy.

Jako przykład, szukajmy pierwiastku sześciennego liczby 12,34 przybliżonej przez niedostatek na mniej niż 0,01.

Mamy tu $\alpha < 0{,}01$; a że $\sqrt[3]{12{,}34} > 2$, zatem $\varepsilon < \frac{0{,}01}{3 \times 4} < 0{,}001$.

Owoż $\sqrt[3]{12{,}34} = 2{,}317\ldots$ summa dwóch błędów jest mniejsza od $0{,}001 + 0{,}008 < 0{,}009$; więc 2,31 jest wartością pierwiastku $\sqrt[3]{12{,}34}$, przybliżoną przez niedostatek na mniej niż 0,01.

Ten przykład niezaprzeczalnie dowodzi że niema koniecznej potrzeby mieć w sześcianie *trzy razy* tyle cyfer dziesiętnych ile ich żądamy w jego pierwiastku (302).

Cwiczenia.

I. Wszelki sześcian zupełny, niepodzielny przez 4, albo przez 7, albo przez 9, daje na resztę $+1$ albo -1.

II. Żadna liczba nie jest sześcianem zupełnym jeśli, będąc podzielna przez liczbę pierwszą, nie jest podzielna przez sześcian tej liczby.

III. Żadna liczba nie może być sześcianem doskonałym, 1° jeśli jej jedności są 2 albo 6, a cyfra dziesiątków *parzysta*; 2° jeśli jedności są 4 albo 8 a cyfra dziesiątków *nieparzysta*; 3° jeśli jedności są 5 a cyfra dziesiątków nie jest ani 2 ani 7.

IV. Różnica między sześcianem całkowitym i jego pierwiastkiem jest podzielna przez 6.

V. Żadna liczba nie może być zarazem *kwadratem* i *sześcianem* jeśli nie jest *szóstą* potęgą.

VI. Ile trzeba znać dokładnych cyfer liczby całkowitej, aby można otrzymać jej pierwiastek sześcienny na mniej niż jedność?

§ III. O PIERWIASTKACH W OGÓLNOŚCI.

304. Wiemy że wieloczyn czynników równych jednej liczbie nazywa się jej *potęgą*; i tak, 32 czyli 2^5 jest potęgą *piątą* liczby 2, a 5 jest wykładnikiem tej potęgi. Nawzajem, liczba z której powstaje potęga nazywa się jej *pierwiastkiem*; i tak, 2 jest pierwiastkiem *piątym* liczby 32, i wyraża się pisząc $\sqrt[5]{32}$. Liczba 5, położona w otworze pierwiastnika, wskazująca stopień pierwiastku, nazywa się *wskazem* tego pierwiastku; wartości $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{2}$.., nazwano ogólnie *pierwiastnikami*. Pierwiastnik kwadratowy pisze się bez żadnego wskazu.

Możnaby, zogólniając rozumowanie użyte w teoryi pierwiastku sześciennego, dowieśdź że, aby wyciągnąć pierwiastek m^{ty} z liczby całkowitej, trzeba ją podzielić na przedziały m cyfer zawierające, i wyciągnąć pierwiastek największej potęgi m^{tej} jaka się mieści w pierwszym przedziale z lewej strony, i t. d. Ale wyciąganie wprost pierwiastków stopnia wyższego nad trzeci, nie jest działaniem praktycznem; to wyciąganie wykonywa się za pomocą pewnych liczb nazwanych *logarytmami*, które należą do algebry. Dlatego powiemy o tych pierwiastkach to tylko co na tem miejscu o nich powiedziane być powinno.

305. Dla skrócenia mowy i ogólności rozumowania, oznaczymy liczby literami. I tak, $\sqrt[n]{a^m}$ znaczyć będzie pierwiastek stopnia n^{tego} z potęgi m^{tej} liczby jakiejkolwiek a. To zrozumiawszy, łatwo się dowiedzie dwóch następujących twierdzeń które są zogólnieniem już wiadomych.

1° *Jeśli pierwiastek n^{ty} liczby całkowitej nie jest całkowity, to musi być niespółmierny.*

2° *Jeśli wyrazy ułamka niezredukownego nie są oba potęgami jednego stopnia, ten ułamek nie jest potęgą żadnej liczby.*

3° *Wieloczyn pierwiastków n^{tych} liczb jakichkolwiek równa się pierwiastkowi n^{mu} tych liczb; i nawzajem.*

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

4° *Iloraz pierwiastków n^{tych} dwóch liczb jakichkolwiek równa się pierwiastkowi n^{mu} tych liczb, i nawzajem.*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Dowiedziemy teraz kilku ważniejszych twierdzeń, często potrzebnych.

306. *Nie zmienia się wartości pierwiastnika, gdy się mnoży albo dzieli jego wskaz i wykładnik przez jedną liczbę.*

Niech będzie pierwiastnik $\sqrt[n]{a^m}$. Samo określenie tego pierwiastnika daje oczywistą równość czyli *tosamość*.

$$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m.$$

Podnieśmy obie strony tej tosamości do potęgi *k*, będzie

$$(\sqrt[n]{a^m})^{nk}=a^{mk};$$

a teraz wyciągnijmy z obydwóch stron pierwiastek stopnia *nk*, otrzymamy: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Co było do dowodzenia.

307. Na mocy powyższego twierdzenia, można czasem uprościć pierwiastnik; i tak

$$\sqrt[6]{2^6.5^3}=\sqrt[6]{(2^2.5)^3}=\sqrt[2]{2^2.5}=2\sqrt{5}.$$

308. *Aby podnieść pierwiastnik do danej potęgi, dość pomnożyć wykładnik liczby pod pierwiastnikiem przez wykładnik tej potęgi, albo podzielić wskaz pierwiastnika przez tenże wykładnik.*

Niech będzie pierwiastnik $\sqrt[n]{a^m}$ który chcemy podnieść do potęgi *k*.

Mamy tosamość $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$.

Podnieśmy obie strony do potęgi *k*, będzie $(\sqrt[n]{a^m})^{nk}=a^{mk}$;

albo, co to samo, $\quad[(\sqrt[n]{a^m})^k]^n=a^{mk}$.

Wyciągając teraz z obydwóch stron pierwiastek n^{ty}, otrzymujemy $(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$.

Co właśnie było do okazania.

Jako przykład, podnieśmy do potęgi 4ej pierwiastnik $\sqrt[8]{18}$; otrzymamy:

$$(\sqrt[8]{18})^4 = \sqrt[8]{18^4} = \sqrt{18} = \sqrt{2.3^2} = 3\sqrt{2}.$$

309. *Aby wyciągnąć pierwiastek z pierwiastnika, dość pomnożyć wskaz pierwiastnika przez wskaz pierwiastku.*

Niech będzie pierwiastnik $\sqrt[n]{a^m}$ z którego chcemy wyciągnąć pierwiastek wskazu k. Ten pierwiastek jest $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}$. Owoż, z samego określenia działania, wynika oczywista równość

$$\left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^k\right)^n = a^m \text{ albo } \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^{nk} = a^m;$$

więc wyciągając pierwiastek nk z obydwóch stron, otrzymujemy:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[nk]{a^m}.$$

Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

310. Zastosujmy. Niech będzie do wyciągania pierwiastek *szósty* z liczby 117649.

Mamy $\sqrt[6]{117649} = \sqrt[3]{\sqrt{117649}}.$

Owoż, $\sqrt{117649} = 343$; a zaś $\sqrt[3]{343} = 7$. Więc $\sqrt[6]{117649} = 7$.

311. Możemy teraz, na mocy powyższego twierdzenia, wyciągnąć z liczby jakiejkolwiek, pierwiastek którego wskaz składa się *z samych czynników* 2 *i* 3; a nawet otrzymać ten pierwiastek z przybliżeniem wyznaczonem.

Szukajmy naprzykład pierwiastku *szóstego* liczby 72, na mniej niż 0,1.

Mamy $\sqrt[6]{72} = \sqrt[3]{\sqrt{72}}.$

Ponieważ liczba 72 jest dokładna, dość będzie wyciągnąć każdy z dwóch pierwiastków na mniej niż 0,1. Co daje $\sqrt{72}=8,4..$, a następnie $\sqrt[3]{8,4}=2,0..$ Teraz uważajmy że błąd pierwszego pierwiastku jest mniejszy od 0,1; zatem błąd drugiego $\varepsilon<\frac{0,1}{3.4}<0,009$. Ale jeszcze dodać trzeba błąd pochodzący z zaniedbania cyfer dziesiętnych ostatniego pierwiastku; a ten błąd jest mniejszy od 0,04. Owoż summa dwóch ostatnich błędów jest mniejsza od $0,009+0,04<0,049$; więc znaleziona wartość 2,0 jest pierwiastkiem szóstym liczby 72, na mniej niż 0,1 a nawet na mniej niż $\frac{1}{2}\times 0,1$.

312, Szukajmy teraz wartości wieloczynu $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$, na mniej niż 0,1.

Wiemy już że $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{2^3\times 3^2}$.

Więc $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{72}}=2,0$ na mniej niż 0,1.

313. Szukajmy jeszcze wartości ilorazu $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$, na mniej niż 0,1.

Uważając że iloraz $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$, widzimy zaraz że ten przykład przywodzi się do poprzedzającego.

314. Kończymy ten przedmiot następującem zadaniem:

Wyznaczyć pierwiastek 24ty liczby 10,4 przybliżonej na mniej niż 0,1 przez niedostatek

Mamy $\sqrt[24]{10,4}=\sqrt[3]{\sqrt[8]{10,4}}$. Owoż $\sqrt[8]{10,4}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{1,04}}}$; więc aby otrzymać pierwiastek 24ty liczby 10,4 dość wyciągnąć z tej liczby, jeden po drugim, *trzy* pierwiastki kwadratowe, i z wyniku wyciągnąć pierwiastek sześcienny; a wszystkie z, jedną dziesiętną więcej niż dane przybliżenie. Wykonywając rachunek, znajdujemy naprzód $\sqrt{10,4}=3,22.$;

tu $\varepsilon<\frac{0,1}{2\times3,2}<0,017$. Zatem błąd tego pierwiastku jest mniejszy od $0,017+0,01<0,027$.

Następnie $\sqrt{3,22}=1,79..$; $\varepsilon<\frac{0,027}{3,5}<0,008$. Zatem błąd pierwiastku mniejszy od $0,008+0,01<0,018$. Potem $\sqrt{1,79}=1,337..$; $\varepsilon<\frac{0,018}{2,6}<0,007$. Zatem, biorąc *trzy* cyfry dziesiętne, popełni się błąd tego pierwiastku mniejszy od summy $0,007+0,001<0,008$.

Nakoniec $\sqrt[3]{1,337}=1,101...$; tutaj $\varepsilon<\frac{0,008}{3}<0,003$. Zatem summa błędów tego pierwiastku jest mniejsza od $0,003+0,002<0,005$.

Więc 1,10 jest wartością pierwiastku $\sqrt[24]{10,4}$ przybliżoną przez niedostatek, nietylko na mniej niż 0,1 jako dana liczba, ale nawet na mniej niż *poł jednej setnej*.

ROŹDZIAŁ DZIESIĄTY.

STOSUNKI I PROPORCYE.

315. Określenia. Nazywa się *stosunkiem* jednej wielkości do drugiej, tej samej natury, *liczba* która wyraża pierwszą wielkość gdy druga jest wzięta za jedność.

I tak, gdy mówimy: *stosunek dwóch przedmiotów jest* 3, to znaczy że pierwszy przedmiot jest 3 razy większy od drugiego; *te dwie wysokości są w stosunku* $\frac{4}{5}$, to znaczy że pierwsza wysokość jest $\frac{4}{5}$ drugiej; i t. d.

Mierzyć wielkość jest szukać jej stosunku do innej wielkości, tej samej natury, wziętej za jedność.

Gdy dwie wielkości są *wielownikami* trzeciej, ta trzecia jest ich *spólną miarą*, i wielkości nazywają się *spółmiernemi*. Dwie liczby całkowite mają spólną miarę całkowitą, przynajmniej jedność; a dwie liczby ułamkowe mają spólną miarę ułamkową.

316. *Stosunek dwóch wielkości jest ilorazem liczb które je mierzą.*

1° Niech będą naprzód dwie wielkości spółmierne, które nazwiemy ogólnie A i B. Przypuszczając że spólna miara m mieści się w pierwszej a razy, w drugiej b razy, mamy

$$A = ma, \qquad B = mb.$$

a i b są dwie liczby całkowite które mierzą wielkości A i B. Druga równość daje $m = \frac{B}{b}$; podstawiając tę wartość za m w pierwszej równości, otrzymujemy

$$A = B \times \frac{a}{b}.$$

Ostatnia równość pokazuje że, jeśli weźmiemy wielkość B

za jedność, wtedy wielkość A wyrazi się liczbą $\frac{a}{b}$, która właśnie oznacza stosunek wielkości A do B. Więc stosunek wielkości A do B wyraża się przez $\frac{A}{B}$, i równa się ilorazowi liczb $\frac{a}{b}$ które mierzą te wielkości.

2° Gdy dwie wielkości są *niespółmierne* jako $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, wtedy powyższe określenie stosunku tyczeć się ich nie może, bo nie ma wyraźnego sensu. Dlatego też, zogólniając to określenie, mówimy że *stosunkiem dwóch wielkości niespółmiernych jest* GRANICA *stosunku wielkości spółmiernych, które się do nich nieskończenie coraz bardziej przybliżają.*

317. Po takiem określeniu, możemy powiedzieć że stosunek dwóch liczb jakichkolwiek a i b jest ilorazem $\frac{a}{b}$, i czyta się a na b. Pierwsza liczba a nazywa się *licznikiem* (*), druga b *mianownikiem* stosunku, tak jako w ułamkach. Co jest logicznem zogólnieniem ułamka który, nawzajem, jest stosunkiem licznika do mianownika. Tym sposobem własności stosunków wprost się wywodzą z własności ułamków.

318. *Stosunek nie zmienia wartości gdy się mnoży albo dzieli oba jego wyrazy przez tę samą liczbę.*

Jakoż, niech będzie stosunek $\frac{a}{b}$. Z określenia stosunku wynika że dzielna a równa się wieloczynowi dzielnika b przez iloraz $\frac{a}{b}$; co się wyraża pisząc $a = b \times \frac{a}{b}$.

Pomnóżmy obie strony przez m, będzie

$$am = bm \times \frac{a}{b}.$$

Ztąd, dzieląc obie strony przez bm, otrzymujemy

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Co było do dowodzenia.

(*) W dawnych dziełach licznik stosunku nazywa się *poprzednikiem* (antecedens) a jego mianownik *następnikiem* (consequens).

Na mocy tej własności, można uprościć stosunek; i tak

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{10}{9}\right)} = \frac{5\times 9}{6\times 10} = \frac{3}{4}.$$

Jeden stosunek jest *odwrotnym* drugiego, gdy ich wieloczyn równa się jedności. I tak, stosunek $\frac{4}{3}$ jest odwrotnym stosunku $\frac{3}{4}$.

Jako przykład stosunków, rozwiążmy następujące zagadnienie.

Słońce jest 1405000 *razy większe od Ziemi; a Jowisz, największa z planet, jest* 1470 *razy większy od Ziemi. Ileż razy Słońce większe od Jowisza?*

Nazywając S, Z, J te trzy ciała, mamy stosunki

$$\frac{S}{Z} = 1405000 \quad \text{i} \quad \frac{J}{Z} = 1470.$$

Ztąd, dzieląc stronami, otrzymujemy

$$\frac{S}{Z}\times\frac{Z}{J} \quad \text{albo} \quad \frac{S}{J} = \frac{1405000}{1470} = 955,7...$$

Co pokazuje że słońce jest więcej niż 955 razy większe od Jowisza.

319. *W ciągu stosunków równych, summa liczników i summa odpowiedających mianowników tworzą stosunek równy danym.*

Jakoż, niech będzie ciąg stosunków równych

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21}.$$

Na mocy określenia, licznik stosunku równa się wieloczynowi z mianownika przez ten stosunek, to jest

$$8 = 12\times\frac{8}{12}.$$

Tak samo $10 = 15\times\frac{10}{15}$, albo $10 = 15\times\frac{8}{12}$,

ponieważ z założenia stosunki $\frac{10}{15}$ i $\frac{8}{12}$ są równe.

Podobnie $6 = 9\times\frac{8}{12}$ i $14 = 21 = \frac{8}{12}$.

Dodajmy te równości stronami; uważając że $\frac{8}{12}$ jest spólnym czynnikiem wieloczynów drugiej strony równości, otrzymamy

$$8+10+6+14=\tfrac{8}{12}(12+15+9+21);$$

a ztąd, dzieląc obie strony przez summę mianowników, wynika ostatecznie

$$\frac{8+10+6+14}{12+15+9+21}=\frac{8}{12}.$$

Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

320. Dowiedzie się podobnie że *w ciągu stosunków równych, różnica liczników i różnica odpowiedających mianowników tworzą stosunek równy danym.*

I tak, z równości $\frac{15}{9}=\frac{10}{6}$ wywodzi się $\frac{15-10}{9-6}=\frac{15}{9}$.

321. Wynika z powyższego twierdzenia ważny wniosek:

W ciągu stosunków równych, pierwiastek kwadratowy summy kwadratów z liczników i pierwiastek kwadratowy summy kwadratów z odpowiedających mianowników tworzą stosunek równy danym.

Jakoż, niech będzie ciąg stosunków równych, wyrażonych ogólnie przez

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Podnosząc do kwadratu, mamy

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ztąd, wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ten wynik jest arcy użyteczną własnością stosunków.

I tak, jeśli np. $x^2+y^2+z^2=1$, wtedy

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Co daje zaraz wartości liczb niewiadomych x, y, z gdy liczby a, b, c są znane; to jest

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ z=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Uwaga I. To co poprzedza stosuje się do potęg i pierwiastków stopnia jakiegokolwiek

Jest więcej nawet. Mamy jeszcze ogólniejsze równości:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}}{\sqrt{\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2}}=\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{abc}}.$$

których się dowodzi jako poprzedzających.

Uwaga II. *W ciągu stosunków nierównych, summa liczników podzielona przez summę odpowiedających mianowników tworzy stosunek zawarty między najmniejszym i największym ze stosunków danych.*

I tak, niech będą stosunki $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}$ dane w porządku ich wielkości; stosunek $\frac{1+4+3+7}{2+7+5+8}$ jest większy od $\frac{1}{2}$ ale mniejszy od $\frac{7}{8}$.

Dowodzenie jako w nº 319.

PROPORCYE.

322. Określenie. *Równość dwóch stosunków nazywa się* proporcyą.

I tak, cztery liczby 3, 4, 6, 8 tworzą proporcyę

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8};$$

albo, jako pisano dawniej, 3:4::6:8

Tę proporcyę czyta się zwyczajnie mówiąc: 3 *na* 4 *równa się* 6 *na* 8; albo jeszcze, 3 *ma się do* 4 *jako* 6 *do* 8.

Pierwszy wyraz 3 i ostatni 8 nazywają się *skrajnemi* proporcyi; a zaś drugi wyraz 4 i trzeci 6, *średniemi*. Liczba 8 jest *czwartą proporcyonalną* do liczb 3, 4, 6. A ogólnie mówiąc, *nazywa się czwartą proporcyonalną* do trzech ilości a, b, c czwarty wyraz x proporcyi w której te ilości są trzema pierwszemi wyrazami, jako

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

Proporcya nazywa się *ciągłą* gdy wyrazy średnie są równe, jako, $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$.

Wtedy liczba średnia 6 nazywa się *średnią proporcyonalną* albo *średnią geometryczną* między 4 i 9; a zaś liczba skrajna 9 jest *trzecią proporcyonalną* do liczb 4 i 6.

323. *W każdej proporcyi liczb, wieloczyn skrajnych równa się wieloczynowi średnich.* I NAWZAJEM.

Niech będą cztery liczby 2, 4, 3, 6 które tworzą proporcyę

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}.$$

Nie zmienimy bynajmniej wartości tych stosunków mnożąc oba wyrazy pierwszego z nich przez mianownik drugiego, a zaś oba wyrazy drugiego stosunku przez mianownik pierwszego. Wskazując rzeczone mnożenia, otrzymujemy równość

$$\frac{2\times 6}{4\times 6}=\frac{3\times 4}{6\times 4}.$$

Owoż, te dwa stosunki równe mają jednakowy mianownik; więc liczniki są równe, to jest $2\times 6=3\times 4$. Co właśnie okazuje że wieloczyn skrajnych równa się wieloczynowi średnich.

Nawzajem, cztery liczby są w proporcyi, gdy wieloczyn skrajnych równa się wieloczynowi średnich. Jakoż, niech będą cztery liczby 2, 3, 4, 6 które dają równość

$$2\times 6=3\times 4.$$

Dzieląc obie strony przez wieloczyn 3×6, otrzymujemy

$\frac{2\times 6}{3\times 6}=\frac{3\times 4}{3\times 6}$, zkąd wynika proporcya $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

324. Powyższa własność proporcyi daje sposób wyznaczenia

jednego z wyrazów gdy trzy inne są wiadome. I tak, szukajmy czwartego wyrazu proporcyi

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{x}.$$

Powinno być $3x=5\times6$; ztąd $x=\frac{5\times6}{3}$.

Co pokazuje że, *wyraz skrajny proporcyi równa się wieloczynowi średnich podzielonemu przez drugi wyraz skrajny.*

325. Szukajmy teraz *średniej proporcyonalnej* między dwiema liczbami 4 i 9. Nazywając x tę średnię proporcyonalną, mamy proporcyę $\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$ która daje $x^2=4\times9$; zkąd $x=\sqrt{4\times9}$.

Więc *średnia proporcyonalna dwóch liczb równa się pierwiastkowi kwadratowemu ich wieloczynu.*

326. *Cztery liczby będące w proporcyi mogą przemienić miejsca, byle tylko wieloczyn skrajnych zostawał równy wieloczynowi średnich.*

I tak, niech będzie proporcya $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Przemieniając miejsce wyrazów średnich, otrzymujemy drugą proporcyę $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$, bo $3\times8=6\times4$.

Biorąc stosunki odwrotne w tych dwóch proporcyach, otrzymujemy oczywiście dwie inne proporcye

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6} \quad \text{i} \quad \frac{6}{3}=\frac{8}{4}.$$

To dowodzi że, ze czterech liczb w proporcyi, można utworzyć *cztery* proporcye.

327, *W każdej proporcyi liczb summa albo różnica dwóch pierwszych wyrazów ma się do summy albo do różnicy dwóch drugich, jako licznik do licznika albo mianownik do mianownika,*

Niech będzie proporcya $\frac{15}{10}=\frac{6}{4}$.

Przemieniając miejsce średnich, mamy proporcyę $\frac{15}{6}=\frac{10}{4}$ która, na mocy wiadomej własności stosunków, daje

$$\frac{15\pm10}{6\pm4}=\frac{15}{6}=\frac{10}{4}.$$

Co dowodzi wysłowianego twierdzenia.

328. Ostatni wynik daje

$$\frac{15+10}{6+4}=\frac{15}{6}=\frac{15-10}{6-4},\quad \text{a ztąd}\quad \frac{15+10}{15-10}=\frac{6+4}{6-4}.$$

Więc w każdej proporcyi, summa dwóch pierwszych wyrazów ma się do ich różnicy, jako summa dwóch drugich ma się także do ich różnicy.

Zaledwie dodać widzimy potrzebę że,

Gdy cztery liczby są w proporcyi, ich potęgi tego samego wykładnika, jako też pierwiastki tego samego wskazu, są w proporcyi: bo to jest oczywistem następstwem równości stosunków.

330. Określenie. Równość dwóch różnic nazywa się czasem PROPORCYĄ ARYTMETYCZNĄ.

I tak, $7-5=6-4$ jest proporcyą arytmetyczną.

Proporcya arytmetyczna jest *ciągła* gdy wyrazy średnie są równe, jako $8-5=5-2$.

Wtedy liczba średnia 5 nazywa się *średnią arytmetyczną liczb* 8 *i* 2.

331. *W proporcyi arytmetycznej summa wyrazów skrajnych równa się summie wyrazów średnich.*

Jakoż, niech będzie proporcya arytmetyczna $10-7=8-5$. Dodając po obydwóch stronach summę $7+5$ nie zepsujemy równości, i otrzymamy:

$$10-7+7+5=8-5+7+5 \quad \text{albo} \quad 10+5=8+7.$$

Co było do dowodzenia.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA.

332. *Średnia arytmetyczna dwoch liczb rowna się połowie ich summy.*

Niech będą dwie liczby 10 i 12; nazywając x ich średnią arytmetyczną, mamy proporcyę arytmetyczną:

$$10-x=x-12.$$

która, na mocy powyższej własności, daje:

$$x+x=10+12, \quad \text{albo} \quad 2x=10+12;$$

więc $$x=\frac{10+12}{2}.$$

333. *Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest większa od ich średniej geometrycznej.*

Weźmy na przykład dwie liczby 3 i 12. Średnia arytmetyczna tych liczb jest $\frac{3+12}{2}$ albo $7\frac{1}{2}$, a ich średnia geometryczna równa się $\sqrt{3\times 12}$ albo 6. Widocznie pierwsza jest większa od drugiej. Co sprawdza wysłowione twierdzenie. Żeby dowieśdź tego twierdzenia, nazwijmy ogólnie a i b dwie liczby jakiekolwiek. Uważajmy zaraz że, gdyby te liczby były równe, ich średnia arytmetyczna i średnia geometryczna byłyby także równe. Bo, średnia arytmetyczna byłaby $\frac{a+b}{2}=\frac{2a}{2}=a$, a średnia geometryczna $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a^2}=a$.

Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że liczba a jest większa od b, i uczyńmy $a=b+\delta$. Wtedy średnia arytmetyczna tych liczb, to jest $\frac{a+b}{2}$, równa się $\frac{2b+\delta}{2}=b+\frac{\delta}{2}$, a ich średnia geometryczna $\sqrt{ab}$ równa się $\sqrt{(b+\delta)b}=\sqrt{b^2+b\delta}$. Owoż, kwadrat pierwszej jest $b^2+b\delta+\frac{\delta^2}{4}$ a zaś kwadrat drugiej $b^2+b\delta$. A że kwadrat średniej arytmetycznej jest oczywiście większy od kwadratu średniej geometrycznej, więc średnia arytmetyczna jest większa od średniej geometrycznej. (*)

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika dwa wnioski.

1° *Wieloczyn dwóch liczb, które czynią summę stałą, jest* NAJWIĘKSZY *możebny gdy te liczby są równe.*

Jakoż, $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$, a tem samem $a\times b<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Więc, jeśli summa $a+b$ jest stałą, wtedy wieloczyn $a\times b$ jest największy możebny gdy się równa kwadratowi $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, to jest gdy liczby a i b są równe.

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

2° Nawzajem, *summa dwóch liczb, które tworzą wieloczyn stały, jest* NAJMNIEJSZA *możebna gdy te liczby są równe.*

Jakoż $a+b>2\sqrt{ab}$. Więc, jeśli wieloczyn $a\times b$ jest stały, wtedy summa $a+b$ jest najmniejsza możebna gdy się równa podwójnej średniej proporcyonalnej $2\sqrt{ab}$, to jest gdy liczby a i b są równe.

334. *Średnią arytmetyczną* wielu ilości, albo po prostu, *średnią* wielu ilości, jest summa tych ilości podzielona przez ich liczbę. I tak, średnia czterech liczb 3, 8, 10, 15 równa się

$$\frac{3+8+10+15}{4} \quad \text{albo } 9.$$

PROPORCYONALNOŚĆ.

335. Określenie. Gdy dwie wielkości są takie że, jedna stając się pewną liczbę razy *większą* albo mniejszą, druga staje się także tę samą liczbę razy *większą* albo mniejszą, mówi się wtedy że *te wielkości zmieniają się w tym samym stosunku,* albo że są *proporcyonalne.*

I tak, zapłata robotnika jest proporcyonalna do trwania jego pracy, albo proporcyonalna do ilości tej pracy.

Przestrzeń którą ciało przebiega prędkością stałą jest proporcyonalna do czasu.

336. Gdy zaś dwie wielkości są takie że, jedna stając się pewną liczbę razy *większą* albo mniejszą, druga staje się tę samą liczbę razy *mniejszą* albo większą, wtedy mówi się że te *wielkości zmieniają się w stosunku odwrotnym,* albo że są *odwrotnie proporcyonalne.*

I tak, w ruchu jednostajnym, prędkość i czas przebieżenia jednej drogi są w stosunku odwrotnym.

Siła, z przyczyny której ziemia i planety poruszają się w swoich orbitach około słońca, jest odwrotnie proporcyonalna do kwadratu ich odległości od słońca.

Liczba drgań poprzecznych wytężonej struny jest proporcyonalna do pierwiastku kwadratowego z ciężaru który ją natęża, ale odwrotnie proporcyonalna do długości, do średnicy, i do pierwiastku kwadratowego gęstości tej struny.

337. Uwaga. Gdy jedna wielkość zależy od kilku innych, a mówi się że jest proporcyonalna albo odwrotnie proporcyonalna do jednej z nich; wtedy ma się zozumieć że te inne zostają niezmienne. I tak, ciężar graniastonu metalicznego równa się wieloczynowi z podstawy, wysokości i gęstości; gdy się mówi że ten ciężar jest proporcyonalny do gęstości, rozumie się przez to że gęstość graniastonu zmienia się, ale jego rozmiary, podstawa i wysokość, zostają te same. Jeśli zaś przeciwnie, ciężar i podstawa zostają te same, a gęstość i wysokość się zmieniają; to wtedy wysokość jest odwrotnie proporcyonalna do gęstości.

Należy pamiętać że wielkości proporcyonalne dlatego się tak nazywają iż stanowią proporcyę; niema więc proporcyonalności, jeśli niema *czterech* wielkości proporcyonalnych.

Z tego co poprzedza wynika że dwie wielkości, odwrotnie proporcyonalne do dwóch innych, są proporcyonalne do ich odwrotności.

Jakoż, niech będą ogólnie dwie wielkości a i b, odwrotnie proporcyonalne do liczb m i n; to znaczy że ich stosunek $\frac{a}{b}$ równa się, nie stosunkowi $\frac{m}{n}$, ale stosunkowi odwrotnemu $\frac{n}{m}$ tych liczb, to jest $\frac{a}{b}=\frac{n}{m}$.

Więc $\frac{a}{b}=\frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$ albo $\frac{a}{\left(\frac{1}{m}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Zatem, mówić że wielkości a, b, c są proporcyonalne do m, n, p jestto wyrazić równości

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}.$$

A zaś mówić że wielkości a, b, c są odwrotnie proporcyonalne do m, n, p jestto wyrazić równości

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{m}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{p}\right)} \quad \text{albo} \quad ma=nb=pc.$$

PODZIAŁ NA CZĘŚCI PROPORCYONALNE ALBO ODWROTNIE PROPORCYONALNE.

Zag. LVII. *Podzielić summę 540 na trzy części proporcyonalne do liczb 2, 5, 8.*

Jeśli nazwiemy x, y, z trzy szukane części, widzimy że rozwiązać dane zagadnienie jestto znaleźć wartości zadość czyniące równościom $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}$.

Owoż, summa liczników jest dana 540; zatem

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}=\frac{540}{2+5+8}.$$

Ztąd wynika $x=\frac{540}{15}\times2=72$, $y=\frac{540}{15}\times5=180$, $z=\frac{540}{15}\times8=288$.

Te wartości rozwiązują zagadnienie, bo oczywiście ich summa czyni 540; a dzieląc je, odpowiednio przez 2, 5, 8, otrzymuje się wyniki równe.

339. Można wprost, bez wiedzy stosunków, rozwiązać powyższe zagadnienie. Jakoż, gdyby dana liczba 540 równała się summie liczb proporcyonalnych $2+5+8$ czyli 15, wtedy pierwsza część byłaby 2, druga 5, trzecia 8. Więc, aby znaleźć te trzy części, dość rozdzielić daną liczbę 540 na 15 części równych, i wziąć 2, 5 i 8 tych części. Działy tak wynaczone, są $\frac{540}{15}\times2$ albo 72, $\frac{540}{15}\times5$ albo 180, $\frac{540}{15}\times8$ albo 288; jako wyżej.

Zag. LXX. *Podzielić liczbę 12 na trzy części proporcyonalne do liczb* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

Sprowadzając te ułamki do jednego mianownika, będzie $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, Widzimy teraz że podzielić liczbę 540 na części proporcyonalne do ułamków $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, jest oczywiście to samo co podzielić ją na trzy części proporcyonalne do całkowitych 8, 9, 10. Tym sposobem, zagadnienie przywodzi się do już wiadomego. Szukane części są $\frac{32}{9}$, $\frac{36}{9}$, $\frac{40}{9}$.

Zag. LXXI. *Podzielić 2680 na 4 części takie, aby pierwsza była do drugiej w stosunku 2 do 3 ; druga do trzeciej w stosunku $\frac{1}{3}$ do $\frac{1}{4}$; a trzecia do czwartej w stosunku 1 do $\frac{1}{2}$.*

Nazywając x, y, z, u cztery szukane części, mamy:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3},\ \frac{y}{4}=\frac{z}{3}\ \ \frac{z}{2}=u.$$

Sprowadzając do jednego mianownika stosunki w które y wchodzi, będzie:

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{9},\ \ \frac{z}{2}=u;$$

potem, sprowadzając do jednego mianownika stosunki w które z wchodzi, znajdziemy:

$$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{18}=\frac{u}{9}.$$

Ztąd, znając summę liczników, wywodzimy:

$$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{18}=\frac{u}{9}=\frac{2680}{67}=40.$$

Więc $x=40\times16=640$, $y=960$, $z=720$, $u=360$.

Zag. LXXII. *Rozdzielić 1000 zł. między trzy osoby, tak żeby drugi dział był $\frac{2}{3}$ pierwszego, a trzeci $\frac{5}{4}$ drugiego.*

Odp. $\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{200}{3}$; etc.

Zag. LXXIII. *Pewien ojciec ma trzech synów, z których najstarszy i najmłodszy poszli do wojska, a średni gospodaruje. Dowiedziawszy się że jeden z wojskowych synów zginął na wojnie, taki zostawia testament: jeśli najstarszy syn wróci, dostanie połowę więcej niż średni; jeśli wróci najmłodszy, średni weźmie połowę więcej od niego. Zdarza się iż oba wojskowi synowie wracają. Majątek wynosi 38000zł.; ileż każdy syn ma dostać, aby się stało wedle woli ojca?*

Odp. Najstarszy weźmie 18000 zł., średni 12000 zł., najmłodszy 8000 zł.

ROZDZIAŁ JEDENASTY.

REGUŁY TRZECH.

340. Nazywa się REGUŁĄ TRZECH, reguła czyli prawidło za pomocą którego, *mając dany* STOSUNEK *dwóch wielkości i* JEDNĄ *wielkość innej natury*, *znajduje się* CZWARTĄ *wielkość proporcyonalną*.

Gdy wielkoście dana i szukana są wprost proporcyonalne do wielkości które tworzą dany stosunek, *reguła trzech* jest *prosta*; gdy zaś wielkoście dana i szukana są odwrotnie proporcyonalne do wielkości które tworzą dany stosunek, *reguła trzech jest odwrotna.*

Nakoniec reguła trzech jest *pojedyncza* albo *składana*, według tego jak jeden tylko albo kilka stosunków jest danych.

Ale te odróżnienia są wcale nic nieznaczące; wszystkie albowiem zagadnienia reguły trzech rozwiązują się bardzo łatwo za pomocą *jednej*, tak zwanej *metody sprowadzenia do jedności*, jako zaraz zobaczymy.

341. REGUŁA TRZECH POJEDYNCZA. ZAG. LXXIV. 60 *kosiarzy skosili razem* 15 *morgów łąki ;* 24 *kosiarzy ile morgów takiej samej łąki skosić mogą?*

Uważamy tu robotnika jako *jedność* pracy, i przypuszczamy że liczba skoszonych morgów jest proporcyonalna do liczby kosiarzy. Nazywając x niewiadomą liczbę morgów, urządzamy rachunek jako następuje :

$$\begin{array}{ll} 60^{\text{kos}} & 15^{\text{m}} \\ 24 & x \end{array}$$

To zrobiwszy, mówimy :

ponieważ 60 kosiarzy skosili 15 morgów

1 kosiarz skosi $\frac{15^{\text{m}}}{60}$;

zatem 24 kosiarzy skoszą $\frac{15^{\text{m}}}{60}\times 24$;

więc $x=15^{\text{m}}\times\frac{24}{60}=6^{\text{m}}$

Ta reguła trzech pojedyńcza jest *prosta*.

ZAG. LXXV. 6 *rolników pracując razem zaorali pewne pole w* 12 *dni; w ileż dni* 8 *rolników to samo pole zaoraćby mogli?*

Przypuszczając że, im *mniej* robotników tyle razy *więcej* trzeba dni pracy, czyli że liczba rolników jest *odwrotnie proporcyonalna* do liczby dni pracy, piszemy jako poprzednio:

$$\begin{array}{ll} 6^{\text{Rol.}} & 12^{\text{dni}} \\ 8 & x \end{array}$$

i mówimy: ponieważ 6 rolników potrzebują 12 dni,
1 rolnik będzie potrzebował $12^d \times 6$;
zatem 8 rolników będą potrzebowali $\frac{12^d \times 6}{8}$;
więc $x = 12^d \times \frac{6}{8} = 9^d$.

Ta reguła trzech pojedyncza jest *odwrotna*.

342. Można bezpośrednio znaleźć wartość niewiadomej, w tem i poprzedzającem zagadnieniu, zachowując następujące PRAWIDŁO. *Napisawszy liczby zagadnienia jakośmy wskazali, aby otrzymać wartość niewiadomej, mnoży się ilość wiadoma tej samej natury co niewiadoma, przez dany stosunek dwóch innych ilości, prosty albo odwrotny według tego jak, idąc z dołu do góry, te ilości są wprost albo odwrotnie proporcyonalne do niewiadomej.*

I tak, w poprzedzającem zagadnieniu, idąc z dołu do góry jako się idzie od x do 15 morg, od 20 kos. do 60 kos. mówimy: im *więcej* kosiarzy tem *więcej* skoszą morgów; stosunek jest *prosty*; więc $x = 15^m \times \frac{24}{60}$. Przeciwnie w drugiem zagadnieniu, idąc zawsze z dołu do góry, mówimy: im *mniej* rolników tem *więcej* trzeba dni; stosunek *odwrotny*, więc $x = 12^d \times \frac{6}{8}$.

UWAGA. Jako widzimy, w regule trzech pojedyńczej, znając tylko stosunek dwóch ilości i jedną z dwóch innych ilości które są do nich proporcyonalne, można znaleźć drugą z tych ostatnich. To wszystko czyni razem *trzy* liczby, to jest dwie wiadome i trzecią niewiadomą. Co zdaniem naszem, usprawiedliwia teraz nazwisko *reguły trzech* lepiej niżeli proporcya, za pomocą której rozwiązywano dawniej kwestye tego rodzaju.

343. Reguła trzech składana. Zag. LXXVI. 24 *robotników pracując* 9 *godzin na dzień, zrobili* 540 *łokci pewnej roboty, w* 15 *dni; w ileż dni* 18 *robotników, pracując* 10 *godzin na dzień, zrobią* 600 *łokci tej samej roboty?*

Napisawszy liczby zagadnienia, jakośmy już wskazali, to jest

$$\begin{array}{cccc} 24^{\text{Rob.}} & 9^{\text{godz.}} & 540^{\text{lok.}} & 15^{\text{dni}} \\ 18 & 10 & 600 & x \end{array}$$

mówimy: gdyby 18 robotników zrobili tę samą liczbę łokci i w tej samej liczbie godzin co 24 robotników, zrobiliby je w dniach $15\times\frac{24}{18}$, na mocy prawidła reguły trzech pojedynczej.

Owoż ci robotnicy robią, nie 540 łokci, ale 600 łokci; a im *mniej* łokci roboty tem *mniej* dni; więc zrobią te 600 łokci w liczbie dni którą się otrzyma, mnożąc znalezioną wyżej liczbę dni przez stosunek *prosty* $\frac{600}{540}$; co daje $15^d\times\frac{24}{18}\times\frac{600}{540}$.

Nakoniec, ci robotnicy pracują, nie 9 godzin, ale 10 godzin na dzień; a im *mniej* godzin pracy na dzień tem *więcej* trzeba dni, żeby wykonać tę samą robotę; więc otrzyma się liczbę dni, mnożąc ostatnią znalezioną liczbę dni przez stosunek *odwrotny* godzin; co daje ostatecznie

$$x=15^d\times\frac{24}{18}\times\frac{600}{540}\times\frac{9}{10}=20^d.$$

Ztąd ogólne prawidło. *Aby otrzymać odrazu wartość niewiadomej x, mnoży się ilość wiadomą tej samej natury co x, przez wieloczyn stosunków innych ilości; biorąc te stosunki* WPROST *albo* ODWROTNIE *proporcyonalne do ilości które są w stosunku z niewiadomą x.*

Za pomocą tego prawidła, łatwo się rozwiązuje następujące zagadnienie.

Zag. LXXVII. 48 *robotników wykopali rów długi* 180 *sążni, szeroki* 3 *sążnie, głęboki* $\frac{6}{5}$ *sążnia, pracując* 54 *dni, po* 10 *godzin na dzień; siła robotnika była wyrażona liczbą* 6. *Za ileż dni,* 36 *robotników pracując* 9 *godzin na dzień, wykopią rów długi*

240 *sążni, szeroki* 8 *stóp, a głęboki półtora sążnia; siła robotnika jest* 5, *a ziemia twardsza* $\frac{9}{8}$ *razy.* Odp. 60 *dni.*

344. Próba. W tych rachunkach dosyć długich, próba jest niezbędną. Wykona się ją, biorąc jedną z ilości wiadomych za niewiadomą, i rozwiązując na nowo zagadnienie.

345. Reguła łańcuchowa (*regula catenaria*). Ta reguła jest pewnym gatunkiem raguły składanej. Dla lepszego wyjaśnienia weźmy przykład.

Zag. LXXVIII. *Przyjaciele Platona, wykupując go z niewoli, zapłacili* 3000 *drachm. Ileż to czyni rubli? wiedząc że* 61 *drachm wartoją* 64 *franków, idzie zaś* 128 *franków na* 207 *złotych, a* 20 *złotych czynią* 3 *ruble.*

Możnaby, biorąc przyzwoicie stosunki, znaleźć wartość niewiadomej, tak jako w regule składanej; ale, aby uniknąć trudności rozpoznania kiedy trzeba wziąć stosunek prosty a kiedy odwrotny, bezpieczniej jest, w podobnych zagadnieniach, użyć odrazu *metody sprowadzenia do jedności.* Co też właśnie zrobimy, rozumując jako następuje. Ponieważ 20 zł. wartają 3 ruble, 1 złoty wart $\frac{3}{20}$ rub.; zatem 207 zł. wartają $\frac{3}{20}^{r}\times 207$. Ale to właśnie czyni 128 franków; zatem 1 frank czyni $\frac{3}{20}^{r}\times\frac{207}{128}$, a 64 franków czynią $\frac{3}{20}^{r}\times\frac{207}{128}\times 64$. Owoż ta wartość znaczy 61 dr.; więc 1 drachma czyni $\frac{3}{20}^{r}\times\frac{207}{128}\times\frac{64}{61}$; nakoniec 3000 drachm czynią $3^{r}\times\frac{207}{20}\times\frac{64}{128}\times\frac{3000}{61}$, to jest $763^{r},52$.. na mniej niż pół kopiejki błędu.

Weźmy jeszcze inny przykład.

Zag. LXXIX. *Kupiec paryski ma do zapłacenia* 8000 *rubli kupcowi petersburgskiemu. Zamiana w Paryżu* 41 *franków za* 10 *rubli. Ale znowu zamiana* 125 *franków płaci się* $54\frac{1}{4}$ *złotych amsterdamskich, a za* $36\frac{3}{4}$ *złotych amsterdamskich płacą* 45 *grzywien hamburgskich; a nakoniec* 150 *grzywien hamburgskich płacą* 70 *rubli. Którąż drogą kupiec ma płacić, czy wprost przez weksel paryski, czy też przez weksel amsterdamski i hamburgski?*

Drogą paryską kupiec miałby do zapłacenia

$$41 \text{ fr.} \times \frac{3000}{10} = 12300 \text{ fr.},$$

za weksel wystawiony w Paryżu, na zapłacenie 3000 rubli w Petersburgu.

Zobaczmy teraz ile kosztowałby weksel drogą Amsterdamhamburgską. Rozumując jako w powyższem zagadnieniu, znajdujemy łatwo że drugi weksel kosztowałby

$$12^{\text{fr}} \times \frac{147}{217} \times \frac{150}{45} \times \frac{3000}{70} = 12096^{\text{fr.}},77.$$

Więc korzystniej dla naszego kupca płacić w Petersburgu, przez weksel na Amsterdam i Hamburg, niż wprost przez weksel paryski.

REGUŁA SPÓŁKI.

346. Reguła spółki (*regula societatis*) jest reguła za pomocą której rozdziela się zysk albo stratę między stowarzyszonych. W handlu, przypuszcza się że zysk albo strata stowarzyszonego jest proporcyonalna do jego kapitału i do czasu przez który ten kapitał w spółce zostawał.

Zag. LXXX. *Trzy osoby stowarzyszyły się; pierwsza dała* 1000 *rub., druga* 800 *rub., a trzecia* 600 *rub.; zyskały* 900 *rub. Ileż każda zyskała?*

Kwestya sprowadza się do podzielenia 900 rub. na trzy części proporcyonalne do liczb 1000, 800, 600; albo do liczb 5, 4, 3 których summa jest 12. Co daje zysk tych osób, to jest:

1ej $\frac{900^{\text{R}}}{12} \times 5 = 375^{\text{R}}$, 2ej $\frac{900^{\text{R}}}{12} \times 4 = 300^{\text{R}}$, 3ej $\frac{900^{\text{R}}}{12} \times 3 = 225^{\text{R}}$.

Zag. LXXXI. *Trzech kupców założyło handel. Pierwszy dał* 12000 *zł. które odebrał po* 2 *latach, drugi dał* 18000 *zł. które odebrał po* 3 *latach, trzeci włożył* 24000 *zł. Zlikwidowano po* 4 *latach i podzielono się zyskiem* 5800 *zł. Ileż każdy dostał?*

Oczywiście, *im więcej kapitału tem więcej zysku*, w tym samym czasie; jak znowu, *im więcej czasu tem więcej zysku*, od tego samego kapitału. To jasno pokazuje że zysk albo strata są *w stosunku składanym* kapitału i czasu przez który ten kapitał w spółce zostawał; tak że dwa kapitały, z których jeden dwa razy większy od drugiego ale dwa razy mniej czasu w spółce zostawał, ten sam zysk przynoszą, albo tę samą ponoszą stratę.

Po tem objaśnieniu, łatwo się pojmuje że 12000 zł., umieszczone przez 2 roki, przynoszą ten sam zysk jak 12000zł. $\times$2 czyli 24000 zł. umieszczone przez rok; 18000 zł. umieszczone przez 3 lata, przynoszą ten sam zysk jak 18000zł. $\times$3 czyli 54000 zł. umieszczone przez rok; nakoniec 24000 zł. umieszczone przez 4 lata, przynoszą ten sam zysk jak 24000zł. $\times$4 czyli 96000 zł. umieszczone przez rok. Więc teraz, ponieważ kapitały sprowadzone do jednego czasu, aby znaleźć zysk każdego stowarzyszonego, dość podzielić ogólny zysk 5800 zł. proporcyonalnie do liczb 24000, 54000, 96000, albo do liczb 4, 9, 16. Co już umiemy.

Wykonawszy rachunek, znajdziemy zysk *pierwszego* kupca 800 zł., *drugiego* 1800 zł,, *trzeciego* 3200 zł.

Zag. LXXXII. *Cztery osoby założyły handel który trwał lat* 10. *Pierwsza dała* 10000 *tal.*; *druga dała* 15000 *tal.*, *ale we* 2 *roki odebrała* 5000 *tal.*; *trzecia dała najpierwej* 8000 *tal.*, *a po* 3 *latach dodała* 5000 *tal.*, *ale we* 2 *roki potem odebrała* 7000 *tal.*; *czwarta przystąpiła do stowarzyszenia w rok po zaczęciu handlu i wniosła* 20000 *tal.*, *ale po* 4 *latach odebrała* 8000 *tal. Zysk był* 18060 *tal.*; *ileż każda osobo dostała?*

Odp. 1sza 4200 tal., 2ga 4620 tal., 3cia 3360 tal., 4ta 5880 tal.

Zag. LXXXIII. *Trzej kupcy stowarzyszyli się i dostawili wojsku, pierwszy* 6000 *łokci sukna czerwonego, drugi* 120000 *łokci sukna granatowego, a trzeci* 54000 *łokci płótna. Wartość sukna granatowego jest* $\frac{5}{6}$ *wartości sukna czerwonego, a zaś wartość płótna jest* $\frac{1}{18}$ *wartości obydwóch sukien. Ci kupcy zyskali* 17200 *złotych; ileż każdy zyskał?*

Odp. *Pierwszy zyskał* 4800 *zł.*, *drugi* 8000 *zł.*, *trzeci* 4400 *zł.*

REGUŁA MIESZANIN I ALLIAŻU (*połączenia*).

347. Dla krótszego i jaśniejszego wykładu, weźmy przykłady:

Zag. LXXXIV. *Zmieszano trzy gatunki cieczy, to jest*: 12 *butelek po* 12 *zł.* 15 *gr. butelka*; 15 *butelek po* 3 *zł.* 20 *gr.*; 13 *butelek po* 4 *zł.* 10 *gr. Po czemu butelka mieszaniny?*

12 butelek po	$2^{zł.}\ 15^{g}$	wartają	$(2^{zł.}+15^{g})12=30^{zł.}$
15	$3^{zł.}\ 20^{g}$		$(3^{zł.}+20^{g})15=55^{zł.}$
13	$4^{zł.}\ 10^{g}$		$(4^{zł.}+10^{g})13=56^{zł.}\ 10^{g}$

Wszystka ciecz wynosi 40 butelek i kosztuje 141 zł. 10 gr.

Więc cena butelki jest $\dfrac{141^{zł.}+10^{g}}{40}=3^{zł.}\ 16^{g}$.

Ten wynik, jako widzimy, daje średnią cenę cieczy.

Zag. LXXXV. *Pewien winiarz ma dwa gatunki wina; pierwszego butelka kosztuje* 5 *zł.* 20 *gr., a drugiego* 3 *zł.* 10 *gr.: chciałby je zmieszać tak żeby butelka kosztowała* 4 *zł. Ileż ma wziąć z każdego gatunku wina na jedną butelkę takiej mieszaniny?*

Gdyby winiarz sprzedał za 4 zł. butelkę pierwszego wina, straciłby 1 zł. 20 gr. czyli 50 gr.; gdyby zaś sprzedał za 4 zł. butelkę drugiego wina, zyskałby 20 gr. Więc, jeśli weźmie 20 butelek pierwszego wina do mieszaniny, będzie strata $50^{gr.}\times 20$; a jeśli domiesza się 50 butelek drugiego wina, będzie zysk $20^{gr.}\times 50$, i tym sposobem strata zrówna się z zyskiem. Zatem, trzeba zmieszać droższe wino z tańszem w stosunku *odwrotnym* straty i zysku na jednej butelce. W naszym przykładzie, ponieważ ilość mieszaniny powinna czynić 1 butelkę, trzeba podzielić 1 w stosunku liczb 20 do 50 albo 2 do 5. Więc, nazywając x, y szukane ilości pierwszego i drugiego wina, będzie:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{1}{2+5};\ \text{ztąd}\ x=\frac{2}{7},\quad y=\frac{5}{7}.$$

To pokazuje że trzeba wziąć $\frac{2}{7}$ butelki pierwszego wina i $\frac{5}{7}$ butelki drugiego, aby otrzymać butelkę mieszaniny po cenie 4 zł.

348. Gdyby chciano zmieszać 12 butelek pierwszego wina z drugiem tak aby butelka mieszaniny kosztowała 4 zł.; wtedy, rozumując jako wyżej, otrzymanoby także $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$.

A że tu $x=12$; więc $y=\frac{12\times5}{2}=30$.

To jest, trzebaby wziąć 30 butelek drugiego wina; etc.

349. Są w handlu sztaby złożone ze złota i miedzi, albo ze srebra i miedzi. Ilość czystego złota albo srebra na 1000 gramów sztaby, nazywa się jej *tytułem*. I tak, tytuł 0,850 znaczy, że na 1000 gramów sztaby złotej albo srebrnej, jest 850 gramów czystego złota albo czystego srebra, a reszta miedzi.

Zag. LXXXVI. *Dane są dwie sztaby złote, jedna z tytułem* 0,750 *waży* 36 *gramów, druga z tytułem* 0,870 *waży* 24 *gramów; jaki jest tytuł alliażu otrzymanego ze stopienia tych dwóch sztab w jedną.*

Każdy gram pierwszej sztaby zawiera 0,750 gramu czystego złota, a każdy gram drugiej sztaby zawiera 0,870 gramu złota; zatem ilość czystego złota, które się znajduje w alliażu dwóch sztab stopionych razem, jest

$$(0,750\times36+0,870\times24) \text{ gramów};$$

a że ciężar tego alliażu czyni 36+24 gramów, więc jego tytuł

jest $\dfrac{0,750\times36+0,870\times24}{36+24}$ albo 0,798.

Zag. LXXXVII. *Mając dwie sztaby srebrne, jedną z tytułem* 0,960 *a drugą z tytułem* 0,880 *; ile trzeba wziąć z każdej aby otrzymać funt srebra z tytułem* 0,910 *?*

Funt pierwszej sztaby zawiera zanadto $0^{\text{funt.}},050$ srebra, nad tytuł 0,910; a zaś funtowi drugiej sztaby niedostaje $0^{\text{funt.}},030$ srebra. Owoż, biorąc 30 razy $0^{\text{funt.}},050$ i 50 razy

$0^{funt.},030$ jest porównanie zbytku srebra z niedostatkiem. To pokazuje że, aby otrzymać alliaż z tytułem 0,910, trzeba wziąć z pierwszej i drugiej sztaby ilości w stosunku odwrotnym liczb 50 i 30, to jest w stosunku 30 do 50 albo 3 do 5. A że chcemy mieć funt alliażu, więc, nazywając x i y te ilości, będzie

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{1}{3+8}\text{; ztąd } x=\frac{3}{8},\ y=\frac{5}{8}.$$

To jest trzeba wziąć $\frac{3}{8}$ funta pierwszej sztaby i $\frac{5}{8}$ funta drugiej.

350. Gdyby chciano mieć 12 funtów alliażu, byłoby

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{12}{8}.\text{ Ztąd } x=\frac{9}{2},\ y=\frac{15}{2}\text{; etc.}$$

Ćwiczenia.

I. Bronz z którego leją działa zawiera 100 części miedzi i 11 cyny. Ileż jest miedzi i cyny w dziale ważącem 2442 funtów?

Odpowiedź. 2200 funtów miedzi i 242 funtów cyny.

II. Metal z którego leją dzwony zawiera 390 części miedzi, 110 cyny, 5 zynku i 4 ołowiu. Ileż wchodzi każdego z tych metali do dzwonu ważącego 12725 funtów?

Odpowiedź. 8750 funtów miedzi, 2750 funt. cyny, 125 funt. zynku i 100 funtów ołowiu.

III. Pewien jubiler ma sztukę złota ważącą 3 funty, z tytułem 0,750. Ile powinien dodać czystego złota aby podnieść tytuł do 0,880.

Odpowiedź. $3,^{funt}25$.

REGUŁA PROCNTU.

351. Nazywa się PROCENTEM (*usura*) dochód pochodzący od summy pieniędzy czyli od *kapitału* pożyczonego przez pewny czas. Procent jest proporcyonalny do kapitału. Procent od 100 złotych umieszczonych przez rok nazywa się *stopą* procentu, jako 5 od sta, 6 od sta,... co się wyraża pisząc $5\frac{0}{0}$, $6\frac{0}{0}$...

Procent nazywa się *prostym* gdy jest proporcyonalny do czasu przez który kapitał był umieszczony. I tak, procent prosty od kapitału 100 złotych, umieszczonego przez *dwa* roki na 5%, jest 5zł.×2 albo 10 złotych. W handlu, gdy się bierze procent od kapitału za pewną liczbę miesięcy i dni, uważa się rok jakoby złożony z 12 miesięcy po 30 dni, czyli z 360 dni.

Procent nazywa się *składanym* gdy się dodaje, na końcu każdego roku, do kapitału i tworzy z nim nowy kapitał który przynosi procent przez rok następujący. Procent składany zawiera procent od procentu.

352. PROCENT PROSTY. ZAG. LXXXVIII. *Znaleźć procent kapitału* 1866 *złotych, umieszczonego przez rok, po* 5 *od sta.*

Ponieważ 100 złotych przynoszą 5 zł. procentu,

$$1 \text{ złoty przynosi } \tfrac{5}{100}{}^{\text{zł.}};$$

zatem 1866 zł. przyniosą $\frac{5}{100}{}^{\text{zł.}}\times 1866 = 1866^{\text{zł.}}\times\frac{1}{20}$ albo $93^{\text{zł.}}6^{\text{gr}}$

Więc, *znajduje się procent kapitału umieszczonego przez rok, mnożąc ten kapitał przez procent od* 1*go złotego.*

Weźmy teraz zagadnienie ogólniejsze.

ZAG. LXXXIX. *Znaleźć procent kapitału* 2400 *złotych umieszczonego przez* 8 *miesięcy na* 4%.

Rozumując jako wyżej, mówimy:

Ponieważ 100 zł. przynoszą 4 zł. za 12 miesięcy,

$$1 \text{ zł. przynosi } \tfrac{4}{100}{}^{\text{zł.}};$$

zatem 1 zł. przyniesie, za 1 miesiąc, $\frac{4}{100}{}^{\text{zł.}}\times\frac{1}{12}$,

a, za 8 miesięcy, przyniesie $\frac{4}{100}{}^{\text{zł.}}\times\frac{8}{12}$;

więc 2400 zł. przyniesą $\frac{4}{100}{}^{\text{zł.}}\times\frac{8}{12}\times 2400$, albo $2400^{\text{zł.}}\times\frac{4}{100}\times\frac{8}{12}$; co daje szukany procent 64 zł.

Ztąd PRAWIDŁO: *aby znaleźć procent kapitału umieszczonego przez pewny czas, mnoży się ten kapitał przez procent* 1*go złotego i przez czas.*

353. Jeśli, dla zogólnienia, oznaczymy kapitał przez a, jego procent przez p, stopę procentu przez r, a przez t czas pożyczki to jest liczbę lat jej trwania; powyżej wysłowione prawidło daje *formułę*

$$p = \frac{a\times r\times t}{100}, \quad \text{albo krócej} \quad p = \frac{art}{100},$$

za pomocą której można bezpośrednio rozwiązać zagadnienia procentów prostych. I tak, gdyby zapytano

Przez jaki czas trzeba umieścić kapitał 2400 zł. na 4 od sta, aby otrzymać procent 64 zł.?

Podstawiając zamiast liter dane wartości, w powyższej formule, otrzymujemy zaraz

$$64 = \frac{2400 \times 4t}{100}.$$

Zkąd, po wykonaniu wskazanych działań, wynika

$$96t = 64;$$

a podzieliwszy obie strony przez 96, będzie ostatecznie

$$t = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}.$$

Znajdujemy tedy że czas, przez który powyższy kapitał powinien zostawać umieszczony, jest $\frac{2}{3}$ roku. Co właśnie czyni 8 miesięcy, jakośmy naprzód wiedzieli.

354. Nazwijmy teraz A kapitał z procentem, będziemy mieli

$$A = a + p \qquad \text{albo} \qquad A = a + \frac{art}{100}.$$

Uważając zaś że $a + \frac{art}{100}$ jest to samo co $a\left(1 + \frac{rt}{100}\right)$, będzie ostatecznie

$$A = a\left(1 + \frac{rt}{100}\right).$$

Dwie wyżej znalezione formuły dają rozwiązanie wszystkich zagadnień które dotyczą procentów prostych; tak że, mając dane *trzy* którekolwiek z *pięciu* ilości A, a, p, r, t, można łatwo otrzymać wartość dwóch innych.

Mimo tej korzyści, rozwiążemy wprost następujące zagadnienia, aby zarazem rozwijać rozumowanie i rachunkową biegłość; formuły mogą jeszcze służyć do sprawdzenia rozwiązań.

Zag. XC. *Pewien kupiec zapożyczył 10000 tal; i po 9 miesiącach oddał wierzycielowi 10450 tal. Jakiż procent zapłacił?*

Widzimy zaraz że procent od 10000 tal. jest 450 tal. za 9 miesięcy. Zatem procent od 1 tal. jest : $\frac{450}{10000}$ tal. za 9 miesięcy, $\frac{450}{10000\times9}$ tal. za miesiąc, a $\frac{450}{10000}\times\frac{12}{9}$ tal. za rok. Więc stopa procentu jest $\frac{450}{10000}\times\frac{12}{9}\times100$tal.$=6$ tal.

Więc kupiec zapłacił procent 6 od sta.

Zagadn. XCI. *Przez jaki czas trzeba umieścić kapitał* 12600 *zł.*, *po* 4 *od sta, aby mieć* 294 *zł. procentu?*

Procent roczny od 12600 złotych, po 4 od sta, jest $\frac{4}{100}$zł.$\times12600=504$ zł. ; więc otrzyma się szukaną liczbę lat, dzieląc 294 przez 504 ; co daje $\frac{294}{504}$ roku czyli $\frac{7}{12}$ roku, to jest 7 miesięcy.

Zagadn. XCII. *Na jaką stopę trzeba umieścić* 125000 *zł. aby, za rok i kwartał, mieć procent* 9375 *zł.?*

Procent od 1 złotego, za rok i kwartał jest $\frac{9375}{125000}$ zł. ; a za rok tylko, $\frac{9375}{125000}\times\frac{4}{5}$ zł.; więc stopa procentu jest

$$\frac{9375}{125000}\times\frac{4}{5}\times100 \text{ zł. ; czyli } 6 \text{ zł.}$$

Zagadn. XCIII. *Jaki kapitał trzeba umieścić na* 5 *od sta, przez* 3 *lata i* 4 *miesiące, aby mieć summę* 60000 *zł. kapitału z procentem?*

1 złoty daje za rok $\frac{5}{100}$ zł. procentu, a za 3 lata i 4 miesiące, czyli za $\frac{10}{3}$ roku, daje procent $\frac{5}{100}$ zł. $\times\frac{10}{3}=\frac{1}{6}$ zł. ; zatem 1 złoty ze swoim procentem czyni summę 1 zł. $+\frac{1}{6}$ zł. czyli $\frac{7}{6}$ zł. To pokazuje że każde $\frac{7}{6}$ zł., znajdujące się w danej summie 6000 zł., przedstawia 1 złoty kapitału. Więc otrzymamy szukany kapitał dzieląc 6000 zł. przez $\frac{7}{7}$; co daje $\frac{36000}{7}$ zł. albo 5142 zł. 25 gr. na mniej niż grosz.

Uwaga. Dla sprawdzenia rachunku, szuka się ile jest procentu w danej summie 6000 zł. Uważając że każde $\frac{7}{6}$ zł., które się w niej mieszczą przedstawiają $\frac{1}{6}$ zł. procentu ; szukany procent równa się $\frac{1}{6}$ zł. $\times6000\times\frac{6}{7}$ albo 857 zł. 4 gr. na mniej niż grosz. Ta summa, dodana do wyżej znalezionej, sprawdza otrzymane wyniki.

355. Renta. Rząd, który zaciągnął pożyczkę, płaci wierzycielom roczny procent, nazwany *renta* we Francyi. Cena *renty*

jest zmienna wedle różnych okoliczności, i reguluje się na giełdzie. I tak, kiedy się mówi « *renta* 3 na sto *dzisiaj* stoi $68^{fr.},25$ » to znaczy że: każde 3 franki *renty* przedstawiają *imienny* kapitał 100 franków, ale rzeczywiście są procentem tylko od $68^{fr.},25$ wedle dzisiejszego kursu giełdy.

Weźmy parę zagadnień w tej materyi.

ZAGADN. XCIV. *Na jaką stopę umieszcza się kapitał, kupując rentę 3 na sto, na kurs* $68^{fr.},25$?

Zagadnienie znaczy: znaleźć stopę procentu, wiedząc że $68^{fr.},25$ przynoszą procent 3 fr. Więc szukana stopa procentu jest $\frac{3^{fr.}}{68,25}\times 100$, albo prawie 4 fr. 40 od sta, na mniej niż pół centyma przez zbytek.

ZAGADN. XCV. *Jaką trzeba wyłożyć summę, aby kupić* 3600 *fr. renty* $3\frac{0}{0}$, *na kurs* $67^{fr.},20$?

Ponieważ, wedle zagadnienia, za 3 fr. *renty* płacą $67^{fr.},20$; za 1 fr. *renty* zapłaci się $\frac{67^{fr.},20}{3}$: więc za 3600 fr. *renty* trzeba zapłacić $\frac{67^{fr.},20}{3}\times 3600$ albo 80640 fr.

356. ESKONT (*potrącenie*). Gdy bankier płaci gotówką wartość biletu handlowego, przed terminem jego wypłaty, wtedy potrąca sobie, wedle ustawy, pewną summę która się nazywa *eskontem*. Eskont jest dwojaki.

1° ESKONT ROZUMOWY, który jest procentem prostym od wartości rzeczywistej biletu handlowego. Taki eskont już znaleźć umiemy. (*Zag.* XCIII. Uwaga).

2° ESKONT HANDLOWY, który jest procentem od *wartości imiennej* biletu handlowego. I tak, eskont handlowy, na 5 od ta, od summy 105 zł. płatnej za rok, jest procent $1^{zł.},25$.

Bilety handlowe są płatne zwykle w krótkich terminach, których czas liczy się na dnie wedle kalendarza *Gregoryańskiego*; ale, dla prostoty rachunku, rok uważa się jakoby złożony z 360 dni. Bank francuski eskontuje tylko bilety których termin nie przechodzi 90 dni.

Zagadn. XCVI. *Jaki jest eskont na stopę* 6 *od stu, biletu* 3800 *zł. płatnego dnia* 20 *stycznia* 1867 *roku; jeśli jego posiadacz chce mieć wartość w gotówce, dnia* 2 *października* 1866 *roku?*

Od 2 października do 20 stycznia *wyłącznie* jest dni $30+30+31+19=110$ dni; więc procent kapitału 3800 zł., na stopę 6 od sta, przez $\frac{110}{360}$ roku, jest

$$3800\times\tfrac{6}{100}\times\tfrac{110}{360} \text{ zł. albo } 3800\times110\times\tfrac{6}{36000} \text{ zł.}$$

Co daje eskont 69 zł. 20 gr.

Ztąd wynika praktyczne prawidło: *Aby wyrachować eskont handlowy biletu, mnoży się* SUMMĘ NAPISANĄ *na tym bilecie przez liczbę dni zostających do terminu wypłaty i przez stopę procentu, a wieloczyn trzech czynników dzieli się przez* 36000.

357. Uwaga. I. Bankierzy nazywają LICZBĄ wieloczyn z summy napisanej na bilecie przez liczbę dni zostających do wypłaty; a DZIELNIKIEM, iloraz liczby 36000 podzielonej przez stopę procentu. Na mocy tej nazwy *eskont handlowy równa się ilorazowi* LICZBY *przez* DZIELNIK.

II. Ponieważ eskont handlowy jest procentem od *summy imiennej* biletu, bankier bierze, nietylko procent od summy rzeczywistej tego biletu, ale jeszcze procent od jej procentu; co niesprawiedliwe.

Aby wyraźniej pokazać niedorzeczność tego eskontu, *przypuśćmy że jest do eskontowania bilet* 100 *zł. płatny za* 21 *lat, na* 5 *od sta*. Eskont handlowy tego biletu byłby $100 \text{ zł.}\times21\times\frac{5}{100}=105$ zł. Więc trzebaby *dać* bankierowi 5 zł. aby raczył przyjąć bilet! A przecież wartość rzeczywista biletu jest 48 zł. 23 gr. przeszło.

Jednakże, gdy summa biletu niewielka a termin krótki, eskont handlowy mało się różni od rozumowego.

Zag. XCVII. *Pewna osoba płaci* 600 *zł., biletem płatnym za* 24 *dni. Jaka jest summa napisana na tym bilecie?*

Bilety handlowe są zwykle na 5 od sta. Owoż, 1 złoty po takim eskoncie czyni $1-\frac{5}{100}\times\frac{24}{360}$ złotego; zatem 1 złoty przed eskontem czyni $\dfrac{1}{1-\frac{5}{100}\times\frac{24}{360}}$ czyli $\dfrac{1}{1-\frac{1}{300}}$ złotego. Więc, ponieważ wartość biletu jest 600 zł. po eskoncie, summa napisana na tym bilecie powinna być $\frac{600 \text{ zł.}}{1-\frac{1}{300}}$, albo $\frac{600\times300}{299}$ zł.

Co daje 602 zł. $\frac{60}{299}$ gr.

Więc na bilecie musiała być napisana summa okrągła 602 zł. 1 gr.

Zag. XCVIII. *Pewny kupiec podpisał trzy bilety; pierwszy na 1800 zł. płatny 15 Maja, drugi na 3600 zł. płatny 15 Lipca, trzeci na 1200 zł. płatny 2 Września. Chciałby zastąpić te trzy bilety jednym tylko biletem na summę* (1800+3600+1200) *zł. czyli* 6600 *zł. Jaki powinien być termin tego biletu?*

Oczywiście, szukany termin musi być taki żeby eskont biletu równał się summie eskontów trzech danych biletów. Owoż, licząc od terminu biletu który ma być najpierwej wypłacony, widzimy że pierwszy bilet nie daje żadnego eskontu, dwa zaś inne dają eskonty których summa

$$\frac{3600\times61+1200\times110}{7200} \text{ zł.}$$

powinna właśnie równać się eskontowi żądanego biletu. A że eskont tego ostatniego równa się summie $\frac{6600}{7200}$ zł. pomnożonej przez liczbę dni idących od 15 maja aż do terminu wypłaty biletu; więc znajdziemy tę niewiadomą liczbę dni, dzieląc

$$\frac{3600\times61+1200\times110}{7200} \text{ przez } \frac{6600}{7200};$$

co daje $\frac{3600\times61+1200\times110}{6600}=\frac{6\times61+2\times110}{11}$ albo $\frac{586}{11}$.

Część całkowita ilorazu jest 53; więc termin żądanego biletu przypada w 53 dni po 15 maja, to jest 6 lipca.

358. Procent składany. Zag. XCIX. *Jaki jest kapitał z procentem składanym od* 12000 *zł. po* 3 *latach, na* 5 *od sta?*

Ponieważ 1 złoty przynosi rocznie procent $\frac{5}{100}$ zł. czyli $\frac{1}{20}$ zł., ten złoty po roku staje się $(1+\frac{1}{20})$ zł. albo $1^{\text{zł.}}\times\frac{21}{20}$; więc, aby mieć wartość kapitału jakiegokolwiek, po *roku*, dosyć pomnożyć ten kapitał przez $\frac{21}{20}$. Zatem kapitał $1^{zł.}\times\frac{21}{20}$, umieszczony przez drugi rok, będzie miał wartość $1^{zł.}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$ czyli $1^{zł.}\times(\frac{21}{20})^2$, na końcu *drugiego* roku; a następnie, wartość kapitału $1^{zł.}\times(\frac{21}{20})^2$, na końcu *trzeciego* roku, będzie $1^{zł.}\times(\frac{21}{20})^3$. Więc 12000 zł. po *trzech* latach będą miały wartość $12000^{zł.}(\frac{21}{20})^3$: co właśnie rozwiązuje zadane zagadnienie.

359. Jeśli, dla ogólności, nazwiemy A kapitał z procentem składanym, a kapitał pierwotny, n liczbę lat, r procent roczny od *jednego* złotego, powyższe rozumowanie daje następującą formułę:

$$A=a(1+r)^n.$$

Ale ta rzecz należy już, w swoich szczegółach, do Algebry.

REGUŁA FAŁSZYWEGO ZAŁOŻENIA.

360. Reguła fałszywego założenia (*regula falsæ positionis*) służy do znalezienia niewiadomej, za pomocą *dwóch dowolnych przypuszczeń* jej wartości, których się probuje wedle warunków zagadnienia.

Następujący przykład lepiej wyjaśni użycie tej metody.

Zag. C. *Pewien strzelec obowiązuje się dać swojemu koledze 5 złotych za każdy strzał chybiony; a kolega ze swojej strony przyrzeka strzelcowi płacić 3 złote, za każde ubicie zwierzyny. Po 12 strzałach, kolega zapłacił strzelcowi 4 złote. Ileż razy strzelec chybił zwierza?*

Przypuśćmy że strzelec *raz* tylko chybił; zatem, wedle warunków zagadnienia, ubił 11 razy zwierzynę. Owoż, za każde ubicie zwierzyny należy mu się 3 złote, a za każdy strzał chybiony on płaci 5 złotych; więc strzelec, zyskując $3^{zł.}\times 11=33$ zł. a tracąc 5 złotych, powinienby dostać 28 złotych. Rzeczywiście dostaje 4 złote. Więc pierwsze przypuszczenie jest błędne, i błąd równa się różnicy $28^{zł.}-4^{zł.}$ czyli 24 złote.

Przypuśćmy teraz że strzelec chybił 2 *razy*; ubił tedy 10 razy zwierzynę. Zatem, zyskując $3^{zł.}\times 10=30$zł., a tracąc $5^{zł.}\times 2=10$zł., powinienby dostać 20 zł. Rzeczywiście dostaje 4 złote. Więc drugie przypuszczenie jest także błędne, i błąd wynosi $20^{zł.}-4^{zł.}$ czyli 16 złotych.

Porównywając dwa błędy, 24 zł. i 16 zł.; widzimy że, zwiększając *jednością* liczbę strzałów chybionych, zmniejszamy błąd 24 zł. o 8 złotych. Ztąd wynika że trzeba zwiększyć, pierwszą przypuszczoną liczbę 1 chybionych strzałów, tyle razy jednością ile razy 8 mieści się w pierwszym błędzie 24; to jest powiększyć 1 liczbą 3. Więc strzelec chybił 4 razy a ubił 8 razy zwierzynę.

Weźmy jeszcze na zastosowanie inny przykład.

Zag. CI. *Chcąc wypłacić 75 złotych w 24 sztukach, jedne dwuzłotówki a drugie pięciozłotówki, ile trzeba wziąć z każdego gatunku?*

Gdyby wzięto same tylko pięciozłotówki, to jest: 0 dwuzłotówek a 24 pięciozłotówek, to czyniłoby $5^{zł.}\times 24=120$zł.; zatem błąd byłby $120^{zł.}-75^{zł.}$ czyli 45 zł.

Gdyby zaś wzięto 1 dwuzłotówkę, a tem samem 23 pięciozłotówek, to czyniłoby $2^{zł.}+5^{zł.}\times 23$ to jest 117 zł.; zatem drugi błąd byłby $117^{zł.}-75^{zł.}$ czyli 42 zł.

Widzimy tedy że, powiększając jednością liczbę dwuzłotówek, zmniejszamy pierwszy błąd 45zł. różnicą $45^{zł.}-42^{zł.}=3$zł. Więc trzeba wziąć tyle dwuzłotówek ile razy 3 zł. mieszczą się w 45 zł. Iloraz 15 pokazuje że 15 dwuzłotówek i 9 pięciozłotówek rozwiązują zagadnienie.

Weźmy nakoniec przykład cokolwiek zawilszy.

Zag. CII. *Pewna osoba zapłaciła, pierwszą razą 71 złotych, za 10 dni roboty mularza i 7 dni jego pomocnika; drugą razą 55 złotych, za 8 dni mularza i 5 dni jego pomocnika. Ileż zarabiał mularz a ile jego pomocnik?*

Przypuśćmy że pomocnik *nic* nie zarabiał; wtedy mularz, biorąc 71 zł. za 10 dni roboty, zarabiałby dziennie $\frac{71}{10}$ zł. Zatem za 8 dni powinienby dostać $\frac{71}{10}^{zł.}\times 8=56^{zł.},8$ Rzeczywiście mularz razem z pomocnikiem dostali 55 zł. Więc pierwsze przypuszczenie jest błędne, i błąd równa się różnicy $56^{zł.},8 - 55^{zł.} = 1^{zł.},8$.

Przypuśćmy teraz że pomocnik zarabiał 1 złoty na dzień; wtedy za 7 dni zarobiłby 7 zł.; a mularz za 10 dni pracy dostałby 71 zł. *mniej* 7 zł., to jest 64 zł., czyli dziennie $\frac{64}{10}$ zł. Zatem za 8 dni pracy miałby $\frac{64}{10}^{zł.} \times 8 = 51,^{zł.}2$; a że jego pomocnik odebrałby 5 zł. za 5 dni pracy; więc oba razem, na mocy drugiego warunku zagadnienia, powinniby dostać $51,^{zł.}2 + 5$ zł. czyli $56,^{zł.}2$. Rzeczywiście dostają 55 zł. Więc nasze drugie przypuszczenie jest błędne, i błąd równa się różnicy $56,^{zł.}2 - 5^{zł.} = 1,^{zł.}2$.

Widzimy tedy że, powiększając *jednym* złotym zarobek dzienny pomocnika, zmniejszamy błąd różnicą $1,^{zł.}8 - 1,^{zł.}2 = 0,^{zł.}6$. Ztąd wnosimy że pomocnik zarabia dziennie tyle złotych ile 0,6 mieści się w 1,8. Iloraz jest 3. Więc pomocnik zarabia na dzień 3 zł. a mularz 5 zł.

Zagadn. CIII. *Ile trzeba wziąć talarów i rubli aby mieć* 200 *zł. w* 32 *sztukach srebrnych?*

Odp. 20 *talarów* i 12 *rubli.*

Zagadn. CIV. *Pewien ugodził rzemieślnika do roboty, z warunkiem że za każdy dzień pracy da mu* 5 *zł., ale za każdy dzień próżnowania wytrąci zł.* $1\frac{1}{2}$. *Rzemieślnik ukończył robotę w* 45 *dni, i dostał* 186 *zł. Ileż dni pracował a ile próżnował?*

Odp. *Pracował dni* 39 *a próżnował* 6.

Uwaga. Wyłożyliśmy *metodę fałszywego założenia* nie dlatego żeby miała istotny związek z regułą trzech, ale dlatego że ona stanowi niejako łącznik między arytmetyką i algebrą. Powyższe zagadnienia są tego jasnym dowodem; mozolnie rozwiązane w arytmetyce, rozwiązują się, nie można łatwiej, w algebrze.

ROŹDZIAŁ DWÓNASTY.

PRZYBLIŻENIA LICZEBNE.

361. Do wykładu teoryi przybliżeń liczebnych, ogólnie i z większą ścisłością, potrzebujemy początkowych wiedzy algebry. O nich więc naprzód kilka słów powiemy.

Wszystko co myślą powiększyć albo zmniejszyć można nazywa sie ILOŚCIĄ. I tak, liczba jakakolwiek, długość, linia, objętość, etc. są ilościami.

Ilości oznaczają się ogólnie literami, i mówi się ilość a, ilość b, ilość x. Ilości *niewiadome*, to jest te których szukamy, oznaczają się zwykle ostatniemi literami alfabetu, ilości wiadome pierwszemi.

Gdy się mnoży ilość literalną przez mnożnik liczebny, kładzie się ten mnożnik przed ilością, i daje się mu wtedy nazwisko *spółczynnika*. I tak, $3a$, $\frac{2}{3}b$, znaczą to samo co $a \times 3$, $b \times \frac{2}{3}$; liczby 3, $\frac{2}{3}$ są spółczynnikami.

Wiemy już że *wykładnikiem* nazywa się liczba wskazująca potęgę; i tak w a^4, liczba 4 jest wykładnikiem i wskazuje *czwartą* potęgę ilości a. Nie trzeba mieszać spółczynnika z wykładnikiem, bo one oznaczają ilości zupełnie różne. Jakoż, gdy piszemy $3a$, 3 jest spółczynnikiem i oznacza summę $a+a+a$; gdy zaś piszemy a^3, 3 jest wykładnikiem i oznacza wieloczyn $a \times a \times a$.

ILOŚCI ODJEMNE.

362. Dla łatwiejszego pojęcia rzeczy weźmy przykład. *Pewn osoba miała* 10 *złotych a wydała* 4 *zł, ile się jej zostało?* Odciągamy 4 od 10, i odpowiedamy że się zostało 6 zł.

Gdyby zaś było pytanie, *Pewna osoba ma* 4 *zł. a chce wydać* 20 *zł., ile jej brakuje?* Odciągnęlibyśmy znowu 4 od 10, i odpowiedzielibyśmy że brakuje 6 zł.

W obydwóch zadaniach to samo odciąganie, dlaczegoż ten sam wynik ma nosić dwa różne nazwiska, *reszty* i *braku?* Otóż, aby być logicznym, *brak* nazwano *resztą mniej* albo *resztą adjemną*, kładąc przed nią znak *mniej*, to jest pisząc —6; a dla przeciwieństwa, właściwą resztę nazwano *resztą więcej* albo *resztą dodatną*, nie kładąc przed nią żadnego znaku, albo kładąc znak *więcej* jeśli trzeba dla odróżnienia; to jest pisząc 6 albo +6.

Nazywamy tedy *odjemną* tę ilość przed którą stoi znak —, jako $-a$; a *dodatną* tę która nie ma żadnego znaku, albo przed którą stoi znak +, jako a albo $+a$.

Ilość a jest to samo co $+1a^1$. Taki jest początek ilości *dodatnych* i *odjemnych*.

DODAWANIE.

363. Określenie. Dodaje się ilości pisząc jedną po drugiej ze znakami które stoją przed niemi. Wynik z dodawania nazywa się *summą algebryczną*.

I tak, niech będą do dodawania ilości $3ab$, $-4a^2b$, $+c$, $-d^2$; ich summa jest $3ab-4a^2b+c-d^2$.

ODCIĄGANIE.

364. Określenie. *Od jednej ilości odciągnąć drugą jestto znaleźć trzecią ilość taką aby, dodana do drugiej, wydała pierwszą.*

Rozróżnimy dwa przypadki.

1° *Od ilości a odjąć ilość* DODATNĄ b. Szukana reszta jest $a-b$; bo, dodając $a-b$ do b, otrzymujemy pierwszą ilość a.

To się wyraża pisząc $a-(b)=a-b$.

2° *Od ilości a odjąć ilość* ODJEMNĄ $-b$. Szukana reszta jest $a+b$; bo, dodając $a+b$ do $-b$, otrzymujemy pierwszą ilość a. To się wyraża pisząc $a-(-b)=a+b$.

Ztąd PRAWIDŁO: *Aby odciągnąć ilość jakąkolwiek od danej, trzeba zmienić znak ilości do odciągania i dodać ją do ilości danej.*

MNOŻENIE.

365. Określenie. Wskazuje się wieloczyn ilości oznaczanych

literami, pisząc te litery, jedną obok drugiej, w porządku alfabetycznym. I tak, wieloczyn ilości k, b^2c a, jest ab^2ck.

Prawidło wykładników. *Mnożą się potęgi jednej ilości, dodając wykładniki tych potęg.*

Niech będzie do mnożenia a^4 przez a^3 ; to znaczy że trzeba pomnożyć wieloczyn $aaaa$ przez wieloczyn aaa.

Owoż, wiemy (34, 2°) że się mnoży ilość przez wieloczyn kilku czynników, wykonywając mnożenie jedno po drugiem przez te czynniki ; na mocy tej zasady $aaaa \times aaa$ jest to samo co $aaaaaaa$ albo a^7. Więc $a^4 \times a^3 = a^{4+3}$.

366. Prawidło spółczynników. W *mnożeniu ilości, spółczynniki się mnożą.* Niech będzie do mnożenia $4a^3b^2c$ przez $5a^2b$; te dwie ilości mogą się pisać $4 \times a^3 \times b^2 \times c$ i $5 \times a^2 \times b$; owoż, na mocy dopiero co wspomnionej zasady, wieloczyn równa się

$$4 \times a^3 \times b^2 \times c \times 5 \times a^2 \times b, \text{ albo } 4 \times 5 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b \times c$$

$$\text{Więc } 4a^3b^2c \times 5a^2b = 20a^5b^3c.$$

367. Prawidło znaków. Niech będzie do mnożenia różnica $10 - 6$ przez 8. Wykonywając odciąganie które tu jest możebne, byłoby do mnożenia 4 przez 8 ; co daje wieloczyn $4.8 = 32$. Ale można otrzymać ten wieloczyn, nie wykonywając naprzód odciągania. Jakoż, gdybyśmy pomnożyli przez 8 samą tylko liczbę 10 która jest za wielka o 6, mielibyśmy wieloczyn 10×8, za wielki wieloczynem 6×8 ; zatem, odciągając 6×8 od 10×8, otrzymujemy szukany wieloczyn $10 \times 8 - 6 \times 8$.

$$\text{Więc} \qquad (10-6)8 = 10 \times 8 - 6 \times 8.$$

To pokazuje że, *aby pomnożyć różnicę* 10—6 *przez* 8, *dość jest pomnożyć każdą z dwóch części przez* 8, *zachowując ich znaki.*

Niech będzie teraz do mnożenia 10—6 przez 8—5. Gdybyśmy pomnożyli 10—6 przez 8 tylko, to jest przez liczbę za wielką o 5, mielibyśmy wieloczyn (10—6)8 któryby przewyższał prawdziwy wieloczynem (10—6)5 ; więc prawdziwy wieloczyn równa się (10—6)8—(10—6)5. Owoż, na mocy powyższego prawidła, (10—6)8 równa się 10.8—6.8, a (10—6)5 równa się $10.5-6.5$; zatem, odciągając $10.5-6.5$ od $10.8-6.8$, znajdujemy prawdziwy wieloczyn równy $10.8-6.8-10.5+6.5$

Więc $$(10-6)(8-5)=10.8-6.8-10.5+6.5.$$

Porównywając ten wynik z ilościami składającemi czynniki $10-6$ i $8-5$, widzimy że *wieloczyn dwóch ilości z tym samym znakiem ma znak* $+$, czyli *jest dodatny*, jako $+10\times+8=10\times8$, i tak samo $-6\times-5=6\times5$; a zaś *wieloczyn dwóch ilości ze znakami przeciwnemi ma znak* $-$, czyli *jest odjemny*, jako $-6\times+8=-6\times10$, i tak samo $+10\times-5=-10\times5$;

To właśnie stanowi *prawidło znaków*, które się wysłowia zwykle, mówiąc:

$+$ przez $+$, albo $-$ przez $-$, dają $+$
$-$ przez $+$, albo $+$ przez $-$, dają $-$.

Uwaga. Powyższe rozumowanie nie jest dowodzeniem prawidła znaków, które z natury swojej dowodzić się nie może; ale pokazuje tylko jakie trzeba wykonać działania aby, nie uskuteczniając naprzód dodawania albo odciągania, otrzymać wieloczyn dwóch summ algebrycznych.

W arytmetyce, aby pomnożyć jedną summę przez drugą, dość jest pomnożyć każdą część pierwszej przez każdą część drugiej, i dodać wieloczyny cząstkowe. To samo prawidło stosuje się do mnożenia jednej summy algebrycznej przez drugą, byle tylko zachowano prawidło znaków. Widzimy tedy, że ilości odjemne służą do zogólnienia twierdzeń.

368. Dla zastosowania prawidła znaków, pomnóżmy $3-\sqrt{5}$ przez $3+\sqrt{5}$. Wykonywając działanie, mamy

$$\begin{array}{r} 3-\sqrt{5} \\ \underline{3+\sqrt{5}} \\ 9-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5 \quad \text{albo } 4. \end{array}$$

Ten wynik pokazuje że, za pomocą prawidła znaków nietylko wykonywa się mnożenie na ilościach których ani dodać ani odciągnąć nie można, ale jeszcze czasem otrzymuje się wieloczyn bardzo prosty, jako powyższy.

369. Wykonajmy jeszcze następujące mnożenia:

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \quad\quad \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \quad\quad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Pierwsze mnożenie okazuje że *kwadrat różnicy dwóch ilości równa się summie kwadratów tych ilości mniej ich podwójnym wieloczynem.*

Uwaga. Ponieważ kwadrat liczby jest ilością dodatną, więc

$$a^2+b^2>2ab.$$

Ztąd TWIERDZENIE. *Summa kwadratów dwóch ilości jest większa od ich podwójnego wieloczynu.*

Drugie mnożenie dowodzi ważnego twierdzenia, które się tak wysłowia:

Wieloczyn summy dwóch ilości przez ich rożnicę rowna się rożnicy kwadratów tych dwóch ilości; I NAWZAJEM.

Dzielenie.

370. Określenie. *Dzielić jedną ilość przez drugą, jestto znaleźć trzecią ilość, któraby pomnożona przez drugą wydała pierwszą.*

Wskazuje się iloraz pisząc dzielnę i dzielnik w kształcie ułamka; i tak, iloraz z podzielenia $3a^2b$ przez $4cd$ jest $\frac{3a^2b}{4cd}$.

Niech będzie $24a^7b^4c^2d^6$ do podzielenia przez $8a^5b^3c^2$.

Wedle prawideł mnożenia, spółczynnik 24 dzielnej powinien być wieloczynem spółczynników dzielnika i ilorazu; więc, dzieląc 24 przez 8, otrzymujemy spółczynnik 3 ilorazu.

Tak samo, wykładnik 7 litery a w dzielnej powinien być summą wykładników dzielnika i ilorazu; więc różnica 7—5 czyli 2 jest wykładnikiem litery a w ilorazie.

Zatem idzie że litery niespólne dzielnikowi i ilorazowi powinny się znajdować w dzielnej bez żadnej zmiany wykładnika. Więc litera c, mająca ten sam wykładnik w dzielniku i dzielnej, nie może się znajdować w ilorazie, a zaś litera d dzielnej, niespólna dzielnikowi, musi być w ilorazie ze swoim wykładnikiem.

Wiec $$\frac{24a^7b^4c^2d^6}{8a^5b^3c^2}=3a^2bd^6.$$

Ztąd prawidło, *aby wykonać dzielenie jednej ilości przez drugą, dzieli się spółczynnik dzielnej przez spółczynnik dzielnika;* a gdy litera jest spólna, odciąga się wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej, jeśli to odciąganie możebne; nakoniec litery spólne dzielnikowi i dzielnej, gdy *mają ten sam wykładnik, znoszą się i nie piszą w ilorazie; a zaś litery dzielnej niespólne dzielnikowi piszą się ze swojemi wykładnikami w ilorazie.*

371. Można czasem uprościć iloraz, znosząc czynniki spólne dzielnej i dzielnika. Jakoż, niech będzie iloraz $\frac{12a^4b^2cd}{8a^3b^5c}$.

Na mocy określenia dzielenia, mamy

$$8a^3b^5c\times\frac{12a^4b^2cd}{8a\,b^5c}=12a^4b^2cd.$$

Podzielmy obie strony przez wieloczyn czynników spólnych $4a^3b^2c$ dzielnej i dzielnika, co bynajmniej nie psuje równości

i daje $$2b^3\times\frac{12a^4b^2cd}{8a^3b^5c}=3ad.$$

a ztąd, dzieląc obie strony przez $2b^3$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{12a^4b^2cd}{8a^3b^5c}=\frac{3ad}{2b^3}.$$

Ten wynik dowodzi że, dzieląc albo mnożąc przez tę samą ilość dzielnik i dzielnę, nie zmienia się ilorazu.

Podzielmy teraz a_n przez a^n. Na mocy prawidła wykładników, jest

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}, = a^0.$$

Owoż, oczywiście iloraz ilości a^n podzielonej przez nią samą jest 1.

Więc symbol $a^0 = 1$.

To znaczy że, *wszelka ilość podniesiona do potęgi zero równa się jedności*.

372. Prawidło znaków w dzieleniu jest to samo jak w mnożeniu ; bo oczywiście

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Te pierwsze wiedze działań algebrycznych, acz w krótkości okazane, są dostateczne do wyłożenia teoryi przybliżeń liczebnych, którą teraz przedsiębierzemy.

373. Teorya przybliżeń liczebnydh polega na rozwiązaniu dwóch następujących pytań :

1° *Z jakiem przybliżeniem można otrzymać wynik działania na liczbach które są dane z pewnem tylko przybliżeniem?*

2° *I na wzajem, z jakiem przybliżeniem trzeba wyrachawać liczby zadanego działania, aby otrzymać wynik z przybliżeniem wyznaczonem?*

Zajmiemy się rozwiązaniem tych pytań w zastosowaniu do sześciu działań arytmetyki.

374. Dodawanie. Niech będą do dodawania liczby 3,1415, 2,71828, 1,414, 0,30103, 12,40, 0,57, przybliżone na mniej niż jedność rzędu ostatniej cyfry.

Summa tych liczb czyni 20,54481.

Owoż, jakiekolwiek są przybliżenia, przez niedostatek albo przez zbytek , oczywiście błąd summy liczb nie przechodzi summy ich błędow. Ta summa błędów jest mniejsza od 0,02112, a tem bardziej mniejsza od 6,022. Więc, jeśli wszystkie błędy są przez niedostatek, szukana summa liczb jest mniejsza od $20{,}545+0{,}022$ czyli mniejsza od $20{,}567$; a jeśli, przeciwnie, wszystkie błędy są przez zbytek, ta summa jest większa od $20{,}544-0{,}022$ czyli większa od $20{,}522$. Zatem, biorąc $20{,}5$ będziemy mieli wartość summy liczb danych, przybliżoną przez niedostatek na mniej niż $0{,}1$

UWAGA. Gdy wiadomo że największe błędy są przez *niedostatek*, wtedy *dość jest odrzucić cyfry rzędu niższego od rzędu największych błędów, dodać liczby przybliżone i w otrzymanej summie odrzucić jeszcze ostatnią cyfrę, ale powiększyć jednością cyfrę ostatnią zachowaną*. Co się zgadza z prawidłem dodawania skróconego (201). Gdyby wszystkie *błędy były przez zbytek i tego samego rzędu, wtenczas dość byłoby dodać liczby, i odrzucić ostatnią cyfrę otrzymanej summy*; byle tylko, jako już wiemy, nie było więcej niż 11 liczb dodanych.

375. Weźmy teraz zadanie odwrotne: *Z jakiem przybliżeniem trzeba wyrachować liczby, aby błąd ich summy był mniejszy od ilości danej ε?*

Przypuśćmy że jest ogólnie n liczb, i wszystkie wyrachowane z tym samym błędem α; summa błędow będzie $n\alpha$. Więc jeśli chcemy żeby błąd summy był mniejszy od ε, dość wziąć α tak aby było

$$n\alpha \leqq \varepsilon;\ \text{zkąd}\ \alpha < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Zastosujmy. Znaleźć summę liczb $3{,}1415$, $\sqrt{5}$, $2{,}71828$, *przybliżoną na mniej niż* $0{,}01$.

Trzeba w tym przykładzie, żeby

$$\alpha \leqq \frac{0{,}01}{3},\ \text{to jest}\ \alpha < 0{,}0033\ldots$$

Zatem dość wziąć $\alpha = 0{,}001$.

Bierzemy więc każdą ze trzech liczb przybliżoną na mniej niż $0{,}001$ przez niedostatek, i mamy summę

$$3{,}141+2{,}236+2{,}718=8{,}095.$$

Odrzucając ostatnią cyfrę 5, ale przydając jedność do ostatniej zachowanej, otrzymujemy wartość 8,10 szukanej summy, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez zbytek.

376. ODCIĄGANIE. Niech będą dwie liczby przybliżone, obie przez niedostatek jako $A-\alpha$ i $B-\beta$, albo obie przez zbytek jako $A+\alpha$ i $B+\beta$. W obydwóch razach, błąd różnicy dwóch liczb równa się *różnicy* ich błędów $\beta-\alpha$ albo $\alpha-\beta$.

Ale, jeśli jedna z liczb jest przybliżona przez niedostatek a druga przez zbytek jako $A-\alpha$ i $B+\beta$, albo $A+\alpha$ i $B-\beta$; wtedy, odciągając drugą od pierwszej, znajdujeny różnicę $A-B-\alpha-\beta$ w pierwszym razie, a zaś $A-B+\alpha+\beta$ w drugim. W tym przypadku, błąd różnicy dwóch liczb równa się summie $\alpha+\beta$ ich błędów.

Wynika ztąd że, jakiekolwiek są przybliżenia, błąd różnicy dwóch liczb jest *najwięcej* równy *summie* ich błędów.

Niech będzie liczba 3,456 przybliżona na mniej niż 0,01 od której chcemy odciągnąć liczbę 1,9587 przybliżoną na mniej niż 0,001.

Wykonywając odciąganie, znajdujemy różnicę 1,4973 przybliżoną na mniej niż 0,01+0,001 czyli 0,011. To pokazuje że różnica wpada między 1,4973+0,011 i 1,4973—0,011 czyli między 1,509 i 1,486. Więc, wartość 1,49 albo 1,50 tej różnicy jest przybliżona na mniej niż 0,02.

377. UWAGA. Gdyby dwie powyższe liczby 3,456 i 1,9587 były przybliżone obie przez niedostatek, albo obie przez zbytek, wtedyby wiedziano że błąd różnicy jest mniejszy od większego z dwóch błędów, to jest od 0,01. W tym przypadku różnica 1,4973 byłaby wartością szukanej różnicy, przybliżoną na mniej niż 0.01. Ale niemożnaby odrzucić żadnej dziesiętnej, nie wiedząc czy wartość przybliżona jest przez niedostatek czy przez zbytek.

378. Rozwiążmy teraz zagadnienie odwrotnie. *Znaleźć różnicę liczb* $\sqrt{16,156}$ i 3,1415... *przybliżoną na mniej niż* 0,01 PRZEZ NIEDOSTATEK.

Dość wyrachować te dwie liczby na mniej niż 0,001, to jest z jedną dziesiętną więcej niż szukana wartość, i wziąć pierwszą liczbę przez *niedostatek* a drugą przez *zbytek*; co daje 4,019 i 3,142. Wykonawszy odciąganie, znajdujemy różnicę 0,877, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez niedostatek. Można nawet odrzucić ostatnią cyfrę, a wartość 0,87 będzie jeszcze przybliżona na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

379. Mnożenie. Dla skrócenia, będziemy nazywali A, B, liczby dokładne, a i b ich wartości przybliżone przez niedostatek, a', b' wartości przybliżone przez zbytek; α i β błędy tych wartości, a zaś ε błąd wyniku działań.

Odróżnimy trzy główne przypadki.

1° Mnożnik i mnożna przybliżone przez niedostatek.

Mamy
$$A-a=\alpha$$
$$B-b=\beta$$

Pomnożmy pierwszą równość przez B, a drugą przez a, będzie
$$A\times B-Ba=B\alpha$$
$$Ba-ab=a\beta$$

Ztąd, dodając stronami, otrzymujemy błąd wieloczynu
$$A\times B-ab \quad \text{czyli} \quad \varepsilon=B\alpha+a\beta$$
więc oczywiście
$$\varepsilon<B\alpha+A\beta.$$

2° Mnożnik i mnożna przybliżone przez zbytek.

Mamy
$$a'-A=\alpha$$
$$b'-B=\beta,$$

Mnożąc pierwszą równość przez B a drugą przez a', i dodając stronami, będzie
$$a'b'-A\times B=B\alpha+a'\beta.$$

Więc
$$\varepsilon<b'\alpha+a'\beta.$$

3° Uważajmy nakoniec dwa czynniki przybliżone przeciwnie, to jest jeden przez niedostatek a drugi przez zbytek. Niech będą na przykład

$$A-a=\alpha$$

i $$b'-B=\beta \quad \text{albo} \quad B-b'=-\beta.$$

Pomnóżmy pierwszą równość przez B a ostatnią przez a, i dodajmy; będzie

$$A\times B-ab'=B\alpha-a\beta.$$

Nie wiedząc naprzód czy przybliżona wartość wieloczynu jest przez niedostatek czy przez zbytek, można tylko twierdzić że błąd ε jest mniejszy od większej z dwóch liczb $B\alpha$ i $A\beta$. Wieloczyn ab' może nawet równać się dokładnemu $A\times B$.

380. To co poprzedza jasno pokazuje że, jakiekolwiek są przybliżenia dwóch czynników, we wszystkich przypadkach, błąd wieloczynu wyraża się jedną, ogólną formułą

$$\varepsilon < b'\alpha + a'\beta.$$

381. Samo z siebie rozumie się że, gdy jeden z czynników jest dokładny np. A, jego błąd α jest zero i nie przyczynia się do błędu ε. Wtedy jest po prostu $\varepsilon < A\beta$.

382. Nie trudno teraz odpowiedzieć na pytanie: *Z jakiem przybliżeniem trzeba wyrachować dwa czynniki, aby ich wieloczyn różnił się od prawdziwego o mniej niż ε?*

Oczywiście, dość przypuścić $\alpha=\beta$ w ogólnej formule, i wziąć

$$(a'+b')\alpha < \varepsilon; \qquad \text{zkąd} \qquad \alpha < \frac{\varepsilon}{a'+b'}.$$

383. Zastosujmy. *Niech będą dwie liczby* 3,14 *i* 24,6 *przybliżone przez niedostatek na mniej niż jedność ostatniej cyfry. Na jakie przybliżenie ich wieloczynu liczyć można?*

Mamy tu

$$\varepsilon < 3{,}15\times\tfrac{1}{10}+24{,}7\times\tfrac{1}{100} \quad \text{albo} \quad \varepsilon < 0{,}315+0{,}247 < 0{,}6.$$

To pokazuje że błąd wieloczynu jest mniejszy od 0,6. Nie mamy więc prawa liczyć na żadną dziesiętnę wieloczynu przybliżonego.

Wykonywając zwyczajne mnożenie, znajdziemy 77,244. Zaniedbujemy tedy wszystkie dziesiętne, i otrzymujemy liczbę 77, która jest wieloczynem przybliżonym na mniej niż jedność, przez niedostatek.

Mnożenie skrócone dałoby ten sam wieloczyn przybliżony.

384. *Wyznaczyć wieloczyn dwóch liczb przybliżonych* 0,77 *i* 0,024, *jedna przez* NIEDOSTATEK *a druga przez* ZBYTEK, *na mniej niż jedność ostatniej cyfry.*

Mamy $\varepsilon < 0,78 \times \frac{1}{1000}$, albo $\varepsilon < 0,025 \times \frac{1}{100}$.
czyli $\varepsilon < 0,00078$, albo $\varepsilon < 0,00025$.

Ztąd wnosimy że błąd wieloczynu jest mniejszy od

$$0,00078 < 0,001.$$

Wykonywając mnożenie zwyczajne, znajdujemy wieloczyn 0,01848 przybliżony na mniej niż 0,001.

385. *Wyrachować wieloczyn* $\pi\sqrt{17}$ (*) *na mniej niż* 0,1.

Dość oczywiście zastosować formułę $\alpha < \frac{\varepsilon}{a'+b'}$, w której podstawiając $\varepsilon = 0,1$, $a' = 3,2$, $b' = 4,2$

trzeba żeby było $\alpha < \frac{0,1}{3,2+4,2} < 0,013....$

Temu warunkowi stanie się tem bardziej zadość jeśli weźmiemy $\alpha = 0,01$.

Bierzemy więc wartości przybliżone przez niedostatek: 3,14 zamiast π, i 4,12 zamiast $\sqrt{17}$; i, wykonywając mnożenie, otrzymujemy wieloczyn 12,9368 przybliżony, na mniej niż 0,1 przez niedostatek.

(*) Liczba π wyraża stosunek okręgu do średnicy. Jej wartość przybliżona jest $\pi = 3,141592653589793...$ Znają dziś 540 dziesiętnych tej wartości.

386. *Znaleźć największą liczbę całkowitą jaka się mieści w wieloczynie* 18π

Oczywiście trzeba wziąć przybliżenie α liczby π takie żeby błąd $18\,\alpha$, z błędem pochodzącym z zaniedbania dziesiętnych wieloczynu, czyniły summę mniejszą od jedności. Owoż $\alpha < \frac{1}{18} = 0{,}05...$; biorąc $\alpha < 0{,}01$ co daje $\pi = 3{,}14$, będziemy mieli wieloczyn $18\times 3{,}14 = 56{,}52...$ którego błąd jest mniejszy od $0{,}01\times 18$ czyli od $0{,}18$; zaniedbując zaś wszystkie dziesiętne tego wieloczynu, popełnia się drugi błąd mniejszy od $0{,}53$. A że summa dwóch błędów jest mniejsza od $0{,}71$, co nie czyni jedności; więc 56 jest największą liczbą całkowitą jaka się mieści w 18π.

To się łatwo sprawdza, uważając tylko że wieloczyny, $3{,}14\times 18 = 56{,}52$ przez niedostatek, i $3{,}15\times 18 = 56{,}70$, przez zbytek, mają część całkowitą 56 spólną.

387. Zobaczmy teraz jak się wyznacza błąd wieloczynu wielu liczb przybliżonych

Przypuszczając wszystkie czynniki przybliżone przez niedostatek, mamy

$$A-a=\alpha$$
$$B-b=\beta$$
$$C-c=\gamma$$
$$\cdots\cdots$$
$$L-l=\lambda.$$

Pomnożmy pierwszą równość przez wieloczyn $B.C.D...L$, drugą przez $aC.D...L$, trzecią przez $abD...L$, ostatnią przez $abc...k$; będzie

$$A.B.C...L-aB.C.D...L=B.C.D...L\alpha$$
$$aB.C...L-abC.D...L=aC.D...L\beta$$
$$abC...L-abcD...L=abD...L\gamma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$abc...kL-abc...kl=abc...k\lambda.$$

Ztąd, dodając stronami, wynika

$$A.B.C...L-abc...l=BC...L\alpha+aCD...L\beta+...+abc...k\lambda.$$

Jeśli teraz podstawimy, w drugiej stronie tej równości, czynniki dokładne A, B, ... L zamiast przybliżonych $a, b, \ldots l$, otrzymamy

$$A.B.C...L-abc...l < B.C...L\alpha + A.C...L\beta + ... + A.B...K\lambda$$

Ta nierówność dowodzi że

Błąd wieloczynu czynników przybliżonych przez niedostatek jest mniejszy od summy wieloczynów, które się otrzymuje mnożąc błąd każdego czynnika, przez wieloczyn liczb dokładnych odpowiedających wszystkim innym czynnikom.

388. **Uwaga.** Jeśli w drugiej stronie równości, zamiast czynników dokładnych podstawimy przybliżone przez niedostatek, błąd wieloczynu będzie:

$$A.B.C..L-abc.l > bcd..l\alpha + ac..l\beta + ... + ab..k\lambda.$$

Ta uwaga będzie nam później użyteczna.

389. Gdy wszystkie czynniki są przybliżone przez zbytek, wtedy dowodzi się podobnie że

$$a'b'...l'-A.B...L < b'c'...l'\alpha + a'c'...l'\beta + ... + a'b'...k'\lambda.$$

to jest: *błąd wieloczynu przez zbytek jest mniejszy od summy wieloczynów, otrzymanych mnożąc błąd każdego czynnika przez wieloczyn wszystkich innych czynników.*

390. **Uwaga.** Nie mniej łatwo się dowodzi, że

$$a'b'c'..l'-A.B..L > B.C..L\alpha + A.C..L\beta + ... + A.B..K\lambda.$$

391. Nie trudno teraz pojąć że, jeśli chcemy mieć wieloczyn przybliżony przez niedostatek na mniej niż ε, dość wziąć wszystkie czynniki przez niedostatek, z przybliżeniem α takiem

żeby było $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{B.C...L + A.C...L + ... + A.B.C...K}$.

392. Dla zastosowania wyłożonych prawideł, szukajmy wieloczynu liczb 36,012, 9,75, 219,7 przybliżonych przez niedostatek na mniej niż jedność ostatniej cyfry.

Błąd wieloczynu jest mniejszy od summy

$$10\times 220\times\tfrac{1}{1000}+37\times 220\times\tfrac{1}{100}+37\times 10\times\tfrac{1}{10}<121\,;$$

co pokazuje że, w tym wieloczynie, nie można uważać jako pewne tylko tysiące. Wykonawszy mnożenie, znajdujemy wieloczyn 77140, przybliżony na mniej niż 121.

393. IV. Dzielenie. Dość odróżnić dwa główne przypadki.

1°. Dzielnik przybliżony przez *zbytek*, a dzielna przez niedostatek albo przez zbytek.

Mamy $$\frac{A}{B}-\frac{A\mp\alpha}{B+\beta}=\frac{A\beta\pm B\alpha}{B(B+\beta)}.$$

Więc w obydwóch razach błąd ilorazu

$$\varepsilon<\frac{B\alpha+A\beta}{B^2}.$$

2° Dzielnik przybliżony przez *niedostatek*, a dzielna przez zbytek albo przez niedostatek.

Mamy $$\frac{A\pm\alpha}{B-\beta}-\frac{A}{B}=\frac{A\beta\pm B\alpha}{B(B-\beta)}.$$

Więc w obydwóch razach błąd ilorazu

$$\varepsilon<\frac{B\alpha+A\beta}{b^2}.$$

394. Wynika ztąd że, jakiekolwiek są przybliżenia dzielnika i dzielnej, przez niedostatek albo przez zbytek, błąd ilorazu jest zawsze

$$\varepsilon<\frac{B\alpha+A\beta}{b^2}.$$

Ta ogólna formuła daje zaraz rozwiązanie kwestyi odwrotnej: *Z jakiem przybliżeniem trzeba wyrachować dzielnik i dzielnę, aby otrzymać iloraz z przyblizeniem wyznaczonem* ε?

Dość wziąć α i β tak żeby było $$\frac{B\alpha+A\beta}{b^2}<\varepsilon.$$

Jako widzimy, zagadnienie jest niewyznaczone; więc dość uczynić $\alpha=\beta$, i wziąć

$$\frac{(A+B)\alpha}{b^2} < \varepsilon; \quad \text{zkąd} \quad \alpha < \frac{b^2\varepsilon}{A+B}.$$

395. Te wszystkie formuły stosują się oczywiście do przypadku w którym dzielnik albo dzielna są dokładne; dość tylko podstawić *zero* zamiast α albo β.

I tak, jeśli dzielna jest dokładna, wtedy $\alpha = 0$.

A zatem $\varepsilon < \frac{A\beta}{b^2}$.

W zadaniu odwrotnem trzeba wziąć $\frac{A\beta}{b^2} < \varepsilon$; zkąd $\beta < \frac{b^2\varepsilon}{A}$.

396. Zastosujmy powyższe prawidła. *Na jakie przybliżenie ilorazu* $\frac{123,45}{6,789}$ *liczyć można, wiedząc że dzielnik i dzielna są błędne przez niedostatek, na mniej niż jedność ostatniej cyfry?*

Widzimy zaraz że błąd ilorazu jest mniejszy od

$$\frac{124\times0,001+6,8\times0,01}{(6,7)^2} < \frac{0,192}{44} < \frac{1}{2}\times\frac{1}{10^2}.$$

Dzielimy 123,45 przez dzielnik 6,790 wzięty przez zbytek, aby mieć pewność ilorazu przez niedostatek. To dzielenie daje 18,181.. Zaniedbując cyfrę tysiącznych, popełniamy błąd mniejszy od 0,002; a że błąd ilorazu jest mniejszy od $\frac{1}{2.10^2}$, summa dwóch błędów jest mniejsza od 0,01. Więc 18,18 jest wartością ilorazu $\frac{123,45}{6,789}$, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

397. *Wyrachować iloraz* $\frac{\sqrt{124}}{2\pi}$ *na mniej niż* 0,01 *przez niedostatek.*

Ten iloraz może się najpierwej uprościć, albowiem

$$\frac{\sqrt{124}}{2\pi} = \frac{\sqrt{4\times31}}{2\pi} = \frac{\sqrt{31}}{\pi}.$$

Teraz, nazywając α przybliżenie dzielnej i dzielnika, powinniśmy mieć $\dfrac{(\sqrt{31}+\pi)\alpha}{(3,1)^2}<\dfrac{1}{10^2}$.

Zatem dość wziąć $\alpha<\dfrac{9,6}{(5,6+3,2)10^2}$, albo $\alpha=\dfrac{1}{10^2}$.

Owoż, $\sqrt{31}=5,56..$; $\pi=3,14..$; więc podzieliwszy 5,56 przez 3,15, otrzymamy żądany iloraz 1,765 przybliżony przez niedostatek na mniej niż 0,01.

398. Dobrze jest znać szczególny przypadek przybliżenia, w którym iloraz jest ułamkiem właściwym, mającym oba wyrazy przybliżone na mniej niż *pół jedności*.

Nazywając ten ułamek ogólnie $\frac{a}{b}$, ułamek dokładny wyrazi się przez $\dfrac{a\pm\alpha}{b\pm\beta}$; zatem ich różnica będzie $\dfrac{a\pm\alpha}{b\pm\beta}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{\pm b\alpha\mp a\beta}{b(b\pm)\beta}$. Ztąd wnosimy że, jakiekolwiek są przybliżenia α i β, biorąc ułamek przybliżony zamiast dokładnego, popełnia się błąd zawsze mniejszy od $\dfrac{b\alpha+a\beta}{b(b-\beta)}$.

A ponieważ z przypuszczenia α i β są mniejsze od $\frac{1}{2}$ jedności; więc, jeśli podstawimy $\frac{1}{2}$ za α i β, błąd ilorazu będzie tem bardziej mniejszy od $\dfrac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b}{b(b-\frac{1}{2})}$, czyli mniejszy od $\dfrac{a+b}{b(2b-1)}$.

Teraz uważajmy że $\frac{a}{b}$ jest ułamkiem właściwym; to znaczy że $a\leqq b-1$. Ztąd, dodając b po obydwóch stronach, wynika $a+b\leqq 2b-1$; a tem samem $\dfrac{a+b}{2b-1}\leqq 1$. Więc $\dfrac{a+b}{b(2b-1)}<\dfrac{1}{b}$.

To dowodzi że, biorąc ułamek przybliżony $\frac{a}{b}$ zamiast dokładnego, popełnia się błąd mniejszy od $\frac{1}{b}$.

Ten przypadek ilorazu ma swoje zastosowanie w logarytmach.

399. Kończymy wysłowieniem następującego zadania, którego łatwe dowodzenie zostawiamy czytelnikowi.

Gdy za dzielnik podstawia się liczbę przybliżoną która przewyższa m razy iloraz, wtedy błąd przybliżonego ilorazu jest mniejszy niż błąd dzielnika podzielony przez m.

Niech będzie naprzykład iloraz $\frac{73}{15}=4+\frac{13}{15}$; jeśli zamiast dzielnika 15, weźmie się dzielnik 10, będzie $\frac{73}{10}=7+\frac{3}{10}$. Ten iloraz przybliżony różni się od dokładnego liczbą $2+\frac{13}{30}$, mniejszą od $\frac{5}{2}$: co sprawdza zadanie.

400. Potęgi. Przypuszczając w nº 386 wszystkie czynniki równe i przybliżone przez niedostatek, błąd m^{tej} potęgi liczby a jest

$$\varepsilon < mA^{m-1}\alpha.$$

Więc *nawzajem*, jeśli chcemy wiedzieć z jakiem przybliżeniem α przez niedostatek trzeba wyrachować wartość liczby A, aby otrzymać potęgę $m^{tą}$ tej wartości z błędem mniejszym od ε, dość wziąć

$$mA^{m-1}\alpha < \varepsilon; \text{ z kąd } \alpha < \frac{\varepsilon}{mA^{m-1}}$$

401. Zastosujmy. 1º Niech będzie liczba 2,71 przybliżona przez niedostatek na mniej niż 0,01; jej sześcian 19,902511 różni się od prawdziwego błędem mniejszym od $3\times(2,72)^2\times\frac{1}{100}<0,222$. Więc sześcian liczby dokładnej mieści się między 19,902 i 20,124.

2º Z jakiem przybliżeniem trzeba wziąć wartość liczby $\pi=3,1415...$ aby mieć jej kwadrat na mniej niż 0,01?

Dość aby $\alpha<\frac{0,01}{2\times3,15}<0,0015...$ Bierzemy tedy wartość 3,141; jej kwadrat 9,865881 różni się od prawdziwego o mniej niż 0,007. Więc żądany kwadrat jest 9,87 na mniej niż 0,01.

402. Pierwiastki. Jeśli w nierówności którą daje uwaga nº 388 podstawimy: $\sqrt[m]{A}$ zamiast każdego z czynników A,

B, L, i $\sqrt[m]{a}$ zamiast a, b, c, l; uważając że $A-a=\alpha$ i $\sqrt[m]{A}-\sqrt[m]{a}=\varepsilon$, otrzymamy

$$(\sqrt[m]{A})^m-(\sqrt[m]{a})^m>m\varepsilon(\sqrt[m]{a})^{m-1}\ (*), \text{albo } \alpha>m\varepsilon\sqrt[m]{a^{m-1}};$$

$$\text{więc} \quad \varepsilon<\frac{\alpha}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

ε oznacza, jakośmy powiedzieli, błąd pierwiastku $m$go liczby a przybliżonej przez niedostatek z błędem α.

Gdyby wyciągnięto pierwiastek $m$ty z liczby a przybliżonej przez zbytek, dowiedzionoby podobnie, za pomocą nierówności nº 389, że błąd popełniony jest

$$\varepsilon<\frac{\alpha}{m\sqrt[m]{A^{m-1}}}.$$

Uwaga. Te ogólne formuły dają, jako przypadek szczególny na $m=2$ i $m=3$, formuly nº 268 i 298, któreśmy innym znaleźli sposobem.

403. Jeśli chcemy wiedzieć, z jakiem przybliżeniem α trzeba mieć liczbę a przybliżoną przez niedostatek, aby można wyrachować, jej pierwiastek $m$ty z przybliżeniem ε, dość wziąć

$$\frac{\alpha}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}<\varepsilon; \quad \text{więc} \quad \alpha<m\varepsilon\sqrt[m]{a^{m-1}}.$$

404. Nie trudno teraz odpowiedzieć na pytanie: *Ile trzeba znać cyfer liczby a, aby wyznaczyć jej pierwiastek mty mający n cyfer dokładnych?*

To pytanie przywodzi się do następującego: *Ile trzeba znać cyfer liczby całkowitej a, aby otrzymać jej pierwiastek mty na mniej niż jedność?*

Oczywiście dość znać liczbę całkowitą a z przybliżeniem α któreby sprawdzało warunek

(*) Ta nierówność jest oczywista na mocy *ustawy dwumianu.*

$$\frac{\alpha}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}} < 1. \quad \text{Więc} \quad \alpha < m\sqrt[m]{a^{m-1}}.$$

Owoż, pierwiastek m^{ty} powinien mieć n cyfer; zatem liczba a musi zawierać n przedziałow po m cyfer. Ale pierwszy przedział, z lewej strony, może być niezupełny i składać się z jednej tylko cyfry. Ztąd wynika że liczba a ma *najmniej* $m(n-1)+1$ a *najwięcej* mn cyfer. Więc, w pierwszym przypadku $a > 10^{m(n-1)}$, a w drugim $a > 10^{mn-1}$.

Rozpatrzmy każdy z tych przypadków.

1° Gdy $a > 10^{m(n-1)}$, wtedy powinno być

$$\alpha < m\sqrt{10^{m(n-1)(m-1)}} \quad \text{albo} \quad \alpha < m\,10^{(n-1)(m-1)}.$$

Temu warunkowi staje się zadość jeśli $\alpha < 10^{(n-1)(m-1)}$.

Co pokazuje że, w tym przypadku, dość żeby błąd α był tylko mniejszy od jedności rzędu $mn-m-n+2$. Więc, gdy pierwszy przedział z lewej strony liczby a jest *niezupełny*, można wyrachować pierwiastek m^{ty} z n cyframi dokładnemi, znając tylko n cyfer tej liczby.

2° Gdy $a > 10^{mn-1}$, wtedy powinno być

$$\alpha < \sqrt[m]{m 10^{(mn-1)(m-1)}} \quad \text{albo} \quad \alpha < m\,10^{mn-n-1}\sqrt{10};$$

warunek dopełniony jeśli $\alpha < 10^{mn-n-1}$.

To dowodzi że, w drugim przypadku, dość żeby błąd α był mniejszy od jedności rzędu $mn-n$. Więc, gdy pierwszy przedział liczby a jest *zupełny*, można wyznaczyć pierwiastek m^{ty} z n cyframi dokładnemi, znając $n+1$ cyfer dokładnych tej liczby.

Zatem OGÓLNIE, *aby można wyciągnąć pierwiastek jakikolwiek z liczby przybliżonej, dość mieć tę liczbę wyrachowaną przez niedostatek, z jedną dokładną cyfrą więcej niż w żądanym pierwiastku.*

Zastosujmy te uwagi do pierwiastków kwadratowego i sześciennego.

405. *Wyrachować* $\sqrt{200+\frac{2}{7}}$ *z* DWIEMA *dziesiętnemi dokładnemi.*

Ponieważ szukany pierwiastek powinien mieć *cztery* dokładne cyfry, dość wziąć dwie dziesiętne z ułamka $\frac{2}{7}$; co da liczbę 200,28 mającą *pięć* dokładnych cyfer, jako chce ogólny przepis, i będzie $\sqrt{200,28}=14,152...$ Owoż, tu

$$\varepsilon<\frac{0,01}{28}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100};$$

a poprzestając na dwóch dziesiętnych, błąd zaniedbanych cyfer pierwiastku jest mniejszy od 0,003; summa tych dwóch błędów nie czyni 0,01. Więc $\sqrt{200+\frac{2}{7}}=14,15..$ na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

UWAGA. Można, uważając że pierwszy przedział liczby 200, podzielonej na przedziały dwucyfrowe, jest *niezupełny*, wziąć tylko *cztery* dokładne cyfry, to jest liczbę 200,2; co daje $\sqrt{200,2}=14,149...$ Tutaj $\varepsilon<\frac{0,1}{28,2}<0,0036$, ale summa dwóch błędów $0,0036+\frac{9+1}{1000}$ przechodzi 0,01. Bierzemy więc 14,15 i mamy wartość żądanego pierwiastku, przybliżoną także na mniej niż 0,01; niewiadomo tylko czy przez zbytek czy przez niedostatek.

Gdy przeciwnie, ta sama wartość, wyżej otrzymana, ma przybliżenie wyznaczone; ale do tego wyniku trzeba było użyć jednej dokładnej cyfry więcej.

406. *Mając daną liczbę* 299,7 *przybliżoną na mniej niż* 0,1 *na ile cyfer jej pierwiastku sześciennego liczyć można?*

Wiemy że, wedle ogólnego przepisu, ten pierwiastek może się wyrachować ze *trzema* dokładnemi cyframi; ale, biorąc go z *pięcioma* cyframi, znajdujemy 6,6920. Tu $\varepsilon<\frac{0,1}{3(6,6)^2}<0,0008$, zatem summa dwóch błędów, mniejsza od 0,0008+0,0001, nie dochodzi do 0,001. Ztąd wnosimy że 6,692.. jest wartością pierwiastku sześciennego danej liczby, przybliżoną na mniej niż 0,001 przez niedostatek.

Ten przykład dowodzi że podane warunki ilości dokładnych cyfer liczby przybliżonej, z której się wyciąga pierwiastek jakikolwiek, są dostateczne ale nie konieczne.

407. *Znaleźć wartość* $\sqrt{\frac{123000}{e}}$, *na mniej niż jedność; wiedząc że liczba* 123000 *jest dokładna, a liczba e niespółmierna* (*).

Nazywając β błąd dzielnika, na mocy n° 394, błąd liczby pod pierwiastnikiem jest mniejszy od $\frac{123000\beta}{e^2}$; a na mocy n° 402, błąd wyciągniętego pierwiastku jest mniejszy od $\frac{123000\beta}{2e^2}$. W obecném zadaniu, błąd wyniku ma być mniejszy od jedności; więc powinno być

$$\frac{123000\beta}{2e^2}<1; \quad \text{zkąd} \quad \beta<\frac{2e^2}{123000}.$$

To pokazuje że dość wziąć

$$\beta<\frac{2\times 7}{12\times 10^4}, \quad \text{albo} \quad \beta=\frac{1}{10^4}.$$

Trzeba teraz wyrachować iloraz $\frac{123000}{e}$ ze *czterema dokładnemi* cyframi *przez niedostatek*. W tym celu, bierzemy dzielnik $e=2,71829$ *przez zbytek*, z jedną cyfrą więcej niż wymaga powyższy warunek, i dzieląc znajdujemy iloraz 45249, błędny przez niedostatek na mniej niż jedność. Więc 4524 jest wartością ilorazu, przybliżoną na mniej niż *jeden dziesiątek*, przez niedostatek.

Dzielenie skrócone przez 2,7182 dałoby odrazu iloraz 4525, przybliżony przez zbytek; skąd się wywodzi iloraz 45240, przybliżony przez niedostatek na mniej niż jeden dziesiątek.

Owoż, pierwiastek kwadratowy liczby 45250 jest 212,7...

(*) Liczba e, podstawa logarytmów naturalnych, jest niespółmierna i równa się $e=2,718281828459045...$

z błędem $\varepsilon < \frac{10}{2\times 200} < \frac{1}{4} \times \frac{1}{10}$; a summa dwóch błędów mniejsza od $0{,}025+0{,}8<1$.

Więc 212 jest wartością danego pierwiastnika, przybliżoną na mniej niż jedność przez niedostatek.

408. Nakoniec, *wyrachujmy z* TRZEMA *dokładnemi cyframi pierwiastnik składany* $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Ten pierwiastnik jest to samo co $\frac{1}{4}\sqrt{10-\sqrt{20}}$. Teraz, ponieważ żądany wynik powinien mieć *trzy dokładne* cyfry, a jego część całkowita ma tylko jedną; dość żeby przybliżenie α liczby pod pierwiastnikiem było

$$\alpha \leqq 2\times\frac{1}{10^3}\times 2 \text{ (n}^\text{o} \text{ 403)} \quad \text{albo} \quad \alpha \leqq \frac{1}{2\times 10^2}.$$

Co wymaga *czterech* cyfer dokładnych dla $\sqrt{20}$. Owoż $\sqrt{20}=4{,}472\ldots$ Bierzemy tedy, dla liczby pod pierwiastnikiem, wartość $10-4{,}473=5{,}527$ przybliżoną przez niedostatek, na mniej niż $0{,}001$; i mamy $\sqrt{5{,}527}=2{,}350\ldots$

Więc $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=0{,}58..$ na mniej niż $0{,}01$ przez niedostatek.

BŁĘDY WZGLĘDNE.

409. Różnica między liczbą dokładną i jej wartością przybliżoną stanowi *błąd samoisty* (absolutny) tej wartości; stosunek błędu samoistego do liczby dokładnej nazywa się *błędem względnym* wartości przybliżonej. I tak, niech będzie liczba 567; jeśli weźmiemy 564 albo 570 zamiast 567, popełnimy błąd samoisty 3; stosunek $\frac{3}{567}$ stanowi błąd względny wartości przybliżonych 564 i 570, pierwsza przez niedostatek a druga przez zbytek.

Nawzajem, błąd samoisty równa się wieloczynowi błędu względnego przez liczbę dokładną. Nazywając ogólnie A

liczbę dokładną, α błąd samoisty, E błąd względny liczby przybliżonej a; będzie

$$E = \frac{\alpha}{A}; \qquad \text{zatem} \qquad \alpha = A \times E.$$

Ztąd wynika że błąd względny liczby nie zmienia się gdy się mnoży albo dzieli tę liczbę. I tak, niech będą liczby 3456, 345,6, 0,03456; zaniedbując dwie ostatnie cyfry 56, popełnia się oczywiście ten sam błąd względny

$$\frac{56}{3456} = \frac{5,6}{345,6} = \frac{0,00056}{0,03456}.$$

410. Błąd względny jest niezbędnie potrzebny do oceniania stopnia przybliżeń. Wedle błędu względnego, nie zaś wedle samoistego, sądzi się o dokładności otrzymanego wymiaru. Jakoż, gdyby mierząc dwie długości, jedną 10000 sążni a drugą 100 sążni, uczyniono na każdej błąd 10 sążni; w pierwszej długości błąd względny byłby $\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$ na sążeń; w drugiej ten błąd byłby $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ na sążeń. Pierwszy wymiar byłby oczywiście dokładniej wykonany od drugiego. Tak samo, błąd $\frac{1}{10}$ linii na 3 liniach, przedłużenia sztaby metalicznej, jest większy niż błąd 1000 mil na odległości księżyca od ziemi, wynoszącej okrągło 85000 mil.

411. Zwykle znana jest tylko granica wyższa błędu samoistego, to jest wiadomo że błąd jest mniejszy od jedności pewnego rzędu; w takim razie, można tylko wyznaczyć granicę wyższą błędu względnego. I tak, $\sqrt{7} = 2,64575\ldots$; jeśli weźmiemy 2,645 albo 2,646, obie wartości przybliżone na mniej niż 0,001, pierwsza przez niedostatek, druga przez zbytek; błąd względny obydwóch będzie mniejszy od $\frac{1}{2645} < \frac{1}{2 \times 10^3}$.
Podobnie, jeśli zamiast 0,04567... weźmiemy 0,0456 albo 0,0457, błąd względny będzie mniejszy od $\frac{0,0001}{0,0456} < \frac{1}{4.10^2}$.

Ztąd wnosimy że, gdy liczba jest wyrachowana przez niedostatek z $n+1$ cyframi dokładnemi, albo przez zbytek z n cyframi na mniej niż jedność rzędu ostatniej; nazywając k cyfrę najwyższych jedności, błąd względny jest zawsze

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{k\times 10^n}; \quad \text{a tem bardziej} \quad \frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}.$$

Ale *wzajemnica nie jest prawdziwa.* Albowiem, jeśli błąd względny przybliżonej wartości jest mniejszy od $\frac{1}{k\times 10^n}$, nie wynika ztąd koniecznie żeby ta wartość miała $n+1$ albo nawet n pierwszych cyfer dokładnych, ani żeby błąd samoisty był mniejszy od jedności rzędu cyfry $n+1$. Jakoż, niech będzie liczba 169,8; jeśli weźmiemy 170,2 za jej wartość, błąd względny będzie $\frac{4}{1698} < \frac{1}{4\times 10^2}$; a jednakże wartość przybliżona 170,2 ma tylko *pierwszą* cyfrę dokładną. Jeśli znowu, zamiast dokładnej liczby 87,96, weźmiemy przybliżoną 87,1, błąd względny będzie $\frac{0,86}{87,96} < \frac{1}{10^2}$; wartość przybliżona 87,1 ma wprawdzie *dwie* pierwsze cyfry dokładne, ale *trzecia* różni się od prawdziwej więcej niż jednością.

412. Ponieważ błędy względne zależą od liczby dokładnych cyfer wartości przybliżonych, ich znajomość może służyć do wyznaczenia tych wartości, opierając się na twierdzeniu następującem.

Twierdzenie. *Gdy błąd względny wartości przybliżonej jest mniejszy od $\frac{1}{10^n}$, biorąc za dokładne n pierwszych cyfer tej wartości, popełnia się błąd mniejszy od jedności cyfry n^{tej}. A gdy błąd względny wartości przybliżonej jest mniejszy od $\frac{1}{k.10^n}$, i nadto pierwsza cyfra mniejsza od k; wtedy, biorąc za dokładne $n+1$ pierwszych cyfer tej wartości, popełnia się błąd mniejszy od jedności cyfry $n+1^{ej}$.*

Jakoż, z założenia błąd względny

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}; \qquad \text{zkąd} \qquad \alpha < \frac{A}{10^n}$$

Jeśli więc na wartość dla A weźmiemy n pierwszych cyfer tej liczby, będzie $\alpha < 1$. Co dowodzi że uważając za dokładne n pierwszych cyfer liczby przybliżonej, taka wartość nie różni się od prawdziwej jednością cyfry n^{tej}.

Przypuśćmy teraz że błąd względny liczby przybliżonej jest

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{k\,10^n}; \quad \text{zkąd} \quad \alpha < \frac{A}{k10^n}.$$

Jeśli pierwsza cyfra liczby A jest *mniejsza od* k, wtedy, biorąc $n+1$ pierwszych cyfer tej liczby na jej wartość przybliżoną, będzie $\alpha < 1$. Co dowodzi że można uważać za dokładne $n+1$ pierwszych cyfer liczby przybliżonej A, i taka wartość jest tylko błędna na mniej niż jedność cyfry $k+1^{ej}$.

Niech będzie na pierwszy przykład liczba 54,27. Biorąc 53,8 za wartość przybliżoną, popełnia się błąd względny mniejszy od $\frac{1}{10^2}$; więc, na mocy twierdzenia, wartość 53,8 jest przybliżona na mniej niż *jedność*. Ale nie można odrzucić cyfry 8 i wziąć tylko 53: bo oczywiście wartość 53 różniłaby się od prawdziwej 54,27 więcej niż jednością.

Uważajmy na drugi przykład liczbę 187,961. Jeśli weźmiemy 188,05 za jej wartość przybliżoną, błąd względny będzie mniejszy od $\frac{1}{2\times 10^3}$; więc, wartość 188,05 jest przybliżona na mniej niż 0,1 chociaż *trzecia* i *czwarta* cyfra, z lewej strony, nie są dokładne.

Nie trudno teraz zastosować błędy względne do wyznaczenia stopnia przybliżeń w działaniach arytmetyki.

413. Summa i różnica. Błąd względny summy liczb przy-

bliżonych $a+b+c$ równa się $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{A+B+C}$, i jest mniejszy od summy błędów względnych $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}$ tych liczb, jako mniejszy od największego z nich. (321 uw.)

Uwaga. Ten związek, między błędami względnemi liczb przybliżonych i błędem względnym summy, jest zaiste prosty, ale małego użytku; zwłaszcza gdy jedne liczby są bardzo małe w porównaniu z drugiemi; bo wtedy błąd względny summy tych liczb i summa ich błędów względnych są zanadto od siebie oddalone.

Co do różnicy. Niech będą dwie liczby $A+\alpha$ i $B-\beta$ z błędami przeciwnemi. Błąd względny ich różnicy jest $\frac{\alpha+\beta}{A-B}$

Co wyraźnie pokazuje że, gdy dwie liczby przybliżone są mało od siebie różne ale dość wielkie, błąd względny ich różnicy może znacznie przewyższać błąd względny każdej z nich. Dlatego właśnie błędy względne niewiele służą w odciąganiu.

Przejdźmy do innych działań.

414. Wieloczyn. *Błąd względny wieloczynu dwóch czynników przybliżonych przez niedostatek, albo jednego przez niedostatek a drugiego przez zbytek, jest mniejszy od summy błędów względnych tych czynników.*

Jakoż, wiemy już że w tym razie

$$\varepsilon < B\alpha + A\beta; \quad \text{więc błąd względny} \quad \frac{\varepsilon}{A.B} < \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B}.$$

Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

415 Uwaga. Gdy jeden czynnik jest dokładny, błąd względny wieloczynu równa się błędowi względnemu drugiego czynnika. Może się nawet zdarzyć że wieloczyn dwóch czynników, przybliżonych przeciwnie, jest dokładny.

Ale, *gdy oba czynniki są przybliżone przez zbytek, błąd względny wieloczynu jest większy od summy błędów względnych tych czynników.*

Jakoż, $\varepsilon=(A+\alpha)(B+\beta)-A.B=B\alpha+A\beta+\alpha\beta.$

Więc $$\frac{\varepsilon}{A.B}=\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\alpha}{A}\times\frac{\beta}{B}.$$

Uważajmy że $$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\alpha}{A}\times\frac{\beta}{B}<\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b};$$

albowiem ta nierówność jest to samo co

$$\frac{\alpha}{A}\times\frac{\beta}{B}<\frac{\alpha(A-a)}{Aa}+\frac{\beta(B-b)}{Bb},\quad\text{albo}\quad\frac{\alpha}{A}\times\frac{\beta}{B}<\frac{\alpha^2}{Aa}+\frac{\beta^2}{Bb};$$

a ostatnia jest oczywista.

Ztąd wynika że: *Jakiekolwiek są przybliżenia dwóch czynników, przez niedostatek albo przez zbytek, błąd względny wieloczynu jest zawsze mniejszy od summy* $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}$.

Co właśnie służy w zastosowaniu.

416. Dowiedźmy teraz ogólnego TWIERDZENIA: *Błąd względny wieloczynu przybliżonego przez* NIEDOSTATEK *jest mniejszy od summy błędów względnych jego czynników.*

Oczywiście dość tylko okazać że, jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla wieloczynu n czynników $a, b, c,\ldots l$, to będzie jeszcze prawdziwe dla wieloczynu z jednym czynnikiem m więcej. Niech będą tedy $\alpha, \beta, \gamma,\ldots\lambda, \mu$ błędy tych czynników. Z założenia, błąd względny $\frac{\varepsilon}{A.B\ldots L}$ wieloczynu n czynników jest

$$\frac{\varepsilon}{A.B\ldots L}<\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\ldots+\frac{\lambda}{L}.$$

Owoż, można uważać wieloczyn $abc\ldots lm$ jako złożony z *dwóch* tylko czynników $abc\ldots l$ i m; więc błąd względny tego wieloczynu jest mniejszy od $\frac{\varepsilon}{A.B\ldots L}+\frac{\mu}{M}$, a tem bardziej mniejszy od $$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\ldots+\frac{\lambda}{L}+\frac{\mu}{M}.$$

Co było do dowodzenia.

A żeśmy już dowiedli twierdzenia dla *dwóch* czynników; więc ono jest prawdziwe dla *trzech*, a następnie dla *czterech*, etc.; więc jest ogólne. Z resztą, mogliśmy je wyprowadzić odrazu z ogólnego twierdzenia, dowiedzionego poprzednio (387).

Nawzajem, to ostatnie wywodzi się z obecnego; jakoż

$$\frac{\varepsilon}{ABC...L} < \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} ... + \frac{\lambda}{L}; \text{ więc } \varepsilon < BC...L\alpha + AC...L\beta + ...$$

417. Przejdźmy do zastosowań. Wyrachować wieloczyn $3{,}1415 \times 79{,}01$ którego oba czynniki są przybliżone przez niedostatek, na mniej niż jedność rzędu ostatniej cyfry.

Błąd względny czynnika 3,1415 jest mniejszy od $\frac{1}{3 \times 10^4}$, a zaś błąd względny czynnika 79,01 mniejszy od $\frac{1}{7.10^3}$; zatem błąd względny wieloczynu będzie mniejszy od:

$$\frac{1}{10^3}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{7}\right) < \frac{1}{5 \times 10^3}.$$

Owoż, cyfra najwyższych jedności wieloczynu oznacza *sta* i jest mniejsza od 5; więc można liczyć na *cztery* cyfry; to jest innemi słowy, wieloczyn wykonany będzie przybliżony na mniej niż 0,1.

Mnożenie zwyczajne daje 248,209915; ale ostatnie *pięć* cyfer są niedokładne. Gdybyśmy je chcieli odciąć, trzebaby wziąć 248,3; przybliżenie niewiadome, przez zbytek czy przez niedostatek. Ta niedogodność leży w samej naturze błędów względnych.

Wykonawszy mnożenie skrócone, wedle wiadomego prawidła, otrzymamy wartość 248,2 wieloczynu przybliżoną przez *niedostatek.*

418. Znajdźmy jeszcze wieloczyn dwóch liczb 2,1215 i 10,123 przybliżonych przez niedostatek albo przez zbytek, na mniej niż jedność ostatniej cyfry.

Błąd względny wieloczynu jest mniejszy od

$$\frac{1}{2\times10^4}+\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10^4}\left(\frac{1}{2}+1\right)<\frac{1}{6\times10^3}.$$

Owoż, pierwsza cyfra tego wieloczynu jest mniejsza od 6; więc można liczyć na *cztery* pierwsze cyfry jego wartości 21,4759445; ale sens przybliżenia niewiadomy.

Jeśli wykonamy wieloczyny $2{,}1216\times10{,}124$ i $2{,}1214\times10{,}122$ znajdziemy że mają część spólną 21,47. Ztąd wnosimy że 21,47 jest wartością szukanego wieloczynu, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez *niedostatek*.

Mnożenie skrócone daje ten sam wynik.

419. Nakoniec, *szukajmy wieloczynu* 9089×1000, *którego oba czynniki są przybliżone przez niedostatek na mniej niż jedność.*

Błąd względny wieloczynu jest mniejszy od

$$\frac{1}{9\times10^3}+\frac{1}{10^3}=\frac{1}{9\times10^2}.$$

Owoż, pierwsza cyfra tego wieloczynu zostawia wątpliwość *trzeciej* cyfry. Aby usunąć niepewność, dość uważać że błąd samoisty wieloczynu jest mniejszy od $9089+1001=10090$ (379 1°). Co dowodzi że, przydając jedność do trzeciej cyfry wieloczynu 9089000, otrzyma się jego wartość 9090000, przybliżoną na mniej niż jeden dziesiątek tysięcy. Mnożenie skrócone pokazuje że ta wartość jest przybliżona przez zbytek.

420. Zajmijmy się teraz kwestyą odwrotną. *Ile trzeba użyć cyfer w każdym czynniku, aby można liczyć na n cyfer wieloczynu?*

Dla jaśniejszego wykładu rzeczy weźmy przykład.

Wyrachować z TRZEMA *cyframi, to jest na mniej niż* $\frac{1}{1000}$ *jego wartości, wieloczyn* $\pi(5-\sqrt{3})\,(2+\sqrt[3]{60})$.

Ponieważ jest *trzy* czynniki przybliżone, dość wziąć ich błędy samoiste α, β, γ tak żeby było

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{5-\sqrt{3}}=\frac{\gamma}{2+\sqrt[3]{600}}=\frac{1}{3\times10^3}.$$

To znaczy że błędy samoiste powinny być proporcyonalne do odpowiednych czynników, albo do ich wartości przybliżonych przez niedostatek. Ztąd wynika że dosyć wziąć

$$\alpha<\frac{3,1....}{3\times10^3} \text{ albo } \alpha=\frac{1}{10^3};\ \beta<\frac{4,2....}{3\times10^3} \text{ albo } \beta=\frac{1}{10^3};$$

$$\gamma<\frac{10,9...}{3\times10^3} \text{ albo } \gamma=\frac{1}{2\times10^2}.$$

Bierzemy więc

$$\pi=3,141...,\ 5-\sqrt{3}=4,867...,\ 2+\sqrt[3]{600}=10,90...$$

wszystkie trzy wartości przybliżone przez niedostatek; i wykonywamy mnożenie. Ale, aby skrócić rachunek, oto jak postępować trzeba.

Błąd samoisty pierwszego wieloczynu

$$4,867\times3,141=15,287247$$

jest mniejszy od 0,01; przeto, zachowując cyfrę *tysiącznych*, mnożymy 15,287 przez trzeci czynnik 10,90; co daje 166,6283. Błąd ostatniego wieloczynu jest mniejszy od 0,263; więc 166 jest wartością wieloczynu $\pi(5-\sqrt{3})(2+\sqrt[3]{600})$, przybliżoną na mniej niż jedność przez niedostatek.

421. *Wyrachować wieloczyn* $3\pi(3-\sqrt{5})$ *czyli* $\pi(9-\sqrt{45})$ *ze* CZTEREMA *dokładnemi cyframi, albo raczej na* $\frac{1}{1000}$ *jego wartości.*

Ponieważ szukany wieloczyn powinien mieć *cztery* dokładne cyfry, dość żeby jego błąd względny był mniejszy od $\frac{1}{10^4}$. Musi więc błąd względny każdego z dwóch czynników być mniejszy od $\frac{1}{2\times10^4}$; co właśnie nastąpi, jeśli weźmiemy te czynniki z *pięcioma* dokładnemi cyframi, dlatego że ich pierwsze cyfry przewyższają 1. Mamy przeto do mnożenia $\pi=3,1415$ przez $9-\sqrt{45}=2,2917$... Otóż, wieloczyn powinien mieć cztery cyfry, a zawiera tylko jedną w części całkowitej; więc go trzeba wyznaczyć na mniej niż 0,001. Mnożenie skrócone daje żądaną wartość 7,199 wieloczynu, przybliżoną przez niedostatek.

422. Iloraz. *Gdy dzielnik jest przybliżony przez* ZBYTEK, *błąd względny ilorazu jest mniejszy od summy błędów względnych dzielnej i dzielnika.*

Jakoż, wiemy że, jakiekolwiek jest przybliżenie dzielnej w tym razie, zawsze

$$\varepsilon<\frac{A\beta+B\alpha}{B^2};\ \text{więc błąd względny}\ \ \varepsilon\times\frac{B}{A}<\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}.$$

423. Uwaga. Gdy dzielnik jest przybliżony przez *niedostatek* a dzielna przez *zbytek*, wtedy błąd względny ilorazu jest *większy* od summy błędów względnych dzielnej i dzielnika.

Jakoż, $$\frac{A+\alpha}{B-\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha+A\beta}{B(B-\beta)}.$$ A ztąd

$$\varepsilon\times\frac{B}{A}=\frac{B}{B-\beta}\cdot\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B-\beta}.\quad\text{Więc}\quad \varepsilon\times\frac{B}{A}>\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}.$$

Ale, we wszystkich przypadkach, błąd względny ilorazu jest mniejszy od summy $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\alpha}{a}\times\frac{\beta}{b}$.

Czego dowieśdź nie trudno.

424. Kwestya odwrotna łatwo się rozwiązuje za pomocą błędów względnych. Jakoż, aby iloraz miał *n dokładnych* cyfer, a raczej, aby błąd ilorazu *był mniejszy od jedności cyfry* n^{tej}, dość wziąć dzielnik i dzielnę z błędem względnym mniejszym od $\frac{1}{2\times10^n}$; ale dzielnik przez zbytek.

425. Zastosujmy. *Wyrachować iloraz* $\frac{567,89}{10,234}$, *w którym dzielnik i dzielna są przybliżone przez niedostatek, na mniej niż jedność ostatniej cyfry.*

Biorąc dzielnik przez zbytek, błąd względny ilorazu $\frac{567,89}{10,235}$ będzie mniejszy od $\frac{1}{5\times10^4}+\frac{1}{10^4}<\frac{1}{8\times10^3}$. Owoż, wykonawszy dzielenie, znajdujemy wartość 55,4851 przez niedostatek; więc 55,49 jest wartością ilorazu przybliżoną na mniej niż 0,01.

Uwaga. Ten przykład pokazuje że, jeśli dzielnik i dzielna mają n *dokładnych* cyfer można, ogólnie mówiąc, liczyć na $n-2$ cyfer ilorazu; albowiem wtedy błąd ilorazu jest mniejszy od $\frac{2}{10^{n-1}}$ czyli $<\frac{1}{5\times10^{n-2}}$

426. *Wyznaczyć iloraz* $\frac{\sqrt{5}}{2\pi}$ z TRZEMA *dokładnemi cyframi.*

Dosyć aby błąd względny tego ilorazu był mniejszy od $\frac{1}{10^3}$ co nastąpi jeśli weźmiemy dzielnę $\sqrt{5}=2,236\ldots$, a dzielnik przez zbytek 6,284. Dzielenie zwyczajne daje 0,3558.....; więc 0,356 jest wartością ilorazu pzzybliżoną na mniej niż 0,001.

Gdybyśmy wzięli jedną cyfrę więcej w dzielnej, i wykonali dzielenie skrócone, znaleźlibyśmy

$$\begin{array}{r|l} 2,2361 & 6,283 \\ \cline{2-2} 3512 & 0,355 \\ 372 & \\ 62 & \end{array}$$

iloraz 0,355 przybliżony na mniej niż 0,001 przez niedostatek. Tej dobitności przybliżenia błędy względne nie dają.

Uwaga. Można czasem, korzystając z wiadomej pierwszej cyfry ilorazu, otrzymać jego wartość przybliżoną, biorąc mniej cyfer w dzielnej i dzielniku. I tak, w powyższym przykładzie, pierwsza cyfra ilorazu jest 3; dość przeto dla żądanego przybliżenia, wziąć dzielnik i dzielnę

z błędami samoistemi α i β, tak żeby było $\frac{\alpha}{2,2}=\frac{\beta}{6,2}=\frac{1}{2(3+1)10^2}$
Co wymaga tylko

$$\alpha \overline{\overline{<}} \frac{2,2}{2(3+1)10^2}, \text{ albo } \alpha=\frac{1}{4.10^2}; \quad \beta \overline{\overline{<}} \frac{6,2}{2.4.10^2}, \text{ albo } \beta=\frac{1}{10^2}.$$

Więc dosyć wziąć $\sqrt{5}=2,236$, $2\pi=6,29$, i wykonać dzielenie poprzestając na trzeciej cyfrze; co daje iloraz 0,355 jako wyżej. Ale w takim przypadku rzadko można wiedzieć sens przybliżenia.

427. Potęgi. Wiemy już że błąd samoisty potęgi m^{tej} liczby a jest $\varepsilon < mA^{m-1}\alpha$; ztąd, dzieląc obie strony przez A^m, wywodzi się błąd względny tej potęgi $\frac{\varepsilon}{A^m} < \frac{m\alpha}{A}$.

To znaczy że *błąd względny potęgi* m^{tej}, *liczby przybliżonej przez niedostatek, jest mniejszy od błędu względnego tej liczby, pomnożonego przez wykładnik potęgi.*

Ten wynik jest następstwem twierdzenia (416) które daje błąd względny wieloczynu; dość tylko przypuścić wszystkie czynniki równe.

428. Nawzajem, jeśli chcemy wiedzieć *ile trzeba użyć cyfer liczby przybliżonej, aby jej potęga* m^{ta} *miała* n *cyfer dokładnych*, dość wyrazić że błąd względny tej potęgi jest mniejszy od $\frac{1}{10^n}$; więc tem bardziej dość żeby

$$\frac{m\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}; \text{ zkąd } \frac{\alpha}{A} < \frac{1}{m10^n}.$$

429. Zastosujmy. *Wyrachować wieloczyn* $[(5,432)^2+6]\pi$, *wiedząc że liczba* 5,432 *jest przybliżona na mniej niż* 0,001.

Błąd względny summy $(5,432)^2+6$, która stanowi pierwszy czynnik, jest mniejszy od $\frac{2}{5.10^3}$ (413); więc, z jakiemkolwiek przybliżeniem wziętoby czynnik π, niemożna zapewnić że błąd względny wieloczynu będzie mniejszy od $\frac{2}{5.10^3}$. Ale biorąc

$\pi = 3{,}141$, summa dwóch błędów jest mniejsza od $\frac{1}{10^3}$; można przeto liczyć na *trzy* pierwsze cyfry wieloczynu. Owoż, kwadrat $(5{,}432)^2 = 29{,}506624$; więc wieloczyn $35{,}506624 \times 3{,}141$ mający trzy cyfry w części całkowitej będzie błędny na mniej niż jedność.

Wykonawszy ten wieloczyn za pomocą mnożenia skróconego (209), otrzymamy żądaną wartość 111, przybliżoną przez niedostatek na mniej niż jedność.

430. *Wyrachować* $(6-\sqrt{5})^2$ *na mniej niż* 0,01.

Ponieważ ten kwadrat zawiera *dwie* cyfry w części całkowitej, a jego wartość ma być przybliżona na 0,01, dość przeto żeby błąd względny tej wartości był mniejszy od $\frac{1}{10^4}$. Więc, nazywając α błąd różnicy $6-\sqrt{5}$, jej błąd względny $\frac{\alpha}{6-\sqrt{5}}$ powinien zadość uczynić warunkowi

$$\frac{2\alpha}{6-\sqrt{5}} < \frac{1}{10^4}. \text{ Ztąd } \alpha < \frac{3}{2} \times \frac{1}{10^4}, \text{ albo } \alpha = \frac{1}{10^4}.$$

Bierzemy tedy $\sqrt{5} = 2{,}2361\ldots$ przez zbytek, i mamy do wykonania kwadrat liczby 3,7639 który będzie przybliżony na mniej niż 0,01.

Mnożenie skrócone daje szukaną wartość 14,16 kwadratu $(6-\sqrt{5})^2$, przybliżoną przez niedostatek na mniej niż 0,01.

431. Pierwiastki. Błąd samoisty pierwiastku *mgo* liczby a, przybliżonej przez niedostatek, jest $\varepsilon < \frac{\alpha}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}$.

Zatem błąd względny tego pierwiastku będzie

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{A}} < \frac{\alpha}{m\sqrt[m]{A}\sqrt[m]{a^{m-1}}}; \text{ a że } A > a, \text{ więc } \frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{A}} < \frac{\alpha}{ma}.$$

Jeśli liczba jest przybliżona przez zbytek, błąd samoisty jej pierwiastku m^{go} jest
$$\varepsilon < \frac{\alpha}{m\sqrt[m]{A^{m-1}}};$$
zatem błąd względny tego pierwiastku będzie $\frac{\varepsilon}{\sqrt[m]{A}} < \frac{\alpha}{mA}$.

Co pokazuje że *błąd względny pierwiastku m^{go} liczby przybliżonej przez* zbytek *jest mniejszy od m^{tej} części błędu względnego tej liczby.*

432. Nawzajem, jeśli chcemy wiedzieć z jakiem przybliżeniem trzeba znać liczbę a przez niedostatek, aby wyznaczyć jej pierwiastek m^{ty} z n dokładnemi cyframi, dość wyrazić że α dopełnia warunku
$$\frac{\alpha}{ma} < \frac{1}{10^n} \text{ albo } \frac{\alpha}{m} < \frac{A-\alpha}{10^n};\ \text{ztąd } \frac{\alpha}{m} < \frac{A}{10^n+m} \text{ (321 uw. II)}.$$
$$\text{Zatem} \quad \frac{\alpha}{A} < \frac{m}{10^n+m}.$$

Więc, *aby pierwiastek m^{ty}, liczby przybliżonej przez niedostatek, mógł mieć n dokładnych cyfer, dość jest żeby błąd względny tej liczby był mniejszy od* $\frac{m}{10^n+m}$.

Jeśli liczba jest przybliżona przez zbytek, wtedy dla dokładności n cyfer jej pierwiastku m^{go} dość jest dopełnić tylko warunku
$$\frac{\alpha}{mA} < \frac{1}{10^n}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{\alpha}{A} < \frac{m}{10^n}.$$
to znaczy że wtedy *błąd względny liczby przybliżonej przez zbytek powinien być mniejszy od* $\frac{m}{10^n}$.

433. Zastosujmy. *Wyrachować* $\sqrt{45,678}$; *wiedząc że liczba pod pierwiastnikiem jest błędna na mniej niż jedność ostatniej cyfry.*

Jakiekolwiek jest przybliżenie liczby 45,678 przez niedostatek czy przez zbytek, błąd względny pierwiastku $\sqrt{45,678}$

jest mniejszy od $\frac{0,001}{2\times 45,677}<\frac{1}{9\times 10^4}$. Więc można liczyć na *cztery* cyfry tego pierwiastku, a nawet na *pięć* dlatego że pierwsza jest mniejsza od 9. Owoż $\sqrt{45,678}=6,75855..$; więc 6,7586 jest wartością pierwiastku $\sqrt{45,678}$, przybliżoną na mniej niż 0,0001.

434. *Wyznaczyć* $\sqrt[6]{166}$ *na mniej niż* 0,01.

Wiemy że $\sqrt[6]{166}=\sqrt[3]{\sqrt{166}}$. Aby otrzymać żądaną wartość, dosyć żeby błąd względny pierwiastku $\sqrt{166}$ był mniejszy od $\frac{3}{10^3+3}<0,002$ (nº 432); co wymaga *czterech* cyfer dokładnych tego pierwiastku. Owoż $\sqrt{166}=12,88..$ a następnie $\sqrt[3]{12,88}=2,343$; tu $\varepsilon<\frac{0,01}{3\times 4}$; więc 2,34 jest wartością pierwiastku $\sqrt[6]{166}$, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

435. *Wyrachować* $\sqrt{\frac{1807}{\pi}}$, *wiedząc że liczba* 1807 *jest przybliżona na mniej niż jedność.*

Z jakiemkolwiek przybliżeniem weźmie się dzielnik π, błąd względny ilorazu $\frac{1807}{\pi}$, z przyczyny dzielnej przybliżonej na mniej niż jedność, ma za granicę $\frac{1}{10^3}$. Nie można więc liczyć na *więcej niż trzy dokładne cyfry* tego ilorazu. Biorąc π z trzema dziesiętnemi przez zbytek, to jest 3,142, błąd względny ilorazu będzie mniejszy od $\frac{1}{10^3}+\frac{1}{3.10^3}$, a tem bardziej mniejszy od $\frac{1}{7.10^2}$ Owoż, błąd samoisty ilorazu jest mniejszy od

$$\frac{1,808+3,142}{(3,1)^2}<0,52;$$

wykonywając dzielenie, znajdujemy $\frac{1807}{3,142}=575,1..$

Ale, odrzucając wszystkie dziesiętne, robimy nowy błąd, mniejszy od 0,2; zatem część całkowita 575 ilorazu jest błędna na mniej niż $0,52+0,2<0,8$. Więc 575 jest wartością ilorazu $\frac{1807}{\pi}$, przybliżoną na mniej niż jedność przez niedostatek.

Wyciągamy teraz pierwiastek kwadratowy z 575, i mamy

$$\sqrt{575}=23,977..$$

Liczba 23,9 jest wartością pierwiastnika $\sqrt{\frac{1807}{\pi}}$, przybliżoną na mniej niż 0,1, przez niedostatek.

436. Nakoniec, *znaleźć wartość wyrażenia* $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, *na mniej niż* 0,01.

Można naprzód uprościć to wyrażenie.

Jakoż, $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{10-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$.

A jeśli pomnożymy licznik i mianownik ostatniego pierwiastnika przez $5+\sqrt{5}$, otrzymamy $\sqrt{\frac{10-\sqrt{5}}{10}}$ albo $\frac{1}{10}\sqrt{100-\sqrt{500}}$.

Widzimy teraz łatwo że dość wyrachować liczbę $100-\sqrt{500}$ pod pierwiastnikiem, na mniej niż 0,1 aby otrzymać żądany wynik. Bierzemy tedy $\sqrt{500}=22,36..$; po czem mamy $\sqrt{100-22,37}=8,81...$

Więc 0,88 jest wartością wyrażenia $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, przybliżoną na mniej niż 0,01 przez niedostatek.

NOTY.

WIADOMOŚĆ O POSTĘPNIACH. (*)

§ 1. POSTĘPNIA ARYTMETYCZNA ALBO RÓŻNICOWA.

I. *Nazywa się* POSTĘPNIĄ ARYTMETYCZNĄ *ciąg liczb z których każda ma z poprzedzającą tę samą różnicę, nazwaną* STOSUNKIEM *postępni.*

Wedle tego określenia postępnia, arytmetyczna jest szeregiem proporcyj arytmetycznych ciągłych.

I tak, liczby całkowite, w naturalnym porządku idące, to jest

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\ldots$$

stanowią postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest 1.

Tak samo, liczby $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$

są w postępni arytmetycznej której stosunkiem jest 2. Każdy wyraz tej postępni jest średnią arytmetyczną dwóch sąsiednich; np. $6 = \frac{8+4}{2}$.

Pierwsza postępnia, mająca stosunek dodatny, jest *rosnąca;* druga, mająca stosunek odjemny -2, jest *malejąca.*

Postępnia arytmetyczna może mieć wyrazy odjemne, jako

$$-8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ldots$$

II. Wynika z określenia postępni arytmetycznej że

2gi wyraz równa się 1mu więcej stosunek,

3ci równa się 2mu więcej stosunek; zatem równa się 1mu więcej *dwa razy* stosunek.

4ty równa się 1mu więcej *trzy razy* stosunek. I tak dalej.

(*) *Progressus* znaczy postęp, a zaś *progressio* wyrażam przez *postępnię.*

Więc ogólnie, *wyraz jakikolwiek, równa się* 1^{mu} *więcej tyle razy stosunek ile jest wyrazów przed nim.*

I tak, 10^{ty} wyraz postępni 2, 5, 8, 11, 14, 17,... równa się $2+3\times9$ to jest 29.

Dla ogólności wyrażenia, nazywa się a pierwszy wyraz postępni, r stosunek, n liczbę wyrazów, s ich summę.

Na mocy tego co poprzedza, ostatni wyraz postępni jest

$$l = a+(n-1)r. \quad (1)$$

Za pomocą tej formuły, możemy wsadzić między dwie liczby tyle średnich arytmetycznych ile się podoba. I tak, jeśli chcemy wsadzić 5 średnich między 8 i 20, trzeba szukać stosunku postępni arytmetycznej, w której wyrazy skrajne są $a=8$ i $l=20$, liczba wyrazów $n=2+5=7$. Podstawiając te wartości w formule (1), znajdziemy

$$20=8+6\times r; \quad \text{zkąd} \quad r=\frac{20-8}{6}=2.$$

Stosunek jest 2, więc żądana postępnia będzie

$$8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20.$$

III. *W postępni arytmetycznej, summa dwóch wyrazów, równo oddalonych od skrajnych, równa się summie skrajnych.*

Niech będzie postępnia

$$\div\, a,\ b,\ c,\ d,\ldots h,\ i,\ k,\ l.$$

Czwarty wyraz d od początku równa się $d=a+3r$

Czwarty wyraz od końca równa się $h=l-3r$

Więc dodając, będzie : $d+h=a+l.$

IV. Szukajmy teraz summy wyrazów postępni arytmetycznej. Nazywając S tę summę, mamy

$$S=a+b+c+\ldots+i+k+l$$

Ale, biorąc wyrazy postępni w porządku odwrotnym, mamy także,

$$S=l+k+i+\ldots+c+b+a.$$

Dodając stronami, otrzymujemy

$$2S=(a+l)+(b+k)+\ldots(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Owoż, jakośmy okazali, każda summa w nawiasach, a jest ich n, równa się summie skrajnych $a+l$; więc

$$2S=(a+l)n; \quad \text{zkąd} \quad S=\left(\frac{a+l}{2}\right)n. \quad (2)$$

Zastosujmy. *Pewien ogrodnik chce podlać 100 drzew w linii prostej, na 3 metry jedno od drugiego, stojących. Jest źródło na 10 metrów od pierwszego drzewa. Jakąż drogę przebiegnie ogrodnik, niosąc do każdego drzewa wiadro wody, i wracając do źródła po wodę?*

Dość wyrachować drogę którą ogrodnik przebiega idąc z wodą do każdego drzewa; bo wracając odbywa tę samą drogę. Owoż, przebiega naprzód 10 metrów od źródła do 1go drzewa; potem, idąc od źródła do 2go drzewa, przebiega $10+3$ czyli 13 metrów; następnie, idąc do 3go drzewa, 16 metrów. I tak dalej. Więc przebieżone drogi dają postępnię arytmetyczną

$$10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 21,\ldots\ldots$$

która zawiera 100 wyrazów, a jej stosunek jest 3. A że ostatni wyraz równa się $10+99\times3=287$; więc summa wszystkich wyrazów jest

$$S=\left(\frac{10+287}{2}\right)100=\frac{29700}{2}.$$

Więc ogrodnik musi przebiedz 29700 metrów, czyli blizko 6 mil krajowych, aby podlać wszystkie drzewa.

§ 2. POSTĘPNIA GEOMETRYCZNA ALBO ILORAZOWA.

V. *Nazywa się* POSTĘPNIĄ GEOMETRYCZNĄ *ciąg liczb z których każda ma z poprzedzającą ten sam stosunek, nazwany* STOSUNKIEM *postępni.*

Wedle tego określenia, postępnia geometryczna jest szeregiem proporcyj ciągłych.

I tak, liczby $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ldots$

stanowią postępnię geometryczną której stosunek jest 2. Każdy wyraz tej postępni jest oczywiście średnim proporcyonalnym między dwoma sąsiedniemi. np. $16=\sqrt{8\times32}$.

Tak samo liczby $10,\ 2,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{25},\ \frac{2}{125},\ldots$

są w postępni geometrycznej mającej stosunek $\frac{1}{5}$.

Pierwsza postępnia, mająca za stosunek liczbę większą od jedności, jest *rosnąca*; a druga, w której stosunek mniejszy od jedności, jest *malejąca*.

VI. Wynika z określenia postępni geometrycznej że

2gi wyraz równa się 1mu pomnożonemu przez stosunek.

3^{ci} równa się 2^{mu} pomnożonemu przez stosunek; zatem równa się 1^{mu} pomnożonemu przez kwadrat stosunku.

4^{ty} równa się 1^{mu} pomnożonemu przez sześcian stosunku. I tak dalej.

Więc ogólnie, *wyraz jakikolwiek równa się 1^{mu} pomnożonemu przez potęgę stosunku, która oznacza ile jest wyrazów poprzedzających.*

I tak, w postępni $\qquad 3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

7^{my} wyraz jest $\qquad 3 \times 2^6 = 192.$

Zatem, ostatni wyraz postępni geometrycznej wyznacza się formułą

$$l = ar^{n-1}. \qquad (1)$$

Za pomocą tej formuły można wsadzić średnie proporcyonalne między dwie dane liczby. I tak, jeśli chcemy wsadzić *dwie* średnie proporcyonalne między liczby 9 i 243, trzeba szukać stosunku postępni geometrycznej, w której wyrazy skrajne są: $a = 9$ i $l = 243$, liczba wyrazów $n = 2 + 2 = 4$. Podstawiając te wartości w formule (1), znajdziemy

$$243 = 9r^3; \quad \text{zkąd} \quad r = \sqrt[3]{\tfrac{243}{9}} = 3.$$

Więc żądana postępnia jest:

$$9, 27, 81, 243.$$

VII. *W postępni geometrycznej, wieloczyn dwóch wyrazów, równo oddalonych od skrajnych, równa się wieloczynowi skrajnych.*

Niech będzie postępnia $\div\div a, b, c, d, \ldots i, k, l.$

Trzeci wyraz c od początku równa się $\quad c = ar^2$

Trzeci wyraz i od końca równa się $\quad i = \frac{l}{r^2}.$

Więc mnożąc, będzie $\quad ci = al.$

VIII. Szukajmy teraz summy wyrazów postępni geometrycznej wyrażonej ogólnie przez

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-2}, ar^{n-1}.$$

Nazywając S tę summę, mamy

$$S = a + ar + ar^2 + \ldots ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Pomnóżmy obie strony przez r, będzie

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots ar^{n-1} + ar^n.$$

Odciągając stronami, pierwszą summę od drugiej, otrzymamy

$$Sr - S = ar^n - a \quad \text{albo} \quad S(r-1) = a(r^n - 1),$$

więc

$$S = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \qquad (2).$$

Wyrachujmy summę 5ciu wyrazów postępni

$$4, 12, 36, 108, 324.$$

Podstawiając w formule (2) wartości $a = 4$, $r = 3$, $n = 5$; znajdujemy

$$S = 4\left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1}\right) = 484.$$

Dowiedziemy teraz dwóch twierdzeń często potrzebnych.

IX. *Potęgi, po sobie idące, liczby większej od jedności rosną coraz więcej, i mogą przejść wszelką wielkość.*

Gdy mnożnik większy od jedności, wieloczyn jest większy od mnożnej; więc, *potęgi liczby większej od jedności rosną coraz bardziej.*

Aby dowieśdź że mogą przejść wszelką wielkość, uważajmy ogólnie liczbę a która przewyższa jedność liczbą α, tak że

$$a - 1 = \alpha$$

Pomnóżmy obie strony przez a, będzie $a^2 - a = a\alpha$.

Więc $$a^2 - a > \alpha$$

A tem bardziej $$a^3 - a^2 > \alpha,$$

$$a^4 - a^3 > \alpha$$

$$\cdots\cdots$$

$$a^n - a^{n-1} > \alpha.$$

Dodając stronami wszystkie wyrażenia, otrzymujemy, po uproszczeniu,

$$a^n - 1 > n\alpha, \quad \text{albo} \quad a^n > 1 + n\alpha \ (*).$$

Jeśli więc chcemy żeby potęga a^n przewyższała ilość jakąkolwiek k, dość wziąć za wykładnik n liczbę taką któraby sprawdzała nierówność

$$1 + n\alpha > n\alpha, \qquad \text{albo} \qquad n > \frac{k-1}{\alpha}.$$

(*) Dwumian Newtona daje odrazu tę nierówność; jakoż

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \ldots; \ \text{więc}\ a^n > 1 + n\alpha.$$

Co oczywiście możebne. Więc *potęga* a^n *może przejść wszelką wielkość.*

X. *Potęgi, po sobie idące, liczby mniejszej od jedności maleją coraz bardziej, i mają* ZERO *za granicę.*

Niech będzie liczba a mniejsza od jedności. Mamy zaraz $a<1$, $a^2<a$, $a^3<a^2$, i t. d.; więc potęgi liczby a maleją.

Aby potęga a^n mogła stać się mniejszą od wszelkiej ilości ε, tak małej jak się podoba, trzeba żeby było

$$a^n < \varepsilon, \quad \text{albo, biorąc odwrotności,} \quad \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Owoż, można zawsze zadość uczynić ostatniej nierówności, ponieważ $\frac{1}{a} > 1$; więc potęga a^n może się różnić tak mało od 0 jak się podoba; więc ma zero za granicę.

XI. Możemy teraz znaleźć summę wyrazów postępni geometrycznej, której stosunek jest mniejszy od jedności, a liczba wyrazów przechodzi wszelką wielkość, czyli jako się mówi, jest *nieskończenie wielka.* Mamy

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \times r^n.$$

Owoż, z założenia $r<1$; więc, gdy n rośnie i staje się nieskończenie wielkiem, potęga r^n maleje coraz bardziej i ma *zero* za granicę. Ztąd wynika że wtedy $\frac{a}{1-r} \times r^n$ jest *zero,* i summa wyrazów postępni równa się

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Na zastosowanie, szukajmy wartości ułamka *okresowego prostego* 0,363636... Ten ułamek równa się summie wyrazów postępni geometrycznej

$$\frac{36}{100} + \frac{36}{100^2} + \frac{36}{100^3} + \cdots$$

w której pierwszy wyraz $a = \frac{36}{100}$, stosunek $r = \frac{1}{100}$, a liczba n wyrazów nieskończenie wielka. Więc szukana wartość jest

$$S = \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{100-1} = \frac{36}{99}.$$

Co się zgadza z podanem prawidłem w n° 196.

XII. Rozwiążmy następujące zadanie.

ZAGADNIENIE. *Matematyk* SESSA *wynalazł grę szachów i nauczył w nią grać* SZACHA PERSKIEGO. *Ten monarcha tak był uradowany, iż ofiarował matematykowi w nagrodę co zechce, dodając że gotów nawet dać mu połowę państwa. Matematyk prosi aby mu tylko dano* JEDNO *ziarno pszenicy za pierwszą przegródkę szachownicy,* DWA *za drugą,* CZTERY *za trzecią,* OSIEM *za czwartą, i tak dalej; podwajając aż do ostatniej 64tej przegródki. Ileż powinienby dostać ziarn pszenicy?*

Ilość żądanych ziarn stanowi summę wyrazów postępni geometrycznej

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots 2^{63}.$$

w której $a = 1$, $r = 2$, $n = 64$.

Zatem summa $$S = \frac{1(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64}-1.$$

Wykonawszy rachunek znajdujemy że liczba tych ziarn jest

18 446 744 073 709 551 615.

Można wiedzieć ile jest ziarn w korcu pszenicy, ile trzeba korcy na zasianie jednego morga, i ile zbiór wydaje. Otóż, wyrachowano że, gdyby cała powierzchnia ziemi, licząc góry i morza, stała się ziemią orną, trzebaby 8 razy większej powierzchni, aby zasiana mogła wydać ilość ziarn którą powyższa 20to cyfrowa liczba oznacza. Wszystkie dotąd znane bogactwa świata nie wystarczyłyby na zapłacenie pszenicy SESSY!

SUMMA DZIELNIKÓW DANEJ LICZBY.

XIII. Niech będzie liczba $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. .

Aby otrzymać jej dzielniki, dość napisać summy postępni geometrycznych

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^\alpha$$
$$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^\beta$$
$$1 + c + c^2 + c^3 + \ldots + c^\gamma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

i pomnożyć ich wyrazy między sobą. Każdy wieloczyn będzie jednym z dzielników liczby N. Więc summa S tych dzielników jest wieloczynem powyższych summ, i równa się

$$S = \frac{(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)(c^{\gamma+1}-1)\ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}.$$

XIV. Wszelka liczba, równa summie swych dzielników mniejszych od niej, nazywa się *doskonałą*.

I tak, liczba 6 jest doskonałą, bo się równa summie swych dzielników mniejszych $1+2+3=6$.

PODZIELNOŚĆ PRZEZ 7, 13, 37.

XV. Co do 7. Dzielmy przez 7 jedność, dopisując do niej pewną liczbę zer, aż dojdziemy do reszty 1; otrzymamy

$$\begin{array}{l|l} 1000000\ldots & 7 \\ \hline \;\;30 & 142857 \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

To dzielenie pokazuje że jedność 1go rzędu, podzielona przez 7, daje resztę 1; jedność 2go rzędu daje resztę 3; jedność 3go rzędu resztę 2. Następnie, jedność 4go rzędu daje resztę 6; więc jej brakuje 1 aby była dokładnie podzielna przez 7. Tak samo, jedności 5go rzędu brakuje 3; a jedności 6go rzędu brakuje 2. Przeto, jeśli podzielimy daną liczbę na przedziały ze *trzech* cyfer, zaczynając od prawej strony, przedziały rzędu *nieparzystego* będą wyrażały jedności pozostałe, a przedziały rzędu *parzystego* jedności brakujące. Więc, *aby dana liczba była podzielna przez 7, trzeba i dość jest aby summa przedziałów rzędu nieparzystego, zmniejszona summą przedziałów rzędu parzystego, była podzielna przez 7.*

Zastosujmy tę cechę do liczby 58245607532. Summa przedziałów rzędu nieparzystego czyni $532+245=777$, a zaś summa przedziałów rzędu parzystego daje $607+58=665$. Odciągając drugą summę od pierwszej, znajdujemy resztę 112 podzielną przez 7. Więc dana liczba jest podzielna przez 7.

Weźmy jeszcze 123456789012. Summa przedziałów rzędu nieparzystego jest 468, a summa przedziałów rzędu parzystego 912. Ponieważ druga summa przewyższa pierwszą, odciągamy pierwszą od drugiej; różnica 444 wyraża jedności brakujące; dzielimy ją przez 7, i znajdujemy resztę 3, która pokazuje że danej liczbie brakuje 3 jedności aby była podzielna przez 7. Więc dana liczba, podzielona przez 7, daje resztę 4.

XVI. Co do 13. Cecha podzielności przez 13 jest podobna do cechy podzielności przez 7; to jest, podzieliwszy daną liczbę na przedziały ze trzech cyfer, od prawej strony, *trzeba i dość jest aby summa przedziałów rzędu nieparzystego, zmniejszona summą przedziałów rzędu parzystego, była podzielna przez* 13.

Cecha podzielności przez 37. Podobnem rozumowaniem znajdujemy że, *aby dana liczba była podzielna przez* 37, *trzeba i dość jest żeby*, podzieliwszy ją na przedziały trzech cyfer, od prawej strony, *summa liczb wyrażonych przez dwie ostatnie cyfry każdego przedziału, zmniejszona summą pierwszych cyfer tych przedziałów pomnożoną przez* 11, *była podzielna przez* 37.

I tak, niech będzie liczba 198456789. Summa $89+56+98=243$, a zaś $(7+4+1)11=132$. Przewyżka pierwszej summy nad drugą jest liczba 111, podzielna przez 37. Więc dana liczba jest podzielna przez 37.

PODZIELNOŚĆ LICZB W OGÓLNOŚCI.

XVII. Niech będzie ogólnie, liczba N w układzie liczenia podstawy b; podzielmy ją na przedziały m cyfer, od prawej strony, które nazwiemy A, B, C, D...; będziemy mieli

$$N=A+Bb^{m}+Cb^{2m}+Db^{3m}+\dots$$

To wyrażenie liczby N może się przedstawić w trzech następujących postaciach:

$$N=(B+Cb^{m}+Db^{2m}+\dots)b^{m}+A$$

$$N=B(b^{m}-1)+C(b^{2m}-1)+D(b^{3m}-1)+\dots$$
$$A+B+C+D+\dots$$

$$N=B(b^{m}+1)+C(b^{2m}-1)+D(b^{3m}+1)+E(b^{4m}-1)+$$
$$A+C+E+\dots-(B+D+\dots)$$

Te trzy równości, których pierwsze części są odpowiednio podzielne przez b^{m}, $b^{m}-1$, $b^{m}+1$, dają trzy twierdzenia na których opierają się cechy podzielności liczb każdego układu liczenia.

1° *Reszta z podzielenia liczby* N, *przez potęgę* $m^{tą}$ *podstawy li-*

czenia, równa się przedziałowi m pierwszych cyfer z prawej strony tej liczby.

2° *Reszta z podzielenia liczby N, przez potęgę $m^{tą}$ podstawy liczenia zmniejszoną jednością, równa się reszcie otrzymanej dzieląc, przez ten dzielnik, summę przedziałów złożonych m cyfer.*

3° *Reszta z podzielenia liczby N przez potęgę $m^{tą}$ podstawy liczenia powiększoną jednością, równa się reszcie otrzymanej dzieląc, przez ten dzielnik, summę przedziałów rzędu nieparzystego mniej summę przedziałów rzędu parzystego.*

XVIII. Jeśli teraz chcemy znaleźć cechę podzielności przez liczbę p, trzeba szukać jaka jest potęga podstawy b która, podzielona przez p, daje resztę 0, 1 albo -1. Jeśli dzielnik p nie ma czynników obcych podstawie b, wtedy oczywiście istnieje pewna potęga tej podstawy podzielna przez p, i pierwsze twierdzenie stosuje się do p.

Jeśli dzielnik p jest pierwszy do podstawy b, wtedy istnieje potęga tej podstawy która, podzielona przez p, daje resztę 1. Jakoż, dzieląc przez p potęgi następne b^0, b^1, b^2,... b^{p-1}, otrzymuje się p reszt; a że żadna nie jest zero, więc musi być przynajmniej dwie reszty równe; co daje dwie równości $b^m=pq+r$ i $b^{m+n}=pq'+r$, przypuszczając wykładnik $m+n$ mniejszy od p. Ztąd wynika $(b^n-1)b^m=p(q'-q)$; więc p dzieli wieloczyn $(b^n-1)b^m$. Owoż p jest pierwsze do b, więc p dzieli b^n-1.

Jeśli p jest liczbą pierwszą i najmniejszy wykładnik n parzysty $2i$; wtedy, ponieważ $b^{2i}-1=(b^i+1)(b^i-1)$, p dzieli jeden z czynników tego wieloczynu; a że z założenia p nie dzeli b^i-1, więc musi dzielić b^i+1.

Te właśnie uwagi służyły do znalezienia cechy podzielności przez liczby któreśmy wyżej wskazali.

GRANICA LICZBY WYKONANYCH DZIELEŃ W SZUKANIU NAJWIĘKSZEGO SPÓLNEGO DZIELNIKA DWÓCH LICZB.

XIX. Liczba wykonanych dzieleń, w szukaniu największego spólnego dzielnika dwóch liczb, nie zmienia się, gdy się dzieli te liczby przez ich największy spólny dzielnik. Zatem, aby wiedzieć ile się najwięcej wykonywa tych dzieleń, dość jest uważać dwie liczby pierwsze między sobą.

W tem przypuszczeniu, ostatnia reszta jest 1, a ostatni dzielnik, który dla skrócenia oznaczamy przez D_1 (*), jest *przynajmniej* 2; drugi dzielnik D_2, licząc od końca, musi być *najmniej* 3; bo on jest z kolei dzielną i równa się przynajmniej dzielnikowi 2 więcej resztą 1. Widzimy łatwo że trzeci dzielnik D_3 jest najmniej 5, czwarty D_4 najmniej 8; i tak dalej. Mamy przeto

$$D_1 \geqq 2,\ D_2 \geqq 3,\ D_3 \geqq 5,\ D_4 \geqq 8,\ D_5 \geqq 13.$$

A więc zawsze $D_5 > 10$; a następnie

$D_6 > 2.10$, $D_7 > 3.10$, $D_8 > 5.10$, $D_9 > 8.10$, $D_{10} > 13.10$, a tem bardziej $D_{10} > 10.10$ czyli $D_{5\times 2} > 10^2$.

Nie trudno teraz pojąć, z samego spojrzenia na powyższe nierówności, że $D_{5\times 3} > 10^3$, $D_{5\times 4} > 10^4$, ... $D_{5n} > 10^n$.

To wszystko jasno pokazuje że gdy, w szukaniu największego spólnego dzielnika dwóch liczb, wykonano $5n$ dzieleń, wtedy mniejsza z liczb danych musiała mieć więcej niż n cyfer. Więc jeśli ta liczba miała tylko n cyfer, to nie wykonano $5n$ dzieleń.

Więc, dla wyznaczenia największego spólnego dzielnika dwóch liczb, *nie wykonywa się 5 razy tyle dzieleń ile cyfer w mniejszej liczbie.* I tak, w szukaniu największego spólnego dzielnika liczb 89 i 144 wykonywa się 9 dzieleń; co jest mniej niż 2×5.

RÓŻNICA MIĘDZY ŚREDNIĄ ARYTMETYCZNĄ I GEOMETRYCZNĄ.

XX. Nazywając, dla skrócenia, r różnicę między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch liczb a i b, mamy

$$r = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Zkąd, mnożąc oba wyrazy ostatniego ułamka przez $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, wynika

$$r = \frac{[(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})]^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b+2\sqrt{ab})}.$$

Owoż, wiemy (368, uw.) że $2\sqrt{ab} < a+b$; więc jeśli podstawim $2\sqrt{ab}$ zamiast $a+b$, będzie

$$r < \frac{(a-b)^2}{8\sqrt{ab}}.$$

(*) Liczba u dołu litery napisana nazywa się *wskazem*, jako D_1, D_2; to się czyta: D wskaz jeden, D wskaz dwa.

A ztąd, przypuszczając że liczba $a > b$, i podstawiając b zamiast a w mianowniku, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Ten wynik pokazuje jaki się popełnia błąd, gdy się bierze średnią arytmetyczną zamiast średniej geometrycznej dwóch liczb.

Gdy liczby a i b mają większą połowę cyfer spólnych, średnia arytmetyczna różni się od średniej geometrycznej mniej niż jednością ostatniego rzędu. Jakoż, przypuszczając liczby a i b złożone z $2n+1$ cyfer, różnica $a-b < 10^n$ a zaś $b > 10^{2n}$;

więc $$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{10^{2n}}{8 \times 10^{2n}} \quad \text{czyli} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{1}{8}.$$

WYCIĄGANIE SKRÓCONE PIERWIASTKU KWADRATOWEGO.

XXI. Znając $k+1$ pierwszych cyfer pierwiastku kwadratowego liczby N, można wyznaczyć k następujących, prostem dzieleniem.

Jakoż, oznaczmy przez a i b część wiadomą i niewiadomą pierwiastku, będzie

$$N = a^2 + 2ab + b^2; \quad \text{zkąd} \quad \frac{N-a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

albo, nazywając q iloraz całkowity, r resztę z dzielenia $N-a^2$ przez $2a$, mamy

$$\frac{N-a^2}{2a} = q + \frac{r}{2a}. \tag{1}$$

Więc $$b + \frac{b^2}{2a} = q + \frac{r}{2a}.$$

Owoż oczywiście $r < 2a$; $b^2 < a$, bo wartość a zawiera $2k+1$ cyfer, a zaś b ma ich $2k$ najwięcej.

Zatem, jeśli $b > q$, wtedy $b - q = \frac{r-b^2}{2a} < 1$;

a jeśli przeciwnie $b < q$, wtedy $q - b = \frac{b^2 - r}{2a} < \frac{1}{2}$.

To pokazuje że iloraz q różni się od części niewiadomej b, mniej niż jednością, i że wartość $a+q$ szukanego pierwiastku jest przybliżona *na mniej niż* 1 *przez niedostatek*, albo *na mniej niż* $\frac{1}{2}$ *przez zbytek*.

Z równości (1) wynika

$$N=a^2+2aq+r=(a+q)^2+r-q^2.$$

Więc, według tego jak $r=q^2$, $r>q^2$, albo $r<q^2$, wartość $a+q$ jest dokładna, przybliżona przez niedostatek, albo przez zbytek.

Nazwijmy teraz R prawdziwą resztę, to jest różnicę między liczbą N i jej pierwiastkiem kwadratowym przez niedostatek.

Jeśli $a+q$ jest przez niedostatek, wtedy $R=r-q^2$.

A jeśli przeciwnie, $a+q$ jest przez zbytek, wtedy $a+q-1$ jest wartością pierwiastku przez niedostatek, i mamy

$$R=(a+q-1)^2-N=(a+q-1)^2-(a+q)^2-r+q^2,$$

albo $$R=2(a+q)+(q^2-r+1).$$

Zastosujmy. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 3.

Znajdujemy najpierwej $\sqrt{3}=1,732$ i $R=176$.

Po czem, wyznaczamy *trzy* następujące cyfry, dzieleniem zwyczajnem

$$\begin{array}{r|l} 176000 & 3464 \\ \cline{2-2} 2800 & 50 \end{array}$$

I mamy

$$q=050,\ r=2800000,\ r-q^2=2797500=R.$$

Więc $\sqrt{3}=1,732050..$ jest wartością przez niedostatek.

Następujące 6 cyfer wyznaczamy dzieleniem

$$\begin{array}{r|l} 2797500000000 & 3468100 \\ \cline{2-2} 262200 & 807569 \\ 197130 & \\ 239250 & \\ 314040 & \\ 2271 & \end{array}$$

Otrzymujemy $q=807569$, $r=227100000000$; i łatwo widzimy że $r<q^2$.

Zatem $\sqrt{3}=1,732050807569$ jest przez zbytek, na mniej niż *pół jedności* ostatniego rzędu.

Możnaby teraz, wyznaczywszy resztę R, otrzymać dzieleniem 12 następujących cyfer. I tak dalej. Można nawet użyć dzielenia skróconego, do wyznaczenia ostatniej połowy cyfer żądanego pierwiastku.

Uwaga. Ta metoda jest prostem zastosowaniem metody *Newtona*, która służy do wyznaczenia niespółmiernych pierwiastków równań; i podobnie stosuje się do pierwiastku sześciennego.

KILKA TWIERDZEŃ TEORYI LICZB.

XXII. Twierdzenie. *Gdy dwie liczby a i b są pierwsze między sobą, dzieląc $b-1$ pierwszych wielowników a, t. j. $a, 2a, 3a \ldots, \varkappa a \ldots (b-1)a$ przez b, otrzymuje się wszystkie reszty różne od 1 aż do $b-1$, w porządku jakimkolwiek.*

Naprzód żaden z wielowników a, jako $\varkappa a$, nie jest podzielny przez b to jest nie daje reszty 0; bo liczby a i b są pierwsze między sobą, a zaś $\varkappa$ mniejsze od b. Powtóre, dwa wielowniki, jako αa i βa, w których α i β są mniejsze od b, nie mogą dać reszt równych; bo ich różnica $(\beta-\alpha)a$ byłaby podzielna przez a; co oczywiście niemożebne. Więc te reszty różne są, w porządku jakimkolwiek, liczbami $1, 2, 3, \ldots b-1$.

XXIII. Wniosek. *Gdy dwie liczby a i b są pierwsze między sobą, biorąc jakąkolwiek całkowitę c, i dzieląc $b-1$ wyrazów postępni arytmetycznej c, $c+a$, $c+2a$, $c+3a$, ... $c+(b-1)a$, przez b, otrzymuje się wszystkie reszty różne od 0 aż do $b-1$, w porządku jakimkolwiek.*

Jakoż, dwa wyrazy powyższej postępni, jako $c+\alpha a$ i $c+\beta a$ w których α i β są mniejsze od b, nie mogą dać tej samej reszty; bo ich różnica $(\beta-\alpha)a$ byłaby podzielna przez b, co niemożebne. Owoż, liczba reszt jest b, a że wszystkie są różne i mniejsze od b, więc muszą być 0, 1, 2, 3, $b-1$, w porządku jakimkolwiek.

XXIV. Zag. *Znaleźć ile jest liczb pierwszych do danej n, i mniejszych od niej.*

Niech będzie $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$; a, b, c są liczby pierwsze.

Gdyby napisano wszystkie liczby od 1 aż do n, to jest

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\ldots n,$$

odrzuciwszy z tego ciągu wielowniki liczb pierwszych a, b, c, otrzymanoby same liczby pierwsze do n, które rozwiązują zagadnienie.

Chodzi teraz o to ile jest tych liczb.

Owoż, uważajmy że wielowniki liczby a, znajdujące się w ciągu $1.2.3..n$, są : $\left(1, 2, 3, 4, .. \frac{n}{a}\right)a$; ich liczba równa się $\frac{n}{a}$. Więc, odjąwszy tę liczbę od n, znajdziemy resztę $n-\frac{n}{a}$ czyli $n\left(1-\frac{1}{a}\right)$, która pokazuje ile jest liczb pierwszych do a mniejszych od n.

Między pozostałemi są wielowniki liczb b, c,... Owoż, wielowniki z b, znajdujące się w ciągu $1.2.3..n$, są : $\left(1, 2, 3, .. \frac{n}{b}\right)b$; ich liczba równa się $\frac{n}{b}$; ale między niemi są wielowniki liczby a które już odrzucono. Trzeba więc teraz odrzucić tylko te wielowniki liczby b które są pierwsze do a. Liczba tych ostatnich, w ciągu $1.2.3...\frac{n}{b}$, na mocy tego co poprzedza, rowna się $\frac{n}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$; odjąwszy tę liczbę od $n\left(1-\frac{1}{a}\right)$, znajdziemy resztę $n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ która pokazuje ile jest liczb pierwszych do a i b, mniejszych od n.

Aby następnie wiedzieć ile jest liczb pierwszych do a, b, c, mniejszych od n, uważamy że wielowniki liczby c, znajdujące się w ciągu $1.2.3..n$, są: $\left(1, 2, 3, .. \frac{n}{c}\right)c$; ich liczba równa się $\frac{n}{c}$: a w tym ciągu ilość liczb pierwszych do a i b, mniejszych od $\frac{n}{c}$, jako już wiemy, jest $\frac{n}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$. Więc, odjąwszy tę liczbę od $n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$, znajdziemy resztę $n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{n}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ czyli

$$n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

która oznacza ile jest liczb pierwszych do a, b, c, mniejszych od n.

To rozumowanie jest ogólne, i jasno pokazuje ile jest liczb mniejszych od n, i pierwszych do tych jej czynników które chcemy.

Jeśli $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma$, ilość k liczb pierwszych do n i mniejszych od tej liczby, jest

$$k=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)=\frac{n}{abc}(a-1)(b-1)(c-1).$$

Uwaga. To zagadnienie stanowi twierdzenie Eulera.

XXV. Wniosek. Jeśli symbolem $\varphi(n)$, który się czyta: funkcya n, oznaczymy ilość liczb pierwszych do liczby $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma$, i *nie większych* od niej, będzie

$$\varphi(n)=\frac{n}{abc}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)=a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1).$$

A jeśli teraz nazwiemy ogólnie A, B, C... czynniki liczby n, pierwsze między sobą po dwa, jako $a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)$ i $c^{\gamma-1}(c-1)$...; ostatnia równość daje symboliczne wysłowienie twierdzenia Gaussa.

$$\varphi(ABC...)=\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)...$$

Uwaga. Aby to twierdzenie było ogólne, trzeba uważać że, na mocy powyższego określenia, symbol $\varphi(1)=1$.

XXVI. Nie trudno teraz znaleźć summę liczb pierwszych do dzielników liczby N, i *niewiększych* odpowiednio od tych dzielników.

Niech będzie $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$...

Wiemy że wszystkie dzielniki liczby N otrzymują się mnożąc przez siebie summy:

$$1+a+a^2+...+a^\alpha$$
$$1+b+b^2+...+b^\beta$$
$$1+c+c^2+...+c^\gamma$$
$$..........$$

Owoż, biorąc liczby wyrażone przez φ, odpowiednio do każdego dzielnika, będziemy mieli do mnożenia przez siebie summy:

$$\varphi(1)+\varphi(a)+\varphi(a^2)+...+\varphi(a^\alpha)$$
$$\varphi(1)+\varphi(b)+\varphi(b^2)+...+\varphi(b^\beta)$$
$$\varphi(1)+\varphi(c)+\varphi(c^2)+...+\varphi(c^\gamma)$$
$$..................$$

Ale $\varphi(1)=1$, $\varphi(a)=a-1$, $\varphi(a^2)=a^2-a$, $\varphi(a^\alpha)=a^\alpha-a^{\alpha-1}$; zatem summa wyrazów pierwszej linii staje się

$$1+(a-1)+(a^2-a)+(a^3-a^2)+\ldots(a^\alpha-a^{\alpha-1})=a^\alpha.$$

Tak samo, summa wyrazów drugiej linii sprowadza się do b^β; summa trzeciej linii przywodzi się do c^γ; i t. d.

Ztąd wynika że *szukana summa* jest wieloczynem $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$.., to jest *równa się danej liczbie N.*

XXVII. Twierdzenie. *Jeśli dwie liczby a i b są pierwsze między sobą, a k wyraża ile jest liczb pierwszych do liczby b i mniejszych od niej, wtedy b dzieli różnicę* a^k-1.

Niech będą $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ wszystkie liczby pierwsze do b i mniejsze od b. Dzieląc wieloczyn αa przez b, otrzymujemy

$$\alpha a = bq+r.$$

Ta równość pokazuje że reszta r jest pierwsza do dzielnika b, i przeto równa się jednej z k liczb $1. \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$. A że, dzieląc przez b wielowniki $a, \alpha a, \beta a, \gamma a, \ldots \lambda a$, otrzymaje się oczywiście wszystkie reszty różne; więc te reszty równają się, w porządku jakimkolwiek, liczbom $1, \alpha\, \beta, \gamma, \ldots \lambda$. Ztąd wynika że wieloczyn liczb $a, \alpha a, \beta a. \gamma a, \ldots \lambda a$, zmniejszony wieloczynem reszt $1, \alpha, \beta, \ldots \lambda$, jest wielownikiem dzielnika b, to jest różnica

$$\alpha\beta\gamma\ldots\lambda a^k-\alpha\beta\gamma\ldots\lambda \quad \text{czyli} \quad \alpha\beta\gamma\ldots\lambda(a^k-1)$$

jest podzielna przez b. Ale b jest liczbą pierwszą z każdym z czynników $\alpha, \beta, \gamma,\ldots \lambda$; więc b dzieli a^k-1.

XXVIII. Wniosek. Gdy dzielnik b jest liczbą pierwszą p, wtedy $k=p-1$. Więc

Jeśli liczba pierwsza p nie dzieli a, to dzieli różnicę a^{p-1}.

Ten wniosek stanowi twierdzenie Fermata, którego powyższe jest zogólnieniem.

XXIX. Uwaga. Jest jeszcze ogólniejsze twierdzenie. Liczba b pierwsza do a może dzielić różnicę a^i-1 w której i jest dzielnikiem liczby k. Jakoż, przypuśćmy że a^i jest najmniejszą potęgą która, podzielona przez b, daje resztę 1; potęgi $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots a^{i-1}$ nie są podzielne przez b, na mocy założenia, i dają oczywiście reszty różne. Następujące potęgi a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, ... a^{2i-1} dają ten sam okres reszt co poprzedzające; bo różnice potęg, tego samego rzędu w dwóch ciągach, jako a^{i+2} i a^2 to jest $a^2(a^i-1)$, są podzielne przez b. Podobnie potęgi a^{2i}, $a^{2i+1}, \ldots a^{3i-1}$ dają ten sam okres reszt co pierwsze. I tak samo następujące. To pokazuje że potęgi a^0, a^i, a^{2i}, a^{3i}, ... a^{ni} dają resztę 1. Owoż, wedle powyższego twierdzenia potęga a^k daje także resztę 1; więc k jest wielownikiem wykładnika i; zatem i jest dzielnikiem liczby k. Co było do dowodzenia.

Jako przykład, weźmy 4 i 15. Mamy $\varphi(15)=8$, i widzimy że 15 dzieli $4^2-1, 4^4-1, 4^6-1, 4^8-1$.

Niech będą jeszcze liczby 10 i 11. Tu $\varphi(11)=10$, i widzimy że 11 dzieli 10^2-1. Ten przykład pokazuje że w ułamkach dziesiętnych *okresowych prostych*, liczba cyfer okresu jest dzielnikiem liczby $\varphi(m)$, nazywając m mianownik ułamka niezredukowanego, równego dziesiętnemu.

XXX. Twierdzenie Wilsona. *Liczba pierwsza p dzieli wieloczyn wszystkich liczb mniejszych od siebie powiększony jednością, to jest dzieli summę* $1\times2\times3\times4 \ldots (p-1)+1$.

Jakoż, niech będzie a jeden z czynników $1, 2, 3, \ldots p-1$; wiemy już że wielowniki a, $2a$, $3a$, ... $(p-1)a$, podzielone przez p, dają wszystkie reszty różne od 1 aż do $p-1$. Więc, między temi wielownikami, jest zawsze jeden i tylko jeden, który podzielony przez p daje resztę 1. Nazwijmy go αa; różnica $\alpha a-1$ będzie podzielna przez p. Takie dwie liczby α i a, których wieloczyn αa podzielony przez p daje resztę 1, nazywają się *stowarzyszonemi*. Ale może być $\alpha=a$; wtedy różnica a^2-1 jest podzielna przez p. Owoż, $a^2-1=(a-1)(a+1)$; więc liczba pierwsza p dzieli czynnik $a-1$ albo $a+1$; co wymaga żeby $a-1=0$ czyli $a=1$, albo $a+1=p$ czyli $a=p-1$, dlatego że $a<p$.

Ztąd wynika że, wyjąwszy tylko czynniki skrajne wieloczynu $1\times2\times3 \ldots\ldots (p-1)$, wszystkie inne są stowarzyszone po dwa; więc wieloczyn dwojanów stowarzyszonych jest wielownikiem liczby p powiększonym jednością, to jest $2\times3\times4\times \ldots (p-2)=w^k p+1$.

Zatem, pomnożywszy obie strony przez $p-1$, będzie

$2\times3\times \ldots (p-2)(p-1)=w^k p-1$. Więc $1\times2+3 \ldots (p-1)+1=w^k p$.

Nawzajem, liczba p jest pierwsza, jeśli dzieli wieloczyn wszystkich liczb mniejszych od siebie, powiększony jednością. Jakoż, niech będzie, jeśli można, δ jeden z czynników p; δ dzieląc wieloczyn $1.2.3.(p-1)$, i summę $1\times 2\times 3\ldots(p-1)+1$ z założenia, dzieli ich różnicę 1; więc δ jest jednością; zatem p jest liczbą pierwszą.

XXXI. Uwaga. Twierdzenie Wilsona może się zogólnić w następującem wysłowieniu:

Wieloczyn wszystkich liczb mniejszych od danej N i pierwszych do niej, powiększony albo zmniejszony jednością, jest podzielny przez N.

Niech będą $1, a, b, c, \ldots l, N-1$ liczby mniejsze od danej N i pierwsze do niej. Wiemy już że wieloczyny jednej z liczb, jako $a, ba, ca, \ldots$ podzielone przez N dają na resztę te same liczby $1, a, b, \ldots N-1$ w pewnym tylko porządku. Więc liczba a ma swoją stowarzyszoną h, tak że wieloczyn ha, podzielony przez N, daje resztę 1. Ale, jeśli $h=a$, wtedy wieloczyn $a(N-a)$ czyli $aN-a^2$, podzielony przez N, daje resztę -1; bo aN jest podzielne przez N, a zaś a^2 podzielone przez N daje resztę 1.

Dwie liczby a i h, których wieloczyn ah podzielony przez N daje resztę 1, nazywają się *stowarzyszonemi pierwszego rodzaju*; a zaś dwie liczby a i $N-a$ których wieloczyn $a(N-a)$ daje resztę -1, czyli $N-1$, stanowią *dwojan stowarzyszonych drugiego rodzaju.*

Teraz uważajmy że czynniki skrajne wieloczynu $1\times a\times b\ldots l\,(N-1)$ są stowarzyszonemi drugiego rodzaju, a zaś wszystkie inne mogą być stowarzyszonemi pierwszgo albo drugiego rodzaju.

Owoż, wieloczyn dwojanów liczb stowarzyszonych pierwszego rodzaju, jest wielownikiem liczby N, powiększonym jednością. Więc, jeśli pomnożymy ten wieloczyn przez dwojan liczb stowarzyszonych drugiego rodzaju, wynik będzie wielownikiem liczby N *zmniejszonym* jednością. Jeśli znowu pomnożymy ten wieloczyn przez drugi dwojan liczb stowarzyszonych drugiego rodzaju, wynik będzie wielownikiem liczby N *powiększonym* jednością; i tak dalej.

Więc wieloczyn wszystkich liczb $1.abc\ldots l(N-1)$ jest wielownikiem liczby N zmniejszonym albo powiększonym jednością, według tego jak liczba dwojanów liczb stowarzyszonych drugiego rodzaju jest *nieparzysta* albo parzysta. Więc summa $1\times abc\ldots(N-1)+1$ albo różnica $1\times 2.3\ldots,(N-1)-1$ jest podzielna przez N.

XXXII. **Wniosek.** Nazwijmy W wieloczyn $1\times abc\ldots N$, będziemy mieli $(W+1)(W-1)=W^2-1$.

Liczba N, dzieląc jeden z czynników $W+1$ albo $W-1$, dzieli ich wieloczyn W^2-1.

Ztąd **twierdzenie.** *Kwadrat wieloczynu wszystkich liczb mniejszych od danej N i pierwszych do niej, zmniejszony jednością, jest podzielny przez N.*

KONIEC

Paris. — Imprimerie de E. Martinet, rue Mignon, 2.

15
30
120
240
405

17
51 + 17

17
70
870
[illegible]
[illegible]

17
34
51
102

3606
1960
360
2880