

## NOWY SPOSÓB KREŚLENIA KRZYWÉJ CIŚNIEŃ W SKLEPIENIACH

PRZEZ

MIECZYŚŁAWA SZYSTOWSKIEGO

*Inżyniera Komunikacyj, b. ucznia Szkoły Politechnicznej w Rydze i Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.*

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 4 maja 1876 roku.

**WSTĘP.** — *Część I.* — Przegląd historyczno-krytyczny główniejszych teoryj stałości sklepien.

1. La Hire, — 2. Couplet, — 3. Coulomb, — 4. Boistard, — 5. Audoy, Lamé i Clapeyron, — 6. Navier, — 7. Méry, — 8. Moseley, — 9. Doktor Scheffler, — 10. Yvon Villarceau, — 11. T. Dupuit, — 12. K. Culmann, — 13. Alfred Durand-Claye, — 14. Peaucellier.

*Część II.* — Wykład niektórych wiadomości ze statyki wykreślnéj.

**WSTĘP.** — Określenie I. — Określenie II. — Określenie III. — Twierdzenie I, przypadek 1, przypadek 2. — Twierdzenie II. — Twierdzenie III. — UWAGA.

*Część III.* — Nowy sposób kreślenia krzywéj ciśnień w sklepieniach.

**WSTĘP.** — Rozbiór szczegółowy hipotez służących za podstawę nowego sposobu kreślenia krzywéj ciśnień, — Nowy sposób kreślenia krzywéj ciśnień w sklepieniach, — Rozbiór analityczny sposobu przez nas podanego, — Sposób ułatwiony kreślenia krzywéj MKL, — UWAGA.

*Część IV.* — DODATEK. — Wzory empiryczne służące do obliczenia grubości zwornika w kluczu. — 1. Wzór Perronet'a, — 2. Wzory Dejar-din'a, — 3. Wzór p. Leveille'go, — 4. Wzór Lesguillé'ra, — 5. Wzór p. Minard'a — Wzór używany w Austryi i Rosyji, — 6. Wzór Cul-manna z Zurichu. — Prawidła praktyczne których się trzymać należy przy projektowaniu sklepien. — TABLICZ.

**Wstęp** — Teorya sklepien w obecnym stanie nauki jest sprowadzoną, jak wiadomo, do wykreślenia krzywéj ciśnień. W niniejszym artykule zamierzamy więc po pobieżnym przeglądzie historyczno-krytycznym znanych już teoryj, przedstawić szanownéj publiczności nową metodę przez nas znale-zioną i służącą do wyznaczenia téjże krzywéj.

Wykreślenie krzywéj ciśnień (*Drucklinie, courbe de pression*) przedstawia do dziś dnia niezwalczone

trudności, albowiem dotąd jeszcze nie umiemy zdać sobie sprawy ze sposobu wzajemnego zachowywania się części składających bryłę sklepieniową. W rzeczy samej, prace traktujące ten przedmiot chociaż bardzo liczne, nie dają nam wypadku zadawalniającego. Jedne z nich opierając się na przypuszczeniach niezem nieusprawiedliwionych, podają sposoby wprawdzie łatwe do wykonania, naprzykład sposób P. Culmann'a (*Graphische Statik*. Zürich), zasadzający się na teorii p. Scheffler'a; inne znów, idąc drogą opartą na przypuszczeniach powszechnie przyjętych i w części nawet przez doświadczenia sprawdzonych, prowadzą do wypadków zawikłanych i potrzebujących nie tylko wiele czasu, ale też i wprawy niepośledniej, tak niezbędnej w podobnych operacjach. Do tej kategorii należą bez wątpienia: sposób P. Alfreda Durand-Claye'a (*Annales des ponts et chaussées*, 1847; n° 142, str. 63; 1868; n° 175, str. 109) i sposób p. Paucellier (*Mémorial du génie militaire*; [1875]). Sposoby te służące do wykreślenia krzywój ciśnieni w sklepieniach, chociaż zadawalniające pod względem naukowym, są mierniej wartości dla praktycznego użycia, jak to zobaczymy w ciągu niniejszej pracy.

## CZĘŚĆ I

### PRZEGLĄD HISTORYCZNO KRYTYCZNY GŁÓWNIJSZYCH TEORYI STAŁOŚCI SKLEPIEŃ.

1° **La Hire.** — Prawdopodobnie La Hire (1712, *L'histoire de l'Académie des sciences*) był pierwszym, który wprowadził zadanie stałości sklepień na pole badań naukowych, lecz jego teoria opierając się na przypuszczeniach fałszywych poszła wkrótce potem w zapomnienie.

2° **Couplet.** — Większej zasługi jest Couplet, który w *Mémoires de l'Académie des sciences* z 1729 i z 1730 roku wykazał rzeczywistą przyczynę i sposób wywracania się brył sklepieniowych w ich stosunkach naderwania.

3° **Coulomb.** — Następnie Coulomb w swoim sprawozdaniu do Akademii w 1773 r. wyłożył prawdziwe zasady badań naukowych w tym przedmiocie, lecz teoria jego nie przedstawiając żadnej wartości praktycznej i nie będąc sprawdzoną dostatecznie przez doświadczenia, musiała ustąpić przed pacami późniejszych uczonych. W każdym jednak razie prace Coulomb'a są wielkiego znaczenia.

4° **Boistard.** — Teoria sklepień nabyła praktycznego znaczenia dzięki doświadczeniom p. Boistard'a w 1796, który będąc powołanym do zbudowania mostu w Nemours według projektu Perronet'a, uważał za stosowne poprzedzić budowę tego mostu doświadczeniami specjalnemi, albowiem w sklepieniach projektowanych stosunek strzałki do otworu wynosił około  $\frac{1}{15}$ , to jest na  $16^m,23$  otworu, długość strzałki równała się tylko  $1^m,10$ .

Rękopism Boistard'a, złożony w Paryżkiej szkole Dróg i Mostów, został ogłoszony drukiem zaledwie w 1822 roku. Nie będzie od rzeczy podać tu ostateczne wnioski wynikające z doświadczeń tego inżyniera. Wnioski te podał P. Morandière, były profesor w szkole paryżkiej Dróg i Mostów, na str. 204 swojego kursu i streścił je jak następuje :

« Porównywając rozmaite doświadczenia P. Boistard'a widzimy, że we wszystkich łukach murowanych, sklepienie rozdziela się na *podniebieniu* klucza a część górna bryły sklepieniowej rozdziela się na dwie części *bc* i *cd*, wywracające się około krawędzi *stosug naderwania* *bf* i *dg*. Części zaś niższe bryły sklepieniowej razem z podporami, ulegając parciu części wyższych, wywracają się także, lecz każda około swé zewnętrznój *krawędzi stosugi tożyskowej* *a* i *e*. Można więc uważać każde

« sklepienie jako bryłę złożoną z 4 części  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $de$ , które na wzór drążka kolankowego, powinny utrzymywać się w równowadze, jak to widzimy na figurze przytoczonej (fig. 1) ».

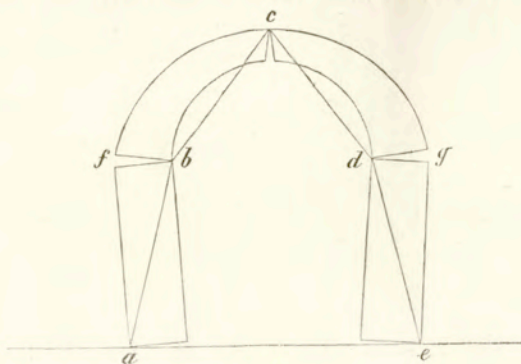


Fig. 1.

5° **Audoy, Lamé i Clapeyron.** — P. Audoy w 1820 r. (*Mémorial de l'officier du génie*) a w parę lat później, w 1823, pp. Lamé i Clapeyron (*Annales des Mines*) ogłosili swe prace oparte na doświadczeniach Boistard'a.

6° **Navier.** — Hypotezy przyjęte przez poprzedzających dla wyznaczenia *stosugi naderwania*, nie będąc uzasadnionymi, były odrzucone przez Navier'a (1833. *Leçons sur l'application de la mécanique*), którego zasady do dziś dnia są powszechnie uznane i służą do wyznaczenia położenia krzywej ciśnień w sklepieniach.

Hypotezy Navier'a można streścić jak następuje :

« Krzywa ciśnień w sklepieniach powinna przechodzić przez trzecią część klucza mierząc od « grzbietu sklepienia i przez trzecią część stosugi naderwania mierząc od podniebienia ».

Dla oznaczenia zaś stosugi naderwania Navier posługiwał się prawidłami empirycznymi, wynikającymi z doświadczeń P. Boistard'a. Właściwe ocenienie tych hipotez podamy przy opisanu metody przez nas proponowanej.

7° **Méry.** — Z tego cośmy dotąd powiedzieli, widzimy, że warunki równowagi każdego *zwornika* przy przyjętych hipotezach były w zupełności wyznaczone (analitycznie) lecz rachunek pozostał zawikłany, a tém samém nieprzystępny dla powszechnego użycia. Uproszczenia tych rachunków można było spodziewać się tylko na drodze graficznej i w rzeczy samėj w 1840 r., w *Annales des ponts et chaussées* ogłoszoną została praca p. Méry, która jest tylko graficznym tłumaczeniem dawniej metody opracowanej przez Coulomb'a.

P. Méry w artykule swoim wyłożył naprzód następane warunki niezbędne dla równowagi sklepień.

- a) Krzywa ciśnień powinna być zawartą w obrębie bryły sklepieniowej.
- b) Krzywa ciśnień powinna przecinać prostopadłą do każdej stosugi łożyskowej pod kątem mniejszym od kąta tarcia kamienia o kamień.
- c) Rozdzielenie ciśnień na płaszczyźnie stosugi łożyskowej powinno być takie, aby ciśnienia wywarte na elementa pracujące najwięcej nie przekraczały granicy praktycznej wytrzymałości materiału. Dalėj, dla oznaczenia położenia krzywej ciśnień P. Méry przyjmuje za zasadę, że ta krzywa musi przechodzić przez punkt leżący na jednej trzeciej wysokości klucza, licząc od grzbietu i przez środek

stosugi naderwania. Położenie stosugi naderwania wyznacza on za pomocą praw wynikających z doświadczeń Boistard'a.

Tę ostatnią zasadę przyjął P. Méry na wzór Navier'a, który był już ją wprowadził do swoich poszukiwań analitycznych.

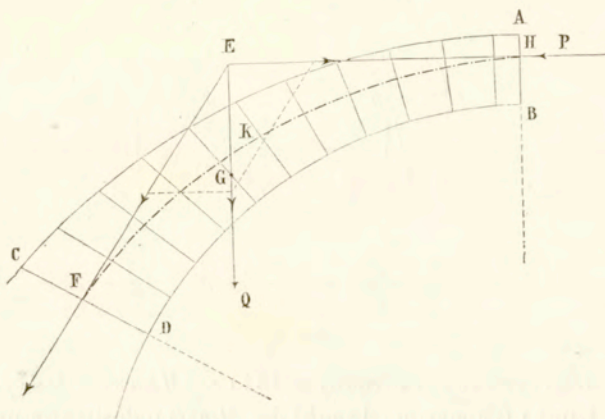


Fig. 2.

Sposób sam wykreślenia krzywój ciśnień w sklepieniach, podany przez P. Méry jest następujący (fig. 2) : Niech będzie sklepienie dane ABCD.

AB Klucz sklepienia ;

CD Stosuga naderwania ;

G Środek ciężkości płaszczyzny ABDC ;

Q Ciężar bryły sklepieniowej ABDC, na jedność długości ;

H i F dwa punkta, przez które krzywa ciśnień powinna przechodzić.

Oznaczmy przez P nieznanne nam jeszcze parcie w kluczu, a przez S ciśnienie w stosudze naderwania CD.

Poprowadźmy teraz przez punkt H linię poziomą HE i przez G linię pionową EG, te dwie linie przecinają się w punkcie E; połączmy następnie punkta E i F linią EF otrzymamy ztąd położenie siły S. Znając zaś Q i kierunki sił ją składających to jest EF i EH, możemy za pomocą równoległoboku wykreślić wielkość sił S i P.

Siła P czyli parcie w kluczu, w ten sposób oznaczona, służy do wykreślenia szukanej krzywój ciśnień, dodając kolejno do tejże siły P ciężary *zworników* po sobie następujących.

Widzimy więc że metoda ta jest łatwą do wykonania, lecz wątpliwą co do swoich wypadków ponieważ :

a) Doświadczenia Boistard'a nie określają dostatecznie położenia stosugi naderwania ;

b) Hypoteza przyjmująca pałożenie punktu F na środku stosugi CD, jest niewłaściwą, bo usuwa wszelką możebność wywrotności bryły sklepieniowej około punktu D. Ciśnienie S przechodząc przez środek płaszczyzny CD, wywołuje oddziaływania równe we wszystkich elementach téjże płaszczyzny.

8° **Moseley**. — Niezależnie od prac P. Méry, P. Moseley wynalazł i ogłosił wyżej opisany sposób wykreślenia krzywej ciśnień w sklepieniach, w *Philosophical Magazine* w 1833 r., lecz rękopism p. Méry będąc datowanym z r. 1827, zostawiła temu ostatniemu pierwszeństwo wynalazku.

W artykule p. Moseley'a znajdujemy oprócz tego wzmiankę o prawie najmniejszego oporu które następnie posłużyło P. Scheffler'owi za zasadę jego metody.

9° **Doktor Scheffler**. — W Niemczech, niezależnie od kierunku poszukiwań przyjętego we Francji, Dr Scheffler rozwinął zasadę Moseley'a « o najmniejszym oporze » i opierając się na nią, ogłosił swoją teorię sklepień w dziele : « *Theorie der Gewölbe, Futter-mauern und eisernen Brücken*, Braunschweig, 1833 ». Według niego, krzywa najmniejszych ciśnień jest właśnie prawdziwą krzywą parcia, która zapewnia równowagę sklepieniom.

Dr. Scheffler w wykładzie swęj teorii nie posługuje się wcale danymi praktycznymi, opartymi na doświadczeniach, lecz przeciwnie uważa *zworniki* za ciała niezmiennie co do swęj formy i idzie drogą ściśle analityczną.

Widzimy więc, o ile metoda Dr. Scheffler'a jest naukową, o tyle z drugiej strony jest ona metafizyczną i nie wzbudzającą zaufania co do swęgo zastosowania w praktyce, bo w rzeczy samęj nic nam nie wskazuje że prawo najmniejszego oporu jest prawdziwém i że natura nie obierze innęj drogi od drogi przepisanej przez Dr. Scheffler'a.

Po krytykę szczegółową téj metody odsyłamy do dzieła P. Dupuit : *Traité de l'équilibre des voûtes*, 1870.

10° **P. Yvon Villarceau**. — Metoda P. Méry pomimo swych błędów i niedokładności stała się punktem wyjścia licznych prac innych uczonych. I tak np. p. Yvon Villarceau starał się zmienić formę podniebienia w taki sposób, aby krzywa ciśnień przechodziła przez środki stosug łożyskowych. Zasada ta pozwoliła mu sprowadzić do minimum natężenie kamieni na jednostkę powierzchni, a tém samém przekroczyć praktyczne granice rozwartości sklepień. Rachunki użyte do wyjaśnienia tych wniosków są bardzo zawikłane i dla praktyki wcale nieużyteczne.

Szczegóły poblizsze opisanęj metody są wyłożone obszernie w dziele : Yvon Villarceau, « *sur l'établissement des arches de pont*, 1834, jeden tom in-4°.

11° **T. Dupuit**. — Z kolei następstwa chronologicznego wypada nam mówić o pracach tego uczonego, które przez pewien czas miały niemały rozgłos, szczególnie we Francji. Inżynier ten po raz pierwszy ogłosił swoją teorię w *Annales des ponts et chaussées* z 1838 r. W artykule tym, autor rozbiera najprzód zachowywanie się sklepień przy zdjęciu *krążyn* i przychodzi do wniosku, że parcie w kluczu w sklepieniach opartych na krążynach nie istnieje wcale, lecz w miarę ich usuwania, parcie to występuje na jaw i powiększa się ciągle aż do chwili kiedy z pod sklepienia wyjęte będą wszelkie podpory.

Rozwijając myśl tę p. Dupuit wyklada następne zasady :

« W sklepieniach symetrycznych krzywa ciśnień w każdéj połowie sklepienia musi być styczną do « podniebienia. Punkt zetknięcia się tych dwóch krzywych należy do stosugi naderwania i rozpatrywana połówka sklepienia przy usunięciu *krążyn* wywraca się około pomienionego punktu, aby się « oprzeć w kluczu o drugą połówkę bryły sklepieniowéj ». To cośmy przytoczyli dostateczném jest aby ocenić metodę pana Dupuit'a.

Krzywa ciśnień narysowana według powyższych przepisów, przedstawia sklepienie w chwili ró-

wnowagi ściślej i nie zapewnia mu wcale stałości. Wprawdzie p. Dupuit zaleca dla ustalenia równowagi zmienić formę grzbietu i podniebienia tak, aby nakreślona krzywa przechodziła przez środki nowo projektowanych stosug łożyskowych, lecz postępowanie to z jednej strony nie jest naukowo uzasadnionem, a z drugiej — przedstawia trudności w zastosowaniu.

P. Dupuit w dziele swoim « *Traité de l'équilibre des voûtes*, 1870 » (wydanie pośmiertne) przy wykładzie swęj metody podaje tęż krytyczny rozbiór prac swoich poprzedników na tēm polu nauki i oceniając dość trafnie, często tęż i bez litości ich błędy i niedostatki, nie dostrzegł swęj omyłki posuwając kwestyę wywrotności sklepień do bezprzykładnej ostateczności.

W każdym razie prace p. Dupuit nad stałością sklepień obfitują w poglądy niezaprzeczonej wartości i rzucają światło na kwestyę tak ważne i tak trudne do ściśle naukowego rozwiązania.

12° **K. Culmann.** — Pan Culmann w dziele swoim (*Graphische Statik*, 1866, Zürich. Rozdz. VI, str. 435-469) podaje sposób wykreślenia krzywęj ciśnień oparty na statyce wykreślnęj. Uczony ten rozbięra naprzód pokrewieństwo sklepień z łukami i łańcuchami, dalej wyprowadza warunki ześlizgiwania się po stosugach łożyskowych i warunki wywrotności, następnie, mówiąc o położeniu krzywęj ciśnień w sklepieniach, przyjmuje za podstawę następnę przypuszczenie :

« Ze wszystkich krzywych ciśnień dających się wykreślić w daném sklepieniu, ta będzie prawdziwą, « której położenie zbliża się najwięcej do położenia krzywęj łączącej środki stosug łożyskowych « i to w taki sposób, że ciśnienie na jednostkę powierzchni stosugi naderwania sprowadzonem będzie « do minimum możebnego (p. str. 445.) ».

Widzimy więc z powyższego orzeczenia że hipotezy P. Culmann'a były już wprowadzone na pole nauki przez Moseley'a pod nazną teoryi najmniejszego parcia i następnie opracowane i zastosowane przez Dr. Scheffler'a (patrz 9°). Do narysowania zaś tak określonęj krzywęj ciśnień, p. Culmann posługiwał się statyką wykreślną, której głównym przedstawicielem i twórcą nigdy on być nie przestanie. W tym to więc punkcie leży główna zasługa metody P. Culmann'a.

13° **Alfred Durand-Claye.** — Jak widzieliśmy, każda z wymienionych metod zostawiała wiele do życzenia. Wszędzie widzieliśmy pewną niedokładność, już to skutkiem przypuszczeń nieuzasadnionych, już tęż skutkiem rozumowań naciągniętych lub całkiem nielogicznych.

Pojęcie krzywęj ciśnień bez wątpienia najlepiej zużytkował p. Durand-Claye. Jego metoda była ogłoszoną w *Annales des ponts et chaussées* w r. 1867 i w 1868 i zyskała powszechne uznanie. W artykule tym autor stawia sobie za zadanie sprawdzić równowagę sklepienia. Warunki równowagi każdego sklepienia są jak wiadomo :

a) Warunek tyczący się rozkładu natężeń na powierzchni stosug łożyskowych, to jest aby natężenie każdęj jednostki tęj powierzchni nie przekraczało granicy natężeń bezpiecznych.

b) Warunek tyczący się położenia krzywęj ciśnień, t. j. aby ta ostatnia zostawała zawsze pomiędzy grzbietem i podniebieniem sklepienia.

c) Warunek równowagi tyczący się tarcia i ześlizgiwania się zworników po stosugach łożyskowych.

Ostatni warunek w praktyce jest prawie zawsze dopełnionym, ponieważ stosugi są prostopadłe do podniebienia, a kierunek krzywęj ciśnień jest prawie równoległym do ostatniego, pozostają więc nam tylko dwa pierwsze, dla sprawdzenia których p. Durand-Claye przepisuje następnę działania oparte na ściśłem rozumowaniu.

a) Obliczyć ciężar zworników sklepienia wraz z obciążeniami przypadkowymi i wyznaczyć pionowe, na których leżą ich środki ciężkości.

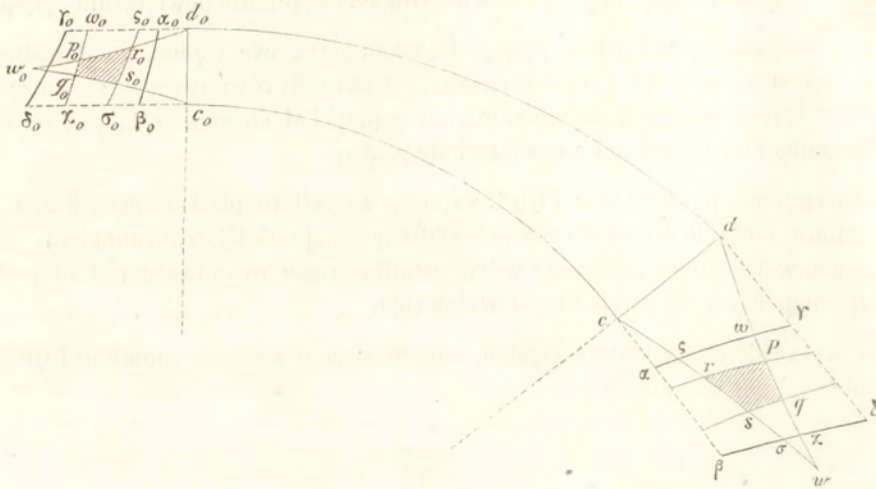


Fig. 3.

b) Zbudować figurę  $c_0w_0d_0$ , zamykającą natężenia zgodne z wytrzymałością materyałów. Fig. 5.

Dla wykreślenia tój figury, prowadzimy przez środek linii  $d_0c_0$ , prostopadłą  $0w_0$ , równą co do długości takiój sile, któraby będąc rozdzieloną na całą powierzchnię stosugi, wydała ciśnienie na jednostkę tójże powierzchni nieprzekraczającą granicy natężeń bezpiecznych; następnie w punktach

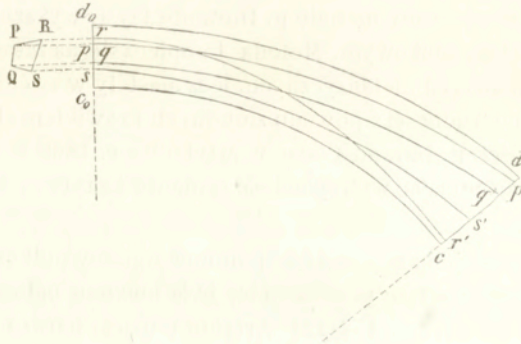


Fig. 4.

$k_0$  i  $h_0$  dzielących  $d_0c_0$  na trzy równe części, wyprowadźmy prostopadłe  $k_0m_0$  i  $h_0n_0$  równe połowie  $0w_0$  i równe między sobą. Nakoniec łącząc  $m_0$  z  $d_0$  i  $n_0$  z  $c_0$  liniami prostymi, a  $w_0$  z punktami  $m_0$  i  $n_0$  łukami hyperbolicznymi, otrzymamy żadaną figurę  $c_0w_0d_0$ .

Konstrukcyja ta zresztą znajduje się we wszystkich podręcznikach wytrzymałości materyałów.

c) Nakreślić krzywe  $\alpha_0\beta_0$  i  $\gamma_0\delta_0$  zamykające parcia, i oddziaływania w granicach służących za warunek położenia krzywej ciśnień między podniebieniem i grzbietem sklepienia, niezależnie jednak] od stopnia wytrzymałości materyału. Fig. 3.

Krzywa  $\alpha_0\beta_0$  daje nam parcie w kluczu, gdy punkt przyłożenia tój siły przebiega [całą długość stosugi kluczowej  $c,d$ , a oddziaływanie stosugi  $cd$  przechodzi ciągle przez punkt  $e$ ; również krzywa  $\gamma_0\delta_0$

odpowiada parciom w kluczu, wywołującym oddziaływania w punkcie  $d$ , czyli w krawędzi grzbietowej stosugi  $cd$ .

d) Przyłożenie krzywych  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  i  $c_0, w_0, d_0$  jedne na drugie i oznaczenie powierzchni  $p_0, q_0, r_0, s_0$ . Fig. 3.

W ten sposób otrzymana powierzchnia  $p_0, q_0, r_0, s_0$  daje nam przez swe rzędne, prostopadłe do stosugi kluczonej  $c_0, d_0$  wszystkie możliwe parcia zapewniające stałość i równowagę w stosudze łożyskowej  $cd$ . Dla zapewnienia tych warunków innym stosugom na przykład stosudze  $c_1, d_1$ , potrzeba powtórzyć pomienione działania i wyznaczyć nową powierzchnię  $p_1, q_1, r_1, s_1$ .

e) Oznaczyć następnie powierzchnie PQRS, wspólną wszystkim płatkom  $pqr$ s. Fig. 4. Tak otrzymana powierzchnia nowa PQRS co do swego kształtu jest najczęściej czworobokiem, lecz może też być trójkątem a nawet jednym punktem i w tym ostatnim razie równowaga jest niepewną, bo się narusza za najmniejszą zmianą parcia lub oddziaływania.

f) Nakoniec wykreślić cztery krzywe ciśnień, odpowiadające czterem punktom PQRS i oznaczyć najbliższe punkta sklepienia. Fig. 4.

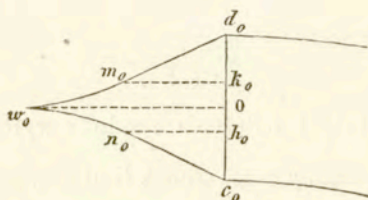


Fig. 5.

Te kilka słów, w których streściliśmy metodę p. Durand-Clay'a, wykazują nam dostatecznie, o ile ona jest genialną pod względem naukowym. Metoda ta opiera się na zasadach ścisłej mechaniki nie uciekając się wcale do przypuszczeń metafizycznych, lecz niestety w swém zastosowaniu praktycznym przedstawia ona niezwalczone trudności z powodu zmużnych i zakłóconych konstrukcyi, a tém samém i mnożących się niedokładności. P. Durand-Clay w artykule z r. 1868 w *Annales des ponts et chaussées* uzupełnił swoją metodę uwzględniając wytrzymałość cementu i zaprawy mularskiej.

14° P. Peaucellier. — Pozostaje nam jeszcze wspomnieć o pracy pułkownika Peaucellier, która, o ile nam wiadomo, jest najnowszą w tym przedmiocie, była bowiem ogłoszoną w 1875 r. w *Mémorial de l'officier du Génie* w numerze 24, str. 171-224. Artykuł ten jest bardzo ciekawym i pouczającym; zresztą kwestya będąc traktowaną ze stanowiska czysto naukowego, zwraca na siebie uwagę specjalistów, i uważamy sobie za obowiązek podać tu główne jej zarysy. W streszczeniu tém będziemy się posługiwać uwagami P. Collignon, profesora szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

P. Collignon o rzezoniej metodzie na lekyi swój, mianój d. 21 stycznia 1876 r., wyraził się jak następuje :

Metoda p. Peaucellier przedstawia wielkie pokrewieństwo z metodą p. Alf. Durand-Claye, którąśmy wyżej opisali.

Naprzód p. Peaucellier zostawiając na stronie roztrząsanie warunków określających parcia i oddziaływania w granicach wytrzymałości materiałów, zajmuje się wykreśleniem praw równowagi statycznej w jakimkolwiek bądź sklepieniu, którego części składowe uważane są za ciała stałe i niezmiennie co do swój formy. Dalój p. Peaucellier przyjmuje, że parcia w kluczu P jest poziomém i ż



punkt M, punkt przyłożenia téj siły może zmieniać swe położenie wzdłuż całej długości stosugi kluczowej  $J_0j_0$ . Co się zaś tyczy wielkości siły P, ta jest nieznaną. Wyznaczenie téjże w granicach służących za warunek równowagi stanowi zadanie rozbieranej przez nas metody.

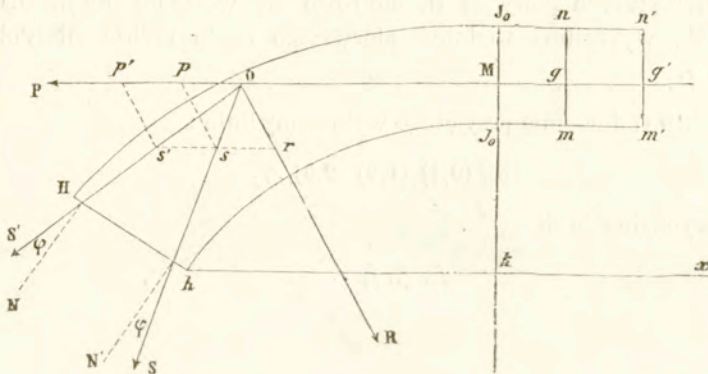


Fig. 6.

Warunki te są następujące :

a) *Warunki ślizgania się powierzchni stosugowych.* — Niech będzie  $Hh$  stosugą oporową, lub jakąkolwiek bądź stosugą łożyskową między stosugami oporowemi i kluczem sklepienia. Weźmy dowolnie punkt M, jako punkt przyłożenia parcia P, którego kierunek jest poziomym i oznaczonym na figurze przez linię MP. Dalej niech będzie R wypadkowa sił działających na część sklepienia, zawartą między stosugami  $J_0j_0$  i  $Hh$ . Oddziaływanie płaszczyzny  $Hh$  daje nam wypadkową siłę P i R. Aby zaś sklepienie  $HhJ_0j_0$  nie ześlizgiwało się ze swego łożyska  $Hh$ , koniecznym jest aby skrajne wartości parcia P odpowiadały oddziaływaniom tworzącym z prostopadłą do łożyska kąty równe kątowi  $\varphi$  tarcia kamienia o kamień. Dla znalezienia tych granic poprowadźmy przez punkt O dwie linie OS i OS' tak, aby kąt utworzony przez każdą z nich z płaszczyzną  $Hh$  równał się kątowi  $90^\circ + \varphi$ ; dalej po odcięciu na OR wielkości Or proporcjonalnej do siły R, możemy dopełnić równoległoki Ors*p* i Ors'*p'*, których przekątnie leżą na liniach OS i OS'. Strony rzeczonych równoległoków Op i Op' będą granicami szukanemi parcia P. W rzeczy samej, jeżeli P będzie większe od Op, wypadkowa siła P i R upadnie po za obrębem kąta tarcia  $\varphi$ , a nie będąc równoważoną przez tarcia kamieni, nie sprzeciwi się podniesieniu sklepienia  $HhJ_0j_0$  wzdłuż płaszczyzny  $Hh$ . Również, jeżeli siła P będzie mniejszą od Op, to wypadkowa siła P i R upadnie wewnątrz kąta SOR i sklepienie ześlizgnie się na dół wzdłuż téj samej płaszczyzny  $Hh$ . Zauważmy przytém, że granice Op i Op', które odpowiadają stosudze łożyskowej  $Hh$ , nie zależą wcale od położenia punktu przyłożenia siły na linii  $J_0j_0$ , jak to wskazuje nam zresztą wykonana konstrukcja, w której biorą udział tylko kierunki sił P i S, bez względu na ich położenie. Odetnijmy więc od punktu M dwie linie  $Mg = Op$  i  $Mg' = Op'$  prostopadłe do stosugi  $J_0j_0$  i przez punkta g i g' poprowadźmy równoległe do téjże stosugi; w ten sposób wykreślimy prostokąt  $nmn'n'$  wewnątrz którego musi upaść koniec linii przedstawiającej parcie w kluczu, aby ześlizgiwanie się wzdłuż stosugi łożyskowej  $Hh$  miejsca nie miało. Ta konstrukcja musiała by być powtórzoną dla każdej stosugi łożyskowej, lecz P. Peaucellier upraszcza znacznie ten szereg działań za pomocą następnéj konstrukcyi pomocniczéj.

Oznaczmy przez  $f_1 f_2 f_3 \dots f_n$  siły działające na każdy ze zworników zaczawszy od klucza.

Zworniki odpowiednie tym siłom oznaczają się przez litery  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ .

Jeżeli teraz złożymy siłę  $f_1$  z siłą  $f_2$ , otrzymamy wypadkową ich, którą nazwiemy  $R_2$  i która działa

na zworniki  $V_1$  i  $V_2$ . Dalej składając tak otrzymaną siłę  $R_2$  z siłą  $f_3$ , będziemy mieli wypadkową  $R_3$  działającą na zworniki  $V_1$ ,  $V_2$  i  $V_3$ . W ten sam sposób postąpimy aż do siły  $R_n$ , która będzie wypadkową sił  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , działającą na zworniki  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Skutkiem tego otrzymamy szereg wypadkowych  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , z których pierwsza  $R_1$  nie różni się wcale od siły  $f_1$ . Dla oznaczenia wielkości sił  $R_1, R_2, \dots, R_n$  wykreślmy wielobok pierwszego rzędu tychże sił (Polygone des forces, Kräftepolygon), fig. 7.

Zaczynając od punktu  $O$  dowolnie przyjętego wykreślmy linie :

$$(0,1) (1,2) (2,3), \dots$$

równoległe i proporcjonalne do sił :

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n.$$

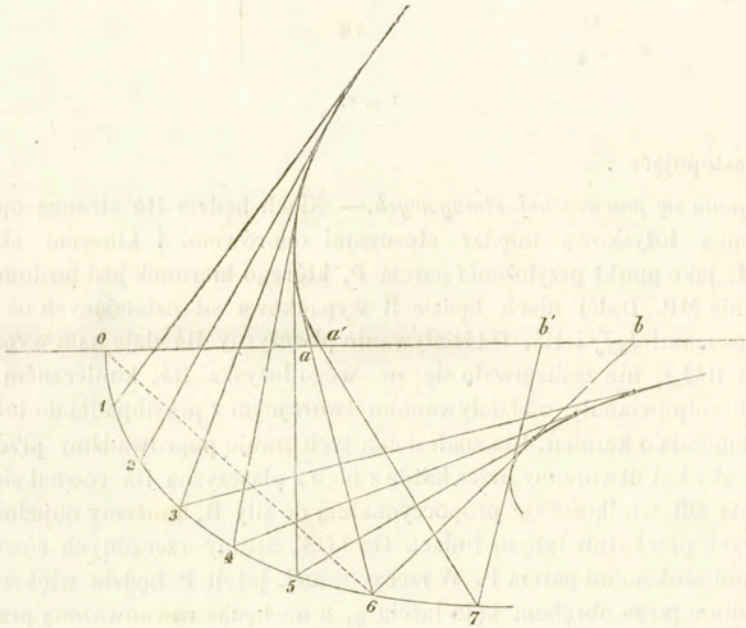


Fig. 7.

Łącząc np. punkt  $O$  z punktem  $6$  otrzymamy linię  $O6$ , która jest równoległą i proporcjonalną do siły  $R_6$ , każdy zaś z punktów

$$O. 1. 2. 3. 4. 5. 6.$$

odpowiada stosudze łożyskowej oddzielającej zworniki.

$$V_0 \text{ od } V_1, \quad V_1 \text{ od } V_2, \quad V_2 \text{ od } V_3 \dots V_6 \text{ od } V_7,$$

możemy więc zatem przez punkt  $6$  poprowadzić dwie linie  $(6a)$  i  $(6b)$ , które z prostą im odpowiedniej stosugi, tworzą kąty równe kątowi  $\varphi_1$  i równe między sobą. Linie te przecinają poziomą przechodzącą przez punkt  $O$  w punktach  $a$  i  $b$ . Boki trójkąta  $(60a)$  są równoległe i proporcjonalne do sił  $R_6$ ,  $P_6$  i  $S_6$ . Linia  $Oa$  jest więc niższą granicą parcia potrzebnego do przeciwdziałania ześlizgnięciu się sklepienia wzdłuż stosugi  $N^\circ 6$ . Podobnie  $(O6)$  jest granicą wyższą tegoż parcia, które zabezpiecza przeciw podniesieniu się sklepienia wzdłuż pomienionej stosugi.

Powtarzając te konstrukcyje dla każdego wierzchołka wieloboku sił  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , otrzymamy dwie krzywe, za pomocą których możemy wyznaczyć z łatwością szukane granice ( $Oa'$  i  $Ob'$ ) między którymi musi się zawierać parcie w kluczu P, zadosyć czyniące warunkom tarcia w częściach składających bryłę sklepieniową. Linie  $Oa'$  i  $Ob'$  służą więc do wykreślenia linii  $mn$  i  $m'n'$  na figurze 6.

b) *Warunek położenia krzywej ciśnień między podniebieniem a grzbietem sklepienia.* — Dla zadosyć uczynienia temu warunkowi, parcie P nie powinno przekraczać pewnych granic, i tak: jeżeli  $Hh$  przedstawi łożysko oporowe sklepienia  $Hh J_0j_0$ , w takim razie wypadkowa sił P i R powinna się znajdować między punktami H i h. Łącząc zaś punkta O z h i O z H możemy wykreślić równoległoboki  $Orsp$  i  $Ors'p'$ . Jeżeli zatem Or przedstawia siłę daną R, więc boki wykreślonych równoległoboków  $Op$  i  $Op'$  przedstawiają granice dla P, którego punktem przyczepienia był punkt M, wzięty dowolnie na stosudze kluczowej. Tak otrzymane granice dla parcia zmieniają się ze zmianą położenia rzeczzonego punktu M.

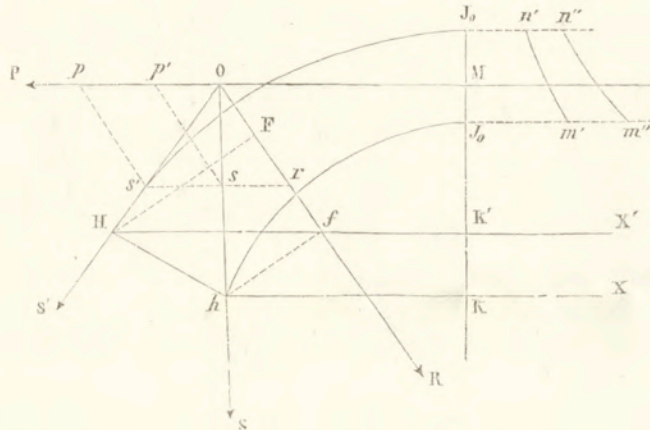


Fig. 8.

Aby wyrazić liczebnie związek jaki zachodzi między siłami S, R i P, zastosujemy do nich równanie momentów względem punktu h i otrzymamy :

$$P \times MK = R \times hf.$$

Iloczyn  $R \times hf$  jest wielkością stałą, a zatem  $P \times MK$  nie zależy wcale od położenia punktu M na stosudze kluczowej  $J_0j_0$ .

Równanie  $P \times MK = R \times hf = C$ , jest równanie hyperboli równobocznej, mającej za asymptoty : pionową  $KJ_0$  i poziomą  $hK$ .

Część użyteczna téj hyperboli jest łuk  $m'n'$  zawarty między krawędziami klucza  $J_0j_0$ .

Postępując w podobny sposób dla punktu H, otrzymamy krzywą  $m''n''$ , określającą wyższe granice parcia P. Krzywa ta jest również hyperbolą, której równaniem będzie :

$$P \times MK' = R \times HF,$$

a asymptotami linie  $K'J_0$  i  $HK'$ .

Te dwie krzywe, któreśmy już poznali w metodzie P. Durand-Claye, obejmują obwód, wyznaczający granice wszystkich możliwych par w kluczu sklepienia.

P. Peaucellier wykreśla te hyperbole tylko dla stosug oporowych. Działanie to można byłoby powtórzyć dla wszystkich stosug sklepienia, a następnie nakładając tak otrzymane płatki jedne na drugie otrzymalibyśmy ostatecznie pewien obwód, obejmujący parcia w kluczu, które utrzymują krzywą ciśnien wewnątrz granic wyżej przepisanych, lecz metoda ta pociągnęłaby za sobą szereg działań zupełnie niepotrzebnych, które można pominąć na zasadzie rozumowania (fig. 9.) następującego :

W daném sklepieniu  $J_0j_0Hh$ , obierzmy dowolnie stosugę  $Jj$ , następnie wykreślmy hyperbolę  $nm$ , której rzędne  $MM'$  w każdym punkcie  $M$  klucza  $J_0j_0$  przedstawiają nam parcia  $P$ ; to ostatnie złożone z siłą  $R$ , daje nam wypadkową, przechodzącą przez punkt  $j$ . Jak wiadomo, siła  $R$  jest wypadkową sił zewnętrznych działających na część sklepienia  $J_0j_0jJ$ . Przez punkt  $j$  poprowadźmy styczną  $jO$  do podniebienia, a przez punkt  $O$  (punkt przecięcia się stycznej  $jO$  z siłą  $R$ ) wykreślmy linię poziomą  $OMM'$ , która przecina klucz sklepienia w punkcie  $M$ , jako w punkcie przyłożenia parcia  $P$ , przedstawionego na danym rysunku przez linię  $MM'$ .

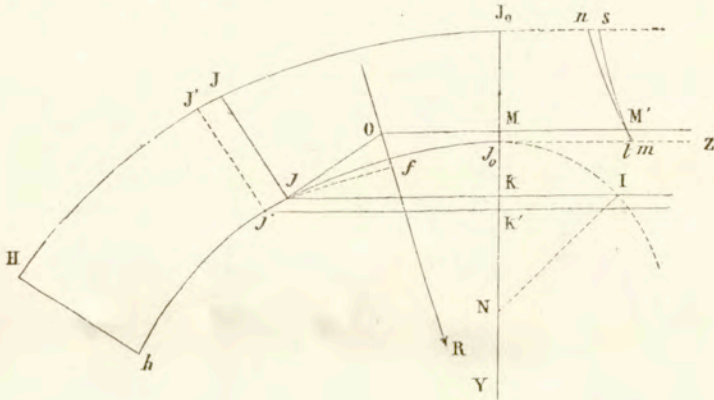


Fig. 9.

Przypuśćmy teraz, że stosuga  $Jj'$  znajduje się w odległości nieskończenie małej od stosugi  $Jj$ , wykreślając więc dla niej nową hyperbolę  $ts$ , P. Peaucellier powiada, że ta ostatnia, t. j.  $ts$  przecnie pierwszą t. j.  $nm$ , w punkcie  $M'$ . Uważając punkt  $M'$  jako punkt należący do krzywej powstałej z przecięcia się szeregu hyperbol po sobie następujących i odpowiadających rozmaitym punktom podniebienia, możemy więc wykreśleniem tej krzywej zastąpić wszystkie hyperbole, które musielibyśmy byli wyznaczyć, postępując drogą zwyczajną. Uwaga ta pozwala nam zformułować nasze zadanie jak następuje :

*Wykreślić miejsce geometryczne punktu  $M'$ , to jest krzywą parć taką, aby wypadkowa sił  $P$  i  $R$  była zawsze styczną do podniebienia.* P. Peaucellier dla rozwiązania tego zadania posługuje się pewną krzywą pomocniczą, i tak, jeżeli oznaczymy parcie w kluczu przez  $P=MM'$  i zastosujemy równanie momentów względem punktu  $j$ , to otrzymamy :

$$P \times Mk = R \times jf = W,$$

gdzie  $W$  przedstawia moment siły  $R$  względem punktu  $j$ .

P. Peaucellier przyjmuje że : równaniu temu musi czynić zadość dla punktu  $j'$ , położonego w nieskończenie małej odległości od punktu  $j$ , taż sama wartość parcia  $P$  w tém samym położeniu punktu przyczepienia  $M$  na kluczu  $J_0j_0$ . Podstawiając więc w dane równanie wielkości odpowiednie, otrzymamy :

$$P \times [Mk + d(Mk)] = W + dW,$$

czyli

$$P \times Mk + P \times d(Mk) = W + dW,$$

lecz

$$P \times Mk = W,$$

a zatem

$$P \times d(Mk) = dW.$$

Oznaczając  $j_0k$  przez  $y$ , możemy napisać :

$$Mk = y + Mj_0 = y + \text{stała},$$

$$d(Mk) = d(y + \text{stała}) = dy.$$

Podstawiając tę wartość dla  $d(Mk)$  w naszym równaniu i rozwiązując takowe względem  $P$  będzie :

$$P = \frac{dW}{d(Mk)} = \frac{dW}{dy}.$$

Widzimy ztąd, że można wyznaczyć  $P$ , wykreślając krzywą momentów  $W$ , jako funkcję  $y$  i prowadząc styczne w każdym punkcie tak otrzymanej krzywej; lecz działanie to znacznie się uprości, przenosząc osie rzędnych do  $Yj_0Z$  i kreśląc krzywą pomocniczą  $j_0I$ , której rzędne  $z$  czyniłyby zadość równaniu

$$z^2 = 2W, \text{ albo } z = \sqrt{2W} = \sqrt{2R \times jf}.$$

Konstrukcja tej krzywej jest bardzo łatwą, odcinając, bowiem na wysokości każdego punktu  $j$  długość  $KI = z = \sqrt{2R \times jf}$  i łącząc tak otrzymane punkta  $I$  będziemy mieli szukaną krzywą  $Ij_0$ . Zależność tej krzywej od wielkości szukaną  $P$ , wyrazi się przez równanie:

$$P = \frac{dW}{dy} = \frac{zdz}{dy},$$

to jest, że  $P$  jest podnormalną do krzywej  $Ij_0$ , zatem w naszym przypadku równa się długości  $KN$ .

W ten sposób możemy wyznaczyć wartość  $P$  dla każdego punktu klucza i wykreślić żadaną krzywą  $ts$ , przedstawiającą parcia, dla których krzywe ciśnień są stycznymi do podniebienia. Fig. 10.

W podobny sposób postąpić należy dla punktów  $J$  i otrzyma się krzywą  $t's'$ , przedstawiającą parcia  $P$ , dla których krzywe ciśnień będą stycznymi do grzbietu sklepienia.

Metoda ta, jak to już nam rachunek wskazał, nie jest dokładną i może znaleźć swe zastosowanie tylko w tej części obwodu, gdzie przez jej użycie, granice niższe parć szukanych nie mogą być zbliżonymi, a granice wyższe tychże parć — oddalonymi. W praktyce jednak uproszczenie przepisane może być zastosowaniem bez względu na niedokładność, która szczególnie w części użytecznej obwodu nie ma wielkiego znaczenia.

Jednym słowem, dla zapewnienia dwóch wymienionych warunków równowagi trzeba wykreślić sześć linii następujących :

$gh$  i  $g'h'$ , które zapewniają równowagę sklepienia przeciw ślizganiu się stosug z góry na dół i z dołu na górę.

$pq$  i  $p'q'$ , dwie hyperbole, z których pierwsza warunkuje przejście krzywój ciśnień przez krawędź stosugi oporowej na podniebieniu, a druga — na grzbiecie sklepienia.

$ts$  i  $t's'$ , dwie krzywe z których pierwsza warunkuje parcia w kluczu, dla których krzywe ciśnień są stycznymi do podniebienia, a druga — do grzbietu sklepienia.

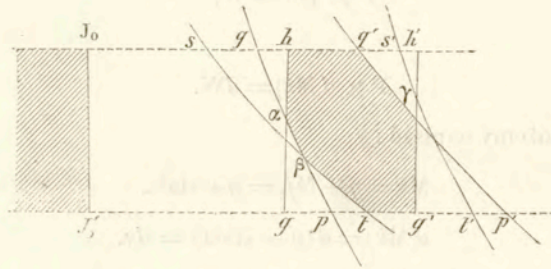


Fig. 10.

Powierzchnia  $h\alpha\beta t g' \gamma q'$  wspólna obwodom zawartym między trzema parmi linij wymienionych ogranicza parcia w kluczu, zapewniające dwa pierwsze warunki równowagi sklepienia.

Jeżeli zaś powierzchnie ograniczone przez te sześć linii, to jest przez :  $gh$  i  $g'h'$ ;  $pq$  i  $p'q'$ ;  $st$  i  $s't'$ , nie mają płata wspólnego, to znaczy, że równowaga w danym sklepieniu jest niemożliwą.

c) *Warunek nieprzekraczania granic bezpiecznych wytrzymałości materiałów.*

Dotychczas zapatrywaliśmy się na sklepienia jako na bryły złożone z ciał matematycznych, to jest niezmiennych co do swój formy, lecz w naturze inaczej się dzieje, musimy więc, ze względu na bezpieczne granice wytrzymałości materiałów, *zmienić nieco* nasze wypadki, otrzymane przy roztrząsaniu dwóch poprzedzających warunków. Widzieliśmy już że P. Durand-Claye dla zadosyć uczynienia warunkowi wytrzymałości materiałów, ucieka się do wykreślenia obwodu, zamykającego końce parć odpowiednich, lecz sposób ten jest mozolny, należy go bowiem powtarzać tyle razy, ile stosug łożyskowych rozpatrywane sklepienie w sobie zawiera.

P. Peaucellier rozbiera tę kwestyę z mniejszą dokładnością niż jego poprzednik i ogranicza się tylko na sprowadzeniu] do granic bezpiecznych oddziaływania w stosugach łożyskowych na te krawędzie mianowicie, które są więcej zbliżone do krzywój ciśnień. Dla klucza zaś używa sposobu następującego, który przypomina nam poniekąd sposób p. Durand-Claye'a.

Oznaczając przez  $\rho$  parcie na jednostkę powierzchni na krawędzi najwięcej pracującej, przez  $H$  składową prostopadłą oddziaływania stosugi, a przez  $\eta$  odległość punktu przyczepienia siły  $H$  od krawędzi pomienionej, więc następnę równanie wykaże nam zależność tych trzech wielkości,

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{H}{\eta}.$$

Równanie to ma miejsce tylko wtedy, kiedy  $\eta$  nie przekracza trzeciej części długości stosugi wziętej pod uwagę.

Wielkość  $\rho$  jest wiadomą, ponieważ przedstawia bezpieczną granicę wytrzymałości, następnie siła  $H$  jest proporcjonalną do długości  $\eta$ . Uwaga ta pozwoli nam wykreślić dla sił  $H$ , to jest dla parć bezpiecznych, ich miejsce geometryczne, które w danym razie, ze względu na podane równanie, przedstawia się w postaci dwóch prostych  $J_0 v$  i  $J_0 w$ , odcinających płatek  $h't't'h''$  na obwodzie poprzednio otrzymanym. Fig. 11.

Dla każdej innej stosugi łożyskowej, na przykład dla stosugi  $J_j$ , p. Peaucellier podaje sposób następujący :

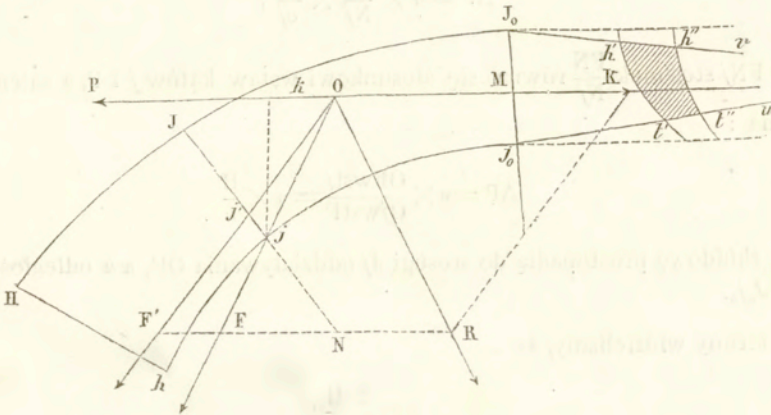


Fig. 11.

Niech będzie OR wypadkowa sił zewnętrznych działających na bryłę  $J_0j_0j$ ; MO kierunek parcia P, które złożone z siłą R daje wypadkową OF, przechodzącą przez punkt  $j$ . Uzupełniając równoległobok FOKR, otrzymamy

$$OF = S = \text{oddziaływanie stosugi } J_j,$$

$$RF = P = \text{parcie w kluczu } J_0j_0.$$

Następnie, powiększając RF o pewną ilość FF', możemy oddalić OF od punktu  $j$  i w taki sposób sprowadzić parcie w pobliżu krawędzi ( $j$ ) stosugi ( $J_j$ ) do granicy bezpiecznej ( $\rho$ ). Zadaniem naszym jest więc obliczenie ilości FF'. Dla tego niech będzie :

$$jj'' = \eta,$$

$$FF' = \Delta P.$$

Po przedłużeniu stosugi  $J_j$  do jej przecięcia się z RF w punkcie N, widzimy, że trójkąt  $jFN$  jest przecięty przez poprzeczną  $Oj'F'$ , a zatem prawo zależności odcinków tegoż trójkąta możemy wyrazić równaniem :

$$\frac{FF' \times Nj \times Oj}{FN \times jj'' \times OF} = 1.$$

czyli

$$\frac{\Delta P \times (Nj + \eta) \times Oj}{(FN + \Delta P) \times \eta \times OF} = 1,$$

albo

$$\Delta P \times (Nj + \eta) \times Oj = (FN + \Delta P) \times \eta \times OF.$$

Zauważmy jednak, że wielkości  $\eta$  i  $\Delta P$  są bardzo małe w porównaniu z wielkościami skończonymi FN i Nj; opuszczając je więc w wyrazach  $(Nj + \eta)$  i  $(FN + \Delta P)$  przyjdziemy do równania przybliżonego,

$$\Delta P \times Nj \times Oj = FN \times \eta \times OF,$$

albo

$$\Delta P = \eta \times \frac{FN}{N_j} \times \frac{OF}{O_j};$$

lecz w trójkącie  $FN_j$  stosunek  $\frac{FN}{N_j}$  równa się stosunkowi wstaw kątów  $j$  i  $F$ , a zatem nasze równanie przekształci się na :

$$\Delta P = \eta \times \frac{OF \sin j}{O_j \sin F} = \eta \times \frac{H}{h}$$

gdzie  $H$  oznacza składową prostopadłą do stosugi  $J_j$  oddziaływania  $OF$ , a  $h$  odległość  $jk$  punktu  $j$  od parcia w kluczu  $J_{oj}$ .

Z drugiej zaś strony widzieliśmy, że

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{H}{\rho}$$

albo

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{H}{\rho},$$

więc

$$\Delta P = \frac{2H^2}{3\rho h} = FF'.$$

Taka więc jest wartość ilości potrzebnej do *powiększenia* parcia w kluczu, aby sprowadzić oddziaływania krawędzi stosugowych na *podniebieniu* do żądanej granicy bezpieczeństwa.

Dla krawędzi stosugowych położonych u grzbietu sklepienia potrzeba jest zmniejszyć parcie w kluczu o pewną ilość, którą można obliczyć w sposób przytoczony. Jednym słowem, warunek wytrzymałości materiałów może być uwzględnionym przez sprostowanie otrzymanych już wypadków dla dwóch warunków poprzedzających.

Po wykonaniu tych wszystkich działań, otrzymamy pewien obwód, zamykający wszystkie możliwe parcia w kluczu, które czynią zadość wymienionym warunkom równowagi, a zatem zapewniają stałość sklepieniu. Pozostaje nam więc tylko dla każdego z wierzchołków tego obwodu wykreślić odpowiednią mu krzywą ciśnień i zaznaczyć punkta najsłabsze, jakieśmy już przy metodzie p. Durand-Claye'a opisali.

## CZEŚĆ II

### WYKŁAD NIEKTÓRYCH WIADOMOŚCI ZE STATYKI WYKREŚLNEJ.

Zanim zajmiemy się opisaniem sposobu wykreślenia krzywej ciśnień w sklepieniach przez nas podanego, uważamy za konieczne podać tu przynajmniej w streszczeniu główne zasady *Statyki*



wykreślnej (Statique grafique, Graphische Statik, na których nasza metoda głównie polega. Tębar-  
dziej czujemy się do tego upoważnieni, iż nauka ta nie jest jeszcze dostatecznie rozpowszechnioną,  
a przycm dzieł polskich traktujących ten przedmiot wcale nie posiadamy.

Wiadomości, o których mówić tu zamierzamy, dają się streścić w następujących określeniach i  
twierdzeniach.

**Określenie I.** — Każda linia prosta posiada trzy cechy ją charakteryzujące, jako to :

1. Jój wielkość,
2. Jój położenie,
- i 3. Jój kierunek.

Ponieważ w siłach odróżniamy także te trzy własności, możemy więc za pomocą linii prostej wy-  
znaczyć każdą siłę, co do jój wielkości, położenia i kierunku. Uwaga ta jest punktem wyjścia Statyki i  
Wykreślnej.

**Określenie II.** — Wielobokiem pierwszego rzędu danych sił (*Kräftepolygon, Polygone des forces*),  
nazywamy szereg linii po sobie następujących z których każda jest równą i równoległą do jednej  
z danych sił. I tak wielobok *Oabcde* (fig. 12a) jes wielobokiem pierwszego rzędu dla sił 1, 2, 3, 4 i 5  
albowiem

*Oo* jest równą i równoległą do siły 1,

*ab* „ „ „ 2,

*bc* „ „ „ 3,

*cd* „ „ „ 4,

*de* „ „ „ 5.

**Określenie III.** — Wielobokiem drugiego rzędu danych sił (*Seilpolygon, Polygone funiculaire*),  
nazywamy szereg linii po sobie następujących, z których każda z porządku jest równoległą do wy-  
padkowej wszystkich sił ją poprzedzających. I tak wielobok *ABCDEF* jest wielobokiem drugiego  
rzędu dla sił 1, 2, 3, 4 i 5, ponieważ (fig. 12 b) :

*AB* jest równoległą do wypadkowej (1),

*BC* „ „ „ (1 + 2),

*CD* „ „ „ (1 + 2 + 3),

*DE* „ „ „ (1 + 2 + 3 + 4),

*EF* „ „ „ (1 + 2 + 3 + 4 + 5),

Dla otrzymania tak określonego wieloboku drugiego rzędu, kreślimy najprzód wielobok pierwszego  
rzędu *Oabcde* dla danych sił 1, 2, 3, 4, i 5, następnie łączymy punkt *O*, zwany *biegunem* szukanego  
wieloboku, z wierzchołkami *b, c, d i e*, dalej przez punkt *B* (fig. 12. b), przecięcia się siły (1)  
z siłą (2), prowadzimy równoległą *BC* do promienia *Ob*, czyli do wypadkowej (1 + 2), dalej przez  
punkt *C* prowadzimy *CD* równoległą do *Oc*, czyli do wypadkowej (1 + 2 + 3), i t. d. Figura tak  
otrzymana *ABCDEF*, jest właśnie wielobokiem szukanym, t. j. wielobokiem drugiego rzędu dla da-  
nych sił 1, 2, 3, 4, i 5.

TWIERDZENIE I. — *Wypadkowa dowolnej liczby sił po sobie następujących przechodzi przez punkt przecięcia się stron skrajnych i odpowiednich danym siłom w wieloboku drugiego rzędu, należącym do systemu tychże sił.* (fig. 12a i fig. 12b).

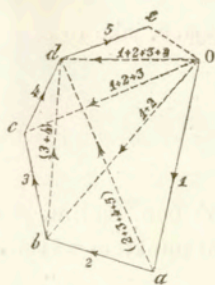


Fig. 12 a.

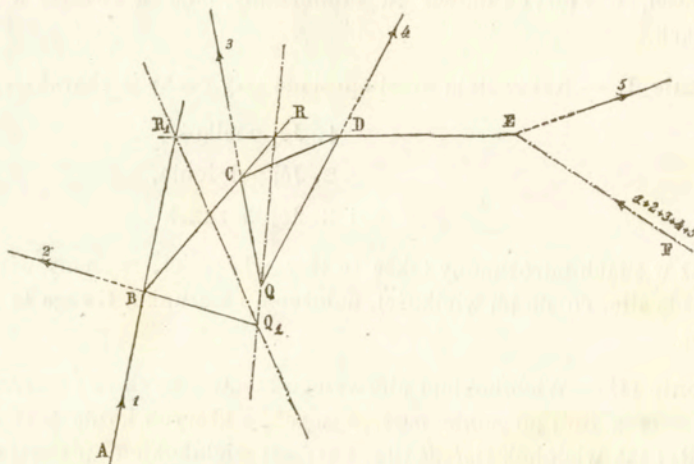


Fig. 12 b.

Dla jasności wykładu, dowiedzimy najprzód powyższego twierdzenia dla dwóch sił po sobie następujących, na przykład dla siły 3 i dla siły 4, a następnie dla dowolnej ich liczby, na przykład dla sił 2, 3 i 4.

PRZYPADEK 1szy. — W pierwszym razie twierdzimy, że wypadkowa  $(3+4) = bd$ , przechodzi przez punkt R, to jest przez punkt przecięcia się linii BC i DE, jako stron skrajnych wieloboku drugiego rzędu, należącego do sił 3 i 4.

Dla udowodnienia tego, poprowadźmy przez punkt O, jako przez biegun wieloboku ABCDEF, promienie Ob, Oc i Od i połączmy punkt b z punktem d linią bd. W tak otrzymanym czworoboku Obcd, każda z sześciu linii bc, cd, Ob, bd, Oc, Od, daje nam wielkość i kierunek pewnej siły wchodzącej w skład danego systemu, i tak :

bc	daje nam wielkość i kierunek siły	(3),
cd	„ „	(4),
Ob	„ „	(1 + 2),
bd	„ „	(3 + 4),
Oc	„ „	(1 + 2 + 3),
Od	„ „	(1 + 2 + 3 + 4).

Następnie, na figurze przedstawiającej wielobok drugiego rzędu, uzupełnijmy czworoboku CQDR, przedłużając siły 3 i 4, tudzież boki BC i DE do punktów przecięcia się Q i R i prowadząc przekątnię QR

W tak otrzymanym czworoboku CQDR, każda z pięciu linii (CQ, DQ, CR, CD i DR) należących do niego daje nam kierunek i położenie pewnej siły danego systemu, i tak

CQ	da	je	nam	kierunek	i	po	ło	że	ni	e	si	ły	(3),
DQ	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	(4),
CR	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	(1 + 2),
CD	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	(1 + 2 + 3),
DR	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	«	(1 + 2 + 3 + 4).

Jeżeli więc porównamy dwa czworoboki  $Obdc$  i  $CQDR$  między sobą, spostrzeżemy z łatwością, że pięć linii jednego są równoległe do pięciu linii odpowiednich drugiego, to jest że :

Strona $bc$	jest	równoległą	do	strony	CQ,
Strona $cd$	«	«	«	«	QD,
Strona $ob$	«	«	«	«	CR,
Strona $od$	«	«	«	«	DR,
i przekątnia $oc$	«	«	«	«	do przekątni CD.

przeto na zasadzie praw wyższej Geometrii (*Geometrie der Lage, Geometrie supérieure*), i szóste linie tych czworoboków muszą być równoległymi między sobą, to jest :

Przekątnia  $bd$  musi być równoległą do przekątni  $QR$ ,

co znaczy, że kierunek linii  $bd = (3 + 4)$  jest kierunkiem linii  $QR$ . Lecz wypadkowa  $(3 + 4)$  musi przechodzić przez punkt  $Q$ , jako przez punkt przecięcia się swych składowych  $3$  i  $4$ , a zatem linia  $QR$  będąc równoległą do wypadkowej  $(3 + 4)$  i przechodząc przez punkt  $Q$ , przedstawia nam położenie wypadkowej  $(3 + 4)$ , co też trzeba było wykazać.

PRZYPADEK DRUGI. — Wypadkowa  $(2 + 3 + 4)$  przechodzi przez punkt  $R_1$ , punkt przecięcia się stron  $(AB$  i  $DE)$  skrajnych wieloboku drugiego rzędu, należącego do sił  $2, 3, 4$  (fig. 12.a i fig. 12.b).

Dla udowodnienia tego twierdzenia, możemy zastąpić siły  $3$  i  $4$  ich wypadkową  $(3 + 4)$  i w taki sposób sprowadzić roztrząsany wypadek do wypadku poprzedzającego.

W rzeczy samej, na mocy tego podstawienia otrzymujemy dwa czworoboki.

$Oabd$  i  $BR_1RQ_1$ ,

w których dostrzegamy własności wyżej przytoczone, to jest, że pięć linii jednego są równoległe do pięciu linii drugiego, czyli że :

Strona $ab$	jest	równoległą	do	strony	$BQ_1$ ,
Strona $bd$	«	«	«	«	$Q_1R_1$ ,
Strona $oa$	«	«	«	«	$BR_1$ ,
Strona $od$	«	«	«	«	$RR_1$ ,
i przekątnia $ob$	«	«	«	«	do przekątni $BR_1$ ,

przeto i szóste linie muszą być względem siebie równoległe, czyli że : przekątnia  $ad$  musi być równoległą do przekątni  $Q_1R_1$ , czyli, że  $Q_1R_1$  będąc równoległą do  $(2 + 3 + 4)$  i przechodząc przez punkt  $(Q_1)$ , przedstawia nam położenie wypadkowej  $(2 + 3 + 4)$ , co też trzeba było wykazać.

TWIERDZENIE II. — Jeżeli biegun wieloboku drugiego rzędu  $d$  inych sił przebiega jakakolwiek bądź linię prostą, wszystkie strony tego wieloboku wirują około punktów statych, położonych na linii prostej równoległej do tej którą przebiega biegun  $O$  pomieniony. Fig. 13 a i fig. 13 b.

Niech będą : 1, 2, 3, 4, i 5 dane siły.

$Oabcde$  ich wielobok pierwszego rzędu.

$ABCDEF$  ich wielobok drugiego rzędu, którego biegunem jest punkt  $O$ .

Niech linia przebiegana przez biegun będzie  $OO'$ , a punkt  $O'$  nowym położeniem bieguna. Wielobok drugiego rzędu danych sił, uwzględniający to nowe położenie bieguna będzie  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ .

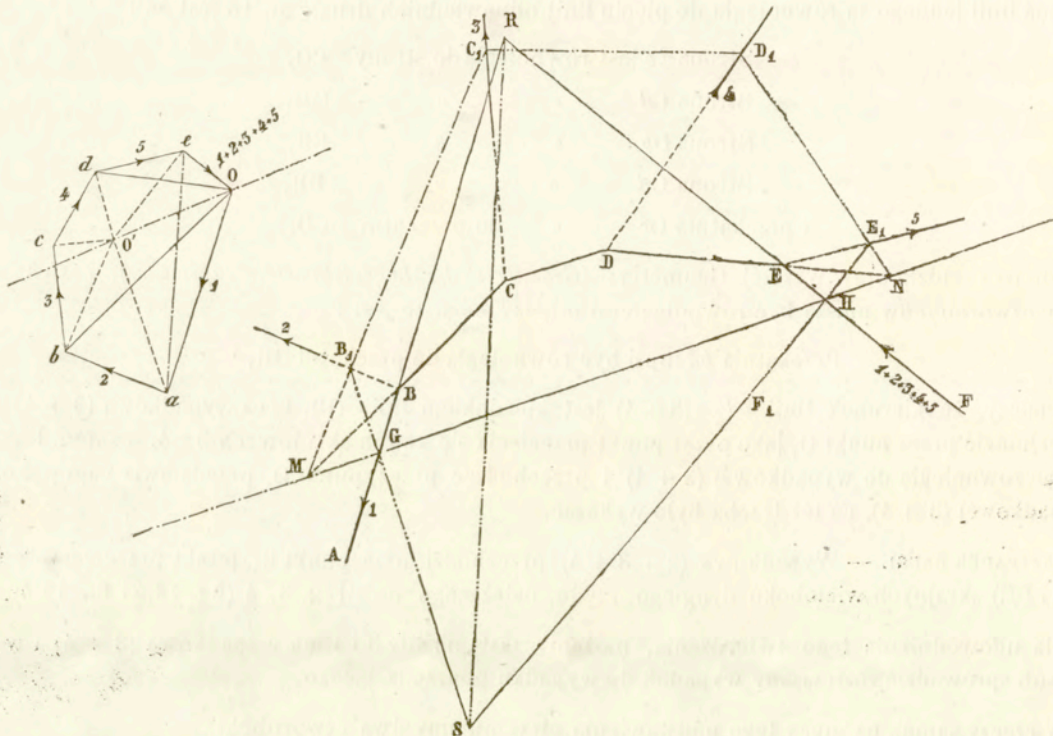


Fig. 13 a.

Fig. 13 b.

Posługując się więc tak opisaną figurą, możemy nadać naszemu twierdzeniu następną formę :

*Linia łącząca środki wirowania (na przykład  $M$  i  $G$ ) czyli punkta przecięcia się każdej pary stron danych wieloboków ( $ABCDEF$  i) drugiego rzędu, jest równoległą do linii  $OO'$ , to jest do linii przebieganej przez biegun  $O$ .*

Dla dowiedzenia tego dopełnijmy dwóch czworoboków  $MGBB_1$  i  $OabO'$ , w których pięć linii jednego są równoległe do pięciu linii drugiego, i tak :

Strona $Oa$	jest równoległą do strony	$GB$ ,
Strona $bO'$	«	« $B_1M$ ,
Strona $ab$	«	« $BB_1$ ,
Przekątnia $aO'$	«	do przekątnei $B_1G$ ,
Przekątnia $bO$	«	« $BM$ ,

a zatem i szóste ich linie muszą być równoległymi względem siebie, czyli że : Strona  $OO'$  musi być równoległą do strony  $MG$ .

Ten sam dowód możemy powtórzyć dla każdej innej pary stron danych wieloboków i otrzymamy kombinując już znalezione wypadki że :

Linia MN jest równoległą do linii OO', to jest, że środki wirowania wszystkich wieloboków leżą na linii prostej równoległej do linii którą przebiega biegun.

**TWIERDZENIE III.** — *Niezależnie od drogi, którą przebiega biegun danego wieloboku drugiego rzędu, punkt przecięcia się stron skrajnych tegoż wieloboku opisze zawsze linie prostą i równoległą do linii łączącej koniec wieloboku pierwszego rzędu z początkiem drugiej siły danego systemu.*

Niech będą dane siły :

1, 2, 3, 4 i 5.

Oabcde ich wielobok pierwszego rzędu.

Koncem tego wieloboku jest punkt e, a początkiem drugiej siły z kolei następstwa w danym systemie (1, 2, 3, 4, 5) jest punkt a; i linia łącząca ten ostatni z pierwszym, to jest punkt a z punktem e jest linia ae. Dalej, wielobokiem drugiego rzędu danych sił, z punktem O jako biegun, jest wielobok ABCDEF; zaś dla nowego położenia bieguna, na przykład kiedy on leży w punkcie O', otrzymany już wielobok ABCDEF zamieni się na A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>. Patrz fig. 13a i fig. 13b.

Przytoczona figura pozwoli nam wyrazić powyższe twierdzenie w sposób następujący :

Linia RS łącząca punkta przecięcia się skrajnych stron wieloboków ABCDEF i A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>, jest równoległą do linii ae, czyli do linii łączącej koniec wieloboku pierwszego rzędu z początkiem jego drugiej siły.

Dla dowiedzenia tego uważmy dwa czworoboki GRHS i O'eOa, w których pięć linii jednego są równoległe do pięciu linii drugiego, jako to :

Strona GR jest równoległą do strony Oa

Strona GS           "           "   O'a,

Strona HR           "           "   Oe,

Strona HS           "           "   O'e,

Przekątnia GH       "       do przekątni OO',

a zatem i szóste linie muszą być równoległymi względem siebie, to jest :

Przekątnia RS musi być równoległą do przekątni ae.

co było do okazania.

**UWAGA.** — Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko takie systemy sił, których części składowe były niezależne jedne od drugich, to jest nie związane żadnym prawem warunkującym ich wielkość lub położenie, lub też kierunek. Wprowadzając zaś pewne prawo zależności, możemy uprościć znacznie już otrzymane wypadki, jak to zobaczymy na następnym przykładzie. Patrz fig. 14.

Niech będzie belka pozioma jednoprzęsłowa ab, na którą działa pionowo ciężar rozłożony w sposób ciągły i nieprzerwany na całą jej długości, wtedy wielobok pierwszego rzędu przedstawi się nam

w postaci linii pionowej AB, a odpowiedni mu wielobok drugiego rzędu z punktem O, uważanym jako bieżun, będzie miał formę linii krzywej CED, której styczne dadzą nam położenie i kierunek boków tegoż wieloboku.

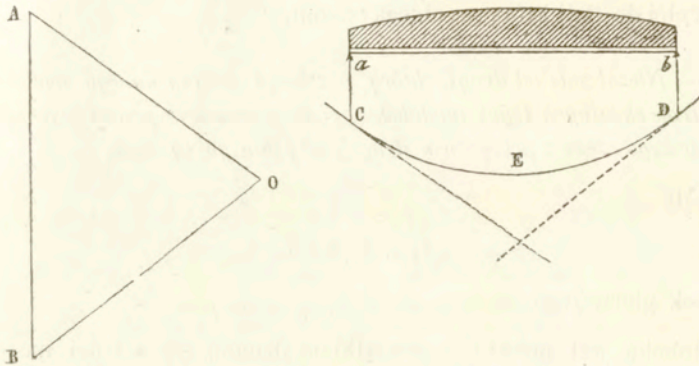


Fig. 14.

Po bliższe szczegóły odsyłamy do dzieł specjalnych, jakimi są naprzykład :

CULMANN : *Graphische Statik*, Zürich, 1863, wydanie pierwsze, 1875 wydanie drugie.

BAUSCHINGER : *Elemente der graphischen Statik*.

M. LÉVY : *La statique graphique*, Paris, 1874.

## CZĘŚĆ III

### NOWY SPOSÓB KREŚLENIA KRZYWEJ CIŚNIEŃ W SKLEPIENIACH.

OKREŚLENIE. — Pod wyrazem « krzywa ciśnień w sklepieniach » rozumiemy miejsce geometryczne środków parcia w danej bryle sklepieniowej.

Określenie to przyjęte przez Navier'a nie pozostawia nic do życzenia, owszém tłumaczy ono ze ściśle matematyczną dokładnością powstanie tej krzywej w każdym sklepieniu, oraz prawo, jakie ona winna przedstawiać.

W rzeczy samój, jeżeli w sklepieniu ABCD (fig. 15) nazwiemy parcie w kluczu przez P, którego punktem przyłożenia jest punkt E, a kierunkiem linia EF i oznaczmy przez  $Z_1, Z_2$ , ciężar zworników po sobie następujących, których środki ciężkości leżą w punktach  $C_1, C_2, C_3, \dots$  możemy w tém sklepieniu wykreślić krzywą ciśnień prowadząc pionowe przez środki ciężkości i składając ciężar każdego zwornika z parciem w kluczu i z ciężarami poprzedzających zworników.

**Rozbiór szczegółowy hipotez służących za podstawę nowego sposobu kreślenia krzywej ciśnień.** — Widzimy więc że krzywa ciśnień jest właśnie wielobokiem drugiego rzędu ciężarów danych zworników, którego bieżun jest odległym od wieloboku pierwszego rzędu o długość parcia w kluczu i że wykreślenie rzeczonyj krzywej nie przedstawiałoby najmniejszej trudności,

gdybyśmy znali parcie w kluczu, co do jego kierunku, wielkości i położenia, czyli: punkt przyłożenia téj siły, jéj wielkość wyrażoną w pewnych jednostkach wagi, nakoniec kąt, jaki ona tworzy z płaszczyzną stosugi kluczowej. W tym artykule zamierzamy tylko zajmować się krzywą ciśnień w sklepieniach symetrycznych dla których położenie parcia jest poziome, jak się można o tém przekonać za pomocą prostego rachunku. Pozostają więc nam tylko dwa pierwsze pytania do rozwiązania, a mianowicie: jaka jest wielkość poziomego parcia w daném sklepieniu i w jakim punkcie klucza to szukane parcie ma być przyłożoném.

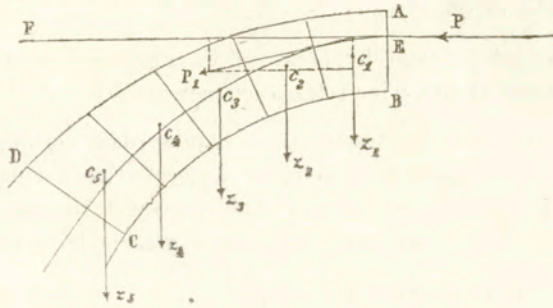


Fig. 15.

Z powyższego rozumowania wynika, że krzywa ciśnień jest funkcją dwóch niewiadomych związanych z sobą warunkami równowagi sklepienia. Warunki te, jak to już Mery wykazał są następujące:

1° Krzywa ciśnień powinna być zawartą między podniebieniem i grzbietem sklepienia.

2° Krzywa ciśnień powinna przecinać prostopadłą do każdéj stosugi łożyskowej pod kątem mniejszym od kąta tarcia kamienia o kamień.

3° Rozdzielenie ciśnień na płaszczyźnie stosugi łożyskowej powinno być takie, aby największa praca w elementach nie przekraczała granicy praktycznej wytrzymałości materiałów.

Dla obliczenia niewiadomych wielkości, musielibyśmy uwzględnić te trzy wymienione warunki równowagi, jak to był już uczynił p. Al. Durand Claye; i także p. Peaucellier, idąc za przykładem pierwszego, lecz wynikające ztąd działania, będąc dla praktyki nieprzystępnymi, starano się zastąpić pewnemi przypuszczeniami opartemi na doświadczeniach.

Myśl ta nawet, jak widzieliśmy, wyprzedziła znacznie metodę Durand-Claye'a i jego następców.

Zachodzi więc pytanie, jakie są te hipotezy, które czyniąc zadość pomienionym wymaganiom, byłyby też najwięcej prawdopodobnemi.

Widzieliśmy już, że dla wykreślenia krzywej ciśnień musimy znać parcie poziome i punkt jego przyłożenia w stosudze kluczowej. Są to dwie nieznanne wielkości, które możemy zastąpić dwoma tylko hipotezami. Powiększenie liczby hipotez da nam albo jaką niedorzeczność w wypadku, albo nowo postawione hipotezy nie będą samodzielnymi, lecz tylko wynikiem dwóch pierwszych.

W tym to punkcie leży głównie błąd moich poprzedników Navier'a i Mary'ego, zapatrujących się na kwestyę stałości sklepień z tego samego stanowiska.

Ci uczeni przyjmują trzy hipotezy a mianowicie: biorą naprzód dwa punkta, jeden w kluczu, a drugi w stosudze naderwania, przez które krzywa ciśnień winna przechodzić, a nadto wznoszą z góry położenie tejże stosugi, opierając się na doświadczeniach P. Boistard'a.

Wypada więc złąd, że zamiast dwóch niezbędnych hipotez, powstają trzy zupełnie niezależne od siebie, które naturalnie pociągają za sobą skutki najniedorzeczniejsze. I tak na przykład: w sklepieniach, dla których stosunek strzałki do otworu wynosi mniej jak  $1/6$ , stosuga naderwania, według Boistard'a, musi się znajdować w łożyskach oporowych, otóż krzywa ciśnień wykreślona według metody p. Navier'a lub p. Méry bywa niekiedy albo zbyt płaską, albo zbyt wypukłą, albo też przecina w dwóch punktach grzbiet sklepienia. Główną przyczyną téj niedorzeczności jest trzecia hipoteza, określająca z góry położenie stosugi naderwania, czego doświadczenia P. Boistard'a nie podają wcale z dokładnością matematyczną.

Co do nas, powiedzieliśmy już że dwie hipotezy są w zupełności wystarczające do wykreślenia krzywéj ciśnień w sklepieniach, chodzi więc tylko o ich naturę.

Dwie pierwsze hipotezy Navier'a, według naszego zdania, zdają się odpowiadać warunkom równowagi z jednej strony i zabezpieczać możebność wywrotności z drugiej strony, wtedy kiedy hipotezy p. Méry czynią wywrotność sklepienia około krawędzi stosugi naderwania niemożliwą, ponieważ krzywa ciśnień, według zdania tego uczonego przechodzi przez środek tejże stosugi.

Dwie pierwsze hipotezy Navier'a brzmią jak następuje:

*« Krzywa ciśnień w sklepieniach powinna przechodzić przez trzecią część klucza mierząc od grzbietu sklepienia i przez trzecią część stosugi naderwania mierząc od podniebienia. »*

Widzimy więc, że hipotezy te warunkują parcie na całej długości stosug łożyskowych, nie dzielą zatem ich powierzchni na części użyteczne lub nieużyteczne, a pomimo tego wywrotność sklepienia będzie możliwą, jeżeli tylko parcia na krawędzie zbliżone do krzywéj ciśnień przekroczą granice bezpieczne wytrzymałości kamienia.

Te dwie hipotezy odnoszące się do położenia krzywéj ciśnień w sklepieniach, dla łatwiejszego pojęcia ich doniosłości, możemy przedstawić w formie następującej:

Krzywa ciśnień w każdej połowce sklepienia, będąc zawartą między jego podniebieniem i grzbietem, przechodzi przez dwa punkta celniejsze, z których pierwszy znajduje się w trzeciej części klucza, mierząc od grzbietu, a drugi w trzeciej części stosugi naderwania licząc od podniebienia. Te dwa punkta są najwięcej zbliżone do granic sklepienia i oznaczają miejsca najsłabsze bryły sklepieniowej. Ponieważ tutaj zajmujemy się tylko sklepieniami symetrycznymi, więc klucz sklepienia leży na osi pionowej i symetrycznej do dwóch jego połówek, chodzi więc tylko o wyznaczenie stosugi naderwania, to jest takiéj stosugi, w której krzywa ciśnień jest najwięcej zbliżoną do podniebienia, jednak nie więcej jak o trzecią część grubości sklepienia w stosudze rzeczonéj. Dla rozwiązania tego zadania użyjemy sposobu następującego:

**Nowy sposób kreślenia krzywéj ciśnień w sklepieniach.** — Niech będzie ABCD dane sklepienie eliptyczne, zbudowane według prawideł praktycznych podanych na str. 28<sup>ej</sup>. Przez WZ oznaczymy linię ciężenia bębenka, a zatem powierzchnia ADWZ będzie proporcjonalną do obciążenia danego sklepienia, a płaszczyzna BCDWZ proporcjonalną do ciężaru całej bryły sklepieniowej wraz z bębenkiem.

Podzielmy długość ZW na dowolną liczbę części równych, w naszym przykładzie na 12, przez punkta podziału *a, b, c, d, etc.* poprowadźmy płaszczyzny pionowe *aa', bb', cc', etc.* W taki sposób bryła sklepieniowa BCDWZ podzieloną zostanie na trapezy I, II, III, IV, etc. o równych wysokościach *Za, ab, bc etc.* Powierzchnie tych trapezów są proporcjonalne do ciężarów brył kamiennych, mających te powierzchnie za podstawy a jedność za długość



Ponieważ stosunek powierzchni tych trapezów równa się stosunkowi połowy sum stron równoległych, możemy więc przez każdy z ich środków ciężkości poprowadzić linię pionową, przedstawiającą kierunek i położenie działającej w nim siły, które, wzięte razem, dadzą nam pewien system sił pionowych. Te ostatnie złożone z parciem poziomym w kluczu utworzą krzywą ciśnień, czyli wielobok drugiego rzędu, który dla nieskończonej małych wysokości pomienionych trapezów zamieni się na krzywą ciągłą i nieprzerwaną. (Patrz tablicę.)

Dla znalezienia prawdziwego parcia w kluczu, musimy naprzód wyznaczyć stosunek naderwania. W tym celu przypuszczamy że długość  $BR=P'$ , którąśmy obrali dowolnie, przedstawia nam szukane parcie w kluczu; następnie posługując się tą wielkością, wykreślamy wielobok pierwszego rzędu RBY danych sił:  $P' 1. 2. 3. 4... etc.$

Dałej przez punkt H, czyli przez trzecią część klucza mierząc od grzbietu, kreślimy wielobok drugiego rzędu, to jest krzywą ciśnień HU odpowiadającą parciu przyjętemu  $BR=P'$ . Jeżeliby to parcie było prawdziwem, krzywa ciśnień HU czyniłaby zadość naszym przypuszczeniom, lecz sama figura wskazuje że tak nie jest, bo w danym razie ta krzywa przecina podniebienie w dwóch punktach  $\alpha$  i  $\beta$ . Jednak jej wartość jest dla nas niezaprzeczną, ponieważ posiada ona wszystkie własności wieloboku drugiego rzędu sił:  $P', 1, 2, 3, 4 etc.$  W rzeczy samej, za pomocą tej krzywej na zasadzie pierwszego i trzeciego twierdzenia, drugiej części niniejszej pracy, możemy oznaczyć pionową przechodzącą przez środek ciężkości każdej części bryły sklepieniowej; i tak dla części sklepienia, zawartej między kluczem i pionową przechodzącą przez punkt E, szukany środek ciężkości leży na pionowej przechodzącej przez punkt K, to jest, przez punkt przecięcia się stycznych HI i EK.

Na zasadzie twierdzenia (III) punkt K jest punktem stałym i niezależnym od parcia w kluczu, czyli że dla każdego innego położenia krzywej ciśnień, wszystkie styczne do tej ostatniej przechodzące przez punkt K będą miały swe punkta zetknięcia się na pionowej EN.

Według hipotez przez nas przyjętych, prawdziwa krzywa ciśnień przechodzi przez trzecią część stosugi naderwania mierząc od podniebienia, jeżeli więc wykreślimy miejsce geometryczne wszystkich punktów oddalonych od podniebienia o trzecią część długości stosug im odpowiednich, to otrzymamy krzywą XEV do której prawdziwa krzywa ciśnień będzie styczną w stosudze naderwania. Zatem dla wyznaczenia stosugi naderwania trzeba znaleźć na poziomej HI taki punkt K, z którego poprowadzone styczne KE i KE' do krzywych XEV i HE'U, spotykałyby te ostatnie w punktach E i E', położonych na jednej i tej samej pionowej NP.

Aby zaś otrzymać punkt K, rysujemy krzywą MKL, która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się stycznych do krzywych HE'U i XEV, w punktach położonych na jednej i tej samej pionowej, np.  $\gamma$  i  $\delta$ , E i E' etc., dla których styczne przecinają się w punktach M, K, etc.

Punkt K, t. j. punkt przecięcia się krzywej MKL z poziomą HI jest punktem żądanym. Styczna EK do krzywej XEV daje nam punkt E należący do szukanej stosugi naderwania, a linia FG normalna do podniebienia — samą stosugę.

Pozostaje nam tylko wyznaczyć rzeczywiste parcie w kluczu sklepienia i wykreślić odpowiednią mu krzywą ciśnień.

W tym celu poprowadźmy linię KE', która na zasadzie własności krzywej MKL, musi być styczną do krzywej HEU, dałej przez punkt R wykreślimy RS równoległą do EK, a przez punkt S linię SQ równoległą do EK; długość BQ przedstawi nam rzeczywiste parcie w kluczu, a SQ parcie na stosugę naderwania FG. Dalszy ciąg działań nie przedstawia już żadnej trudności, trzeba bowiem zacząwszy

od punktu H, punktu przyłożenia znalezionego parcia BQ, dla danych sił pionowych przy nowém położeniu bieguny w punkcie Q wykreślić wielobok drugiego rzędu i wpisać weń krzywą ciągłą nieprzerwaną, która też i będzie szukaną krzywą ciśnień w danym sklepieniu.

### Rozbiór analityczny sposobu przez nas podanego.

Ze względu na małe jeszcze dotąd rozpowszechnienie Statyki Wykreślniej, uważaliśmy za konieczne ująć naszą teorię w formę analityczną i tym sposobem zrobić ją dostępniejszą dla każdego technika, dla którego kwestya stałości sklepień nie jest rzeczą obojętną.

Jeżeli więc przyjmie my sklepienie ABCD podane na tablicy 1, jako sklepienie symetryczne, bez względu na formę jego podniebienia i jeżeli przez punkt H, przyłożenia siły parcia w stosudze kluczowej, poprowadzimy poziomę HI, to ta pozioma z osią symetrii HY dadzą nam spółrzedne prostokątne, do których odniesiemy wszystkie działania podane poniżej.

Przyjmie my następnie, że linia wyrażająca obciążenie rozpatrywanego sklepienia będzie linią poziomą ZW, odległą od osi odciętych HI o długość  $HZ = x$ .

Oznaczając krzywą podniebienia przez równanie

$$(1) \quad y = f(x),$$

wyrazimy ciężar każdego elementu sklepienia, zawartego między dwoma płaszczyznami pionowymi oddalonymi od siebie o długość nieskończenie małą  $dx$  przez równanie

$$(2) \quad dc = p[f(x) + \alpha]dx$$

gdzie  $p$  oznacza ciężar gatunkowy materiału

Zatém ciężar sklepienia, zawartego między osią rzędnych i pionową NP, przechodzącą przez punkt którego odciętą jest  $x$ , otrzyma się całkując równanie poprzedzające, w granicach 0 i  $x$  czyli będzie

$$(3) \quad C = \int_0^x p[f(x) + \alpha]dx.$$

Jeżeli środek ciężkości tej części bryły szkłepieniowej leży na pionowej przechodzącej przez punkt K wówczas moment siły C względem początku spółrzednych wyrazi się przez

$$(4) \quad C \times HK = \int_0^x p[f(x) + \alpha]xdx.$$

Z równań (3) i (4) otrzymujemy

$$(5) \quad HK = \frac{\int_0^x p[f(x) + \alpha]xdx}{\int_0^x p[f(x) + \alpha]dx}.$$

Uważając nareszcie punkt E, wyrażony przez spółrzedne X i Y, jako punkt należący do krzywej ciśnień wywołanej przez nieznanne nam jeszcze parcie w kluczu P, którego punktem przyłożenia

jest punkt H, możemy wyznaczyć kieronek téjże krzywej w punkcie pomienionym, łącząc punkt K, z punktem E linią EK. Ta ostatnia linia jest styczną w punkcie E do krzywej ciśnień danego sklepienia, jak się o tém można przekonać wychodząc z określenia miejsca geometrycznego środków ciśnień i rozpatrując równoległobok sił P i G, których wypadkowa przy przyjętych założeniach musi się zlać z linią EK.

Wracając więc do równania (5) będziemy mieli

$$(5a) \quad X - HK = X - \frac{\int_0^x p[f(x) + \alpha]x dx}{\int_0^x p[f(x) + \alpha]x dy},$$

a współczynnik kierunku linii EK będzie

$$(6) \quad \frac{Y}{X - HK} = \frac{C}{P},$$

zatem

$$Y = \frac{1}{P} \times C(X - HK),$$

czyli

$$(7) \quad Y = \frac{1}{P} \left[ X \int_0^x [f(x) + \alpha] dx - \int_0^x p[f(x) + \alpha] x dx \right].$$

To równanie jest równaniem krzywej ciśnień, odniesionej do współrzędnych prostokątnych, których początek leży w punkcie przyłożenia parcia w kluczu.

Równanie (7) jeszcze raz wskazuje nam, że każda styczna (EK) poprowadzona do krzywej ciśnień przecina poziomą parcia (HI) w punkcie położonym na pionowej przechodzącej przez środek ciężkości téj części bryły sklepieniowej, która jest zawartą między pionową przechodzącą przez punkt zetknięcia się i osią symetrii.

W rzeczy saméj różniczkując poprzedzające równanie otrzymujemy :

$$(8) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{1}{P} \int_0^x p[f(x) + \alpha] dx = \frac{C}{P} = \frac{Y}{X - HK},$$

Ta własność jest punktem wyjścia Statyki Wykreślnej.

Na zasadzie rozumowań na których oparliśmy naszą teorię, powiedzieliśmy już, że krzywa ciśnień w stosudze naderwania powinna być styczną do krzywej XEV, dającej nam miejsce geometryczne wszystkich punktów oddalonych od podniebienia o trzecią część długości stosug im odpowiednich; możemy więc napisać równanie krzywej XEV, lecz dla skrócenia przedstawmy ją przez równanie ogólne

$$(9) \quad y_0 = F(x_0)$$

Następnie, przyjmując dowolnie  $P_0$  za parcie w kluczu, wykreślimy krzywą ciśnień HEU, która musi posiadać także własność wyrażoną przez równanie (8).

Zadaniem naszym jest właśnie na krzywej XEV,  $y_0 = F(x_0)$ , znaleźć taki punkt, którego styczna posiadałaby pomienioną własność stycznych należących do krzywej ciśnień danego sklepienia.

Jeżeli przyjmiemy, że punktem żądanym jest punkt E, to punkt K przecięcia się stycznej EK z poziomą HI musi się znajdować na pionowej przechodzącej przez środek ciężkości bryły sklepieniowej, zawartej między pionową PN i osią symetrii HY, z drugiej zaś strony wychodząc z własności krzywej ciśnień HEU, linia łącząca punkt K z punktem E' musi być styczną do HEU, jednym słowem punkt K jest punktem przecięcia się stycznych do krzywych HEU i XEV, wychodzących z punktów E' i E położonych na jednej i tej samej pionowej PN.

Krzywą XEV oznaczyliśmy już przez równanie (9)

$$y_0 = F(x_0).$$

Zaś równanie krzywej HEU, która jest krzywą ciśnień dla parcia  $P_0$  stosownie do równania (7) przyjmie kształt następujący

$$(10) \quad Y_0 = \frac{1}{P_0} \left[ X_0 \int_0^x p[f(x) + \alpha] dx - \int_0^x p[f(x) + \alpha] x dx \right].$$

Zatém styczna do krzywej (9) przechodząca przez punkt  $\xi$ ,  $\eta$  będzie :

$$(11) \quad y_0 - \eta = \frac{dy_0}{dx_0} (x_0 - \xi),$$

a styczna do krzywej (10), przechodząca przez punkt  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,

$$(12) \quad Y_0 - \eta_1 = \frac{dY_0}{dX_0} (X_0 - \xi_1).$$

Lecz punkta zetknięcia się obu stycznych leżą na jednej i tej samej pionowej, a zatém odcięta  $x_0$  musi być równą odciętej  $X_0$ , skutkiem czego równania nasze przyjmą kształty następujące :

$$(11a) \quad y_0 - \eta = \frac{dy_0}{dx_0} (X_0 - \xi)$$

i

$$(12a) \quad Y_0 - \eta_1 = \frac{dY_0}{dX_0} (X_0 - \xi_1).$$

Następnie punkt ich wzajemnego przecięcia się musi leżeć na osi odciętych HI, czyli oznaczając przez  $a$  i  $b$  współrzędne ich punktu przecięcia się, otrzymamy

$$(11b) \quad y_0 - b = \frac{dy_0}{dx_0} (X_0 - a),$$

$$(12b) \quad Y_0 - b = \frac{dY_0}{dX_0} (X_0 - a)$$

albo rugując  $X_0 - a$

$$y_0 - b = \frac{dy_0}{dx_0} \times \frac{dX_0}{dY_0} (Y_0 - b).$$

Lecz jakeśmy powiedzieli punkt żądany musi leżeć na osi odciętych, czyli że

$$(13) \quad b = 0,$$

zatem równanie nasze zamieni się na :

$$y_0 = \frac{dy_0}{dx_0} \times \frac{dX_0}{dY_0} \times Y_0$$

albo

$$(14) \quad y_0 \times \frac{dx_0}{dy_0} = Y_0 \times \frac{dX_0}{dY_0},$$

oprócz tego mamy równanie :

$$(15) \quad x_0 = X_0.$$

Równania te są równaniami warunkującymi zależność rzędnych, mianowicie tych punktów krzywej XEV i krzywej HEU, dla których styczne przecinają się nawzajem w punkcie K, położonym na poziomej HI.

Pozostaje więc nam tylko, znalazłszy liczebne wartości  $y_0$  i  $x_0$  podstawić takowe w równanie (7) zamiast Y i X i obliczyć wielkość parcia P.

Posiadając bowiem to ostatnie wykreślamy dlań krzywą ciśnień, która na zasadzie poprzedzającego rozumowania musi być styczną w punkcie E do krzywej XEV.

Wykonywując działania przepisane otrzymamy :

$$y_0 = \frac{1}{P} \left[ x_0 \int_0^x p[f(x) + \alpha] dx - \int_0^x p[f(x) + \alpha] x dx \right],$$

rozwiązując to równanie dla P będziemy mieli

$$(16) \quad P = \frac{1}{y_0} \left[ x_0 \int_0^x p[f(x) + \alpha] dx - \int_0^x p[f(x) + \alpha] x dx \right],$$

przyczém przypomnieć należy, że ilości  $x_0$  i  $y_0$  związane są równaniem (9)

$$y_0 = F(x_0).$$

Możemy więc zestawiając równania (9), (10), (14), (15) i (16) otrzymać równanie ostateczne, służące do obliczenia parcia w kluczu danego sklepienia :

$$(17) \quad P = \frac{dx_0}{dy_0} \times \frac{dY_0}{dX_0} P_0.$$

#### SPOSÓB UŁATWIONY KRĘŚLENIA KRZYWEJ MKL.

Widzieliśmy przed chwilą, że wykreślenie krzywej ciśnień w sklepieniach zależy głównie od wykreślenia krzywej MKL.

Musimy więc zwrócić uwagę na dokładne wykreślenie téj krzywej.

Wprawdzie podaliśmy już jeden sposób ku temu, lecz o ile on był racjonalnym pod względem

naukowym i dającym się zastosować bezwzględnie do każdej formy sklepienia, o tyle był on niepraktycznym w użyciu, ponieważ wykreślenie stycznych do krzywych XEV i HE'U li tylko za pomocą ekierki, bez względu na charakter tych krzywych, nie może wcale odpowiedzieć tak ważnym warunkom dokładności.

Ponieważ prawo krzywych XEV i HE'U jest nam znane, możemy więc je zużytkować w każdym danym razie dla powiększenia żądanej dokładności, co też zamierzamy uczynić dla wybranego przez nas przykładu.

W daném sklepieniu eliptyczném ABCD, czyli mającém za grzbiet i podniebienie elipsy AD i BC, krzywa XEV, miejsce geometryczne punktów oddalonych od podniebienia o trzecią część długości stosug im odpowiednich, musi być także elipsą; wykreślenie zaś stycznych do każdej elipsy daje się wykonać z największą dokładnością pomnąc, że podnormalne tej krzywej posiadają własność następującą :

$$\frac{s}{x} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Równanie, w którém wprowadzone litery mają znaczenie następujące :

$a$  i  $b$  oznaczają dwie pół-osie elipsy,

$x$  « odciętę pewnego punktu  $\delta$ ,

$s$  « « podnormalną  $\varepsilon\eta$  tegoż punktu.

Należy więc tylko obliczyć wartości  $b^2$  i  $a^2$  i odciąć na liniach OY i OD długości im proporcjonalne Ob i Oa i połączyć punkt  $a$  z punktem  $b$ .

Aby wykreślić styczną w punkcie  $\delta$  do elipsy XEV poprowadźmy pionową  $\delta\chi$  i od punktu  $\varepsilon$  na linii  $\varepsilon O$  odetnijmy  $\varepsilon\eta = \frac{b^2}{a^2} \times x$ , następnie połączmy punkt  $\eta$  z punktem  $\delta$  i przez ten ostatni wykreślmy  $\delta M$  prostopadle do normalnej  $\delta\eta$ . Prosta tak otrzymana będzie właśnie styczną szukaną.

Widzimy więc, że wykreślenie stycznej do krzywej XEV odbywa się ze ścisłością matematyczną.

Dla wykreślenia stycznych do krzywej HE'U wykreślamy krzywą pomocniczą BTT<sub>1</sub>, której rzędne liczone od BJ są proporcjonalne do ciężarów bryły sklepieniowej, zawartej między kluczem i pionową przechodzącą przez punkt odpowiedni. Długości są przedstawione na skale użytej do wykreslenia wieloboku pierwszego rzędu, i tak na przykład rzędna  $f_{1/2} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ . Dla otrzymania stycznej do krzywej HE'U w punkcie  $\gamma$ , poprowadźmy przez ten ostatni pionową  $\gamma_1\gamma_2$ , a przez punkt  $\gamma_2$  poziomą  $\gamma_2\gamma_3$  do przecięcia się z wielobokiem pierwszego rzędu BY, następnie przez punkt  $\gamma$  prowadźmy  $\gamma M$  równoległe do promienia R $\gamma_3$ . Na zasadzie własności wieloboków pierwszego i drugiego rzędu linia  $\gamma M$  będzie styczną do krzywej HE'U.

Linie  $\delta M$  i  $\gamma M$  będąc stycznymi do krzywych XEV i HE'U posiadają jeszcze i tę własność że punkta ich zetknięcia się leżą na jednej i tej samej pionowej  $\gamma_1\gamma_2$ , a zatem punkt M należy do krzywej MKL.

Według naszego zdania sposób wyżej opisany, łącząc dokładność z łatwością wykonania, zdaje się odpowiadać w zupełności wszelkim wymaganiom.

UWAGA. — Przy wyborze parcia BR musimy się starać o wielkość przybliżoną do parcia rzeczywistego BQ, w tym celu uważamy za stosowne podać pewne prawidła i uwagi praktyczne, używane do tychczas przy projektowaniu sklepień.

## CZEŚĆ IV

### DODATEK.

#### Wzory empiryczne służące do obliczenia grubości zwornika w kluczu sklepienia.

W następujących formułach litery wprowadzone będą miały następujące znaczenie

$e$  = grubość zwrotnika w kluczu,

$f$  = strzałka sklepienia,

$D$  = otwór sklepienia,

$R$  = promień łuku podniebienia w sklepieniach o łukach kołowym,

$H$  = Wysokość nasypu po nad grzbietem sklepienia.

#### 1. Wzór Perronet'a dla sklepień półkołowych

$$e = 0,0347 D + 0^m,325.$$

Dla otworów przekraczających 30<sup>m</sup>, powyższy wzór daje wymiary dla zwornika kluczowego co-  
kolwiek za wielkie.

#### 2. Wzory Dejardin'a :

a) Dla sklepień półkołowych

$$e = 0,05D + 0^m,30.$$

b) Dla sklepień o łukach kołowych

$$e = 0,050 R + 0^m,30 \text{ przy otworze } 60^\circ$$

$$e = 0,035 R + 0^m,30 \quad \text{«} \quad 50^\circ$$

$$e = 0,020 R + 0^m,30 \quad \text{«} \quad 40^\circ$$

c) Dla sklepień koszykowych o zniżeniu 1/3 :

$$e = 0,07R_1 + 0^m,30. — R_1 = \text{promień krzywizny podniebienia w kluczu sklepienia.}$$

#### 3. Wzór p. Léveillé'ego :

$$e = 0^m,33 + \frac{1}{30} D.$$

#### 4. Wzór P. Lesguiller'a :

$$e = 0,2\sqrt{D} + 0^m,40.$$

5. Wzór używany w Austrii i Rosyji :

$$e = 0,43 + \frac{R}{40} + \frac{H}{50}$$

Ten wzór uwzględnia wysokość nasypu :

6. Wzór p. Culmann'a z Zurichu :

$$e = 0^m,30 + 0,025 D + 0,02 R.$$

7. Wzór p. Minard wyprowadzony z praktycznych danych podanych w dziele tegoż inżyniera, (*Navigation des rivières et des canaux*, str. 352. Paris 1841)

$$e = 0,65 + (D - 3^m,00)0,06.$$

Wzór ten służy do obliczania grubości w kluczu dla wodociągów, w których głębokość wody równa się 1<sup>m</sup>,65.

Dla  $D < 3^m,00$  grubość zwornika w kluczu ma się równać 0<sup>m</sup>,60.

## PRAWIDŁA PRAKTYCZNE, KTÓRYCH SIĘ TRZYMAĆ NALEŻY PRZY PROJEKTOWANIU SKLEPIEŃ.

(Przepisy te są wyjęte z kursu p. Desnoyer-Croizette'a prof. Szkoły Paryskiej Dróg i Mostów.)

### I. Sklepienia półkołowe.

1. Grubość zwornika w kluczu oblicza się za pomocą formuły :

$$e = 0,15 + 0,15\sqrt{2R},$$

gdzie R oznacza promień sklepienia.

2. Grubość sklepienia mierzona wzdłuż stosugi odpowiadającej połowie wysokości strzałki. (promienia) ma być równą podwójnej grubości zwornika kluczowego.

3. Grzbiet sklepienia ma być łukiem koła przechodzącego przez dwa punkta wyżej oznaczone.

4. Równanie empiryczne wykazujące zależność między otworem sklepienia  $x$  iarciem w kluczu  $y$  ma być :

a) Dla pełnego bębena,

$$y = 750x + 74,75x^{1,89},$$

b) Dla bębena ulżonego,

$$y = 869x + 64,50x^{1,84}$$

(Patrz tablice I, II i III).

### II. — Sklepienia o łukach kołowych.

1. Grubość zwornika w kluczu oblicza się za pomocą formuły :

$$e = 0,15 + 0,15\sqrt{2R},$$

gdzie R oznacza promień podniebienia.



2. Grubość sklepienia mierzona wzdłuż stosugi oporowej winna być równą :

a. Dla sklepień o zniżeniu  $1/4$  . . . . .  $1,80e$

b. Dla sklepień o zniżeniu  $1/6$  . . . . .  $1,40e$

c. Dla sklepień o zniżeniu  $1/8$  . . . . .  $1,25e$

d. Dla sklepień o zniżeniu  $1/10$  . . . . .  $1,15e$

e. Dla sklepień o zniżeniu  $1/12$  . . . . .  $1,10e$

3. Grzbiet sklepienia winien być łukiem koła przechodzącego przez dwa punkta wyżej oznaczone.

4. Dla wyznaczenia parcia w kluczu patrz tablice IV i V.

#### Sklepienia eliptyczne.

1. Grubość zwornika w kluczu oblicza się za pomocą formuły :

$$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{2R},$$

gdzie  $R$  oznacza promień koła o tém samym zniżeniu co dana elipsa.

2. Grubość sklepienia mierzona wzdłuż stosugi odpowiadającej połowie wysokości strzałki winna być równaną :

a. Dla elipsy o zniżeniu  $1/3$  . . . . .  $2,00e$

b. Dla elipsy o zniżeniu  $1/4$  . . . . .  $1,80e$

c. Dla elipsy o zniżeniu  $1/5$  . . . . .  $1,80e$

3. Grzbiet sklepienia winien być elipsą przechodzącą przez dwa punkta wyżej oznaczone.

4. Równania empiryczne wykazujące zależność między otworem sklepienia  $x$  i parciem w kluczu  $y$  są dla bębena pełnego :

a. Przy zniżeniu  $1/3$

$$y = 1145 x + 100,35 x^{1,55}$$

b. Przy zniżeniu  $1/4$

$$y = 1350 x + 161,00 x^{1,75}$$

c. Przy zniżeniu  $1/5$

$$y = 1360 x + 263,70 x^{1,71}$$

(Patrz tablice VI i VII.)

Tablica I (Sklepienia półkotłowe).

Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień ukończonych, po odjęciu krążyn.

Otwór sklepienia	Grubość w kluczu	Wysokość muru ponad grzbietem klucza	SKLEPIENIA Z BĘBENKIEM PEŁNYM				SKLEPIENIA Z BĘBENKIEM ULŻONYM			
			Kąt stosugi naderwania	Parcie poziome	Parcie średnie w kluczu	Parcie średnie w stosudze naderwania	Kąt stosugi naderwania	Parcie poziome	Parcie średnie w kluczu	Parcie średnie w stosudze naderwania
10	0,62	0,40	32°	13,340	2,15	2,31	32°	12,340	1,99	1,96
20	0,82	0,40	31°	36,720	4,48	4,99	32°	31,700	3,87	3,76
30	0,97	0,40	28°	69,000	7,11	8,49	32°, 5'	54,740	5,64	5,28
40	1,10	0,40	27°	109,880	9,99	12,30	33°, 40'	83,650	7,79	7,08
50	1,21	0,40	26°	159,020	13,14	16,57	33	118,190	9,77	8,99
60	1,31	0,40	25°	216,360	16,52	21,26	33°, 45'	159,190	12,17	11,32
70	1,40	0,40	24°	281,720	20,12	26,39	33°, 52'	205,250	14,66	13,53
80	1,49	0,40	23°	355,080	23,83	31,95	33°, 58'	248,900	16,70	15,31
90	1,57	0,40	23°	436,270	27,79	37,34	33°, 54'	297,840	18,97	17,48
100	1,65	0,40	22°	525,220	31,83	43,64	33°, 47'	352,250	21,35	19,83

Tablica II (Sklepienia półkotłowe).

Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień w chwili odjęcia krążyn.

Otwór sklepienia	Kąt stosugi naderwania	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE	
			w kluczu	w stosudze naderwania
20 <sup>m</sup>	38°	19,200 <sup>k</sup>	2 <sup>k</sup> ,34	2 <sup>k</sup> ,12
60 <sup>m</sup>	40°, 30'	91,970	7,02	6,24
100 <sup>m</sup>	45°, 35'	193,580	11,78	10,38

Tablica III (Sklepienia półkotłowe).

Tablica porównawcza dla mostów pod drogi zwyczajne i pod koleje żelazne.

Otwór Sklepienia	Grubość w kluczu	DLA MOSTÓW POD DROGI ZWYCZAJNE				DLA MOSTÓW POD KOLEJE ŻELAZNE			
		Wysokość uwzględniająca obciążenie		Parcie średnie w kluczu		Wysokość uwzględniająca obciążenie		Parcie średnie w kluczu	
		Stale	Stale i przypadkowe	Stale	Stale i przypadkowe	Stale	Stale i przypadkowe	Stale	Stale i przypadkowe
20	0,82	0,40	0,62	3,87	4,25	1,00	1,55	4,90	5,87
60	1,31	0,40	0,62	12,17	21,89	1,00	1,55	14,13	15,93
100	1,65	0,40	0,62	21,35	22,28	1,00	1,55	23,92	26,29

**Tablica IV** (Sklepienia o łukach kołowych).

Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień ukończonych o pełnym bębenu.

Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia D	Grubość w kluczu e	Współczynnik grubości sklepienia dla stosunku oporowej	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE		Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia D	Grubość w kluczu e	Współczynnik grubości sklepienia dla stosunku oporowej	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE		
					w kluczu	W stosunku do oporowej						w kluczu	W stosunku do oporowej	
1/4	10 <sup>m</sup>	0,68	1,80	18,310	2,69	2,83	1/8	10 <sup>m</sup>	0,84	1,25	30,350	3,61	3,54	
	20	0,90	id.	50,950	5,66	6,11		20	1,13	id.	85,860	7,60	7,43	
	30	1,07	id.	95,620	8,94	9,84		30	1,35	id.	159,630	11,82	11,60	
	40	1,24	id.	152,160	12,57	14,01		40	1,53	id.	249,880	16,33	16,08	
	50	1,34	id.	220,540	16,46	18,52		50	1,70	id.	355,430	20,91	20,65	
	60	1,45	id.	299,160	20,63	23,40		60	1,84	id.	477,140	25,93	25,67	
	70	1,55	id.	388,010	25,03	28,60		70	1,98	id.	613,810	31,00	30,77	
	80	1,65	id.	489,340	29,66	34,01		1/10	10	0,92	1,15	36,620	3,98	3,98
	90	1,74	id.	600,050	34,49	39,75			20	1,23	id.	102,390	8,32	8,28
1/6	10	0,76	1,40	24,620	3,24	3,21	30		1,47	id.	191,300	13,01	12,93	
	20	1,02	id.	68,210	6,69	6,67	40		1,68	id.	299,590	17,83	17,74	
	30	1,21	id.	127,490	10,54	10,65	50		1,86	id.	424,190	22,81	22,74	
	40	1,37	id.	200,690	14,65	14,87	60		2,02	id.	566,750	28,06	28,01	
	50	1,52	id.	286,750	18,86	19,32	1/12		10	0,98	1,10	41,400	4,22	4,26
	60	1,65	id.	388,780	23,56	24,22			20	1,33	id.	118,820	8,93	8,98
	70	1,77	id.	501,000	28,30	29,25			30	1,59	id.	221,980	13,96	13,97
	80	1,87	id.	626,160	33,31	34,63		40	1,81	id.	347,380	19,19	19,27	
						50		2,01	id.	494,193	24,59	24,63		

**Tablica V** (Sklepienia o łukach kołowych).

Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień ukończonych o bębenu łożonym.

Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia	Grubość w kluczu	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE	
				w kluczu	w stosunku do oporowej
1/4	50 <sup>m</sup>	1,34 <sup>m</sup>	180,600 kilog.	13 <sup>k</sup> ,50	13 <sup>k</sup> ,25
	90	1,74	458,712	26,36	26,53
1/6	50	1,52	254,520	16,74	15,89
	80	1,88	523,728	27,85	26,49
1/8	50	1,70	317,544	18,67	17,53
	70	1,98	524,976	26,51	24,92
1/10	50	1,86	388,584	20,89	20,26
	60	2,02	509,736	25,23	24,44
1/12	50	2,01	468,840	23,32	22,98

Tablica VI (Sklepienia eliptyczne).

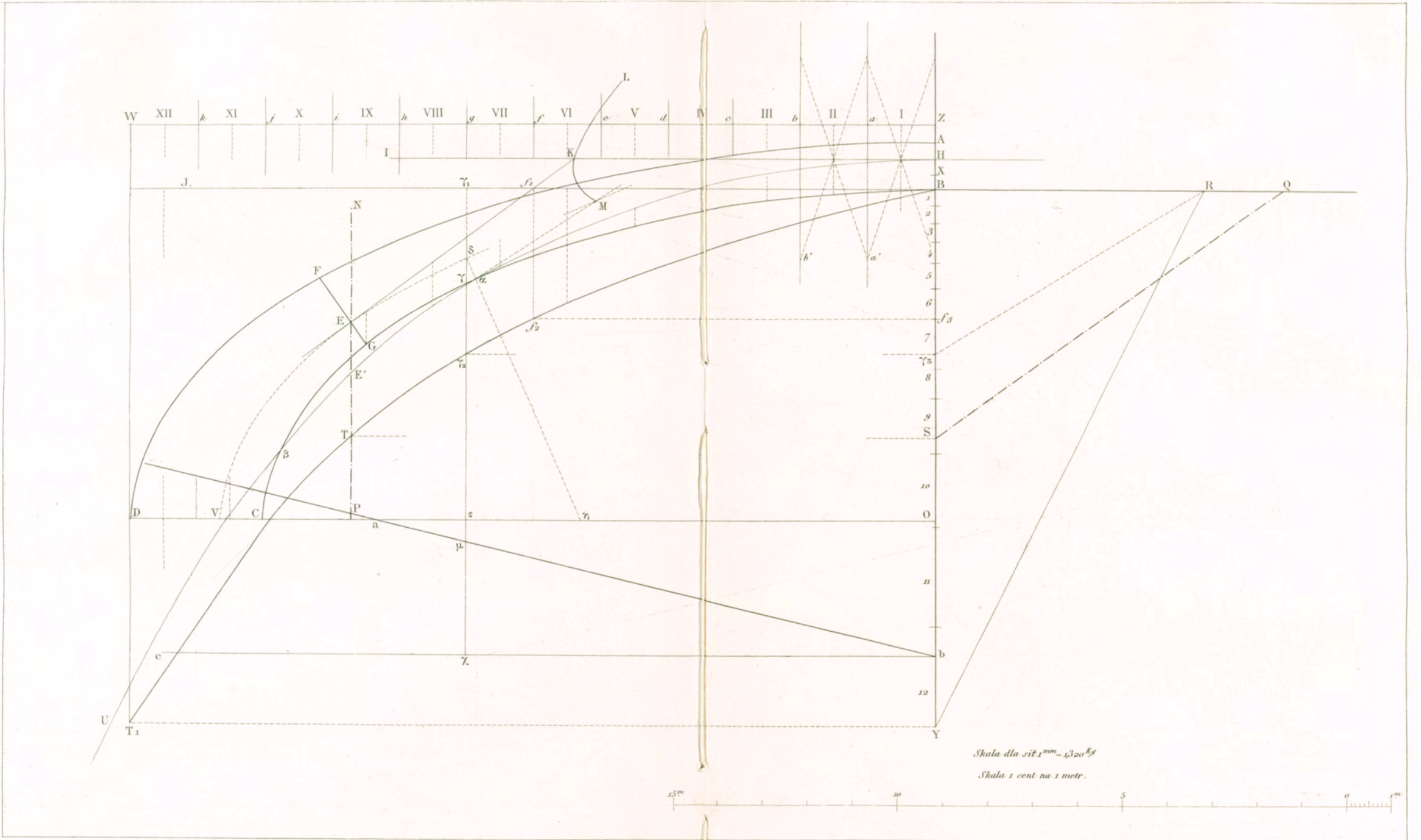
Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień ukończonych o pełnym bębenu.

Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia D	Grubość w kluczu e	Współczynnik grubości dla stosugi na połowie strzałki	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE		Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia D	Grubość w kluczu	Współczynnik grubości dla stosugi na połowie strzałki	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE		
					w kluczu	W stosudze naderwania						w kluczu	W stosudze naderwania	
1/3	10	0,64	2,00	18,550	2,89	2,42	1/4	40	1,21	1,80	168,420	13,92	10,14	
	20	0,85	id.	48,510	5,71	4,32		50	1,34	id.	238,070	17,77	13,14	
	30	1,00	id.	88,570	8,86	6,78		60	1,45	id.	316,470	21,83	16,22	
	40	1,14	id.	138,130	12,12	9,52		70	1,55	id.	404,310	26,09	19,56	
	50	1,25	id.	196,760	15,74	12,63		80	1,65	id.	500,940	30,36	23,22	
	60	1,36	id.	264,180	19,42	16,47		90	1,74	id.	606,090	34,83	26,65	
	70	1,46	id.	340,130	23,31	19,99		1/5	10	0,72	1,60	27,120	3,77	2,80
	80	1,55	id.	424,440	27,38	24,10			20	0,96	id.	71,450	7,44	5,58
	90	1,63	id.	516,920	31,71	28,01			30	1,14	id.	129,310	11,34	8,18
	100	1,71	id.	617,440	36,11	32,07			40	1,29	id.	199,160	15,44	11,53
1/4	10	0,68	1,80	23,200	3,41	2,41	50		1,43	id.	280,010	19,58	14,71	
	20	0,90	id.	60,320	6,70	4,81	60		1,55	id.	371,170	23,95	18,02	
	30	1,07	id.	109,070	10,19	7,39	70		1,66	id.	472,100	28,44	21,49	
							80		1,76	id.	582,380	33,09	25,11	

Tablica VII (Sklepienia eliptyczne).

Tablica ta daje nam wypadki dla sklepień ukończonych o bębenu ulżonym.

Zniżenie $\frac{f}{D}$	Otwór sklepienia	Grubość w kluczu	Parcie poziome	PARCIE ŚREDNIE	
				w kluczu	w stosudze naderwania
1/3	50 <sup>m</sup>	1,25	156,240 kilog.	12,50	8,69
	70	1,46	276,000	18,90	13,51
	90	1,63	387,600	23,78	18,10
1/4	50	1,34	198,240	14,79	9,81
	70	1,55	331,920	21,41	13,53
	90	1,74	496,800	28,55	19,13
1/5	50	1,43	244,440	17,04	12,38
	80	1,76	490,800	27,89	19,96



Skala dla sił 1<sup>mm</sup> - 1320<sup>Kg</sup>  
Skala 1 cent na 1 metr.

