

Praca habilitacyjna
Zbigniew F. Baczyński

MODELE MATEMATYCZNE
ELASTOMECHANIKI CIAŁ WARSTWOWYCH

15/1985

P. 269



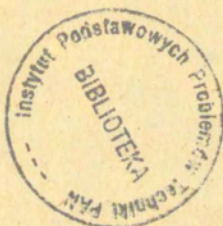
WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 marca 1985 r.

56934



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 190 egz. Ark.wyd. 7,5 Ark.druk. 12,5
Oddano do drukarni w marcu 1985 r.
Nr zamówienia 175/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8



MODELE MATEMATYCZNE ELASTOMECHANIKI CIAŁ WARSTWOWYCH

P. 269

1. Wprowadzenie

Aktualne problemy geofizyki, geologii, górnictwa, a także rozwój nowoczesnych konstrukcji inżynierskich, i szerokie zastosowania materiałów kompozytowych, wiążą się ściśle z mechaniką ośrodków materialnych. A w tym, z elastomechaniką ośrodków i konstrukcji warstwowych, o różnych własnościach mechanicznych, w ogólności niejednorodnych i anizotropowych. Ten fakt inspiruje badaczy do poszukiwania coraz to doskonalszych teorii i metod badawczych dla opisu różnych procesów, i rozwiązywania praktycznych problemów w wymienionych dziedzinach zastosowań. Z punktu widzenia teorii, formułowanie modeli matematycznych dla różnych ośrodków i konstrukcji warstwowych powinno być wspólne i mieć charakter uniwersalny, niezależnie od późniejszych zastosowań, a więc o tego, czy model ma służyć badaniu propagacji fal w ośrodku geologicznym, czy badaniu problemu dynamicznego konstrukcji inżynierskiej, czy też poszukiwaniu optymalnej geometrii wewnętrznej materiału kompozytowego (warstwowego), o pożądanych własnościach. Jeśli tak syntetycznie spojrzeć na tą problematykę, którą dalej nazywać będziemy elastomechaniką ciał warstwowych, to spośród dotychczasowych koncepcji i sposobów konstruowania modeli elastomechaniki takich ciał można wyróżnić następujące:

(I). Podejście bezpośrednie ("direct approach"), oparte na teorii klasycznego trójwymiarowego kontinuum, oraz założeniu odpowiednich warunków ciągłości dla wektora przemieszczenia i wektora naprężenia na powierzchniach wewnętrznych ciała warstwowego. Podejście to prezentują w swoich pracach m.in.:

MARGUERRE [1], BURMISTER [2], LUR'E [3], PARIÁ [4], EWING, JARDETZKY, PRESS [5], VLASOV [6], KUPRADZE [7], BREKHOVSKIKH [8],

GUSEIN-ZADE [9], BUFLER [10], NIKISHIN, SZAPIRO [11], ERINGEN, SUHUBI [12], NOVOTNY [13], VOROVICH, KADOMTSEV, USTINOV [14]. To klasyczne podejście, może być stosowane do modelowania procesów elastodynamiki w najprostrzych przypadkach. Jednakże w przypadku bardziej złożonych problemów i struktur ciał warstwowych oraz dużej liczby warstw, staje się ono niezręczne i pracochłonne.

(II). Teorie efektywnych modułów ("effective modulus theories"), w których ciała warstwowe modeluje się jako jednorodne i na ogół anizotropowe kontinua, których makroskopowe stałe materiałowe są wyrażone za pomocą parametrów geometrycznych i materiałowych poszczególnych warstw ciała. Teorie tego typu rozwinęli m.in.: MARCH, NORRIS, SMITH, KUENZI [15], AMBARTSUMYAN [16], REISSNER [17], HOFF [18], RIZNICHENKO [19], KOROLEV [20], POSTMA [21], WHITE, ANGONA [22], RYTOV [23], LEKHNITSKII [24], STAVSKY [25], DONG, PISTER, TAYLOR [26], BOLOTIN [27], VOROVICH [28]. Okazuje się, że teorie efektywnych modułów dają zadowalające wyniki w analizie problemów elastostatyki. Jednakże modelowanie procesów elastodynamiki, wydaje się być wątpliwe. Już bowiem, w przypadku swobodnych drgań harmoniczných ciała laminowanego otrzymuje się, w ramach tych teorii, stałe prędkości grupowe oraz giną wyższe prędkości drgań i dyspersja, co jest sprzeczne z wynikami rozwiązania odpowiedniego problemu brzegowo-początkowego klasycznej teorii sprężystości (por. np. [29]).

(III). Teorie kontinuum z mikrostrukturą lub teorie kontinuum strukturalnego, na które składają się m.in.: (i) teoria materiałów mikromorficznych, którą zaproponował ERINGEN, SUHUBI [30]; (ii) teoria materiałów sprężystych z naprężeniami momentowymi, prezentowana przez MINDLINA, TIERSTENA, MEDICKA [31-33]; (iii) teoria efektywnych sztywności ("effective stiffness theory"), którą wprowadzili ACHENBACH, BEDFORD, DRUMHELLER, GROT, HERRMANN, SUN [34-38]; (iv) teoria kontinuum dyfuzyjnego ("diffusing continuum theory") zaproponowana przez BEDFORDA, STERNA, [39-41]; (v) teoria kontinuumów współdziałających ("theory of interacting continua"), którą sformułowali HEGEMIER, NAYFEH, BACHE [42-44]; (vi) teoria efektywnej dyspersji ("effective dispersion theory"), zaproponowana przez HERRMANNA, KAULA, DELPHA [45-46]; (vii) teoria materiałów kompozytowych jako mieszanin, którą rozwijają Mc NIVEN, MENGI [47-49]. Wyżej wymienione teorie kontynu-

alne są teoriami aproksymacyjnymi, w których materiały kompozytowe, a w tym ciała warstwowe, traktuje się jak kontinua z wewnętrzną mikrostrukturą, która ma w pewien uproszczony sposób uwzględniać geometrię wewnętrzną uwarstwienia ciała, zmienne gęstości i anizotropię, a także wzajemne oddziaływania warstw. Teorie tego typu rokują najbardziej obiecującą drogę badań w elastomechanice ciał warstwowych, bowiem dają dobrą zgodność wyników rozwiązań z tymi z teorii klasycznej; przynajmniej w tych przykładach, które są egemplifikacją proponowanych teorii. Niemniej jednak, sfera propozycji modelowych w ramach tego podejścia ogranicza się głównie do teorii liniowych, i szczególnych ciał warstwowych. Jak np. do materiałów laminowanych, o płaskiej strukturze warstwowej lub płaskiej strukturze periodycznej, gdzie warunek "cienkości" warstw wobec grubości ciała warstwowe- go jest założeniem fundamentalnym.

(IV). Podejście dyskretno-ciągłe, prezentowane w pracach autora [50-61], bazujące na teorii nieklasycznego trójwymiarowe- go kontinuum z więzami wewnętrznymi, zaproponowanej i rozwinię- tej przez WOŹNIAKA [62-67].

Ten syntetyczny przegląd znanych sposobów konstruowania modeli elastomechaniki ciał warstwowych i cytowana literatura, nie wyczerpuje oczywiście szerokiej problematyki obejmującej, metody obliczeniowe oraz analizę problemów szczegółowych, którym poświęcone jest bogate piśmiennictwo. Pewien pogląd na tą proble- matykę dają: przegląd bibliograficzny KOLCHINA i FAVERMANA [68], prace przeglądowe, AMBARTSUMYANA [69], HABIBA [70-72], GRIGOLUKA i KOGANA [73], BERTA i FRANCISA [74]; oraz monografie PLANTEMA'Y ASHTONA i WHITNEY' A [76], HERRMANNA i ACHENBACHA [77], LEE' A [78], SENDECKYJ'EGO [79], BOLOTINA i NOVICHKOVA [80], oraz CHRISTENSENA [81].

Pewne niedoskonałości i ograniczenia dotychczasowych modeli skonstruowanych w ramach podejścia (I), (II) i (III), a także istniejące wciąż otwarte problemy, natury poznawczej i inżynier- skiej, były motywacją do podjęcia przez autora, przed kilku laty, badań w dziedzinie elastomechaniki ciał warstwowych, których wyniki były częściowo publikowane [50-61]. Niniejsza rozprawa jest syntetycznym opracowaniem tych wyników badań, a także ich rozwinięciem i uogólnieniem.

Celem niniejszej rozprawy jest podanie metody konstruowania modeli matematycznych elastomechaniki ciał warstwowych o dowolnej geometrii wewnętrznej i skończonej liczbie warstw, w ogólności niejednorodnych i anizotropowych. Następnie, skonstruowanie pewnej klasy modeli aproksymacyjnych czyli wariantów teorii dwuwymiarowych, opisujących trójwymiarowe ciała, na różnych poziomach ogólności teorii, poczynając od nieliniowej teorii dużych odkształceń i dowolnej struktury warstw, a kończąc na liniowej teorii małych odkształceń i płaskiej strukturze warstw; ściślej w sensie teorii nieklasycznego trójwymiarowego kontinuum z więzami wewnętrznymi. A w szczególnym przypadku, podanie dynamicznej teorii grubych powłok, płyt i tarcz; w których nie zakłada się, a priori, stosunku grubości warstwy do pozostałych wymiarów ciała jako wielkości małej. Potem, przedyskutowanie poprawności konstrukcji modelowych; sformułowanie problemów brzegowo-początkowych i brzegowych, oraz podanie niektórych twierdzeń elastodynamiki ciał warstwowych. W końcu, egzemplifikacja proponowanych modeli w przypadku dwóch problemów ogólnych: problemu elastostatyki grubej powłoki walcowej, i problemu elastodynamiki grubej warstwy płaskiej.

Przejdziemy teraz do krótkiego omówienia treści poszczególnych rozdziałów rozprawy. Rozdział 1 zawiera motywację podjęcia przez autora badań nad problematyką ciał warstwowych, omówienie dytychczasowych koncepcji i sposobów formułowania modeli ośrodków i konstrukcji warstwowych, określa cel rozprawy i jej krótką charakterystykę. W rozdziale 2 podano metodę konstruowania modeli elastodynamiki ciał warstwowych przy ogólnych założeniach. Po wprowadzeniu definicji i założeń, wychodząc ze znanych aksjomatów teorii nieliniowego trójwymiarowego kontinuum z więzami wewnętrznymi, i właściwego tej teorii formalizmu, wyprowadzono podstawowe równania charakteryzujące modele elastomechaniki ciał warstwowych. Ogólność konstrukcji modelowych polega m.in.: na ogólności założeń dotyczących więzów kinematycznych, równań konstytutywnych dla materiałów tworzących ciała warstwowe, geometrii wewnętrznej ciała warstwowego oraz wyboru podstawowych niewiadomych (uogólnionych współrzędnych). Rozdział 3 jest kontynuacją poprzedniego i podaje teorię dużych odkształceń sprężystych ciał warstwowych, gdzie sprecyzowano bliżej ciąg podstawowych niewiadomych i postać więzów kinematycznych

narzuconych na funkcję deformacji (ruchu). Wynikiem rozważań są tutaj podstawowe równania, które charakteryzują model elastodynamiki ciał o dowolnej strukturze warstwowej z więzami kinematycznymi w postaci liniowej. W rozdziale 4 transformuje się podstawowe równania elastodynamiki, z kartezjańskiego do konwekcyjnego układu współrzędnych krzywoliniowych. Ten podstawowy układ równań tworzą: równania ruchu i kinetyczne warunki brzegowe w terminach uogólnionych sił, równania konstytutywne i równania definicyjne dla uogólnionych sił, równania dodatkowych więzów wraz z warunkiem idealności dla uogólnionych współrzędnych; wszystkie określone na powierzchniach ruchomych w konfiguracji aktualnej. Rozdział 5 podaje sposób wyprowadzenia podstawowych równań teorii dużych odkształceń sprężystych w postaci przyrostowej. Założono tutaj, że dany jest pewien ustalony stan, względem którego obliczono przyrosty funkcji deformacji, tensora odkształcenia i tensora naprężenia. Zakładając następnie, że te przyrosty są małe, otrzymano równania konstytutywne w postaci przyrostowej. Pełne sformułowanie przyrostowe otrzymuje się z równań rozdziału 3 i 4. W rozdziale 6 przedstawiono teorię małych odkształceń sprężystych ciał warstwowych o dowolnej strukturze wewnętrznej. Wprowadzono pewien stan naturalny, względem którego określono przyrosty tensora odkształcenia Greena i miary odkształcenia Greena-Saint Venanta. Korzystając z równań w postaci przyrostowej, otrzymano równania konstytutywne teorii małych odkształceń. Pozostałe równania tej teorii otrzymuje się bezpośrednio z odpowiednich równań pełnej teorii nieliniowej (z rozdziału 3 i 4). Rozdział 7 zawiera nieliniową teorię grubych powłok sprężystych jako szczególny przypadek elastodynamiki ciał warstwowych. Opisuje ona pewną klasę problemów brzegowo-początkowych z więzami kinematycznymi w postaci ogólniejszej niż hipoteza Reissnera. Podano również formalną procedurę rozwiązania problemu brzegowo-początkowego, oraz sposób oszacowania dokładności rozwiązania modelowego z punktu widzenia teorii klasycznego trójwymiarowego kontinuum. W rozdziale 8 podano egzemplifikację nieliniowej teorii powłok, zawierającą analizę problemu elastostatyki grubej powłoki walcowej, gdzie szczególny nacisk położono na oszacowanie dokładności rozwiązania problemu brzegowego. Dla nieskończonej długości powłoki walcowej,

jednorodnej i ortotropowej, poddanej złożonej deformacji o charakterze ścinającym, znaleziono rozwiązanie problemu z więzami, podając m.in. składowe tensora naprężenia, oraz składowe objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów. Przedyskutowano to rozwiązanie również w przypadku powłoki jednorodnej i izotropowej, oraz w przypadku teorii liniowej. Oszacowano wreszcie, dokładność rozwiązania modelowego problemu brzegowego, na podstawie wprowadzonego wcześniej kryterium i proponowanych norm w przestrzeni sił/obciążeń. Rozdział 9 zawiera linearyzację podstawowych równań teorii małych odkształceń wyprowadzonych w rozdziale 6 i wcześniej, przy założeniu, że stanem bazowym dla tej linearyzacji jest stan naturalny. Otrzymany układ równań charakteryzuje model liniowej elastodynamiki ciał warstwowych o dowolnej geometrii wewnętrznej. W rozdziale 10 dyskutuje się liniową teorię ciał jedno- i wielowarstwowych o płaskiej strukturze. Wszystkie podstawowe równania tej teorii, wyprowadzono z odpowiednich równań w postaci zlinearyzowanej, zakładając, że konfiguracja odniesienia pokrywa się z konfiguracją stanu naturalnego. Rozważono przy tym parametryzację obszaru ciała za pomocą układu współrzędnych krzywoliniowych normalnych, a następnie za pomocą układu współrzędnych kartezjańskich. Dla łatwiejszej interpretacji wytrzymałościowej uogólnionych sił przekrojowych, zaproponowano wprowadzenie nowych wielkości, a następnie dokonano dekompozycji podstawowych równań. Doprowadziło to do nowego układu równań pozwalających na formułowanie naprężeniowych problemów elastomechaniki ciał warstwowych. Rozdział 11 jest ściśle związany z poprzednim i przedstawia sposób formułowania problemów brzegowo-początkowych w liniowej elastodynamice ciał warstwowych. Omówiono istotę proponowanego modelu, polegającą m.in. na przejściu od równań trójwymiarowego kontinuum z więzami do równań dwuwymiarowych, a następnie na odtworzeniu trójwymiarowego procesu elastodynamiki. Przedyskutowano układ dwuwymiarowych równań pola pod kątem zupełności sformułowania problemu brzegowo-początkowego. W rozdziale 12 podano definicje dla dwuwymiarowych procesów elastodynamiki ciał warstwowych, charakterystykę naprężeniowego problemu brzegowo-początkowego, oraz dowiedziono niektóre twierdzenia. W szczególności podano twierdzenie o mocy i energii, pewne twierdzenia pomocnicze, i w końcu twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania naprężeni-

wego problemu brzegowo-początkowego. Wprowadzono przy tym definicję i założenie o dodatniej pół-określoności tensora sztywności związanego z dowolną warstwą i ciałem warstwowym.

Rozdział 13 zawiera analizę warunku dodatniej pół-określoności tensora sztywności, oraz ograniczeń dla stałych materiałowych. Wykazano, że warunek ten jest spełniony dla każdej warstwy jednorodnej i izotropowej, przy klasycznych ograniczeniach dla modułów Lamé'go. Ten fakt implikuje dodatnią pół-określoność macierzy sztywności dla ciała warstwowego złożonego z warstw jednorodnych i izotropowych, a następnie odwracalność równań konstytutywnych. W rozdziale 14 podano wyprowadzenie przemieszczeniowych równań teorii liniowej w przemieszczeniach. Układ $25r+3$ równań pola dla ciała r -warstwowego zredukowano do $3(r+1)$ przemieszczeniowych równań ruchu typu Naviera, oraz do tyluż kinetycznych warunków brzegowych. Następnie, ten układ równań i warunków został zdekomponowany do dwóch niezależnych układów równań typu Kleina-Gordona, oraz do dwóch niezależnych układów kinetycznych warunków brzegowych. Te układy charakteryzują odpowiednio, uogólniony płaski proces symetryczny (tarczowy), i uogólniony płaski proces antysymetryczny (płytkowy). Rozdział 15 jest egzemplifikacją proponowanego modelu liniowej elastodynamiki i zawiera analizę problemu propagacji fal monochromatycznych w grubej warstwie płaskiej, oraz warunków propagacji. Rozpatrzono dwa niezależne procesy: płaski proces tarczowy i płaski proces płytkowy, w których zbadano możliwe postacie płaskich fal harmonicznych i wyznaczono ich prędkości propagacji.

W rozdziale 16 owówniono główne osiągnięcia, a także korzyści natury poznawczej i inżynierskiej. Wskazano na możliwości kontynuowania badań oraz wykorzystania proponowanych modeli do rozwiązywania praktycznych problemów w różnych dziedzinach.

2. Konstruowanie modeli ciał warstwowych metodą wieżów

Przedmiotem rozważań jest pewne trójwymiarowe ciało sprężyste B , złożone z części $B_{(a)}$, $a=1, \dots, r$, takie, że

$$(2.1) \quad B = \text{int} \sum_{a=1}^r B_{(a)}, \quad B_{(a)} \cap B_{(a+1)} = \emptyset, \quad a=1, \dots, r-1.$$

W toku rozważań utożsamiać będziemy ciało B z pewnym regularnym obszarem przestrzeni R^3 . ^{*/} Jeżeli

$$(2.2) \quad B = \Pi \times (H_{(1)}, H_{(r+1)}), \quad H_{(1)} \prec \dots \prec H_{(a)} \prec \dots \prec H_{(r+1)},$$

$$B_{(a)} = \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)}), \quad H_{(a)} \prec H_{(a+1)},$$

gdzie Π jest pewnym regularnym obszarem na płaszczyźnie Ox^1x^2 , to ciało B nazywać będziemy ciałem warstwowym, zaś $B_{(a)}$, $a=1, \dots, r$, warstwami tego ciała, (rys. 2.1). Zakładamy, że gęstość masy i stałe sprężystości są funkcjami ciągłymi wewnątrz warstw $B_{(a)}$ tzn., że mogą doznawać skoków jedynie na powierzchniach rozgraniczających warstwy ciała B . Celem opisu ruchu takiego ciała, oznaczamy przez $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ współrzędne punktów B , a ich położenie w chwili t przez

$$(2.3) \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in \mathbb{B}, \quad t \in T, \quad \text{**/}$$

gdzie $\underline{x}(\cdot, t)$, dla każdego ustalonego t , jest konfiguracją ciała B . ^{*/} Zakładamy, że $\underline{x}(\cdot, t)$ są ciągle w \mathbb{B} , a różniczkowalne w $B_{(a)}$, $a=1, \dots, r$, przy czym Jakobian

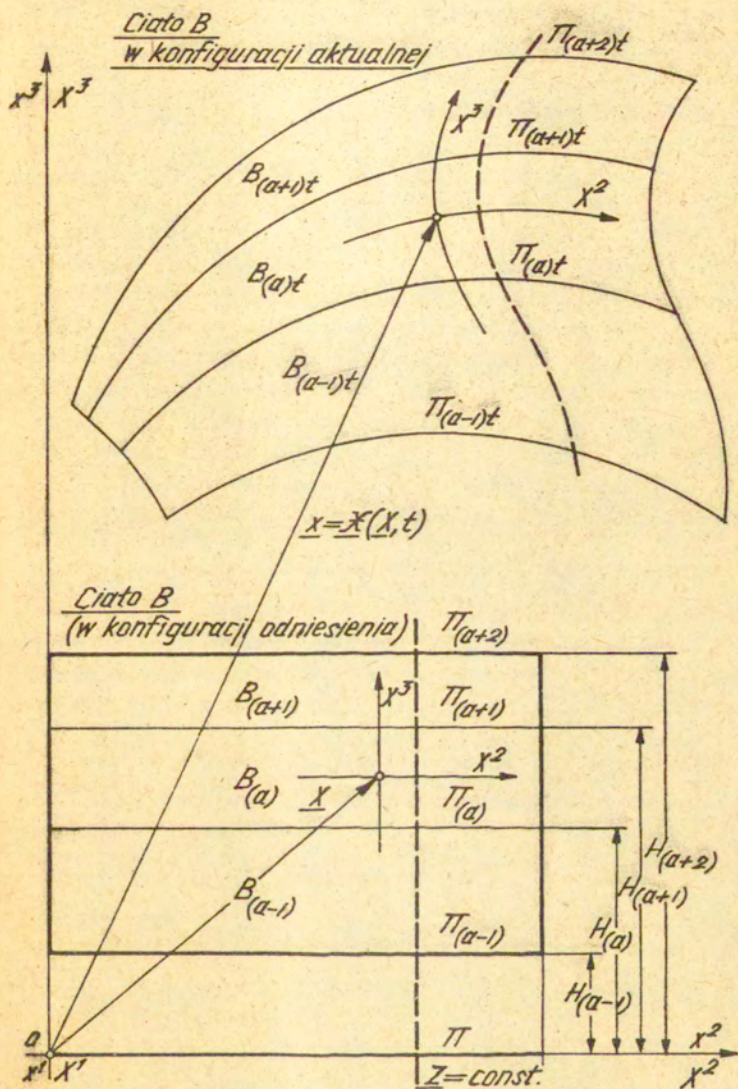
$$J = \det \underline{x}_{, \alpha}^k > 0, \quad \forall B_{(a)}, \quad a=1, \dots, r.$$

Stąd wynika, że pomiędzy współrzędnymi przestrzennymi $\underline{x} = (x^k)$, $k=1, 2, 3$, i współrzędnymi materialnymi $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha=1, 2, 3$, zachodzi różniczkowalny związek w każdej warstwie $B_{(a)}$ taki, że

$$x^k = x^k(\underline{X}, t), \quad X^\alpha = (x^{-1})^\alpha(\underline{x}, t), \quad t \in T.$$

^{*/} Taką definicję stosują m.in. MARSDEN i HUGHES w monografii [82].

^{**/} Pewien przedział czasowy T oznacza przedział postaci: $(-\alpha, t_0)$, $(0, t_0)$ lub $[0, t_0)$, gdzie $t_0 > 0$ może być również ∞ .



Rys. 2.1. Ciało warstwowe B (w konfiguracji odniesienia) i jego obszar B_t w konfiguracji aktualnej.

Obszar przestrzeni R^3 , w który ciało B jest odwzorowywane za pomocą (2.3), w każdej chwili t, oznaczamy przez B_t . Współrzędne $\underline{X} = (X^\alpha)$ są jednocześnie współrzędnymi konwekcyjnymi ciała B_t . Punkty obszaru Π oznaczamy przez $\underline{Z} = (X^1, X^2)$. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$(2.4) \quad \underline{X} = (\underline{Z}, X^3) \in B, \quad \underline{Z} = (X^1, X^2) \in \Pi, \quad X^3 \in (H_{(1)}, H_{(r+1)})$$

Powierzchnie $\Pi_{(a)} = \Pi \times \{H_{(a)}\}$, $a=1, \dots, r$, nazywamy powierzchniami podstawowymi warstw $B_{(a)}$. W dalszym ciągu tego rozdziału skoncentrujemy uwagę na rozważaniach dotyczących ruchu ciała warstwowego. Jako podstawowe założenia elastodynamiki takiego ciała przyjmujemy: (i) równania więzów kinematycznych (wewnętrznych i brzegowych), (ii) równania ruchu, (iii) kinetyczne warunki brzegowe, (iv) równania konstytutywne dla materiałów ciała warstwowego, (v) warunek idealności więzów, oraz (vi) definicje obciążeń [64]. Omówimy obecnie wymienione założenia.

(i) Równania więzów kinematycznych dla ciała B przyjmujemy w postaci

$$(2.5) \quad \dot{x}^k(\underline{X}, t) = \dot{x}^k(\underline{Z}, q(\underline{Z}, t)), \quad \underline{X} \in B, \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T;$$

gdzie $q(\cdot) = (q^A(\cdot))$, $A=1, \dots, N$, są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi, $\dot{x}^k = (\dot{x}^{*k})$, $k=1, 2, 3$, są funkcjami ciągłymi dla każdego $\underline{X} \in B = \Pi \times (H_{(1)}, H_{(r+1)})$, różniczkowalnymi dla każdego $\underline{X} \in B_{(a)} = \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)})$, oraz różniczkowalnymi względem $q(\underline{Z}, t)$. W naszych rozważaniach funkcje $\dot{x}^k(\cdot)$ są dane, zaś funkcje $q(\cdot)$ są podstawowymi niewiadomymi i nazywamy je współrzędnymi uogólnionymi [64]. Zakładamy również, że współrzędne uogólnione mogą spełniać dodatkowe warunki

$$(2.6) \quad \alpha_\nu(\underline{Z}, q, \nabla q, \dots, \nabla^N q) = 0, \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad \nu=1, \dots, N \leq N, \quad \neq /$$

$$\beta_u(\underline{Z}, t) = 0, \quad \underline{Z} \in \partial \Pi, \quad u=1, \dots, M \leq N;$$

gdzie $\alpha_\nu(\cdot)$, $\beta_u(\cdot)$ są funkcjami danymi, niezależnymi i różniczk-

$\neq /$ Symbol $\nabla^n q(\underline{Z}, t)$ oznacza gradienty współrzędnych uogólnionych tj. wielkości o składowych:

$q^A, K_1 \dots K_n = \partial^n q^A / \partial X^{K_1} \dots \partial X^{K_n}$, $\underline{X} \in \Pi \times (H_{(1)}, H_{(r+1)})$, $K_1, \dots, K_n = 1, \dots, n$;

kowalnymi w całej dziedzinie określoności. Warunek (2.6)₁ wyraża dodatkowe więzy narzucone na współrzędne uogólnione wewnątrz Π , podczas gdy warunek (2.6)₂ ogranicza te współrzędne na brzegu $\partial\Pi$. Znaczenie więzów (2.5) polega na tym, że kinematykę trójwymiarowego ciała warstwowego, którego ruch wyraża funkcja $\underline{x}(\cdot)$, opisuje się za pomocą funkcji $q(\cdot) = (q^A(\cdot))$, $A=1, \dots, N$, niezależnych od współrzędnej X^3 .

(ii) Równania ruchu każdej warstwy ciała postulujemy w postaci

$$(2.7) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) \Big|_{\beta} + \rho(\underline{x}, t) b^{\alpha}(\underline{x}, t) + r^{\alpha}(\underline{x}, t) = \\ = \rho(\underline{x}, t) [\underline{x}^{-1}(\underline{x}, t)]^{\alpha}_{,k} \underline{x}^k(\underline{x}, t),$$

$$T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) = T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t), \quad \rho = [\det \underline{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, t)]^{-1} \dot{\rho}(\underline{x}),$$

$$\underline{x} \in \cup B(a), \quad a=1, \dots, r, \quad t \in T,$$

gdzie $T^{\alpha\beta}(\cdot)$ oznacza składowe tensora naprężenia w układzie współrzędnych konwekcyjnych (przyjmujemy, że są to naprężenia wywołane reakcją materiału na proces deformacji ciała); pochodna kowariantna $(\cdot) \Big|_{\beta}$ obliczana jest w metryce ciała zdeformowanego B_t ; $\dot{\rho}(\cdot)$ i $\rho(\cdot)$ są gęstościami masy ciała w B i B_t ; $b^{\alpha}(\cdot)$ są składowymi sił masowych w B_t ; zaś $r^{\alpha}(\cdot)$ składowymi objętościowymi sił reakcji więzów w B_t . Istnienie sił reakcji więzów wynika z narzuconych na funkcję ruchu warunków (2.5) i (2.6).

(iii) Kinetyczne warunki brzegowe na powierzchniach ograniczających ciało warstwowe i rozgraniczających jego warstwy przyjmujemy w postaci

$$(2.8) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) n_{\beta}(\underline{x}, t) = p^{\alpha}(\underline{x}, t) + s^{\alpha}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial B, \quad t \in T,$$

$$[T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t)] n_{\beta}(\underline{x}, t) = s^{\alpha}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial B(a) \cap \partial B(a+1),$$

$$a=1, \dots, r-1,$$

gdzie $n_{\beta}(\cdot)$ w (2.8)₁ oznacza składowe wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do powierzchni ∂B_t , zaś $n_{\beta}(\cdot)$ w (2.8)₂

^{*/} Składowe tensora metrycznego $G_{\alpha\beta} = \underline{x}^k_{,\alpha} \underline{x}^l_{,\beta} \delta_{kl}$; $k, l=1, 2, 3$;
 $\alpha, \beta=1, 2, 3$.

oznacza składowe wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do powierzchni $\partial B_{(a)t} \cap \partial B_{(a+1)t}$, $a=1, \dots, r-1$; $p^\alpha(\cdot)$ są składowymi obciążenia powierzchniowego działającego na powierzchnię ∂B_t , zaś $s^\alpha(\cdot)$ są składowymi powierzchniowych sił reakcji więzów występujących na powierzchni $\partial B_{(a)t}$; symbol $[\cdot]$ w (2.8)₂ oznacza skok funkcji przy przejściu z warstwy do warstwy zgodnie z przyjętym kierunkiem $\underline{n}(\cdot)$. Należy podkreślić, że warunki podparcia ciała warstwowego na powierzchni brzegowej $\partial \Pi \times (H_{(1)}, H_{(r+1)})$ zostały już uwzględnione w kinematycznych warunkach brzegowych (2.6)₂.

(iv) Równania konstytutywne dla materiałów sprężystych tworzących ciało warstwowe przyjmujemy w każdej warstwie,

$$(2.9) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = \dot{T}^{\alpha\beta}(\underline{X}, \underline{G}), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad a=1, \dots, r,$$

gdzie $\dot{T}^{\alpha\beta}(\cdot)$ jest daną funkcją materiałową warstwy $B_{(a)}$, a jej argumentami są współrzędne materialne $\underline{X} = (X^\alpha)$, oraz składowe $G_{\alpha\beta} = \dot{x}^k_{,\alpha} \dot{x}^l_{,\beta} \delta_{kl}$, $\alpha, \beta=1, 2, 3$; $k, l=1, 2, 3$; tensora metrycznego kohwekcyjnego układu współrzędnych.

(v) Warunek idealności więzów postulujemy dla całego ciała warstwowego w postaci

$$(2.10) \quad \sum_{a=1}^r \int_{B_{(a)t}} \dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{X}, t) r^\alpha(\underline{X}, t) \delta \dot{x}_k(\underline{X}) dv + \int_{\cup \partial B_{(a)t}} \dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{X}, t) s^\alpha(\underline{X}, t) \delta \dot{x}_k(\underline{X}) ds = 0,$$

dla każdego $t \in T$, oraz dla wszystkich funkcji $\delta \dot{x}(\cdot)$ takich, że

$$(2.11) \quad \delta \dot{x}_k = \dot{x}^A_{Ak}(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \delta q^A(\underline{Z}), \quad \dot{x}^A_{Ak} = \dot{x}^A_k / \partial q^A,$$

$$\underline{X} \in B_{(a)}, \quad a=1, \dots, r, \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T,$$

przy czym $\delta q^A(\cdot)$ są funkcjami różniczkowalnymi w Π , które mogą spełniać dodatkowe warunki, wynikające z dodatkowych więzów (2.6).

(vi) Przyjmujemy, że obciążenia zewnętrzne (objętościowe i powierzchniowe), występujące w równaniach ruchu (2.7) i kinetycznych warunkach brzegowych (2.8), zależą w znany sposób od współrzędnych materialnych i czasu

$$(2.12) \quad b^\alpha = b^{\alpha}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in B_{(a)}; \quad p^\alpha = p^{\alpha}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in \partial B; \quad t \in T.$$

Powyższe założenia (i) - (vi) są wystarczające dla skonstruowania modeli opisujących procesy elastodynamiki ciał warstwowych. W celu przedstawienia opisu takich procesów i metody konstruowania takich modeli wykorzystamy przytoczone równania, i poddamy je przekształceniom tak, aby otrzymać podstawowy układ równań dla współrzędnych uogólnionych $q^A = q^A(\underline{Z}, t)$, $A=1, \dots, N$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$. Po otrzymaniu takiego układu równań w postaci ogólnej, przedyskutujemy szczególne warianty teorii, szczególną postać więzów oraz ich konsekwencje.

W celu wyprowadzenia podstawowego układu równań teorii ogólnej elastodynamiki ciał warstwowych, przekształcamy warunek idealności więzów (2.10) do postaci w której wystąpią całki powierzchniowe i objętościowe w E , tzn. całki objętościowe po obszarze $B_{(a)}$ oraz całki powierzchniowe po powierzchni $\partial B_{(a)}$. Kładąc

$$(2.13) \quad \begin{aligned} dv &= J dV, \quad J = \det(\bar{x}^k_{,\alpha}(\underline{X}, t)), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad t \in T, \\ ds &= j dS, \quad j = \left[\det(\bar{x}^k_{,K}(\underline{X}, t) \bar{x}_{k,L}(\underline{X}, t)) \right]^{1/2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\det(\bar{x}^\alpha_{,K} \bar{x}_{\alpha,L}) \right]^{-1/2}, \quad \underline{X} \in \partial B_{(a)}, \quad t \in T. \end{aligned}$$

gdzie dV i dS są elementami objętościowymi i powierzchniowymi warstwy $B_{(a)}$, a następnie wstawiając do warunku (2.10) wyrażenia (2.11) otrzymamy

$$(2.14) \quad \sum_{a=1}^r \int_{B_{(a)}} \bar{x}^k_{,\alpha} r^\alpha \bar{x}_{Ak} \delta q^A J dV + \\ + \int_{\cup \partial B_{(a)}} \bar{x}^k_{,\alpha} s^\alpha \bar{x}_{Ak} \delta q^A j dS = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że obszar $B_{(a)} = \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)})$, mamy

$$(2.15) \quad \delta B_{(a)} = \delta \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)}) \cup \Pi \times \{H_{(a)}\} \cup \Pi \times \{H_{(a+1)}\}.$$

Warunek (2.14) przyjmuje postać następującą

$$(2.16) \quad \sum_{a=1}^r \left[\iint_{\Pi} \int_{H_{(a)}}^{H_{(a+1)}} \mathbb{X}^k, \alpha r^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* \delta q^A J d\Pi dx^3 + \iint_{\partial \Pi} \int_{H_{(a)}}^{H_{(a+1)}} \mathbb{X}^k, \alpha s^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* \delta q^A j dL dx^3 \right] + \sum_{a=1}^{r+1} \int_{\Pi} (\mathbb{X}^k, \alpha s^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* j)_{X^3=H_{(a)}} \delta q^A d\Pi = 0,$$

gdzie

$$dV = d\Pi dx^3, \quad d\Pi = dx^1 dx^2, \quad dS = dL dx^3,$$

przy czym dL jest elementem dowolnego gładkiego łuku na $\partial \Pi$.

Wprowadzając następnie wielkości r_A i s_A wyrażające objętościowe i powierzchniowe siły reakcji więzów

$$(2.17) \quad r_A(\underline{z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H_{(a)}}^{H_{(a+1)}} \mathbb{X}^k, \alpha r^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* J dx^3 + \sum_{a=1}^{r+1} (\mathbb{X}^k, \alpha s^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* j)_{X^3=H_{(a)}}, \quad \underline{z} \in \Pi, \\ t \in T, \\ s_A(\underline{z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H_{(a)}}^{H_{(a+1)}} \mathbb{X}^k, \alpha s^\alpha \mathbb{X}_{Ak}^* j dx^3, \quad \underline{z} \in \partial \Pi,$$

przekształcimy warunek (2.16) do postaci następującej

$$(2.18) \quad \int_{\Pi} r_A \delta q^A(\underline{z}) d\Pi + \int_{\partial \Pi} s_A \delta q^A(\underline{z}) dL = 0.$$

Warunek (2.18) ma być spełniony dla wszystkich funkcji $\delta q^A = \delta q^A(\cdot)$ zgodnych z dodatkowymi więzami (2.6) tzn. dla wszystkich funkcji będących różniczkowalnymi rozwiązaniami układu równań

$$(2.19) \quad (\partial \alpha_v / \partial q^A) \delta q^A(\underline{z}) + \dots \\ \dots + (\partial \alpha_v / \partial q^{A, K_1 \dots K_n}) \delta q^{A, K_1 \dots K_n}(\underline{z}) = 0$$

$$\underline{z} \in \Pi, \quad v=1, \dots, N \leq N, \quad A=1, \dots, N, \quad K_1, \dots, K_n=1, 2;$$

oraz warunków brzegowych

$$(2.20) \quad (\partial \beta_u / \partial q^A) \delta q^A(\underline{z}) = 0, \quad \underline{z} \in \partial \Pi, \quad u=1, \dots, N \leq N.$$

Podstawmy teraz do definicji (2.17)₁ wyrażenie dla $r^\alpha(\cdot)$ otrzymane z równań ruchu (2.7), oraz wyrażenie dla $s^\alpha(\cdot)$ otrzymane z kinetycznych warunków brzegowych (2.8). Wykorzystajmy następujące zależności

$$(2.21) \quad n_\beta(\underline{x}, t) ds = J \bar{n}_\beta(\underline{x}) dS, \quad ds = j dS,$$

z których wynika, że

$$(2.22) \quad j n_\beta(\underline{x}, t) = J \bar{n}_\beta(\underline{x}),$$

gdzie $n_\beta(\cdot)$ i $\bar{n}_\beta(\cdot)$ oznaczają odpowiednio, składowe wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do powierzchni $\partial B_{(a)}t$ i $\partial B_{(a)}$. Zauważmy, że na powierzchniach $X^3 = H_{(a)}$ i $X^3 = H_{(a+1)}$ mamy $n_K = 0$, zaś na powierzchniach $\partial \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)})$ mamy $n_3 = 0$. Uwzględnijmy ponadto, że

$$(2.23) \quad [x^k, \alpha T^{\alpha\beta} n_\beta \overset{*}{x}_{Ak} j]_{X^3=H_{(a)}, H_{(a+1)}} = \\ = \int_{H_{(a)}}^{H_{(a+1)}} (x^k, \alpha T^{\alpha\beta} \overset{*}{x}_{Ak} j)_{,3} dX^3. \quad * /$$

* / Wprowadzono oznaczenie:

$$[\dots]_{X^3=H_{(a)}, H_{(a+1)}} = [\dots]_{X^3=H_{(a)}} + [\dots]_{X^3=H_{(a+1)}}$$

Wtedy z równań (2.17)₁, (2.7) i (2.8)₁ otrzymamy wyrażenie dla objętościowych sił reakcji więzów

$$\begin{aligned}
 (2.24) \quad r_A(\underline{z}, t) = & - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} |_{\beta} \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J \, dX^3 + \\
 & + \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} (T^{\alpha\beta} \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J)_{,3} \, dX^3 + \\
 & - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho \, b^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J \, dX^3 \\
 & - [p^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} j]_{X^3=H(1), H(r+1)} + \\
 & + \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho \, \overset{*}{\underline{x}}^k \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J \, dX^3 = \\
 = & - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} |_{\beta} \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J \, dX^3 + \\
 & + \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} (T^{\alpha\beta} \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} J)_{,3} \, dX^3 - \\
 & - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho \, b^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} \, dX^3 - \\
 & - [p^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} j]_{X^3=H(1), H(r+1)} + \\
 & + \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho \, \overset{*}{\underline{x}}^k \overset{*}{\underline{x}}_{Ak} \, dX^3.
 \end{aligned}$$

W równaniu (2.24) pierwszą całkę można wyrazić jak następuje

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad & \int_{H(a+1)} T^{\alpha\beta} |_{\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J \, dX^3 = \\
 & - \int_{H(a)}^{H(a+1)} (T^{\alpha\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J) |_{\beta} \, dX^3 + \\
 & + \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} (\mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J) |_{\beta} \, dX^3 = \\
 & - \int_{H(a)}^{H(a+1)} (T^{\alpha\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J), \beta \, dX^3 - \\
 & - \int_{H(a)}^{H(a+1)} \{ \delta^{\beta} \} T^{\alpha\delta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J \, dX^3 + \\
 & + \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} (\mathbb{x}, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J) |_{\beta} \, dX^3 = \\
 & - \int_{H(a)}^{H(a+1)} (T^{\alpha\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J), \beta + \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J \, dX^3.
 \end{aligned}$$

Jeśli teraz w równaniu (2.24), pierwszą całkę zastąpimy wyrażeniem (2.25), a następnie wprowadzimy wyrażenia dla sił uogólnionych, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (2.26) \quad S_A^K(\underline{Z}, t) &= \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha K} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J \, dX^3, \\
 S_A(\underline{Z}, t) &= - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} \mathbb{x}^k, \alpha \mathbb{x}_{Ak}^{\cdot} J, \beta \, dX^3,
 \end{aligned}$$

$$(2.26) \quad f_A(\underline{Z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho b^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{x}_{Ak} J dX^3 + \\ + [p^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{x}_{Ak} j]_{X^3=H(1), H(r+1)},$$

$$i_A(\underline{Z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho \overset{*}{x}^k \overset{*}{x}_{Ak} J dX^3, \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T,$$

to po redukcji otrzymamy następujący układ równań ruchu w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$(2.27) \quad S_{A,K}^K(\underline{Z}, t) + S_A(\underline{Z}, t) + f_A(\underline{Z}, t) + r_A(\underline{Z}, t) = i_A(\underline{Z}, t),$$

$$\underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad A=1, \dots, N, \quad K=1, 2.$$

W podobny sposób, jak równania ruchu, otrzymamy warunki brzegowe w terminach uogólnionych sił. W tym celu, wyrażenie dla powierzchniowej siły reakcji więzów $\underline{s} = (s^\alpha)$, otrzymane z kinetycznych warunków brzegowych (2.8)₁ tj.:

$$(2.28) \quad s^\alpha(\underline{X}, t) = T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) n_\beta(\underline{X}, t) - p^\alpha(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in \partial B, \quad t \in T,$$

wstawiamy do (2.17)₂, a następnie po wprowadzeniu wyrażenia dla uogólnionej siły powierzchniowej

$$(2.29) \quad p_A(\underline{Z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} p^\alpha \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{x}_{Ak} j dX^3, \quad \underline{Z} \in \partial \Pi, \quad t \in T,$$

otrzymujemy równanie

$$(2.30) \quad p_A(\underline{Z}, t) + s_A(\underline{Z}, t) = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} T^{\alpha\beta} n_\beta \underline{x}^k, \alpha \overset{*}{x}_{Ak} j dX^3,$$

$$\underline{Z} \in \partial \Pi, \quad t \in T.$$

Ponieważ mamy zależność $j n_\beta = J \bar{n}_\beta$ (por. (2.22)), gdzie \bar{n}_β jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do $\partial\Pi$, zatem

$$(2.31) \quad j n_\beta = \delta_\beta^K J \bar{n}_K, \quad \alpha=1,2,3, \quad K=1,2.$$

Mając na uwadze wprowadzoną wcześniej wielkość (2.26)₁ i powyższą zależność (2.31) widzimy, że równanie (2.30) stanowi kinetyczny warunek brzegowy postaci

$$(2.32) \quad S_A^{\cdot K}(\underline{z}, t) \bar{n}_K(\underline{z}) = p_A(\underline{z}, t) + s_A(\underline{z}, t), \quad \underline{z} \in \partial\Pi, \quad t \in T,$$

dla każdego $\underline{z} = (X^1 X^2)$ wewnątrz dowolnego gładkiego łuku $\partial\Pi$, który jest konturem płaskiego obszaru Π . Zakładamy, że uogólniona siła $S_A^{\cdot K}(\cdot)$ definiowana za pomocą (2.26)₁ jest funkcją różniczkowalną w Π i ciągłą w $\bar{\Pi}$. Równania ruchu (2.27) wraz z kinetycznymi warunkami brzegowymi (2.32) opisują ruch dowolnego ciała warstwowego i muszą być rozpatrywane jednocześnie z warunkami (2.6), wyrażającymi dodatkowe więzy wewnętrzne i/lub brzegowe narzucone na współrzędne uogólnione, oraz z warunkiem idealności więzów w uogólnionej postaci (2.18), a także z wyrażeniami definicyjnymi dla sił uogólnionych (2.17), (2.26), (2.29).

Dla ciała warstwowego złożonego z materiałów sprężystych, składowe tensora naprężenia $T^{\alpha\beta} = \hat{T}^{\alpha\beta}(\underline{x}, \underline{\dot{g}})$ można wyrazić przez składowe tensora odkształcenia Greena

$$(2.33) \quad \hat{G}^{\alpha\beta} = \hat{x}^k_{,\alpha} \hat{x}^l_{,\beta} \delta_{kl}, \quad \alpha, \beta=1,2,3; \quad k, l=1,2,3;$$

a po wykorzystaniu równań więzów (2.5) i wykonaniu całkowania względem $X^3 \in (H(1), H(r+1))$ można otrzymać bezpośrednie zależności pomiędzy uogólnionymi siłami wewnętrznymi i współrzędnymi uogólnionymi. Otrzymujemy w ten sposób wyrażenia następujące

$$(2.34) \quad \begin{aligned} S_A^{\cdot K}(\underline{z}, t) &= \hat{S}_A^{\cdot K}(\underline{z}, \underline{q}(\underline{z}, t), \overline{\nabla} \underline{q}(\underline{z}, t)), \\ S_A(\underline{z}, t) &= \hat{S}_A(\underline{z}, \underline{q}(\underline{z}, t), \overline{\nabla} \underline{q}(\underline{z}, t)), \end{aligned} \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T;$$

w których $\hat{S}_A^{\cdot K}(\cdot)$ i $\hat{S}_A(\cdot)$ są znanymi funkcjami materiałowymi i mają postać

$$\dot{S}_A^K = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \dot{T}^{\alpha K} [\underline{x}, \dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \dot{x}^1_{,K}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \delta_{k1}] \cdot [\dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \dot{x}^1_{,K}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t))] \dot{J} d\mathbf{x}^3 \quad (2.35)$$

$$\dot{S}_A = - \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \dot{T}^{\alpha\beta} [\underline{x}, \dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \dot{x}^1_{,\beta}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \delta_{k1}] \cdot [\dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \dot{x}^1_{,\beta}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t))] \dot{J} d\mathbf{x}^3$$

gdzie

$$\dot{J} = \det [\dot{x}^k_{,\alpha}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t))], \quad \underline{x} \in B(a), \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T \quad (2.36)$$

Podobnie, przyjmując obciążenia $b^k(\cdot)$, $p^k(\cdot)$ występujące w wyrażeniach (2.26)₃ i (2.29) jako funkcje znane tzn. $b^k = b^k(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in B(a)$; $p^k = p^k(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \partial B$; $t \in T$, otrzymujemy bezpośrednie wyrażenia dla uogólnionych sił zewnętrznych w funkcji współrzędnych uogólnionych:

$$\begin{aligned} f_A(\underline{z}, t) &= \dot{f}_A(\underline{z}, \underline{q}(\underline{z}, t), \nabla \underline{q}(\underline{z}, t)), \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T; \\ p_A(\underline{z}, t) &= \dot{p}_A(\underline{z}, \underline{q}(\underline{z}, t), \nabla \underline{q}(\underline{z}, t)), \quad \underline{z} \in \partial \Pi, \quad t \in T; \end{aligned} \quad (2.37)$$

gdzie $\dot{f}_A(\cdot)$ i $\dot{p}_A(\cdot)$ są znanymi funkcjami i mają następującą postać

$$\begin{aligned} \dot{f}_A = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho(\underline{x}, t) b^k(\underline{x}, t) \dot{x}^1_{,K}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t)) \dot{J} d\mathbf{x}^3 + \\ + [p^k(\underline{x}, t) \dot{x}^1_{,K}(\underline{x}, \underline{q}(\underline{z}, t))] \dot{J} \Big|_{\mathbf{x}^3 = H(1), H(r+1)}, \\ \underline{x} \in B(a), \quad t \in T; \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$(2.38) \dot{P}_A = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \dot{p}^k(\underline{X}, t) \dot{x}_{Ak}(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \dot{J} dX^3,$$

gdzie: $\underline{X} \in \delta B(a), \quad t \in T;$

$$(2.39) \dot{J} = \left[\det \left[\dot{x}_{,K}^k(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \dot{x}_{k,L}(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \right] \right]^{1/2} \cdot \left[\det(X^{\alpha}_{,K} X_{\alpha,L}) \right]^{-1/2}.$$

I wreszcie podstawiając prawą stronę równania więzów (2.5) do definicji (2.26)₄, otrzymamy bezpośrednie wyrażenie dla uogólnionych sił inercyjnych ($-i_A$) gdzie

$$(2.40) i_A(\underline{Z}, t) = \dot{i}_A(\underline{Z}, q(\underline{Z}, t), \dot{q}(\underline{Z}, t), \ddot{q}(\underline{Z}, t)) = \\ = \dot{P}_{AB}(\underline{Z}, q(\underline{Z}, t)) \ddot{q}^B(\underline{Z}, t) + \dot{P}_{ABC}(\underline{Z}, q(\underline{Z}, t)) \dot{q}^B \dot{q}^C(\underline{Z}, t)$$

$A, B, C = 1, \dots, N; \quad \underline{X} \in \Pi, \quad t \in T;$

zaś $\dot{P}_{AB}(\cdot)$ i $\dot{P}_{ABC}(\cdot)$ są znanymi funkcjami i mają następującą postać

$$(2.41) \dot{P}_{AB} = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho(\underline{X}, t) \dot{x}_A^k(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \dot{x}_{Bk}(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \dot{J} dX^3,$$

$$\dot{P}_{ABC} = \sum_{a=1}^r \int_{H(a)}^{H(a+1)} \rho(\underline{X}, t) \dot{x}_A^k(\underline{X}, q(\underline{Z}, t)) \cdot$$

$$\cdot (\partial^2 / \partial q^B \partial q^C) (\dot{x}_k(\underline{X}, q(\underline{Z}, t))) \dot{J} dX^3,$$

$\underline{X} \in B(a), \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T.$

W wyrażeniach (2.38)₁ i (2.41), iloczyn $\rho \dot{J}$ jest daną gęstością masy ciała B.

Dotychczasowe rozważania doprowadziły do podstawowego układu równań opisujących ruch dowolnego ciała warstwowego, przy ogólnej postaci więzów kinematycznych (2.5) i (2.6), narzuconych na współrzędne uogólnione $q = (q^A)$, $A=1, \dots, N$, które są podstawowymi niewiadomymi każdego problemu brzegowo-początkowego elastodynamiki. Otrzymaliśmy mianowicie: równania (2.27) i warunki (2.32), które nazwane zostały odpowiednio, równaniami ruchu i kinetycznymi warunkami brzegowymi dla modelu ciała warstwowego z więzami kinematycznymi (2.5) i (2.6). Funkcje $S_A^K(\cdot)$ i $S_A(\cdot)$ występujące w (2.27) i (2.32), nazwane zostały uogólnionymi siłami wewnętrznymi, dla których otrzymaliśmy równania konstytutywne (2.34). Funkcje $f_A(\cdot)$, $p_A(\cdot)$ i $(-i_A(\cdot))$ nazwane zostały uogólnionymi siłami zewnętrznymi, określonymi odpowiednio, na powierzchni Π i jej brzegu $\partial\Pi$, dla których otrzymaliśmy równania definicyjne (2.37) i (2.40). Funkcje $r_A(\cdot)$ i $s_A(\cdot)$ wprowadzone w (2.17), interpretujemy jako wewnętrzne (w Π) i brzegowe (prawie wszędzie na $\partial\Pi$) siły reakcji więzów kinematycznych, wprowadzonych 'a priori' w postaci (2.6).

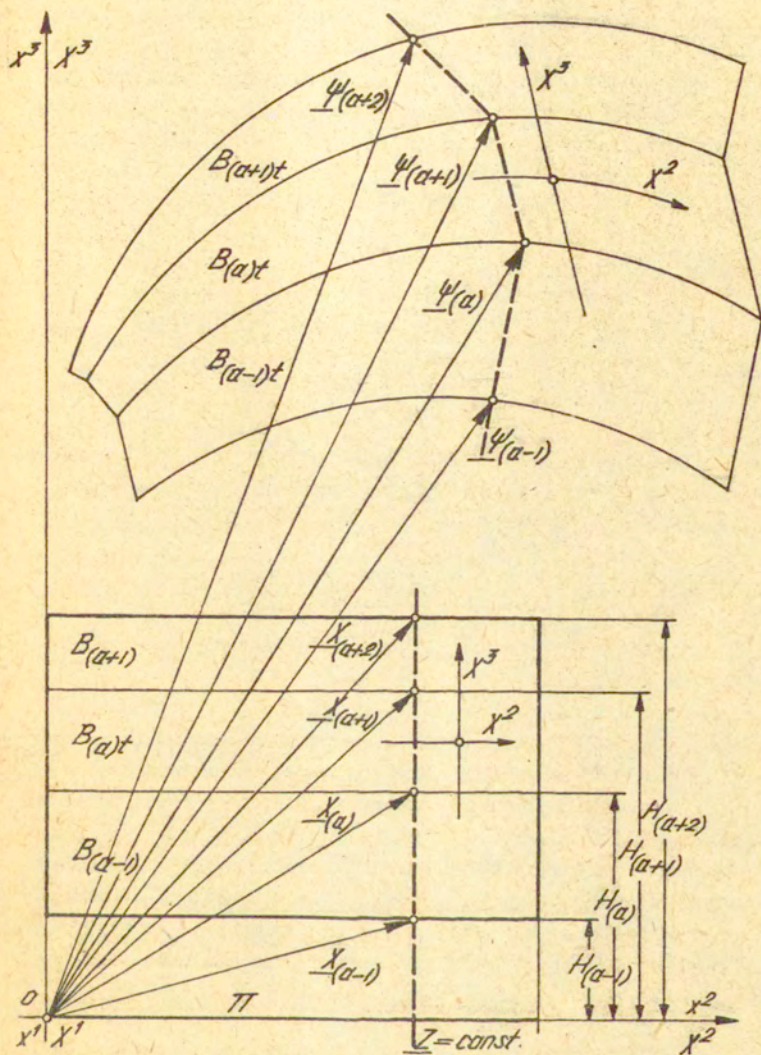
3. Teoria dużych odkształceń sprężystych ciał warstwowych ^{*}/

Zakładamy, że ruch ciała warstwowego B , zdefiniowanego w rozdziale 2, jest ściśle zdeterminowany przez ruch powierzchni $\Pi(1) = \Pi \times \{H(1)\}, \dots, \Pi(r+1) = \Pi \times \{H(r+1)\}$, ograniczających warstwy tego ciała, a ruch dowolnej warstwy $B(a)$, $a=1, \dots, r$, przez ruch powierzchni $\Pi(a) = \Pi \times \{H(a)\}$ i $\Pi(a+1) = \Pi \times \{H(a+1)\}$ (rys. 3.1). Przyjmujemy jednocześnie, że ciągiem uogólnionych współrzędnych (podstawowych niewiadomych) występujących dotychczas w rozważaniach jako $q = (q^A)$, $A=1, \dots, N$, jest teraz ciąg wektorów $\underline{\Psi} = (\underline{\Psi}(a))$, $a=1, \dots, r+1$, opisujących ruch powierzchni ograniczających poszczególne warstwy rozważanego ciała. Zatem, podstawowymi niewiadomymi są teraz nowe funkcje

$$(3.1) \quad \underline{\Psi} = (\underline{\Psi}(1), \dots, \underline{\Psi}(r+1)) = \underline{q} = (q^1, \dots, q^N), \quad N=3(r+1),$$

$$\underline{\Psi}(a) = (\underline{\Psi}_1^1(a), \underline{\Psi}_2^2(a), \underline{\Psi}_3^3(a)), \quad a=1, \dots, r+1.$$

^{*}/ Główne wyniki niniejszego rozdziału były prezentowane na konferencji GAMM '79 w Wiesbaden (RFN) i opublikowane w pracy [58], ZAMM, 1980, 60, 6, T95-T97.



Rys. 3.1. Ciało warstwowe B (w konfiguracji odniesienia) i jego obszar B_t w konfiguracji aktualnej oraz wybór ciągu podstawowych niewiadomych $\underline{U}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r+1$.

Oznacza to, że dla każdego ustalonego wskaźnika $a=1, \dots, r+1$, podstawowe niewiadome są składowymi wektorów w przestrzeni zmiennych $\underline{x} = (x^k)$, $k=1, 2, 3$; przy czym r jest liczbą warstw, a $3(r+1)$ jest liczbą nowych zmiennych (nieznenych funkcji). Załóżmy dalej, że więzy wewnętrzne (2.5) przyjmują pewną szczególną postać tzn., że ruch dowolnego punktu ciała warstwowego jest liniową funkcją współrzędnej X^3 w każdej warstwie, i ciągłą w całym ciele, a mianowicie,

$$(3.2) \quad \underline{x}^k(\underline{x}, t) = \underline{\dot{x}}^k(\underline{x}, \underline{\Psi}(\underline{z}, t)) = \\ = (H_{(a+1)} - X^3) h_{(a)}^{-1} \underline{\Psi}_{(a)}^k(\underline{z}, t) + (X^3 - H_{(a)}) h_{(a)}^{-1} \underline{\Psi}_{(a+1)}^k(\underline{z}, t), \\ \underline{x} = (\underline{z}, X^3) \in \mathbb{B}, \quad \underline{z} \in \Pi, \quad H_{(1)} \leq X^3 \leq H_{(r+1)}, \quad t \in T$$

Funkcje $\underline{\Psi}_{(a)}^k(\cdot)$, $\underline{\Psi}_{(a+1)}^k(\cdot)$, $k=1, 2, 3$; $a=1, \dots, r$, są nowymi zmiennymi, wyrażającymi ruch powierzchni ograniczających warstwę $B_{(a)}$, a wielkości

$$(3.3) \quad h_{(a)} = H_{(a+1)} - H_{(a)}, \quad h = H_{(r+1)} - H_{(1)},$$

oznaczają odpowiednio, grubość warstwy $B_{(a)}$ i grubość ciała warstwowego B (por. rys. 3.1).

Przekształćmy teraz otrzymane poprzednio, w rozdziale 2, podstawowe równania elastodynamiki, do postaci szczególnej przyjmując, że równania więzów kinematycznych (2.5) mają postać (3.2). W celu otrzymania podstawowych równań teorii dużych odkształceń w terminach nowych zmiennych, wystarczy zmienić formalnie oznaczenia, pisząc wskaźniki "(a)k", $a=1, \dots, r+1$; $k=1, 2, 3$, zamiast dotychczasowych wskaźników "A", $A=1, \dots, N$; a następnie wykonać wszystkie możliwe operacje przy nowych zmiennych i szczególnej postaci więzów (3.2). Równania ruchu (2.27) można zatem napisać w postaci,

$$(3.4) \quad S_{(a)k, K}^{\cdot K}(\underline{z}, t) + S_{(a)k}(\underline{z}, t) + f_{(a)k}(\underline{z}, t) + r_{(a)k}(\underline{z}, t) = \\ = i_{(a)k}(\underline{z}, t), \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad a=1, \dots, r+1, \quad k=1, 2, 3, \quad K=1, 2$$

w których poszczególne wielkości są zdefiniowane analogicznie jak w (2.17)₁ i (2.26).

$$\begin{aligned}
 s_{(a)k}^{\cdot k}(\underline{z}, t) &= \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} T^{\alpha k} \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl} J dX^3, \\
 s_{(a)k}(\underline{z}, t) &= - \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} T^{\alpha \beta} \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl, \beta} J dX^3, \\
 f_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} \rho b^\alpha \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl} J dX^3 + \\
 (3.5) \quad &+ (\delta_a^1 + \delta_a^{r+1}) (p^\alpha \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl} j)_{X^3=H_{(a)}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} r^\alpha \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl} J dX^3 + \\
 &+ \sum_{a-1}^{a+1} (s^\alpha \underline{x}^1, \alpha \dot{\underline{x}}_{(a)kl} j)_{X^3=H_{(a)}}, \\
 i_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} \rho \ddot{\underline{x}}^1 \dot{\underline{x}}_{(a)kl} J dX^3,
 \end{aligned}$$

gdzie $a=1, \dots, r+1$; $k, l=1, 2, 3$; $\alpha, \beta=1, 2, 3$; $H_{(0)} = H_{(1)}$, $H_{(r+2)} = H_{(r+1)}$; δ_a^1 i δ_a^{r+1} oznaczają symbole Kroneckera, J i j są Jakobianami przekształcenia zdefiniowanymi w (2.13), zaś

$$(3.6) \quad \dot{\underline{x}}_{(a)kl}(\underline{x}, t) = \partial \ddot{\underline{x}}^1(\underline{x}, t) / \partial \dot{\underline{y}}_{(a)}^k(\underline{z}, t),$$

$$\underline{x} \in B, \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T.$$

Jeśli w wyrażeniach (3.5) uwzględnimy jawną postać więzów kinematycznych (3.2) tzn.:

$$(3.7) \quad \dot{x}^1(\underline{x}, t) = (H_{(a+1)} - X^3) h_{(a)}^{-1} \Psi_{(a)}^1(\underline{z}, t) + \\ + (X^3 - H_{(a)}) h_{(a)}^{-1} \Psi_{(a+1)}^1(\underline{z}, t); \quad H_{(a)} \leq X^3 \leq H_{(a+1)}, \\ a=1, \dots, r$$

oraz wprowadzimy wartości pochodnych cząstkowych funkcji ruchu względem uogólnionych współrzędnych według (3.6) tj.:

$$(3.8) \quad \dot{x}_{(a)kl} = \delta \dot{x}^1 / \delta \Psi_{(a)}^k = \\ = \begin{cases} (H_{(a+1)} - X^3) h_{(a)}^{-1} \delta_{kl}, & \text{dla } H_{(a)} \leq X^3 \leq H_{(a+1)}, \text{ gdy } a=1, \dots, r; \\ (X^3 - H_{(a-1)}) h_{(a-1)}^{-1} \delta_{kl}, & \text{dla } H_{(a-1)} \leq X^3 \leq H_{(a)}, \text{ gdy } a=2, \dots, r+1; \\ 0, & \text{dla } X^3 \notin (H_{(a-1)}, H_{(a+1)}), \text{ gdy } a=2, \dots, r; \end{cases}$$

to wówczas, po wykonaniu różniczkowania pod znakiem całek w (3.5), otrzymamy wyrażenia dla uogólnionych sił, występujących w równaniach ruchu, a mianowicie:

$$(3.9) \quad S_{(a)k} \cdot K(\underline{z}, t) = \int_{H_{(a-1)}}^{H_{(a+1)}} (T^{KL} \dot{x}^1_{,L} + T^{3K} \dot{x}^1_{,3}) \dot{x}_{(a)kl} J dX^3 = \\ = \delta_{kl} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (T^{KL} (\Psi_{(a)}^1 + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ \left. + T^{3K} d_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) J d\xi + \right. \\ \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (T^{KL} (\Psi_{(a-1)}^1 + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \right. \\ \left. + T^{3K} d_{(a-1)}^1) \xi J d\xi \right],$$

$$\begin{aligned}
 s_{(a)k}(z, t) &= - \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} (T^{L3} x^1_{,L} + T^{33} x^1_{,3}) \ddot{x}_{(a)k1,3} J dx^3 = \\
 &= \delta_{k1} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h(a)} (T^{L3} (\psi^1_{(a)} + \xi d^1_{(a)})_{,L} + T^{33} d^1_{(a)}) J d\xi - \right. \\
 (3.9) \quad & \left. - h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h(a-1)} (T^{L3} (\psi^1_{(a-1)} + \xi d^1_{(a-1)})_{,L} + \right. \\
 & \left. + T^{33} d^1_{(a-1)}) J d\xi \right], \\
 f_{(a)k}(z, t) &= \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} \rho (b^L x^1_{,L} + b^3 x^1_{,3}) \ddot{x}_{(a)k1} J dx^3 + \\
 &+ (\delta_a^1 + \delta_a^{r+1}) [(p^L x^1_{,L} + p^3 x^1_{,3}) \ddot{x}_{(a)k1} j]_{x^3=H(a)} = \\
 &= \delta_{k1} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h(a)} \rho (b^L (\psi^1_{(a)} + \xi d^1_{(a)})_{,L} + \right. \\
 & \left. + b^3 d^1_{(a)}) (h_{(a)} - \xi) J d\xi + \right. \\
 &+ \delta_a^1 [(p^L (\psi^1_{(a)} + \xi d^1_{(a)})_{,L} + p^3 d^1_{(a)}) \cdot \\
 & \left. \cdot (h_{(a)} - \xi) j]_{\xi=0, h(a)} + \right. \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h(a-1)} \rho (b^L (\psi^1_{(a-1)} + \xi d^1_{(a-1)})_{,L} + \\
 & \left. + b^3 d^1_{(a-1)}) \xi J d\xi + \right. \\
 &+ \delta_a^{r+1} [(p^L (\psi^1_{(a-1)} + \xi d^1_{(a-1)})_{,L} + \\
 & \left. + p^3 d^1_{(a-1)}) \xi j]_{\xi=0, h(a-1)} \right], \quad \ast/
 \end{aligned}$$

$\ast/$ Wprowadzono oznaczenie:

$$[\dots]_{\xi=0, h(a)} = [\dots]_{\xi=0} + [\dots]_{\xi=h(a)}$$

$$\begin{aligned}
 r_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} (r^L \underline{x}^1_{,L} + r^3 \underline{x}^1_{,3}) \dot{\underline{x}}_{(a)kl}^j \, dX^3 + \\
 &+ \sum_{a-1}^{a+1} [(s^L \underline{x}^1_{,L} + s^3 \underline{x}^1_{,3}) \dot{\underline{x}}_{(a)kl}^j] X^3_{H(a)} = \\
 &= \delta_{kl} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h(a)} (r^L (\psi^1_{(a)} + \epsilon d^1_{(a)})_{,L} + \right. \\
 &\quad \left. + r^3 d^1_{(a)}) (h(a) - \epsilon) \, d\epsilon + \right. \\
 (3.9) \quad &+ [(s^L (\psi^1_{(a)} + \epsilon d^1_{(a)})_{,L} + s^3 d^1_{(a)}) (h(a) - \epsilon) \, d]_{\epsilon=0, h(a)} + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h(a-1)} (r^L (\psi^1_{(a-1)} + \epsilon d^1_{(a-1)})_{,L} + \\
 &\quad \left. + r^3 d^1_{(a-1)}) \epsilon \, d\epsilon + \right. \\
 &+ [(s^L (\psi^1_{(a-1)} + \epsilon d^1_{(a-1)})_{,L} + s^3 d^1_{(a-1)}) \epsilon \, d]_{\epsilon=0, h(a-1)} \Big], \\
 i_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} \rho \left[(\partial^2 \dot{\underline{x}}^n / \partial \psi^1_{(b)} \partial \psi^m_{(c)}) \dot{\psi}^1_{(b)} \dot{\psi}^m_{(c)} + \right. \\
 &\quad \left. H(a-1) + (\partial \dot{\underline{x}}^n / \partial \psi^1_{(b)}) \ddot{\psi}^1_{(b)} \right] (\partial \dot{\underline{x}}^n / \partial \psi^k_{(a)}) \, dX^3 = \\
 &= \ddot{\psi}^1_{(b)} \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} \rho (\partial \dot{\underline{x}}^n / \partial \psi^k_{(a)}) (\partial \dot{\underline{x}}^n / \partial \psi^1_{(b)}) \, dX^3 = \\
 &= \delta_{kl} \left[h_{(a)}^{-2} \int_0^{h(a)} \rho ((h(a) - \epsilon)^2 \ddot{\psi}^1_{(a)} + \right. \\
 &\quad \left. + (h(a) - \epsilon) \epsilon \ddot{\psi}^1_{(a+1)}) \, d\epsilon + \right. \\
 &+ h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h(a-1)} \rho (\epsilon^2 \ddot{\psi}^1_{(a)} + \epsilon (h_{(a-1)} - \epsilon) \ddot{\psi}^1_{(a-1)}) \, d\epsilon \Big],
 \end{aligned}$$

gdzie: $a, b, c = 1, \dots, r+1$; $k, l, m, n = 1, 2, 3$; przy czym wprowadzono definicje pomocnicze:

$$(3.10) \quad h_{(0)}^{-1} \int_0^{h_{(0)}} (\dots) d\xi = 0, \quad h_{(r+1)}^{-1} \int_0^{h_{(r+1)}} (\dots) d\xi = 0.$$

W działaniach, które doprowadziły do powyższych wyrażeń, dokonano zamiany współrzędnej X^3 na współrzędną lokalną ξ tak, że

$$(3.11) \quad \xi = X^3 - H_{(a)}, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \quad h_{(a)} > 0, \quad a = 1, \dots, r$$

oraz wprowadzono wielkości pomocnicze $\underline{d}_{(a)}$ i $\underline{d}_{(a-1)}$, wyrażające pola dyrektorów najeżających powierzchnie podstawowe $\Pi_{(a)t}$ i $\Pi_{(a-1)t}$ w konfiguracji aktualnej:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \underline{d}_{(a)} &= h_{(a)}^{-1} (\underline{\Psi}_{(a+1)} - \underline{\Psi}_{(a)}), & \underline{d}_{(0)} &= \underline{d}_{(r+2)} = 0, \\ \underline{d}_{(a-1)} &= h_{(a-1)}^{-1} (\underline{\Psi}_{(a)} - \underline{\Psi}_{(a-1)}), & a &= 1, \dots, r+1. \end{aligned}$$

Uogólnione siły inercyjne ograniczone są jedynie do pierwszego członu w wyrażeniu (3.9)₅, bowiem jak wynika z (2.41)₂, wielkość $\dot{P}_{(a)}(b)(c)klm = 0$, $a, b, c = 1, \dots, r$; $k, l, m = 1, 2, 3$; ponieważ funkcja $\underline{X}(\underline{X}, t) = \underline{X}(\underline{X}, \underline{\Psi}(\underline{Z}, t))$ opisująca więzy jest liniową funkcją uogólnionych współrzędnych $\underline{\Psi} = (\underline{\Psi}_{(a)}^k)$, $k = 1, 2, 3$; $a = 1, \dots, r+1$.

Konsekwentnie do równań ruchu (3.4), kinetyczne warunki brzegowe (2.32), w terminach nowych współrzędnych uogólnionych, przyjmują postać:

$$(3.13) \quad S_{(a)k}^K(\underline{Z}, t) \bar{n}_K(\underline{Z}) = P_{(a)k}(\underline{Z}, t) + s_{(a)k}(\underline{Z}, t),$$

$$\underline{Z} \in \partial \Pi, \quad t \in T,$$

dla każdego $\underline{Z} = (X^1, X^2)$ należącego do wnętrza dowolnego gładkiego łuku $\partial \Pi$. Uogólnione wielkości występujące po prawej stronie warunku (3.13), wyrażają powierzchniowe obciążenia i powierzchniowe siły reakcji więzów wewnętrznych, i zdefiniowane są analogicznie jak (2.29) i (2.17)₂, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 p_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} (p^L \underline{x}^1, L + p^3 \underline{x}^1, 3) \dot{\underline{x}}_{(a)kl}^* j d\underline{x}^3 = \\
 (3.14) \quad &= \delta_{kl} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h(a)} (p^L(\underline{\Psi}_{(a)}^1 + \underline{\xi} d_{(a)}^1), L + \right. \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a)}^1)(h(a) - \xi) j d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h(a-1)} (p^L(\underline{\Psi}_{(a-1)}^1 + \underline{\xi} d_{(a-1)}^1), L + \right. \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a-1)}^1) \xi j d\xi \right], \\
 s_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \int_{H(a-1)}^{H(a+1)} (s^L \underline{x}^1, L + s^3 \underline{x}^1, 3) \dot{\underline{x}}_{(a)kl}^* j d\underline{x}^3 = \\
 &= \delta_{kl} \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h(a)} (s^L(\underline{\Psi}_{(a)}^1 + \underline{\xi} d_{(a)}^1), L + \right. \\
 &\quad \left. + s^3 d_{(a)}^1)(h(a) - \xi) j d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h(a-1)} (s^L(\underline{\Psi}_{(a-1)}^1 + \underline{\xi} d_{(a-1)}^1), L + \right. \\
 &\quad \left. + s^3 d_{(a-1)}^1) \xi j d\xi \right].
 \end{aligned}$$

Wyprowadzając powyższe wyrażenia, podobnie jak wyrażenia (3.9), przyjęto nową zmienną według (3.11), oraz oznaczenia (3.12). Obowiązują tutaj również zastrzeżenia (3.10).

Dla ciała warstwowego, złożonego z materiałów sprężystych, wprowadzamy do równań konstytutywnych (3.9)_{1,2}, w miejsce $T^{\alpha\beta}$, daną funkcję materiałową $T^{\alpha\beta} = \dot{T}^{\alpha\beta}(\underline{z}, \underline{G})$ wyrażoną za pomocą (2.33), a następnie wykorzystujemy przyjętą postać więzów wewnętrznych (3.7). W wyniku tego otrzymujemy równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych,

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad S_{(a)k}^{\cdot K}(\underline{z}, t) &= \dot{S}_{(a)k}^{\cdot K}(\underline{z}, \underline{\Psi}(\underline{z}, t), \overline{\nabla} \underline{\Psi}(\underline{z}, t)), \\
 S_{(a)k}(\underline{z}, t) &= \dot{S}_{(a)k}(\underline{z}, \underline{\Psi}(\underline{z}, t), \overline{\nabla} \underline{\Psi}(\underline{z}, t)),
 \end{aligned}$$

$\underline{z} \in \Pi, \quad t \in T$

gdzie funkcje $\dot{S}_{(a)k}^{\cdot K}(\cdot)$, $\dot{S}_{(a)k}^{\cdot}(\cdot)$ są znanymi funkcjami konstytutywnymi nowych współrzędnych uogólnionych. Jeśli skorzystamy z definicji obciążeń (2.12), przyjmując, że są one znane i niezależne od ruchu:

$$b^k = b^{*k}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in B_{(a)}, \quad p^k = p^{*k}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial B, \quad t \in T,$$

a następnie z definicji więzów wewnętrznych (3.7), to na podstawie (3.9)_{3,5} i (3.14)₁, otrzymamy równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych w terminach nowych współrzędnych uogólnionych.

$$f_{(a)k}(\underline{z}, t) = \dot{f}_{(a)k}(\underline{z}, \underline{\psi}(\underline{z}, t), \overline{\nabla \underline{\psi}}(\underline{z}, t)), \quad \underline{z} \in \Pi,$$

$$(3.16) \quad p_{(a)k}(\underline{z}, t) = \dot{p}_{(a)k}(\underline{z}, \underline{\psi}(\underline{z}, t), \overline{\nabla \underline{\psi}}(\underline{z}, t)) \quad \underline{z} \in \partial \Pi, \quad t \in T,$$

$$i_{(a)k}(\underline{z}, t) = \dot{i}_{(a)k}(\underline{z}, \underline{\psi}(\underline{z}, t), \dot{\underline{\psi}}(\underline{z}, t), \ddot{\underline{\psi}}(\underline{z}, t)), \quad \underline{z} \in \Pi.$$

W powyższych równaniach $\dot{f}_{(a)k}(\cdot)$, $\dot{p}_{(a)k}(\cdot)$, $\dot{i}_{(a)k}(\cdot)$ są znanymi funkcjami nowych zmiennych (współrzędnych uogólnionych).

Stosownie do założeń w rozdziale 2, uogólnione współrzędne $\underline{\psi} = (\underline{\psi}_{(a)}^k)$, $a=1, \dots, r+1$; $k=1, 2, 3$; nie są na ogół funkcjami niezależnymi, lecz mogą spełniać dodatkowe warunki wyrażające dodatkowe więzy wewnętrzne (w Π) i brzegowe (na $\partial \Pi$) (2.6), które w terminach nowych zmiennych przyjmują postać:

$$(3.17) \quad \dot{\alpha}_v(\underline{z}, \underline{\psi}(\underline{z}, t), \overline{\nabla \underline{\psi}}(\underline{z}, t)) = 0, \quad \underline{z} \in \Pi, \quad v=1, \dots, N \leq 3(r+1),$$

$$t \in T,$$

$$\dot{\beta}_u(\underline{z}, \underline{\psi}(\underline{z}, t)) = 0, \quad \underline{z} \in \partial \Pi, \quad u=1, \dots, M \leq 3(r+1),$$

gdzie $\dot{\alpha}_v(\cdot)$, $\dot{\beta}_u(\cdot)$ są danymi funkcjami niezależnymi, różniczkowalnymi w całej dziedzinie określoności. Jednocześnie funkcje $\underline{r} = (r_{(a)k}(\underline{z}, t))$, $\underline{z} \in \Pi$, i $\underline{s} = (s_{(a)k}(\underline{z}, t))$, $\underline{z} \in \partial \Pi$, $t \in T$, występujące w równaniach równowagi (3.4) i kinetycznych warunkach brzegowych (3.13), jako uogólnione siły reakcji, utrzymujące dodatkowe więzy (3.17), muszą spełniać warunek idealności postaci:

$$(3.18) \quad \int_{\Pi} r_{(a)k}(\underline{z}, t) \delta \underline{\psi}^{(a)k}(\underline{z}, t) d\Pi + \int_{\partial \Pi} s_{(a)k}(\underline{z}, t) \delta \underline{\psi}^{(a)k}(\underline{z}, t) dL = 0.$$

Warunek (3.18) musi być spełniony dla wszystkich funkcji $\delta\psi^{(a)k}(\cdot)$ zgodnych z dodatkowymi więzami (3.17) tzn. funkcji, które są różniczkowalnymi rozwiązaniami układu równań:

$$(3.19) \quad (\delta\alpha_v^* / \delta\psi^{(a)k}) \delta\psi^{(a)k} + (\delta\alpha_{v,K}^* / \delta\psi^{(a)k}) \delta\psi^{(a)k}_{,K} = 0, \\ v=1, \dots, \bar{N} \leq 3(r+1),$$

i spełniają warunki brzegowe,

$$(3.20) \quad (\delta\beta_u^* / \delta\psi^{(a)k}) \delta\psi^{(a)k} = 0, \quad u=1, \dots, \bar{N} \leq 3(r+1).$$

Podsumowując otrzymane powyżej wyniki należy podkreślić, że równania ruchu (3.4), kinetyczne warunki brzegowe (3.13), wszystkie w terminach uogólnionych sił; równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych (3.15) i równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych (3.16); dodatkowe równania więzów wewnętrznych i brzegowych (3.17) wraz z warunkiem idealności więzów (3.18), charakteryzują model elastodynamiki ciała warstwowego o dowolnej geometrii wewnętrznej, z więzami kinematycznymi postaci (3.2) i (3.17), i stanowią podstawowy układ równań dla badania procesów dynamicznych takich ciał.

4. Transformacja równań podstawowych z kartezjańskiego do konwekcyjnego układu współrzędnych

Jak wynika z równań ruchu (3.4) i kinetycznych warunków brzegowych (3.13), napisanych we współrzędnych kartezjańskich $\underline{x} = (x^k)$, $k=1,2,3$, wielkości tam występujące: $S_{(a)k}^K$, $S_{(a)k}$, $f_{(a)k}$, $r_{(a)k}$, $i_{(a)k}$, $p_{(a)k}$, $s_{(a)k}$, są określone na powierzchni podstawowej Π , dla dowolnej chwili t . Tak więc, wielkości te są funkcjami współrzędnych (\underline{z}, t) , gdzie $\underline{z} = (x^1, x^2) \in \Pi$ jest punktem płaskiego obszaru, a $t \in T$ jest chwilą czasu. W celu określenia odpowiednich wielkości na powierzchniach ruchomych $\Pi_{(a)t}$, $a=1, \dots, r+1$, jako funkcji współrzędnych (\underline{z}, t) , $\underline{z} \in \Pi$, $t \in T$; podzielmy obustronnie przez $(a_{(a)})^{1/2}$ równania ruchu (3.4) i kinetyczne warunki brzegowe (3.13). Zauważmy następnie, że w każdym punkcie powierzchni $\Pi_{(a)t}$ można utworzyć bazę wektorową:

$$(4.1) \quad \underline{V}_{(a),K} = (V_{(a)k,K}(\underline{Z},t)), \quad \underline{N}_{(a)} = (N_{(a)k}(\underline{Z},t)),$$

$$a=1, \dots, r+1; \quad k=1,2,3; \quad K=1,2;$$

gdzie $\underline{V}_{(a),K}(\cdot)$ są wektorami stycznymi do powierzchni $\Pi_{(a)t}$, a $\underline{N}_{(a)}$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do $\Pi_{(a)t}$. Przy tak zdefiniowanej bazie wektorowej mamy następujące zależności:

$$a_{(a)KL} = V_{(a)k,K} V_{(a),L}^k,$$

$$(4.2) \quad b_{(a)KL} = -\delta_{kl} N_{(a),L}^k V_{(a),K}^l,$$

$$a_{(a)} = \det a_{(a)KL}, \quad k,l=1,2,3; \quad K,L=1,2;$$

gdzie $a_{(a)KL}$ jest pierwszym tensorem metrycznym powierzchni podstawowej, $b_{(a)KL}$ - drugim tensorem metrycznym powierzchni podstawowej, zaś $a_{(a)}$ jest wyznacznikiem macierzy $a_{(a)KL}$. Ponieważ $a_{(a)} > 0$, więc istnieje macierz $a_{(a)}^{KL}$ odwrotna do pierwszej macierzy podstawowej taka, że

$$(4.3) \quad a_{(a)}^{KL} a_{(a)LM} = \delta_M^K, \quad K,L,M=1,2.$$

Każdą wielkość wektorową we współrzędnych kartezjańskich $\underline{x} = (x^k)$ można wyrazić w bazie powyżej zdefiniowanej. Otrzymujemy zatem następujące rozkłady dla uogólnionych wielkości występujących w równaniach ruchu:

$$(a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k}^{\cdot K} = \bar{S}_{(a)}^{KL} V_{(a)k,K} + \bar{S}_{(a)}^K N_{(a)k},$$

$$(a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} = \bar{S}_{(a)}^K V_{(a)k,K} + \bar{S}_{(a)} N_{(a)k},$$

$$(4.4) \quad (a_{(a)})^{-1/2} f_{(a)k} = f_{(a)}^K V_{(a)k,K} + f_{(a)} N_{(a)k},$$

$$(a_{(a)})^{-1/2} r_{(a)k} = r_{(a)}^K V_{(a)k,K} + r_{(a)} N_{(a)k},$$

$$(a_{(a)})^{-1/2} i_{(a)k} = i_{(a)}^K V_{(a)k,K} + i_{(a)} N_{(a)k},$$

gdzie wielkości $\bar{S}_{(a)}^{KL}$, $\bar{S}_{(a)}^K$, $\bar{S}_{(a)}^K$, $\bar{S}_{(a)}$, $f_{(a)}^K$, $f_{(a)}$, $r_{(a)}^K$, $r_{(a)}$, $i_{(a)}^K$, $i_{(a)}$ wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{(a)}^{KL} &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k}^{\cdot K} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{ML}, \\
 \bar{S}_{(a)}^K &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k}^{\cdot K} N_{(a)}^k, \\
 \bar{S}_{(a)}^K &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK}, \\
 \bar{S}_{(a)} &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} N_{(a)}^k, \\
 f_{(a)}^K &= (a_{(a)})^{-1/2} f_{(a)k} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK}, \\
 f_{(a)} &= (a_{(a)})^{-1/2} f_{(a)k} N_{(a)}^k, \\
 r_{(a)}^K &= (a_{(a)})^{-1/2} r_{(a)k} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK}, \\
 r_{(a)} &= (a_{(a)})^{-1/2} r_{(a)k} N_{(a)}^k, \\
 i_{(a)}^K &= (a_{(a)})^{-1/2} i_{(a)k} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK}, \\
 i_{(a)} &= (a_{(a)})^{-1/2} i_{(a)k} N_{(a)}^k.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Wyrażenia (4.5) otrzymuje się mnożąc równania (4.4) przez wektory styczne $\bar{\Psi}_{(a),M}^k$ oraz przez wektor normalny $N_{(a)}^k$ do powierzchni $\Pi_{(a)t}$, oraz wykorzystując oczywiste zależności pomiędzy tymi wektorami:

$$\begin{aligned}
 N_{(a)}^k N_{(a)k} &= 1, \quad \bar{\Psi}_{(a),M}^k \bar{\Psi}_{(a)k,L} = a_{(a)}^{ML}, \\
 N_{(a)}^k \bar{\Psi}_{(a)k,M} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

przy czym symbol $a_{(a)}^{ML}$ w wyrażeniach (4.5) oznacza macieź odwrotną do macierzy $a_{(a)}^{KL}$. W dalszym ciągu korzystać będziemy z następującej tożsamości

$$\begin{aligned}
 \left[(a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k}^{\cdot K} \right]_{,K} &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k,K}^{\cdot K} - \\
 &= a_{(a)}^{-1} \cdot \left[(a_{(a)})^{1/2} \right]_{,K} S_{(a)k}^{\cdot K},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

oraz znanych definicji

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{matrix} L \\ L K \end{matrix} \right\}_{(a)} = (a_{(a)})^{-1/2} [(a_{(a)})^{1/2}]_{,K},$$

$$\left\{ \begin{matrix} K \\ L M \end{matrix} \right\}_{(a)} = a_{(a)}^{KN} \bar{\Psi}_{(a)k,LM} \bar{\Psi}_{(a),N}^k,$$

gdzie symbole $\left\{ \cdot \right\}_{(a)}$ są symbolami Christoffela powierzchni $\Pi_{(a)t}$. Korzystając z definicji (4.8) możemy napisać tożsamość (4.7) w następującej formie

$$(4.9) \quad (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k,K}^{\cdot K} = (\bar{S}_{(a)}^{\cdot KL}) \bar{\Psi}_{(a)k,L} + \bar{S}_{(a)}^{\cdot K} N_{(a)k}^{\cdot K},$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} L \\ L K \end{matrix} \right\}_{(a)} (\bar{S}_{(a)}^{\cdot KL}) \bar{\Psi}_{(a)k,L} + \bar{S}_{(a)}^{\cdot K} N_{(a)k}^{\cdot K}.$$

A korzystając ze znanych, w teorii powierzchni, wzorów Weingartena-Gausa

$$(4.10) \quad \bar{\Psi}_{(a),KL}^k = \left\{ \begin{matrix} M \\ K L \end{matrix} \right\}_{(a)} \bar{\Psi}_{(a),M}^k + b_{(a)KL} N_{(a)}^k,$$

$$N_{(a),L}^k = -b_{(a)LM} a_{(a)}^{MN} \bar{\Psi}_{(a),N}^k = -b_{(a)L}^N \bar{\Psi}_{(a),N}^k,$$

otrzymamy tożsamość (4.9) w postaci ostatecznej

$$(4.11) \quad (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k,K}^{\cdot K} = (\bar{S}_{(a)}^{\cdot KL})_{\parallel K} - b_{(a)K}^L \bar{S}_{(a)}^{\cdot K} \bar{\Psi}_{(a)k,L} +$$

$$+ (\bar{S}_{(a)}^{\cdot K})_{\parallel K} + b_{(a)KL} \bar{S}_{(a)}^{\cdot KL} N_{(a)k}^{\cdot K},$$

gdzie symbol $(\dots)_K$ oznacza różniczkowanie kowariantne na powierzchni $\Pi_{(a)t}$. Różniczkowanie kowariantne przy pomocy symboli Christoffela wykonuje się według znanych reguł. I tak, dla pochodnej kowariantnej pewnego pola wektorowego i tensorowego mamy:

$$(4.12) \quad a_{(a)}^K_{\parallel L} = a_{(a),L}^K + \left\{ \begin{matrix} K \\ L M \end{matrix} \right\}_{(a)} a_{(a)}^M,$$

$$A_{(a)}^{\cdot KL}_{\parallel M} = A_{(a),M}^{\cdot KL} + \left\{ \begin{matrix} K \\ N M \end{matrix} \right\}_{(a)} A_{(a)}^{\cdot NL} + \left\{ \begin{matrix} L \\ N M \end{matrix} \right\}_{(a)} A_{(a)}^{\cdot KN}.$$

Korzystając z zależności (4.4) i tożsamości (4.11), równanie ruchu (3.4) możemy napisać teraz w postaci konwekcyjnej:

$$\begin{aligned}
 \overline{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) \Big|_K - b_{(a)K}^L(\underline{z}, t) \overline{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) + \overline{S}_{(a)}^L(\underline{z}, t) + \\
 (4.13) \quad + f_{(a)}^L(\underline{z}, t) + r_{(a)}^L(\underline{z}, t) = i_{(a)}^L(\underline{z}, t), \\
 \overline{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) \Big|_K + b_{(a)KL}(\underline{z}, t) \overline{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) + \overline{S}_{(a)}^L(\underline{z}, t) + \\
 + f_{(a)}(\underline{z}, t) + r_{(a)}(\underline{z}, t) = i_{(a)}(\underline{z}, t), \\
 \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad a=1, \dots, r+1, \quad K, L=1, 2.
 \end{aligned}$$

Analogicznie transformujemy kinetyczne warunki brzegowe (3.13) do postaci konwekcyjnej. Mając na uwadze zależność

$$(4.14) \quad n_{(a)K} dL_{(a)} = (a_{(a)})^{1/2} \overline{n}_K dL,$$

gdzie $n_{(a)K}$ i $dL_{(a)}$ oraz \overline{n}_K i dL oznaczają odpowiednio wektor jednostkowy zewnętrznie normalny do $\partial\Pi_{(a)t}$ i element długości łuku $\partial\Pi_{(a)t}$ w konfiguracji aktualnej, oraz wektor jednostkowy zewnętrznie normalny do $\partial\Pi$ i element długości łuku $\partial\Pi$.

A następnie wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 p_{(a)}^K &= (dL/dL_{(a)}) p_{(a)k} \overline{V}_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL}, \\
 p_{(a)} &= (dL/dL_{(a)}) p_{(a)k} \overline{N}_{(a)}^k, \\
 (4.15) \quad s_{(a)}^K &= (dL/dL_{(a)}) s_{(a)k} \overline{V}_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL}, \\
 s_{(a)} &= (dL/dL_{(a)}) s_{(a)k} \overline{N}_{(a)}^k,
 \end{aligned}$$

kinetyczne warunki brzegowe możemy napisać w postaci konwekcyjnej

$$\begin{aligned}
 \overline{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) n_{(a)L}(\underline{z}, t) = p_{(a)}^K(\underline{z}, t) + s_{(a)}^K(\underline{z}, t), \\
 (4.16) \quad \overline{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) n_{(a)K}(\underline{z}, t) = p_{(a)}(\underline{z}, t) + s_{(a)}(\underline{z}, t), \\
 \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad a=1, \dots, r+1, \quad K, L=1, 2.
 \end{aligned}$$

Jeśli w końcu weźmiemy pod uwagę, że wielkości $r_{(a)k}$ i $s_{(a)k}$ wyrażają się analogicznie według (4.4)₄ tj.:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} r_{(a)k} &= (a_{(a)})^{1/2} (r_{(a)}^K \Psi_{(a)k,K} + r_{(a)} N_{(a)k}), \\ s_{(a)k} &= (dL_{(a)}/dL)(s_{(a)}^K \Psi_{(a)k,K} + s_{(a)} N_{(a)k}), \end{aligned}$$

to otrzymamy warunek idealności więzów (3.18) w postaci konwekcyjnej

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \int_{\Pi_{(a)t}} (r_{(a)}^K \delta \Psi_K^{(a)} + r_{(a)} \delta \bar{\Psi}^{(a)}) d\Pi_{(a)} + \\ + \int_{\partial \Pi_{(a)t}} (s_{(a)}^K \delta \Psi_K^{(a)} + s_{(a)} \delta \bar{\Psi}^{(a)}) dL_{(a)} = 0 \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \delta \Psi_K^{(a)} &= \Psi_{(a),K}^k \delta \bar{\Psi}_k^{(a)}, \quad \delta \bar{\Psi}^{(a)} = N_{(a)}^k \delta \bar{\Psi}_k^{(a)}, \\ d\Pi_{(a)} &= (a_{(a)})^{1/2} d\Pi. \end{aligned}$$

Warunek idealności (4.18) ma być spełniony dla każdej funkcji $\delta \Psi_K^{(a)}$ i $\delta \bar{\Psi}^{(a)}$ zgodnej z dodatkowymi więzami postaci (3.17).

Równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych: $\bar{S}_{(a)}^{KL}, \bar{S}_{(a)}^K, S_{(a)}^K, S_{(a)}$; równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych i sił reakcji więzów: $f_{(a)}^K, f_{(a)}, r_{(a)}^K, r_{(a)}, i_{(a)}^K, i_{(a)}, p_{(a)}, P_{(a)}, s_{(a)}^K, s_{(a)}$, we współrzędnych konwekcyjnych, otrzymamy wprowadzając do relacji (4.5) i (4.15) wyrażenia (3.9) i (3.14). Po wykonaniu stosownych operacji otrzymujemy:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k}^{\cdot K} \Psi_{(a),M}^k a_{(a)}^{ML} = \\ &= (a_{(a)})^{-1/2} \Psi_{(a)l,M} a_{(a)}^{ML}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (T^{PK}(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,P} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{3K} d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) J d\xi + \right. \\ & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (T^{PK}(\Psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,P} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{3K} d_{(a-1)}^1) \xi J d\xi \right], \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} \cdot^K N_{(a)}^k = (a_{(a)})^{-1/2} N_{(a)1}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (T^{KL}(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{3K} d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) J d\xi + \right. \\ & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (T^{KL}(\Psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{3K} d_{(a-1)}^1) \xi J d\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.20) \quad \bar{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} \bar{\Psi}_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK} = \\ &= (a_{(a)})^{-1/2} \bar{\Psi}_{(a)1,M} a_{(a)}^{MK}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (T^{P3}(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,P} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{33} d_{(a)}^1) J d\xi - \right. \\ & - h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (T^{P3}(\Psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,P} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + T^{33} d_{(a-1)}^1) J d\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} S_{(a)k} N_{(a)}^k = \\ &= (a_{(a)})^{-1/2} N_{(a)k}. \end{aligned}$$

$$\cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (T^{L3}(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ \left. + T^{33} d_{(a)}^1 \right] J d\xi - \\ - h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (T^{L3}(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ \left. + T^{33} d_{(a-1)}^1 \right] J d\xi ,$$

$$f_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} f_{(a)k} \psi_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK} = \\ = (a_{(a)})^{-1/2} \psi_{(a)1,M} a_{(a)}^{MK} .$$

$$(4.20) \quad \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} \rho (b^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ \left. + b^3 d_{(a)}^1 \right] (h_{(a)} - \xi) J d\xi + \\ + \delta_a^1 \left[(p^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + p^3 d_{(a)}^1 \right] \cdot \\ \cdot (h_{(a)} - \xi) j \Big|_{\xi=0, h_{(a)}} + \\ + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho (b^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ \left. + b^3 d_{(a-1)}^1 \right] \xi J d\xi + \\ + \delta_a^{n+1} \left[(p^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \right. \\ \left. + p^3 d_{(a-1)}^1 \right] \xi j \Big|_{\xi=0, h_{(a-1)}} , \\ f_{(a)}(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} f_{(a)k} N_{(a)}^k = \\ = (a_{(a)})^{-1/2} N_{(a)1} .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} \rho (b^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1),_L + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + p^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j d\xi + \right. \\
 & + \delta_a^1 \left[(p^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1),_L + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + p^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j \right]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\
 & + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} \rho (b^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1),_L + \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + p^3 d_{(a-1)}^1)(\xi) j d\xi + \right. \\
 & + \delta_a^{r+1} \left[(p^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1),_L + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + p^3 d_{(a-1)}^1)(\xi) j \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}} \Big], \\
 (4.20) \quad r_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} r_{(a)K} \psi_{(a),M}^{aMK} = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} \psi_{(a)1,M}^{aMK} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (r^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1),_L + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + r^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j d\xi + \right. \\
 & + \left[(s^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1),_L + s^3 d_{(a)}^1) \cdot \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \cdot (h_{(a)} - \xi) j \right]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\
 & + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (r^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1),_L + \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + r^3 d_{(a-1)}^1)(\xi) j d\xi + \right. \\
 & + \left[(s^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1),_L + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + s^3 d_{(a-1)}^1)(\xi) j \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}} \Big],
 \end{aligned}$$

$$r_{(a)}(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} r_{(a)k} N_{(a)}^k = (a_{(a)})^{-1/2} N_{(a)1}.$$

$$(4.20) \quad \begin{aligned} & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (r^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + r^3 d_{(a)}^1 (h_{(a)} - \xi) J d\xi + \right. \\ & + \left[(s^L(\psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + s^3 d_{(a)}^1 \right] \cdot (h_{(a)} - \xi)^j \Big]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\ & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (r^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + r^3 d_{(a-1)}^1 \right] \xi^j J d\xi + \\ & + \left[(s^L(\psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + s^3 d_{(a-1)}^1 \right] \xi^j \Big]_{\xi=0, h_{(a-1)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} i_{(a)k} \psi_{(a),M}^k a_{(a)}^{MK} = \\ &= (a_{(a)})^{-1/2} \psi_{(a)1,M} a_{(a)}^{MK}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \rho ((h_{(a)} - \xi)^2 \psi_{(a)}^1 + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (h_{(a)} - \xi) \xi \psi_{(a+1)}^1) J d\xi + \right. \\ & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho (\xi^2 \psi_{(a)}^1 + (h_{(a-1)} - \xi) \cdot \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \xi \psi_{(a-1)}^1) J d\xi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (dL/dL_{(a)}) P_{(a)k} \Psi_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL} = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} n_{(a)K} \bar{n}^K P_{(a)k} \Psi_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL} = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} k_{(a)} \Psi_{(a)l,M} a_{(a)}^{KM} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (p^L(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j d\xi + \right. \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (p^L(\Psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a-1)}^1) \xi j d\xi \right] ,
 \end{aligned}$$

(4.20)

$$\begin{aligned}
 P_{(a)}(\underline{z}, t) &= (dL/dL_{(a)}) P_{(a)k} N_{(a)}^k = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} k_{(a)} N_{(a)l} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (p^L(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j d\xi + \right. \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (p^L(\Psi_{(a-1)}^1) + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 &\quad \left. + p^3 d_{(a-1)}^1) \xi j d\xi \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (dL/dL_{(a)}) s_{(a)k} \Psi_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL} = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} n_{(a)K} \bar{n}^K s_{(a)k} \Psi_{(a),L}^k a_{(a)}^{KL} = \\
 &= (a_{(a)})^{-1/2} k_{(a)} \Psi_{(a)l,L} a_{(a)}^{KL} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (s^L(\Psi_{(a)}^1) + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 &\quad \left. + s^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) j d\xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (s^L(\Psi_{(a-1)}^1 + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + s^3 d_{(a-1)}^1) \xi^j d\xi \Big], \\
 (4.20) \quad s_{(a)}(\underline{z}, t) & = (dL/dL_{(a)}) s_{(a)k} N_{(a)}^k = \\
 & = (a_{(a)})^{-1/2} k_{(a)} N_{(a)l} \cdot \\
 & \cdot \left[h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (s^L(\Psi_{(a)}^1 + \xi d_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + s^3 d_{(a)}^1)(h_{(a)} - \xi) \xi^j d\xi + \right. \\
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (s^L(\Psi_{(a-1)}^1 + \xi d_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + s^3 d_{(a-1)}^1) \xi^j d\xi \Big],
 \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $k_{(a)}$ dla miary kąta obrotu stycznej do powierzchni ruchomej $\Pi_{(a)t}$ mierzonego od konfiguracji odniesienia:

$$(4.21) \quad k_{(a)} = n_{(a)K} \bar{n}^K; \quad \# /$$

Ponadto, w wyrażeniach (4.20), obowiązują nadal pomocnicze definicje (3.10).

Wyprowadzone powyżej równania we współrzędnych konwekcyjnych tj.: równania ruchu (4.13), kinetyczne warunki brzegowe (4.16), równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych oraz równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych i sił reakcji więzów (4.20), dodatkowe równania więzów dla uogólnionych współrzędnych (nieznanych funkcji) (3.17) oraz warunków idealności więzów (4.18), tworzą podstawowy układ równań elastomechaniki ciał warstwowych z więzami kinematycznymi (3.7)

$\# /$ Zachodzi bowiem zależność: $n_{(a)K} dL_{(a)} = (a_{(a)})^{1/2} \bar{n}_K dL$,
 $dL/dL_{(a)} = (a_{(a)})^{-1/2} n_{(a)K} \bar{n}^K = (a_{(a)})^{-1/2} k_{(a)}$.

i (3.17). Wszystkie wielkości występujące w tych równaniach są funkcjami płaskich współrzędnych i czasu: (\underline{Z}, t) , $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, a odniesione są do powierzchni ruchomych $\Pi_{(a)t}$, $a=1, \dots, r+1$.

5. Podstawowe równania teorii dużych odkształceń sprężystych w postaci przyrostowej

Założmy, że $\overset{*}{B}$ jest obszarem w pewnej ustalonej konfiguracji ciała warstwowego B zdefiniowanego w rozdziale 2. Obszar dowolnej warstwy $\overset{*}{B}_{(a)}$, $a=1, \dots, r$, w tej konfiguracji jest parametryzowany współrzędnymi krzywoliniowymi $\underline{X} = (\underline{Z}, \xi) \in B_{(a)}$, $a=1, \dots, r$ gdzie $\underline{Z} = (X^1, X^2) \in \Pi$, $\xi = X^3 - H_{(a)} \in (0, h_{(a)})$; $B_{(a)} = \Pi \times (0, h_{(a)})$ przy czym Π jest pewnym regularnym obszarem na płaszczyźnie OX^1X^2 , a $(0, h_{(a)})$ jest odcinkiem wyrażającym grubość warstwy ciała B. Przyjmujemy zatem, że obszar warstwy $\overset{*}{B}_{(a)}$ w jej ustalonym powłozeniu opisują równania:

$$(5.1) \quad \overset{*}{x}(\underline{X}) = (H_{(a+1)} - X^3) h_{(a)}^{-1} \overset{*}{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}) + \\ + (X^3 - H_{(a)}) h_{(a)}^{-1} \overset{*}{\Psi}_{(a+1)}(\underline{Z}), \quad a=1, \dots, r$$

Jeśli oznaczymy:

$$(5.2) \quad \overset{*}{d}_{(a)}(\underline{Z}) = h_{(a)}^{-1} (\overset{*}{\Psi}_{(a+1)}(\underline{Z}) - \overset{*}{\Psi}_{(a)}(\underline{Z})), \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)},$$

to równanie (5.1) przyjmie postać

$$(5.3) \quad \overset{*}{x}(\underline{X}) = \overset{*}{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}) + \xi \overset{*}{d}_{(a)}(\underline{Z}), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad \underline{Z} \in \Pi,$$

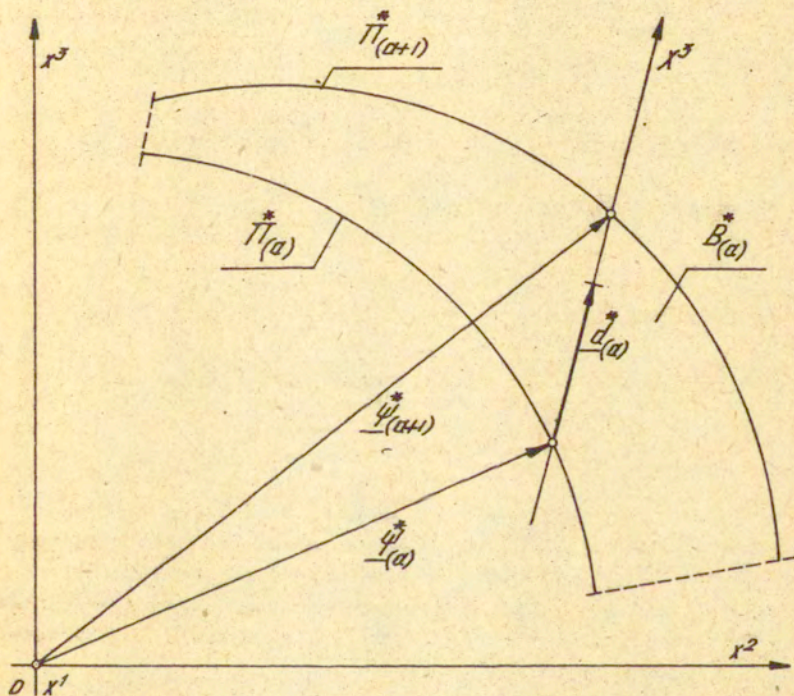
$$a=1, \dots, r$$

W powyższych równaniach $\overset{*}{\Psi}_{(a)} = \overset{*}{\Psi}_{(a)}(\underline{Z})$, $\overset{*}{\Psi}_{(a+1)} = \overset{*}{\Psi}_{(a+1)}(\underline{Z})$, są równaniami parametrycznymi gładkich płatów powierzchni ograniczających warstwę $\overset{*}{B}_{(a)}$, natomiast równanie $\overset{*}{d}_{(a)} = \overset{*}{d}_{(a)}(\underline{Z})$, $a=1, \dots, r$, wyraża pole dyrektorów (wektorów bezwymiarowych) najeżających powierzchnię $\overset{*}{\Pi}_{(a)}$, którą nazywać będziemy powierzchnią podstawową warstwy $\overset{*}{B}_{(a)}$ w ustalonej konfiguracji (rys. 5.1). Ustalona konfiguracja ciała warstwowego dana równaniem (5.1) może być zarówno konfiguracją stanu odkształconego, jak

też konfiguracją stanu nieodkształconego. Dla ogólności rozważań zakładamy, że jest to konfiguracja pewnego stanu odkształconego $[\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{T}}]$. Śladowe tensora metrycznego $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{X}})$ we współrzędnych $\underline{\underline{X}} = (X^\alpha)$, $\alpha=1,2,3$, parametryzujących obrzar warstwy $\underline{\underline{B}}_{(a)}$, dane są wzorem:

$$(5.4) \quad \underline{\underline{G}}_{\alpha\beta}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{X}}^k, \alpha \underline{\underline{X}}^l, \beta \delta_{kl}, \quad \alpha, \beta=1,2,3; \quad k, l=1,2,3.$$

Wstawiając tam, w miejsce funkcji $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}(\underline{\underline{X}})$, prawą stronę równania (5.3), otrzymujemy dla składowych tensora metrycznego następujące wyrażenia:



Rys. 5.1. Wielkości podstawowe związane z warstwą $\underline{\underline{B}}_{(a)}$ w pewnej ustalonej konfiguracji.

$$\begin{aligned}
 \dot{G}_{KL}(\underline{X}) &= \dot{a}_{(a)KL} - 2\dot{b}_{(a)KL} \xi + \dot{c}_{(a)KL} \xi^2, \quad K,L=1,2; \\
 (5.5) \quad \dot{G}_{K3}(\underline{X}) &= \dot{a}_{(a)K3} + \dot{b}_{(a)K3} \xi, \\
 \dot{G}_{33}(\underline{X}) &= \dot{a}_{(a)33},
 \end{aligned}$$

gdzie wielkości $\dot{a}_{(a)\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = K, L, 3$, reprezentują składowe pierwszego tensora metrycznego, zaś wielkości $\dot{b}_{(a)\alpha\beta}$ i $\dot{c}_{(a)\alpha\beta}$ reprezentują składowe uogólnionego drugiego i trzeciego tensora metrycznego powierzchni podstawowej $\dot{\Pi}_{(a)}$ o równaniu $\dot{\Psi}_{(a)} = \dot{\Psi}_{(a)}(\underline{X})$, $\underline{z} \in \Pi$. Te składowe tensorów metrycznych, wyrażają się przez funkcję ruchu następująco:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{(a)KL} &= \dot{\Psi}_{(a),K}^k \dot{\Psi}_{(a),L}^1 \delta_{kl}, \\
 \dot{b}_{(a)KL} &= -2^{-1} (\dot{\Psi}_{(a),K}^k \dot{d}_{(a),L}^1 + \dot{\Psi}_{(a),L}^1 \dot{d}_{(a),K}^k) \delta_{kl}, \\
 (5.6) \quad \dot{c}_{(a)KL} &= \dot{d}_{(a),K}^k \dot{d}_{(a),L}^1 \delta_{kl}, \\
 \dot{a}_{(a)K3} &= \dot{\Psi}_{(a),K}^k \dot{d}_{(a)}^1 \delta_{kl}, \\
 \dot{b}_{(a)K3} &= \dot{d}_{(a),K}^k \dot{d}_{(a)}^1 \delta_{kl}, \\
 \dot{a}_{(a)33} &= \dot{d}_{(a)}^k \dot{d}_{(a)}^1 \delta_{kl}, \quad k,l=1,2,3; \quad K,L=1,2;
 \end{aligned}$$

$$a=1, \dots, r+1.$$

Dla jednoznacznej parametryzacji obszaru $\dot{B}_{(a)}$ współrzędnymi krzywoliniowymi $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha=1,2,3$, zakładamy, że jest spełniony warunek $\det \dot{x}^k_{\alpha} > 0$, czyli, że przy założeniu regularności funkcji $\dot{\Psi}_{(a)}$ i $\dot{d}_{(a)}$, istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność pomiędzy dowolnymi współrzędnymi krzywoliniowymi (X^α) i kartezjańskimi współrzędnymi (x^k) taka, że

* / Tzn., że jeśli dyrektor $\dot{d}_{(a)}$ jest jednostkowy i normalny do $\dot{\Pi}_{(a)}$, to $\dot{b}_{(a)\alpha\beta}$ i $\dot{c}_{(a)\alpha\beta}$ są odpowiednio drugim i trzecim tensorem metrycznym powierzchni podstawowej $\dot{\Pi}_{(a)}$.

$$(5.7) \quad x^k = \overset{*}{x}^k(\underline{x}), \quad X^\alpha = (\overset{*}{x}^{\alpha-1})^\alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in B_{(a)}.$$

Założmy teraz, że dany jest pewien ruch ciała warstwowego zgodny z więzami postaci (3.2). Zatem, każdy punkt dowolnej warstwy o współrzędnych $(\underline{Z}, \xi) \in B_{(a)}$, $\underline{Z} \in (X^1, X^2) \in \Pi$, $\xi \in (0, h_{(a)})$, $a=1, \dots, r$, który w pewnej ustalonej konfiguracji ciała zajmował miejsce o współrzędnych $x^k = \overset{*}{x}^k(\underline{x})$, określone równaniem (5.3), zajmuje w konfiguracji aktualnej w chwili t , w tej samej przestrzeni, miejsce o współrzędnych

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \underline{x}(\underline{X}, t) &= \underline{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}, t) + \xi \underline{d}_{(a)}(\underline{Z}, t), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad t \in T, \\ \underline{d}_{(a)}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (\underline{\Psi}_{(a+1)}(\underline{Z}, t) - \underline{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}, t)), \\ \underline{Z} &\in \Pi, \quad a=1, \dots, r. \end{aligned}$$

Składowe metrycznego tensora odkształcenia wyznaczamy ze wzoru

$$(5.9) \quad G_{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = \overset{*}{x}^k_{,\alpha} \overset{*}{x}^l_{,\beta} \delta_{kl}, \quad k, l=1, 2, 3; \quad \alpha, \beta=1, 2, 3.$$

Biorąc pod uwagę przyjętą postać więzów (5.8) i wprowadzając ją do (5.9) otrzymamy, po wykonaniu różniczkowania, wyrażenia analogiczne do tych w (5.5) i (5.6), a mianowicie:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} G_{KL}(\underline{X}, t) &= a_{(a)KL} - 2b_{(a)KL} \xi + c_{(a)KL} \xi^2, \quad K, L=1, 2; \\ G_{K3}(\underline{X}, t) &= a_{(a)KL} + b_{(a)KL} \xi, \\ G_{33}(\underline{X}, t) &= a_{(a)33}, \end{aligned}$$

gdzie wielkość $a_{(a)\alpha\beta}$, $\alpha, \beta=K, L, 3$, reprezentuje składowe pierwszego tensora metrycznego, zaś $b_{(a)\alpha\beta}$ i $c_{(a)\alpha\beta}$ reprezentują składowe uogólnionego drugiego i trzeciego tensora metrycznego powierzchni ruchomej $\Pi_{(a)t}$ o równaniu $\underline{\Psi}_{(a)} = \underline{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}, t)$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$. Wielkości te wyrażają się przez funkcję $\underline{\Psi}_{(a)}(\cdot)$ następująco:

$$\begin{aligned}
 a_{(a)KL} &= \Psi_{(a),K}^k \Psi_{(a)k,L}, \\
 b_{(a)KL} &= -2^{-1} (\Psi_{(a),K}^k d_{(a)k,L} + \Psi_{(a)k,L} d_{(a),K}^k), \\
 c_{(a)KL} &= d_{(a),K}^k d_{(a)k,L}, \\
 a_{(a)K3} &= \Psi_{(a),K}^k d_{(a)k}, \\
 b_{(a)K3} &= d_{(a),K}^k d_{(a)k}, \\
 a_{(a)33} &= d_{(a)}^k d_{(a)k}, \quad k,l=1,2,3; \quad K,L=1,2; \\
 & a=1, \dots, r+1.
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

W teorii dużych odkształceń przyjmuje się, że dany jest pewien ustalony stan naprężenia $\overset{*}{T}^{\alpha\beta} = \overset{*}{T}^{\alpha\beta}(\underline{X})$ i odpowiadający jemu stan odkształcenia $\overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \overset{*}{G}_{\alpha\beta}(\underline{X})$, względem którego określamy przyrosty $\Delta G_{\alpha\beta}$ składowych tensora odkształcenia (w przeciwieństwie do teorii małych odkształceń, gdzie przyjmuje się, że dany jest pewien stan beznaprężeniowy (naturalny)) tak, że

$$G_{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = \overset{*}{G}_{\alpha\beta}(\underline{X}) + \Delta G_{\alpha\beta}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad t \in T.
 \tag{5.12}$$

Założmy, że materiał tworzący każdą warstwę ciała jest sprężysty tzn., że istnieje funkcja energii odkształcenia

$$\sigma(\underline{X}, \underline{G}) = \sigma(\underline{X}, \overset{*}{G} + \Delta \underline{G}), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad a=1, \dots, r,
 \tag{5.13}$$

taka, że

$$T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = 2 \rho \partial \sigma / \partial G_{\alpha\beta} = 2 \rho \partial \sigma / \partial \Delta G_{\alpha\beta}, \quad \rho > 0.
 \tag{5.14}$$

Rozłóżmy następnie, prawą stronę równania konstytutywnego (5.14) w szereg Taylora w otoczeniu stanu $\Delta G_{\alpha\beta} = 0$. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned}
 (5.15) \quad 2 \rho \partial \sigma / \partial \Delta G_{\alpha\beta} &= (2 \rho \partial \sigma / \partial \Delta G_{\alpha\beta})_{\Delta G_{\alpha\beta}=0} + \\
 &+ \left[2 \rho (\partial^2 \sigma / (\partial \Delta G_{\alpha\beta} \partial \Delta G_{\delta\delta})) \Delta G_{\delta\delta} \right]_{\Delta G_{\alpha\beta}=0} + o(\Delta G_{\alpha\beta}),
 \end{aligned}$$

gdzie funkcja $o(\Delta G_{\alpha\beta})$ ma tą własność, że

$$o(\Delta G_{\alpha\beta})/\Delta G_{\alpha\beta} \longrightarrow 0, \text{ gdy } \Delta G_{\alpha\beta} \longrightarrow 0, \alpha, \beta, \delta, \delta=1, 2, 3.$$

Jeśli funkcję energii odkształcenia w stanie $\Delta G_{\alpha\beta} = 0$ oznaczymy symbolem $\sigma^* = \sigma^*(\underline{X}, \underline{G})$ tak, że

$$(5.16) \quad \dot{T}^{\alpha\beta} = 2 \rho \delta\sigma^*/\delta\dot{G}_{\alpha\beta} = (2 \rho \delta\sigma^*/\delta \Delta G_{\alpha\beta})_{\Delta G_{\alpha\beta}=0},$$

zaś tensor sprężystości ciała warstwowego w stanie $\Delta G_{\alpha\beta} = 0$ oznaczymy symbolem

$$(5.17) \quad c^{\alpha\beta\delta\delta} = c^{\alpha\beta\delta\delta}(\underline{X}, \underline{G}) = \left[2 \rho \delta^2\sigma^*/(\delta \Delta G_{\alpha\beta} \delta \Delta G_{\delta\delta}) \right]_{\Delta G_{\alpha\beta}=0},$$

to równanie konstytutywne (5.15) można napisać w postaci

$$(5.18) \quad T^{\alpha\beta} = \dot{T}^{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\delta\delta} \Delta G_{\delta\delta} + o(\Delta G_{\alpha\beta}),$$

lub w postaci przyrostowej

$$(5.19) \quad \Delta T^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\delta\delta} \Delta G_{\delta\delta} + o(\Delta G_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta, \delta, \delta=1, 2, 3,$$

gdzie przyrost tensora naprężenia

$$(5.20) \quad \Delta T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - \dot{T}^{\alpha\beta},$$

jest przyrostem mierzonym od pewnego ustalonego stanu naprężenia $\dot{T}^{\alpha\beta} = \dot{T}^{\alpha\beta}(\underline{X})$. Jeśli przyrosty tensora odkształcenia $\Delta \underline{G}$ i tensora naprężenia $\Delta \underline{T}$ od pewnego ustalonego stanu $[\dot{\underline{X}}, \dot{\underline{T}}]$ są małe, to wtedy mamy teorię przyrostową z równaniem konstytutywnym postaci:

$$(5.21) \quad \Delta T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = c^{\alpha\beta\delta\delta}(\underline{X}) \Delta G_{\delta\delta}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad t \in T,$$

oraz funkcją ruchu postaci:

$$(5.22) \quad \Delta \dot{\underline{X}}^k(\underline{X}, t) = \dot{\underline{X}}^k(\underline{X}, t) - \dot{\underline{X}}^k(\underline{X}), \quad \underline{X} \in B_{(a)}, \quad t \in T,$$

gdzie $\Delta \dot{\underline{X}}(\cdot)$ jest przyrostem funkcji ruchu od pewnej ustalonej konfiguracji $\dot{\underline{X}}(\cdot)$.

W celu otrzymania pełnego sformułowania przyrostowego elastodynamiki ciała warstwowego, należy we wszystkich równaniach rozdziału 3 i 4 podstawić wyrażenie $(\underline{\dot{X}} + \Delta \underline{\dot{X}})$ zamiast funkcji $\underline{X}(\cdot)$, zaś wyrażenie $(\underline{\dot{T}} + \Delta \underline{\dot{T}})$ zamiast funkcji $\underline{T}(\cdot)$, oraz zastosować analogiczną procedurę jak przy wyprowadzaniu równania konstytutywnego (5.21).

6. Teoria małych odkształceń sprężystych ciał warstwowych ^{*}/

W poprzednich rozdziałach wyprowadzone zostały podstawowe równania opisujące modele sprężystych ciał warstwowych, przy założeniu skończonych deformacji $\underline{X}(\cdot)$. Dla opisu problemów mechaniki konstrukcji warstwowych, duże znaczenie mają modele budowane przy założeniu małych odkształceń oraz liniowych relacji konstytutywnych, pomiędzy tensorem naprężenia i odkształcenia. Teoria małych odkształceń wymaga wprowadzenia do rozważań, pewnego stanu nieodkształconego $[\underline{X}, \underline{T}]$, względem którego określamy przyrosty $\Delta \underline{G}$ tensora odkształcenia. Jeśli ponadto wprowadzimy definicję tensora odkształcenia Greena-Saint Venanta $\underline{E} = \underline{E}(\underline{X}, t)$ możemy napisać:

$$(6.1) \quad E_{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = 2^{-1} (G_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}^0) = 2^{-1} \Delta G_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

gdzie $G_{\alpha\beta}^0(\cdot)$ są składowymi tensora metrycznego we współrzędnych $\underline{X} = (X^\alpha)$, parametryzujących obszar B ciała warstwowego w konfiguracji nieodkształconej. Mówiąc o teorii małych odkształceń, ograniczymy się do takich ruchów ciała warstwowego, dla których miary odkształcenia Greena-Saint Venanta są na tyle małe, że każdą funkcję różniczkowalną $f(\underline{E})$ można aproksymować z wystarczającą dokładnością szeregiem analogicznym jak w (5.15) tj.:

$$(6.2) \quad f(\underline{E}) \approx f(\underline{E}) \Big|_{\underline{E}=0} + (df(\underline{E})/d\underline{E}) \Big|_{\underline{E}=0} \underline{E}.$$

Oznacza to, że zachowuje się miary odkształcenia w pierwszej potędze, pomijając ich iloczyny. Teorię taką, gdzie aproksymacja (6.2) jest możliwa, nazywamy teorią małych odkształceń sprężystych.

^{*}/ Szczególnym przypadkiem tych rozważań jest nieliniowa teoria grubych powłok sprężystych rozwijana przez autora w pracach [50, 51, 52].

Podstawowe równania teorii małych odkształceń sprężystych można otrzymać bezpośrednio z równań w postaci przyrostowej, które wyprowadzone zostały w rozdziale 5. W tym celu należy założyć, że dany jest pewien stan nieodkształcony $\left[\begin{smallmatrix} \underline{X} \\ \underline{T} \end{smallmatrix} \right]_0$ ciała warstwowego B. I wówczas, z równania (5.21) w postaci przyrostowej mamy,

$$(6.3) \quad T^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}_0 = 2 C^{\alpha\beta\delta\delta} E_{\delta\delta}, \quad \alpha, \beta, \delta, \delta = 1, 2, 3.$$

Jeśli ponadto założymy, że stan $\left[\begin{smallmatrix} \underline{X} \\ \underline{T} \end{smallmatrix} \right]_0$ jest stanem naturalnym tzn. $T^{\alpha\beta}_0 = 0$, więc z (6.3) otrzymujemy równanie konstytutywne teorii małych odkształceń:

$$(6.4) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = 2 C^{\alpha\beta\delta\delta}(\underline{X}) E_{\delta\delta}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in B, \quad t \in T,$$

w którym $C^{\alpha\beta\delta\delta}(\cdot)$ jest tensorem sprężystości warstw w stanie naturalnym, zaś $E_{\delta\delta}(\cdot)$ jest tensorem odkształcenia Greena- Saint Venanta definiowanym w (6.1), i mierzonym od konfiguracji ciała nieodkształconego B. Jeśli przyjmiemy, że obszar B jest parametryzowany współrzędnymi krzywoliniowymi normalnymi $\underline{X} = (\underline{Z}, \xi) \in B_{(a)}$ $a=1, \dots, r$, gdzie $\underline{Z} \in \Pi$, $\xi \in (0, h_{(a)})$, to wtedy konfigurację dowolnej warstwy $B_{(a)}$ w stanie nieodkształconym opisuje równanie

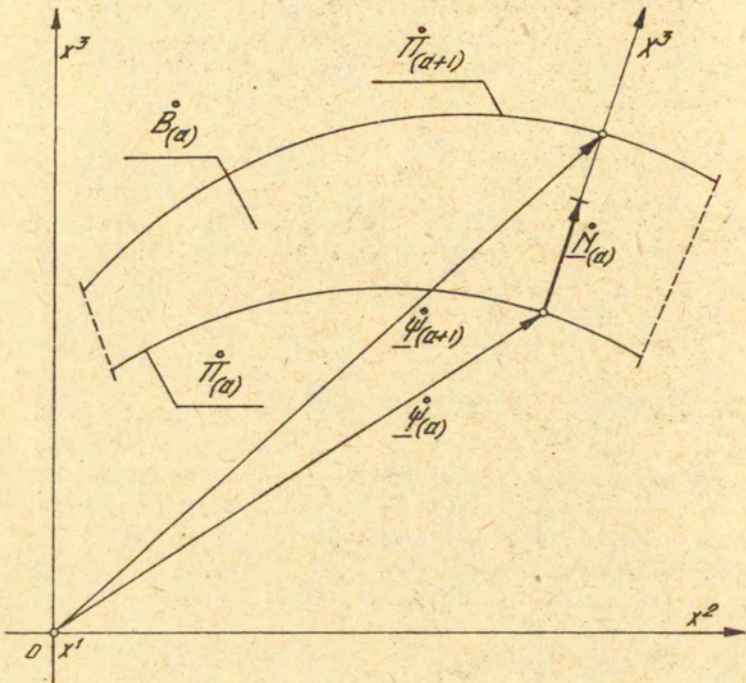
$$(6.5) \quad \underline{X}^k(\underline{X}) = \underline{\Psi}_{(a)}^k(\underline{Z}) + \xi N_{(a)}^k(\underline{Z}), \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \quad a=1, \dots, r,$$

gdzie $\underline{\Psi}_{(a)}^k(\cdot)$, $a=1, \dots, r+1$, jest równaniem parametrycznym powierzchni podstawowej $\Pi_{(a)}$, zaś $N_{(a)}^k(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, jest polem wektorów jednostkowych normalnych do tej powierzchni (rys. 6.1). Mamy zatem:

$$(6.6) \quad N_{(a)}^k(\underline{Z}) = \left| \left(\underline{\Psi}_{(a+1)}^k(\underline{Z}) - \underline{\Psi}_{(a)}^k(\underline{Z}) \right) \right|^1 \left(\underline{\Psi}_{(a+1)}^k(\underline{Z}) - \underline{\Psi}_{(a)}^k(\underline{Z}) \right),$$

$a=1, \dots, r$

Składowe tensora metrycznego we współrzędnych normalnych wyrażają się wzorem (5.5) i przyjmują wartości następujące:



Rys. 6.1. Wielkości podstawowe związane z warstwą $\overset{\circ}{B}(a)$ w konfiguracji nieodkształconej.

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{G}_{KL}(\underline{X}) &= \overset{\circ}{a}_{(a)KL} - 2 \overset{\circ}{b}_{(a)KL} \xi + \overset{\circ}{c}_{(a)KL} \xi^2, \quad 0 \leq \xi \leq h(a) \\
 \overset{\circ}{G}_{K3}(\underline{X}) &= 0, \\
 \overset{\circ}{G}_{33}(\underline{X}) &= 1,
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

gdzie wielkości $\overset{\circ}{a}_{(a)KL}(\underline{Z})$, $\overset{\circ}{b}_{(a)KL}(\underline{Z})$, $\overset{\circ}{c}_{(a)KL}(\underline{Z})$, są składowymi pierwszego, drugiego i trzeciego tensora metrycznego powierzchni podstawowej $\overset{\circ}{\Pi}(a)$ w konfiguracji nieodkształconej. Te wielkości wyrażają się, przez funkcję opisującą powierzchnię podstawową, następująco:

$$\begin{aligned}
 a_{(a)KL}(\underline{Z}) &= \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L}^l \delta_{kl}, \\
 (6.8) \quad b_{(a)KL}(\underline{Z}) &= -2^{-1} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k \overset{\circ}{N}_{(a),L}^l + \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L}^l \overset{\circ}{N}_{(a),K}^k) \delta_{kl}, \\
 c_{(a)KL}(\underline{Z}) &= \overset{\circ}{N}_{(a),K}^k \overset{\circ}{N}_{(a),L}^l \delta_{kl}, \\
 a=1, \dots, r; \quad K, L=1, 2; \quad k, l=1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Dla jednoznacznej parametryzacji obszaru $\overset{\circ}{B}$ za pomocą krzywoliniowych współrzędnych normalnych $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha=1, 2, 3$; zakładamy, że spełnionych jest warunek $\det G_{\alpha\beta} > 0$. Wyrażając teraz, składowe tensora odkształcenia Greena-Saint Venanta (6.1) przez składowe tensora odkształcenia Greena (5.10) i przez składowe tensora metrycznego (6.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad E_{KL}(\underline{X}, t) &= 2^{-1} (a_{(a)KL} - \overset{\circ}{a}_{(a)KL}) - (b_{(a)KL} - \overset{\circ}{b}_{(a)KL}) \xi + \\
 &\quad + 2^{-1} (c_{(a)KL} - \overset{\circ}{c}_{(a)KL}) \xi^2, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \\
 E_{K3}(\underline{X}, t) &= 2^{-1} (a_{(a)K3} + b_{(a)K3} \xi), \\
 E_{33}(\underline{X}, t) &= 2^{-1} (a_{(a)33} - 1),
 \end{aligned}$$

w których wielkości $a_{(a)\alpha\beta}(\underline{Z}, t)$, $b_{(a)\alpha\beta}(\underline{Z}, t)$, $c_{(a)\alpha\beta}(\underline{Z}, t)$, $\alpha, \beta=K, L, 3$, zdefiniowane zostały przez (5.11), zaś wielkości $\overset{\circ}{a}_{(a)KL}(\underline{Z})$, $\overset{\circ}{b}_{(a)KL}(\underline{Z})$, $\overset{\circ}{c}_{(a)KL}(\underline{Z})$, $K, L=1, 2$, przez (6.8). Wprowadzając do równania konstytutywnego (6.4) składowe tensora odkształcenia (6.9) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 (6.10) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) &= 2 (C^{\alpha\beta KL} E_{KL} + 2 C^{\alpha\beta K3} E_{K3} + C^{\alpha\beta 33} E_{33}) = \\
 &= C^{\alpha\beta KL} ((a_{(a)KL} - \overset{\circ}{a}_{(a)KL}) - \\
 &\quad - 2 (b_{(a)KL} - \overset{\circ}{b}_{(a)KL}) \xi + (c_{(a)KL} - \overset{\circ}{c}_{(a)KL}) \xi^2) + \\
 &\quad + 2 C^{\alpha\beta K3} (a_{(a)K3} + b_{(a)K3} \xi) + \\
 &\quad + C^{\alpha\beta 33} (a_{(a)33} - 1).
 \end{aligned}$$

Wprowadzając nowe miary odkształcenia: $e_{(a)KL}(\cdot)$, $e'_{(a)KL}(\cdot)$, $e''_{(a)KL}(\cdot)$, $e_{(a)K3}(\cdot)$, $e'_{(a)K3}(\cdot)$, $e_{(a)33}(\cdot)$, definiowane jak następuje:

$$\begin{aligned}
 e_{(a)KL}(\underline{Z}, t) &= a_{(a)KL} - \overset{\circ}{a}_{(a)KL} = \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L} - \overset{\circ}{a}_{(a)KL}, \\
 e'_{(a)KL}(\underline{Z}, t) &= -2 (b_{(a)KL} - \overset{\circ}{b}_{(a)KL}) = \\
 &= \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k d_{(a),L} + \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L} d_{(a),K}^k + 2 \overset{\circ}{b}_{(a)KL}, \\
 (6.11) \quad e''_{(a)KL}(\underline{Z}, t) &= c_{(a)KL} - \overset{\circ}{c}_{(a)KL} = d_{(a),K}^k d_{(a),L} - \overset{\circ}{c}_{(a)KL}, \\
 e_{(a)K3}(\underline{Z}, t) &= a_{(a)K3} = \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k d_{(a),k}, \\
 e'_{(a)K3}(\underline{Z}, t) &= b_{(a)K3} = d_{(a),K}^k d_{(a),k}, \\
 e_{(a)33}(\underline{Z}, t) &= a_{(a)33} - 1 = d_{(a),k}^k d_{(a),k} - 1, \\
 \underline{Z} \in II, \quad t \in T, \quad a=1, \dots, r,
 \end{aligned}$$

otrzymujemy, zamiast (6.10) ostateczną postać równania konstytutywnego teorii małych odkształceń sprężystych we współrzędnych konwekcyjnych:

$$\begin{aligned}
 (6.12) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) &= C^{\alpha\beta KL} (e_{(a)KL} + e'_{(a)KL} \xi + e''_{(a)KL} \xi^2) + \\
 &+ 2 C^{\alpha\beta K3} (e_{(a)K3} + e'_{(a)K3} \xi) + \\
 &+ C^{\alpha\beta 33} e_{(a)33}, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \quad a=1, \dots, r;
 \end{aligned}$$

gdzie wielkości $C^{\alpha\beta KL}(\cdot)$, $C^{\alpha\beta K3}(\cdot)$, $C^{\alpha\beta 33}(\cdot)$, są tensorami sprężystości ciała nieodkształconego B.

Pozostałe równania teorii małych odkształceń sprężystych tj.: równania ruchu, kinetyczne warunki brzegowe, równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych, równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych i sił reakcji więzów, równania dodatkowych więzów dla współrzędnych uogólnionych oraz warunek idealności dla tych więzów, wszystkie we współrzędnych

konwekcyjnych $\underline{X} = (X^\alpha)$, otrzymuje się bezpośrednio z odpowiednich równań pełnej teorii nieliniowej tzn. z równań: (4.13), (4.16), (4.20), (3.17) i (4.18). I tak, równania ruchu mają identyczną postać jak (4.13):

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL} \Big|_K - b_{(a)K}^L \bar{S}_{(a)}^K + \bar{S}_{(a)}^L + f_{(a)}^L + r_{(a)}^L &= i_{(a)}^L, \\ \bar{S}_{(a)}^K \Big|_K + b_{(a)KL} \bar{S}_{(a)}^{KL} + \bar{S}_{(a)} + f_{(a)} + r_{(a)} &= i_{(a)}, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi \times T$$

$$a=1, \dots, r+1; \quad K, L=1, 2;$$

a wielkości uogólnione w nich występujące zostały zdefiniowane równaniami (4.20). Równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych $\bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{Z}, t)$, $\bar{S}_{(a)}^K(\underline{Z}, t)$, $\bar{S}_{(a)}^L(\underline{Z}, t)$, $\bar{S}_{(a)}(\underline{Z}, t)$ mają jednak szczególną postać. W celu otrzymania tych równań, wycho-
dzimy z definicji (4.2)_{1,2,3,4}, podstawiając tam w miejsce składowych tensora naprężenia $T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t)$, $\alpha, \beta = K, L, 3$, prawą stronę równania konstytutywnego (6.12). Jeśli przy tym, dla nieznanych funkcji, wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \delta_P^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} \bar{V}_{(a)}^1, P, \\ A_{(a)P}^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} d_{(a)}^1, P, \\ A_{(a)3}^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} d_{(a)}^1, \\ B_{(a-1)P}^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} d_{(a-1)}^1, P, \\ B_{(a-1)3}^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} d_{(a-1)}^1, \\ C_{(a-1)P}^L &= \bar{V}_{(a)1, M} a_{(a)}^{ML} \bar{V}_{(a-1)}^1, P, \\ A_{(a)L} &= N_{(a)1} d_{(a)}^1, L, \\ A_{(a)3} &= N_{(a)1} d_{(a)}^1, \\ B_{(a-1)L} &= N_{(a)1} d_{(a-1)}^1, L, \\ B_{(a-1)3} &= N_{(a)1} d_{(a-1)}^1, \quad C_{(a-1)L} = N_{(a)1} \bar{V}_{(a-1)}^1, L. \end{aligned}$$

uwzględniając zależności (4.6), a następnie zdefiniujemy uogólnione sztywności jak poniżej

$$\begin{aligned}
 \underline{J}_{(a)0} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a)1} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a)2} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) \xi J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a)3} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) \xi^2 J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a)4} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) \xi^3 J \, d\xi,
 \end{aligned}$$

(6.15)

$$\begin{aligned}
 \underline{J}_{(a-1)0} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a-1)1} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a-1)2} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi^2 J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a-1)3} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi^3 J \, d\xi, \\
 \underline{J}_{(a-1)4} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi^4 J \, d\xi,
 \end{aligned}$$

to wówczas równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{(a)}^{KL} = & (J_{(a)1}^{KL\delta\delta} + J_{(a)2}^{KP\delta\delta} A_{(a)P}^L + J_{(a)1}^{K3\delta\delta} A_{(a)3}^L) e_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)2}^{KL\delta\delta} + J_{(a)3}^{KP\delta\delta} A_{(a)P}^L + J_{(a)2}^{K3\delta\delta} A_{(a)3}^L) e'_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)3}^{KLMN} + J_{(a)4}^{KPMN} A_{(a)P}^L + J_{(a)3}^{K3MN} A_{(a)3}^L) e''_{(a)MN} + \\
 & + (J_{(a-1)1}^{KP\delta\delta} C_{(a-1)P}^L + J_{(a-1)2}^{KP\delta\delta} B_{(a-1)P}^L + \\
 & \quad + J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} B_{(a-1)3}^L) e_{(a-1)\delta\delta} + \\
 (6.16) \quad & + (J_{(a-1)2}^{KP\delta\delta} C_{(a-1)P}^L + J_{(a-1)3}^{KP\delta\delta} B_{(a-1)P}^L + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{K3\delta\delta} B_{(a-1)3}^L) e'_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)3}^{KPMN} C_{(a-1)P}^L + J_{(a-1)4}^{KPMN} B_{(a-1)P}^L + \\
 & \quad + J_{(a-1)3}^{K3MN} B_{(a-1)3}^L) e''_{(a-1)MN}, \\
 \bar{S}_{(a)}^{K} = & (J_{(a)2}^{KL\delta\delta} A_{(a)L} + J_{(a)1}^{K3\delta\delta} A_{(a)3}) e_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)3}^{KL\delta\delta} A_{(a)L} + J_{(a)2}^{K3\delta\delta} A_{(a)3}) e'_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)4}^{KLMN} A_{(a)L} + J_{(a)3}^{K3MN} A_{(a)3}) e''_{(a)MN} + \\
 & + (J_{(a-1)1}^{KL\delta\delta} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)2}^{KL\delta\delta} B_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} B_{(a-1)3}) e_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)2}^{KL\delta\delta} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)3}^{KL\delta\delta} B_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{K3\delta\delta} B_{(a-1)3}) e'_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)3}^{KLMN} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)4}^{KLMN} B_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)3}^{K3MN} B_{(a-1)3}) e''_{(a-1)MN},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^K = & (J_{(a)0}^{K3\delta\delta} + J_{(a)1}^{P3\delta\delta} A_{(a)P}^K + J_{(a)0}^{33\delta\delta} A_{(a)3}^K) e_{(a)\delta\delta} + \\ & + (J_{(a)1}^{K3\delta\delta} + J_{(a)2}^{P3\delta\delta} A_{(a)P}^K + J_{(a)1}^{33\delta\delta} A_{(a)3}^K) e'_{(a)\delta\delta} + \\ & + (J_{(a)2}^{K3MN} + J_{(a)3}^{P3MN} A_{(a)P}^K + J_{(a)2}^{33MN} A_{(a)3}^K) e''_{(a)MN} - \\ & - (J_{(a-1)0}^{P3\delta\delta} C_{(a-1)P}^K + J_{(a-1)1}^{P3\delta\delta} B_{(a-1)P}^K + \\ & \quad + J_{(a-1)0}^{33\delta\delta} B_{(a-1)3}^K) e_{(a-1)\delta\delta} - \\ & - (J_{(a-1)1}^{P3\delta\delta} C_{(a-1)P}^K + J_{(a-1)2}^{P3\delta\delta} B_{(a-1)P}^K + \\ & \quad + J_{(a-1)1}^{33\delta\delta} B_{(a-1)3}^K) e'_{(a-1)\delta\delta} - \\ & - (J_{(a-1)2}^{P3MN} C_{(a-1)P}^K + J_{(a-1)3}^{P3MN} B_{(a-1)P}^K + \\ & \quad + J_{(a-1)2}^{33MN} B_{(a-1)3}^K) e''_{(a-1)MN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)} = & (J_{(a)1}^{L3\delta\delta} A_{(a)L} + J_{(a)0}^{33\delta\delta} A_{(a)3}) e_{(a)\delta\delta} + \\ & + (J_{(a)2}^{L3\delta\delta} A_{(a)L} + J_{(a)1}^{33\delta\delta} A_{(a)3}) e'_{(a)\delta\delta} + \\ & + (J_{(a)3}^{L3MN} A_{(a)L} + J_{(a)2}^{33MN} A_{(a)3}) e''_{(a)MN} - \\ & - (J_{(a-1)0}^{L3\delta\delta} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)1}^{L3\delta\delta} B_{(a-1)L} + \\ & \quad + J_{(a-1)0}^{33\delta\delta} B_{(a-1)3}) e_{(a-1)\delta\delta} - \\ & - (J_{(a-1)1}^{L3\delta\delta} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)2}^{L3\delta\delta} B_{(a-1)L} + \\ & \quad + J_{(a-1)1}^{33\delta\delta} B_{(a-1)3}) e'_{(a-1)\delta\delta} - \\ & - (J_{(a-1)2}^{L3MN} C_{(a-1)L} + J_{(a-1)3}^{L3MN} B_{(a-1)L} + \\ & \quad + J_{(a-1)2}^{33MN} B_{(a-1)3}) e''_{(a-1)MN}, \end{aligned}$$

gdzie $e_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $e'_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $e''_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$; $\delta, \delta=M, N, 3$; $M, N=1, 2$; oznaczają miary odkształcenia zdefiniowane w (6.11),

przy czym $e'_{(a)33}(\cdot) = e''_{(a)M3}(\cdot) = e''_{(a)3M} = e''_{(a)33} = 0$, $a=1, \dots, r$.

Równania dodatkowych więzów kinematycznych dla uogólnionych współrzędnych, oraz warunek idealności dla tych więzów, w nieliniowej teorii małych odkształceń, pozostają identyczne z tymi w ogólnej teorii [por. (3.17) i (4.18)].

Należy podkreślić, że nie narzuca się tutaj żadnych dalszych ograniczeń dla funkcji ruchu $\underline{X}(\underline{X}, t)$ występującej w powyższych równaniach, ponieważ w teorii małych odkształceń sprężystych przemierzczona $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{X}(\underline{X}, t) - \underline{X}(\underline{X})$ mogą przyjmować wartości skończone.

7. Teoria nieliniowa grubych powłok sprężystych ^{*}/

Podstawowe równania różnych wariantów teorii grubych powłok sprężystych można otrzymać bezpośrednio z odpowiednich ogólnych równań elastodynamiki ciał warstwowych, wyprowadzonych w poprzednich rozdziałach (m.in. w 4 i 6). Wobec problemu brzegowego, jaki zamierzamy sformułować i dyskutować w następnym rozdziale, ograniczymy się do podania podstawowych równań teorii nieliniowej grubych powłok sprężystych. Jeśli ograniczymy się do pewnej klasy problemów obciążeniowych i wewnętrznych więzów kinematycznych, to podstawowy układ równań elastodynamiki tworzą.

Równania ruchu we współrzędnych konwekcyjnych postaci [por. (4.13) i (6.13)]:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{(1)}^{KL} \parallel_K - b_{(1)K}^L \bar{S}_{(1)}^K + \bar{S}_{(1)}^L + f_{(1)}^L &= i_{(1)}^L, \\
 \bar{S}_{(1)}^K \parallel_K + b_{(1)KL} \bar{S}_{(1)}^{KL} + \bar{S}_{(1)} + f_{(1)} &= i_{(1)}, \\
 \bar{S}_{(2)}^{KL} \parallel_K - b_{(2)K}^L \bar{S}_{(2)}^K + \bar{S}_{(2)}^L + f_{(2)}^L &= i_{(2)}^L, \\
 \bar{S}_{(2)}^K \parallel_K + b_{(2)KL} \bar{S}_{(2)}^{KL} + \bar{S}_{(2)} + f_{(2)} &= i_{(2)},
 \end{aligned}
 \tag{7.1} \quad \text{w } \Pi \times T,$$

gdzie uogólnione wielkości $(\dots)_{(1)}$ i $(\dots)_{(2)}$ związane są odpowiednio z powierzchniami ruchomymi $\Pi_{(1)t}$ i $\Pi_{(2)t}$ ograniczającymi powłokę, a zdefiniowane zostały za pomocą wyrażeń (4.2) i (4.20).

^{*}/ Wyniki niniejszego rozdziału były prezentowane na Konferencji GAMM 83 w Hamburgu (RFN), a opublikowane zostały jako praca [61], ZAMM, 1984, 64, T106-T108.

Równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych mają postać [por. (6.16)]:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{(1)}^{KL} &= (J_{(1)1}^{KL\delta\delta} + J_{(1)2}^{KP\delta\delta} A_{(1)P}^L + J_{(1)1}^{K3\delta\delta} A_{(1)3}^L) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)2}^{KL\delta\delta} + J_{(1)3}^{KP\delta\delta} A_{(1)P}^L + J_{(1)2}^{K3\delta\delta} A_{(1)3}^L) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)3}^{KLMN} + J_{(1)4}^{KPMN} A_{(1)P}^L + J_{(1)3}^{K3MN} A_{(1)3}^L) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}_{(2)}^{KL} &= (J_{(1)1}^{KP\delta\delta} C_{(1)P}^L + J_{(1)2}^{KP\delta\delta} B_{(1)P}^L + J_{(1)1}^{K3\delta\delta} B_{(1)3}^L) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)2}^{KP\delta\delta} C_{(1)P}^L + J_{(1)3}^{KP\delta\delta} B_{(1)P}^L + J_{(1)2}^{K3\delta\delta} B_{(1)3}^L) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)3}^{KPMN} C_{(1)P}^L + J_{(1)4}^{KPMN} B_{(1)P}^L + J_{(1)3}^{K3MN} B_{(1)3}^L) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}_{(1)}^K &= (J_{(1)2}^{KL\delta\delta} A_{(1)L} + J_{(1)1}^{K3\delta\delta} A_{(1)3}) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)3}^{KL\delta\delta} A_{(1)L} + J_{(1)2}^{K3\delta\delta} A_{(1)3}) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 (7.2) \quad &+ (J_{(1)4}^{KLMN} A_{(1)L} + J_{(1)3}^{K3MN} A_{(1)3}) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}_{(2)}^K &= (J_{(1)1}^{KL\delta\delta} C_{(1)L} + J_{(1)2}^{KL\delta\delta} B_{(1)L} + J_{(1)1}^{K3\delta\delta} B_{(1)3}) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)2}^{KL\delta\delta} C_{(1)L} + J_{(1)3}^{KL\delta\delta} B_{(1)L} + J_{(1)2}^{K3\delta\delta} B_{(1)3}) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)3}^{KLMN} C_{(1)L} + J_{(1)4}^{KLMN} B_{(1)L} + J_{(1)3}^{K3MN} B_{(1)3}) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}_{(1)}^K &= (J_{(1)0}^{K3\delta\delta} + J_{(1)1}^{P3\delta\delta} A_{(1)P}^K + J_{(1)0}^{33\delta\delta} A_{(1)3}^K) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)1}^{K3\delta\delta} + J_{(1)2}^{P3\delta\delta} A_{(1)P}^K + J_{(1)1}^{33\delta\delta} A_{(1)3}^K) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)2}^{K3MN} + J_{(1)3}^{P3MN} A_{(1)P}^K + J_{(1)2}^{33MN} A_{(1)3}^K) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}_{(2)}^K &= - (J_{(1)0}^{P3\delta\delta} C_{(1)P}^K + J_{(1)1}^{P3\delta\delta} B_{(1)P}^K + J_{(1)0}^{33\delta\delta} B_{(1)3}^K) e_{(1)\delta\delta} - \\
 &- (J_{(1)1}^{P3\delta\delta} C_{(1)P}^K + J_{(1)2}^{P3\delta\delta} B_{(1)P}^K + J_{(1)1}^{33\delta\delta} B_{(1)3}^K) e'_{(1)\delta\delta} - \\
 &- (J_{(1)2}^{P3MN} C_{(1)P}^K + J_{(1)3}^{P3MN} B_{(1)P}^K + J_{(1)2}^{33MN} B_{(1)3}^K) e''_{(1)MN},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{S}(1) &= (J_{(1)1}^{L3\delta\delta} A_{(1)L} + J_{(1)0}^{33\delta\delta} A_{(1)3}) e_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)2}^{L3\delta\delta} A_{(1)L} + J_{(1)1}^{33\delta\delta} A_{(1)3}) e'_{(1)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(1)3}^{L3MN} A_{(1)L} + J_{(1)2}^{33MN} A_{(1)3}) e''_{(1)MN}, \\
 \bar{S}(2) &= - (J_{(1)0}^{L3\delta\delta} C_{(1)L} + J_{(1)1}^{L3\delta\delta} B_{(1)L} + J_{(1)0}^{33\delta\delta} B_{(1)3}) e_{(1)\delta\delta} - \\
 &- (J_{(1)1}^{L3\delta\delta} C_{(1)L} + J_{(1)2}^{L3\delta\delta} B_{(1)L} + J_{(1)1}^{33\delta\delta} B_{(1)3}) e'_{(1)\delta\delta} - \\
 &- (J_{(1)2}^{L3MN} C_{(1)L} + J_{(1)3}^{L3MN} B_{(1)L} + J_{(1)2}^{33MN} B_{(1)3}) e''_{(1)MN},
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

gdzie uogólnione sztywności $J_{(1)1}^{KL\delta\delta}(\underline{Z}, t), \dots$, zostały zdefiniowane za pomocą wyrażeń (6.15), a nieznanne funkcje $A_{(1)P}^L(\underline{Z}, t), \dots$, oznaczone jak w (6.14). Wskaźniki przebiegają tutaj następujące ciągi liczb: $\delta, \delta=1, 2, 3; K, L, M, N, P=1, 2$.

Równania geometryczne dla miar odkształcenia mają postać \lfloor por. (6.11) \rfloor :

$$\begin{aligned}
 e_{(1)MN} &= \bar{\Psi}_{(1),M}^k \bar{\Psi}_{(1)k,N} - a_{(1)MN}^0, \\
 e'_{(1)MN} &= \bar{\Psi}_{(1),M}^k d_{(1)k,N} + \bar{\Psi}_{(1)k,M} d_{(1),N}^k + 2 b_{(1)MN}^0, \\
 e''_{(1)MN} &= d_{(1),M}^k d_{(1)k,N} - c_{(1)MN}^0, \\
 e_{(1)M3} &= \bar{\Psi}_{(1),M}^k d_{(1)k}, \\
 e'_{(1)M3} &= d_{(1),M}^k d_{(1)k}, \\
 e''_{(1)33} &= d_{(1)} d_{(1)k} - 1, \quad k=1, 2, 3; \quad M, N=1, 2;
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

gdzie pole dyrektorów najeżających powierzchnię podstawową jest

$$\underline{d}_{(1)}(\underline{Z}, t) = h^{-1} (\bar{\Psi}_{(2)}(\underline{Z}, t) - \bar{\Psi}_{(1)}(\underline{Z}, t)),
 \tag{7.4}$$

zaś funkcje wektorowe $\bar{\Psi}_{(1)}(\cdot)$ i $\bar{\Psi}_{(2)}(\cdot)$ są podstawowymi niewiadomymi opisującymi ruch powierzchni $\Pi_{(1)t}$ i $\Pi_{(2)t}$ ograniczających powłokę.

Wielkości $\overset{\circ}{a}_{(1)}$, $\overset{\circ}{b}_{(1)}$, $\overset{\circ}{c}_{(1)}$ są odpowiednio, pierwszym, drugim i trzecim tensorem metrycznym powierzchni podstawowej $\overset{\circ}{\Pi}_{(1)}$ powłoki w stanie nieodkształconym, które zostały zdefiniowane w (6.6) i (6.8).

Kinetyczne warunki brzegowe w terminach uogólnionych wielkości mają postać [por. (4.16)]:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \overset{\bar{K}}{S}_{(1)}^{KL} n_{(1)K} &= P_{(1)}^L, & \overset{\bar{K}}{S}_{(1)}^K n_{(1)K} &= P_{(1)}, \\ \overset{\bar{K}}{S}_{(2)}^{KL} n_{(2)K} &= P_{(2)}^L, & \overset{\bar{K}}{S}_{(2)}^K n_{(2)K} &= P_{(2)}, \end{aligned} \quad \text{na } \partial\Pi^*T,$$

gdzie uogólnione obciążenia brzegowe działające na konturach $\partial\Pi_{(1)t}$ i $\partial\Pi_{(2)t}$ zdefiniowane zostały wzorami (4.20)_{11,12}; zaś $\underline{n}_{(1)}$ i $\underline{n}_{(2)}$ są wektorami jednostkowymi zewnętrznymi normalnymi do $\partial\Pi_{(1)t}$ i $\partial\Pi_{(2)t}$, leżącymi w płaszczyznach stycznych do $\Pi_{(1)t}$ i $\Pi_{(2)t}$, zdefiniowanymi równaniem (4.14).

Dla kompletności układu równań elastodynamiki należy dołączyć warunki początkowe dla podstawowych niewiadomych i ich pochodnych w postaci:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \underline{\Psi}_{(1)}(\underline{Z}, 0) &= \underline{\dot{\Psi}}_{(1)0}(\underline{Z}), & \underline{\Psi}_{(2)}(\underline{Z}, t) &= \underline{\dot{\Psi}}_{(2)0}(\underline{Z}), \\ \underline{\dot{\Psi}}_{(1)}(\underline{Z}, 0) &= \underline{\dot{\Psi}}_{(1)1}(\underline{Z}), & \underline{\dot{\Psi}}_{(2)}(\underline{Z}, t) &= \underline{\dot{\Psi}}_{(2)1}(\underline{Z}), \end{aligned} \quad \underline{Z} \in \Pi, t \in T$$

gdzie funkcje $\underline{\dot{\Psi}}_{(1)0}(\cdot)$, $\underline{\dot{\Psi}}_{(2)0}(\cdot)$, $\underline{\dot{\Psi}}_{(1)1}(\cdot)$, $\underline{\dot{\Psi}}_{(2)1}(\cdot)$ są dane.

Zauważmy, że powyższy układ 48 równań pól: (7.1), (7.2), (7.3) zawierający 48 niewiadomych funkcji, można sprowadzić do 6 równań przemieszczeniowych typu Naviera, dla niewiadomych funkcji wektorowych,

$$\underline{\Psi}_{(1)} = \underline{\Psi}_{(1)}(\underline{Z}, t), \quad \underline{\Psi}_{(2)} = \underline{\Psi}_{(2)}(\underline{Z}, t), \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T,$$

zależnych od współrzędnych $\underline{Z} = (X^1, X^2)$ i czasu t . Funkcje te są podstawowymi niewiadomymi i opisują ruch powierzchni $\Pi_{(1)t}$ i $\Pi_{(2)t}$ ograniczających rozważaną powłokę/warstwę.

Formalna procedura poszukiwania rozwiązania problemu brzegowo-początkowego elastodynamiki grubych powłok polega na następującym.

(i) Nieznane funkcje wektorowe $\bar{\Psi}_{(1)}(\cdot)$ i $\bar{\Psi}_{(2)}(\cdot)$ wyznaczamy przez rozwiązanie odpowiedniego problemu brzegowo-początkowego opisanego równaniami pola (7.1), (7.2), (7.3), oraz kinetycznymi warunkami brzegowymi (7.5) i warunkami początkowymi (7.6).

(ii) Znając funkcje $\bar{\Psi}_{(1)}(\cdot)$ i $\bar{\Psi}_{(2)}(\cdot)$ mamy tym samym opisany ruch każdego punktu materialnego rozważanej powłoki za pomocą postulowanego równania więzów kinematycznych postaci [por. (3.2)]:

$$(7.7) \quad \ddot{x}^k(\underline{x}, t) = \bar{\Psi}_{(1)}^k(\underline{z}, t) + (\xi/h)(\bar{\Psi}_{(2)}^k(\underline{z}, t) - \bar{\Psi}_{(1)}^k(\underline{z}, t)),$$

$$\underline{x} \in B, \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad 0 \leq \xi \leq h.$$

(iii) Na podstawie równań geometrycznych (7.3), wyznaczamy miary odkształcenia $e_{(1)}(\cdot)$, $e'_{(1)}(\cdot)$, $e''_{(1)}(\cdot)$ na powierzchni podstawowej $\Pi_{(1)t}$.

(iv) Korzystając z równania konstytutywnego (6.12), wyznaczamy składowe tensora naprężenia $\underline{T}(\cdot)$ jako funkcję współrzędnych materialnych i czasu tj.:

$$(7.8) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) = c^{\alpha\beta MN}(\underline{x}) (e_{(1)MN}(\underline{z}, t) + e'_{(1)MN}(\underline{z}, t) \xi + e''_{(1)MN}(\underline{z}, t) \xi^2) + 2 c^{\alpha\beta M3}(\underline{x}) (e_{(1)M3}(\underline{z}, t) + e'_{(1)M3}(\underline{z}, t) \xi) + c^{\alpha\beta 33}(\underline{x}) (e_{(1)33}(\underline{z}, t)), \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

$$\underline{x} \in B, \quad \underline{z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad M, N = 1, 2$$

(v) W końcu określamy 'residualne' pola objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów $\underline{r}(\cdot)$ i $\underline{g}(\cdot)$, na podstawie postulowanego równania ruchu i kinetycznych warunków brzegowych [por. (2.7) i (2.8)]:

$$(7.9) \quad r^\alpha(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) [\bar{x}^{-1}(\underline{x}, t)]^\alpha_{,k} \ddot{x}^k(\underline{x}, t) - \rho(\underline{x}, t) b^\alpha(\underline{x}, t) - T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t)|_\beta, \quad w B \times T;$$

$$(7.9) \quad s^{\alpha}(\underline{x}, t) = T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) n_{\beta}(\underline{x}, t) - p^{\alpha}(\underline{x}, t), \quad \text{na } \partial B^*T,$$

gdzie wszystkie wielkości wyrażone są w konfiguracji aktualnej i w konwekcyjnym układzie współrzędnych. Symbol $T^{\alpha\beta}(\cdot)|_{\beta}$ oznacza klasyczną pochodną kowariantną tensora naprężenia $T^{\alpha\beta}(\cdot)$ w dowolnym punkcie powłoki w przestrzeni R^3 z metryką $G_{\alpha\beta} = x^{\alpha}_k x^{\beta}_l \delta_{kl}$ tak, że

$$\left[T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) \Big|_{\beta} \right]_{\underline{x}^3=0} = T^{\alpha\beta}(\underline{x}, t) \Big|_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

gdzie $T^{\alpha\beta}(\cdot)|_{\beta}$ jest pochodną kowariantną tensora naprężenia $T^{\alpha\beta}$ na powierzchni $\Pi(1)t$ z metryką $a(1)\alpha\beta = a^k(1)\alpha a^l(1)\beta \delta_{kl}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; $k, l = 1, 2, 3$.

Rozwiązanie $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ pewnego zagadnienia brzegowo-początkowego elastodynamiki, o którym jest mowa powyżej, jako rozwiązanie modelowe, jest na ogół rozwiązaniem przybliżonym z punktu widzenia teorii klasycznego, trójwymiarowego kontinuum (bez więzów). W związku z tym nasuwa się pytanie, jak oszacować otrzymane rozwiązanie modelowe $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ pewnego zagadnienia powłoki grubej w ramach dwuwymiarowej teorii, czyli porównać je z nieznanym ścisłym rozwiązaniem $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ analogicznego zagadnienia w ramach teorii klasycznego, trójwymiarowego kontinuum (bez więzów). Aby na to pytanie odpowiedzieć zauważmy, że równania trójwymiarowego kontinuum z więzami podane w rozdziale 2, stają się równaniami trójwymiarowego kontinuum klasycznego, gdy tylko 'residualne' pola sił reakcji więzów znikają w całym obszarze rozważanej powłoki. Zatem wnioskujemy, że rozwiązanie modelowe $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ zmierza do rozwiązania ścisłego $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$, gdy tylko układ sił $\left[\underline{F}, \underline{s} \right]$ dąży do zera w całym obszarze powłoki. Tym samym, otrzymane rozwiązanie modelowe jest ściśle z punktu widzenia teorii trójwymiarowego kontinuum klasycznego, jeśli jako obciążenia przyjąć sumę: $\left[\underline{p}_b + \underline{r}, p + \underline{s} \right]$. Z tego wynika, że jeśli siły reakcji więzów $\left[\underline{r}, \underline{s} \right]$ są małe wobec układu obciążeń $\left[\underline{p}_b, p \right]$, to rozwiązanie modelowe $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ zagadnienia powłoki jako trójwymiarowego kontinuum z więzami jest dobrym przybliżeniem nieznanego rozwiązania ścisłego $\left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\underline{T}}{\underline{T}} \right]$ tego samego zagadnienia, w ramach teorii trójwymiarowego kontinuum klasycznego. Z powyższego rozumowania można wysnuć dalsze interesujące wnioski, a mianowicie.

Potraktowanie powłoki jako trójwymiarowego kontinuum z więzami sprawia, że każde zagadnienie brzegowo-początkowe elastodynamiki takiej powłoki jest konsystentne z odpowiednim zagadnieniem teorii trójwymiarowej. Proces dynamiczny $[\underline{\dot{x}}, \underline{\dot{t}}]$, zagadnienia brzegowo-początkowego powłoki, jest jednoznacznie określony przez geometrię, materiał i obciążenie powłoki jako ciała trójwymiarowego. Po każdorazowym rozwiązaniu zagadnienia brzegowo-początkowego, otrzymujemy bezpośrednią kontrolę dokładności tego rozwiązania i odpowiedź na pytanie, czy zastosowany model/wariant teorii jest właściwy dla analizy postawionego zagadnienia.

W celu określenia dokładności rozwiązania modelowego $[\underline{\dot{x}}, \underline{\dot{t}}]$ zagadnienia powłoki, a więc określenia odchyłki tego rozwiązania, od nieznanego rozwiązania ścisłego $[\underline{x}, \underline{t}]$ należy wprowadzić kryterium oceny dokładności w terminach pewnych norm definiowanych w przestrzeni obciążeń $[\underline{\rho b}, \underline{p}]$ i sił reakcji więzów $[\underline{r}, \underline{s}]$. Odchyłka rozwiązań może być zdefiniowana za pomocą ilorazu wprowadzonych norm dla układów sił/obciążeń porównywalnych, a mianowicie:

$$(7.10) \quad \Delta = \frac{\|[\underline{r}, \underline{s}]\|}{\|[\underline{\rho b}, \underline{p}]\|}$$

Jeśli stopień dokładności rozwiązania modelowego jest narzucony, to jako kryterium porównawcze dla oceny otrzymanego rozwiązania, w sensie wprowadzonych norm, mamy nierówność:

$$(7.11) \quad \frac{\|[\underline{r}, \underline{s}]\|}{\|[\underline{\rho b}, \underline{p}]\|} \leq \Delta$$

gdzie $\underline{b} = \underline{\rho b}(\underline{x}, t)$, $\underline{p} = \underline{p}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \bar{B}$, $t \in T$, są danymi rozkładami obciążeń masowych i powierzchniowych, zaś $\underline{r} = \underline{r}(\underline{x}, t)$, $\underline{s} = \underline{s}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \bar{B}$, $t \in T$, są wyznaczonymi z rozwiązania zagadnienia, rozkładami objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów. Mówiąc o normach $\|[\underline{\cdot}, \underline{\cdot}]\|$, w przestrzeni sił/obciążeń, należy zauważyć, że zbiór elementów $[\underline{\rho b}, \underline{p}]$ i $[\underline{r}, \underline{s}]$ można identyfikować z liniową unormowaną i zupełną przestrzenią wektorową. Normy w takiej przestrzeni sił/obciążeń mogą być wprowadzane w rozmaity sposób, w zależności od charakteru sił/obciążeń i charakteru zagadnienia.

Przytoczymy tutaj jedynie najprostrze definicje takich norm.

Pierwsza definicja ma postać

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\|_P &= \alpha \max_{\underline{x} \in P} |\underline{r}| + \beta \max_{\underline{x} \in \partial P} |\underline{s}|, \\ \|\underline{\rho b}, \underline{p}\|_P &= \alpha \max_{\underline{x} \in P} |\underline{\rho b}| + \beta \max_{\underline{x} \in \partial P} |\underline{p}|, \end{aligned}$$

i wyraża maksymalne wartości bezwzględne wektorowych pól (sił/obciążeń) w pewnej części P obszaru powłoki B ($P \subset B$), gdzie α, β są odpowiednimi wagami funkcji zależnymi od charakteru obciążenia i geometrii obszaru powłoki, zaś $P = \text{JI} \times (0, h)$, $\text{JI} \subset \text{II}$, jest pewnym obszarem badania norm układów sił/obciążeń.

Druga definicja może być przyjęta w postaci

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\|_P &= \max_{\underline{x} \in P} \left(\int_0^h |\underline{r}| \, d\xi + |\underline{s}| \right), \\ \|\underline{\rho b}, \underline{p}\|_P &= \max_{\underline{x} \in P} \left(\int_0^h |\underline{\rho b}| \, d\xi + |\underline{p}| \right). \end{aligned}$$

Trzecia definicja ma postać

$$(7.14) \quad \begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\|_P &= \left(\int_P \bar{\alpha} |\underline{r}|^2 \, dV + \int_{\partial P} \bar{\beta} |\underline{p}|^2 \, dS \right)^{1/2}, \\ \|\underline{\rho b}, \underline{p}\|_P &= \left(\int_P \bar{\alpha} |\underline{\rho b}|^2 \, dV + \int_{\partial P} \bar{\beta} |\underline{p}|^2 \, dS \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

i wyrażają gęstości wektorowych pól sił/obciążeń w pewnej części P obszaru powłoki B, gdzie $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ są odpowiednimi wagami funkcji podcałkowych.

8. Problem elastostatyki grubej powłoki walcowej. Oszacowanie dokładności rozwiązania problemu brzegowego.

Jako egzemplifikację nieliniowej teorii małych odkształceń sprężystych powłok grubych, rozważymy nieskończenie długą powłokę walcową, której obszar B w stanie naturalnym $\left[\overset{\circ}{\underline{X}}, \overset{\circ}{\underline{T}} \right]$ jest parametryzowany współrzędnymi walcowymi $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha=1,2,3$, gdzie $-\infty \leq X^1 \leq +\infty$, $0 \leq X^2 \leq 2\pi$, $0 \leq \xi \leq X^3 = R \leq h$, [por. rys. 8.1] Obszar B jest dany za pomocą równania

$$(8.1) \quad \overset{\circ}{\underline{X}}(\underline{X}) = \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}(\underline{Z}) + \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}(\underline{Z}) \xi, \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

gdzie $\overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)} = \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}(\underline{Z})$ jest równaniem parametrycznym powierzchni podstawowej Π , zaś $\overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)} = \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}(\underline{Z})$ jest polem wektorów jednostkowych zewnętrznie normalnych do Π takich, że

$$(8.2) \quad \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}(\underline{Z}) = h^{-1} (\overset{\circ}{\underline{V}}_{(2)}(\underline{Z}) - \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}(\underline{Z})).$$

Przyjmując wewnętrzną powierzchnię walcową powłoki jako powierzchnię podstawową ($X^3 = R$, $\xi = 0$), równanie (8.1) przyjmuje następującą postać:

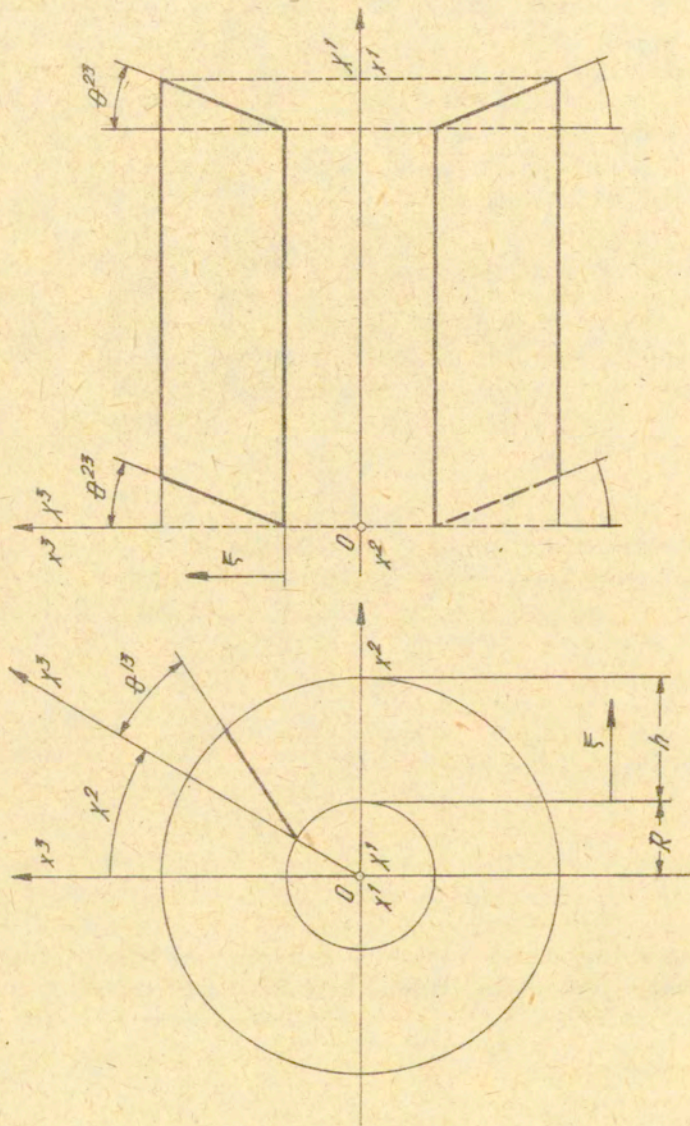
$$(8.3) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{X}}^1 &= X^1, \\ \overset{\circ}{\underline{X}}^2 &= (R + \xi) \sin X^2, \\ \overset{\circ}{\underline{X}}^3 &= (R + \xi) \cos X^2, \end{aligned}$$

tzn., że

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}^1 &= X^1, & \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}^2 &= R \sin X^2, & \overset{\circ}{\underline{V}}_{(1)}^3 &= R \cos X^2, \\ \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}^1 &= 0, & \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}^2 &= \sin X^2, & \overset{\circ}{\underline{N}}_{(1)}^3 &= \cos X^2. \end{aligned}$$

Zakładamy najpierw, że powłoka wykonana jest z materiału jednorodnego o ortotropii walcowej i poddana jest deformacji, niezależnej od czasu, takiej, że powierzchnia zewnętrzna powłoki

*/ Problem ten był dyskutowany przez autora w nieco węższym zakresie w pracy [52]; Arch. Mech. Stos., 1975, 27, 3, 375-384.



Rys. 8.1. Powłoka walcowa w konfiguracji naturalnej B i konfiguracji odkształconej B'.

($\xi = h$) przemieszcza się względem powierzchni wewnętrznej ($\xi = 0$) w kierunku osi powłoki (OX^1) o wartość $u^1 = h \vartheta^{13}$, oraz obraca się wokół tej osi o wartość $u^2 = h \vartheta^{23}$, przy czym $u^3 = 0$. */

Ponieważ w obszarze powłoki obowiązują więzy wewnętrzne postaci (7.7), [por. również (3.2)], więc dla danych powyżej wartości przemieszczeń, mamy deformację jednoznacznie określoną i daną wzorami:

$$(8.5) \quad \underline{x}(\underline{X}) = \underline{V}_{(1)}(\underline{Z}) + \underline{d}_{(1)}(\underline{Z}), \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

gdzie:

$$(8.6) \quad \underline{d}_{(1)}(\underline{Z}) = h^{-1} (\underline{V}_{(2)}(\underline{Z}) - \underline{V}_{(1)}(\underline{Z})),$$

We współrzędnych mamy:

$$\underline{x}^1 = X^1 + \vartheta^{13} \xi,$$

$$(8.7) \quad \underline{x}^2 = R \sin X^2 + (\sin X^2 + \vartheta^{23} \cos X^2) \xi,$$

$$\underline{x}^3 = R \cos X^2 + (\cos X^2 - \vartheta^{23} \sin X^2) \xi,$$

tzn., że

$$\underline{V}_{(1)}^1 = X^1, \quad \underline{V}_{(1)}^2 = R \sin X^2, \quad \underline{V}_{(1)}^3 = R \cos X^2,$$

$$(8.8) \quad \underline{d}_{(1)}^1 = \vartheta^{13}, \quad \underline{d}_{(1)}^2 = \sin X^2 + \vartheta^{23} \cos X^2,$$

$$\underline{d}_{(1)}^3 = \cos X^2 - \vartheta^{23} \sin X^2.$$

Składowe tensora metrycznego $\overset{\circ}{G} = \overset{\circ}{G}(\underline{X})$ układu współrzędnych walcowych $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha=1,2,3$, dane są wzorem:

$$(8.9) \quad \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} - 2 \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} \xi + \overset{\circ}{c}_{\alpha\beta} \xi^2, \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

gdzie składowe pierwszego, drugiego i trzeciego tensora metrycznego powierzchni podstawowej ($X^3 = R$, $\xi = 0$) obliczamy ze wzorów (6.8) uwzględniając, że równanie powierzchni podstawowej jest dane w postaci (8.4)_{1,2,3}.

*/ Takie założenia odpowiadają trójwarstwowej powłoce, której warstwy skrajne (wewnętrzna i zewnętrzna) są nieskończenie sztywne, zaś warstwa środkowa, którą badamy, ma niewielką sztywność.

Otrzymujemy w ten sposób:

$$(8.10) \quad \begin{aligned} a_{11}^0 &= 1, & a_{22}^0 &= R^2, & a_{33}^0 &= 1, & a_{12}^0 &= a_{13}^0 &= a_{23}^0 &= 0, \\ b_{11}^0 &= 0, & b_{22}^0 &= -R, & b_{33}^0 &= b_{12}^0 &= b_{13}^0 &= b_{23}^0 &= 0, \\ c_{11}^0 &= 0, & c_{22}^0 &= 1, & c_{33}^0 &= c_{12}^0 &= c_{13}^0 &= c_{23}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie równań geometrycznych (7.3), obliczamy miary odkształcenia, uwzględniając przy tym znane już wyrażenia (8.7) i (8.8) dla funkcji deformacji, oraz wyrażenia (8.10) dla składowych tensorów metrycznych nieodkształconej powierzchni wewnętrznej powłoki. Otrzymujemy zatem,

$$(8.11) \quad \begin{aligned} e_{11} &= e_{12} = e_{22} = 0, \\ e_{13} &= e^{13}, & e_{23} &= R e^{23}, & e_{33} &= (e^{13})^2 + (e^{23})^2, \\ e'_{11} &= e'_{12} = e'_{22} = e'_{13} = e'_{23} = 0, \\ e''_{11} &= e''_{12} = 0, & e''_{22} &= (e^{23})^2. \end{aligned}$$

Równanie konstytutywne (6.12), dla składowych tensora naprężenia, w powiązaniu z definicją macierzy stałych sprężystości dla materiału o własnościach ortotropii walcowej, można zapisać w postaci macierzowej */

$$(8.12) \quad \begin{bmatrix} T^{11} \\ T^{22} \\ T^{33} \\ T^{23} \\ T^{13} \\ T^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{1111} & c^{1122} & c^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c^{2211} & c^{2222} & c^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c^{3311} & c^{3322} & c^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{bmatrix}$$

*/ Zakłada się tutaj, że płaszczyzny styczne do powierzchni parametrycznych $X^0 = \text{const.}$, są płaszczyznami symetrii sprężystej.

gdzie $E_{11}(\cdot), \dots, E_{12}(\cdot)$ są składowymi tensora odkształcenia wyrażonymi przez dwuwymiarowe miary (7.3) jak następuje:

$$E_{MN} = e_{MN} + e'_{MN} \xi + e''_{MN} \xi^2,$$

$$(8.13) \quad E_{M3} = 2(e_{M3} + e'_{M3} \xi),$$

$$E_{33} = e_{33};$$

które wobec (8.11) przyjmują postać:

$$E_{11} = 0, \quad E_{23} = 2 R e^{23},$$

$$(8.13)' \quad E_{22} = (e^{23} \xi)^2, \quad E_{13} = 2 e^{13},$$

$$E_{33} = (e^{13})^2 + (e^{23})^2, \quad E_{12} = 0.$$

Jeśli uwzględnimy teraz wartości (8.11), to na podstawie wyrażeń (8.12) i (8.13)', lub na podstawie równania konstytutywnego (7.8) składowe tensora naprężenia przyjmują wartości:

$$T^{11} = c^{1122} (e^{23} \xi)^2 + c^{1133} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2),$$

$$T^{22} = c^{2222} (e^{23} \xi)^2 + c^{2233} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2),$$

$$(8.14) \quad T^{33} = c^{3322} (e^{23} \xi)^2 + c^{3333} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2),$$

$$T^{23} = 2 R c^{2323} e^{23},$$

$$T^{13} = 2 c^{1313} e^{13},$$

$$T^{12} = 0,$$

Wobec ograniczenia deformacji przez więzy kinematyczne (7.7), pojawiły się w obszarze powłoki dodatkowe pola objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów. Ponieważ deformacja, w rozważanym zagadnieniu, nie zależy od czasu, a ponadto obciążenia masowe i powierzchniowe są z założenia równe zeru ($\rho \underline{b} =$

= $\underline{p} = \underline{0}$), więc wyrażenia (7.8) upraszczają się do następujących:

$$(8.15) \quad \begin{aligned} r^\alpha &= - T^{\alpha\beta} |_\beta = \\ &= - (T^{\alpha\beta} |_{,\beta} + \left\{ \frac{\circ}{\beta \alpha \delta} \right\} T^{\delta\beta} + \left\{ \frac{\circ}{\beta \delta \alpha} \right\} T^{\delta\alpha}), \quad \text{w } \Pi \times (0, h); \\ s^\alpha &= T^{\alpha\beta} n_\beta, \quad \text{na } \Pi \times \partial(0, h); \end{aligned}$$

gdzie symbole Christoffela drugiego rodzaju wyrażają się w znany sposób:

$$(8.16) \quad \left\{ \frac{\circ}{\beta \alpha \delta} \right\} = 2^{-1} \overset{\circ}{G}^{\delta\alpha} (\overset{\circ}{G}_{\delta\beta, \beta} + \overset{\circ}{G}_{\beta\delta, \delta} - \overset{\circ}{G}_{\beta\delta, \delta}), \quad \alpha, \beta, \delta, \beta = 1, 2, 3.$$

Ponieważ kowariantne i kontrawariantne współrzędne tensora metrycznego $\overset{\circ}{G}(\cdot)$ układu współrzędnych walcowych $\underline{X} = (X^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$ mają postać

$$(8.17) \quad \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X^3)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^3 = R + \xi$$

więc symbole Christoffela obliczone według (8.16) przyjmują wartości:

$$(8.18) \quad \left\{ \frac{\circ}{2 \ 3} \right\} = \left\{ \frac{\circ}{3 \ 2} \right\} = (R + \xi)^{-1}, \quad \left\{ \frac{\circ}{2 \ 2} \right\} = - (R + \xi),$$

zaś pozostałe symbole nie wymienione w (8.18) są równe zeru.

Uwzględniając wartości (8.18) we wzorze (8.15)₁ otrzymujemy składowe objętościowych sił reakcji więzów w postaci:

$$(8.19) \quad \begin{aligned} r^1 &= - 2 (R + \xi)^{-1} c^{1313} \varrho^{13}, \\ r^2 &= - 6 (R + \xi)^{-1} R c^{2323} \varrho^{23}, \\ r^3 &= - 2 c^{2233} (\varrho^{23})^2 \xi - (R + \xi)^{-1} [c^{2233} (\varrho^{23} \xi)^2 + \end{aligned}$$

$$+ c^{3333} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2) + \\ + (R + \xi) [c^{2222} (e^{23} \xi)^2 + c^{2233} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2)] ;$$

zaś na podstawie wzoru (8.15)₂ obliczamy składowe powierzchniowych sił reakcji więzów:

$$(8.20) \quad \begin{aligned} (s^1)^+ &= - (s^1)^- = 2 c^{1313} e^{13}, \\ (s^2)^+ &= - (s^2)^- = 2 R c^{2323} e^{23}, \\ (s^3)^+ &= c^{2233} (e^{23} h)^2 + c^{3333} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2), \\ (s^3)^- &= - c^{3333} ((e^{13})^2 + (e^{23})^2), \end{aligned}$$

gdzie wielkości ze znakiem plus (...) ⁺ są związane z zewnętrzną powierzchnią walcową powłoki ($\xi = h$), a wielkości ze znakiem minus (...) ⁻ z wewnętrzną (podstawową) powierzchnią walcową powłoki ($\xi = 0$). Składowe powierzchniowych sił reakcji więzów można traktować jako jedyne obciążenia zewnętrzne, realizujące deformację (8.7) zgodną z więzami wewnętrznymi (7.7). Odpowiada to schematowi powłoki doskonale zamocowanej na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni granicznej powłoki, nie zmieniającej swojej grubości w procesie deformacji.

Zbadamy teraz otrzymane powyżej rozwiązanie problemu powłoki z materiału jednorodnego i izotropowego, pozostając nadal w ramach teorii nieliniowej. Możemy tedy tensor sprężystości wyrazić w znany sposób, za pomocą stałych sprężystości Lamé'go (λ, μ):

$$(8.21) \quad c^{\alpha\beta\delta\delta} = \lambda G^{\alpha\beta} G^{\delta\delta} + \mu (G^{\alpha\delta} G^{\beta\delta} + G^{\alpha\delta} G^{\beta\delta}), \quad \alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3.$$

Jeśli w powyższym wyrażeniu uwzględnimy wartości współrzędnych kontrawariantnych (8.17)₂, to macierz sprężystości we współrzędnych walcowych przyjmie postać:

$$(8.22) \quad \begin{bmatrix} 1+2\mu & \lambda(X^3)^{-2} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(X^3)^{-2} & (1+2\mu)(X^3)^{-4} & \lambda(X^3)^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda(X^3)^{-2} & 1+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(X^3)^{-2} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \mu & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(X^3)^{-2} \end{bmatrix}$$

gdzie współrzędna $X^3 = R + \xi$, $0 \leq \xi \leq h$.

Składowe tensora naprężenia (8.14) wyrażają się teraz wzorami

$$(8.23) \quad \begin{aligned} T^{11} &= \lambda \left[(e^{13})^2 + (1 + \xi^2 (R + \xi)^{-2}) (e^{23})^2 \right], \\ T^{22} &= \lambda (R + \xi)^{-2} \left[(e^{13})^2 + (1 + (\lambda + 2\mu) \lambda^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \xi^2 (R + \xi)^{-2}) (e^{23})^2 \right], \\ T^{33} &= (\lambda + 2\mu) \left[(e^{13})^2 + (1 + (\lambda + 2\mu)^{-1} \lambda \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \xi^2 (R + \xi)^{-2}) (e^{23})^2 \right], \\ T^{23} &= 2 \mu R (R + \xi)^{-2} e^{23}, \\ T^{13} &= 2 \mu e^{13}, \\ T^{12} &= 0. \end{aligned}$$

zaś składowe objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów (8.19) i (8.20) przyjmują postać następującą:

$$\begin{aligned}
 (8.24) \quad r^1 &= -2 \mu (R + \xi)^{-1} e^{13}, \\
 r^2 &= -6 \mu R (R + \xi)^{-3} e^{23}, \\
 r^3 &= -2 \mu (R + \xi)^{-1} \left[(e^{13})^2 + (1 - \xi^2 (R + \xi)^{-2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \mu^{-1} \xi (R + \xi)^{-1} (e^{23})^2 \right], \\
 (s^1)^+ &= 2 \mu e^{13}, \\
 (s^1)^- &= -2 \mu e^{13}, \\
 (s^2)^+ &= -2 \mu R (R + h)^{-2} e^{23}, \\
 (8.25) \quad (s^2)^- &= -2 \mu R^{-1} e^{23}, \\
 (s^3)^+ &= (2 + 2\mu)(e^{13})^2 + \left[2 (1 + h^2 (R + h)^{-2}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \mu \right] (e^{23})^2, \\
 (s^3)^- &= - (2 + 2\mu) ((e^{13})^2 + (e^{23})^2).
 \end{aligned}$$

Jeśli teraz przejdziemy do teorii liniowej, to powyższe wyniki (8.23), (8.24) i (8.25) uproszczą się do następujących:

$$\begin{aligned}
 (8.26) \quad T^{11} &= T^{12} = T^{22} = T^{33} = 0, \\
 T^{13} &= 2 \mu e^{13}, \\
 T^{23} &= 2 \mu R (R + \xi)^{-2} e^{23}; \\
 r^1 &= -2 \mu (R + \xi)^{-1} e^{13}, \\
 (8.27) \quad r^2 &= -6 \mu R (R + \xi)^{-3} e^{23}, \\
 r^3 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s^1)^+ &= 2 \mu e^{13}, \\
 (s^1)^- &= -2 \mu e^{13}, \\
 (s^2)^+ &= 2 \mu R (R + h)^{-2} e^{23}, \\
 (8.28) \quad (s^2)^- &= -2 \mu R^{-1} e^{23}, \\
 (s^3)^+ &= 0, \\
 (s^3)^- &= 0.
 \end{aligned}$$

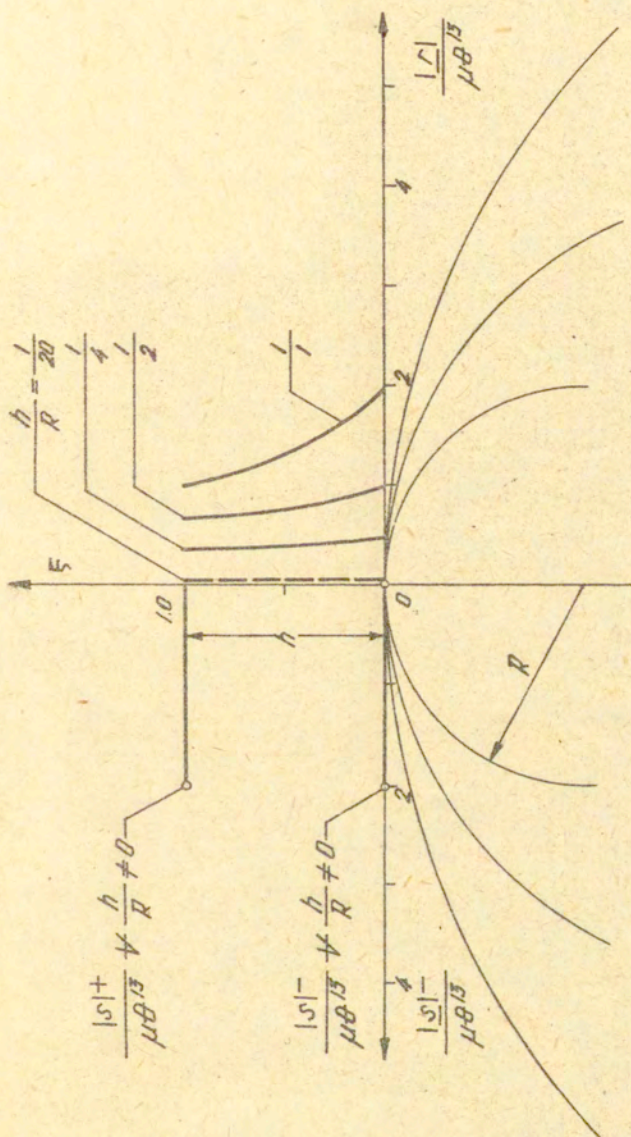
W celu zilustrowania rozkładów objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów, opisanych wzorami (8.27) i (8.28), w rozważanym obszarze powłoki, sporządzono wykresy, które pokazują zależności wartości bezwzględnych tych sił od lokalnej współrzędnej $\xi \in [0, h]$, mierzonej wzdłuż grubości, w kierunku normalnej zewnętrznej od powierzchni podstawowej powłoki ($X^3 = R$, $\xi = 0$), przy ustalonych współrzędnych $X^1 = \text{const.}$ i $X^2 = \text{const.}$ Wykresy sporządzono oddzielnie dla dwóch przypadków deformacji: (i) podłużnego ścinania, gdy $e^{13} \neq 0$, $e^{23} = 0$, (rys. 8.2); oraz (ii) obwodowego skręcania, gdy $e^{13} = 0$, $e^{23} \neq 0$, (rys. 8.3). Przyjęto przy tym różne stosunki grubości powłoki do mniejszego promienia krzywizny powierzchni podstawowej: $h/R = 1, 1/2, 1/4, 1/20$.

W przypadku (i), obliczono wartości bezwzględne objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów na podstawie wzorów:

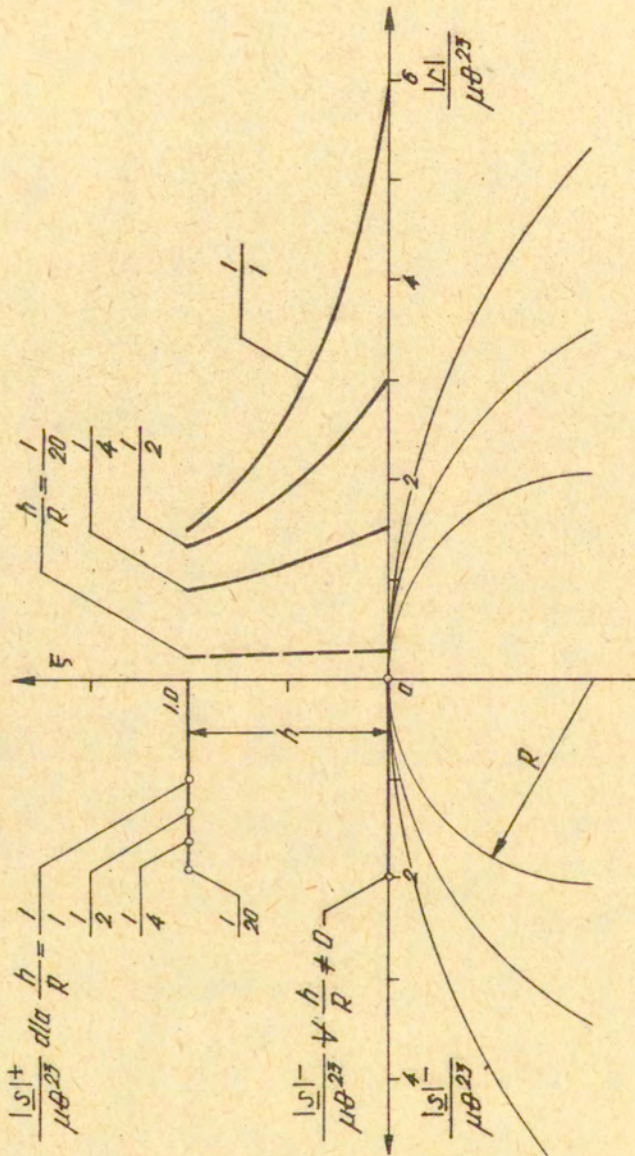
$$(8.29) \quad |\underline{r}| = (G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta)^{1/2}, \quad |\underline{s}| = (G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta)^{1/2}.$$

Uwzględniając przy tym, że kowariantne współrzędne tensora metrycznego układu współrzędnych walcowych dane są jak w (8.17), zaś kontrawariantne składowe sił reakcji więzów mają wartości (8.27) i (8.28), otrzymano:

$$(8.30) \quad |\underline{r}| = 2 (R + \xi)^{-1} \mu e^{13}, \quad |\underline{s}|^+ = |\underline{s}|^- = 2 \mu e^{13}.$$



Rys. 8.2. Rozkłady objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów w powłoce walcowej, w przypadku (i), dla różnych stosunków h/R .



Rys. 8.3. Rozkłady objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów w powierzchni walcowej, w przypadku (ii), dla różnych stosunków h/R .

W przypadku (ii), obliczono wartości bezwzględne objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów w analogiczny sposób, otrzymując

$$(8.31) \quad \begin{aligned} |\underline{r}| &= 6 R (R + \epsilon)^{-2} \mu \varrho^{23}, \\ |\underline{s}|^+ &= 2 (1 + h/R)^{-1} \mu \varrho^{23}, \quad |\underline{s}|^- = 2 \mu \varrho^{23}. \end{aligned}$$

Przejdziemy teraz do oszacowania dokładności rozwiązania modelowego problemu brzegowego. Korzystać będziemy przy tym z wprowadzonego wcześniej kryterium (7.10), oraz z zaproponowanych norm (7.12), (7.13) i (7.14). Oszacujemy najpierw rozwiązanie problemu brzegowego teorii nieliniowej, a następnie teorii liniowej, analizując w tym dwa proste stany deformacji:

(i) stan podłużnego ścinania ($\varrho^{13} \neq 0$, $\varrho^{23} = 0$), oraz

(ii) stan obwodowego skręcania ($\varrho^{13} = 0$, $\varrho^{23} \neq 0$).

Rozwiązanie modelowe badanego problemu elastostatyki grubej jednorodnej ortotropowej powłoki walcowej, w ramach nieliniowej teorii małych odkształceń, ma postać (8.7) i (8.14). Rozwiązaniu temu towarzyszą pewne 'residualne' pola, objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów, w postaci (8.19) i (8.20).

Ponieważ w sformułowanym problemie brzegowym, deformacja wyrażona jest przez dane kąty odkształcenia ϱ^{13} i ϱ^{23} oraz brak jest innych obciążeń w rozważanym obszarze ($\underline{p} = \underline{0}$, $\underline{p} = \underline{0}$), więc deformacja (8.7) może być zrealizowana wyłącznie przez powierzchniowe siły reakcji więzów (8.20), które można traktować jak obciążenia zewnętrzne $\underline{\dot{p}} = \underline{\dot{s}}$. W celu oszacowania rozwiązania nieliniowego przyjmujemy w przestrzeni sił/obciążeń normę postaci (7.12).

W przypadku (i), ($\varrho^{13} \neq 0$, $\varrho^{23} = 0$), dla układu objętościowych $\underline{r} = (r^\alpha)$ i powierzchniowych $\underline{s} = (s^\alpha)$ sił reakcji więzów, otrzymujemy następujące wartości norm:

$$(8.32) \quad \begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{r}, \underline{0}\| = h \max |\underline{r}| = h \max (G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta)^{1/2} = \\ &= (h/R) \varrho^{13} \left[4(C^{1313})^2 + R^2 (R^2 C^{2323} - C^{3333})^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$(8.32) \quad \begin{aligned} \|\underline{[p]h, \underline{[p]}}\| &= \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \max |\underline{s}| = \max (G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta)^{1/2} = \\ &= e^{13} [4 (c^{1313})^2 + (c^{3333} e^{13})^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

a kryterium (7.10) przyjmuje postać:

$$(8.33) \quad \Delta = \|\underline{[r, 0]}\| / \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = (h/R) [4 (c^{1313})^2 + R^2 (R^2 c^{2323} - c^{3333})^2]^{1/2} [4 (c^{1313})^2 + (c^{3333} e^{13})^2]^{-1/2}.$$

W przypadku (ii), ($e^{13} = 0$, $e^{23} \neq 0$), otrzymujemy

$$(8.34) \quad \begin{aligned} \|\underline{[r, \underline{s}]}\| &= \|\underline{[r, 0]}\| = h \max |\underline{r}| = h e^{23} [36 R^2 (c^{2323})^2 + \\ &+ R^2 (c^{2233} e^{23})^2 + R^{-2} (c^{3333} e^{23})^2 - \\ &- 2 c^{2233} c^{3333} (e^{23})^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\|\underline{[p]h, \underline{[p]}}\| = \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \max |\underline{s}| = R e^{23} [4 e^{23} (c^{2323})^2 + R^{-2} (c^{3333} e^{23})^2]^{1/2},$$

a kryterium (7.10) przyjmuje postać:

$$(8.35) \quad \begin{aligned} \Delta &= \|\underline{[r, 0]}\| / \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = (h/R) [36 R^2 (c^{2323})^2 + \\ &+ R^2 (c^{2233} e^{23})^2 + R^{-2} (c^{3333} e^{23})^2 - \\ &- 2 c^{2233} c^{3333} (e^{23})^2]^{1/2} \cdot \\ &\cdot [4 R^2 (c^{2323})^2 + R^{-2} (c^{3333} e^{23})^2]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Wielkość Δ , $0 < \Delta < 1$, określa rząd przybliżenia lub odchyłkę znalezionej rozwiązania modelowego $\underline{[x, \underline{t}]}$, od pewnego nieznanego rozwiązania ścisłego $\underline{[x, \underline{t}]}$ w sensie przyjętego kryterium (7.10). Wyniki oszacowania badanego rozwiązania nieliniowego (8.33) i (8.35) w ramach tego kryterium i proponowanych najprostrzych norm (7.12) wskazują, iż stopień dokładności

rozwiązania problemu brzegowego zależy od stosunku h/R , (grubości powłoki do jej minimalnego promienia krzywizny powierzchni podstawowej), geometrii obszaru, stałych materiałowych oraz charakteru i dystrybucji obciążenia. Można również pokazać, że przyjmowanie różnych norm dla oceny dokładności rozwiązania tego samego problemu, prowadzi do różnych wyników tak, że oszacowanie stopnia dokładności rozwiązania modelowego pewnego problemu zależy od wyboru kryterium i właściwej definicji norm.

Aby uzasadnić tę ostatnią tezę, zbadamy rozwiązanie modelowe tego samego problemu w ramach teorii liniowej, stosując to samo kryterium (7.10) i trzy różne definicje norm: (7.12), (7.13) i (7.14). Rozwiązanie modelowe $[\underline{x}, \underline{T}]$ sformułowanego poprzednio problemu elastostatyki grubej jednorodnej ortotropowej powłoki walcowej, w ramach liniowej teorii, otrzymuje się z rozwiązania (8.7) i (8.14) [por. rozwiązanie liniowe w przypadku izotropii (8.26) - (8.28)], zachowując tam człony pierwszego rzędu ze względu na ϵ^{13} i ϵ^{23} . Rozwiązaniu temu towarzyszą pewne 'residualne' pola, objętościowych $\underline{r} = (r^\alpha)$ i powierzchniowych $\underline{s} = (s^\alpha)$ sił reakcji więzów w postaci liniowych członów wyrażen (8.19) i (8.20) tzn.:

$$\begin{aligned}
 r^1 &= -2 (R+\epsilon)^{-1} C^{1313} \epsilon^{13}, \\
 (8.36) \quad r^2 &= -6 (R+\epsilon)^{-1} R C^{2323} \epsilon^{23}, \\
 r^3 &= 0, \\
 (s^1)^+ &= - (s^1)^- = 2 C^{1313} \epsilon^{13}, \\
 (8.37) \quad (s^2)^+ &= - (s^2)^- = 2 R C^{2323} \epsilon^{23}, \\
 (s^3)^+ &= (s^3)^- = 0.
 \end{aligned}$$

Oszacowanie I. Przyjmujemy, w przestrzeni sił/obciążeń normę postaci (7.12) i przeprowadzamy oszacowanie oddzielnie dla dwóch stanów deformacji (i) i (ii) scharakteryzowanych wcześniej.

W przypadku (i), ($\theta^{13} \neq 0$, $\theta^{23} = 0$), dla układu objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów, otrzymujemy następujące wartości norm:

$$\begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{r}, \underline{0}\| = h \max |\underline{r}| = \max (G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta)^{1/2} = \\ &= 2 (h/R) c^{1313} e^{13}, \\ (8.38) \quad \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{0}, \underline{s}\| = \max |\underline{s}| = \max (G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta)^{1/2} = \\ &= 2 c^{1313} e^{13}. \end{aligned}$$

Kryterium (7.10) prowadzi w tym przypadku do następującego oszacowania odchyłki rozwiązania modelowego od rozwiązania ścisłego:

$$(8.39) \quad \Delta = \|\underline{r}, \underline{0}\| / \|\underline{0}, \underline{s}\| = h/R. \quad \times/$$

W przypadku (ii), ($\theta^{13} = 0$, $\theta^{23} \neq 0$), otrzymujemy następujące wartości norm:

$$\begin{aligned} (8.40) \quad \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{r}, \underline{0}\| = h \max |\underline{r}| = 6 R h c^{2323} e^{23}, \\ \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{0}, \underline{s}\| = \max |\underline{s}| = 2 R^2 c^{2323} e^{23}, \end{aligned}$$

i odchyłkę rozwiązania

$$(8.41) \quad \Delta = \|\underline{r}, \underline{0}\| / \|\underline{0}, \underline{s}\| = 3 h/R. \quad \times/$$

Oszacowanie II. Przyjmujemy w przestrzeni sił/obciążeń normę postaci (7.13).

W przypadku (i), otrzymujemy następujące wartości norm

$$\begin{aligned} (8.42) \quad \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{r}, \underline{0}\| = \int_0^h |\underline{r}| d\xi = \int_0^h (G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta)^{1/2} d\xi = \\ &= 2 \ln (1 + h/R) c^{1313} e^{13}, \end{aligned}$$

$\times/$ Łatwo zauważyć, że wyniki oszacowania w obu przypadkach można otrzymać bezpośrednio z oszacowania nieliniowego (8.33) i (8.35), pomijając człony wyższego rzędu niż pierwszy ze względu na θ^{13} i θ^{23} .

$$(8.42) \quad \|\underline{[\rho_b, \underline{p}^*]}\| = \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \max |\underline{s}| = \max (G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta)^{1/2} = \\ = 2 c^{1313} e^{13},$$

a kryterium (7.10) daje następujące oszacowanie rzędu przybliżenia rozwiązania modelowego:

$$(8.43) \quad \Delta = \|\underline{[\underline{x}, 0]}\| / \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \ln(1 + h/R).$$

W przypadku (ii), otrzymujemy następujące wartości norm

$$\|\underline{[\underline{x}, \underline{s}]}\| = \|\underline{[\underline{x}, 0]}\| = \int_0^h |\underline{x}| d\xi = \int_0^h (G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta)^{1/2} d\xi =$$

$$(8.44) \quad = 6 Rh c^{2323} e^{23},$$

$$\|\underline{[\rho_b, \underline{p}^*]}\| = \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \max |\underline{s}| = \max (G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta)^{1/2} = \\ = 2 R (R + h) c^{2323} e^{23},$$

i odchyłkę rozwiązania rzędu

$$(8.45) \quad \Delta = \|\underline{[\underline{x}, 0]}\| / \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = 3 h / (R + h).$$

Oszacowanie III. Przyjmujemy w przestrzeni sił/obciążeń normę postaci (7.14).

W przypadku (i), dla układu objętościowych i powierzchniowych sił reakcji więzów mamy:

$$\|\underline{[\underline{x}, \underline{s}]}\| = \|\underline{[\underline{x}, 0]}\| = \left[\int_P |\underline{x}|^2 dV \right]^{1/2} = \left[\int_P G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta dV \right]^{1/2} =$$

$$(8.46) \quad = \left[4 JI h \ln(1 + h/R) (c^{1313} e^{13})^2 \right]^{1/2},$$

$$\|\underline{[\rho_b, \underline{p}^*]}\| = \|\underline{[0, \underline{s}]}\| = \left[\int_{\partial P} |\underline{s}|^2 dS \right]^{1/2} = \left[\int_{\partial P} G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta dS \right]^{1/2} =$$

$$= [4 \text{JI} (2R + h) (c^{1313} \epsilon^{13})^2]^{1/2},$$

gdzie:

$$\delta P = 2 \text{JI} R \cup 2 \text{JI} (R + h), \quad P = \text{JI} (2R + h) h,$$

$$dS = dX^1 (R + \xi) dX^2, \quad dV = dX^1 dX^2 (R + \xi) d\xi.$$

Kryterium (7.10) daje następujące oszacowanie odchyłki rozwiązania modelowego:

$$(8.47) \quad \Delta = \|\underline{r}, \underline{0}\| / \|\underline{0}, \underline{s}\| = [h (2R + h)^{-1} \ln (1 + h/R)]^{1/2}$$

W przypadku (ii), otrzymujemy wartości norm,

$$(8.48) \quad \begin{aligned} \|\underline{r}, \underline{s}\| &= \|\underline{r}, \underline{0}\| = \left[h \int_P |\underline{r}|^2 dV \right]^{1/2} = \\ &= \left[h \int_P G_{\alpha\beta}^0 r^\alpha r^\beta dV \right]^{1/2} = \\ &= 6 \cdot R \left[\text{JI} (2R + h) h^2 \right]^{1/2} c^{2323} \epsilon^{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\underline{pb}, \underline{p}\| &= \|\underline{0}, \underline{s}\| = \left[\int_{\delta P} |\underline{s}|^2 dS \right]^{1/2} = \\ &= \left[\int_{\delta P} G_{\alpha\beta}^0 s^\alpha s^\beta dS \right]^{1/2} = \\ &= 2 R \left[2 \text{JI} (R^3 + (R + h)^3) \right]^{1/2} c^{2323} \epsilon^{23}, \end{aligned}$$

i odchyłkę rozwiązania

$$(8.49) \quad \begin{aligned} \Delta &= \|\underline{r}, \underline{0}\| / \|\underline{0}, \underline{s}\| = \\ &= 3 \left[(2R + h) h^2 \right]^{1/2} \left[2 (R^3 + (R + h)^3) \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

Wyniki powyższych trzech oszacowań tego samego rozwiązania problemu brzegowego, w ramach liniowej teorii, potwierdzają wypowiedzianą wcześniej tezę oraz wnioski wynikające z oszacowania dokładności rozwiązania tego problemu, w ramach teorii nieliniowej. W szczególności widać, że wynik oszacowania dokładności rozwiązania pewnego problemu, zależy silnie od stosunku h/R (stosunku grubości powłoki do jej minimalnego promienia krzywizny powierzchni podstawowej) i od charakteru obciążenia (deformacji). I tak, odchyłka rozwiązania modelowego od rozwiązania ścisłego, w przypadku skręcania obwodowego (ii), jest trzykrotnie większa od odchyłki tego rozwiązania, w przypadku podłużnego ścinania (i) [por. (8.39) i (8.41)]. Natomiast, rząd przybliżenia rozwiązania modelowego do rozwiązania ścisłego pewnego problemu maleje, w miarę malejącego stosunku h/R . Zatem narzucając żadaną dokładność $\Delta > 0$ poszukiwanego rozwiązania, stosownie do przyjętego kryterium, musimy zachować wynikający stąd stosunek h/R ; np.: $h/R \leq \Delta$ [wobec (8.39)], lub $3h/R \leq \Delta$ [wobec (8.41)]. Pewien pogląd na to, jak zmienia się rząd przybliżenia rozwiązania modelowego, dyskutowanego wcześniej problemu w przypadku (i) i (ii), w zależności od sposobu oszacowania (I, II, III) oraz od stosunku h/R , daje tablica 8.1.

Tablica 8.1. Wyniki oszacowań rozwiązania problemu

oszacowanie		stosunek h/R :			
		1/2000	1/200	1/20	1/2
I	(i)	0,0005	0,0050	0,0500	0,5000
	(ii)	0,0015	0,0150	0,1500	1,5000
II	(i)	0,0005	0,0050	0,0488	0,4055
	(ii)	0,0015	0,0149	0,1429	1,0000
III	(i)	0,0004	0,0035	0,0345	0,2848
	(ii)	0,0011	0,0106	0,1034	0,8018

9. Linearyzacja podstawowych równań elastodynamiki

Punktem wyjścia do linearyzacji równań podstawowych elastodynamiki ciał warstwowych są równania teorii małych odkształceń sprężystych, otrzymane w rozdziale 6. Zakładamy, że stanem podstawowym, względem którego będziemy linearyzować wszystkie równania, opisujące procesy dynamiczne $\left[\underline{x}, \underline{T} \right]_0$ ciała warstwowego, będzie stan naturalny (beznaprężeniowy) $\left[\underline{x}, \underline{T} \right]_0$, ($\underline{T}=0$). Funkcję $\underline{x}(\cdot)$ opisującą ruch ciała warstwowego można przedstawić w postaci następującej:

$$(9.1) \quad \underline{x}^k(\underline{x}, t) = \overset{0}{\underline{x}}^k(\underline{x}) + \varepsilon w^k(\underline{x}, t), \quad \varepsilon \geq 0,$$

gdzie funkcja $\overset{0}{\underline{x}}(\cdot)$ opisuje konfigurację ciała nieodkształconego B. Również równania więzów kinematycznych można napisać w analogicznej formie:

$$(9.2) \quad \underline{x}^k(\underline{x}, t) = \overset{0}{\Psi}_{(a)}^k + d_{(a)}^k \xi = \\ = \overset{0}{\Psi}_{(a)}^k + \varepsilon u_{(a)}^k + (d_{(a)}^k + \varepsilon v_{(a)}^k) \xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}$$

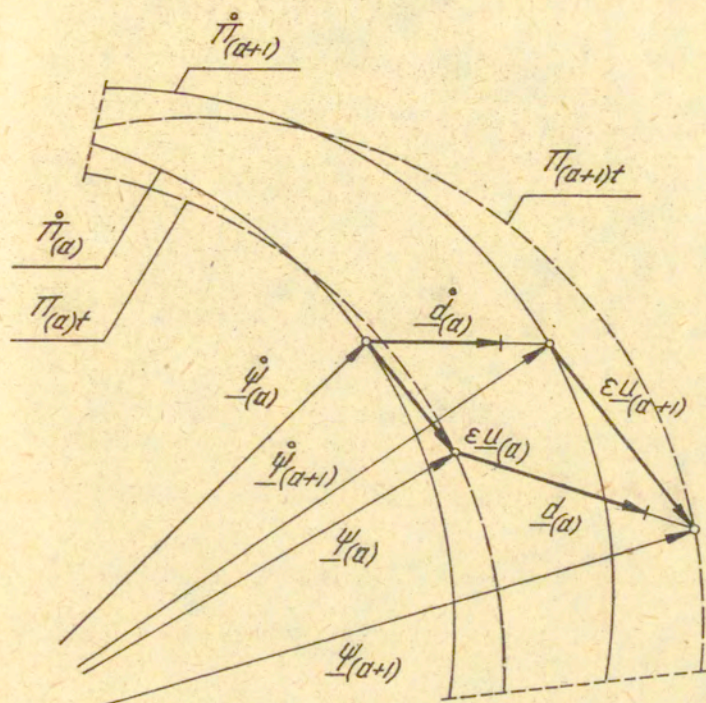
gdzie oznaczono:

$$(9.3) \quad d_{(a)}^k(\underline{z}) = h_{(a)}^{-1} (\overset{0}{\Psi}_{(a+1)}^k(\underline{z}) - \overset{0}{\Psi}_{(a)}^k(\underline{z})), \\ v_{(a)}^k(\underline{z}, t) = h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)}^k(\underline{z}, t) - u_{(a)}^k(\underline{z}, t)), \quad a=1, \dots, r,$$

zaś $\underline{u}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(a+1)}(\cdot)$ są wektorami przemieszczenia punktów powierzchni $\Pi_{(a)}t$ i $\Pi_{(a+1)}t$ mierzonymi od konfiguracji stanu naturalnego (rys. 9.1).

W celu linearyzacji równań geometrycznych (miar odkształcenia) podstawiamy wyrażenie (9.2) do równań (6.11), po czym w otrzymanych równaniach zachowujemy człony liniowe względem małego parametru ε . W ten sposób otrzymujemy następujące rezultaty

$$(9.4) \quad e_{(a)KL} = \overset{0}{\Psi}_{(a),K} \overset{0}{\Psi}_{(a),L} - \overset{0}{a}_{(a)KL} = \\ = (\overset{0}{\Psi}_{(a)}^k + \varepsilon u_{(a)}^k)_{,K} (\overset{0}{\Psi}_{(a),k} + \varepsilon u_{(a),k})_{,L} - \overset{0}{a}_{(a)KL} =$$



Rys. 9.1. Wielkości podstawowe związane z warstwą $B(a)$ w konfiguracji stanu naturalnego (beznaprężeniowego) i konfiguracji aktualnej.

$$\begin{aligned}
 & \approx \varepsilon (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k,L} + u_{(a),K} \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L}^k) = \varepsilon \tilde{e}_{(a)KL}, \\
 (9.4) \quad e'_{(a)KL} &= \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k d_{(a)k,L} + \overset{\circ}{\Psi}_{(a),L}^k d_{(a),K} + 2 \overset{\circ}{b}_{(a)KL} = \\
 &= (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k + \varepsilon u_{(a),K}^k) (d_{(a)k,L} + \varepsilon v_{(a),L}^k) + \\
 &+ (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),L}^k + \varepsilon u_{(a),L}^k) (d_{(a),K} + \varepsilon v_{(a),K}^k) + \\
 &+ 2 \overset{\circ}{b}_{(a)KL} \approx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cong \varepsilon (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k v_{(a)k,L} + u_{(a),K}^k \overset{\circ}{d}_{(a)k,L} + \\
 & + \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L}^k v_{(a),K}^k + u_{(a)k,L}^k \overset{\circ}{d}_{(a),K}^k) = \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{(a)KL}, \\
 e''_{(a)KL} & = d_{(a),K}^k d_{(a)k,L} - \overset{\circ}{c}_{(a)KL} = \\
 & = (d_{(a),K}^k + \varepsilon v_{(a),K}^k)(\overset{\circ}{d}_{(a)k,L} + \varepsilon v_{(a)k,L}) - \\
 & - \overset{\circ}{c}_{(a)KL} \cong \\
 & \cong \varepsilon (d_{(a),K}^k v_{(a)k,L} + v_{(a),K}^k \overset{\circ}{d}_{(a)k,L}) = \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}''_{(a)KL}, \\
 e_{(a)K3} & = \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k d_{(a)k} = (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k + \varepsilon u_{(a),K}^k)(\overset{\circ}{d}_{(a)k} + \\
 & + \varepsilon v_{(a)k}) \cong \varepsilon (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k v_{(a)k} + u_{(a),K}^k \overset{\circ}{d}_{(a)k}) = \\
 (9.4) \quad & = \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{(a)K3}, \\
 e'_{(a)K3} & = d_{(a),K}^k d_{(a)k} = (d_{(a),K}^k + \varepsilon v_{(a),K}^k)(\overset{\circ}{d}_{(a)k} + \\
 & + \varepsilon v_{(a)k}) \cong \varepsilon (d_{(a),K}^k v_{(a)k} + v_{(a),K}^k \overset{\circ}{d}_{(a)k}) = \\
 & = \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}'_{(a)K3}, \\
 e_{(a)33} & = d_{(a)}^k d_{(a)k} - 1 = \\
 & = (d_{(a)}^k + \varepsilon v_{(a)}^k)(\overset{\circ}{d}_{(a)k} + \varepsilon v_{(a)k}) - 1 \cong \\
 & \cong \varepsilon (d_{(a)}^k v_{(a)k} + v_{(a)}^k \overset{\circ}{d}_{(a)k}) = \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{(a)33},
 \end{aligned}$$

gdzie zlinearyzowane miary odkształcenia oznaczono jak następuje:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{(a)KL}(\underline{z}, t) & \cong \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k,L} + u_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L}, \\
 (9.5) \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}'_{(a)KL}(\underline{z}, t) & \cong h_{(a)}^{-1} \left[\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k (u_{(a+1)k} - u_{(a)k})_{,L} + \right. \\
 & \left. + u_{(a),K}^k (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})_{,L} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K} + \\
 & + u_{(a)k,L} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k)_{,K}], \\
 \tilde{\delta}'_{(a)KL}(\underline{z}, t) & \equiv h_{(a)}^{-2} [(\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k)_{,K} (u_{(a+1)k} - u_{(a)k})_{,L} + \\
 & + (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})_{,L}], \\
 \tilde{\delta}'_{(a)K3}(\underline{z}, t) & \equiv h_{(a)}^{-1} [(\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k)_{,K} (u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) + \\
 (9.5) \quad & + u_{(a),K}^k (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})], \\
 \tilde{\delta}'_{(a)K3}(\underline{z}, t) & \equiv h_{(a)}^{-2} [(\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k)_{,K} (u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) + \\
 & + (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})], \\
 \tilde{\delta}'_{(a)33}(\underline{z}, t) & \equiv h_{(a)}^{-2} [(\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k)(u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) + \\
 & + (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)(\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})].
 \end{aligned}$$

Równania konstytutywne (6.12) możemy teraz napisać w formie jak następuje:

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta} & = \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} + \epsilon \bar{T}^{\alpha\beta} \approx \\
 (9.6) \quad & \approx \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} + \epsilon C^{\alpha\beta KL} (\tilde{\delta}_{(a)KL} + \tilde{\delta}'_{(a)KL} \xi + \tilde{\delta}'_{(a)KL} \xi^2) + \\
 & + 2 \epsilon C^{\alpha\beta K3} (\tilde{\delta}_{(a)K3} + \tilde{\delta}'_{(a)K3} \xi) + \\
 & + \epsilon C^{\alpha\beta 33} \tilde{\delta}_{(a)33},
 \end{aligned}$$

a ponieważ z definicji stanu naturalnego jest $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = 0$, a ponadto ponieważ (9.6) musi zachodzić dla każdego $\epsilon \geq 0$, więc otrzymujemy zlinearyzowane równanie konstytutywne dla ciał o strukturze warstwowej w postaci:

$$(9.7) \quad \tilde{T}^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) = c^{\alpha\beta KL}(\underline{X})(\tilde{e}_{(a)KL}(\underline{Z}, t) + \tilde{e}'_{(a)KL}(\underline{Z}, t) \xi + \\ + \tilde{e}''_{(a)KL}(\underline{Z}, t) \xi^2) + 2 c^{\alpha\beta K3}(\underline{X})(\tilde{e}_{(a)K3}(\underline{Z}, t) + \\ + \tilde{e}'_{(a)K3}(\underline{Z}, t) \xi) + c^{\alpha\beta 33}(\underline{X}) \tilde{e}_{(a)33}(\underline{Z}, t), \\ \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad K, L = 1, 2; \quad \xi = X^3 - H_{(a)} \cdot e(0, h_{(a)}), \\ a = 1, \dots, r;$$

W celu otrzymania zlinearyzowanych równań ruchu we współrzędnych konwekcyjnych, wychodzimy z równań (4.13) wyprowadzonych w teorii ciał warstwowych przy założeniu dużych odkształceń sprężystych. W przypadku teorii małych odkształceń, mają te równania tę samą postać. Jeśli równania ruchu (4.13), we współrzędnych konwekcyjnych, przedstawimy z uwzględnieniem stanu naturalnego $\left[\begin{smallmatrix} \underline{X} \\ \underline{T} \end{smallmatrix} \right]$ to otrzymamy:

$$(9.8) \quad \left(\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^{KL} \right) \parallel_K - \left(\overset{\circ}{b}_{(a)K}^L + \varepsilon \tilde{b}_{(a)K}^L \right) \left(\overset{\circ}{S}_{(a)}^K + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^K \right) + \\ + \overset{\circ}{S}_{(a)}^L + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^L + \overset{\circ}{f}_{(a)}^L + \varepsilon \tilde{f}_{(a)}^L + \overset{\circ}{r}_{(a)}^L + \varepsilon \tilde{r}_{(a)}^L = \\ = \overset{\circ}{i}_{(a)}^L + \varepsilon \tilde{i}_{(a)}^L, \\ \left(\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^{KL} \right) \parallel_K + \left(\overset{\circ}{b}_{(a)KL} + \varepsilon \tilde{b}_{(a)KL} \right) \left(\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^{KL} \right) + \\ + \overset{\circ}{S}_{(a)} + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)} + \overset{\circ}{f}_{(a)} + \varepsilon \tilde{f}_{(a)} + \overset{\circ}{r}_{(a)} + \varepsilon \tilde{r}_{(a)} = \\ = \overset{\circ}{i}_{(a)} + \varepsilon \tilde{i}_{(a)}.$$

Wielkości występujące w powyższych równaniach mają definicje identyczne z tymi, które wprowadzone zostały w (4.20), z tym jednak, że składowe tensora naprężenia tam występujące wyrażone są teraz równaniem konstytutywnym (6.12). Z definicji (4.20) wynika, że w stanie naturalnym, w którym $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{b}^{\alpha} = \overset{\circ}{p}^{\alpha} = 0$, znikają następujące wielkości:

$$(9.9) \quad \overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} = \overset{\circ}{S}_{(a)}^K = \overset{\circ}{S}_{(a)}^L = \overset{\circ}{S}_{(a)} = \overset{\circ}{f}_{(a)}^L = \overset{\circ}{f}_{(a)} = \overset{\circ}{r}_{(a)}^L = \overset{\circ}{r}_{(a)} = \\ = \overset{\circ}{i}_{(a)}^L = \overset{\circ}{i}_{(a)} = 0.$$

Ponadto pochodne kowariantne w równaniach ruchu (9.8) można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
 (9.10) \quad \overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}} \parallel_K &= (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}})_{,K} + \\
 &+ \left(\left\{ \overset{\circ}{K} \right\}_{N\bar{K}} + \varepsilon \left\{ \overset{\circ}{\bar{K}} \right\}_{N\bar{K}} \right) (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}}) + \\
 &+ \left(\left\{ \overset{\circ}{L} \right\}_{N\bar{K}} + \varepsilon \left\{ \overset{\circ}{\bar{L}} \right\}_{N\bar{K}} \right) (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KN} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{N}}), \\
 \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{M}} \parallel_K &= (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{M}})_{,K} + \\
 &+ \left(\left\{ \overset{\circ}{K} \right\}_{K\bar{M}} + \varepsilon \left\{ \overset{\circ}{\bar{K}} \right\}_{K\bar{M}} \right) (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{M}} + \varepsilon \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{M}\bar{M}}).
 \end{aligned}$$

Jeśli teraz dokonamy linearyzacji równań (9.8) i (9.10), przy uwzględnieniu (9.9), z zachowaniem członów liniowych względem ε , to otrzymamy równania ruchu teorii liniowej, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (9.11) \quad \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}} \parallel_K - \overset{\circ}{b}_{(a)K}^L \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} + \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{L}} + \overset{\circ}{f}_{(a)}^{\bar{L}} + \overset{\circ}{r}_{(a)}^{\bar{L}} &= \overset{\circ}{i}_{(a)}^{\bar{L}}, \\
 \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} \parallel_K + \overset{\circ}{b}_{(a)KL} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}} + \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} + \overset{\circ}{f}_{(a)}^{\bar{K}} + \overset{\circ}{r}_{(a)}^{\bar{K}} &= \overset{\circ}{i}_{(a)}^{\bar{K}}.
 \end{aligned}$$

Ale z linearyzacji wyrażeń (9.10) wynika, że pochodne kowariantne stanu odkształconego wobec (9.9), można zastąpić pochodnymi kowariantnymi stanu naturalnego tzn.:

$$\begin{aligned}
 (9.12) \quad \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{L}} \parallel_K &= \overset{\circ}{S}_{(a),K}^{\bar{K}\bar{L}} + \left\{ \overset{\circ}{K} \right\}_{N\bar{K}} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{N}\bar{L}} + \left\{ \overset{\circ}{L} \right\}_{N\bar{K}} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}\bar{N}} = \overset{\circ}{S}_{(a)|K}^{\bar{K}\bar{L}}, \\
 \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{K}} \parallel_K &= \overset{\circ}{S}_{(a),K}^{\bar{K}} + \left\{ \overset{\circ}{K} \right\}_{K\bar{M}} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\bar{M}} = \overset{\circ}{S}_{(a)|K}^{\bar{K}},
 \end{aligned}$$

gdzie symbole Christoffela w stanie naturalnym mają postać:

$$(9.13) \quad \left\{ \overset{\circ}{K} \right\}_{L\bar{M}} = \overset{\circ}{a}_{(a)}^{KN} \overset{\circ}{\Psi}_{(a),IM} \overset{\circ}{\Psi}_{(a),k,N},$$

zaś macierz $\overset{\circ}{a}_{(a)}^{KN}$ jest macierzą odwrotną do macierzy

$$(9.14) \quad \overset{\circ}{a}_{(a)KN} = \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a),k,N}.$$

Ostatecznie zlinearyzowane równania ruchu wyrażone we współrzędnych konwekcyjnych mają postać:

$$(9.15) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{(a)}^{KL} |_K - \overset{\circ}{b}_{(a)K}{}^L \tilde{S}_{(a)}^{SK} + \tilde{S}_{(a)}^L + \tilde{f}_{(a)}^L + \tilde{r}_{(a)}^L &= \tilde{i}_{(a)}^L, \\ \tilde{S}_{(a)}^{SK} |_K + \overset{\circ}{b}_{(a)KL} \tilde{S}_{(a)}^{KL} + \tilde{S}_{(a)} + \tilde{f}_{(a)} + \tilde{r}_{(a)} &= \tilde{i}_{(a)}, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi^{*T},$$

gdzie $\overset{\circ}{b}_{(a)K}{}^L$, $\overset{\circ}{b}_{(a)KL}$ oznaczają drugą macierz podstawową powierzchni granicznej $\Pi_{(a)}$ w stanie naturalnym tj.:

$$(9.16) \quad \overset{\circ}{b}_{(a)K}{}^L = \overset{\circ}{b}_{(a)KM} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML}, \quad \overset{\circ}{b}_{(a)KL} = -\delta_{kl} \overset{\circ}{N}_{(a),L} \overset{\circ}{W}_{(a),K}.$$

Wielkości uogólnione występujące w równaniach ruchu (9.15) są zdefiniowane wzorami (4.20) lecz w postaci zlinearyzowanej. Zatem, w celu linearyzacji wyrażeń definicyjnych (4.20) z uwzględnieniem równań więzów postaci (9.2) napiszemy wyrażenia dla tych wielkości w postaci:

$$(9.17) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{(a)}^{KL} &= \overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \tilde{S}_{(a)}^{KL} = \\ &= (\overset{\circ}{a}_{(a)} + \varepsilon \tilde{a}_{(a)})^{-1/2} (\overset{\circ}{W}_{(a)1} + \varepsilon \tilde{u}_{(a)1})_{,M} (\overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} + \\ &+ \varepsilon \tilde{a}_{(a)}^{ML}) \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} [(\overset{\circ}{T}^{PK} + \varepsilon \tilde{T}^{PK}) (\overset{\circ}{W}_{(a)}^1 + \varepsilon \tilde{u}_{(a)}^1 + \right. \\ &+ \varepsilon (\overset{\circ}{d}_{(a)}^1 + \varepsilon \tilde{v}_{(a)}^1))_{,P} + (\overset{\circ}{T}^{K3} + \varepsilon \tilde{T}^{K3}) (\overset{\circ}{d}_{(a)}^1 + \\ &+ \varepsilon \tilde{v}_{(a)}^1)] (h_{(a)} - \xi) (\overset{\circ}{J} + \varepsilon \tilde{J}) d\xi + \\ &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} [(\overset{\circ}{T}^{PK} + \varepsilon \tilde{T}^{PK}) (\overset{\circ}{W}_{(a-1)}^1 + \varepsilon \tilde{u}_{(a-1)}^1 + \\ &+ \varepsilon (\overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1 + \varepsilon \tilde{v}_{(a-1)}^1))_{,P} + (\overset{\circ}{T}^{K3} + \varepsilon \tilde{T}^{K3}) (\overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1 + \\ &+ \varepsilon \tilde{v}_{(a-1)}^1)] \xi (\overset{\circ}{J} + \varepsilon \tilde{J}) d\xi \Big\}. \end{aligned}$$

Stąd, po uwzględnieniu (9.9) i porównaniu w (9.17) członów zawierających parametr ξ otrzymujemy zlinearyzowaną postać uogólnionej wielkości

$$\begin{aligned}
 (9.18) \quad \tilde{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) &= (a_{(a)}^0)^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1, M}^{\circ ML} \cdot \\
 &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{T}^{NK} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^0 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{, N} + \right. \\
 &+ \overset{\circ}{T}^{K3} \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{T}^{NK} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^0 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{, N} + \\
 &\left. + \overset{\circ}{T}^{K3} \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{J} d\xi \right\}.
 \end{aligned}$$

Podobnie, linearyzując pozostałe wyrażenia definicyjne spośród (4.20) otrzymamy następnie:

$$\begin{aligned}
 (9.18) \quad \tilde{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (a_{(a)}^0)^{-1/2} \overset{\circ}{N}_{(a)1} \cdot \\
 &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{T}^{LK} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^0 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{, L} + \right. \\
 &+ \overset{\circ}{T}^{K3} \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{T}^{LK} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^0 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{, L} + \\
 &\left. + \overset{\circ}{T}^{K3} \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{J} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (a_{(a)}^0)^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1, M}^{\circ MK} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\tilde{\pi}^{L3} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \left. + \tilde{\pi}^{33} \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) \overset{\circ}{j} d\xi - \right. \\ & \left. - h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\tilde{\pi}^{L3} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \right. \\ & \left. + \tilde{\pi}^{33} \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \overset{\circ}{j} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{(a)}(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{N}_{(a)1}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\tilde{\pi}^{L3} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \left. + \tilde{\pi}^{33} \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) \overset{\circ}{j} d\xi - \right. \end{aligned}$$

(9.18)

$$\begin{aligned} & \left. - h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\tilde{\pi}^{L3} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \left. + \tilde{\pi}^{33} \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \overset{\circ}{j} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{I}_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{MK}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{\rho} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ & \left. + \overset{\circ}{\rho}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right. \end{aligned}$$

$$+ \delta_a^1 \left[(\overset{\circ}{\rho}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)} + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \overset{\circ}{\rho}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a)}}^+$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} (\overset{\circ}{b}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1), L + \\
 & + \overset{\circ}{b}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} d\xi + \\
 & + \delta_a^{r+1} \left[(\overset{\circ}{p}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1), L + \overset{\circ}{p}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{(a)}(\underline{z}, t) = (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{N}_{(a)1} .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{\rho} (\overset{\circ}{b}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1), L + \right. \\
 & \left. + \overset{\circ}{b}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + \delta_a^1 \left[(\overset{\circ}{p}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1), L + \overset{\circ}{p}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a)}}^{\circ} + \right.$$

(9.18)

$$\begin{aligned}
 & + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} (\overset{\circ}{b}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1), L + \\
 & + \overset{\circ}{b}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} d\xi +
 \end{aligned}$$

$$\left. + \delta_a^{r+1} \left[(\overset{\circ}{p}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1), L + \overset{\circ}{p}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \right\}$$

$$\tilde{f}_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1, M}^{\circ MK} .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{x}{}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1), L + \right. \\
 & \left. + \overset{\circ}{x}{}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[(\tilde{s}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \tilde{s}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\
 & \quad + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\tilde{r}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 & \quad + \tilde{r}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} d\xi + \\
 & \left. + \left[(\tilde{s}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \tilde{s}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{(a)}(\underline{z}, t) = (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{N}_{(a)1} .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\tilde{r}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{r}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \left[(\tilde{s}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \tilde{s}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a)}} + \right. \\
 (9.18) \quad & \quad + h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\tilde{r}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 & \quad \left. + \tilde{r}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} d\xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + \left[(\tilde{s}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \xi \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \tilde{s}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \xi \overset{\circ}{j} \right]_{\xi=0, h_{(a-1)}} \right\}$$

$$\tilde{r}_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1, M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{MK} .$$

$$\cdot \left\{ h_{(a)}^{-2} \sum_0^{h_{(a)}} \rho ((h_{(a)} - \xi)^2 \ddot{u}_{(a)}^1 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (h_{(a)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a+1)}^1 \overset{\circ}{J} d\xi + \\
 & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} (\xi^2 \ddot{u}_{(a)}^1 + \\
 & + (h_{(a-1)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a-1)}^1) \overset{\circ}{J} d\xi \Big\} ,
 \end{aligned}$$

$$(9.18) \quad \tilde{i}_{(a)}(\underline{z}, t) = (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{N}_{(a)} l .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{\rho} ((h_{(a)} - \xi)^2 \ddot{u}_{(a)}^1 + \right. \\
 & + (h_{(a)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a+1)}^1) \overset{\circ}{J} d\xi + \\
 & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} (\xi^2 \ddot{u}_{(a)}^1 + \\
 & \left. + (h_{(a-1)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a-1)}^1) \overset{\circ}{J} d\xi \right\} .
 \end{aligned}$$

Postępując konsekwentnie, należy zlinearyzować kinetyczne warunki brzegowe w postaci konwekcyjnej (4.16). Pisząc je w postaci

$$\begin{aligned}
 (9.19) \quad & (\overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^{KL})(\overset{\circ}{n}_{(a)L} + \varepsilon \tilde{n}_{(a)L}) = (\overset{\circ}{p}_{(a)}^K + \varepsilon \tilde{p}_{(a)}^K) + \\
 & + (\overset{\circ}{s}_{(a)}^K + \varepsilon \tilde{s}_{(a)}^K), \\
 & (\overset{\circ}{S}_{(a)}^K + \varepsilon \overset{\circ}{\tilde{S}}_{(a)}^K)(\overset{\circ}{n}_{(a)K} + \varepsilon \tilde{n}_{(a)K}) = (\overset{\circ}{p}_{(a)} + \varepsilon \tilde{p}_{(a)}) + \\
 & + (\overset{\circ}{s}_{(a)} + \varepsilon \tilde{s}_{(a)}),
 \end{aligned}$$

otrzymamy po zlinearyzacji następujący układ warunków:

$$(9.20) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{KL} \overset{\circ}{n}_{(a)L} &= \overset{\circ}{P}_{(a)}^K + \overset{\circ}{S}_{(a)}^K, \\ \overset{\circ}{S}_{(a)}^K \overset{\circ}{n}_{(a)K} &= \overset{\circ}{P}_{(a)} + \overset{\circ}{S}_{(a)}, \end{aligned} \quad \text{na } \partial II \times T,$$

gdzie uogólnione obciążenia powierzchniowe i powierzchniowe siły reakcji więzów są zdefiniowane za pomocą wyrażeń (4.20) po zlinearyzowaniu. Postępując podobnie jak w (9.17) i (9.18) otrzymujemy zlinearyzowane wyrażenia definicyjne jak następuje:

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{P}_{(a)}^K(\underline{Z}, t) &= (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)} \overset{\circ}{V}_{(a)LM} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{KM} \cdot \\ &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{P}_{(a)}^L (\overset{\circ}{V}_{(a)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ &+ \overset{\circ}{P}_{(a)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \varepsilon) \overset{\circ}{j} \, d\varepsilon + \\ &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{P}_{(a-1)}^L (\overset{\circ}{V}_{(a-1)} + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ &+ \overset{\circ}{P}_{(a-1)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \varepsilon \overset{\circ}{j} \, d\varepsilon \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P}_{(a)}(\underline{Z}, t) &= (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)} \overset{\circ}{N}_{(a)l} \cdot \\ &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{P}_{(a)}^L (\overset{\circ}{V}_{(a)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\ &+ \overset{\circ}{P}_{(a)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \varepsilon) \overset{\circ}{j} \, d\varepsilon + \\ &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{P}_{(a-1)}^L (\overset{\circ}{V}_{(a-1)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\ &+ \overset{\circ}{P}_{(a-1)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \varepsilon \overset{\circ}{j} \, d\varepsilon \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_{(a)}^K(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\varphi}_{(a)} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)1, M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{KM} \cdot \\
 &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{s}_{(a)}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 &+ \overset{\circ}{s}_{(a)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \varepsilon) \overset{\circ}{j} \overset{\circ}{d}_{\varepsilon} + \\
 (9.21) \quad &+ h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{s}_{(a-1)}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 &\left. + \overset{\circ}{s}_{(a-1)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \varepsilon \overset{\circ}{j} \overset{\circ}{d}_{\varepsilon} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_{(a)}(\underline{z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} \overset{\circ}{\varphi}_{(a)} \overset{\circ}{N}_{(a)1} \cdot \\
 &\cdot \left\{ h_{(a)}^{-1} \sum_0^{h_{(a)}} (\overset{\circ}{s}_{(a)}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a)}^1)_{,L} + \right. \\
 &+ \overset{\circ}{s}_{(a)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a)}^1) (h_{(a)} - \varepsilon) \overset{\circ}{j} \overset{\circ}{d}_{\varepsilon} + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \sum_0^{h_{(a-1)}} (\overset{\circ}{s}_{(a-1)}^L (\overset{\circ}{\Psi}_{(a-1)}^1 + \varepsilon \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1)_{,L} + \\
 &\left. + \overset{\circ}{s}_{(a-1)}^3 \overset{\circ}{d}_{(a-1)}^1) \varepsilon \overset{\circ}{j} \overset{\circ}{d}_{\varepsilon} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie wielkość

$$(9.22) \quad \overset{\circ}{\varphi}_{(a)}(\underline{z}) = \overset{\circ}{n}_{(a)K}(\underline{z}) \overset{\circ}{n}^K(\underline{z}),$$

jest miarą kąta obrotu stycznej do powierzchni ruchomej $\overset{\circ}{\Pi}_{(a)}t$, mierzoną od konfiguracji stanu naturalnego tj.: od stycznej do powierzchni $\overset{\circ}{\Pi}_{(a)}$. W wyrażeniach (9.18) i (9.21) obowiązują nadal dodatkowe definicje (3.10). Powyższe definicje (9.18) i (9.21) dla uogólnionych sił:

$$\bar{\bar{S}}_{(a)}^{KL} = \bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{Z}, t), \bar{S}_{(a)}^K = \bar{S}_{(a)}^K(\underline{Z}, t), \dots, \bar{S}_{(a)} = \bar{S}_{(a)}(\underline{Z}, t),$$

$\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, wyrażają dwuwymiarowe pola, określone na iloczynie $\Pi \times T$, za pomocą odpowiednich trójwymiarowych pól, $\bar{T} = \bar{T}(\underline{X}, t)$, $\bar{b} = \bar{b}(\underline{X}, t), \dots, \bar{s} = \bar{s}(\underline{X}, t)$, $\underline{X} \in \bar{B}$, $t \in T$, określonych na iloczynie $\bar{B} \times T$. Wielkości $\bar{a}_{(a)} = \bar{a}_{(a)}(\underline{Z})$, $\bar{j} = \bar{j}(\underline{X})$, i $\bar{J} = \bar{J}(\underline{X})$ są odniesione do konfiguracji stanu naturalnego ciała warstwowego, przy czym

$$\begin{aligned} \bar{a}_{(a)}(\underline{Z}) &= \det(\bar{\Psi}_{(a)k,K}^0 \bar{\Psi}_{(a),L}^0), \quad a=1, \dots, r, \quad K, L=1, 2, 3, \\ (9.23) \quad \bar{J}(\underline{X}) &= \det(\bar{x}_{,\alpha}^k), \quad k=1, 2, 3, \quad \alpha=1, 2, 3, \\ \bar{j}(\underline{X}) &= (\det(\bar{x}_{,K}^k, \bar{x}_{k,L}^0)) / (\det(X_{,\alpha}^K, X_{\alpha,L}))^{1/2}, \end{aligned}$$

Wielkości (9.23) mogą być obliczone, gdy dany jest obszar ciała warstwowego w konfiguracji stanu naturalnego, za pomocą równań

$$\begin{aligned} (9.24) \quad \bar{x}(\underline{X}) &= \bar{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}) + \xi \bar{d}_{(a)}(\underline{Z}), \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \\ \bar{d}_{(a)}(\underline{Z}) &= h_{(a)}^{-1} (\bar{\Psi}_{(a+1)} - \bar{\Psi}_{(a)}), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\Psi}_{(a)} = \bar{\Psi}_{(a)}(\cdot)$ i $\bar{\Psi}_{(a+1)} = \bar{\Psi}_{(a+1)}(\cdot)$, są równaniami parametrycznymi gładkich płatów powierzchni ograniczających warstwę $\bar{B}_{(a)}$ i $\bar{B}_{(a+1)}$ od dołu.

Równania definicyjne (9.18), pozwalają otrzymać równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych $\bar{S}_{(a)}^{KL}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^K(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}(\cdot)$, występujących w równaniach ruchu (9.15) i kinetycznych warunkach brzegowych (9.20), gdy tylko uwzględnimy w (9.18) jawną postać równania konstytutywnego dla materiałów liniowo sprężystych. Postępując tutaj analogicznie jak w przypadku nieliniowej teorii małych odkształceń [por. (6.14) - (6.16)], wprowadzamy dla znanych funkcji oznaczenia następujące:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\delta}_P^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{W}_1(a),P, \\
 \overset{\circ}{A}_{(a)P}^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{d}_1(a),P, \\
 \overset{\circ}{A}_{(a)\beta}^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{d}_1(a) = 0, \\
 \overset{\circ}{B}_{(a-1)P}^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{d}_1(a-1),P, \\
 \overset{\circ}{B}_{(a-1)\beta}^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{d}_1(a-1), \\
 \overset{\circ}{C}_{(a-1)P}^L &= \overset{\circ}{W}(a)_{1,M} \overset{\circ}{a}_{(a)}^{ML} \overset{\circ}{W}_1(a-1),P, \\
 \overset{\circ}{C}_{(a)L} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{W}_1(a),L = 0, \\
 \overset{\circ}{A}_{(a)L} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{d}_1(a),L = 0, \\
 \overset{\circ}{A}_{(a)\beta} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{d}_1(a) = 1, \\
 \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{d}_1(a-1),L, \\
 \overset{\circ}{B}_{(a-1)\beta} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{d}_1(a-1), \\
 \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} &= \overset{\circ}{N}(a)_1 \overset{\circ}{W}_1(a-1),L,
 \end{aligned}
 \tag{9.25}$$

gdzie poszczególne wielkości charakteryzują konfigurację stanu naturalnego ciała warstwowego i zdefiniowane zostały w rozdziale 5 i 6. Następnie definiujemy uogólnione sztywności w konfiguracji stanu naturalnego:

$$\begin{aligned}
 \underline{J}_{(a)0} &= h_{(a)}^{-1} \overset{\circ}{(a)}_{(a)}^{-1/2} \int_0^{h(a)} \underline{c} \overset{\circ}{J} d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h(a), \\
 \underline{J}_{(a)1} &= h_{(a)}^{-1} \overset{\circ}{(a)}_{(a)}^{-1/2} \int_0^{h(a)} \underline{c} (h(a) - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi, \\
 \underline{J}_{(a)2} &= h_{(a)}^{-1} \overset{\circ}{(a)}_{(a)}^{-1/2} \int_0^{h(a)} \underline{c} (h(a) - \xi) \xi \overset{\circ}{J} d\xi,
 \end{aligned}
 \tag{9.26}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{J}_{(a)3} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a)} \underline{C} (h(a) - \pi) \pi^2 \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a)4} &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a)} \underline{C} (h(a) - \pi) \pi^3 \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a-1)0} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a-1)} \underline{C} \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a-1)1} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a-1)} \underline{C} \pi \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a-1)2} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a-1)} \underline{C} \pi^2 \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a-1)3} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a-1)} \underline{C} \pi^3 \overset{\circ}{J} d\pi, \\
 \underline{J}_{(a-1)4} &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)})^{-1/2} \int_0^{h(a-1)} \underline{C} \pi^4 \overset{\circ}{J} d\pi.
 \end{aligned}
 \tag{9.26}$$

Przy powyższych oznaczeniach i definicjach, równania konstytutywne (6.16) dla uogólnionych sił wewnętrznych przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{S}}_{(a)}^{KL} &= (J_{(a)1}^{KL\delta\delta} + J_{(a)2}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{A}_{(a)P}^L) \underline{\underline{\epsilon}}_{(a)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(a)2}^{KL\delta\delta} + J_{(a)3}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{A}_{(a)P}^L) \underline{\underline{\epsilon}}'_{(a)\delta\delta} + \\
 &+ (J_{(a)3}^{KLMN} + J_{(a)4}^{KPMN} \overset{\circ}{A}_{(a)P}^L) \underline{\underline{\epsilon}}''_{(a)MN} + \\
 &+ (J_{(a-1)1}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P}^L + J_{(a-1)2}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P}^L) + \\
 &+ J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}^L) \underline{\underline{\epsilon}}_{(a-1)\delta\delta} +
 \end{aligned}
 \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned}
 & + (J_{(a-1)2}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P} + J_{(a-1)3}^{KP\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P} + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{K3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}'_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)3}^{KPMN} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P} + J_{(a-1)4}^{KPMN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P} + \\
 & \quad + J_{(a-1)3}^{K3MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}''_{(a-1)MN},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{(a)}^{KK} = & J_{(a)1}^{K3\delta\delta} e_{(a)\delta\delta} + J_{(a)2}^{K3\delta\delta} e'_{(a)\delta\delta} + J_{(a)3}^{K3MN} \tilde{e}''_{(a)MN} + \\
 & + (J_{(a-1)1}^{KL\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)2}^{KL\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)2}^{KL\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)3}^{KL\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{K3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}'_{(a-1)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a-1)3}^{KLMN} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)4}^{KLMN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)3}^{K3MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}''_{(a-1)MN},
 \end{aligned}$$

(9.27)

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{(a)}^{KK} = & (J_{(a)0}^{K3\delta\delta} + J_{(a)1}^{K3\delta\delta} A_{(a)P}) \tilde{e}_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)1}^{K3\delta\delta} + J_{(a)2}^{K3\delta\delta} A_{(a)P}^{\circ K}) \tilde{e}'_{(a)\delta\delta} + \\
 & + (J_{(a)2}^{K3MN} + J_{(a)3}^{K3MN} A_{(a)P}^{\circ K}) \tilde{e}''_{(a)MN} - \\
 & - (J_{(a-1)0}^{P3\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P} + J_{(a-1)1}^{P3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P} + \\
 & \quad + J_{(a-1)0}^{33\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}_{(a-1)\delta\delta} - \\
 & - (J_{(a-1)1}^{P3\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P} + J_{(a-1)2}^{P3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P} + \\
 & \quad + J_{(a-1)1}^{33\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}'_{(a-1)\delta\delta} - \\
 & - (J_{(a-1)2}^{P3MN} \overset{\circ}{C}_{(a-1)P} + J_{(a-1)3}^{P3MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)P} + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{33MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}''_{(a-1)MN},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9.27) \quad \tilde{\tilde{s}}_{(a)} = & J_{(a)0}^{33\delta\delta} \tilde{e}_{(a)\delta\delta} + J_{(a)1}^{33\delta\delta} \tilde{e}'_{(a)\delta\delta} + J_{(a)2}^{33MN} \tilde{e}''_{(a)MN} - \\
 & - (J_{(a-1)0}^{L3\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)1}^{L3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)0}^{33\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}_{(a-1)\delta\delta} - \\
 & - (J_{(a-1)1}^{L3\delta\delta} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)2}^{L3\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)1}^{33\delta\delta} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}'_{(a-1)\delta\delta} - \\
 & - (J_{(a-1)2}^{L3MN} \overset{\circ}{C}_{(a-1)L} + J_{(a-1)3}^{L3MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)L} + \\
 & \quad + J_{(a-1)2}^{33MN} \overset{\circ}{B}_{(a-1)3}) \tilde{e}''_{(a-1)MN},
 \end{aligned}$$

gdzie miary odkształcenia $\tilde{e}_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $\tilde{e}'_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $\tilde{e}''_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$; $\delta, \delta=M, N, 3$; $M, N=1, 2$; zdefiniowane zostały za pomocą wyrażeń (6.11), przy czym $\tilde{e}'_{(a)33} = \tilde{e}''_{(a)M3} = \tilde{e}''_{(a)3M} = \tilde{e}''_{(a)33} = 0$.

Stosując jak poprzednio procedurę linearyzacji, otrzymujemy zlinearyzowaną postać warunku idealności więzów (3.18), a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (9.28) \quad \int_{\overset{\circ}{\Pi}} \tilde{r}_{(a)k}(\underline{z}, t) \delta u_{(a)}^k(\underline{z}, t) d\overset{\circ}{\Pi} + \\
 \quad + \int_{\delta\overset{\circ}{\Pi}} \tilde{s}_{(a)k}(\underline{z}, t) \delta u_{(a)}^k(\underline{z}, t) d\overset{\circ}{L} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie $\underline{z} \in \overset{\circ}{\Pi}$, $t \in T$. Warunek (9.28) musi być spełniony dla każdej funkcji $\delta u_{(a)}^k(\cdot)$ zgodnej z więzami dodatkowymi (3.17), które po linearyzacji przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 (9.29) \quad \overset{\circ}{\alpha}_v(\underline{z}, \underline{u}(\underline{z}, t), \overline{\nabla} \underline{u}(\underline{z}, t)) = 0, \quad \underline{z} \in \overset{\circ}{\Pi}, \quad v=1, \dots, N \leq 3(r+1); \\
 \overset{\circ}{\beta}_u(\underline{z}, \underline{u}(\underline{z}, t)) = 0, \quad \underline{z} \in \delta\overset{\circ}{\Pi}, \quad u=1, \dots, M \leq 3(r+1);
 \end{aligned}$$

gdzie $\underline{u} = (\underline{u}_{(a)})$, $a=1, \dots, r+1$; zaś $\overset{\circ}{\alpha}_v = \overset{\circ}{\alpha}_v(\underline{z}, \cdot)$ i $\overset{\circ}{\beta}_u = \overset{\circ}{\beta}_u(\underline{z}, \cdot)$ są danymi funkcjami liniowymi.

Innymi słowy, funkcje $\delta u_{(a)}^k(\cdot)$ mają być różniczkowalnymi rozwiązaniami układu równań

$$(9.30) \quad (\delta \alpha_V^0 / \delta u_{(a)}^k) \delta u_{(a)}^k + (\delta \alpha_V^0 / \delta u_{(a),K}^k) \delta u_{(a),K}^k = 0, \quad a=1, \dots, r+1$$

oraz warunków brzegowych

$$(9.31) \quad (\delta \beta_U^0 / \delta u_{(a)}^k) \delta u_{(a)}^k = 0, \quad a=1, \dots, r+1.$$

Przy formułowaniu problemów elastodynamiki ciał warstwowych należy dołączyć do powyższych równań odpowiednie warunki początkowe dla uogólnionych współrzędnych i ich pochodnych względem czasu tj.:

$$(9.32) \quad \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, 0) = \underline{u}_{(a)0}^*(\underline{Z}), \quad \dot{\underline{u}}_{(a)}(\underline{Z}, 0) = \dot{\underline{u}}_{(a)1}^*(\underline{Z}),$$

gdzie $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, zaś $\underline{u}_{(a)0}^*(\cdot)$ i $\dot{\underline{u}}_{(a)1}^*(\cdot)$ są funkcjami danymi.

Otrzymaliśmy zatem wszystkie równania, które charakteryzują model liniowej elastodynamiki ciał warstwowych o dowolnej strukturze i dowolnej konfiguracji warstw w stanie naturalnym.

Podstawowy układ równań stanowią zatem:

- równania ruchu (9.15), w terminach uogólnionych sił;
- kinetyczne warunki brzegowe (9.20), w terminach uogólnionych sił;
- równania konstytutywne i równania definicyjne (9.18), (9.21), (9.27), dla uogólnionych sił wewnętrznych i uogólnionych sił zewnętrznych i sił reakcji więzów kinematycznych; a ponadto,
- równania dodatkowych więzów wewnętrznych i brzegowych (9.29) wraz z warunkiem idealności dla tych więzów (9.28); oraz
- warunki początkowe (9.32), w terminach przemieszczeń i ich pochodnych względem czasu.

10. Teoria liniowa ciał warstwowych o strukturze płaskiej

Rozważymy teraz ciało sprężyste o strukturze warstwowej zdefiniowane w (2.1), złożone z warstw płaskich, anizotropowych i niejednorodnych. Założymy, że obszary każdej warstwy tego ciała w konfiguracji odniesienia i konfiguracji stanu naturalnego pokrywają się tak, że $B_{(a)} = \overset{\circ}{B}_{(a)} = \Pi \times (0, h_{(a)})$, $a=1, \dots, r$.

Obszar $\overset{\circ}{B}(a)$ jest parametryzowany współrzędnymi krzywoliniowymi normalnymi $(\underline{Z}, \xi) \in B(a)$, $\underline{Z} = (X^1, X^2) \in \Pi$, $\xi = X^3 - H(a) \in (0, h(a))$, $a=1, \dots, r$. Wszystkie równania teorii liniowej ciała warstwowego o strukturze płaskiej otrzymamy z odpowiednich równań zlinearyzowanych, które wyprowadzone zostały w rozdziale 9, dla ciała sprężystego o dowolnej strukturze warstwowej w konfiguracji stanu naturalnego. W tym celu wystarczy zauważyć, że pole wektorów jednostkowych $\underline{N}(a) = \overset{\circ}{N}(a)(\underline{Z})$, występujących w równaniu (6.5) sprowadza się do składowych

$$(10.1) \quad \overset{\circ}{N}_{(a)}^1 = \overset{\circ}{N}_{(a)}^2 = 0, \quad \overset{\circ}{N}_{(a)}^3 = 1.$$

Wobec (10.1) znikają drugi i trzeci tensor metryczny powierzchni podstawowej $\overset{\circ}{\Pi}(a)$ tak, że mamy

$$(10.2) \quad \overset{\circ}{a}_{(a)KL} = \overset{\circ}{\psi}_{(a),K}^{\circ k} \overset{\circ}{\psi}_{(a),L}^{\circ l} \delta_{kl}, \quad \overset{\circ}{b}_{(a)KL} = \overset{\circ}{c}_{(a)KL} = 0.$$

Uwzględniając (10.1) i (10.2) otrzymujemy kolejno poszczególne grupy równań. I tak, równania ruchu (9.15) sprowadzają się do postaci: $\mathbb{K}/$

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{S}_{(a)K}^{\circ KL} + \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\circ L3} + \overset{\circ}{r}_{(a)}^L + r_{(a)}^L &= i_{(a)}^L, \\ \overset{\circ}{S}_{(a)K}^{\circ K3} + \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\circ 33} + \overset{\circ}{r}_{(a)}^3 + r_{(a)}^3 &= i_{(a)}^3, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi \times T,$$

gdzie kreska pionowa oznacza pochodną kowariantną w konfiguracji stanu naturalnego $[\overset{\circ}{\underline{X}}, \overset{\circ}{\underline{T}}]$, $\overset{\circ}{\underline{T}} = \underline{0}$. Kinetyczne warunki brzegowe (9.20) pozostają, w rozważanym przypadku, bez zmiany tzn.:

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\circ KL} \overset{\circ}{n}_{(a)K} &= p_{(a)}^L + s_{(a)}^L, \\ \overset{\circ}{S}_{(a)}^{\circ K3} \overset{\circ}{n}_{(a)K} &= p_{(a)}^3 + s_{(a)}^3. \end{aligned} \quad \text{na } \partial \Pi \times T,$$

$\mathbb{K}/$ W dalszym ciągu we wszystkich wielkościach zlinearyzowanych oznaczonych dotychczas symbolem (...) opuszczamy nadkreślenie tyldę "˜".

Uogólnione siły wewnętrzne $\bar{S}_{(a)}^{KL}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^{K3}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^{L3}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^{33}(\cdot)$, uogólnione siły zewnętrzne $f_{(a)}^L(\cdot)$, $f_{(a)}^3(\cdot)$, $i_{(a)}^L(\cdot)$, $i_{(a)}^3(\cdot)$, $p_{(a)}^L(\cdot)$, $p_{(a)}^3(\cdot)$, i siły reakcji więzów $r_{(a)}^L(\cdot)$, $r_{(a)}^3(\cdot)$, $s_{(a)}^L(\cdot)$, $s_{(a)}^3(\cdot)$, występujące w równaniach (10.3) i (10.4), a zdefiniowane za pomocą wyrażeń (9.18) i (9.21) sprowadzają się do następujących wyrażeń:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{z}, t) = & (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} T^{KL} (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi + \right. \\ & \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} T^{KL} \xi \overset{\circ}{J} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{K3}(\underline{z}, t) = & (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} T^{K3} (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi + \right. \\ & \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} T^{K3} \xi \overset{\circ}{J} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10.5) \quad \bar{S}_{(a)}^{L3}(\underline{z}, t) = & (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} T^{L3} \overset{\circ}{J} d\xi - \right. \\ & \left. - h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} T^{L3} \overset{\circ}{J} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{33}(\underline{z}, t) = & (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} T^{33} \overset{\circ}{J} d\xi - \right. \\ & \left. - h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} T^{33} \overset{\circ}{J} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$f_{(a)}^K(\underline{z}, t) = (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} \rho \ b^K (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi + \right.$$

$$\left. + \delta_a^1 [p^K (h_{(a)} - \xi)]_{\xi=0, h_{(a)}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} b^K \xi^j d\xi + \\
 & + \delta_a^{r+1} [p^K \xi^j]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \}, \\
 f_{(a)}^3(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{\rho} b^3 (h_{(a)} - \xi)^j d\xi + \right. \\
 & + \delta_a^1 [p^3 (h_{(a)} - \xi)^j]_{\xi=0, h_{(a)}}^{\circ} + \\
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{\rho} b^3 \xi^j d\xi + \\
 & \left. + \delta_a^{r+1} [p^3 \xi^j]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \right\}, \\
 (10.5) \ r_{(a)}^K(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} r^K (h_{(a)} - \xi)^j d\xi + \right. \\
 & + [s^K (h_{(a)} - \xi)^j]_{\xi=0, h_{(a)}}^{\circ} + \\
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} r^K \xi^j d\xi + \\
 & \left. + [s^K \xi^j]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \right\}, \\
 r_{(a)}^3(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} r^3 (h_{(a)} - \xi)^j d\xi + \right. \\
 & \left. + [s^3 (h_{(a)} - \xi)^j]_{\xi=0, h_{(a)}}^{\circ} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} r^3 \xi^j \overset{\circ}{d}\xi + [s^3 \xi^j]_{\xi=0, h_{(a-1)}}^{\circ} \}, \\
 i_{(a)}^K(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{p} ((h_{(a)} - \xi)^2 \overset{\circ}{u}_{(a)}^K + \right. \\
 & + (h_{(a)} - \xi) \xi \overset{\circ}{u}_{(a+1)}^K) \overset{\circ}{j} d\xi + \\
 & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{p} (\xi^2 \overset{\circ}{u}_{(a)}^K + \\
 & \left. + (h_{(a-1)} - \xi) \xi \overset{\circ}{u}_{(a-1)}^K) \overset{\circ}{j} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

(10.5)

$$\begin{aligned}
 i_{(a)}^3(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \overset{\circ}{p} ((h_{(a)} - \xi)^2 \overset{\circ}{u}_{(a)}^3 + \right. \\
 & + (h_{(a)} - \xi) \xi \overset{\circ}{u}_{(a+1)}^3) \overset{\circ}{j} d\xi + \\
 & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \overset{\circ}{p} (\xi^2 \overset{\circ}{u}_{(a)}^3 + \\
 & \left. + (h_{(a-1)} - \xi) \xi \overset{\circ}{u}_{(a-1)}^3) \overset{\circ}{j} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{(a)}^K(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} p^K (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right. \\
 & \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} p^K \xi \overset{\circ}{j} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{(a)}^3(\underline{z}, t) = & (\overset{\circ}{a}_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} p^3 (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right. \\
 & \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} p^3 \xi \overset{\circ}{j} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10.5) \quad s_{(a)}^K(\underline{Z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} s^K(h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} s^K \xi \overset{\circ}{j} d\xi \right\}, \\
 s_{(a)}^3(\underline{Z}, t) &= (a_{(a)})^{-1/2} \left\{ h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} s^3(h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{j} d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} s^3 \xi \overset{\circ}{j} d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie obowiązują nadal dodatkowe definicje (3.10).

Powyższe równania definicyjne (10.5) dla uogólnionych sił wyrażają dwuwymiarowe pola, określone na iloczynie $\Pi \times T$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$; za pomocą odpowiednich trójwymiarowych pól $\underline{T} = \underline{T}(\underline{X}, t)$, $\underline{b} = \underline{b}(\underline{X}, t), \dots, \underline{s} = \underline{s}(\underline{X}, t)$, określonych na iloczynie $B \times T$, $\underline{X} \in B$, $t \in T$.

Relacje geometryczne wyrażające miary odkształcenia w postaci (9.5) upraszczają się do następujących:

$$\begin{aligned}
 (10.6) \quad e_{(a)KL}(\underline{Z}, t) &= \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k,L} + u_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} = \\
 &= (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k})_{,L} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a),KL}^k u_{(a)k} + \\
 &+ (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} u_{(a)k})_{,K} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,LK} u_{(a)k} = \\
 &= u_{(a)K,L} - u_{(a)k} \overset{\circ}{\Psi}_{(a),\alpha}^1 \overset{\circ}{X}^\alpha_{,L} \overset{\circ}{\Psi}_{(a),KL}^k + \\
 &\quad + u_{(a)L,K} - u_{(a)k}^L \overset{\circ}{\Psi}_{(a),\alpha}^1 \overset{\circ}{X}^\alpha_{,L} \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,LK} = \\
 &= u_{(a)K,L} - u_{(a)\alpha} \left\{ \overset{\circ}{\alpha} \right\}_{K L} + u_{(a)L,K} - u_{(a)\alpha} \left\{ \overset{\circ}{\alpha} \right\}_{K L} = \\
 &= u_{(a)K|L} + u_{(a)L|K} = 2 u_{(a)(K|L)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{(a)KL}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k (u_{(a+1)k} - u_{(a)k})_{,L} + \\
 &+ \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K}) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a+1)k,L} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k,L} + \\
 &+ \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} u_{(a+1),K}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} u_{(a),K}^k) = \\
 (10.6) \quad &= h_{(a)}^{-1} ((\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1),K}^k - h_{(a)} \overset{\circ}{N}_{(a),K}^k) u_{(a+1)k,L} - \\
 &- \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k,L} + (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k,L} - \\
 &- h_{(a)} \overset{\circ}{N}_{(a)k,L}) u_{(a+1),K}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k,L} u_{(a),K}^k) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K|L} - u_{(a)K|L} + u_{(a+1)L|K} - \\
 &- u_{(a)L|K}) = 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)}(K|L) - u_{(a)}(K|L)),
 \end{aligned}$$

$$e''_{(a)KL}(\underline{X}, t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 e_{(a)K\mathfrak{Z}}(\underline{X}, t) &= h_{(a)}^{-1} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k (u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) + \\
 &+ u_{(a),K}^k (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} ((\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1),K}^k - \overset{\circ}{N}_{(a),K}^k h_{(a)}) u_{(a+1)k} - \\
 &- \overset{\circ}{\Psi}_{(a),K}^k u_{(a)k} + u_{(a),K}^k (\overset{\circ}{\Psi}_{(a)k} + \overset{\circ}{N}_{(a)k} h_{(a)}) - \\
 &- u_{(a),K}^k \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k}) = h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K} + \\
 &+ u_{(a),K}^k \overset{\circ}{N}_{(a)k} h_{(a)}) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}) + u_{(a)\mathfrak{Z},K}; \\
 &u_{(a)\mathfrak{Z}} = u_{(a)}^k \overset{\circ}{N}_{(a)k}, \\
 &u_{(a)\mathfrak{Z},K} = u_{(a),K}^k \overset{\circ}{N}_{(a)k};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{(a)K3}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-2} (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K} (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k}) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k)_{,K} \overset{\circ}{N}_{(a)k} = \\
 (10.6) \quad &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3,K} - u_{(a)3,K}),
 \end{aligned}$$

$$e''_{(a)K3}(\underline{Z}, t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 e_{(a)33}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-2} ((\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)}^k - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)}^k) (u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) + \\
 &+ (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k) (\overset{\circ}{\Psi}_{(a+1)k} - \overset{\circ}{\Psi}_{(a)k})) = \\
 &= h_{(a)}^{-1} ((u_{(a+1)k} - u_{(a)k}) \overset{\circ}{N}_{(a)}^k + \\
 &+ (u_{(a+1)}^k - u_{(a)}^k) \overset{\circ}{N}_{(a)k}) = \\
 &= 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3}).
 \end{aligned}$$

Równanie konstytutywne (9.7) dla tensora naprężenia, przyjmuje teraz postać:

$$\begin{aligned}
 (10.7) \quad T^{\alpha\beta}(\underline{X}, t) &= c^{\alpha\beta MN}(\underline{X}) (e_{(a)MN}(\underline{Z}, t) + e'_{(a)MN}(\underline{X}, t) \xi) + \\
 &+ 2 c^{\alpha\beta M3}(\underline{X}) (e_{(a)M3}(\underline{Z}, t) + e'_{(a)M3}(\underline{Z}, t) \xi) + \\
 &+ c^{\alpha\beta 33}(\underline{X}) e_{(a)33}(\underline{Z}, t), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3;
 \end{aligned}$$

$$K, L, M, N = 1, 2.$$

A po uwzględnieniu miar odkształcenia (10.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (10.8) \quad T^{\alpha\beta} &= c^{\alpha\beta MN} (u_{(a)(M|N)} + h_{(a)}^{-1} \xi (u_{(a+1)(M|N)} - \\
 &- u_{(a)(M|N)}) + 2 c^{\alpha\beta M3} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M} - u_{(a)M}) + \\
 &+ u_{(a)3,M} + h_{(a)}^{-1} \xi (u_{(a+1)3,M} - u_{(a)3,M})) + \\
 &+ c^{\alpha\beta 33} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3})),
 \end{aligned}$$

gdzie: $\xi = X^3 - H_{(a)} \in (0, h_{(a)})$, $a=1, \dots, r$; $\alpha, \beta=1, 2, 3$; $M, N=1, 2$; zaś $\underline{u}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(a+1)}(\cdot)$ są wektorami przemieszczenia punktów powierzchni $\Pi_{(a)}$ i $\Pi_{(a+1)}$, ograniczających warstwę $B_{(a)}$ od dołu i od góry, przy czym ξ oznacza lokalną współrzędną mierzoną od powierzchni podstawowej $\Pi_{(a)}$ zgodnie z kierunkiem Ox^3 przyjętego układu współrzędnych normalnych.

Równania ruchu postaci (10.3) opisują te problemy gdzie występują więzy dodatkowe postaci (9.29). W przypadku gdy więzy dodatkowe (9.29) znikają w całym obszarze ciała, lub nie narzuca się ich na deformację ciała, to wówczas równania ruchu (10.3) redukują się do następujących:

$$(10.9) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL} |_K + \bar{S}_{(a)}^{L3} + f_{(a)}^L &= i_{(a)}^L, \\ \bar{S}_{(a)}^{K3} |_K + \bar{S}_{(a)}^{33} + f_{(a)}^3 &= i_{(a)}^3, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi \times T,$$

a kinetyczne warunki brzegowe przyjmują postać:

$$(10.10) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL} \overset{\circ}{n}_{(a)K} &= P_{(a)}^L, \\ \bar{S}_{(a)}^{K3} \overset{\circ}{n}_{(a)K} &= P_{(a)}^3, \end{aligned} \quad \text{na } \partial \Pi \times T.$$

Równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych $\bar{S}_{(a)}^{KL}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^{K3}(\cdot)$, $\bar{S}_{(a)}^{33}(\cdot)$ występujących w równaniach ruchu i kinetycznych warunków brzegowych otrzymujemy z definicji (10.5)_{1,2,3,4} podstawiając tam w miejsce składowycj tensora naprężenia, prawą stronę równania konstytutywnego (10.7). Otrzymujemy zatem równania konstytutywne w terminach miar odkształcenia:

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{Z}, t) &= J_{(a)1}^{KL\delta\delta} e_{(a)\delta\delta} + J_{(a)2}^{KL\delta\delta} e'_{(a)\delta\delta} + \\ &+ J_{(a-1)1}^{KL\delta\delta} e_{(a-1)\delta\delta} + J_{(a-1)2}^{KL\delta\delta} e'_{(a-1)\delta\delta}, \\ \bar{S}_{(a)}^{K3}(\underline{Z}, t) &= J_{(a)1}^{K3\delta\delta} e_{(a)\delta\delta} + J_{(a)2}^{K3\delta\delta} e'_{(a)\delta\delta} + \\ &+ J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} e_{(a-1)\delta\delta} + J_{(a-1)2}^{K3\delta\delta} e'_{(a-1)\delta\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{K3}(\underline{z}, t) &= J_{(a)0}^{K3\delta\delta} e_{(a)\delta\delta} + J_{(a)1}^{K3\delta\delta} e'_{(a)\delta\delta} - \\ (10.11) \quad &- J_{(a-1)0}^{K3\delta\delta} e_{(a-1)\delta\delta} - J_{(a-1)1}^{K3\delta\delta} e'_{(a-1)\delta\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{33}(\underline{z}, t) &= J_{(a)0}^{33\delta\delta} e_{(a)\delta\delta} + J_{(a)1}^{33\delta\delta} e'_{(a)\delta\delta} - \\ &- J_{(a-1)0}^{33\delta\delta} e_{(a-1)\delta\delta} - J_{(a-1)1}^{33\delta\delta} e'_{(a-1)\delta\delta}, \end{aligned}$$

gdzie miary odkształcenia $e_{(a)}(\cdot)$, $e'_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, zostały zdefiniowane za pomocą wyrażeń (10.6), przy czym $e'_{(a)33}(\cdot) = 0$, zaś uogólnione sztywności $\underline{J}_{(a)0}(\cdot)$, $\underline{J}_{(a)1}(\cdot)$, $\underline{J}_{(a)2}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \underline{J}_{(a)0}(\underline{z}) &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} \overset{\circ}{J} d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \\ \underline{J}_{(a)1}(\underline{z}) &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) \overset{\circ}{J} d\xi, \\ \underline{J}_{(a)2}(\underline{z}) &= h_{(a)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a)}} \underline{c} (h_{(a)} - \xi) \xi \overset{\circ}{J} d\xi, \\ (10.12) \quad \underline{J}_{(a-1)0}(\underline{z}) &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \overset{\circ}{J} d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a-1)} \\ \underline{J}_{(a-1)1}(\underline{z}) &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi \overset{\circ}{J} d\xi, \\ \underline{J}_{(a-1)2}(\underline{z}) &= h_{(a-1)}^{-1} (a_{(a)}^{\circ})^{-1/2} \int_0^{h_{(a-1)}} \underline{c} \xi^2 \overset{\circ}{J} d\xi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono definicje pomocnicze:

$$(10.13) \quad h_{(0)}^{-1} (a_{(0)})^{-1/2} \int_0^{h_{(0)}} (\dots) d\xi = 0,$$

$$h_{(r+1)}^{-1} (a_{(r+1)})^{-1/2} \int_0^{h_{(r+1)}} (\dots) d\xi = 0.$$

Równania konstytutywne (10.11) można otrzymać bezpośrednio z równań (9.27) jeśli zauważymy, że w przypadku teorii liniowej i płaskiej struktury warstwowej oraz parametryzacji obszaru ciała w stanie naturalnym krzywoliniowymi współrzędnymi normalnymi, wyrażenia (9.25) upraszczają się do następujących:

$$\begin{aligned} A_{(a)P}^K &= A_{(a)P}^L = 0, & B_{(a-1)P}^K &= B_{(a-1)P}^L = 0, \\ B_{(a-1)\beta}^K &= B_{(a-1)\beta}^L = 0, & B_{(a-1)L}^O &= 0, & B_{(a-1)\beta}^O &= 1, \\ C_{(a-1)P}^K &= C_{(a-1)P}^L = \delta_P^L, & C_{(a-1)L}^O &= 0, \end{aligned}$$

a ponadto, że miary odkształcenia $e_{(a)MN}^{\prime\prime}(\cdot) = 0$, $a=1, \dots, r$.

Miary odkształcenia $e_{(a)\delta\delta}^{\prime}(\cdot)$, $e_{(a)\delta\delta}(\cdot)$, $e_{(a-1)\delta\delta}(\cdot)$, i $e_{(a-1)\delta\delta}^{\prime}(\cdot)$, $\delta, \delta=M, N, \beta$, występujące w równaniach konstytutywnych (10.11) mają ostatecznie postać:^{*}

$$(10.14) \quad \begin{aligned} e_{(a)MN}(\underline{Z}, t) &= 2 u_{(a)(M|N)}, \\ e_{(a)MN}^{\prime}(\underline{Z}, t) &= 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)(M|N)} - u_{(a)(M|N)}), \\ e_{(a)M\beta}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M} - u_{(a)M}) + u_{(a)\beta, M}, \\ e_{(a)M\beta}^{\prime}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta, M} - u_{(a)\beta, M}), \\ e_{(a)\beta\beta}(\underline{Z}, t) &= 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta} - u_{(a)\beta}); \end{aligned}$$

^{*} Powyższe miary odkształcenia wyprowadził autor po raz pierwszy w związku z nieliniową teorią powłok, dyskutowaną w pracach [50], [51] i dalszych.

$$\begin{aligned}
 e_{(a-1)MN}(\underline{Z}, t) &= 2 u_{(a-1)(M|N)}, \\
 e'_{(a-1)MN}(\underline{Z}, t) &= 2 h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)(M|N)} - u_{(a-1)(M|N)}), \\
 (10.14) \quad e_{(a-1)M\bar{3}}(\underline{Z}, t) &= h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)M} - u_{(a-1)M}) + u_{(a-1)\bar{3},M}, \\
 e'_{(a-1)M\bar{3}}(\underline{Z}, t) &= h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)\bar{3},M} - u_{(a-1)\bar{3},M}), \\
 e_{(a-1)\bar{3}\bar{3}}(\underline{Z}, t) &= 2 h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)\bar{3}} - u_{(a-1)\bar{3}}).
 \end{aligned}$$

Jeśli obszar ciała w konfiguracji stanu naturalnego jest parametryzowany współrzędnymi kartezjańskimi, to dla ciała o płaskiej strukturze warstwowej, w przypadku gdy dodatkowe więzy wewnętrzne (w II) i brzegowe (na ∂II) znikają lub nie narzuca się ich w obszarze ciała, równania podstawowe mają uproszczoną postać. Jest bowiem,

$$(10.15) \quad \overset{o}{a}_{(a)KL} = 1, \quad \overset{o}{b}_{(a)KL} = \overset{o}{c}_{(a)KL} = 0,$$

i równania ruchu (10.9) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 (10.16) \quad \bar{S}_{(a),K}^{KL} + \bar{S}_{(a)}^{L\bar{3}} + f_{(a)}^L &= i_{(a)}^L, \\
 \bar{S}_{(a),K}^{K\bar{3}} + \bar{S}_{(a)}^{\bar{3}\bar{3}} + f_{(a)}^{\bar{3}} &= i_{(a)}^{\bar{3}},
 \end{aligned} \quad \text{w } II \times T,$$

a kinetyczne warunki brzegowe (10.10) postać:

$$\begin{aligned}
 (10.17) \quad \bar{S}_{(a)}^{KL} \overset{o}{n}_{(a)K} &= P_{(a)}^L, \\
 \bar{S}_{(a)}^{K\bar{3}} \overset{o}{n}_{(a)K} &= P_{(a)}^{\bar{3}},
 \end{aligned} \quad \text{na } \partial II \times T.$$

Równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych można zapisać w zwartej formie, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (10.18) \quad \bar{S}_{(a)}^{KL} &= J_{(a)1}^{KLij} e_{(a)ij} + J_{(a)2}^{KLij} e'_{(a)ij} + \\
 &+ J_{(a-1)1}^{KLij} e_{(a-1)ij} + J_{(a-1)2}^{KLij} e'_{(a-1)ij},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{(a)}^{K3} &= J_{(a)1}^{K3ij} e_{(a)ij} + J_{(a)2}^{K3ij} e'_{(a)ij} + \\
 &+ J_{(a-1)1}^{K3ij} e_{(a-1)ij} + J_{(a-1)2}^{K3ij} e'_{(a-1)ij}, \\
 (10.18) \bar{S}_{(a)}^{K3} &= J_{(a)0}^{K3ij} e_{(a)ij} + J_{(a)1}^{K3ij} e'_{(a)ij} + \\
 &+ J_{(a-1)0}^{K3ij} e_{(a-1)ij} + J_{(a-1)1}^{K3ij} e'_{(a-1)ij}, \\
 \bar{S}_{(a)}^{33} &= J_{(a)0}^{33ij} e_{(a)ij} + J_{(a)1}^{33ij} e'_{(a)ij} + \\
 &+ J_{(a-1)0}^{33ij} e_{(a-1)ij} + J_{(a-1)1}^{33ij} e'_{(a-1)ij}, \\
 & i, j=1, 2, 3; \quad K, L=1, 2;
 \end{aligned}$$

gdzie przyjęto $e'_{(a)33} = e'_{(a-1)33} = 0$. W powyższych równaniach (10.18) miary odkształcenia: $\underline{e}_{(a)}(\cdot)$, $\underline{e}'_{(a)}(\cdot)$, $\underline{e}_{(a-1)}(\cdot)$, $\underline{e}'_{(a-1)}(\cdot)$ wyrażają się analogicznie jak (10.14) z tym jednak, że pochodne kowariantne tam występujące stają się pochodnymi cząstkowymi i mamy:

$$\begin{aligned}
 e_{(a)MN} &= 2 u_{(a)(M,N)}, \\
 e'_{(a)MN} &= 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)(M,N)} - u_{(a)(M,N)}), \\
 e_{(a)M3} &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M} - u_{(a)M}) + u_{(a)3,M}, \\
 e'_{(a)M3} &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3,M} - u_{(a)3,M}), \\
 e_{(a)33} &= 2 h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3}), \\
 (10.19) \quad e_{(a-1)MN} &= 2 u_{(a-1)(M,N)}, \\
 e'_{(a-1)MN} &= 2 h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)(M,N)} - u_{(a-1)(M,N)}), \\
 e_{(a-1)M3} &= h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)M} - u_{(a-1)M}) + u_{(a-1)3,M}, \\
 e'_{(a-1)M3} &= h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)3,M} - u_{(a-1)3,M}), \\
 e_{(a-1)33} &= 2 h_{(a-1)}^{-1} (u_{(a)3} - u_{(a-1)3}),
 \end{aligned}$$

Natomiast uogólnione sztywności $\underline{J}_{(a)0}(\cdot), \dots, \underline{J}_{(a)2}(\cdot)$,
i $\underline{J}_{(a-1)0}(\cdot), \dots, \underline{J}_{(a-1)2}(\cdot)$ występujące w równaniach (10.18)
są definiowane analogicznie jak w (10.12) tzn.:

$$\begin{aligned}
 J_{(a)0}^{ijkl} &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} c^{ijkl} d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \\
 J_{(a)1}^{ijkl} &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} c^{ijkl} (h_{(a)} - \xi) d\xi, \\
 J_{(a)2}^{ijkl} &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} c^{ijkl} (h_{(a)} - \xi) \xi d\xi, \\
 (10.20) \quad J_{(a-1)0}^{ijkl} &= h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} c^{ijkl} d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a-1)}, \\
 J_{(a-1)1}^{ijkl} &= h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} c^{ijkl} (h_{(a-1)} - \xi) d\xi, \\
 J_{(a-1)2}^{ijkl} &= h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} c^{ijkl} (h_{(a-1)} - \xi) \xi d\xi,
 \end{aligned}$$

Równania definicyjne dla uogólnionych sił zewnętrznych
(10.5) przyjmują również uproszczoną postać:

$$\begin{aligned}
 (10.21) \quad r_{(a)}^K &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} \rho b^K (h_{(a)} - \xi) d\xi + \\
 &+ \delta_a^1 [p^K (h_{(a)} - \xi)]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho b^K \xi d\xi + \\
 &+ \delta_a^{r+1} [p^K \xi]_{\xi=0, h_{(a-1)}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3^3(a) &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} \rho^3 b^3 (h_{(a)} - \xi) d\xi + \\
 &+ \delta_a^1 [p^3 (h_{(a)} - \xi)]_{\xi=0, h_{(a)}} + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho^3 b^3 \xi d\xi + \\
 &+ \delta_a^{r+1} [p^3 \xi]_{\xi=0, h_{(a-1)}} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10.21) \quad i_{(a)}^K &= h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \rho^2 ((h_{(a)} - \xi)^2 \ddot{u}_{(a)}^K + \\
 &+ (h_{(a)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a+1)}^K) d\xi + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho^2 (\xi^2 \ddot{u}_{(a)}^K + \\
 &+ (h_{(a-1)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a-1)}^K) d\xi, \\
 i_3^3(a) &= h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \rho^2 ((h_{(a)} - \xi)^2 \ddot{u}_{(a)}^3 + \\
 &+ (h_{(a)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a+1)}^3) d\xi + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho^2 (\xi^2 \ddot{u}_{(a)}^3 + \\
 &+ (h_{(a-1)} - \xi) \xi \ddot{u}_{(a-1)}^3) d\xi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{(a)}^K &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} p^K (h_{(a)} - \xi) d\xi + \\
 (10.21) \quad &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} p^K \xi d\xi, \\
 p_{(a)}^3 &= h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} p^3 (h_{(a)} - \xi) d\xi + \\
 &+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} p^3 \xi d\xi,
 \end{aligned}$$

gdzie przyjęto dodatkowe definicje:

$$h_{(0)}^{-1} \int_0^{h_{(0)}} (\dots) d\xi \equiv 0, \quad h_{(r+1)}^{-1} \int_0^{h_{(r+1)}} (\dots) d\xi \equiv 0.$$

W dotychczasowych rozważaniach równania podstawowe zawierały m.in. uogólnione siły wewnętrzne: $S_{(a)}^{KL}(\cdot), \dots, S_{(a)}^{33}(\cdot)$, $a=1, \dots, r+1$, które jako wielkości zintegrowane okazują się dość trudne do interpretacji wytrzymałościowej. Dlatego też w dalszym ciągu, w miejsce tych wielkości, wprowadzimy uogólnione siły $N_{(a)}$ i uogólnione momenty $M_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, działające w przekrojach normalnych ciała warstwowego ($X^1 = \text{const.}$, $X^2 = \text{const.}$ i $X^3 = \text{const.}$), a będące wynikiem pewnej dekompozycji tych pierwszych wielkości, w przyjętym układzie współrzędnych kartezjańskich. W tym celu, napiszemy wyrażenie na pracę sił wewnętrznych warstwy $B_{(a)}$, odniesioną do powierzchni podstawowej $\Pi_{(a)}$ (ograniczającej warstwę od dołu), a mianowicie:

$$(10.22) \quad 2 W_{(a)}(\underline{z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij} w_{i,j} d\xi, \quad a=1, \dots, r;$$

gdzie $\underline{w} = \underline{w}(\underline{X}, t)$ oznacza pole przemieszczeń dowolnego punktu warstwy $B_{(a)}$ i wyraża się przez dwuwymiarowe pola przemieszczeń $\underline{u}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(a+1)}(\cdot)$ powierzchni $\Pi_{(a)}$ i $\Pi_{(a+1)}$ w następujący sposób:

$$(10.23) \quad \underline{w}(\underline{X}, t) = \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, t) + \underline{v}_{(a)}(\underline{Z}, t) \xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)},$$

$$\underline{v}_{(a)} = h_{(a)}^{-1} (\underline{u}_{(a+1)} - \underline{u}_{(a)}).$$

Rozwijając wyrażenie (10.22) przy uwzględnieniu (10.23) otrzymujemy kolejno:

$$(10.24) \quad w_{i,j} = u_{(a)i,j} + v_{(a)i,j} \xi + v_{(a)i} \delta_j^3, \quad i, j=1, 2, 3;$$

a następnie,

$$(10.25) \quad 2 W_{(a)}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij} (u_{(a)i,j} + v_{(a)i,j} \xi + v_{(a)i} \delta_j^3) d\xi +$$

$$+ \int_0^{h_{(a)}} T^{KL} (u_{(a)KL} + v_{(a)K,L} \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^{h_{(a)}} T^{K3} v_{(a)K} d\xi + \int_0^{h_{(a)}} T^{K3} (u_{(a)3,K} + v_{(a)3,K} \xi) d\xi + \int_0^{h_{(a)}} T^{33} v_{(a)3} d\xi.$$

Jeśli wprowadzimy definicje dla uogólnionych sił i momentów przekrojowych:

$$(10.26) \quad N_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij} d\xi, \quad M_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij} \xi d\xi,$$

$$0 \leq \xi \leq h_{(a)},$$

oraz zachowamy miary odkształcenia jak w (10.14), to wyrażenie na pracę przyjmie postać:

$$(10.27) \quad 2 W_{(a)}(\underline{Z}, t) = N_{(a)}^{KL} e_{(a)KL} + M_{(a)}^{KL} e'_{(a)KL} + \\ + 2 (N_{(a)}^{K3} e_{(a)K3} + M_{(a)}^{K3} e'_{(a)K3}) + \\ + N_{(a)}^{33} e_{(a)33}.$$

Pisząc krócej mamy,

$$(10.28) \quad 2 W_{(a)}(\underline{Z}, t) = N_{(a)}^{ij} e_{(a)ij} + M_{(a)}^{ij} e'_{(a)ij}, \quad e'_{(a)33} = 0.$$

Wobec definicji (10.26) uogólnione siły wewnętrzne (10.11) dekomponują się w następujący sposób:

$$(10.29) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{(a)}^{KL}(\underline{Z}, t) &= N_{(a)}^{KL} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{KL} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{KL}, \\ \bar{S}_{(a)}^{K3}(\underline{Z}, t) &= N_{(a)}^{K3} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{K3} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{K3}, \\ \bar{S}_{(a)}^{-K3}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{K3} - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{K3}, \\ \bar{S}_{(a)}^{-33}(\underline{Z}, t) &= h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{33} - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{33}, \end{aligned}$$

$$a=1, \dots, r+1; \quad K, L=1, 2.$$

Wprowadzając wielkości (10.29) do równań ruchu (10.16) oraz kinetycznych warunków brzegowych (10.17), otrzymujemy je w terminach nowych wielkości uogólnionych:

$$(10.30) \quad \begin{aligned} N_{(a),K}^{KL} - h_{(a)}^{-1} M_{(a),K}^{KL} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1),K}^{KL} + h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{L3} - \\ - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{L3} + f_{(a)}^L = i_{(a)}^L, \\ N_{(a),K}^{K3} - h_{(a)}^{-1} M_{(a),K}^{K3} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1),K}^{K3} + h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{33} - \\ - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{33} + f_{(a)}^3 = i_{(a)}^3, \quad \text{w } \Pi * T; \end{aligned}$$

$$(10.31) \quad \left(N_{(a)}^{KL} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{KL} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{KL} \right) n_{(a)K}^0 = p_{(a)}^L, \\ \left(N_{(a)}^{K3} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{K3} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{K3} \right) n_{(a)K}^0 = p_{(a)}^3, \quad \text{na } \delta \mathbb{I} \times \mathbb{T}$$

Równania konstytutywne dla nowych wielkości uogólnionych występujących w równaniach (10.30) i (10.31) mają postać:

$$(10.32) \quad N_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = I_{(a)0}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} e'_{(a)kl}, \\ N_{(a-1)}^{ij}(\underline{Z}, t) = I_{(a-1)0}^{ijkl} e_{(a-1)kl} + I_{(a-1)1}^{ijkl} e'_{(a-1)kl}, \\ M_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = I_{(a)1}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} e'_{(a)kl}, \\ M_{(a-1)}^{ij}(\underline{Z}, t) = I_{(a-1)1}^{ijkl} e_{(a-1)kl} + I_{(a-1)2}^{ijkl} e'_{(a-1)kl}, \\ i, j, k, l = K, L, M, N, 3;$$

gdzie przyjęto: $e'_{(a)33} \equiv e'_{(a-1)33} \equiv 0$, oraz gdzie tensory uogólnionych sztywności $I_{(a)0}^{ijkl}(\cdot), \dots, I_{(a-1)2}^{ijkl}(\cdot)$ zostały zdefiniowane podobnie jak w (10.20) tj.:

$$(10.33) \quad I_{(a)n}^{ijkl}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} c^{ijkl} \xi^n d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \\ I_{(a-1)n}^{ijkl}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a-1)}} c^{ijkl} \xi^n d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a-1)},$$

$$i, j, k, l = K, L, M, N, 3; \quad a = 1, \dots, r+1; \quad n = 0, 1, 2.$$

Natomiast miary odkształcenia, zdefiniowane w (10.13) pozostają w mocy również dla równań konstytutywnych (10.29). Poniżej, przedstawione zostały równania konstytutywne (10.29) w postaci macierzowej.

11. Formułowanie problemów brzegowo-początkowych w liniowej elastodynamice ciał warstwowych

Ciała wielowarstwowe

W rozdziale tym ograniczymy się do sformułowania zagadnienia brzegowo-początkowego dla ciała anizotropowego i niejednorodnego, o płaskiej strukturze warstwowej, w ramach teorii liniowej podanej w rozdziale 10. Zakładamy, że ciało warstwowe B, zdefiniowane w (2.1), w konfiguracji stanu naturalnego składa się w płaskich warstw $B_{(a)}$, gdzie $a=1, \dots, r$ oznacza numer warstwy, zaś r liczbę warstw tworzących ciało. Obszar ciała warstwowego B parametryzowany jest kartezjańskim układem współrzędnych (X^k) , $k=1, 2, 3$; a ponadto obszar każdej warstwy $B_{(a)} = \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)}) = \Pi \times (0, h_{(a)})$, jest parametryzowany lokalnym kartezjańskim układem współrzędnych $(\underline{z}, \xi) \in B_{(a)}$, $\underline{z} = (X^1, X^2) \in \Pi$, $\xi = X^3 - H_{(a)} \in (0, h_{(a)})$, gdzie Π jest płaskim regularnym obszarem na płaszczyźnie $OX^1 X^2$, zaś $h_{(a)} > 0$ jest grubością warstwy $B_{(a)}$. W ten sposób, obszar ciała warstwowego jest ograniczony płaskimi płatkami $X^3 = H_{(1)}$ i $X^3 = H_{(r+1)}$ oraz powierzchnią walcową $\partial \Pi \times (H_{(1)}, H_{(r+1)})$ normalną do Π , zaś obszar dowolnej warstwy ograniczony płaskimi płatkami $X^3 = H_{(a)}$ i $X^3 = H_{(a+1)}$ oraz powierzchnią walcową $\partial \Pi \times (H_{(a)}, H_{(a+1)})$, gdzie $\partial \Pi$ jest regularnym brzegiem płaskiego obszaru Π .

Jak już wspomniano w rozdziale 2, istota teorii, która opisuje proponowane modele elastodynamiki ciała warstwowego, polega na sprowadzeniu kinematyki ciała trójwymiarowego do kinematyki powierzchni materialnych ograniczających poszczególne warstwy tego ciała. Zatem, sformułowanie zagadnienia brzegowo-początkowego dla ciała warstwowego podamy w terminach pewnych dwuwymiarowych pól zależnych od płaskich współrzędnych $\underline{z} = (X^1, X^2)$ i czasu t , a następnie przejdziemy do trójwymiarowych wielkości połowych, zależnych od współrzędnych przestrzennych $\underline{x} = (X^1, X^2, X^3)$ i czasu t , charakteryzujących trójwymiarowy proces sprężysty $[\underline{x}, \underline{T}]$ ciała warstwowego. Zakładamy tak jak poprzednio, że ruch ciała warstwowego B jest w pełni określony przez ruch powierzchni $\Pi_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, ograniczających poszczególne warstwy tego ciała, a ruch dowolnej warstwy $B_{(a)}$ przez ruch powierzchni $\Pi_{(a)}$ i $\Pi_{(a+1)}$ ograniczających tę warstwę. Tak więc, ruch dowolnego punktu ciała warstwowego jest opisany równaniem więzów wewnętrz-

nych [por. (9.1)]:

$$(11.1) \quad \underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}, t) + \epsilon h_{(a)}^{-1} (\underline{\Psi}_{(a+1)}(\underline{Z}, t) - \underline{\Psi}_{(a)}(\underline{Z}, t)),$$

$$0 \leq \epsilon \leq h_{(a)},$$

gdzie $\underline{\Psi}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{\Psi}_{(a+1)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$ są uogólnionymi współrzędnymi opisującymi ruch powierzchni $\Pi_{(a)}$ i $\Pi_{(a+1)}$.

Pole przemieszczenia ciała warstwowego od pewnej konfiguracji stanu naturalnego $\left[\begin{smallmatrix} \underline{X} \\ \underline{T} \end{smallmatrix} \right]_0$ zostało zdefiniowane następująco [por. (9.2)]:

$$(11.2) \quad \underline{w}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \overset{\circ}{\underline{x}}(\underline{X}) = \\ = \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, t) + \epsilon h_{(a)}^{-1} (\underline{u}_{(a+1)}(\underline{Z}, t) - \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, t)), \\ \underline{X} = (\underline{Z}, X^3) \in B, \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad X^3 \in (H_{(1)}, H_{(r+1)}), \quad t \in T.$$

Tutaj funkcje $\underline{u}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(a+1)}(\cdot)$ są dwuwymiarowymi polami przemieszczeń powierzchni $\Pi_{(a)}$ i $\Pi_{(a+1)}$ tzn.:

$$\underline{u}_{(a)}(\cdot) = \underline{\Psi}_{(a)}(\cdot) - \overset{\circ}{\underline{\Psi}}_{(a)}(\cdot),$$

$$\underline{u}_{(a+1)}(\cdot) = \underline{\Psi}_{(a+1)}(\cdot) - \overset{\circ}{\underline{\Psi}}_{(a+1)}(\cdot), \quad a=1, \dots, r.$$

Zakładamy, że dane są następujące wielkości. Pewien przedział czasowy T postaci: $[0, t_0)$, $(-\infty, t_0)$ lub $(0, t_0)$, gdzie $t_0 > 0$. Trójwymiarowe wielkości polowe, a w tym pole sprężystości $\underline{G} = \underline{G}(\underline{X})$ określone na \bar{B} , pole gęstości materiału $\rho = \rho(\underline{X}) > 0$ określone na \bar{B} , pole sił masowych $\underline{b} = \underline{b}(\underline{X}, t)$ określone na $B \times (0, t_0)$, oraz pole sił powierzchniowych $\underline{p} = \underline{p}(\underline{X}, t)$ określone na $\partial B \times (0, t_0)$.

Zakładamy ponadto, że obowiązują tutaj podstawowe równania trójwymiarowe (w postaci zlinearyzowanej), opisujące procesy dynamiczne sprężystych ciał warstwowych, które przytoczone zostały w rozdziale 2, dla nieliniowej teorii z więzami. Te równania, w liniowej teorii i kartezjańskim układzie współrzędnych przyjmują postać:

Równania ruchu w terminach trójwymiarowych pól:

$$(11.3) \quad T^{ij}{}_{,j}(\underline{X}, t) + \rho(\underline{X}) b^i(\underline{X}, t) + r^i(\underline{X}, t) = \rho(\underline{X}) \ddot{w}^i(\underline{X}, t),$$

$$T^{ij}(\underline{X}, t) = T^{ji}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in B, \quad t \in T.$$

Kinetyczne warunki brzegowe:

$$(11.4) \quad T^{ij}(\underline{X}, t) n_j(\underline{X}) = p^i(\underline{X}, t) + s^i(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in \partial B, \quad t \in T,$$

$$[T^{ij}(\underline{X}, t)] n_j(\underline{X}) = s^i(\underline{X}, t), \quad \underline{X} \in \partial B_{(a)} \cap \partial B_{(a+1)},$$

gdzie $n_j(\cdot)$ w (11.4)₁ są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do powierzchni ∂B , podczas gdy $n_j(\cdot)$ w (11.4)₂ są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do powierzchni $\partial B_{(a)} \cap \partial B_{(a+1)}$, $a=1, \dots, r-1$; $p^i(\cdot)$ oznaczają składowe obciążenia powierzchniowego działającego na powierzchnię ∂B ograniczającą ciało warstwowe, zaś $s^i(\cdot)$ oznacza składowe powierzchniowych sił reakcji więzów wewnętrznych (11.1), działających na powierzchnie $\partial B_{(a)}$, $a=1, \dots, r$.

Równania konstytutywne dla tensora naprężenia typu Cauchy:

$$(11.5) \quad T^{ij}(\underline{X}, t) = C^{ijMN} E_{MN} + 2 C^{ijM3} E_{M3} + C^{ij33} E_{33},$$

$$i, j=1, 2, 3; \quad M, N=1, 2.$$

Zależności geometryczne pomiędzy trójwymiarowymi miarami odkształcenia $\underline{E} = \underline{E}(\underline{X}, t)$, a dwuwymiarowymi miarami odkształcenia $\underline{e} = \underline{e}(\underline{Z}, t)$ i $\underline{e}' = \underline{e}'(\underline{Z}, t)$ zdefiniowanymi w (10.14), mają postać:

$$(11.6) \quad E_{MN}(\underline{X}, t) = e_{(a)MN}(\underline{Z}, t) + \kappa e'_{(a)MN}(\underline{Z}, t),$$

$$E_{M3}(\underline{X}, t) = e_{(a)M3}(\underline{Z}, t) + \kappa e'_{(a)M3}(\underline{Z}, t),$$

$$E_{33}(\underline{X}, t) = e_{(a)33}(\underline{Z}, t),$$

$$\underline{X} = (\underline{Z}, X^3), \quad 0 \leq \kappa = X^3 - H_{(a)} \leq h_{(a)},$$

$$X^3 \in (H_{(a)}, H_{(a+1)}), \quad a=1, \dots, r.$$

Przytoczone powyżej podstawowe równania trójwymiarowe (11.1) - (11.6) wykorzystamy w końcu do odtworzenia trójwymiarowego procesu sprężystego $[\underline{x}, \underline{T}]$, za pomocą dwuwymiarowych wielkości polowych wyznaczonych z równań opisujących proponowany model ciała warstwowego. Ten model w ramach liniowej teorii opisuje układ dwuwymiarowych równań pola (10.3) - (10.8), które wyprowadzone zostały przy założeniu dodatkowych więzów wewnętrznych i brzegowych postaci (9.26). Jeśli tymczasem ograniczymy się do więzów wewnętrznych postaci (9.2), to wówczas model ciała warstwowego o płaskiej strukturze jest opisany układem dwuwymiarowych równań pola, w których nie występują dodatkowe siły reakcji więzów. We współrzędnych kartezjańskich ten układ równań tworzą:

Równania ruchu wyrażone w terminach dwuwymiarowych uogólnionych wielkości w postaci [por. (10.30)]:

$$\begin{aligned}
 (11.7) \quad & N_{(a),K}^{KL} - h_{(a)}^{-1} M_{(a),K}^{KL} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1),K}^{KL} + h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{\bar{3}L} - \\
 & - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{\bar{3}L} + f_{(a)}^L = i_{(a)}^L, \\
 & N_{(a),K}^{K\bar{3}} - h_{(a)}^{-1} M_{(a),K}^{K\bar{3}} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1),K}^{K\bar{3}} + h_{(a)}^{-1} N_{(a)}^{\bar{3}\bar{3}} - \\
 & - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)}^{\bar{3}\bar{3}} + f_{(a)}^{\bar{3}} = i_{(a)}^{\bar{3}}, \quad \text{w } \Pi^*T, \\
 & a=1, \dots, r+1; \quad K, L=1, 2;
 \end{aligned}$$

gdzie składowe uogólnionych sił i momentów przekrojowych:

$\underline{N}_{(a)} = \underline{N}_{(a)}(\underline{Z}, t)$ i $\underline{M}_{(a)} = \underline{M}_{(a)}(\underline{Z}, t)$ zdefiniowane zostały za pośrednictwem składowych tensora naprężenia jak w (10.26), a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (11.8) \quad & N_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij}(\underline{x}, t) d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h_{(a)}, \quad i, j=K, L, \bar{3} \\
 & N_{(0)}^{ij}(\underline{Z}, t) = 0, \quad N_{(r+1)}^{ij}(\underline{Z}, t) = 0, \\
 & M_{(a)}^{ij}(\underline{Z}, t) = \int_0^{h_{(a)}} T^{ij}(\underline{x}, t) \xi d\xi,
 \end{aligned}$$

$$(11.8) \quad M_{(0)}^{ij}(\underline{Z}, t) \equiv 0, \quad M_{(r+1)}^{ij}(\underline{Z}, t) \equiv 0, \quad M_{(a)}^{\bar{3}\bar{3}}(\underline{Z}, t) \equiv 0.$$

Składowe uogólnionych sił zewnętrznych $\underline{f}_{(a)}(\cdot)$ wyrażone zostały przez składowe siły masowych i powierzchniowych jak w (10.21)_{1,2}, zaś składowe uogólnionych sił inercyjnych $\underline{i}_{(a)}(\cdot)$ wyrażone zostały m.in. przez pochodne przemieszczeń powierzchni ograniczających poszczególne warstwy jak w (10.21)_{3,4}, a mianowicie:

$$(11.9) \quad \begin{aligned} \underline{f}_{(a)}^i(\underline{Z}, t) = & h_{(a)}^{-1} \left\{ \int_0^{h_{(a)}} \rho(\underline{X}) b^i(\underline{X}, t) (h_{(a)} - \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \delta_a^1 [p^i(\underline{X}, t) (h_{(a)} - \xi)]_{\xi=0, h_{(a)}} \right\} + \\ & + h_{(a-1)}^{-1} \left\{ \int_0^{h_{(a-1)}} \rho(\underline{X}) b^i(\underline{X}, t) \xi d\xi + \right. \\ & \left. + \delta_a^{r+1} [p^i(\underline{X}, t) \xi]_{\xi=0, h_{(a-1)}} \right\}, \quad i=L, \bar{3}; \\ \underline{i}_{(a)}^i(\underline{Z}, t) = & h_{(a)}^{-2} \int_0^{h_{(a)}} \rho(\underline{X}) ((h_{(a)} - \xi)^2 \bar{u}_{(a)}^i(\underline{Z}, t) + \\ & + (h_{(a)} - \xi) \xi \bar{u}_{(a+1)}^i(\underline{Z}, t)) d\xi + \\ & + h_{(a-1)}^{-2} \int_0^{h_{(a-1)}} \rho(\underline{X}) (\xi^2 \bar{u}_{(a)}^i(\underline{Z}, t) + \\ & + (h_{(a-1)} - \xi) \xi \bar{u}_{(a-1)}^i(\underline{Z}, t)) d\xi, \quad i=L, \bar{3}. \end{aligned}$$

Równania konstytutywne dla dwuwymiarowych uogólnionych sił wewnętrznych postaci $\underline{\llbracket}$ por. (10.32) \rrbracket :

$$(11.10) \quad \begin{aligned} N_{(a)}^{ij} &= I_{(a)0}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} e'_{(a)kl}, & e'_{(a)\beta\beta} &\equiv 0; \\ M_{(a)}^{ij} &= I_{(a)1}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} e'_{(a)kl}, & M_{(a)\beta\beta} &\equiv 0, \\ & i, j, k, l = K, L, M, N, \beta; & a &= 1, \dots, r; \end{aligned}$$

gdzie uogólnione sztywności zostały zdefiniowane jak w (10.33) tj.:

$$(11.11) \quad I_{(a)n}^{ijkl}(\underline{z}) = \int_0^{h(a)} c^{ijkl}(\underline{x}) \xi^n d\xi, \quad 0 \leq \xi \leq h(a),$$

przy czym

$$I_{(0)n}^{ijkl}(\underline{z}) = I_{(r+1)n}^{ijkl}(\underline{z}) = 0, \quad n=0,1,2.$$

Równania geometryczne wyrażające dwuwymiarowe miary odkształcenia występujące w równaniach konstytutywnych mają postać \square por. (10.14) \square :

$$(11.12) \quad \begin{aligned} e_{(a)MN}(\underline{z}, t) &= u_{(a)(M,N)}(\underline{z}, t), \\ e'_{(a)MN}(\underline{z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)(M,N)}(\underline{z}, t) - u_{(a)(M,N)}(\underline{z}, t)), \\ e_{(a)M\beta}(\underline{z}, t) &= (2h_{(a)})^{-1} (u_{(a+1)M}(\underline{z}, t) - u_{(a)M}(\underline{z}, t)) + \\ &+ 2^{-1} u_{(a)\beta, M}(\underline{z}, t), \\ e'_{(a)M\beta}(\underline{z}, t) &= (2h_{(a)})^{-1} (u_{(a+1)\beta, M}(\underline{z}, t) - u_{(a)\beta, M}(\underline{z}, t)), \\ e_{(a)\beta\beta}(\underline{z}, t) &= h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta}(\underline{z}, t) - u_{(a)\beta}(\underline{z}, t)), \\ e'_{(a)\beta\beta}(\underline{z}, t) &\equiv 0, \quad a=1, \dots, r; \quad M, N=1, 2; \end{aligned}$$

gdzie przyjęto: $e_{(0)ij}(\cdot) \equiv e'_{(0)ij}(\cdot) \equiv e_{(r+1)ij}(\cdot) \equiv e'_{(r+1)ij}(\cdot) \equiv 0$; $i, j = M, N, \beta$.

Kinetyczne warunki brzegowe w terminach dwuwymiarowych uogólnionych sił wewnętrznych postaci:

$$(11.13) \quad \left(N_{(a)}^{KL} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{KL} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{KL} \right) n_{(a)K} = p_{(a)}^L, \quad \text{na } \partial \Pi \times T$$

$$\left(N_{(a)}^{K\bar{3}} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)}^{K\bar{3}} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)}^{K\bar{3}} \right) n_{(a)K} = p_{(a)}^{\bar{3}},$$

$$a=1, \dots, r+1; \quad K, L=1, 2;$$

gdzie $\underline{n}_{(a)} = \underline{n}_{(a)}(\underline{Z})$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznym normalnym do $\partial \Pi$ (w płaszczyźnie Π), zaś $\underline{p}_{(a)} = \underline{p}_{(a)}(\underline{Z}, t)$ jest uogólnionym obciążeniem brzegowym wyrażonym przez obciążenie powierzchniowe działające na $\partial \Pi \times (h_{(a-1)}, h_{(a)})$ jak w (10.21)_{5,6} tj.:

$$(11.14) \quad p_{(a)}^i(\underline{Z}, t) = h_{(a)}^{-1} \int_0^{h_{(a)}} p^i(\underline{X}, t) (h_{(a)} - \xi) d\xi +$$

$$+ h_{(a-1)}^{-1} \int_0^{h_{(a-1)}} p^i(\underline{X}, t) \xi d\xi.$$

Należy zaznaczyć, że wszystkie wielkości polowe $(\dots)_{(a-1)}$ lub $(\dots)_{(a+1)}$ występujące w równaniach (11.7) - (11.16) wyrażają się lub są zdefiniowane analogicznie jak wielkości $(\dots)_{(a)}$ i otrzymuje się je przez formalną zamianę indeksów (a) na $(a-1)$ lub $(a+1)$ w wyrażeniach $(\dots)_{(a)}$. Jednocześnie wprowadzono dodatkowe definicje dla wyrażeń całkowych:

$$(11.15) \quad h_{(0)}^{-1} \int_0^{h_{(0)}} (\dots) d\xi = h_{(r+1)}^{-1} \int_0^{h_{(r+1)}} (\dots) d\xi = 0.$$

Ponadto zakładamy, że dane są początkowe wartości dwuwymiarowych pól przemieszczeń i prędkości przemieszczeń, obydwa określone w Π , i mają postać:

$$(11.16) \quad u_{(a)}^i(\cdot, 0) = u_{(a)0}^i(\underline{Z}), \quad \dot{u}_{(a)}^i(\cdot, 0) = u_{(a)1}^i(\underline{Z}), \quad \underline{Z} \in \Pi,$$

$$a=1, \dots, r+1.$$

Podsumowując wyprowadzone powyżej równania pola i zawarte w nich niewiadome funkcje zauważymy, że dla rozwiązania pewnego problemu brzegowo-początkowego elastodynamiki ciała r-warstwowego o płaskiej strukturze, w terminach dwuwymiarowych pól, mamy do dyspozycji $(25r+3)$ równań, zawierających $(25r+3)$ niewiadomych funkcji, a w tym:

- 3(r+1) równań ruchu (11.7),
- 11r równań konstytutywnych (11.10),
- 11r równań geometrycznych (11.12),
- 3(r+1) kinetycznych warunków brzegowych (11.13),
- 6(r+1) warunków początkowych (11.16).

Jednocześnie mamy do wyznaczenia:

- 11r składowych uogólnionych sił wewnętrznych $N_{(a)}^{ij}(\cdot)$ i $M_{(a)}^{ij}(\cdot)$,
($M_{(a)}^{33} \equiv 0$),
- 11r składowych uogólnionych miar odkształcenia $e_{(a)kl}(\cdot)$,
 $e'_{(a)kl}(\cdot)$, ($e'_{(a)33} \equiv 0$),
- 3(r+1) składowych wektora przemieszczenia $u_{(a)}^i(\cdot)$.

Jednakże układ $(25r+3)$ równań podstawowych można sprowadzić do układu $3(r+1)$ równań przemieszczeniowych typu Naviera, dla wyznaczenia $3(r+1)$ składowych wektorów przemieszczenia $\underline{u}_{(a)} = \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, t)$, $a=1, \dots, r+1$ opisujących ruch powierzchni $\Pi_{(a)}$ ograniczających poszczególne warstwy rozważanego ciała r-warstwowego.

Ciała jednowarstwowe

Podstawowe równania elastodynamiki ciał warstwowych mają w tym przypadku uproszczoną postać i wiążą wielkości polowe odniesione do powierzchni $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$, które ograniczają rozważaną warstwę. Podstawowe równania dla jednej warstwy otrzymuje się z odpowiednich równań ogólnych (11.7) - (11.15) kładąc tam: $r=1$, $a=1,2$; $h_{(0)} \equiv 0$, $h_{(1)} = h$, $h_{(2)} \equiv 0$, a ponadto uwzględniając, że znikają w tych równaniach wszystkie wielkości z indeksami $(a-1) = 0$, tj.: $(\dots)_{(0)} \equiv 0$, [por. (11.15)]. Otrzymujemy zatem następujące grupy równań.

Równania ruchu,

$$(11.17) \quad \begin{aligned} N_{(1),K}^{KL} - h^{-1} M_{(1),K}^{KL} + h^{-1} N_{(1)}^{3L} + f_{(1)}^L &= i_{(1)}^L, \\ N_{(1),K}^{K3} - h^{-1} M_{(1),K}^{K3} + h^{-1} N_{(1)}^{33} + f_{(1)}^3 &= i_{(1)}^3, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi \times T,$$

$$(11.17) \quad \begin{aligned} h^{-1} M_{(1),K}^{KL} - h^{-1} N_{(1)}^{3L} + r_{(2)}^L &= i_{(2)}^L, \\ h^{-1} M_{(1),K}^{K3} - h^{-1} N_{(1)}^{33} + r_{(2)}^3 &= i_{(2)}^3, \end{aligned} \quad \text{w } \Pi \times T,$$

$K, L=1, 2;$

w których wielkości uogólnione wyrażają się w uproszczony sposób:

$$(11.18) \quad \begin{aligned} N_{(1)}^{ij} &= \int_0^h T^{ij} d\xi, & N_{(0)}^{ij} &= N_{(2)}^{ij} = 0, \\ M_{(1)}^{ij} &= \int_0^h T^{ij} \xi d\xi, & M_{(0)}^{ij} &= M_{(2)}^{ij} = 0, \\ r_{(1)}^i &= h^{-1} \int_0^h \rho (h - \xi) b^i d\xi + [p^i]_{\xi=0}, \\ r_{(2)}^i &= h^{-1} \int_0^h \rho b^i \xi d\xi + [p^i]_{\xi=h}, \\ i_{(1)}^i &= h^{-2} \int_0^h \rho ((h - \xi)^2 \ddot{u}_{(1)}^i + (h - \xi) \xi \ddot{u}_{(2)}^i) d\xi, \\ i_{(2)}^i &= h^{-2} \int_0^h \rho (\xi^2 \ddot{u}_{(2)}^i + (h - \xi) \xi \ddot{u}_{(1)}^i) d\xi, \end{aligned}$$

$0 \leq \xi \leq h, \quad i, j=K, L, 3.$

Jeśli warstwa jest jednorodna, to $\rho = \text{const.}$, a ponieważ $\underline{u}_{(a)} = \underline{u}_{(a)}(\underline{Z}, t)$ więc mamy:

$$\begin{aligned} i_{(1)}^i &= (\rho h/6) (2 \ddot{u}_{(1)}^i + \ddot{u}_{(2)}^i), \\ i_{(2)}^i &= (\rho h/6) (2 \ddot{u}_{(2)}^i + \ddot{u}_{(1)}^i), \quad i=L, 3. \end{aligned}$$

Równania konstytutywne,

$$\begin{aligned}
 N_{(1)}^{ij} &= I_{(1)0}^{ijkl} e_{(1)kl} + I_{(1)1}^{ijkl} e'_{(1)kl} = \\
 &= I_{(1)0}^{ijMN} e_{(1)MN} + I_{(1)1}^{ijMN} e'_{(1)MN} + \\
 &+ 2 (I_{(1)0}^{ijM3} e_{(1)M3} + I_{(1)1}^{ijM3} e'_{(1)M3}) + \\
 &+ I_{(1)0}^{ij33} e_{(1)33}, \quad e'_{(1)33} = 0, \\
 (11.19) \quad M_{(1)}^{ij} &= I_{(1)1}^{ijkl} e_{(1)kl} + I_{(1)2}^{ijkl} e'_{(1)kl} = \\
 &= I_{(1)1}^{ijMN} e_{(1)MN} + I_{(1)2}^{ijMN} e'_{(1)MN} + \\
 &+ 2 (I_{(1)1}^{ijM3} e_{(1)M3} + I_{(1)2}^{ijM3} e'_{(1)M3}) + \\
 &+ I_{(1)1}^{ij33} e_{(1)33}, \quad e'_{(1)33} = 0, \\
 M_{(1)}^{33} &= 0,
 \end{aligned}$$

gdzie tensory sztywności mają postać:

$$(11.20) \quad I_{(1)n}^{ijkl} = \int_0^h c^{ijkl} \xi^n d\xi, \quad n=0,1,2; \quad 0 \leq \xi \leq h.$$

Jeśli warstwa jest jednorodna więc ρ i \underline{c} nie zależy od argumentu $\underline{x} = (\underline{z}, \xi)$, i mamy wtedy

$$I_{(1)n}^{ijkl} = (n+1)^{-1} h^{n+1} c^{ijkl}, \quad n=0,1,2.$$

Równania geometryczne,

$$\begin{aligned}
 e_{(1)MN} &= u_{(1)(M,N)}, \\
 (11.21) \quad e'_{(1)MN} &= h^{-1} (u_{(2)(M,N)} - u_{(1)(M,N)}), \\
 e_{(1)M3} &= (2h)^{-1} (u_{(2)M} - u_{(1)M}) + 2^{-1} u_{(1)3,M},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{(1)M3} &= (2h)^{-1} (u_{(2)3,M} - u_{(1)3,M}), \\
 (11.21) \quad e_{(1)33} &= h^{-1} (u_{(2)3} - u_{(1)3}), \\
 e'_{(1)33} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Kinetyczne warunki brzegowe,

$$\begin{aligned}
 (N_{(1)}^{KL} - h^{-1} M_{(1)}^{KL}) n_{(1)K} &= P_{(1)}^L, \\
 (N_{(1)}^{K3} - h^{-1} M_{(1)}^{K3}) n_{(1)K} &= P_{(1)}^3, \\
 (11.22) \quad h^{-1} M_{(1)}^{KL} n_{(1)K} &= P_{(2)}^L, \\
 h^{-1} M_{(1)}^{K3} n_{(1)K} &= P_{(2)}^3,
 \end{aligned}$$

na $\delta\Pi \times T$,

Warunki początkowe,

$$\begin{aligned}
 (11.23) \quad u_{(1)}^i(\cdot, 0) &= u_{(1)0}^i(\underline{Z}), & u_{(2)}^i(\cdot, 0) &= u_{(2)0}^i(\underline{Z}), \\
 \dot{u}_{(1)}^i(\cdot, 0) &= u_{(1)1}^i(\underline{Z}), & \dot{u}_{(2)}^i(\cdot, 0) &= u_{(2)1}^i(\underline{Z}),
 \end{aligned}$$

na Π ,

$i=L, 3=1, 2, 3.$

Analizując w tym przypadku liczbę równań i liczbę niewiadomych funkcji, podobnie jak w przypadku ogólnym, dochodzimy do wniosku, że 28 równań pola dla 28 niewiadomych można sprowadzić do 6 równań przemieszczeniowych typu Naviera dla składowych wektora przemieszczenia $\underline{u}_{(1)} = \underline{u}_{(1)}(\underline{Z}, t)$ i $\underline{u}_{(2)} = \underline{u}_{(2)}(\underline{Z}, t)$, opisujących ruch powierzchni $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$ ograniczających rozważaną warstwę.

12. Niektóre twierdzenia elastodynamiki ciał warstwowych.
Jednoznaczność rozwiązań problemów brzegowo-początkowych.

Podamy teraz pewne definicje i niektóre twierdzenia szczególnie ważne dla analizy problemów brzegowo-początkowych linowej elastodynamiki płaskich ciał warstwowych.

Definiujemy dwuwymiarowy proces dynamiczny jako uporządkowany zbiór wielkości:

$$[\underline{u}, \underline{N}, \underline{M}, \underline{f}] (a), \quad a=1, \dots, r+1;$$

o następujących własnościach:

- (i) $\underline{u}(a)$ jest ruchem dopuszczalnym ^{*/};
- (ii) $\underline{N}(a), \underline{M}(a)$ są dopuszczalnymi polami sił i momentów przekrojowych zależnymi od czasu ^{*/};
- (iii) $\underline{f}(a)$ jest ciągłym polem wektorowym w $\Pi \times [0, t_0]$;
- (iv) $\underline{u}(a), \underline{N}(a), \underline{M}(a), \underline{f}(a)$ spełniają równania ruchu postaci (11.7).

Dwuwymiarowy proces dopuszczalny określony w Π definiujemy jako pewien uporządkowany zbiór wielkości:

$$p = [\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}', \underline{N}, \underline{M}] (a), \quad a=1, \dots, r+1;$$

o następujących własnościach:

- (i) $\underline{u}(a)$ jest ruchem dopuszczalnym;
- (ii) $\underline{e}(a), \underline{e}'(a)$ są ciągłymi polami tensorowymi w $\Pi \times [0, t_0]$;
- (iii) $\underline{N}(a), \underline{M}(a)$ są dopuszczalnymi polami sił i momentów przekrojowych zależnymi od czasu.

Mówimy, że $p = [\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}', \underline{N}, \underline{M}] (a)$; $a=1, \dots, r+1$, jest dwuwymiarowym procesem sprężystym określonym na Π odpowiadającym polu uogólnionych sił powierzchniowych $\underline{f}(a) = (f^1, f^3)(a)$, jeśli p jest procesem dopuszczalnym i spełnia następujące równania: równania ruchu (11.7), równania konstytutywne (11.10) i równania geometryczne (11.12).

^{*/} Mówimy, że pewien ruch jest dopuszczalny, jeśli: $\underline{u}(a), \dot{\underline{u}}(a), \underline{u}'(a), \underline{e}(a), \underline{e}'(a), \underline{e}''(a), \underline{e}'''(a)$ są ciągłe w $\Pi \times [0, t_0]$.

^{*/} Dopuszczalnymi polami sił i momentów przekrojowych zależnymi od czasu, nazywamy symetryczne pola tensorowe $\underline{N}(a), \underline{M}(a)$ klasy C^1 w $\Pi \times (0, t_0)$ takie, że $\text{div } \underline{N}(a)$ i $\text{div } \underline{M}(a)$ są ciągłe w $\Pi \times [0, t_0]$.

Pole uogólnionych obciążeń brzegowych $p_{(a)} = (p^I, p^3)_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, jest definiowane w każdym regularnym punkcie obszaru $\delta II \times [0, t_0)$ i spełnia kinetyczne warunki brzegowe (11.13).

Uporządkowany zbiór wielkości $[\underline{f}, p]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, nazywamy układem uogólnionych sił zewnętrznych dla dwuwymiarowego procesu sprężystego.

Charakterystyka brzegowo-początkowego problemu obciążeniowego.

Zakładamy, podobnie jak na początku tego rozdziału, że dane są następujące wielkości: pewien przedział czasowy $T = [0, t_0)$, ($t_0 > 0$); pole gęstości $\rho > 0$ w $II \times (0, h_{(a)})$, $a=1, \dots, r$; dwuwymiarowe uogólnione pola: sztywności warstw $\underline{I}_{(a)}$ w II , $a=1, \dots, r$; zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $\underline{f}_{(a)}$ w $II \times (0, t_0)$ i zewnętrznych obciążeń brzegowych $p_{(a)}$ na $\delta II \times (0, t_0)$, $a=1, \dots, r+1$; początkowych przemieszczeń $\underline{u}_{(a)}(\cdot, 0)$ w II i początkowych prędkości przemieszczeń $\underline{\dot{u}}_{(a)}(\cdot, 0)$ w II , $a=1, \dots, r+1$.

Dla danych powyższych wielkości, obciążeniowy problem elastodynamiki ciała warstwowego polega na znalezieniu pewnego dwuwymiarowego procesu sprężystego:

$$p = [\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}', \underline{N}, \underline{M}]_{(a)}, \quad a=1, \dots, r+1, \quad \text{w } II \times [0, t_0),$$

który odpowiada polu uogólnionych zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $\underline{f}_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, oraz spełnia warunki początkowe,

$$\begin{aligned} \underline{u}_{(a)}(\cdot, 0) &= \underline{u}_{(a)}0, & a=1, \dots, r+1, & \quad \text{w } II, \\ \underline{\dot{u}}_{(a)}(\cdot, 0) &= \underline{u}_{(a)}1, \end{aligned}$$

i warunki brzegowe w obciążeniach,

$$P_{(a)} = P_{(a)}0, \quad a=1, \dots, r+1, \quad \text{na } \delta II \times (0, t_0).$$

Taki proces sprężysty nazywamy dwuwymiarowym rozwiązaniem obciążeniowego problemu elastodynamiki.

Aby uniknąć powtarzania założeń przyjmujemy raz na zawsze, że: (i) ρ jest gładkie w $II \times [0, h_{(a)}]$, zaś $\underline{I}_{(a)}$ gładkie na II , $a=1, \dots, r$;

(ii) $\underline{f}_{(a)}$ jest ciągłe w $II \times [0, t_0)$, $a=1, \dots, r+1$;

(iii) $\underline{u}_{(a)}0$, $\underline{u}_{(a)}1$ są ciągłe w II , $a=1, \dots, r+1$;

(iv) $P_{(a)}0$ jest ciągłe w czasie i kawałkami regularne na $\delta II \times [0, t_0)$, $a=1, \dots, r+1$.

Dla danego procesu sprężystego p funkcja $\bar{U}(\cdot)$ określona na $[0, t_0)$ oznacza energię całkowitą związaną z ciałem warstwowym i jest sumą energii kinetycznej i energii odkształcenia:

$$(12.1) \quad \bar{U} = K + U, \quad K = \sum_{a=1}^r K_{(a)}, \quad U = \sum_{a=1}^r U_{(a)}.$$

Energia kinetyczna związana z dowolną warstwą $B_{(a)}$ i odniesiona do jej powierzchni podstawowej $\Pi_{(a)}$ jest równa:

$$\begin{aligned} (12.2) \quad K_{(a)} &= 2^{-1} \int_{\Pi} \rho \dot{w}_i^i \dot{w}_i \, d\Pi \, d\xi = \\ &= 2^{-1} \int_{\Pi} \int_0^{h_{(a)}} \rho h_{(a)}^{-2} ((h_{(a)} - \xi)^2 \dot{u}_{(a)i}^i \dot{u}_{(a)i} + \\ &\quad + 2 (h_{(a)} - \xi) \xi \dot{u}_{(a+1)i}^i \dot{u}_{(a)i} + \\ &\quad + \dot{u}_{(a+1)i}^i \dot{u}_{(a+1)i} \xi^2) \, d\Pi \, d\xi = \\ &= 2^{-1} \int_{\Pi} (\bar{p}_{(a)0} \dot{u}_{(a)i}^i \dot{u}_{(a)i} + \\ &\quad + 2 \bar{p}_{(a)1} \dot{u}_{(a+1)i}^i \dot{u}_{(a)i} + \bar{p}_{(a)2} \dot{u}_{(a+1)i}^i \dot{u}_{(a+1)i}) \, d\Pi, \end{aligned}$$

gdzie zmodyfikowane gęstości mają postać:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{(a)0} &= \int_0^{h_{(a)}} \rho (h_{(a)} - \xi)^2 h_{(a)}^{-2} \, d\xi, \\ (12.3) \quad \bar{p}_{(a)1} &= \int_0^{h_{(a)}} \rho (h_{(a)} - \xi) \xi h_{(a)}^{-2} \, d\xi, \\ \bar{p}_{(a)2} &= \int_0^{h_{(a)}} \rho \xi^2 h_{(a)}^{-2} \, d\xi. \end{aligned}$$

Jeśli $\rho = \text{const.}$ w obrębie każdej warstwy, to mamy:

$$\bar{p}_{(a)0} = 3^{-1} \rho h_{(a)}, \quad \bar{p}_{(a)1} = 6^{-1} \rho h_{(a)},$$

$$\bar{p}_{(a)2} = 3^{-1} \rho h_{(a)};$$

$$K_{(a)} = 6^{-1} \rho h_{(a)} \int_{II} (\dot{u}_{(a)}^i \dot{u}_{(a)i} + \dot{u}_{(a+1)}^i \dot{u}_{(a)i} + \dot{u}_{(a+1)}^i \dot{u}_{(a+1)i}) dII.$$

Energia odkształcenia związana z tą samą warstwą $B_{(a)}$ i odniesiona do jej powierzchni podstawowej jest równa:

$$\begin{aligned} (12.4) \quad U_{(a)} &= 2^{-1} \int_{B_{(a)}} T^{ij} w_{i,j} dII d\epsilon = \\ &= 2^{-1} \int_{II} (N_{(a)}^{ij} e_{(a)ij} + H_{(a)}^{ij} e'_{(a)ij}) dII = \\ &= 2^{-1} \int_{II} ((I_{(a)0}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} e'_{(a)kl}) e_{(a)ij} + \\ &+ (I_{(a)1}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} e'_{(a)kl}) e'_{(a)ij}) dII, \end{aligned}$$

gdzie tensory sztywności $I_{(a)n}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$; $n=0, 1, 2$, zdefiniowane zostały w (11.20), zaś miary odkształcenia $\underline{e}_{(a)}(\cdot)$, $\underline{e}'_{(a)}(\cdot)$ wyrażone za pomocą (11.12).

Jeśli materiał w obrębie każdej warstwy jest jednorodny, to gęstość $\rho(\underline{X}) = \text{const.}$ oraz pole sprężystości $\underline{Q}(\underline{X}) = \text{const.}$ i mamy wówczas:

$$\begin{aligned} (12.5) \quad I_{(a)0}^{ijkl} &= h_{(a)} C^{ijkl}, \quad I_{(a)1}^{ijkl} = 2^{-1} h_{(a)}^2 C^{ijkl}, \\ I_{(a)2}^{ijkl} &= 3^{-1} h_{(a)}^3 C^{ijkl}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12.6) \quad \bar{u}_{(a)} &= 6^{-1} h_{(a)} c^{ijkl} \sum_{\Pi} ((e_{(a)ij} + h_{(a)} e'_{(a)kl}) \cdot \\
 &\cdot (3 e_{(a)kl} + h_{(a)} e'_{(a)ij})) d\Pi = \\
 &= 6^{-1} h_{(a)} c^{ijkl} \sum_{\Pi} [(3 e_{(a)kl} + \\
 &+ (3/2) h_{(a)} e'_{(a)kl}) e_{(a)ij} + ((3/2) h_{(a)} e_{(a)kl} + \\
 &+ h_{(a)}^2 e'_{(a)kl}) e'_{(a)ij}] d\Pi.
 \end{aligned}$$

Jeśli pole sprężystości $\underline{c}(\cdot)$ jest symetryczne, więc $\underline{I}_{(a)n}$, $n=0,1,2$; $a=1, \dots, r$, jest symetryczne, i mamy następującą zależność:

$$\begin{aligned}
 (12.7) \quad \bar{u}_{(a)} &= 2^{-1} \sum_{\Pi} [(I_{(a)0}^{ijkl} \dot{e}_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} \dot{e}'_{(a)kl}) e_{(a)ij} + \\
 &+ (I_{(a)1}^{ijkl} \dot{e}_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} \dot{e}'_{(a)kl}) e'_{(a)ij} + \\
 &+ (I_{(a)0}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} e'_{(a)kl}) \dot{e}_{(a)ij} + \\
 &+ (I_{(a)1}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} e'_{(a)kl}) \dot{e}'_{(a)ij}] d\Pi = \\
 &= \sum_{\Pi} ((I_{(a)0}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)1}^{ijkl} e'_{(a)kl}) \dot{e}_{(a)ij} + \\
 &+ (I_{(a)1}^{ijkl} e_{(a)kl} + I_{(a)2}^{ijkl} e'_{(a)kl}) \dot{e}'_{(a)ij}) d\Pi =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\Pi} (N_{(a)}^{ij} \dot{e}_{(a)ij} + M_{(a)}^{ij} \dot{e}'_{(a)ij}) d\Pi.$$

Tzn., że zmiana w czasie energii odkształcenia, równa się mocy uogólnionych sił wewnętrznych, a zatem

$$(12.8) \quad \dot{U} = \sum_{a=1}^r \sum_{\Pi} (N_{(a)}^{ij} \dot{e}_{(a)ij} + M_{(a)}^{ij} \dot{e}'_{(a)ij}) d\Pi.$$

Tak więc, zmiana w czasie całkowitej energii ciała warstwowego, równa się zmianie w czasie energii kinetycznej i mocy uogólnionych sił wewnętrznych. Ten fakt prowadzi do następującego twierdzenia.

(1) Twierdzenie o mocy i energii

Założmy, że pole sprężystości $\underline{C}(\cdot)$ jest symetryczne, i niech $[\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}, \underline{N}, \underline{M}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, będzie dwuwymiarowym procesem sprężystym odpowiadającym polu sił zewnętrznych (obciążeń powierzchniowych i brzegowych) $[\underline{f}, \underline{p}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$. Wówczas zachodzi następująca relacja:

$$(12.9) \quad \sum_{a=1}^{r+1} \left[\oint_{\partial\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{p}_{(a)} dL + \int_{\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{f}_{(a)} d\Pi \right] = \dot{\underline{U}},$$

$$\dot{\underline{U}} = \sum_{a=1}^r \left[\dot{\underline{K}}_{(a)} + \dot{\underline{U}}_{(a)} \right],$$

gdzie \underline{U} jest energią całkowitą związaną z ciałem warstwowym i odniesioną do powierzchni podstawowej Π ; przy czym Π jest regularnym obszarem na płaszczyźnie OX^1X^2 , a L brzegiem tego obszaru. Twierdzenie to orzeka, że prędkość zmiany pracy w czasie, wykonanej przez uogólnione powierzchniowe i brzegowe siły zewnętrzne, jest równa prędkości zmiany energii całkowitej w czasie tj. energii kinetycznej i mocy uogólnionych sił wewnętrznych.

Dowód:

Niech układ równań ruchu ciała r-warstwowego ma postać (11.7) tj.:

$$\begin{aligned} N_{(1),K}^{iK} - h_{(1)}^{-1} M_{(1),K}^{iK} + h_{(1)}^{-1} N_{(1)}^{i3} + f_{(1)}^i &= i_{(1)}^i, \\ N_{(2),K}^{iK} - h_{(2)}^{-1} M_{(2),K}^{iK} + h_{(2)}^{-1} N_{(2)}^{i3} + h_{(1)}^{-1} M_{(1),K}^{iK} - \\ &- h_{(1)}^{-1} N_{(1)}^{i3} + f_{(2)}^i = i_{(2)}^i, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

(12.10)

$$\begin{aligned} N_{(r),K}^{iK} - h_{(r)}^{-1} M_{(r),K}^{iK} + h_{(r)}^{-1} N_{(r)}^{i3} + h_{(r-1)}^{-1} M_{(r-1),K}^{iK} - \\ - h_{(r-1)}^{-1} N_{(r-1)}^{i3} + f_{(r)}^i &= i_{(r)}^i, \\ N_{(r+1),K}^{iK} - h_{(r+1)}^{-1} M_{(r+1),K}^{iK} + h_{(r+1)}^{-1} N_{(r+1)}^{i3} + h_{(r)}^{-1} M_{(r),K}^{iK} - \\ - h_{(r)}^{-1} N_{(r)}^{i3} + f_{(r+1)}^i &= i_{(r+1)}^i, \end{aligned}$$

$i=1,2,3; \quad K=1,2.$

Pomnożmy kolejno równania (12.10) przez odpowiednie pochodne przemieszczeń tzn.: równanie (12.10)₁ przez $\dot{u}_{(1)}$, równanie (12.10)₂ przez $\dot{u}_{(2)}$, ..., a w końcu równanie (12.10)_{r+1} przez $\dot{u}_{(r+1)}$. Dodajmy tak otrzymane równania stronami i scałkujmy wyraz za wyrazem po obszarze Π . Jeśli następnie skorzystamy z twierdzenia o dywergencji w postaci:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \dot{u}_{(a)i} N_{(a),K}^{iK} d\Pi &= \oint_{\partial\Pi} \dot{u}_{(a)i} N_{(a)}^{iK} n_K dL - \\ &- \int_{\Pi} \dot{u}_{(a)i,K} N_{(a)}^{iK} d\Pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} (\dot{u}_{(a+1)i} - \dot{u}_{(a)i}) M_{(a),K}^{iK} d\Pi = \int_{\partial\Pi} \dot{u}_{(a+1)i} M_{(a)}^{iK} n_K dL \\ & - \int_{\partial\Pi} \dot{u}_{(a)i} M_{(a)}^{iK} n_K dL - \int_{\Pi} (\dot{u}_{(a+1)i} - \dot{u}_{(a)i})_{,K} M_{(a)}^{iK} d\Pi, \end{aligned}$$

gdzie $n_K = n_{(a)K} = n_{(a+1)K}$, $K=1,2$, są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznie normalnego do $\partial\Pi$ (w płaszczyźnie Π), a ponadto uwzględnimy wyrażenia (11.13) dla kinetycznych warunków brzegowych, to otrzymamy następujący wynik:

$$\begin{aligned} (12.11) \quad & \sum_{a=1}^{r+1} \left(\int_{\partial\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{p}_{(a)} dL + \int_{\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{f}_{(a)} d\Pi \right) = \\ & \sum_{a=1}^r \int_{\Pi} (\underline{N}_{(a)} \cdot \dot{\underline{e}}_{(a)} + \underline{M}_{(a)} \cdot \dot{\underline{e}}'_{(a)}) d\Pi + \\ & + 2^{-1} \sum_{a=1}^r \int_{\Pi} (d/dt) (\bar{p}_{(a)0} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(a)} + \\ & + 2 \bar{p}_{(a)1} \dot{\underline{u}}_{(a+1)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(a)} + \bar{p}_{(a)2} \dot{\underline{u}}_{(a+1)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(a+1)}) d\Pi, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{p}_{(a)0}$, $\bar{p}_{(a)1}$, $\bar{p}_{(a)2}$ oznaczają uogólnione gęstości definiowane w (12.3). Lewa część równania (12.11) oznacza moc uogólnionych sił zewnętrznych (obciążeń powierzchniowych w Π i brzegowych na $\partial\Pi$); pierwszy szereg prawej strony tego równania wyraża moc uogólnionych sił wewnętrznych $\dot{\underline{U}}$, zaś drugi szereg pochodną energii kinetycznej $\dot{\underline{K}}$ względem czasu. A ponieważ $\dot{\underline{U}} = \dot{\underline{K}} + \dot{\underline{U}}$, więc dowód jest kompletny. \square

Następne twierdzenie, które jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia (1), okazuje się szczególnie ważnym w dowodzeniu kwestii jednoznaczności rozwiązań problemów brzegowo-początkowych elastodynamiki ciał warstwowych.

(2) Załóżmy, że pole sprężystości $\underline{C}(\cdot)$ jest symetryczne, tzn., że implikuje ono symetryczne pole sztywności $\underline{I}_{(a)n}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, $n=0, 1, 2$, na podstawie (12.5). Niech $[\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}, \underline{N}, \underline{M}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, będzie pewnym procesem sprężystym odpowiadającym układowi uogólnionych sił zewnętrznych (obciążeń powierzchniowych w Π i brzegowych na $\partial\Pi$) $[\underline{f}, \underline{p}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, i załóżmy, że

$$(12.12) \quad \begin{aligned} \underline{f}_{(1)} &= \underline{f}_{(2)} = \dots = \underline{f}_{(r+1)} = \underline{0}, & \text{w } \Pi, \\ \underline{p}_{(1)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(1)} &= \underline{p}_{(2)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(2)} = \dots \\ &\dots = \underline{p}_{(r+1)} \cdot \dot{\underline{u}}_{(r+1)} = \underline{0}, & \text{na } \partial\Pi. \end{aligned}$$

Wówczas energia całkowita ciała warstwowego wyrażona za pomocą (12.1) jest stała tzn.:

$$(12.13) \quad \bar{U}(t) = \bar{U}(0), \quad t \in [0, t_0).$$

Inny interesujący wniosek z twierdzenia (1) można wyprzedać jak następuje.

(3) Na podstawie (1), po wykonaniu całkowania względem czasu, w przedziale $[0, \tau]$, mamy:

$$(12.14) \quad \sum_{a=1}^{r+1} \int_0^{\tau} \left(\int_{\partial\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{p}_{(a)} \, dL + \int_{\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{f}_{(a)} \, d\Pi \right) dt = \bar{U}(\tau) - \bar{U}(0),$$

gdzie lewa strona tego wyrażenia jest pracą wykonaną w interwale czasu $[0, \tau]$, ($0 < \tau < \infty$), przez uogólnione powierzchniowe i brzegowe siły zewnętrzne.

Jeśli stan początkowy:

$[\underline{u}(\cdot, 0), \underline{e}(\cdot, 0), \underline{e}^f(\cdot, 0), \underline{N}(\cdot, 0), \underline{M}(\cdot, 0)]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, jest naturalnym stanem spoczynku tzn. jeśli:

$$(12.15) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{u}}_{(1)}(\cdot, 0) &= \dot{\underline{u}}_{(2)}(\cdot, 0) = \dots = \dot{\underline{u}}_{(r+1)}(\cdot, 0) = \underline{0}, \\ \underline{e}_{(1)}(\cdot, 0) &= \underline{e}_{(2)}(\cdot, 0) = \dots = \underline{e}_{(r)}(\cdot, 0) = \underline{0}, \\ \underline{e}'_{(1)}(\cdot, 0) &= \underline{e}'_{(2)}(\cdot, 0) = \dots = \underline{e}'_{(r)}(\cdot, 0) = \underline{0}, \end{aligned}$$

to wówczas mamy

$$(12.16) \quad \bar{U}(0) = 0,$$

tzn.: energia całkowita ciała warstwowego w chwili początkowej znika. Jeśli ponadto, tensor sztywności $\underline{I}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, jest dodatnio pół-określony ^{*}, to wtedy mamy:

$$(12.17) \quad \bar{U}(\tau) \geq 0, \text{ i } \sum_{a=1}^{r+1} \int_0^{\tau} \left(\oint_{\partial \Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{p}_{(a)} dL + \int_{\Pi} \dot{\underline{u}}_{(a)} \cdot \underline{f}_{(a)} d\Pi \right) dt \geq 0.$$

Oznacza to, że praca wykonana przez uogólnione powierzchniowe i brzegowe siły zewnętrzne, poczynwszy od pewnego nieodkształconego stanu, jest zawsze nieujemna.

^{*}/ Mówimy, że tensor sztywności $\underline{I}_{(a)} = \underline{I}_{(a)}(\underline{z})$, $\underline{z} \in \Pi$, dany za pomocą macierzy blokowej:

$$\underline{I}_{(a)} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(a)0} & \underline{I}_{(a)1} \\ \underline{I}_{(a)1} & \underline{I}_{(a)2} \end{bmatrix}, \quad a=1, \dots, r,$$

gdzie $\underline{I}_{(a)0}$, $\underline{I}_{(a)1}$, $\underline{I}_{(a)2}$ zdefiniowane zostały przez (11.20), jest dodatnio pół-określony jeśli:

$$\underline{e}_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)0} [\underline{e}_{(a)}] + 2 \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)1} [\underline{e}'_{(a)}] + \underline{e}'_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)2} [\underline{e}'_{(a)}] \geq 0,$$

dla każdej pary tensorów symetrycznych $\underline{e}_{(a)}$ i $\underline{e}'_{(a)}$, $a=1, \dots, r$.

(4) Twierdzenie o jednoznaczności dla brzegowo-początkowego problemu obciążeniowego

Założmy, że pole gęstości ρ jest ściśle dodatnie ($\rho > 0$), a pole sztywności $\underline{I}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, jest symetryczne i dodatnio pół-określone. Wówczas obciążeniowy problem elastodynamiki ciała warstwowego, opisany równaniami (11.7), (11.10), (11.12), (11.13) i (11.16), ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód:

Niech $p = [\underline{u}, \underline{e}, \underline{e}', \underline{N}, \underline{M}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, będzie różnicą pomiędzy dwoma rozwiązaniami. Wtedy p odpowiada znikającemu polu uogólnionych sił zewnętrznych $[\underline{f}, \underline{p}]_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, i spełnia następujące warunki:

$$(12.18) \quad \underline{u}_{(a)}(\cdot, 0) = \dot{\underline{u}}_{(a)}(\cdot, 0) = \underline{0}, \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{w } \Pi,$$

$$(12.19) \quad \underline{p}_{(a)}(\underline{Z}, t) = \underline{0}, \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{na } \partial \Pi \times (0, t_0).$$

Na podstawie równań geometrycznych (11.21) i warunków (12.18) mamy:

$$(12.20) \quad \underline{e}_{(a)}(\cdot, 0) = \underline{e}'_{(a)}(\cdot, 0) = \dot{\underline{e}}_{(a)}(\cdot, 0) = \dot{\underline{e}}'_{(a)}(\cdot, 0) = \underline{0},$$

a na podstawie (12.18) i (12.20) wnioskujemy, że energia całkowita związana z ciałem warstwowym, w chwili początkowej, znika

$$(12.21) \quad \bar{U}(0) = 0.$$

Ponadto, na podstawie twierdzenia (2) (o mocy i energii) wnioskujemy, że przy powyższych założeniach, energia całkowita jest stała tzn.:

$$\bar{U}(t) = \bar{U}(0), \quad t \in [0, t_0],$$

a zatem, z uwagi na (12.21) mamy:

$$(12.22) \quad \bar{U}(t) = 0, \quad t \in [0, t_0].$$

Na podstawie definicji, energia całkowita ciała warstwowego jest sumą energii kinetycznej i energii odkształcenia,

$$\bar{U} = \sum_{a=1}^r (K_{(a)} + U_{(a)}), \quad a=1, \dots, r$$

a na podstawie założenia, obydwie z tych energii są dodatnie; zatem obydwie one muszą zniknąć. W szczególności:

$$(12.23) \quad K = 2^{-1} \sum_{a=1}^r \int_{\Pi} (\bar{p}_{(a)0} \dot{u}_{(a)} \cdot \dot{u}_{(a)} + \\ + 2 \bar{p}_{(a)1} \dot{u}_{(a+1)} \cdot \dot{u}_{(a)} + \\ + \bar{p}_{(a)2} \dot{u}_{(a+1)} \cdot \dot{u}_{(a+1)}) d\Pi = 0,$$

a ponieważ $\bar{p}_{(a)n} \geq 0$, $a=1, \dots, r$; $n=0, 1, 2$, zatem pola prędkości przemieszczeń znikają,

$$\dot{u}_{(a)}(\underline{Z}, t) = \underline{0}, \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{w } \Pi^* [0, t_0],$$

tzn., że

$$u_{(a)}(\underline{Z}, t) = c_{(a)}(\underline{Z}), \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{w } \Pi^* [0, t_0],$$

gdzie $c_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r+1$, są dowolnymi polami wektorowymi. Ponieważ ponadto, $u_{(a)}(\underline{Z}, 0) = \underline{0}$, a rozwiązanie z założenia jest gładkie, zatem

$$c_{(a)}(\underline{Z}) = \underline{0}, \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{w } \Pi,$$

i pola przemieszczeń znikają tzn.:

$$u_{(a)}(\underline{Z}, t) = \underline{0}, \quad a=1, \dots, r+1; \quad \text{w } \Pi^* [0, t_0],$$

co pociąga za sobą znikanie pola uogólnionych sił zewnętrznych na zbiorze $\Pi^* [0, t_0]$. \square

13. Analiza dodatniej pół-określoności tensora sztywności.
Ograniczenia stałych materiałowych.

W rozdziale 12 zdefiniowaliśmy dodatnią pół-określoność tensora sztywności $\underline{I}_{(a)} = \underline{I}_{(a)}(\underline{Z})$, $\underline{Z} \in \Pi$, $a=1, \dots, r$, i zakładaliśmy, że własność ta zachodzi dla każdej warstwy rozważanego ciała. Powstaje pytanie, jakie ograniczenia dla stałych materiałowych wynikają z takiego założenia w ramach proponowanego modelu, a także, czy przy znanych w klasycznej teorii sprężystości ograniczeniach dla stałych materiałowych, założenie powyższe jest uzasadnione. Aby odpowiedzieć na to pytanie, zbadamy warunek dodatniej pół-określoności tensora sprężystości zakładając, dla prostoty rozważań, że ciało złożone jest z płaskich warstw jednorodnych i izotropowych.

Wychodzimy z definicji dodatniej pół-określoności tensora sztywności

$$(13.1) \quad \underline{I}_{(a)} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(a)0}, & \underline{I}_{(a)1} \\ \underline{I}_{(a)1}, & \underline{I}_{(a)2} \end{bmatrix}, \quad a=1, \dots, r,$$

dowolnej warstwy, w ogólnym przypadku anizotropii, żądając aby nierówność postaci

$$(13.2) \quad \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)0} [\underline{e}_{(a)}] + 2 \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)1} [\underline{e}'_{(a)}] + \\ + \underline{e}'_{(a)} \cdot \underline{I}_{(a)2} [\underline{e}'_{(a)}] \geq 0, \quad a=1, \dots, r,$$

zachodziła dla każdej pary tensorów symetrycznych $\underline{e}_{(a)}$ i $\underline{e}'_{(a)}$, gdzie poszczególne sztywności mają postać

$$(13.3) \quad \underline{I}_{(a)n} = \int_0^{h(a)} \underline{C}(\underline{X}) \xi^n d\xi, \quad a=1, \dots, r; \quad n=0, 1, 2.$$

W przypadku ciała izotropowego, tensor sprężystości $\underline{C} = \underline{C}(\underline{X})$ wyraża się przez moduły Lamego $\lambda = \lambda(\underline{X})$ i $\mu = \mu(\underline{X})$ jak następuje:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \lambda+2u & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2u & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tak, że mamy:

$$(13.4) \quad \underline{C} [\underline{e}_{(a)}] = 2 p \underline{e}_{(a)} + \lambda (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1}, \quad \text{tr } \underline{e}_{(a)} = e_{(a)mm},$$

$$\underline{C} [\underline{e}'_{(a)}] = 2 p \underline{e}'_{(a)} + \lambda (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1}, \quad \text{tr } \underline{e}'_{(a)} = e'_{(a)mm},$$

gdy tylko $\underline{e}_{(a)}$ i $\underline{e}'_{(a)}$, $a=1, \dots, r$, są symetryczne.

Korzystając z wyrażeń (13.3) i (13.4), oraz wprowadzając oznaczenia dla zmodyfikowanych modułów Lamégo według (12.3), przy założeniu $\lambda = \text{const.}$ i $p = \text{const.}$ w obszarze warstw,

$$\lambda_{(a)0} = (\lambda h)_{(a)}, \quad \lambda_{(a)1} = 2^{-1} (\lambda h^2)_{(a)},$$

$$(13.5) \quad \lambda_{(a)2} = 3^{-1} (\lambda h^3)_{(a)};$$

$$p_{(a)0} = (p h)_{(a)}, \quad p_{(a)1} = 2^{-1} (p h^2)_{(a)},$$

$$p_{(a)2} = 3^{-1} (p h^3)_{(a)},$$

przedstawiamy warunek (13.2) w terminach miar odkształcenia:

$$(13.6) \quad \lambda_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)})^2 + 2 p_{(a)0} \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{e}_{(a)} + \\ + 2 \lambda_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) + 4 p_{(a)1} \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{e}'_{(a)} + \\ + \lambda_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)})^2 + 2 p_{(a)2} \underline{e}'_{(a)} \cdot \underline{e}'_{(a)} \geq 0,$$

Ponieważ rozważane ciało warstwowe jest z założenia izotropowe, a $\underline{e}_{(a)}$ i $\underline{e}'_{(a)}$ są symetryczne, więc możliwa jest dekompozycja tensorów do postaci:

$$(13.7) \quad \begin{aligned} \underline{e}_{(a)} &= \overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} + \mathfrak{z}^{-1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \mathbf{1}, & \text{tr } \overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} &= 0, \\ \underline{e}'_{(a)} &= \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} + \mathfrak{z}^{-1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \mathbf{1}, & \text{tr } \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)}$ i $\overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)}$ są bezśladowymi częściami tensorów odkształcenia. Jeśli wprowadzimy wyrażenia (13.7) do nierówności (13.6), to otrzymamy:

$$(13.8) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{L}_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)})^2 + 2 \mu_{(a)0} (\overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} + \\ &+ \mathfrak{z}^{-1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)})^2) + 2 \mathfrak{L}_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) + \\ &+ 4 \mu_{(a)1} (\overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} + \mathfrak{z}^{-1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) (\text{tr } \underline{e}'_{(a)})) + \\ &+ \mathfrak{L}_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)})^2 + 2 \mu_{(a)2} (\overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} + \\ &+ \mathfrak{z}^{-1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)})^2) \geq 0, \quad a=1, \dots, r; \end{aligned}$$

a po uporządkowaniu i uwzględnieniu oznaczeń (13.5) nierówność (13.8) przyjmuje postać:

$$(13.9) \quad \begin{aligned} &2 (\mu h)_{(a)} (\overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} + h_{(a)} \overset{\circ}{\underline{e}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} + \\ &+ \mathfrak{z}^{-1} h_{(a)}^2 \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{e}}'_{(a)}) + \\ &+ \mathfrak{z}^{-1} h_{(a)} (3\mathfrak{L} + 2\mu)_{(a)} ((\text{tr } \underline{e}_{(a)})^2 + \\ &+ h_{(a)} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) + \mathfrak{z}^{-1} h_{(a)}^2 (\text{tr } \underline{e}'_{(a)})^2) \geq 0, \\ &a=1, \dots, r. \end{aligned}$$

Jeśli oznaczymy:

$$(13.10) \quad \underline{e}_{(a)} = \underline{X}, \quad h_{(a)} \underline{e}'_{(a)} = \underline{Y}, \quad \text{tr } \underline{e}_{(a)} = X,$$

$$h_{(a)} \text{tr } \underline{e}'_{(a)} = Y,$$

to warunek (13.9) możemy napisać w postaci:

$$(13.11) \quad (hp)_{(a)} (\underline{X} \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{Y} + 3^{-1} \underline{Y} \cdot \underline{Y}) +$$

$$+ 6^{-1} h_{(a)} (3\lambda + 2\mu)_{(a)} (X^2 + X Y + 3^{-1} Y^2) \cong 0,$$

$$a=1, \dots, r.$$

Ponieważ $h_{(a)} > 0$, $a=1, \dots, r$, więc nierówność (13.11) jest spełniona przez każde \underline{X} , \underline{Y} i X , Y gdy tylko

$$(13.12) \quad \mu_{(a)} > 0, \quad \text{i} \quad (3\lambda + 2\mu)_{(a)} > 0, \quad a=1, \dots, r.$$

Stąd wniosek (1):

Warunek dodatniej pół-określoności (13.2) tensora sztywności (13.1) jest spełniony dla każdej warstwy płaskiej jednorodnej i izotropowej przy klasycznych ograniczeniach (13.12) dla modułów Lamégo $\lambda_{(a)}$ i $\mu_{(a)}$, $a=1, \dots, r$. Ten fakt, implikuje dodatnią pół-określoność macierzy sztywności $\underline{I} = \underline{I}(\underline{Z})$, $\underline{Z} \in \Pi$, ciała warstwowego złożonego z warstw jednorodnych i izotropowych. Ta macierz, występująca w zapisie równań konstytutywnych (10.34), ma postać:

$$(13.13) \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{I}_{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{I}_{(r-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{I}_{(r)} \end{bmatrix}$$

a jej elementy postać (13.1) z definicją (13.3).

Dla zupełności analizy dodatniej pół-określoności tensora sztywności (13.1), należy zbadać warunek (13.2) w terminach uogólnionych sił wewnętrznych $\underline{N}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{M}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$. Ponieważ równania konstytutywne dla uogólnionych sił wewnętrznych mają postać:

$$(13.14) \quad \begin{aligned} \underline{N}_{(a)} &= \underline{I}_{(a)0} [\underline{e}_{(a)}] + \underline{I}_{(a)1} [\underline{e}'_{(a)}], \\ \underline{M}_{(a)} &= \underline{I}_{(a)1} [\underline{e}_{(a)}] + \underline{I}_{(a)2} [\underline{e}'_{(a)}], \quad a=1, \dots, r \end{aligned}$$

więc nierówność (13.2) można wyrazić w formie

$$(13.15) \quad \underline{e}_{(a)} \cdot \underline{N}_{(a)} + \underline{e}'_{(a)} \cdot \underline{M}_{(a)} \geq 0, \quad a=1, \dots, r.$$

Jeśli materiał jest izotropowy, to wobec (13.3) i (13.4), równania konstytutywne (13.14) przyjmują postać:

$$(13.16) \quad \begin{aligned} \underline{N}_{(a)} &= 2 \mu_{(a)0} \underline{e}_{(a)} + \lambda_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} + \\ &+ 2 \mu_{(a)1} \underline{e}'_{(a)} + \lambda_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1}, \\ \underline{M}_{(a)} &= 2 \mu_{(a)1} \underline{e}_{(a)} + \lambda_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} + \\ &+ 2 \mu_{(a)2} \underline{e}'_{(a)} + \lambda_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1}, \quad a=1, \dots, r. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu zmierzamy do wyrażenia nierówności (13.15) w terminach uogólnionych sił wewnętrznych $\underline{N}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{M}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$. W tym celu dokonujemy operacji $\text{tr}(\dots)$ na równaniach (13.16) i otrzymujemy:

$$(13.17) \quad \begin{aligned} \text{tr } \underline{N}_{(a)} &= (3\lambda_{(a)0} + 2\mu_{(a)0})(\text{tr } \underline{e}_{(a)}) + \\ &+ (3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1})(\text{tr } \underline{e}'_{(a)}), \\ \text{tr } \underline{M}_{(a)} &= (3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1})(\text{tr } \underline{e}_{(a)}) + \\ &+ (3\lambda_{(a)2} + 2\mu_{(a)2})(\text{tr } \underline{e}'_{(a)}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\text{tr } \underline{N}_{(a)} = N_{(a)mm}, \quad \text{tr } \underline{M}_{(a)} = M_{(a)mm}, \quad m=1,2,3;$$

zaś zmodyfikowane moduły Lamégo $\lambda_{(a)n}$ i $\mu_{(a)n}$, $a=1, \dots, r$; $n=0,1,2$, zdefiniowane zostały za pomocą (13.5).

Rozwiązując układ równań (13.17) względem $\text{tr } \underline{e}_{(a)}$ i $\text{tr } \underline{e}'_{(a)}$ obliczamy wyznacznik charakterystyczny $\mathbb{K}/$

$$(13.18) \quad \underline{w}_{\lambda}(a) = \begin{vmatrix} 3\lambda_{(a)0} + 2\mu_{(a)0}, & 3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1} \\ 3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1}, & 3\lambda_{(a)2} + 2\mu_{(a)2} \end{vmatrix} = \\ = 12^{-1} (h^4 (3\lambda + 2\mu)^2)_{(a)},$$

a następnie śladowe części tensorów odkształcenia:

$$(13.19) \quad \text{tr } \underline{e}_{(a)} = \underline{w}_{\lambda}^{-1}(a) \begin{vmatrix} \text{tr } \underline{N}_{(a)}, & 3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1} \\ \text{tr } \underline{M}_{(a)}, & 3\lambda_{(a)2} + 2\mu_{(a)2} \end{vmatrix} = \\ = \underline{w}_{\lambda}^{-1}(a) ((\text{tr } \underline{N}_{(a)})(3\lambda_{(a)2} + 2\mu_{(a)2}) - \\ - (\text{tr } \underline{M}_{(a)})(3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1})), \\ \text{tr } \underline{e}'_{(a)} = \underline{w}_{\lambda}^{-1}(a) \begin{vmatrix} 3\lambda_{(a)0} + 2\mu_{(a)0}, & \text{tr } \underline{N}_{(a)} \\ 3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1}, & \text{tr } \underline{M}_{(a)} \end{vmatrix} = \\ = \underline{w}_{\lambda}^{-1}(a) ((3\lambda_{(a)0} + 2\mu_{(a)0})(\text{tr } \underline{M}_{(a)}) - \\ - (3\lambda_{(a)1} + 2\mu_{(a)1})(\text{tr } \underline{N}_{(a)})),$$

Ponieważ $\text{tr } \underline{e}_{(a)}$ i $\text{tr } \underline{e}'_{(a)}$ są już znane, więc układ równań (13.16) możemy napisać w postaci:

$\mathbb{K}/$ Ponieważ $h(a)_i \rightarrow 0$, więc wyznaczniki charakterystyczne: $\underline{w}_{\lambda}(a) \rightarrow 0$, $\underline{w}_{\mu}(a) \rightarrow 0$, przy klasycznych ograniczeniach dla modułów Lamégo.

$$\begin{aligned}
 & 2 p_{(a)0} \underline{e}_{(a)} + 2 p_{(a)1} \underline{e}'_{(a)} = \underline{N}_{(a)} - \\
 & \quad - \underline{1}_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \underline{1}_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1}, \\
 (13.16) \quad & 2 p_{(a)1} \underline{e}_{(a)} + 2 p_{(a)2} \underline{e}'_{(a)} = \underline{M}_{(a)} - \\
 & \quad - \underline{1}_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \underline{1}_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1},
 \end{aligned}$$

i rozwiązać względem $\underline{e}_{(a)}$ i $\underline{e}'_{(a)}$. Obliczamy zatem wyznacznik charakterystyczny:*/

$$(13.20) \quad w_{p(a)} = \begin{vmatrix} 2 p_{(a)0} & 2 p_{(a)1} \\ 2 p_{(a)1} & 2 p_{(a)2} \end{vmatrix} = 3^{-1} (h^4 p^2)_{(a)},$$

a następnie miary odkształcenia:

$$\begin{aligned}
 (13.21) \quad & \underline{e}_{(a)} = w_{p(a)}^{-1} \cdot \\
 & \begin{vmatrix} \underline{N}_{(a)} - \underline{1}_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \underline{1}_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1} & 2 p_{(a)1} \\ \underline{M}_{(a)} - \underline{1}_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \underline{1}_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1} & 2 p_{(a)2} \end{vmatrix} = \\
 & = (2/3) (h^3 p)_{(a)} w_{p(a)}^{-1} \underline{N}_{(a)} - (h^2 p)_{(a)} w_{p(a)}^{-1} \underline{M}_{(a)} - \\
 & - 18^{-1} (h^7 \underline{1} p (3\underline{1} + 2 p))_{(a)} w_{\underline{1}(a)}^{-1} w_{p(a)}^{-1} (\text{tr } \underline{N}_{(a)}) \underline{1} + \\
 & + 12^{-1} (h^6 \underline{1} p (3\underline{1} + 2 p))_{(a)} w_{\underline{1}(a)}^{-1} w_{p(a)}^{-1} (\text{tr } \underline{M}_{(a)}) \underline{1};
 \end{aligned}$$

*/ Patrz odsyłacz na str. 155.

$$(13.21) \quad \underline{e}'_{(a)} = w_{p(a)}^{-1} \cdot \left[\begin{array}{l} 2 p_{(a)0}, \underline{N}_{(a)} - \lambda_{(a)0} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \lambda_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1} \\ 2 p_{(a)1}, \underline{M}_{(a)} - \lambda_{(a)1} (\text{tr } \underline{e}_{(a)}) \underline{1} - \lambda_{(a)2} (\text{tr } \underline{e}'_{(a)}) \underline{1} \end{array} \right] =$$

$$= - (h^2 p)_{(a)} w_{p(a)}^{-1} \underline{N}_{(a)} + 2 (h p)_{(a)} w_{p(a)}^{-1} \underline{M}_{(a)} +$$

$$+ 12^{-1} (h^6 \lambda p (3\lambda + 2 p))_{(a)} w_{\lambda(a)}^{-1} w_{p(a)}^{-1} (\text{tr } \underline{N}_{(a)}) \underline{1} -$$

$$- 6^{-1} (h^5 \lambda p (3\lambda + 2 p))_{(a)} w_{\lambda(a)}^{-1} w_{p(a)}^{-1} (\text{tr } \underline{M}_{(a)}) \underline{1}.$$

Ponieważ rozważane ciało jest z założenia izotropowe, a $\underline{N}_{(a)}$ i $\underline{M}_{(a)}$ są symetryczne, więc możliwa jest dekompozycja tensorów:

$$(13.22) \quad \underline{N}_{(a)} = \overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)} + \beta^{-1} (\text{tr } \underline{N}_{(a)}) \underline{1}, \quad \text{tr } \overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)} = 0;$$

$$\underline{M}_{(a)} = \overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)} + \beta^{-1} (\text{tr } \underline{M}_{(a)}) \underline{1}, \quad \text{tr } \overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)} = 0,$$

gdzie $\overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)}$ i $\overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)}$ są bezśladowymi częściami tensorów uogólnionych sił wewnętrznych.

Jeśli wyrażenia (13.21) wprowadzimy do warunku dodatniej pół-określoności (13.15) i uwzględnimy dekompozycję (13.22), to otrzymamy następującą nierówność:

$$(13.23) \quad (h^3 p)_{(a)} w_{p(a)}^{-1} (\beta^{-1} \overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)} - h_{(a)}^{-1} \overset{\circ}{\underline{N}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)} +$$

$$+ h_{(a)}^{-2} \overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)} \cdot \overset{\circ}{\underline{M}}_{(a)}) +$$

$$+ 18^{-1} (h^7 p^2 (3\lambda + 2 p))_{(a)} w_{\lambda(a)}^{-1} w_{p(a)}^{-1} \cdot$$

$$\cdot (\beta^{-1} (\text{tr } \underline{N}_{(a)})^2 - h_{(a)}^{-1} (\text{tr } \underline{N}_{(a)}) (\text{tr } \underline{M}_{(a)}) +$$

$$+ h_{(a)}^{-2} (\text{tr } \underline{M}_{(a)})^2) \geq 0.$$

Oznaczając:

$$(13.24) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{N}}(a) &= \overset{\circ}{\underline{x}}, & \text{tr } \underline{N}(a) &= \underline{x}, \\ \overset{\circ}{\underline{M}}(a) &= h(a) \overset{\circ}{\underline{y}}, & \text{tr } \underline{M}(a) &= h(a) \underline{y}; \end{aligned}$$

otrzymamy ostatecznie warunek (13.23) w postaci:

$$(13.25) \quad \begin{aligned} (h^3 \mu)_{(a)} w_{\mu(a)}^{-1} (3^{-1} \overset{\circ}{\underline{x}} \cdot \overset{\circ}{\underline{x}} - \overset{\circ}{\underline{x}} \cdot \overset{\circ}{\underline{y}} + \overset{\circ}{\underline{y}} \cdot \overset{\circ}{\underline{y}}) + \\ + 18^{-1} (h^7 \mu^2 (3\lambda + 2\mu))_{(a)} w_{\lambda(a)}^{-1} w_{\mu(a)}^{-1} \cdot \\ \cdot (3^{-1} \underline{x}^2 + \underline{x} \underline{y} + \underline{y}^2) \geq 0, \end{aligned}$$

$$a=1, \dots, r.$$

Ponieważ $h(a) > 0$, $a=1, \dots, r$, więc nierówność (13.25) jest spełniona przez każde \underline{x} , \underline{y} i \bar{x} , \bar{y} gdy tylko moduły Lamégo $\lambda(a)$, $\mu(a)$, $a=1, \dots, r$, spełniają nierówności (13.12), czyli klasyczne ograniczenia. Ten fakt dowodzi dodatkowo słuszności wniosku (1), a ponadto prowadzi do następującego stwierdzenia.

(2) Dla każdej warstwy jednorodnej i izotropowej, przy klasycznych ograniczeniach (13.12) dla modułów Lamégo: $\mu(a) > 0$, $3\lambda(a) + 2\mu(a) > 0$; wyznaczniki charakterystyczne $w_{\lambda(a)}$ i $w_{\mu(a)}$ są dodatnio określone, więc równania konstytutywne (13.14) są odwracalne. Ten fakt implikuje odwracalność równań konstytutywnych (10.34), dla ciała warstwowego złożonego z warstw jednorodnych i izotropowych. To stwierdzenie jest szczególnie ważne dla naprężeniowego sformułowania problemów brzegowo-początkowych elastodynamiki ciał warstwowych, a w szczególności, przy wyprowadzaniu naprężeniowych równań ruchu, w ramach proponowanego modelu.

14. Podstawowe równania teorii liniowej w przemieszczeniach.
Dekompozycja równań przemieszczeniowych.

Jak już wspomniano w rozdziale 11, podstawowy układ $(25r+3)$ równań pola dla ciała r -warstwowego daje się sprowadzić do układu $3(r+1)$ przemieszczeniowych równań ruchu typu Naviera, oraz $3(r+1)$ kinetycznych warunków brzegowych. Ograniczając się do ciała warstwowego złożonego z płaskich warstw jednorodnych i izotropowych, wyprowadzimy przemieszczeniowe równania ruchu, a następnie przedstawimy ich dekompozycję do dwóch niezależnych układów równań charakteryzujących odpowiednio, uogólniony problem tarczowy i płytowy.

Punktem wyjścia są równania ruchu (11.7) zapisane w formie zwartej:

$$(14.1) \quad N_{(a)Kj,K} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)Kj,K} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)Kj,K} + \\
+ h_{(a)}^{-1} N_{(a)3j} - h_{(a-1)}^{-1} N_{(a-1)3j} + f_{(a)j} = i_{(a)j}, \quad \text{w } \Pi \times T, \\
N_{(0)ij} \equiv N_{(r+1)ij} \equiv 0, \quad M_{(0)ij} \equiv M_{(r+1)ij} \equiv 0, \\
i, j = L, 3; \quad K, L = 1, 2; \quad a = 1, \dots, r+1;$$

gdzie uogólnione siły wewnętrzne $\underline{N}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{M}_{(a)}(\cdot)$, $a = 1, \dots, r$, zdefiniowane zostały za pomocą (11.8), zaś uogólnione siły zewnętrzne $\underline{f}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{i}_{(a)}(\cdot)$, $a = 1, \dots, r+1$, za pomocą wyrażeń (11.9). Mamy zatem wyrazić powyższe równania w terminach dwuwymiarowych pól przemieszczenia $\underline{u}_{(a)} = \underline{u}_{(a)}(\underline{z}, t)$, $a = 1, \dots, r+1$, charakteryzujących ruch powierzchni $\Pi_{(a)}$, $a = 1, \dots, r+1$, ograniczających poszczególne warstwy rozważanego ciała. W tym celu, korzystamy z równań konstytutywnych w postaci [por. (13.16)]:

$$(14.2) \quad N_{(a)ij} = 2 \mu_{(a)0} e_{(a)ij} + \lambda_{(a)0} e_{(a)kk} \delta_{ij} + \\
+ 2 \mu_{(a)1} e'_{(a)ij} + \lambda_{(a)1} e'_{(a)kk} \delta_{ij}, \\
M_{(a)ij} = 2 \mu_{(a)1} e_{(a)ij} + \lambda_{(a)1} e_{(a)kk} \delta_{ij} + \\
+ 2 \mu_{(a)2} e''_{(a)ij} + \lambda_{(a)2} e''_{(a)kk} \delta_{ij}, \quad M_{(a)33} \equiv 0,$$

gdzie zmodyfikowane moduły Lamégo $\lambda_{(a)n}$, $\mu_{(a)n}$, $a=1, \dots, r$; $n=0, 1, 2$, zdefiniowane zostały za pomocą (13.5), zaś miary odkształcenia za pomocą (11.21). Wprowadzamy do tych ostatnich równań (14.2), miary odkształcenia (11.21) i otrzymujemy wyrażenia dla sił uogólnionych w terminach przemieszczeń i ich pochodnych:

$$\begin{aligned}
 N_{(a)KL} &= 2 \mu_{(a)0} u_{(a)}(K,L) + \\
 &+ \lambda_{(a)0} (u_{(a)M,M} + h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3})) \delta_{KL} + \\
 &+ 2 \mu_{(a)1} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)}(K,L) - u_{(a)}(K,L)) + \\
 &+ \lambda_{(a)1} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M,M} - u_{(a)M,M})) \delta_{KL}, \\
 N_{(a)K3} &= \mu_{(a)0} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}) + u_{(a)3,K}) + \\
 &+ \mu_{(a)1} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3,K} - u_{(a)3,K})), \\
 N_{(a)33} &= 2 \mu_{(a)0} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3}) + \\
 &+ \lambda_{(a)0} (u_{(a)M,M} + h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3})) + \\
 (14.3) \quad &+ \lambda_{(a)1} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M,M} - u_{(a)M,M}), \\
 M_{(a)KL} &= 2 \mu_{(a)1} u_{(a)}(K,L) + \\
 &+ \lambda_{(a)1} (u_{(a)M,M} + h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3} - u_{(a)3})) \delta_{KL} + \\
 &+ 2 \mu_{(a)2} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)}(K,L) - u_{(a)}(K,L)) + \\
 &+ \lambda_{(a)2} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)M,M} - u_{(a)M,M}) \delta_{KL}, \\
 M_{(a)K3} &= \mu_{(a)1} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}) + u_{(a)3,K}) + \\
 &+ \mu_{(a)2} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)3,K} - u_{(a)3,K}), \\
 M_{(a)33} &= 0.
 \end{aligned}$$

Dokonujemy następnie operacji dywergencji na równaniach (14.3) w wyniku czego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} N_{(a)KL,K} &= p_{(a)0} (u_{(a)K,LK} + u_{(a)L,KK}) + \\ &+ \lambda_{(a)0} (u_{(a)K,KL} + h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta} - u_{(a)\beta}),L) + \\ &+ p_{(a)1} h_{(a)}^{-1} ((u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),KL) + \\ &+ (u_{(a+1)L} - u_{(a)L}),KK) + \\ &+ \lambda_{(a)1} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),KL, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{(a)K\beta,K} &= p_{(a)0} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),K + u_{(a)\beta},KK) + \\ &+ p_{(a)1} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta} - u_{(a)\beta}),KK, \end{aligned}$$

(14.4)

$$\begin{aligned} M_{(a)KL,K} &= p_{(a)1} (u_{(a)K,KL} + u_{(a)L,KK}) + \\ &+ \lambda_{(a)1} (u_{(a)K,KL} + h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta} - u_{(a)\beta}),L) + \\ &+ p_{(a)2} h_{(a)}^{-1} ((u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),KL) + \\ &+ (u_{(a+1)L} - u_{(a)L}),KK) + \\ &+ \lambda_{(a)2} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),KL, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{(a)K\beta,K} &= p_{(a)1} (h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)K} - u_{(a)K}),K + u_{(a)\beta},KK) + \\ &= p_{(a)2} h_{(a)}^{-1} (u_{(a+1)\beta} - u_{(a)\beta}),KK. \end{aligned}$$

W końcu wyrażamy uogólnione siły inercyjne w terminach przemieszczeń zgodnie z (11.9)₂ w postaci:

$$\begin{aligned} (14.5) \quad i_{(a)j} &= \bar{p}_{(a)0} \ddot{u}_{(a)j} + \bar{p}_{(a)1} \ddot{u}_{(a+1)j} + \\ &+ \bar{p}_{(a-1)1} \ddot{u}_{(a-1)j} + \bar{p}_{(a-1)2} \ddot{u}_{(a)j}, \quad j=1,2,3; \end{aligned}$$

gdzie zmodyfikowane gęstości materiałów zdefiniowane zostały w (12.3), przy czym $\bar{p}_{(a-1)1}$ i $\bar{p}_{(a-1)2}$ wyrażają się analogicznie jak $\bar{p}_{(a)1}$ i $\bar{p}_{(a)2}$ lecz po zamianie wskaźników (a) na (a-1). W przypadku warstw jednorodnych $\rho(\underline{x}) = \text{const.}$ w obszarze każdej warstwy i mamy wtedy:

$$(14.6) \quad \begin{aligned} \bar{p}_{(a)0} &= 3^{-1} (\rho h)_{(a)}, & \bar{p}_{(a)1} &= 6^{-1} (\rho h)_{(a)}, \\ \bar{p}_{(a-1)1} &= 6^{-1} (\rho h)_{(a-1)}, & \bar{p}_{(a-1)2} &= 3^{-1} (\rho h)_{(a-1)}, \\ a=1, \dots, r+1; & \quad \bar{p}_{(0)n} \equiv \bar{p}_{(r+1)n} \equiv 0, & n &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Jeśli do równań ruchu (14.1) wprowadzimy, w miejsce wielkości tam występujących, prawe strony wyrażań (14.3), (14.4) i (14.5), oraz uwzględnimy (13.5) i (14.6), to po uporządkowaniu wyrażań otrzymamy układ przemieszczeniowych równań ruchu typu Naviera postaci:

$$(14.7) \quad \begin{aligned} & (h(\lambda + \mu))_{(a)} u_{(a+1)K, KL} + \\ & + 2 [(h(\lambda + \mu))_{(a)} + (h(\lambda + \mu))_{(a-1)}] u_{(a)K, KL} + \\ & + (h(\lambda + \mu))_{(a-1)} u_{(a-1)K, KL} + (h\mu)_{(a)} u_{(a+1)L, KK} + \\ & + 2 ((h\mu)_{(a)} + (h\mu)_{(a-1)}) u_{(a)L, KK} + \\ & + (h\mu)_{(a-1)} u_{(a-1)L, KK} + 3(\lambda + \mu)_{(a)} u_{(a+1)\beta, L} - \\ & - 3((\lambda - \mu)_{(a)} - (\lambda - \mu)_{(a-1)}) u_{(a)\beta, L} - \\ & - 3(\lambda + \mu)_{(a-1)} u_{(a-1)\beta, L} + 6(\mu/h)_{(a)} u_{(a+1)L} - \\ & - 6((\mu/h)_{(a)} + (\mu/h)_{(a-1)}) u_{(a)L} + \\ & + 6(\mu/h)_{(a-1)} u_{(a-1)L} + 6f_{(a)L} = \\ & = (\rho h)_{(a)} (\ddot{u}_{(a+1)L} + 2\ddot{u}_{(a)L}) + \\ & + (\rho h)_{(a-1)} (2\ddot{u}_{(a)L} + \ddot{u}_{(a-1)L}), \quad a=1, \dots, r+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (h \mu)_{(a)} u_{(a+1)\beta, KK} + \\
 & + 2 ((h \mu)_{(a)} + (h \mu)_{(a-1)}) u_{(a)\beta, KK} + \\
 & + (h \mu)_{(a-1)} u_{(a-1)\beta, KK} + 3 (\lambda + \mu)_{(a)} u_{(a+1)K, K} + \\
 & + 3 ((\lambda - \mu)_{(a)} - (\lambda - \mu)_{(a-1)}) u_{(a)K, K} - \\
 (14.7) \quad & - 3 (\lambda + \mu)_{(a-1)} u_{(a-1)K, K} + \\
 & + 6 (h^{-1} (\lambda + 2\mu))_{(a)} u_{(a+1)\beta} - \\
 & - 6 [(h^{-1} (\lambda + 2\mu))_{(a)} + (h^{-1} (\lambda + 2\mu))_{(a-1)}] u_{(a)\beta} + \\
 & + 6 (h^{-1} (\lambda + 2\mu))_{(a-1)} u_{(a-1)\beta} + 6 f_{(a)\beta} = \\
 & = (\rho h)_{(a)} (\ddot{u}_{(a+1)\beta} + 2 \ddot{u}_{(a)\beta}) + \\
 & + (\rho h)_{(a-1)} (2 \ddot{u}_{(a)\beta} + \ddot{u}_{(a-1)\beta}), \quad a=1, \dots, r+1;
 \end{aligned}$$

gdzie wielkości (...) _(a) charakteryzują warstwy B_(a), a=1, ..., r i odniesione są do jej powierzchni podstawowej Π_(a), przy czym:

$$h_{(0)} = h_{(r+1)} = 0, \quad \rho_{(0)} = \rho_{(r+1)} = 0,$$

$$\lambda_{(0)} = \lambda_{(r+1)} = 0, \quad \mu_{(0)} = \mu_{(r+1)} = 0,$$

$$u_{(0)} = u_{(r+2)} = 0.$$

Powyższy układ 3(r+1) równań sprzężonych (14.7), określonych w Π*_T, zawiera 3(r+1) niewiadomych funkcji, którymi są składowe pola przemieszczenia $\underline{u}_{(a)} = (u_L, u_\beta)_{(a)}$, a=1, ..., r+1, przy czym $u_{(a)L} = u_{(a)L}(\underline{Z}, t)$ i $u_{(a)\beta} = u_{(a)\beta}(\underline{Z}, t)$ charakteryzują płaskie i antypłaskie ruchy powierzchni Π_(a), a=1, ..., r+1 ograniczających poszczególne warstwy rozważanego ciała. Funkcje $\underline{f}_{(a)} = (f_L, f_\beta)_{(a)}$, a=1, ..., r+1 jako uogólnione siły zewnętrzne

zdefiniowane w (11.9)₁, są znane gdy tylko dane są rozkłady sił masowych $\underline{p} = \underline{p}(\underline{X}, t)$, $\underline{X} \in B_{(a)}$, $t \in T$, $a=1, \dots, r$, w każdej warstwie, oraz rozkłady obciążeń powierzchniowych $\underline{p} = \underline{p}(\underline{X}, t)$ na powierzchniach $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(r+1)}$.

W szczególnym przypadku, gdy ciało warstwowe stanowi jedną warstwę skończonej grubości, wtedy $r=1$, $a=1, 2$, $h_{(a)} = h$, $\lambda_{(a)} = \lambda$, $\mu_{(a)} = \mu$, i układ przemieszczeniowych równań ruchu sprowadza się do 6 równań postaci:

$$\begin{aligned} & h (\lambda + \mu) (u_{(2)K} + 2 u_{(1)K}),_{KL} + \\ & + h \mu (u_{(2)L} + 2 u_{(1)L}),_{KK} + \\ & + 3 ((\lambda + \mu) u_{(2)3} - (\lambda - \mu) u_{(1)3}),_{L} + \\ & + 6 (\mu/h) (u_{(2)L} - u_{(1)L}) + 6 f_{(1)L} = \\ & = \rho h (\ddot{u}_{(2)L} + 2 \ddot{u}_{(1)L}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h (\lambda + \mu) (2 u_{(2)L} + u_{(1)L}),_{KL} + \\ & + h \mu (2 u_{(2)L} + u_{(1)L}),_{KK} + \\ (14.8) \quad & + 3 ((\lambda - \mu) u_{(2)3} - (\lambda + \mu) u_{(1)3}),_{L} - \\ & - 6 (\mu/h) (u_{(2)L} - u_{(1)L}) + 6 f_{(2)L} = \\ & = \rho h (2 \ddot{u}_{(2)L} + \ddot{u}_{(1)L}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h \mu (u_{(2)3} + 2 u_{(1)3}),_{KK} + \\ & + 3 ((\lambda + \mu) u_{(2)K} + (\lambda - \mu) u_{(1)K}),_{K} + \\ & + 6 (\mu/h) (u_{(2)3} - u_{(1)3}) + 6 f_{(1)3} = \\ & = \rho h (\ddot{u}_{(2)3} + 2 \ddot{u}_{(1)3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14.8) \quad & h \mu (2 u_{(2)3} + u_{(1)3}),_{KK} - \\
 & - 3 ((1 - \mu) u_{(2)K} + (1 + \mu) u_{(1)K}),_{K} - \\
 & - 6 (\mu/h) (u_{(2)3} - u_{(1)3}) + 6 f_{(2)3} = \\
 & = \rho h (2 \ddot{u}_{(2)3} + \ddot{u}_{(1)3}),
 \end{aligned}$$

gdzie $\underline{u}_{(1)} = \underline{u}_{(1)}(\underline{Z}, t)$ i $\underline{u}_{(2)} = \underline{u}_{(2)}(\underline{Z}, t)$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$,
 charakteryzują ruchy powierzchni $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$ ograniczających
 warstwę z dołu i z góry.

Dla kompletności sformułowania problemu obciążeniowego
 w przemieszczeniach, przedstawimy również kinetyczne warunki
 brzegowe (11.13), w terminach przemieszczeń. W tym celu,
 kinetyczne warunki brzegowe (11.13) zapiszemy w formie zwięzłej:

$$\begin{aligned}
 (14.9) \quad & (N_{(a)Kj} - h_{(a)}^{-1} M_{(a)Kj} + h_{(a-1)}^{-1} M_{(a-1)Kj}) n_K = p_{(a)j}, \\
 & N_{(0)ij} \equiv N_{(r+1)ij} \equiv 0, \quad M_{(0)ij} \equiv M_{(r+1)ij} \equiv 0, \\
 & a=1, \dots, r+1; \quad i, j=1, 2, 3; \quad K=1, 2;
 \end{aligned}$$

warunki te są określone na $\partial \Pi \times T$, gdzie uogólnione siły wewnętrzne $\underline{N}_{(a)}(\cdot)$ i $\underline{M}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r$, zdefiniowane zostały za pomocą (11.8), zaś uogólnione obciążenia brzegowe $\underline{p}_{(a)}(\cdot)$, $a=1, \dots, r+1$, za pomocą wyrażen (11.14). Następnie, postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu przemieszczeniowych równań ruchu, wprowadzamy do kinetycznych warunków brzegowych (14.9), w miejsce sił uogólnionych, prawe strony wyrażen (14.3), a po uwzględnieniu oznaczeń (13.5) i po przekształceniach, otrzymujemy następujący układ warunków brzegowych w terminach przemieszczeń:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[(h p)_{(a)} u_{(a+1)(K,L)} + \right. \\
 & + 2 \left((h p)_{(a)} + (h p)_{(a-1)} \right) u_{(a)(K,L)} + \\
 & \quad \left. + (h p)_{(a-1)} u_{(a-1)(K,L)} \right] n_K + \\
 & + \left[(h \lambda)_{(a)} u_{(a+1)K,K} + \right. \\
 & + 2 \left((h \lambda)_{(a)} + (h \lambda)_{(a-1)} \right) u_{(a)K,K} + \\
 (14.10) \quad & \quad \left. + (h \lambda)_{(a-1)} u_{(a-1)K,K} \right] n_L = 6 p_{(a)L}, \\
 & 3 \left(p_{(a)} u_{(a+1)K} - (p_{(a)} - p_{(a-1)}) u_{(a)K} - \right. \\
 & \quad \left. - p_{(a-1)} u_{(a-1)K} \right) n_K + \\
 & + \left[(h p)_{(a)} u_{(a+1)\beta,K} + \right. \\
 & + 2 \left((h p)_{(a)} + (h p)_{(a-1)} \right) u_{(a)\beta,K} + \\
 & \quad \left. + (h p)_{(a-1)} u_{(a-1)\beta,K} \right] n_K = 6 p_{(a)\beta}, \\
 & a=1, \dots, r+1.
 \end{aligned}$$

Powyższy układ równań zawiera $3(r+1)$ sprzężonych warunków brzegowych, określonych na $\partial \Pi \times T$, i tyleż wartości funkcji na konturach powierzchni $\partial \Pi_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$. Funkcje $p_{(a)} = (p_L, p_\beta)_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$, jako uogólnione siły brzegowe, zdefiniowane w (11.14), są znane gdy tylko dane są rozkłady obciążeń powierzchniowych $p = p(\underline{X}, t)$, $\underline{X} \in B_{(a)}$, $t \in T$, $a=1, \dots, r$, na powierzchniach brzegowych $\partial \Pi \times h_{(a)}$, $a=1, \dots, r$.

W przypadku jednej warstwy, układ kinetycznych warunków brzegowych upraszcza się do postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 & 2 \, h \, p \, (u_{(2)(K,L)} + 2 \, u_{(1)(K,L)}) \, n_K + \\
 & + \, h \, l \, (u_{(2)K,K} + 2 \, u_{(1)K,K}) \, n_L = 6 \, p_{(1)L}, \\
 & \quad 3 \, p \, (u_{(2)K} - u_{(1)K}) \, n_K + \\
 & + \, h \, p \, (u_{(2)3,K} + 2 \, u_{(1)3,K}) \, n_K = 6 \, p_{(1)3}, \\
 (14.11) \quad & 2 \, h \, p \, (2 \, u_{(2)(K,L)} + u_{(1)(K,L)}) \, n_K + \\
 & + \, h \, l \, (2 \, u_{(2)K,K} + u_{(1)K,K}) \, n_L = 6 \, p_{(2)L}, \\
 & \quad 3 \, p \, (u_{(2)K} - u_{(1)K}) \, n_K + \\
 & + \, h \, p \, (2 \, u_{(2)3,K} + u_{(1)3,K}) \, n_K = 6 \, p_{(2)3},
 \end{aligned}$$

gdzie poszczególne wielkości mają znaczenie jak w przypadku ogólnym.

Tak więc, otrzymaliśmy podstawowy układ przemieszczeniowych równań ruchu (14.7), oraz układ kinetycznych warunków brzegowych w przemieszczeniach (14.10). Ten układ równań i warunków uzupełniony warunkami początkowymi postaci (11.16), dla przemieszczeń i ich pochodnych względem czasu, stanowi podstawowy i kompletny układ równań pola dla stawiania i rozwiązywania obciążeniowych problemów brzegowo-początkowych elastodynamiki płaskich ciał warstwowych.

Zauważmy, że zarówno układ równań (14.7), jak i układ warunków (14.10), są układami równań sprzężonych, tzn. każde z równań zawiera składowe przemieszczenia $u_{(a)L}(\cdot)$ i $u_{(a)3}(\cdot)$ charakteryzujące płaskie i antypłaskie ruchy powierzchni $\Pi_{(a)}$, $a=1, \dots, r+1$. Nasuwa się zatem, pewna idea dekompozycji przemieszczeniowych równań ruchu, a także kinetycznych warunków brzegowych, do dwóch niezależnych układów równań i warunków, charakteryzujących odpowiednio brzegowo-początkowy problem tarczowy i płytowy. Dla jasności wyводу, ograniczymy się do równań opisujących ruch ciała jednowarstwowego. W tym celu, poddamy najpierw przekształceniom przemieszczeniowe równania ruchu (14.8).

Jeśli dodamy stronami, równania (14.8)₁ i (14.8)₂ oraz (14.8)₃ i (14.8)₄, a następnie odejmiemy stronami równania (14.8)₁ i (14.8)₂ oraz (14.8)₃ i (14.8)₄, to otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) (u_{(2)K} + u_{(1)K})_{,KL} + \mu (u_{(2)L} + u_{(1)L})_{,KK} + \\
 & + 2 h^{-1} \lambda (u_{(2)3} - u_{(1)3})_{,L} + 2 h^{-1} (f_{(2)L} + f_{(1)L}) = \\
 & = \rho (\ddot{u}_{(2)L} + \ddot{u}_{(1)L}), \\
 & (\lambda + \mu) (u_{(2)K} + u_{(1)K})_{,KL} + \mu (u_{(2)L} - u_{(1)L})_{,KK} - \\
 & - 6 h^{-1} \mu (u_{(2)3} + u_{(1)3})_{,L} - 12 h^{-2} \mu (u_{(2)L} - u_{(1)L}) + \\
 (14.12) \quad & + 6 h^{-1} (f_{(2)L} - f_{(1)L}) = \rho (\ddot{u}_{(2)L} - \ddot{u}_{(1)L}), \\
 & \mu (u_{(2)3} + u_{(1)3})_{,KK} + 2 h^{-1} \mu (u_{(2)K} - u_{(1)K})_{,K} + \\
 & + 2 h^{-1} (f_{(2)3} + f_{(1)3}) = \rho (\ddot{u}_{(2)3} + \ddot{u}_{(1)3}), \\
 & \mu (u_{(2)3} - u_{(1)3})_{,KK} - 6 h^{-1} \lambda (u_{(2)K} + u_{(1)K})_{,K} + \\
 & - 12 h^{-2} (\lambda + 2\mu) (u_{(2)3} - u_{(1)3}) + \\
 & + 6 h^{-1} (f_{(2)3} - f_{(1)3}) = \rho (\ddot{u}_{(2)3} - \ddot{u}_{(1)3}).
 \end{aligned}$$

Wprowadzamy następnie pewne pola przemieszczenia $\underline{v} = \underline{v}(\underline{Z}, t)$ i $\underline{w} = \underline{w}(\underline{Z}, t)$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, charakteryzujące odpowiednio, uogólniony proces tarczowy i płytowy, oraz następującą dekompozycję tych pól:

$$\begin{aligned}
 \underline{v} &= (v_L, v_3), & v_L &= 2^{-1} (u_{(2)L} + u_{(1)L}), \\
 (14.13) \quad v_3 &= h^{-1} (u_{(2)3} - u_{(1)3}); \\
 \underline{w} &= (w_L, w_3), & w_L &= h^{-1} (u_{(2)L} - u_{(1)L}), \\
 w_3 &= 2^{-1} (u_{(2)3} - u_{(1)3});
 \end{aligned}$$

gdzie: $v_L(\cdot)$, $w_L(\cdot)$ i $v_3(\cdot)$, $w_3(\cdot)$ wyrażają odpowiednio, płaskie i antypłaskie ruchy w uogólnionych procesach: tarczowym i płytowym. Stosownie do definicji (14.13), wprowadzamy uogólnione obciążenia brzegowe: tarczowe $g = g(\underline{Z}, t)$ i płytowe $q = q(\underline{Z}, t)$, $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, oraz analogiczną dekompozycję do (14.13):

$$(14.14) \quad \begin{aligned} \underline{g} &= (g_L, g_3), & g_L &= 2^{-1} (f_{(2)L} + f_{(1)L}), \\ g_3 &= h^{-1} (f_{(2)3} - f_{(1)3}); \\ \underline{q} &= (q_L, q_3), & q_L &= h^{-1} (f_{(2)L} - f_{(1)L}), \\ q_3 &= 2^{-1} (f_{(2)3} + f_{(1)3}); \end{aligned}$$

gdzie: $g_L(\cdot)$, $q_L(\cdot)$ i $g_3(\cdot)$, $q_3(\cdot)$ wyrażają odpowiednio, składowe obciążeń konturowych działających na $\partial\Pi$, w płaszczyźnie Π i prostopadle do tej płaszczyzny.

Uwzględniając w równaniach (14.12) dekompozycję pól przemieszczenia (14.13) i obciążenia (14.14), otrzymamy układ równań typu Kleina-Gordona, w terminach nowych funkcji:

$$(14.15) \quad \begin{aligned} (\lambda + \mu) v_{K,KL} + \mu v_{L,KK} + \lambda v_{3,L} + 2 h^{-1} g_L &= \rho \ddot{v}_L, \\ (\lambda + \mu) w_{K,KL} + \mu w_{L,KK} - 12 h^{-2} \mu w_{3,L} - \\ - 12 h^{-2} \mu w_L + 6 h^{-1} q_L &= \rho \ddot{w}_L, \\ \mu v_{3,KK} - 12 h^{-2} \lambda v_{K,K} - 12 h^{-2} (\lambda + 2\mu) v_3 + \\ + 6 h^{-1} g_3 &= \rho \ddot{v}_3, \\ \mu w_{3,KK} + \mu w_{K,K} + 2 h^{-1} q_3 &= \rho \ddot{w}_3, \end{aligned}$$

gdzie równania (14.15)₁ i (14.15)₃ charakteryzują uogólniony proces tarczowy, zaś równania (14.15)₂ i (14.15)₄ charakteryzują uogólniony proces płytowy. W ogólnym przypadku jednej warstwy, układ równań (14.15) stanowi 6 równań sprzężonych dla składowych wektorów przemieszczenia $\underline{v}(\cdot)$ i $\underline{w}(\cdot)$.

W analogiczny sposób, jak równania (14.15), otrzymujemy kinetyczne warunki brzegowe w terminach nowych funkcji. Wycho-
dząc z warunków w postaci (14.11), a następnie wprowadzając
uogólnione obciążenia brzegowe $\underline{g}^* = g^*(\underline{Z}, t)$ i $q^* = q^*(\underline{Z}, t)$,
 $\underline{Z} \in \Pi$, $t \in T$, z dekompozycją postaci:

$$(14.16) \quad \begin{aligned} \underline{g}^* &= (g_L^*, g_3^*), & g_L^* &= 2^{-1} (P_{(2)L} + P_{(1)L}), \\ & & g_3^* &= h^{-1} (P_{(2)3} - P_{(1)3}); \\ \underline{q}^* &= (q_L^*, q_3^*), & q_L^* &= h^{-1} (P_{(2)L} - P_{(1)L}), \\ & & q_3^* &= 2^{-1} (P_{(2)3} + P_{(1)3}), \end{aligned}$$

oraz stosując procedurę przekształceń jak poprzednio, otrzymu-
jemy następujący układ kinetycznych warunków brzegowych:

$$(14.17) \quad \begin{aligned} 2 h \mu v_{(K,L)} n_K + h \lambda v_{K,K} n_L &= 2 g_L^*, \\ 2 h \mu w_{(K,L)} n_K + h \lambda w_{K,K} n_L &= 6 q_L^*, \\ h \mu v_{3,K} n_K &= 6 g_3^*, \\ h \mu w_{K,K} n_K + h \mu w_{3,K} n_K &= 2 q_3^*, \end{aligned}$$

gdzie warunki (14.17)₁ i (14.17)₃ są związane z uogólnionym
procesem tarczowym, zaś warunki (14.17)₂ i (14.17)₄ z uogól-
nionym procesem płytowym.

Rozwiązanie układu równań (14.15)^{*} z kinetycznymi warun-
kami brzegowymi (14.17) i odpowiednimi warunkami początkowymi
(11.16), względem niewiadomych funkcji $\underline{v}(\cdot)$ i $\underline{w}(\cdot)$, oraz defi-
nicje (14.13), pozwalają na jednoznaczne wyznaczenie przemie-
szczeń $\underline{u}_{(1)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(2)}(\cdot)$, opisujących ruch powierzchni $\Pi_{(1)}$
i $\Pi_{(2)}$ ograniczających rozważaną warstwę.

Rozważmy teraz dwa przypadki szczególne układu równań
(14.15).

^{*}/ O rozwiązaniach równań typu Kleina-Gordona traktuje m.in.
monografia STAKGOLDA [83].

(i) Jeśli $\underline{v} \neq \underline{0}$ i $\underline{g} \neq \underline{0}$, zaś $\underline{w} = \underline{0}$ i $\underline{q} = \underline{0}$, to wtedy $w_L = w_3 = 0$ i $q_L = q_3 = 0$, a na podstawie definicji (14.13)_{5,6} oraz (14.14)_{5,6} wnioskujemy, że

$$(14.18) \quad u_{(1)L} = u_{(2)L}, \quad u_{(1)3} = -u_{(2)3},$$

$$\text{i } f_{(1)L} = f_{(2)L}, \quad f_{(1)3} = -f_{(2)3}.$$

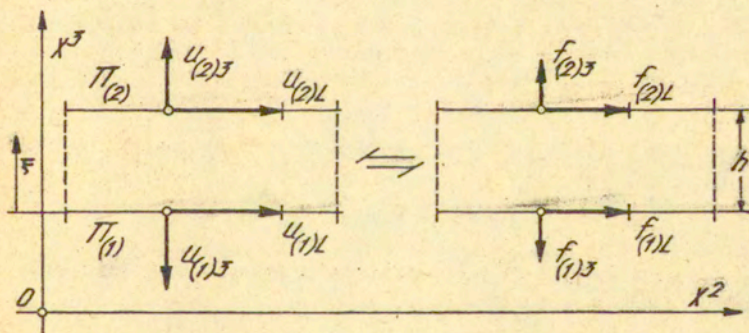
W tym przypadku, układ równań (14.15) redukuje się do postaci:

$$(14.19) \quad \begin{aligned} (\lambda + \mu) v_{K,KL} + \mu v_{L,KK} + \lambda v_{3,L} + 2 h^{-1} g_L &= \rho \ddot{v}_L, \\ \mu v_{3,KK} - 12 h^{-2} \lambda v_{K,K} - 12 h^{-2} (\lambda + 2\mu) v_3 &= \\ &+ 6 h^{-1} g_3 = \rho \ddot{v}_3, \end{aligned}$$

i określony jest w $\Pi \times T$, a układ warunków (14.17) do postaci:

$$(14.20) \quad \begin{aligned} 2 h \mu v_{(K,L)} n_K + h \lambda v_{K,K} n_L &= 2 g_L^*, \\ h \mu v_{3,K} n_K &= 6 g_3^*, \end{aligned}$$

określony w $\partial \Pi \times T$; i mamy do czynienia tylko z uogólnionym procesem tarczowym (rys. 14.1).



Rys. 14.1. Podstawowe wielkości w uogólnionym procesie tarczowym.

Jeśli ponadto, $v_3 = 0$ i $g_3 = 0$, to na podstawie (14.19)₂ wnioskujemy, że $v_{K,K} = 0$, i mamy płaski stan odkształcenia, który opisuje równanie ruchu,

$$(14.21) \quad h \mu v_{L, KK} + 2 g_L = \rho h \ddot{v}_L, \quad \text{w } II^*T,$$

oraz kinetyczne warunki brzegowe,

$$(14.22) \quad 2 h \mu v_{(K,L)} n_K = 2 g_L^*, \quad \text{na } \partial II^*T,$$

i odpowiednie warunki początkowe.

(ii) Jeśli $\underline{y} = \underline{0}$ i $\underline{g} = \underline{0}$, zaś $\underline{w} \neq \underline{0}$ i $\underline{q} \neq \underline{0}$, to wówczas $v_L = v_3 = 0$ i $g_L = g_3 = \bar{0}$, a na podstawie definicji (14.13)_{2,3} oraz (14.14)_{2,3} wnioskujemy, że

$$(14.23) \quad u_{(1)L} = -u_{(2)L}, \quad u_{(1)3} = u_{(2)3},$$

$$i \quad f_{(1)L} = -f_{(2)L}, \quad f_{(1)3} = f_{(2)3}.$$

W tym przypadku, układ równań (14.15) upraszcza się do postaci:

$$(14.24) \quad (2 + \mu) w_{K, KL} + \mu w_{L, KK} - 12 h^{-2} \mu w_{3, L} -$$

$$- 12 h^{-2} \mu w_L + 6 h^{-1} q_L = \rho \ddot{w}_L,$$

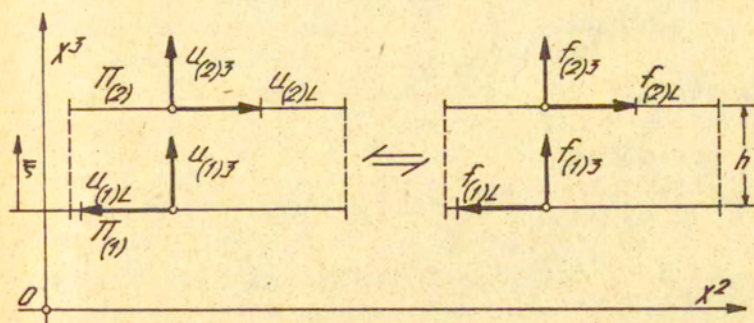
$$\mu w_{3, KK} + \mu w_{K, K} + 2 h^{-1} q_3 = \rho \ddot{w}_3,$$

i określony jest w II^*T , a układ warunków (14.17) do postaci:

$$(14.25) \quad 2 h \mu w_{(K,L)} n_K + h \lambda w_{K, K} n_K = 6 q_L^*,$$

$$h \mu w_K n_K + h \mu w_{3, K} n_K = 2 q_3^*,$$

określony w ∂II^*T ; i mamy do czynienia tylko z uogólnionym procesem płytowym (rys. 14.2).



Rys. 14.2. Podstawowe wielkości w uogólnionym procesie płytowym.

15. Problem propagacji fal monochromatycznych w grubej warstwie płaskiej ^{*/}

Rozważamy propagację płaskich fal harmoniczných w warstwie sprężystej dowolnej grubości, ograniczonej dwoma płaszczyznami $X^3 = 0$, $X^3 = h$ i nieograniczonej w kierunkach $\pm (X^1, X^2)$; wolnej od obciążeń na powierzchniach granicznych i brzegowych.

Punktem wyjścia do analizy propagacji fal są przemieszczeniowe równania ruchu (14.12), dla dwuwymiarowych pól wektorowych $\underline{u}_{(1)} = \underline{u}_{(1)}(\underline{z}, t)$, $\underline{u}_{(2)} = \underline{u}_{(2)}(\underline{z}, t)$, $\underline{z} \in \Pi$, $t \in T$, które opisują ruch powierzchni $\Pi_{(1)}$, $\Pi_{(2)}$, ograniczających rozważaną warstwę. Dyskutować będziemy dwuwymiarowe procesy, będące wynikiem dekompozycji ogólnego procesu propagacji fal harmoniczných tj.: uogólnionego płaskiego procesu symetrycznego (tarczowego) i uogólnionego płaskiego procesu antysymetrycznego (płytowego).

^{*/} Materiał tego rozdziału był przedmiotem referatu wygłoszonego na konferencji GAMM 81 w Würzburgu (RFN), a następnie publikacji [59], ZAMM, 1982, 62, 409-411.

Uogólniony płaski proces symetryczny (tarczowy), ($g = 0$)

Problem propagacji fal harmoniczych w tym przypadku polega na rozwiązaniu przemieszczeniowych równań ruchu (14.19), otrzymanych z dekompozycji (14.12), w których zakłada się, że obciążenia tarczowe $g = (g_L, g_Z) = 0$. Mamy zatem do czynienia z układem równań postaci:

$$(15.1) \quad \begin{aligned} (\lambda + \mu) v_{K,KL}^* + \mu v_{L,KK}^* + h^{-1} \lambda v_{3,L}^* &= \rho \ddot{v}_L^*, \\ \mu v_{3,KK}^* - 12 h^{-1} \lambda v_{K,K}^* - 12 h^{-2} (\lambda + 2\mu) v_3^* &= \rho \ddot{v}_3^*, \end{aligned}$$

gdzie: $v_L^* = v_L$, $v_3^* = h v_3$; λ , μ są stałymi Lamégo, a h grubości warstwy. Równania (15.1) opisują dwuwymiarowe symetryczne płaskie $v_L^* = v_L^*(Z, t)$ i antypłaskie $v_3^* = v_3^*(Z, t)$ ruchy rozważanej warstwy.

Poszukujemy rozwiązania układu równań (15.1) w postaci:

$$(15.2) \quad \underline{v}^* = \underline{a} \exp i (\underline{k} \cdot \underline{Z} - \omega t), \quad \underline{Z} = (X^1, X^2) \in \Pi, \quad t \in T,$$

gdzie \underline{a} i \underline{k} są stałymi wektorami, a ω jest stałym skalarem. Jeśli wprowadzimy wektor jednostkowy,

$$(15.3) \quad \underline{n} = \underline{k} k^{-1}, \quad k = |\underline{k}|,$$

to wówczas rozwiązanie (15.2) przedstawia płaskie fale harmonicze z amplitudą \underline{a} , propagujące się w kierunku \underline{n} ze stałą prędkością

$$(15.4) \quad c = \omega k^{-1},$$

która jest stosunkiem częstości kołowej ω i liczby falowej k .

Podstawiając reprezentację rozwiązania (15.2) do równań ruchu (15.1) tzn. wprowadzając tam wielkości:

$$(15.5) \quad \begin{aligned} \ddot{v}_L^* &= -a_L \omega^2 \exp i (k_M X_M - \omega t), \\ v_{L,KK}^* &= -a_L k_K k_K \exp i (k_M X_M - \omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{K,K}^* &= a_K i k_K \exp i (k_M X_M - \omega t), \\
 v_{K,KL}^* &= - a_K k_K k_L \exp i (k_M X_M - \omega t), \\
 v_{\bar{3}}^* &= a_{\bar{3}} \exp i (k_M X_M - \omega t), \\
 \ddot{v}_{\bar{3}}^* &= - a_{\bar{3}} \omega^2 \exp i (k_M X_M - \omega t), \\
 v_{\bar{3},L}^* &= a_{\bar{3}} i k_L \exp i (k_M X_M - \omega t), \\
 v_{\bar{3},KK}^* &= - a_{\bar{3}} k_K k_K \exp i (k_M X_M - \omega t),
 \end{aligned}
 \tag{15.5}$$

otrzymamy układ trzech jednorodnych równań skalarowych dla składowych wektora amplitudy:

$$\begin{aligned}
 (\mu - \rho c^2) a_L + (\lambda + \mu) n_K n_L a_K - \\
 - i \lambda (h k)^{-1} n_L a_{\bar{3}} &= 0, \\
 (\mu - \rho c^2) a_{\bar{3}} + 12 i \lambda (h k)^{-1} n_K a_K + \\
 + 12 (\lambda + 2\mu) (h k)^{-2} a_{\bar{3}} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{15.6}$$

Przedyskutujemy teraz proces propagacji płaskich fal harmonicznych w przypadku fal podłużnych i poprzecznych.

(i) Rozpatrzmy warunek propagacji fali podłużnej tj. takiej, której kierunek propagacji \underline{k} jest równoległy do kierunku ruchu \underline{a} . Jeśli wybierzemy wektor jednostkowy \underline{n} wskazujący kierunek propagacji tak aby leżał w płaszczyźnie OX^1X^2 , to wówczas fale są niezależne od X^3 , ponieważ

$$\underline{n} \cdot \underline{Z} - c t = n_L X_L - c t.$$

W przypadku fali podłużnej P (primary wave), wektor przemieszczenia jest prostopadły do płaszczyzny frontu fali i leży zawsze w płaszczyźnie OX^1X^2 , (rys. 15.1).

Mamy wtedy:

$$\underline{a} \parallel \underline{n}, \quad \text{tj.} \quad \underline{a} \times \underline{n} = \underline{0}.$$

Jeśli założymy ponadto, że $\underline{a} = \eta \underline{n}$, gdzie η jest skalarą, to ponieważ \underline{n} leży w płaszczyźnie OX^1X^2 , więc $n_3 = 0$ i $a_3 = 0$. Zatem z równań (15.6) otrzymujemy:

$$(15.7) \quad \begin{aligned} (\mu - \rho c^2 + (\lambda + \mu) n_K n_K) n_L &= 0, \\ \text{12 i 1} (h k)^{-1} n_K n_K &= 0. \end{aligned}$$

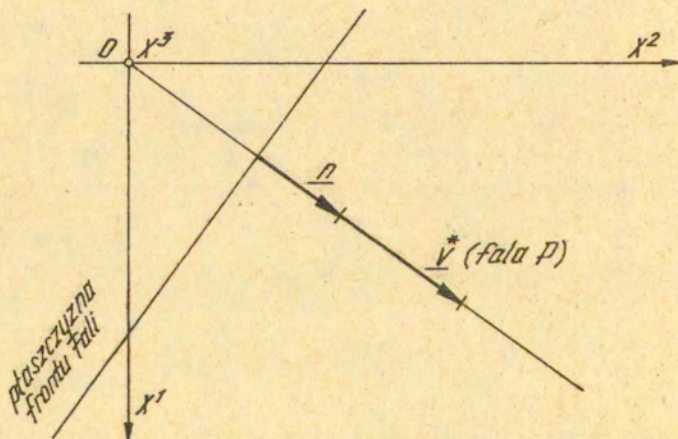
Powyższy układ równań jest spełniony, jeśli $(h k) \rightarrow \infty$, oraz

$$c^2 = (\lambda + 2\mu) \rho^{-1}.$$

Zatem, dla $(h k) \rightarrow \infty$, w warstwie sprężystej skończonej grubości fala podłużna P istnieje i propaguje się z klasyczną prędkością

$$(15.8) \quad c = c_1 = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2},$$

jak to wynika z (15.7)₁.

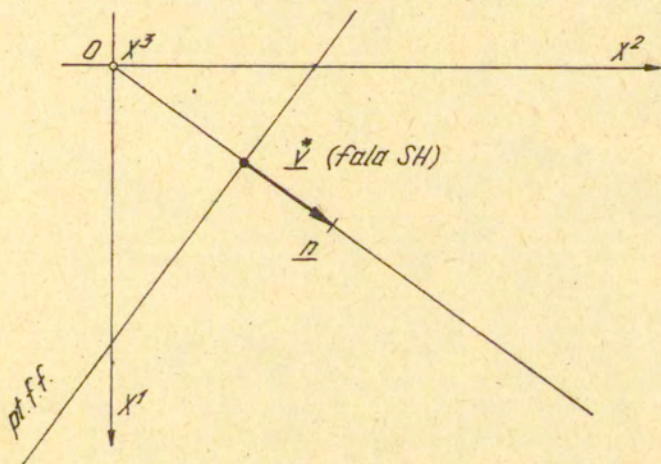


Rys. 15.1. Propagacja płaskiej fali podłużnej P.

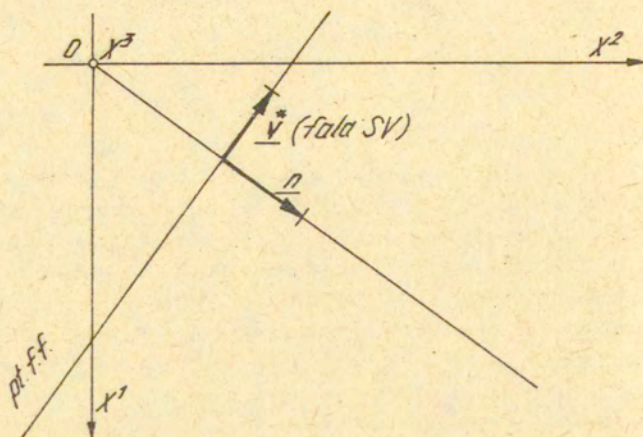
Wtedy płaskie ruchy harmoniczne mają postać fal P:

$$(15.9) \quad \begin{aligned} \underline{v}_L^*(\underline{z}, t) &= \underline{a}_L^* \exp i (n_K X_K - c_1 t), \quad \epsilon_{KL} n_L a_K^* = 0; \\ \underline{v}_3^*(\underline{z}, t) &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Rozpatrzmy warunek propagacji fali poprzecznej tj. takiej, której kierunek propagacji $\underline{k} = k \underline{n}$ jest prostopadły do kierunku ruchu \underline{a} . W przypadku fali poprzecznej S (secondary wave), wektor przemieszczenia leży na płaszczyźnie frontu fali. Wektor fali S może być zdekomponowany do dwóch składowych: jednej w płaszczyźnie Ox^1x^2 , a drugiej w płaszczyźnie do niej prostopadłej. Ta pierwszą składową nazywamy falą SV (vertically polarized shear wave), a drugą nazywamy falą SH (horizontally polarized shear wave). W ten sposób, fale P i fale SV wyrażają składowe płaskiego ruchu, podczas gdy fale SH wyrażają antypłaskie ruchy (patrz rys. 15.2 i 15.3).



Rys. 15.2. Propagacja płaskiej fali poprzecznej SH.



Rys. 15.3. Propagacja płaskiej fali poprzecznej SH.

W przypadku fali poprzecznej S mamy:

$$\underline{a} \perp \underline{n}, \quad \text{tj.} \quad \underline{a} \cdot \underline{n} = 0,$$

a ponieważ \underline{n} leży w płaszczyźnie OX^1X^2 , więc $n_3 = 0$ i $a_K n_K = 0$.
Zatem, z równań (15.6) otrzymujemy następujący układ warunków dla składowych wektora amplitudy:

$$(15.10) \quad \begin{aligned} (\mu - \rho c^2) a_L + i \lambda (h k)^{-1} n_L a_3 &= 0, \\ (\mu - \rho c^2 + 12 (\lambda + 2\mu) (h k)^{-2}) a_3 &= 0, \end{aligned}$$

Powyższy układ równań można przedstawić w postaci macierzowej $\underline{L} \underline{a} = \underline{0}$; mamy wtedy:

$$(15.11) \quad \begin{bmatrix} c^2 - c_2^2, & 0, & -i_1 (\rho h k)^{-1} n_1 \\ 0, & c^2 - c_2^2, & -i_1 (\rho h k)^{-1} n_2 \\ 0, & 0, & c^2 - c_2^2 - 12 (h k)^{-2} c_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

gdzie wielkości:

$$(15.12) \quad c_1 = ((1 + 2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad c_2 = (\mu/\rho)^{1/2},$$

są klasycznymi prędkościami propagacji fal.

Nietrywialne rozwiązania układu równań (15.10) są możliwe wtedy i tylko wtedy gdy $\det [\underline{L}] = 0$, czyli gdy

$$(15.13) \quad (c^2 - c_2^2)^2 (c^2 - c_2^2 - 12 (h k)^{-2} c_1^2) = 0.$$

Z powyższego warunku propagacji otrzymujemy dwie prędkości falowe:

$$(15.14) \quad c = c_2, \quad \text{i} \quad c = \bar{c}_2 = (c_2^2 + 12 (h k)^{-2} c_1^2)^{1/2}.$$

Z definicji fali poprzecznej i z warunków (15.10) wynika, że jeśli (hk) jest skończone, to amplituda fali \underline{a} jest wektorem postaci $\underline{a} = (a_L, 0)$, gdzie $a_L \neq 0$, i fala ta propaguje się z prędkością $c = c_2$ lub $c = \bar{c}_2$. Płaskie ruchy harmoniczne odpowiadające tym prędkościom mają postać fal SV:

$$(15.15) \quad v_L^i(\underline{z}, t) = a_L^i \exp i (n_K X_K - c t), \quad a_L^i n_L = 0, \\ v_3^i(\underline{z}, t) = 0,$$

gdzie: $c = c_2$, lub $c = \bar{c}_2$, według (15.14).

W przypadku gdy iloczyn $(h k) \rightarrow \infty$, to fala \underline{a} propaguje się z klasyczną prędkością $c = c_2$, a jej amplituda ma postać wektora $\underline{a} = (a_L, a_3)$, gdzie $a_L \neq 0$ i $a_3 \neq 0$. Płaskie ruchy harmoniczne odpowiadające tej prędkości mają postać fal SV i SH:

$$(15.15) \quad \begin{aligned} v_L^*(Z, t) &= a_L^* \exp i (n_K X_K - c_2 t), & a_L^* n_L &= 0, \\ v_3^*(Z, t) &= a_3^* \exp i (n_K X_K - c_2 t). \end{aligned}$$

Powyższe wnioski można rozszerzyć na ogólne (niekoniecznie harmoniczne) płaskie ruchy postaci:

$$(15.16) \quad \begin{aligned} v_L^*(Z, t) &= F_L^* (n_K X_K - c t), & F_L^* n_L &= 0, \\ v_3^*(Z, t) &\equiv 0, \end{aligned}$$

gdzie: $c = c_2$, lub $c = \bar{c}_2$; oraz

$$(15.16)' \quad \begin{aligned} v_L^*(Z, t) &= F_L^* (n_K X_K - c_2 t), & F_L^* n_L &= 0, \\ v_3^*(Z, t) &= F_3^* (n_K X_K - c_2 t), \end{aligned}$$

stosownie do (15.15) i (15.15)'.

Uogólniony płaski proces antysymetryczny (płytkowy), ($q = 0$)

Problem propagacji fal harmonicznych w tym przypadku polega na rozwiązaniu przemieszczeniowych równań ruchu (15.19), otrzymanych po dekompozycji (15.12), w których zakłada się, że obciążenia płytkowe $\underline{q} = (q_L, q_3) = \underline{0}$. Mamy zatem do dyspozycji układ równań:

$$(15.17) \quad \begin{aligned} (2 + \mu) w_{K,KL}^* + \mu w_{L,KK}^* - 12 h^{-3} \mu w_{3,L}^* - \\ - 12 h^{-2} \mu w_L^* &= \rho \ddot{w}_L^*, \\ \mu w_{3,KK}^* + h \mu w_{K,K}^* &= \rho \ddot{w}_3^*, \end{aligned}$$

gdzie: $w_L^* = w_L$, $w_3^* = h w_3$. Równania (15.17) opisują dwuwymiarowe antysymetryczne płaskie $w_L^* = w_L^*(Z, t)$ i antypłaskie $w_3^* = w_3^*(Z, t)$ ruchy rozważanej warstwy.

Poszukujemy rozwiązania przemieszczeniowych równań ruchu (15.17) w postaci:

$$(15.18) \quad \underline{w}^* = \underline{a} \exp i (\underline{k} \cdot \underline{z} - \omega t),$$

podobnie jak w przypadku uogólnionego płaskiego procesu symetrycznego. Wyrażając w postaci reprezentacji (15.18) wielkości występujące w równaniach (15.17), otrzymujemy układ trzech jednorodnych równań skalarowych dla składowych wektora amplitudy

$$(1 + \mu) n_K n_L a_K + \mu n_K n_K a_L +$$

$$(15.19) \quad + 12 i h^{-3} k^{-1} \mu n_L a_3 + 12 (h k)^{-2} \mu a_L - \rho c^2 a_L = 0,$$

$$\mu n_K n_K a_3 - i h k^{-1} \mu n_K a_K - \rho c^2 a_3 = 0.$$

Przedyskutujemy teraz proces propagacji płaskich fal harmonicznych w przypadku fal podłużnych i poprzecznych.

(i) W przypadku fali podłużnej P kierunek propagacji $\underline{k} = k \underline{n}$ jest równoległy do kierunku ruchu \underline{a} . Mamy zatem:

$$\underline{a} \times \underline{n} = \underline{0}, \quad \underline{a} = \eta \underline{n}, \quad n_3 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Z równań (15.19) otrzymujemy:

$$((1 + 2\mu) n_K n_K + 12 \mu (h k)^{-2} - \rho c^2) n_L = 0,$$

(15.20)

$$i (h k)^{-1} \mu n_K n_K = 0.$$

Powyższe równania nie mogą być jednocześnie spełnione gdy iloczyn $(h k)$ jest wartością skończoną. W przypadku gdy $(h k) \rightarrow \infty$, to fala podłużna istnieje i propaguje się z klasyczną prędkością $c = c_1$, a płaskie ruchy harmoniczne mają postać fal P:

$$(15.21) \quad w_L^*(\underline{z}, t) = a_L^* \exp i (n_K X_K - c_1 t), \quad e_{KL} n_L a_K^* = 0,$$

$$w_3^*(\underline{z}, t) = 0.$$

(ii) W przypadku fali poprzecznej S kierunek propagacji $\underline{k} = k \underline{n}$ jest prostopadły do kierunku ruchu \underline{a} . Mamy zatem,

$$\underline{a} \cdot \underline{n} = 0, \quad n_3 = 0, \quad a_K n_K = 0,$$

i z równań (15.19) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (\mu - \rho c^2 + 12 (h k)^{-2} \mu) a_L + \\ (15.22) \quad + 12 i h^{-3} k^{-1} \mu n_L a_3 = 0, \\ (\mu - \rho c^2) a_3 = 0. \end{aligned}$$

Zapisując powyższy układ równań w postaci macierzowej

$$(15.23) \quad \underline{L} \underline{a} = \underline{0},$$

mamy

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} c^2 - c_2^2 \left(1 + \frac{12}{(h k)^2}\right), & 0, & c_2^2 \frac{12 i}{h^3 k} n_1 \\ 0, & c^2 - c_2^2 \left(1 + \frac{12}{(h k)^2}\right), & c_2^2 \frac{12 i}{h^3 k} n_2 \\ 0, & 0, & c^2 - c_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

gdzie c_2 jest drugą klasyczną prędkością propagacji.

Niezerowe rozwiązania tego układu równań względem \underline{a} mamy wtedy i tylko wtedy gdy $\det [\underline{L}] = 0$, tzn. gdy

$$(15.24) \quad [c^2 - (1 + 12 (h k)^{-2}) c_2^2]^2 (c^2 - c_2^2) = 0.$$

Z powyższego warunku propagacji otrzymujemy dwie prędkości falowe:

$$(15.25) \quad c = c_2, \quad \text{ i } \quad c = \bar{c}_2 = c_2 (1 + 12 (h k)^{-2})^{1/2}.$$

Z definicji fali poprzecznej i z warunku (15.22) wynika, że dla skończonej wartości $(h k)$ amplituda fali S jest wektorem postaci $\underline{a} = (a_L, 0)$, gdzie $a_L \neq 0$, i fala ta może propagować się z prędkością $c = c_2$ lub $c = \bar{c}_2$. Płaskie ruchy harmoniczne odpowiadające tym prędkościom mają postać fal SV:

$$(15.26) \quad w_L^*(\underline{Z}, t) = a_L^* \exp i (n_K X_K - c t), \quad a_L^* n_L = 0, \\ w_3^*(\underline{Z}, t) = 0,$$

gdzie $c = c_2$ lub $c = \bar{c}_2$ według (15.25).

W przypadku gdy iloczyn $(h k) \rightarrow \infty$, fala S ma charakter klasycznej fali poprzecznej tzn. jej prędkość jest $c = c_2$, i można ją rozdzielić na falę SV - spolaryzowaną pionowo, i falę SH - spolaryzowaną poziomo:

$$(15.26)' \quad w_L^*(\underline{Z}, t) = a_L^* \exp i (n_K X_K - c_2 t), \quad a_L^* n_L = 0, \\ w_3^*(\underline{Z}, t) = a_3^* \exp i (n_K X_K - c_2 t).$$

Wnioski powyższe można rozszerzyć na ogólne (niekoniecznie harmoniczne) płaskie ruchy postaci:

$$(15.27) \quad w_L^*(\underline{Z}, t) = G_L^* (n_K X_K - c t), \quad G_L^* n_L = 0, \\ w_3^*(\underline{Z}, t) = 0,$$

gdzie $c = c_2$ lub $c = \bar{c}_2$; oraz

$$(15.27)' \quad w_L^*(\underline{Z}, t) = G_L^* (n_K X_K - c_2 t), \quad G_L^* n_L = 0, \\ w_3^*(\underline{Z}, t) = G_3^* (n_K X_K - c_2 t),$$

stosownie do (15.26) i (15.26)'.

Rozważmy teraz ruch dowolnego punktu warstwy lub dowolnej płaskiej powierzchni, położonej pomiędzy powierzchniami $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$ ograniczającymi rozważaną warstwę. Ten ruch opisuje równanie:

$$(15.28) \quad \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{u}_{(1)}(\underline{Z}, t) + \xi h^{-1} (\underline{u}_{(2)}(\underline{Z}, t) - \underline{u}_{(1)}(\underline{Z}, t)),$$

$$\underline{X} \in \Pi^*(0, h), \quad \underline{Z} \in \Pi, \quad t \in T, \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

gdzie $\underline{u}_{(1)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(2)}(\cdot)$ są polami przemieszczeń powierzchni $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$.

Ponieważ w rozważaniach dotyczących procesu tarczowego i płytowego wprowadziliśmy pewne pomocnicze pola przemieszczeń $\underline{v} = (v_L, v_3)$ i $\underline{w} = (w_L, w_3)$ oraz $\underline{v}^* = (v_L^*, v_3^*)$ i $\underline{w}^* = (w_L^*, w_3^*)$ wyrażone przez poszukiwane pola przemieszczeń $\underline{u}_{(1)}(\cdot)$ i $\underline{u}_{(2)}(\cdot)$, więc musimy odtworzyć teraz te ostatnie. Na podstawie wprowadzonych wcześniej definicji (14.13), oraz (15.1)_{3,4} i (15.17)_{3,4} otrzymamy dla pól przemieszczeń powierzchni $\Pi_{(1)}$ i $\Pi_{(2)}$ następujące wyrażenia:

$$(15.29) \quad \begin{aligned} u_{(1)L} &= 2^{-1} (2 v_L^* + h w_L^*), \\ u_{(1)3} &= 2^{-1} (2 h^{-1} w_3^* + v_3^*), \\ u_{(2)L} &= 2^{-1} (2 v_L^* - h w_L^*), \\ u_{(2)3} &= 2^{-1} (2 h^{-1} w_3^* - v_3^*). \end{aligned}$$

Teraz, równania ruchu dowolnego punktu wyrazić można za pomocą pól pomocniczych i otrzymujemy:

$$(15.30) \quad \begin{aligned} u_L(\underline{X}, t) &= v_L^* + (2^{-1} h - \xi) w_L^*, \\ u_3(\underline{X}, t) &= h^{-1} (w_3^* + (2^{-1} h - \xi) v_3^*). \end{aligned}$$

Biorąc następnie pod uwagę wnioski, dotyczące propagacji płaskich fal harmonicznnych oraz równania ruchu (15.3), stwierdzamy co następuje:

(1) W warstwie sprężystej, w uogólnionym płaskim procesie symetrycznym (tarczowym), w przypadku gdy iloczyn $(h k) \rightarrow \infty$, możliwe są płaskie fale harmoniczne postaci P, SV i SH, propagujące się z klasycznymi prędkościami $c = c_1$ i $c = c_2$. W przypadku jednak, gdy $(h k)$ ma wartość skończoną, propagacja fal jest ograniczona, a prędkości falowe zmodyfikowane; mamy wtedy,

$$\text{fale P: } u_L(\underline{x}, t) = u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

$$\text{fale SV: } u_L(\underline{x}, t) = a_L^* \exp i (n_K X_K - c t),$$

(15.31)

$$u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

$$\text{fale SH: } u_L(\underline{x}, t) = u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

gdzie: $c = c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$, lub $c = \bar{c}_2 = (c_2^2 + 12 (h k)^{-2} c_1^2)^{1/2}$.

(2) W warstwie sprężystej, w uogólnionym płaskim procesie antysymetrycznym (pływowym), w przypadku gdy iloczyn $(h k) \rightarrow \infty$, możliwe są płaskie fale harmoniczne postaci P, SV i SH, propagujące się z klasycznymi prędkościami $c = c_1$ i $c = c_2$. W przypadku jednak, gdy $(h k)$ ma wartość skończoną, propagacja fal jest ograniczona, a prędkości falowe zmodyfikowane; mamy wtedy,

$$\text{fale P: } u_L(\underline{x}, t) = u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

$$\text{fale SV: } u_L(\underline{x}, t) = (h/2 - \xi) a_L^* \exp i (n_K X_K - c t),$$

(15.32)

$$u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

$$\text{fale SH: } u_L(\underline{x}, t) = u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

gdzie: $c = c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$, lub $c = \bar{c}_2 = c_2 (1 + 12 (h k)^{-2})^{1/2}$.

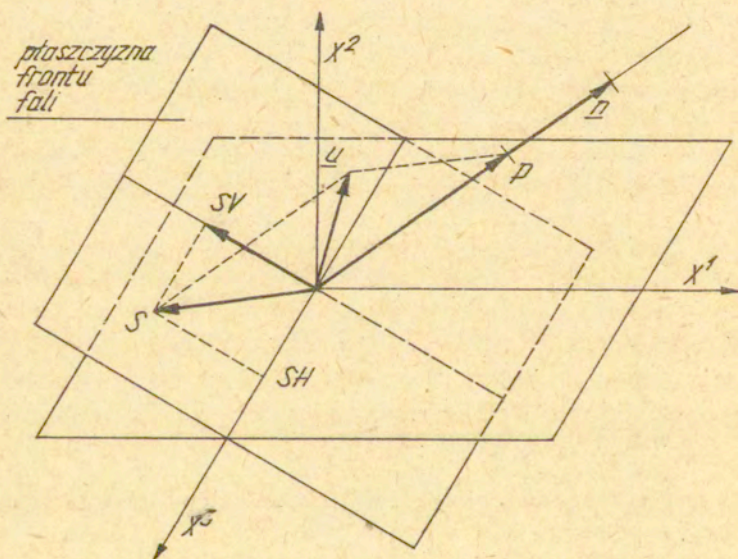
Te dwa ostatnie wnioski, można rozszerzyć na ogólny przypadek płaskich ruchów (niekoniecznie harmonicznych) tak, że ruch warstwy ograniczony więzami kinematycznymi można wyrazić równaniami:

$$\begin{aligned}
 u_L(\underline{x}, t) &= F_L (n_K \underline{x}_K - c_T t) + \\
 &+ (n/2 - \epsilon) G_L (n_K \underline{x}_K - c_P t), \\
 (15.33) \quad F_L n_L &= 0, \quad G_L n_L = 0;
 \end{aligned}$$

$$u_3(\underline{x}, t) = 0,$$

gdzie: $c_T = c_2$ lub $c_T = \bar{c}_2$, według (15.14); zaś $c_P = c_2$ lub $c_P = \bar{c}_2$, według (15.25). Równania (15.33) wyrażają propagację płaskich fal SV pionowo spolaryzowanych.

Pewną ilustrację propagacji płaskich fal i ich dekompozycję do postaci P, SV i SH, w warstwie sprężystej, daje rys. 15.4. Przyjęto tam, że płaszczyzna Ox^1x^2 jest równoległa do powierzchni podstawowej Π , zaś płaszczyzna frontu fali pozostaje do niej prostopadła.



Rys. 15.4. Propagacja płaskiej fali i jej dekompozycja do postaci: P, SV i SH.

16. Podsumowanie

W przedstawionej rozprawie podano metodę, oraz systematyczny i jednolity wykład konstruowania modeli matematycznych elastomechaniki ciał warstwowych. Głównym wynikiem tych rozważań jest podanie pewnej klasy modeli aproksymacyjnych, tj. wariantów teorii dwuwymiarowych, od ogólnych do szczególnych. Wiążą one nieliniową teorię z liniową, poprzez warianty pośrednie; uwzględniają struktury warstwowe o dowolnej konfiguracji (geometrii wewnętrznej) i struktury szczególne, jedno- i wielowarstwowe, oraz ogólne własności materiałów tworzących ciała warstwowe - niejednorodność i anizotropię. Szczególnym przypadkiem elastomechaniki ciał warstwowych jest podana tutaj, dynamiczna teoria grubych powłok, płyt i tarcz sprężystych.

Wykorzystanie, w tych rozważaniach, nieliniowej teorii kontinuum trójwymiarowego z więzami, pozwoliło na modelowanie ruchu trójwymiarowych ciał warstwowych, za pomocą ruchu pewnych powierzchni materialnych, prowadząc do całej klasy dwuwymiarowych modeli aproksymacyjnych, ścisłych w sensie odpowiedniej teorii trójwymiarowej. Ponadto, wykorzystanie koncepcji więzów, stworzyło pewne możliwości oceny stopnia dokładności rozwiązań modelowych w ramach poszczególnych wariantów teorii. W trakcie konstruowania modeli przyjęto jedyne założenie, o charakterze aproksymacyjnym, jakim jest postulowanie postaci funkcji deformacji, ograniczającej klasę ruchów dopuszczalnych.

Skonstruowane modele na różnych poziomach ogólności teorii i założeń dotyczących: postaci więzów kinematycznych (wewnętrznych i brzegowych), równań konstytutywnych dla materiałów tworzących ciała warstwowe, struktury warstwowej, oraz wyboru współrzędnych uogólnionych; pozwalają na formułowanie dość szerokiej klasy praktycznych problemów elastomechaniki ciał warstwowych, oraz poszukiwania rozwiązań tych problemów ze sterowaną dokładnością. O dokładności modeli, a następnie o dokładności rozwiązań problemów brzegowo-początkowych i brzegowych decydują w głównej mierze: postulowana postać więzów kinematycznych, wybór uogólnionych współrzędnych, oraz sposób dyskretyzacji obszaru.

W rozprawie można wyróżnić dwie wyraźne części. Część nieliniową, rozwijaną w rozdziałach 2 - 8, oraz część liniową obejmującą rozdziały 9 - 15. W obydwóch częściach, główny akcent położono na elementy natury poznawczej, a nie na zastosowania proponowanych modeli.

Część nieliniowa jest bardziej ogólna i stanowi punkt wyjścia do rozwijania podanej metody w kierunku konstruowania dalszych modeli, przy bardziej wyspecyfikowanych założeniach, a także w kierunku badania własności tych modeli. Ta nieliniowa część, kończy się pewną egzemplifikacją nieliniowej teorii powłok, gdzie na przykładzie grubej powłoki walcowej, przeprowadzono analizę dokładności rozwiązania modelowego, oraz podano praktyczne kryteria oceny odchyłki takiego rozwiązania, od nieznanego rozwiązania ścisłego. Wnioski wynikające z tego dość pogładowego problemu, rzucają nowe światło na kwestię dokładności rozwiązań modelowych elastomechaniki wogóle. Okazuje się bowiem, iż stopień dokładności rozwiązania modelowego pewnego problemu elastomechaniki ciała warstwowego zależy: od stosunku h/R , geometrii obszaru, stałych materiałowych, oraz od charakteru i dystrybucji obciążenia. Jest to bardziej ogólny wniosek niż ten, który wypowiedziano w pracy [84], a który przez lata stanowił pewne kryterium oceny "błędu" w liniowej teorii powłok.

Część liniowa jest bardziej szczegółowa i zawiera przedyskutowane struktury równań modelowych, pod kątem poprawności sformułowania brzegowo-początkowych problemów elastodynamiki ciał warstwowych. Ważnym elementem jest udowodnienie kilku twierdzeń liniowej elastodynamiki. Między innymi, twierdzenie o mocy i energii, oraz twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań. Przeprowadzona analiza dodatniej pół-określoności tensora sztywności warstw, oraz dyskusja ograniczeń dla stałych materiałowych dowodzą dodatkowo, poprawności skonstruowanych modeli, a ponadto zapewniają, że naprężeniowe sformułowanie w liniowej elastodynamice ciał warstwowych jest możliwe. W szczególności, możliwe jest wyprowadzenie naprężeniowych równań ruchu, dla płaskich ciał warstwowych. Pewnym elementem godnym uwagi, jest wyprowadzenie przemieszczeniowych równań ruchu typu Naviera, opisujących procesy elastodynamiki płaskich ciał warstwowych.

Zaproponowana dekompozycja tych równań, do dwóch niezależnych układów równań przemieszczeniowych typu Kleina-Gordona, w przypadku warstwy sprężystej dowolnej grubości, pozwala na wykorzystanie znanych reprezentacji rozwiązań ogólnych [83]. Część liniowa, kończy się egzemplifikacją na dość ogólnym problemie elastodynamiki. Badając problem propagacji fal monochromatycznych w grubej warstwie płaskiej, wyprowadzono wnioski dotyczące postaci fal propagujących się i prędkości falowych, w płaskich symetrycznych i antysymetrycznych procesach elastodynamiki. Okazuje się, że w warstwach sprężystych skończonej grubości propagacja fal jest ograniczona, a prędkości falowe są zmodyfikowane.

Prezentowane podejście do opisu ciał warstwowych jest rozwijane pod kątem poszukiwania rozwiązań analitycznych, w przypadku ciał o niewielkiej liczbie warstw lub jednowarstwowych, jak również pod kątem metod numerycznych, w przypadku dużej liczby warstw. Zatem, na tle zaprezentowanego materiału, rysują się duże możliwości kontynuowania badań w podjętej przez autora problematyce, oraz zastosowania proponowanych modeli do rozwiązywania praktycznych problemów w różnych dziedzinach.

Rozwijana w rozprawie metoda więzów, daje możliwości konstruowania dalszych dwuwymiarowych modeli elastomechaniki trójwymiarowych ciał warstwowych, przy różnych hipotezach kinematycznych i kinetycznych, oraz różnych równaniach konstytutywnych dla materiałów, w sposób konsystentny z teorią nieklasycznego kontinuum trójwymiarowego. Przyjmując mianowicie, szczególne postacie dodatkowych więzów wewnętrznych, można z podanych równań modelowych przejść do szczególnych teorii. Dotychczasowe podejście do opisu powłok i płyt wielowarstwowych, oparte głównie na trójparametrowej teorii Kirchhoffa-Love'a, rozwijane np. w pracy [16], można otrzymać z równań podanych przez autora, jeśli przyjmiemy dodatkowe więzy wewnętrzne.

Możliwość przejścia do metody elementów skończonych i metody różnic skończonych jest tutaj ułatwiona, ponieważ dyskretyzacja w kierunku grubości warstw (X^3) jest własnością skonstruowanych modeli. Dotychczasowy materiał może stanowić, z jednej strony, punkt wyjścia do analizy ciał warstwowych o strukturach

szczególnych jak np.: periodycznych, sandwiczowych, laminowanych, itp., z drugiej strony, do homogenizacji struktury równań i formowania modeli kontynualnych.

Proponowane warianty teorii mają bezpośrednie zastosowanie do obliczania grubych powłok, płyt i tarcz, niekoniecznie warstwowych. Wówczas "warstwowość" jest umowna i wynika z dyskretyzacji obszaru w kierunku grubości. Przy zwiększaniu liczby umownych warstw, otrzymuje się coraz dokładniejszy ciąg modeli i coraz większą dokładność rozwiązań w ramach tych wariantów teorii. Należy podkreślić, iż nie istnieje żadne podejście do opisu i rozwiązywania problemów elastostatyki i elastodynamiki grubych powłok, płyt i tarcz; można zatem, prezentowane podejście uważać za pewną propozycję i próbę podania teorii.

Proponowane modele mogą być wykorzystane do rozwiązywania tych zagadnień, w ramach teorii dwuwymiarowych, gdzie wprowadza się różne dyskretyzacje w obrębie grubości, w różnych obszarach ciała; wówczas zgodność funkcji deformacji, na granicach odpowiednich przekrojów, zapewniają dodatkowe więzy wewnętrzne dyskutowane w rozprawie.

Sfera bezpośrednich zastosowań inżynierskich, proponowanych wariantów teorii, może być znacznie rozszerzona. Obejmuje ona m.in.: (i) Analizę statyczną i dynamiczną oraz stateczność konstrukcji powierzchniowych, jedno- i wielowarstwowych, gdzie wysoki stopień dokładności obliczeń jest szczególnie ważny (konstrukcje lotnicze, przekrycia obiektów dźwizanych rozpiętości, osłony reaktorów jądrowych, itp.). (ii) Analizę statyczną i dynamiczną materiałów kompozytowych o strukturze warstwowej, jak również projektowanie nowych materiałów o pożądanych własnościach, gdy np. przy zadanych materiałach, poszukuje się optymalnej geometrii wewnętrznej. (iii) Analizę propagacji fal w pewnych obszarach ośrodków geologicznych, w różnych aspektach praktycznych; analiza dynamiczna problemów mechaniki górotworu, w tym prognozowanie katastrof górniczych, itp.

Literatura cytowana w tekście */

1. MARGUERRE K., Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestützten Platte, Ing. Arch., 1933, 4, 332.
2. BURMISTER D. M., General theory of stresses and displacements in layered systems, J. Appl. Phys., 1945, 16, 89.
3. LURE A. I., Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti, "Gostekhizdat", Moskva, 1955.
4. PARIA G., Elastic stress distribution in a three-layered system due to a concentrated force, Bull. Calc. Math. Soc., 1956, 48, 75.
5. EWING W. M., JARDETZKY W. S., PRESS F., Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, New York, 1957.
6. VLASOV V. V., Metod nachalnykh funktsii v zadachakh ravnovesiya tolstykh mnogosloinykh plit, Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdel. tekh. nauk, 1958, 40, 7.
7. KUPRADZE V. D., O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya kusochno-neodnorodnykh tel. Vyvod osnovnykh uravnenii, Soobshch. AN GSSR, 1959, 22, 2, 129-136.
8. BREKHOVSKIKH L. M., Waves in Layered Media, Academic Press, New York, 1960.
9. GUSEIN-ZADE M. I., K postroeniyu teorii izgiba sloistyykh platinok, PMM, 1968, 22, 2, 222-233.
10. BUFLER H., Theory of elasticity of a multilayered medium, J. of Elasticity, 1971, 1, 125-143.
11. NIKISHIN V. S., SHAPIRO G. S., Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti mnogosloinykh sred, Izd. "Nauka", Moskva, 1973.
12. ERINGEN A. C., SUHUBI E. S., Elastodynamics (Linear theory), Vol. II, Academic Press, New York, 1975.
13. NOVOTNY B., Some aspect of numerical analysis of multilayered halfspace, Acta techn., 1975, 4, 382-396.
14. VOROVICH I. I., KADOMTSEV I. G., USTINOV Yu. A., Asimptoticheskaya teoriya mnogosloinykh plit, MFT, 1975, 3.
15. MARCH H. W., NORRIS C. B., SMITH C. B., KUENZI E. W., Buckling of Thin-Walled Plywood Cylinders in Torsion, Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, 1945, Report 1529.

*/ Transliteracja terminów i nazwisk rosyjskich jest zgodna z konwencją w "Applied Mechanics Reviews".

16. AMBARTSUMYAN S. A., Nekotorye osnovnye uravneniya teorii tonkoi sloistoi obolochki, DAN ASSR, 1948, 8, 5.
17. REISSNER E., Contributions to the Problem of Structural Analysis of Sandwich-type Plates and Shells. Theory and Practice of Sandwich Construction in Aircraft. A. Symposium, 1948, Preprint No. 165.
18. HOFF N. J., The Strength of Laminates and Sandwich Structural Elements, Engineering Laminates, ed. A. G. H. Dietz, Wiley, New York, 1949.
19. RIZNICHENKO Yu. V., Seismic Quasi-Anisotropy, Izvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz. i Geogr., 1949, 13, 518-544.
20. KOROLEV V. I., Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannykh plastmass, Inzh. Sbornik AN SSSR, 1955, 22, 98.
21. POSTMA G. W., Wave propagation in a Stratified Medium, Geophysics, 1955, 20, 780-806.
22. WHITE J. E., ANGONA F. A., Elastic Wave Velocities in Laminated Media, J. Acoust. Soc. Amer., 1955, 27, 311-317.
23. RYTOV S. M., Acoustical Properties of a Thinly Laminated Medium, Soviet Phys. Acoustics, 1956, 2, 68-80.
24. LEKHNITSKII S. G., Anizotropnye plastinki, Gostekhizdat, Moskva, 1957.
25. STAVSKY Y., On the theory of Heterogeneous Plates, doctoral thesis, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1959.
26. DONG S. B., PISTER K. S., TAYLOR R. L., On the theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates, J. Aerospace Sciences, 1962, 29, 969-975.
27. BOLOTIN V. V., Vibration of Layered Elastic Plates, Proceedings of Vibration Problems PAN, 1963, 4, 331-346.
28. VOROVICH I. I., Ob obshchikh predstavleniyakh reshenii uravnenii teorii mnogoslownykh anizotropnykh obolochek, PMM, 1965, 29, 4.
29. SUN C. T., ACHENBACH J. D., HERRMANN G., Time Harmonic Waves in a Stratified Medium Propagating in the Direction of the Layering, J. Appl. Mech., June 1968, 35, 408-411.
30. ERINGEN A. C., SUHUBI E. S., Nonlinear theory of Simple Microelastic Solids, I, II, Int. J. Engng. Sci., 1964, 2, 189-203, 389-404.
31. MINDLIN R. D., TIERSTEN H. F., Effect of Couple-stresses in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, 11, 415-448.

32. MINDLIN R. D., Micro-structures in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, 16, 51-78.
33. MINDLIN R. D., MEDICK M. A., Extensional Vibrations of Elastic Plates, J. Appl. Mech., 1959, 26, Trans. ASME, 81, Ser. E, 561-569.
34. ACHENBACH J. D., SUN C. T., HERRMANN G., On the vibrations of a laminated body, J. Appl. Mech., 1968, 35, 689-696.
35. SUN C. T., ACHENBACH J. D., HERRMANN G., Continuum theory for a laminated medium, J. Appl. Mech., 1968, 35, 467-475.
36. GROF R. A., ACHENBACH J. D., Large deformations of a laminated composite, Int. J. Solids Structures, 1970, 6, 641-659.
37. SUN C. T., Theory of Laminated Plates, J. Appl. Mech., 1971, 38, 1, 231-238.
38. DRUMHELLER D. S., BEDFORD A., Wave propagation in elastic laminates using a second order microstructure theory, Int. J. Solids Structures, 1974, 10, 61-76.
39. BEDFORD A., STERN M., Toward a Diffusing Continuum Theory of Composite Materials, J. Appl. Mech., 1971, 38, 8-14.
40. BEDFORD A., STERN M., A Multi-continuum Theory for Composite Elastic Materials, Acta Mechanica, 1972, 14, 85-102.
41. STERN M., BEDFORD A., Wave Propagation in Elastic Laminates Using a Multi-continuum Theory, Acta Mechanica, 1972, 15, 21-38.
42. HEGEMIER G. A., On a Theory of Interacting Continua for Wave Propagation in Composites, Dynamics of Composite Materials, The American Society of Mechanical Engineers, E. H. Lee (ed.), New York, 1972, 70-121.
43. HEGEMIER G. A., NAYFEH A. H., A continuum Theory for Wave Propagation in Laminated Composites, Case 1: Propagation Normal to the Laminates, J. Appl. Mech., 1973, 40, 503-510.
44. HEGEMIER G. A., BACHE T. C., A continuum Theory for Wave Propagation in Laminated Composites, Case 2: Propagation Parallel to the Laminates, J. Elasticity, 1973, 3, 125-140.
45. HERRMANN G., KAUL R. K., DELPH T. J., On continuum modeling of the dynamic behaviour of layered composites, Arch. Mech., 1976, 28, 405-421.
46. HERRMANN G., DELPH T. J., KAUL R. K., New results on continuum modeling of composites, Proc. 2nd Int. Symposium, Continuum Models of Discrete Systems. (to be published).

47. McNIVEN H. D., MENGI Y., A Mathematical Model for the Linear Dynamic Behaviour of Two Phase Periodic Materials, *Int. J. Solids Structures*, 1979, 15, 271-280.
48. Mc NIVEN H. D., MENGI Y., A Mixture Theory for Elastic Laminated Composites, *Int. J. Solids Structures*, 1979, 15, 281-302.
49. Mc NIVEN H. D., MENGI Y., Propagation of Transient Waves in Elastic Laminated Composites, *Int. J. Solids Structures*, 1979, 15, 303-318.
50. BACZYŃSKI Z. F., Nieliniowa teoria powłok sprężystych jako ośrodków z więzami, *Prace IPPT PAN*, 1973, 19, 1-19.
51. BACZYŃSKI Z. F., A new approach to nonlinear shell theory, *Proceedings of the IASS Symposium on "Folded Plates and Spatial Structures"*, CISM (Centre International des Sciences Mecaniques), Udine, Italy, 1974, pp. 1-16.
52. BACZYŃSKI Z. F., Structure of Equations and Estimation of Solutions in Non-linear Shell Theory, *Arch. Mech.*, 1975, 27, 3, 375-384.
53. BACZYŃSKI Z. F., On the nonlinear theory of thick composite shells, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn.*, 1975, 23, 10, 33-40.
54. BACZYŃSKI Z. F., On the non-linear theory of composite shells, *ZAMM*, 1976, 56, 3, T96-T98.
55. BACZYŃSKI Z. F., Nonlinear theory of elastic shells as constrained continua, *Proceedings of the Second National Congress on "Theoretical and Applied Mechanics"*, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria, 1976, vol. 2, 75-84.
56. BACZYŃSKI Z. F., Non-linear discrete-continuous model of elastic layered medium, *ZAMM*, 1978, 58, 3, T193-T195.
57. BACZYŃSKI Z. F., On the nonlinear discrete-continuous model of elastic layered bodies, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn.*, 1978, 26, 4, 193-199.
58. BACZYŃSKI Z. F., On modeling the dynamics of elastic layered bodies, *ZAMM*, 1980, 60, 6, T95-T97.
59. BACZYŃSKI Z. F., On wave propagation in an elastic layer with kinematic constraints, *ZAMM*, 1982, 62, 8, 409-412.
60. BACZYŃSKI Z. F., Przyczynek do dyskusji nt.: "Powłoki grube" *Zeszyty Naukowe WSI w Opolu*, 1983, nr 90, Ser. Konferencje. Budownictwo., z.19, 1-4.
61. BACZYŃSKI Z. F., On elastodynamics of thick composite shells, *ZAMM*, 1984, 84, T106-T108.

62. WOŹNIAK C., Constrained continuous media I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 1973, 21, 3, 109-116; 4, 167-173; 4, 175-182.
63. WOŹNIAK C., Bodies reinforced by thin discrete layers, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn., 1975, 23, 4, 201-205.
64. WOŹNIAK C., Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego, Cz. I, Kontinua z więzami geometrycznymi, Prace IPPT PAN, Warszawa, 1975.
65. WOŹNIAK C., On the formation of simplified theories of solid mechanics, Arch. Mech., 1979, 31, 6, 879-905.
66. WOŹNIAK C., Large deformation of elastic and non-elastic plates, shells, and rods, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1980, März, 20, 1-178.
67. WOŹNIAK C., KLEIBER M., Nieliniowa Mechanika Konstrukcji, PWN, Warszawa-Poznań, 1982.
68. KOLCHIN G. B., FAVERMAN E. A., Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel (bibliograficheskii ukazatel), Izd. "Shtiintsa", Kishinev, 1972.
69. AMBARTSUMYAN S. A., Contributions to the Theory of Anisotropic Layered Shells, Appl. Mech. Rev., 1962, 15, 245-249.
70. HABIP L. M., A review of recent works on multilayered structures, Int. J. Mech. Sci., 1965, 7, 589-593.
71. HABIP L. M., A review of recent Russian Works on Sandwich Structures, Int. J. Mech. Sci., 1964, 6, 483-487.
72. HABIP L. M., A survey of modern developments in the analysis of sandwich structures, Appl. Mech. Rev., 1965, 18, 2, 93-98.
73. GRIGOLUK E. I., KOGAN F. A., Sovremennoe sostoyanie teorii mnogosloynnykh obolochek, Prikl. Mech., 1972, 8, 6.
74. BERT C. W., FRANCIS P. H., Composite Material Mechanics; Structural Mechanics, AIAA Journal, 1974, 12, 9, 1173-1186.
75. PLANTEMA F. J., Sandwich Construction, J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
76. ASHTON J. E., WHITNEY J. M., Theory of laminated plates, Westport, Connecticut, Technomic, 1970.
77. HERRMANN G., ACHENBACH J. D., Wave Propagation in Laminated and Fiber-reinforced Composites, Mechanics of Composite Materials, Pergamon Press, New York, 1970.

78. LEE E. H., Dynamics of composite materials, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1972.
79. SENDECKYI G. P., Mechanics of Composite Materials, Academic Press, New York-London, 1978.
80. BOLOTIN V. V., NOVICHKOV Yu. N., Mekhanika mnogoslownykh konstruksii, Izd. "Mashinostroenie", Moskva, 1980.
81. CHRISTENSEN R. M., Mechanics of composite materials, J. Wiley and Sons, New York, 1982.
82. MARSDEN J. E., HUGHES T. J. R., Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
83. STAKGOLD I., Boundary value problems of mathematical physics, Vol. II, Macmillan, New York, Collier-Macmillan, London, 1968.
84. NOVOZHILOV V., FINKELSHTEIN P., O pogreshnosti gipotez Kirkgoffa v teorii obolochek, PMM, 1943, 2, 331-340.

MATHEMATICAL MODELS OF ELASTOMECHANICS OF LAYERED BODIES
(Summary)

The aim of the thesis is to give a method of constructing mathematical models of elastomechanics of layered bodies of an arbitrary geometry made of a finite number of generally nonhomogeneous and anisotropic layers. The method is based on a nonclassical three-dimensional theory of continuum with constraints and it covers modeling of a three-dimensional layered body on various levels of generality starting from a nonlinear theory of large deformations and arbitrary structure of layers and ending up with a linear theory of small deformations and plane structure of layers; the main idea being replacement of a three-dimensional layered body theory by a two-dimensional one. In particular, a model of dynamics of thick shells, plates and layers is presented in which no "a priori" hypothesis on smallness of the ratio of layer thickness to other dimensions of the body is introduced. Also, an analysis of correctness of the models, formulations of initial-boundary value problem for the models and some associated theorems are given.

Two particular models are discussed in detail: the first one describes a nonlinear elastostatics of thick cylindrical shell and the second concerns a linear elastodynamics of thick plane layer. The contents of the thesis is as follows.

In Chapter 1 a motivation for undertaking by the author of the study on the layered body problems together with an updated survey on modeling of layered bodies, the aim of the thesis and its brief description are given. In Chapter 2 a general method of constructing models of elastomechanics of layered bodies is proposed. Introducing a number of definitions and hypothesis from a nonlinear three-dimensional theory of continuum with constraints and following a formalism of the theory, basic equations describing a model of layered body are derived; a generality of the model lies in the general hypothesis on the kinematical constraints, constitutive relations, internal geometry and choice of generalized coordinates.

Chapter 3 is a continuation of the previous one in which a theory of finite elastic deformations of layered body listing basic generalized coordinates and kinematical constraints imposed on the deformations is proposed; the basic equations governing the model cover now a body of arbitrary layered structure with linear kinematical constraints. In Chapter 4 the basic equations of elastodynamics referred to cartesian coordinates are transformed to convected curvilinear coordinates. The basic system of equations referred to moving surfaces in current configuration consists of: (i) Equations of motion and kinetic boundary conditions in terms of generalized forces; (ii) Constitutive relations and definitions of generalized forces; (iii) Equations of constraints including an ideality condition on the generalized coordinates. In Chapter 5 the basic equations of the incremental theory of finite elastic deformations based upon those of Chapters 3 and 4 are derived. The derivation rests on the hypothesis that there is a configuration of the body in a neighbourhood of which one can compute increments of the deformation, strain and stress tensor, and postulate an incremental form of the constitutive relations for small increments. Chapter 6 is devoted to a theory of small elastic deformations in layered bodies with arbitrary internal structure. A natural configuration of the body is introduced in a neighbourhood of which the increments of Green deformation tensor and of Green-Saint Venant deformation tensor are defined, and an incremental form of the constitutive relations is postulated. The remaining equations of the theory are obtained by linearizations of corresponding nonlinear equations of Chapters 3 and 4. In Chapter 7 a nonlinear elastodynamics of thick shells as a limiting theory of nonlinear elastodynamics of layered bodies is discussed. The theory describes a class of the initial-boundary value problems with the kinematical constraints of more general type than those of Reissner. For a particular initial-boundary value problem a formal procedure of solution is given, and an error between the approximate solution and that of a three-dimensional theory is discussed. In Chapter 8 an illustration of the theory of Chapter 7 is presented in which inertia terms are rejected and the shell

has the form of a thick hollow cylinder of infinite length. A boundary value problem with constraints is formulated in which the shell made of a homogeneous and orthotropic material is subject to a shear deformation, and a solution of this problem: i.e. the stress components, voluminal and surface reaction forces due to the constraints are obtained. The particular case of the solution for a homogeneous and isotropic shell, a linear case as well as an error of the approximate solution in terms of the norms for reaction forces/loads are discussed in details. Chapter 9 is devoted to derivation of the governing equations for a linear layered model of elastodynamics of arbitrary geometry. The derivation is based on linearization of the equations for small deformations from Chapter 6 in a neighbourhood of a natural state of the body. In Chapter 10 a linear theory of one and many layers bodies of plane structure is proposed. The basic equations are obtained from the linearized equations around a natural configuration. The body is parametrized first by the normal curvilinear coordinates and next with the aid of a cartesian system of coordinates. For the sake of clarity the generalized cross section forces are redefined, and the basic equations are transformed to such a form that the initial-boundary value problems of the linear elastodynamics of layered bodies can be easily formulated. Chapter 11 is devoted to formulation of several types of the initial-boundary value problems discussed in Chapter 10. Stress is made on the reduction of a problem for a three-dimensional body with constraints to that of a two-dimensional theory, and on recovering the three-dimensional results from the two-dimensional ones. Completeness of the two-dimensional initial-boundary value problems is discussed in some detail. In Chapter 12 the two-dimensional processes of linear elastodynamics of layered bodies are defined; a traction initial-boundary value problem is formulated and some theorems are proved. In particular, a theorem of power and energy, some auxiliary theorems and a uniqueness theorem for the traction initial-boundary value problem are proved. The last result relies on the hypothesis of symmetry and positive semi-definiteness of the compliance tensor for any of the layers.

the body is made of. The hypothesis is discussed in detail in Chapter 13 in which it is shown that for a body made of the homogeneous and isotropic layers the usual inequalities for the Lamé moduli imply validity of the hypothesis and invertibility of the constitutive relations. In Chapter 14 the displacement equations of the linear theory are derived. A system of $(25r + 3)$ field equations for the body made of r layers is reduced to $3(r + 1)$ displacement equations of motion of the Navier type subject to the same number of the kinetic boundary conditions. Next the system is decomposed into two independent systems of the Klein-Gordon type subject to suitable kinetic boundary conditions. The systems correspond to a generalized plane symmetric process (compressional), and a generalized plane antisymmetric process (flexural), respectively. In Chapter 15 the motion of a single layer reduced to a motion of the two planes bounding the layer is discussed. According to the results of Chapter 14 such a motion is a sum of a disc and plate like motions. For these two types of motion the propagation conditions for a plane monochromatic wave are established and the wave speed formulae are obtained. In Chapter 16 the main results of the thesis are listed, and some cognitive and practical (engineering) values of the results are discussed. It is pointed out that the theory presented could be a starting point for a further study and for solving practical problems in various fields.

Spis treści

1. Wprowadzenie.....	3
2. Konstruowanie modeli ciał warstwowych metodą więzów.....	10
3. Teoria dużych odkształceń sprężystych ciał warstwowych...24	
4. Transformacja równań podstawowych z kartezjańskiego do konwekcyjnego układu współrzędnych.....	34
5. Podstawowe równania teorii dużych odkształceń sprężystych w postaci przyrostowej.....	46
6. Teoria małych odkształceń sprężystych ciał warstwowych...52	
7. Teoria nieliniowa grubych powłok sprężystych.....	61
8. Problem elastostatyki grubej powłoki walcowej. Oszacowanie dokładności rozwiązania problemu brzegowego..	69
9. Linearyzacja podstawowych równań elastodynamiki.....	88
10. Teoria liniowa ciał warstwowych o strukturze płaskiej...107	
11. Formułowanie problemów brzegowo-początkowych w liniowej elastodynamice ciał warstwowych.....	127
12. Niektóre twierdzenia elastodynamiki ciał warstwowych. Jednoznaczność rozwiązań problemów brzegowo-początkowych.....	138
13. Analiza dodatniej pół-określoności tensora sztywności. Ograniczenia stałych materiałowych.....	150
14. Podstawowe równania teorii liniowej w przemieszczeniach. Dekompozycja równań przemieszczeniowych.....	159
15. Problem propagacji fal monochromatycznych w grubej warstwie płaskiej.....	173
16. Podsumowanie.....	187
Literatura cytowana w tekście.....	191
Streszczenie (w jęz. angielskim).....	197