

49/1980

M. Matczyński, M. Sokółowski

CAŁKA J I SIŁY UOGÓLNIONE
DZIAŁAJĄCE NA SZCZELINĘ

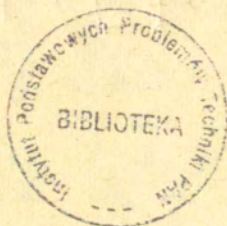
P. 269



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 listopada 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 49/1980 r.



57112



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Makład 170 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,5.

Oddano do drukarni w listopadzie 1980r.

Nr zamówienia

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

CAŁKA J I SIŁY UOGÓLNIONE DZIAŁAJĄCE NA SZCZELINĘ

Opierając się na pracach J.D.Eshelby'ego [5,6] i H.Zorskiego [7] obliczono podłużne siły uogólnione działające na szczeliny płaskie w ośrodkach sprężystych. Pokazano, że otrzymane wyniki są identyczne z wynikami klasycznej analizy procesu pęknięcia opartej na pojęciu całki J wprowadzonej przez J.R.Rice'a [4]. Wnioski te potwierdzają późniejsze prace J.R.Rice'a i J.D.Eshelby'ego, [11,12].

Generalized forces acting in the longitudinal direction on plane cracks in elastic media are calculated on the basis of the papers by J.D.Eshelby [5,6] and H.Zorski [7]. The results obtained are shown to coincide with those derived by means of classical fracture analysis based on the notion of J -integrals as introduced by J.R.Rice [4] in 1968. The results are in agreement with later results obtained by J.D.Eshelby and J.D. Rice.

1. WSTĘP

Klasyczna, fenomenologiczna teoria kruchego pęknięcia oparta jest w zasadzie na podstawowej hipotezie Griffitha [1] dotyczącej stateczności szczelin. Jej główne tezy sformułować można w sposób następujący.

/a/ Całe ciało zawierające szczeliny zachowuje się w zasadzie jako klasyczny ośrodek sprężysty z wyjątkiem bezpośrednich otoczeń wierzchołków szczelin, w których zachodzi proces pęknięcia.

/b/ Rozwój szczelin następuje zgodnie z zasadą minimum uogólnionej energii potencjalnej V^* układu.

/c/ Wyrażenie na uogólnioną energię potencjalną V^* zawiera, poza zwykłymi członami elastostatycznymi oznaczonym symbolem

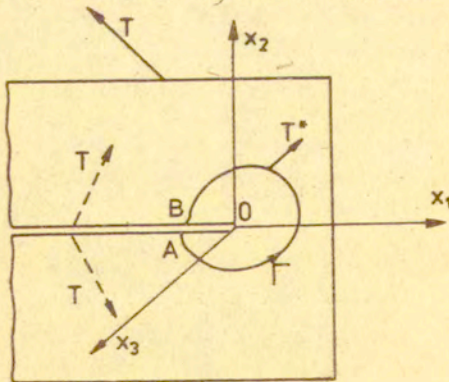
V , jedyny człon dodatkowy $\gamma \Delta S$:

$$/1.1/ \quad V^* = V + \gamma \Delta S = \int_V \bar{u} dV - \int_{S_e} T_i u_i dS + \gamma \Delta S.$$

We wzorze tym \bar{u} oznacza gęstość /sprężystej/ energii odkształcenia, $T_i = \sigma_{ji} n_j$ - składowe wektora naprężenia, u_i - składowe wektora przemieszczenia, S_e jest tą częścią powierzchni S ograniczającej objętość V , na której warunki brzegowe wyrażone są w naprężeniach. ΔS jest wolną od naprężeń powierzchnią utworzoną w procesie propagacji szczeliny, zaś γ oznacza energię powierzchniową /napięcie powierzchniowe/.

Opierając się na tych podstawowych założeniach szereg autorów doprowadziło teorię kruchego /lub, z pewnymi ograniczeniami, quasi-kruchego/ pęknięcia do jej obecnego stanu, w którym stanowi ona dość ogólne, efektywne i doświadczalnie potwierdzone narzędzie do badania pewnych klas procesów propagacji szczelin. Bez wchodzenia w szczegóły tego rodzaju /Czytelnika odsyłamy tu do bogatej literatury problemu zawartej np. w monografii [2] /, ograniczymy się jedynie do przedstawienia podstawowych pojęć i wyników, które wykorzystywać będziemy w dalszej części pracy.

Pole naprężeń zawiera w wierzchołku szczeliny punkt słabej osobliwości rzędu 1/2. Rozważmy ciało zawierające szczelinę zajmującą półpłaszczyznę $x_1 < 0$, $x_2 = 0$. Na rys.1 przedstawiającym przekrój ciała płaszczyznę $x_3 = \text{const}$, szczelina zajmuje półoś



Rys.1

ujemną $x_1 < 0$ i składa się z dwóch krawędzi $x_2=0^+$ i $x_2=0^-$ odpowiadających górnej i dolnej powierzchni szczeliny i połączonych w wierzchołku $x_1=x_2=0$. Jeśli obciążenia przyłożone do ciała /siły powierzchniowe/ nie zależą od zmiennej x_3 , to powstały w nim płaski lub antypłaski stan odkształcenia można zawsze przedstawić w postaci sumy trzech podstawowych typów odkształcenia szczeliny oznaczanych wskaźnikami I, II, III. Odpowiadające tym typom naprężenia i przemieszczenia szczeliny w bezpośrednim otoczeniu jej wierzchołka przedstawić można następującymi wzorami asymptotycznymi:

Typ I:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x_1}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^+,$$

/1.2.1/

$$u_2(x_1, 0^\pm) \sim \pm \frac{2(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^-,$$

Typ II:

$$\sigma_{21}(x_1, 0) \sim \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x_1}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^+,$$

/1.2.2/

$$u_1(x_1, 0^\pm) \sim \pm \frac{2(1-\nu)}{\mu} K_{II} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^-,$$

Typ III:

$$\sigma_{23}(x_1, 0) \sim \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi x_1}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^+,$$

/1.2.3/

$$u_3(x_1, 0^\pm) \sim \pm \frac{2}{\mu} K_{III} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} + \dots \quad \text{dla } x_1 \rightarrow 0^-.$$

Człony pominięte w powyższych rozwinięciach są regularne w punkcie $x_1=0$ i ich rząd przewyższa o jednąć rząd odpowiednich członów wiodących. Podwójne znaki we wzorach na przemieszczenia wskazują, że odpowiednie składowe przemieszczeń doznają skoku na szczelinie. Współczynniki K_m , $m=I, II, III$, są współ-

czynnikami intensywności naprężeń, μ jest stałą Lamégo, a ν - liczbą Poissona.

Innym ważnym parametrem charakteryzującym warunki propagacji szczeliny jest współczynnik wyzwalań energii \mathcal{G} wprowadzony przez Irwina [3]; określa on stosunek ubytku energii potencjalnej $-dV$ układu do odpowiadającego mu infinitezimalnego wydłużenia Δl szczeliny,

$$/1.3/ \quad \mathcal{G} = - \frac{dV}{d\ell}$$

Wielkość \mathcal{G} można wyrazić również przez współczynniki intensywności naprężeń; np. w złożonym stanie płaskiego i antypłaskiego odkształcenia pokazanego na rys.1 i dla szczeliny rozprzesztrzeniającej się prostoliniowo,

$$/1.4/ \quad \mathcal{G} = \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2$$

Przy rozważaniu problemów pęknięcia bardzo użytecznym narzędziem analizy staje się całka J wprowadzona w 1968 r. przez J.R.Rice'a [4]. Posługując się w dalszym ciągu oznaczeniami rys.1 całkę tę można napisać w postaci

$$/1.5/ \quad J = \int_{\Gamma} [\bar{U} dx_2 - T_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds]$$

Całkę krzywoliniową w tym wzorze obliczamy wzdłuż odcinka krzywej Γ o punkcie początkowym na dolnej krawędzi szczeliny, a punkcie końcowym na jej górnej powierzchni, A i B. Jeśli krawędzie te na odcinku między punktami A, B i wierzchołkiem szczeliny są wolne od obciążeń, to można pokazać /Rice [2] /, że

$$/1.6/ \quad J = \mathcal{G}$$

co pozwala, przy wykorzystaniu wzorów /1.4/ i /1.5/, przeprowadzić odpowiednie doświadczenia i eksperymentalnie wyznaczyć współczynniki wyzwalań energii lub współczynniki intensywności naprężeń.

Zagadnienie szczelin można jednak rozpatrywać również jako przypadek szczególny ogólniejszego problemu defektów ciała stałego. Tego rodzaju podejście zapoczątkował w latach 1953-56

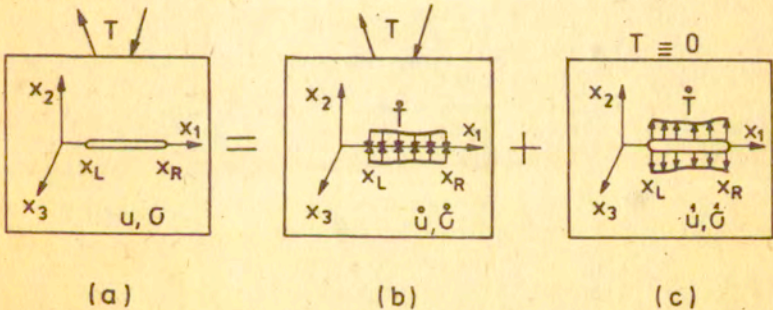
J.D.Eshelby [5,6], który wyprowadził równania ruchu takich defektów jak inkluzje i dyslokacje stosując przy tym pojęcie siły uogólnionej działającej na defekt. Tę drogę postępowania podjął H.Zorski, który w 1966 roku opublikował obszerną pracę [7] na temat ogólnej teorii defektów. Jeśli rozpatrywać szczelinę jako szczególnego rodzaju defekt, to składowe siły wywieranej na szczelinę obliczać można ze wzoru

$$/1.7/ \quad F_{\alpha\alpha}^i = 2 \frac{\delta}{\delta \zeta^i} W \left\{ \underline{u}, \underline{u} \right\},$$

w którym W jest funkcjonalem Lagrange'a wyrażonym przez składowe pola przemieszczeń własnych \underline{u} szczeliny, a ζ^i - składowymi wektora wodzącego powierzchni szczeliny $S_{\alpha\alpha}$.

2. SIŁY UOGÓLNIONE DZIAŁAJĄCE NA SZCZELINĘ

Dla uproszczenia dalszych rozważań ograniczymy się do przypadku pojedynczej szczeliny pasmowej o skończonej długości: $x_L < x_1 < x_R$, $x_2 = 0$ /Rys.2a/. Ciało poddane jest płaskiemu oraz/albo antypłaskiemu stanowi odkształcenia po obciążeniu siłami T_i



Rys.2

przyłożonymi poza powierzchnią szczeliny. Rozważania zawężymy również do zagadnień statycznych lub ruchu ustalonego co oznacza, że obciążenia, położenie szczeliny i warunki brzegowe są albo niezależne od czasu, albo poruszają się ze stałą prędkością v w kierunku osi x_1 ; w tym przypadku wprowadzenie kon-

wekcyjnego układu odniesienia pozwala nam wyeliminować z rozważań parametr czasu.

Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego na rys.2a przedstawić można jako sumę rozwiązań dwóch prostszych zagadnień:

/1/ - Ciało obciążone jest siłami zewnętrznymi T_i i nie zawiera szczeliny /Rys.2b/; odpowiednie naprężenia i przemieszczenia oznaczamy $\hat{\sigma}_{ij}$ i \hat{u}_i . Wektor naprężeń obliczony dla powierzchni $x_L < x_1 < x_R$, $x_2 = 0$ określamy symbolem $p_i = \hat{\sigma}_{ji} n_j$.

/2/ Ciało zawierające szczelinę obciążone jest wyłącznie na jej powierzchniach siłami $-p_i(x_1)$ /Rys.2c/; odpowiednie naprężenia i przemieszczenia we wnętrzu ciała oznaczamy $\hat{\sigma}_{ij}$ i \hat{u}_i .

Następnie całe zagadnienie przedstawiamy jako superpozycję trzech prostszych zagadnień, z których każde odpowiada jednemu z trzech podstawowych typów odkształcenia szczeliny, I, II lub III.

Rozkład obciążeń szczeliny przedstawić więc można także w postaci sumy $p_i(x_1) = p_I(x_1) + p_{II}(x_1) + p_{III}(x_1)$, $p_I = p_2$, $p_{II} = p_1$, $p_{III} = p_3$, gdzie rzymskie wskaźniki odnoszą się do odpowiednich typów odkształcenia. Przy tych założeniach poziomą składową $F^1 = F^1_{\alpha\alpha}$ siły określonej wzorem /1.7/ wyrazić można w postaci

$$F^1 = F^1_I + F^1_{II} + F^1_{III}$$

/2.1/

$$F^1 = - \int_{x_L}^{x_R} \left\{ p_I \frac{d}{dx_1} [\hat{u}_2] + p_{II} \frac{d}{dx_1} [\hat{u}_1] + p_{III} \frac{d}{dx_1} [\hat{u}_3] \right\} dx_1.$$

Tutaj $p_m = p_m(x_1)$, a symbole $[\hat{u}_i] = [\hat{u}_i(x_1, x_2)]_{x_2=0}$ oznaczają skoki /nieciągłości/ przemieszczeń \hat{u}_i na powierzchni szczeliny,

$$[\hat{u}_i] = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \hat{u}_i(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \hat{u}_i(x_1, x_2).$$

W szczególnym przypadku $i=2$, $[\hat{u}_2]$ jest rozwarciem szczeliny, które jest z założenia dodatnią funkcją x_1 .

Składową pionową F^2 siły \hat{F} nie będziemy się w tej pracy zajmować. Należy jednak wspomnieć, że - przeciwnie niż w przypadku opisanym równaniem /2.1/ - do składowych tych nie stosuje się zasada superpozycji przy obciążeniu szczeliny kombinacją

sił P_I , P_{II} i P_{III} . W przypadku czystych typów obciążenia I, II lub III składowe pionowe siły uogólnionej /1.7/ tożsamościowo znikają,

$$F_I^2 = F_{II}^2 = F_{III}^2 = 0$$

pódczas gdy np. dla typu mieszanego I,II otrzymujemy

$$/2.2/ \quad F_{I-II}^2 = \int_{x_L}^{x_R} \left\{ p_I \frac{d}{dx_1} [\dot{u}_1] + p_{II} \frac{d}{dx_1} [\dot{u}_2] \right\} dx_1.$$

Ograniczmy się teraz do prostego przypadku czystego typu odkształcenia szczeliny I. Z równania /2.1/ otrzymujemy wtedy

$$F_I^1 = - \int_{x_L}^{x_R} p_I(x_1) \frac{d}{dx_1} [u_2(x_1, 0)] dx_1,$$

przy czym $p_I(x_1) = \sigma_{22}^e(x_1, 0)$ oznacza normalną składową naprężenia obliczoną z prostego zagadnienia brzegowego pokazanego na rys.2b. Funkcja podcałkowa jest gęstością f_I^1 siły uogólnionej działającej na szczelinę,

$$/2.3/ \quad F_I^1 = \int_{x_L}^{x_R} f_I^1(x_1) dx_1, \quad f_I^1 = -p_I(x_1) \frac{d}{dx_1} [u_2(x_1, 0)].$$

Zakładając, że $p_I(x_1)$ jest funkcją znaną oraz czyniąc dodatkowo założenie upraszczające, że rozważane ciało jest nieskończone, możemy skorzystać np. ze wzorów podanych w pracy M.Maczyńskiego [8] i podać wzór zamknięty na rozwarcie szczeliny,

$$/2.4/ \quad [u_2(x_1, 0)] = \frac{2(1-\nu)}{\mu} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\bar{p}_I(\xi)}{\sqrt{(\xi-x_L)(x_R-\xi)}} d\xi,$$

w którym

$$/2.5/ \quad \bar{p}_I(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\sqrt{(t-x_L)(x_R-t)}}{t-\xi} p_I(t) dt.$$

Wstawiając zależności /2.4/, /2.5/ do wzoru /2.3/ otrzymujemy

$$/2.6/ \quad F_I^1 = \frac{-2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{x_L}^{x_R} \frac{p_I(x_1) dx_1}{\sqrt{(x_1-x_L)(x_R-x_1)}} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\sqrt{(t-x_L)(x_R-t)}}{t-x_1} p_I(t) dt.$$

Równanie /2.6/ można teraz przekształcić zgodnie ze sposobem omówionym w pracach [8,9], co doprowadza nas do wyniku

$$/2.7/ \quad F_I^1 = \frac{1-\nu}{2\mu} [(K_I^R)^2 - (K_I^L)^2].$$

Tutaj K_I^L , K_I^R są współczynnikami intensywności naprężenia wprowadzonymi we wzorce /1.2/ odnoszącymi się do lewego /L/ i prawego /R/ wierzchołka szczeliny, a określonymi wzorami

$$K_I^L = \sqrt{\frac{2}{\pi(x_R-x_L)}} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\frac{x_R-\xi}{\xi-x_L}} p_I(\xi) d\xi,$$

/2.8/

$$K_I^R = \sqrt{\frac{2}{\pi(x_R-x_L)}} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\frac{\xi-x_L}{x_R-\xi}} p_I(\xi) d\xi.$$

Gdyby w jednym z wierzchołków nie występowała koncentracja naprężeń, a więc gdyby np. $K_I^L = 0$, to wtedy wzór /2.7/ uprościłby się do postaci

$$/2.9/ \quad F_I^1 = \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^R)^2.$$

Wzór ten można z kolei łatwo uogólnić na przypadek złożonego typu odkształcenia szczeliny I, II, III /por. [8,9]/,

$$/2.10/ \quad F^1 = \frac{1-\nu}{2\mu} [(K_I^R)^2 + (K_{II}^R)^2] + \frac{1}{2\mu} (K_{III}^R)^2.$$

Podobne rozważania przeprowadzone w odniesieniu do składowej pionowej siły uogólnionej potwierdzają nasze wcześniejsze stwierdzenie, że w przypadku czystego typu odkształcenia I

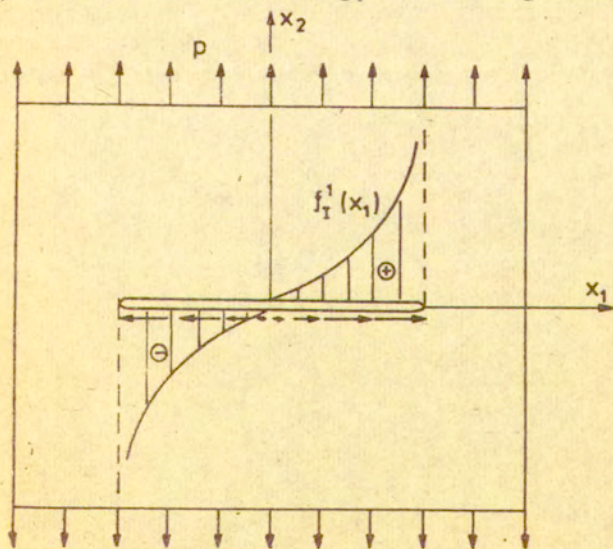
$F_I^2 = f_I^2 = 0$, podczas gdy w przypadku typu złożonego I-II otrzymamy

$$F_{I-II}^2 = - \frac{1-\nu}{\mu} (K_I^R K_{II}^R - K_I^L K_{II}^L).$$

Wzór /2.9/ stosuje się również do przypadku szczeliny półnieskończonej $x_1 < x_R$ /czyli $x_L \rightarrow -\infty$ / pod warunkiem, że obciążenia zewnętrzne znikają przy $x_1 \rightarrow -\infty$, dzięki czemu również $K_I^L = 0$. Prawostronny współczynnik intensywności naprężeń obliczamy wtedy z prostego wzoru

$$K_I^R = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{x_R} \frac{p_I(\xi)}{\sqrt{x_R - \xi}} d\xi.$$

Należy tu podkreślić, że w przypadku obciążenia symetrycznego /np. rozłożonego równomiernie/, siła F_I^1 obliczona ze wzoru /2.7/ równa się zero, ponieważ $K_I^L = K_{II}^R$. Nie oznacza to jednak, że zanika tożsamościowo gęstość sił uogólnionych roz-



Rys. 3

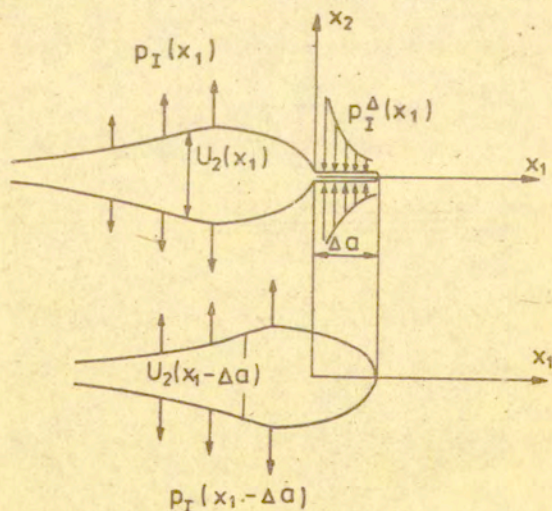
łożonych wzdłuż szczeliny. I tak np. w przypadku szczeliny $|x_1| < a$ o długości $2a$ umieszczonej w nieograniczonej płaszczyźnie poddanej równomiernemu rozciąganiu w nieskończoności obciążeniem p /rys.3/, rozkład sił f_I^1 wzdłuż szczeliny wyraża się prostym wzorem

$$f_I^1(x_1) = \frac{2(1-\nu)p^2}{\mu} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}$$

Z klasycznej teorii pęknięcia wiadomo, że stateczność szczeliny zależy od wielkości współczynników intensywności naprężeń K_{Im} . W tym sensie wzory /2.7/ - /2.10/ podające wartość siły uogólnionej działającej na szczelinę uzyskują dodatkową interpretację fizyczną: gdy siły te osiągną pewną krytyczną wielkość, szczelina zaczyna się rozprzestrzeniać; w przeciwnym przypadku pozostaje ona w spoczynku.

3. BILANS ENERGETYCZNY DLA CAŁEGO OBSZARU SZCELINY

Rozważmy teraz ośrodek nieskończony zawierający szczelinę półnieskończoną $x_1 < \Delta a$, $x_2 = 0$, rys.4. Załóżmy dla prostoty, że szczelina odkształca się zgodnie z typem I, pod działaniem



Rys.4

sił normalnych działających na powierzchnie szczeliny.

Rozpatrujemy teraz dwa etapy odkształcenia szczeliny. W etapie pierwszym /rys.4a/ lewa część szczeliny $x_1 < 0$ rozwiera się pod działaniem ciśnienia

$$/3.1/ \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = -p_I(x_1).$$

przyłożonego do jej powierzchni. Zakładamy, że funkcja $p_I(x_1)$ znika w nieskończoności, co eliminuje nieskończoną koncentrację naprężeń w $-\infty$. O funkcji $p_I(x_1)$ zakłada się również, że jest ona ciągła w otoczeniu punktu $x_1=0$.

Pozostała część szczeliny $0 < x_1 < \Delta a$ zostaje ściśnięta za pomocą odpowiednio rozłożonego obciążenia $p_I^\Delta(x_1)$ przyłożonego do brzegów; obciążenia te oblicza się na podstawie osobliwego rozkładu naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny późniejszej $x_1 < 0$ rozwieranej ciśnieniem $p_I(x_1)$. Z rozwinięć asymptotycznych /1.2.1/ otrzymujemy

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x_1}} + \dots$$

/3.2/

$$U_2(x_1) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}}.$$

Tutaj $U_2(x_1) = u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-)$ oznacza rozwarcie szczeliny.

Drugi etap obciążania szczeliny /rys.4b/ polega na quasi-statycznym usunięciu obciążeń $p_I^\Delta(x_1)$ wzdłuż odcinka Δa szczeliny i na przesunięciu obciążenia $p_I(x_1)$ o odcinek Δa na prawo. Szczelina rozwiera się aż do punktu $x_1 = \Delta a$ /nowe położenie jej wierzchołka/ i przesuwa się tym samym w prawo o odcinek Δa . Założenia poczynione uprzednio w odniesieniu do obciążenia $p_I(x_1)$ pozwalają teraz stwierdzić, że kształt odkształconych krawędzi pozostaje niezmienny, a rozwarcie szczeliny $U_2'(x_1)$ po zakończeniu drugiego etapu odkształcenia można wyrazić łatwo przez rozwarcie U_2 w etapie pierwszym:

$$/3.3/ \quad U_2'(x_1) = U_2(x_1 - \Delta a).$$

Identyczność kształtu rozwarcia szczeliny w obu etapach jej odkształcenia prowadzi do wniosku, że również odpowiednie rozkłady gęstości energii odkształcenia są w tych etapach identyczne. Tak więc praca wykonana przez obciążenia $p_I(x_1)$ i $p_I^{\Delta}(x_1)$ na odpowiadających im przemieszczeniach musi być równa zeru.

Pracę wykonaną w tym procesie przez siły $p_I(x_1)$ obliczamy ze wzoru /por.wzór /3.3//

$$/3.4/ \quad \mathcal{A}_1 = \int_{-\infty}^0 p_I(x_1) [U_2(x_1 - \Delta a) - U_2(x_1)] dx_1,$$

podczas gdy /ujemna/ praca wykonana przez siły $p_I^{\Delta}(x_1)$ wynosi

$$/3.5/ \quad \mathcal{A}_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi x_1}} + \dots \right) \left[\frac{4(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{\frac{\Delta a - x_1}{2\pi}} + \dots \right] dx_1$$

/por./3.2/ 1. Przy $\Delta a \rightarrow 0$ wyrażenie w nawiasach kwadratowych we wzorze /3.4/ zastąpić można wyrażeniem różniczkowym

$$- \frac{dU_2(x_1)}{dx_1} \Delta a,$$

a w równaniu /3.5/ wystarczy uwzględnić pojedynczy iloczyn wiodących członów rozwinąć asymptotycznych,

$$\frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} K_I^2 \sqrt{\frac{\Delta a - x_1}{x_1}}.$$

Z warunku znikania całkowitej pracy wykonanej przez obciążenia zewnętrzne, $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0$ otrzymujemy równanie

$$/3.6/ \quad - \int_{-\infty}^0 p_I(x_1) \frac{dU_2(x_1)}{dx_1} dx_1 = \frac{1-\nu}{2\mu} K_I^2.$$

Porównanie tego wyniku ze wzorami /2.3/ i /2.9/ wskazuje, że siła uogólniona \mathcal{F} zyskuje prostą i fizycznie oczywistą interpretację jako stosunek pracy wykonanej przez obciążenia przyłożone do powierzchni szczeliny w procesie jej nieskończonego przemieszczenia do pola nowo-utworzonej powierzchni tej szczeliny.

Przeprowadzone tu rozważania można bez trudu uogólnić na przypadek złożonych typów odkształcenia szczeliny I, II, III. Wzór końcowy będzie miał postać

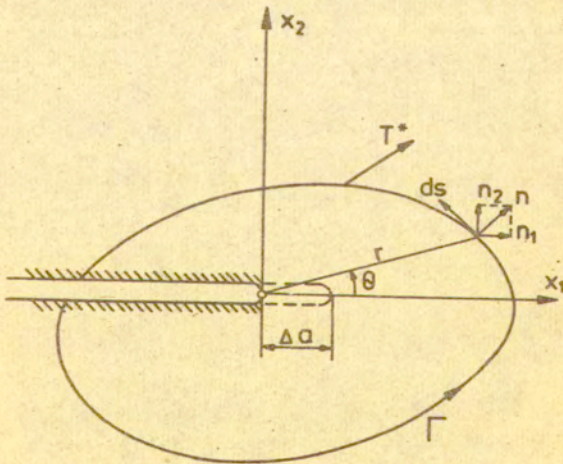
$$13.7/ \quad - \int_{x_L}^{x_R} \left\{ p_I \frac{dU_2}{dx_1} + p_{II} \frac{dU_1}{dx_1} + p_{III} \frac{dU_3}{dx_1} \right\} dx_1 =$$

$$= \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 ,$$

analogiczną do postaci wzorów /2.1/ i /2.10/.

4. BILANS ENERGETYCZNY W OBSZARZE OTACZAJĄCYM WIERZCHOŁEK

Rozważmy teraz bilans energetyczny w obszarze Ω otaczającym wierzchołek $x_1=0$ płaskiej, półnieskończonej szczeliny $x_1 < 0$, $x_2=0$, rys.5. Obszar ten ograniczony jest częściowo łukiem prostym Γ o początku A na dolnej powierzchni szczeliny i końcu B na powierzchni górnej. Pozostała część brzegu to łuk



Rys.5

BOA o początku w punkcie B przechodzący wzdłuż krawędzi szczeliny i przez jej wierzchołek do punktu A. Ta część powierzchni szczeliny jest z założenia wolna od obciążeń. Ponieważ zarazem całe ciało poddane jest płaskiemu oraz/albo antypłaskiemu stanowi odkształcenia /typy I-III/, to ich zachowanie opisać można w płaskim, kartezjańskim lub biegunowym układzie współrzędnych, (x_1, x_2) lub (r, θ) .

Rozpatrzmy teraz dwa położenia szczeliny: z wierzchołkiem w punkcie $x_1=0$ oraz w punkcie $x_1=\Delta a$, a odpowiadające tym położeniom stany przemieszczenia i naprężenia oznaczmy u_i, σ_{ij} oraz u'_i, σ'_{ij} . Jak wiadomo [10], praca $\Delta \mathcal{A}$ wykonana przez siły powierzchniowe $T_i^* = \sigma_{ji} n_j$ na przemieszczeniach $\Delta u_i = u'_i - u_i$ wzdłuż krzywej Γ wyraża się wzorem

$$/4.1/ \quad \Delta \mathcal{A} = -\Delta a \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds,$$

przy czym n_1 jest jednostkowym wektorem normalnym do krzywej Γ ograniczającym obszar Ω , a ds jest liniowym elementem brzegu. Wzdłuż wolnych od obciążeń krawędzi szczeliny BOA praca nie jest wykonywana, a nie będziemy tutaj rozważać fizycznej natury procesu dekohezji zachodzącego na nowopowstających powierzchniach szczeliny.

Przyrost odkształcenia $\Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}$ zachodzący w procesie przemieszczania się szczeliny prowadzi do zmiany wartości energii odkształcenia sprężystego w obszarze Ω , [10]:

$$/4.2/ \quad \Delta U = -\Delta a \int_{\Gamma} \bar{u} n_1 ds = -\Delta a \int_{\Gamma} \bar{u} dx_2,$$

gdzie \bar{u} oznacza gęstość energii odkształcenia

$$/4.2/ \quad \bar{u} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Różnica $\Delta \mathcal{D} = \Delta \mathcal{A} - \Delta U$ oznacza ilość energii dysypowanej w procesie tworzenia się nowej powierzchni szczeliny o długości Δa ; w przypadku idealnie kruchego pęknięcia powinna ona być równa wzrostowi energii powierzchniowej $2\gamma \Delta a$, przy czym γ określa energię powierzchniową właściwą. W ten sposób granica

stosunku $\Delta D / \Delta a$ przy $\Delta a \rightarrow 0$, czyli współczynnik wyzwala-
nia energii \mathfrak{J} , przedstawić można w postaci [4]:

$$/4.4/ \quad \mathfrak{J} = J = \int_{\Gamma} (\bar{u} dx_2 - \sigma_{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) ds,$$

znanej pod nazwą całki J. Udowodniono, że wartość tej całki
nie zależy od drogi całkowania, to znaczy że jej wartość jest
zawsze taka sama jeśli tylko łuk Γ łączy ze sobą punkty A i
B oraz obejmuje wierzchołek szczeliny.

Całkę we wzorze /4.4/ obliczyć można teraz w następujący
sposób. Ograniczmy teraz nasze rozważania do czystego typu I
odkształcenia szczeliny. Funkcję gęstości energii odkształce-
nia /4.3/ wyrazić można w naprężeniach /przy założeniu sprę-
żystych własności ośrodka/ i podstawić do równania /4.4/.
Otrzymujemy wtedy całkę

$$/4.5/ \quad J = \int_{\Gamma} (P n_1 - Q n_2) ds,$$

w której wprowadzono oznaczenia

$$2P = \sigma_{22} u_{2,2} + \sigma_{12} u_{1,2} - \sigma_{11} u_{1,1} - \sigma_{12} u_{2,1},$$

$$Q = \sigma_{12} u_{1,1} + \sigma_{22} u_{2,1}.$$

Następnie naprężenia i przemieszczenia w obszarze ograniczonym
łukiem Γ zastępujemy przez wiodące człony odpowiednich roz-
winięć asymptotycznych; należy tu podkreślić, że człony pominię-
te w ten sposób nie wpływają na wartość rozważanej całki.

Stosując ogólnie znane wyrażenia /por. np. [10]/

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta),$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta),$$

można po dłuższych przekształceniach doprowadzić rozpatrywaną
tu całkę J do następującej prostej postaci:

$$/4.6/ \quad J_I = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} K_I^2 \int_{\Gamma} \left(-\frac{\sin^3 \theta}{r} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) ds.$$

Wskaźnik I przy symbolu J oznacza, że wzór odnosi się do pierwszego typu odkształcenia szczeliny.

Łatwo można sprawdzić, że wyrażenie podcałkowe we wzorze /4.6/ stanowi różniczkę zupełną pewnej funkcji $\bar{J}_I(\theta)$ jedynej zmiennej θ , a niezależnej od r ,

$$\left[\frac{\partial \bar{J}_I(\theta)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \bar{J}_I(\theta)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right] ds ,$$

dzięki czemu całkę \int_{J_I} przedstawić można w postaci jawnej

$$J_I = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} K_I^2 [\bar{J}_I(\theta_B) - \bar{J}_I(\theta_A)] ,$$

przy czym

$$/4.7/ \quad \bar{J}_I(\theta) = \frac{1}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) .$$

θ_A i θ_B są współrzędnymi kątowymi punktów A i B stanowiących punkt początkowy i końcowy krzywej całkowania Γ , rys.5.

Analogiczne postępowanie zastosowane do drugiego i trzeciego typu odkształcenia szczeliny prowadzi do jawnych postaci całki J w przypadku dowolnego obciążenia ciała,

$$J = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} K_I^2 [\bar{J}_I(\theta_B) - \bar{J}_I(\theta_A)] +$$

$$/4.8/ \quad \frac{1-\nu}{2\pi\mu} K_{II}^2 [\bar{J}_{II}(\theta_B) - \bar{J}_{II}(\theta_A)] +$$

$$\frac{1}{2\pi\mu} K_{III}^2 [\bar{J}_{III}(\theta_B) - \bar{J}_{III}(\theta_A)] .$$

Występujące tu funkcje $\bar{J}_m(\theta)$, czyli potencjały \bar{J} , określone są wzorem /4.7/ oraz wzorami

$$/4.9/ \quad \bar{J}_{II}(\theta) = \frac{1}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) ,$$

$$\bar{J}_{III}(\theta) = \frac{1}{2} \theta .$$

W przypadku, gdy krzywa Γ obejmuje początek 0 biegunowego układu współrzędnych /wierzchołek szczeliny/ pokazany na rys.5, mamy $O_B = \pi$ i $O_A = -\pi$, a stąd

$$\bar{J}_m(\theta_B) - \bar{J}_m(\theta_A) = \pi, \quad m = I, II, III,$$

co prowadzi do znanego wyniku

$$/4.10/ \quad J = \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

Porównanie tego wyniku z wyprowadzonymi poprzednio wzorami /2.10/ i /3.7/ stwarza dodatkową możliwość fizycznej interpretacji znaczenia sił uogólnionych \mathcal{F}^1 .

Można tu również zauważyć, że gdyby całkowanie we wzorze /4.4/ wykonać wzdłuż krzywej niezawierającej początku układu współrzędnych /wierzchołka szczeliny/, to całka będzie oczywiście równa zero, gdyż $O_A = O_B$, a więc

$$\bar{J}_m(\theta_B) - \bar{J}_m(\theta_A) = 0, \quad m = I, II, III.$$

Wynik ten stanowi bezpośrednie potwierdzenie znanej i podstawowej własności całki J , a mianowicie jej niezależności od drogi całkowania.

5. RUCH USTALONY SZCZELINY

Wszystkie rozważania przedstawione w rozdziałach 2-4 tej pracy można także uogólnić na technicznie ważny przypadek stacjonarnego /ustalonego/ ruchu szczelin w ośrodkach sprężystych. W tym celu należy założyć, że proces propagacji rozpoczął się w chwili $t = -\infty$ oraz, że wierzchołek szczeliny, obciążenia zewnętrzne i warunki brzegowe przesuują się z tą samą prędkością v w dodatnim kierunku osi x_1 . Położenie późnieskończonej szczeliny płaskiej określają warunki $x_1 < vt$, $x_2 = 0$.

Wyniki takiego uogólnienia są podobne do wyników otrzymanych poprzednio. Przez wprowadzenie nowego, konwekcyjnego układu odniesienia $x'_1 = x_1 - vt$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$ eliminuje się ze

wszystkich zależności zmienną czasową t . Pojawiają się natomiast dwa nowe parametry

$$\beta_1^2 = 1 - \frac{v^2}{c_1^2}, \quad \beta_2^2 = 1 - \frac{v^2}{c_2^2},$$

przy czym c_1 i c_2 oznaczają prędkość propagacji podłużnych i poprzecznych fal sprężystych. Wyrażenie $4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2$ znane z teorii fal powierzchniowych Rayleigh'a oznaczamy symbolem

$$R(v) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2.$$

Otrzymane w ten sposób wyniki ostateczne przedstawimy tutaj bez wchodzenia w szczególne odpowiednich przekształceń.

Składowa pozioma \mathcal{F}^1 siły uogólnionej wyrażona w przypadku statycznym wzorem /2.10/ przyjmuje teraz postać

$$/5.1/ \quad \mathcal{F}^1 = \frac{1 - \beta_2^2}{2\mu R(v)} (\beta_1 K_I^2 + \beta_2 K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu\beta_2} K_{III}^2.$$

Warunek bilansu energetycznego rozważany w rozdziale 3 sprowadzał całe zagadnienie do równości prac \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 , równania /3.4/-/3.6/; w przypadku dynamicznym warunek ten zastąpić należy warunkiem mocy

$$/5.2/ \quad \mathcal{P}_1 = \int_{-\infty}^0 p_I(x'_1) \frac{\partial U_2(x'_1)}{\partial t} \Delta t dx'_1$$

oraz

$$/5.3/ \quad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \int_0^{v\Delta t} \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi x'_1}} K_I \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{\mu R(v)} \sqrt{\frac{v\Delta t - x'_1}{2\pi}} dx'_1,$$

wynikającym z faktu, że suma energii kinetycznej i potencjalnej układu nie zmienia się w czasie, $\mathcal{H} + \mathcal{U} = \text{const.}$ Warunek

$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$ prowadzi do zależności

$$\begin{aligned}
 /5.4/ \quad & - \int_{-\infty}^0 \left[\rho_I \frac{\partial U_2}{\partial x'_1} + \rho_{II} \frac{\partial U_1}{\partial x'_1} + \rho_{III} \frac{\partial U_3}{\partial x'_1} \right] dx'_1 = \\
 & = \frac{1 - \beta_2^2}{2\mu R(v)} (\beta_1 K_I^2 + \beta_2 K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu\beta_2} K_{III}^2,
 \end{aligned}$$

która stanowi odpowiednik wyprowadzonego poprzednio równania /3.7/. Porównanie związków /5.1/ i /5.4/ potwierdza słuszność analogii o której była mowa w rozdziale 3, a dotyczącej pojęć sił uogólnionych i warunków równości odpowiednich energii /mocy/.

W przypadku szczeliny poruszającej się ze stałą prędkością, całkę J określającą współczynnik wyzwalaenia energii należy zastąpić inną całką

$$/5.5/ \quad v J_D = v \int_{\Gamma} [(\bar{u} + \bar{\mathcal{K}}) dx'_2 - \sigma_{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x'_1} ds],$$

przy czym $\bar{\mathcal{K}}$ oznacza gęstość energii kinetycznej,

$$\bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i = \rho \frac{v^2}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x'_1} \frac{\partial u_i}{\partial x'_1};$$

$v J_D$ oznacza teraz prędkość dysypowania energii \dot{D} , którą określa się czasem jako strumień energii przepływającej przez wierzchołek szczeliny. Jest ona równa różnicy mocy obciążeń zewnętrznych działających na krzywej brzegowej Γ oraz prędkości zmiany energii kinetycznej i energii odkształcenia w obszarze Ω ograniczonym łukiem Γ oraz krawędzią szczeliny,

$$\dot{D} = \mathcal{P} - \frac{\partial}{\partial t} (U + \mathcal{K}).$$

Z warunku propagacji szczeliny wynika, że $v J_D$ powinno być równe prędkości przyrostu energii powierzchniowej $2\gamma v$.

Także i w tym przypadku całka J_D jest niezależna od drogi całkowania, co można znów udowodnić posługując się odpowiednimi potencjałami dynamicznymi \bar{J}_D . Mimo ich nieco bardziej złożonej postaci, można je również wyznaczyć w sposób jawny posługując

się układem nowych zmiennych

$$\theta_i = \arctg\left(\frac{\beta_i x'_1}{x'_2}\right), \quad R_i = (x'_1)^2 + \beta_i^2 (x'_2)^2, \quad i=1,2.$$

Potencjały przyjmują teraz postać

$$\bar{J}_{DI}(\theta) = [4\beta_1\beta_2\theta_2 - (1+\beta_2^2)\theta_1] \frac{1}{2R(v)},$$

$$/5.6/ \quad J_{DII}(\theta) = [4\beta_1\beta_2\theta_1 - (1+\beta_2^2)\theta_2] \frac{1}{2R(v)},$$

$$J_{DIII}(\theta) = \frac{\theta_2}{2\beta_2}.$$

Graniczne przejście $v \rightarrow 0$ sprowadza to wyrażenie do potencjałów statycznych /4.7/, /4.9/.

Można teraz zauważyć, że funkcje θ_i przyjmują w punktach A i B takie same wartości jak sama zmienna θ , to jest $-\pi$ oraz π /Rys.5/; tak więc ostatecznie otrzymujemy wzór

$$/5.7/ \quad J_D = \frac{1-\beta_2^2}{2\mu R(v)} (\beta_1 K_I^2 + \beta_2 K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu\beta_2} K_{III}^2,$$

którego prawa strona jest identyczna z prawą stroną wzoru /5.4/, co znów potwierdza analogię wspomnianą w rozdziale 4 i dotyczącą równań /4.10/ i /3.7/.

6. UWAGI KOŃCOWE

Wyniki przedstawione w niniejszej pracy można streścić w sposób następujący: oba podejścia do zagadnienia szczelin, oparte na mechanice teoretycznej defektów oraz na klasycznych rozważaniach energetycznych typu Griffitha i Irwina, prowadzą do identycznych wyników. Siłę \mathcal{F}^1 z równania /2.1/ można wyrazić za pomocą pracy sił przyłożonych do powierzchni poruszającej się szczeliny /równanie /3.7/ /. W przypadku dynamicznym prace zas-

tańpic należy odpowiednimi mocami.

Składową poziomą siłę $F(F^1, F^2)$ wyrazić można również za pomocą całki J /4.4/ lub jej dynamicznego odpowiednika J_D /5.5/ Kryterium pęknięcia /warunek stateczności szczeliny/ formułuje się zazwyczaj posługując się pojęciem współczynników intensywności naprężenia K_m lub współczynnikami wyzwalań energii S ; gdy współczynniki te osiągają wartości krytyczne, K_{mc} lub S_{cr} , szczelina zaczyna przejawiać tendencję do propagacji. W myśl omówionych wyżej analogii, można w tym samym celu wykorzystać pojęcie sił uogólnionych: szczelina traci stateczność w chwili, gdy siła F^1 osiąga wartość krytyczną F_{cr}^1 ; wartość tę możnaby określić jako siłę oporu ośrodka przeciw pękaniu. Podobne rozważania zastosować można do przypadku ustalonego ruchu szczeliny.

LITERATURA

- 1 Griffith A.A., Phil.Soc.Trans.London, Ser.A, 221, 163, 1921.
- 2 Liebowitz H., /wyd./, Fracture, Acad.Press, New York and London, Vol.2 /1968/, Vol.3 /1971/.
- 3 Irwin G.R., J.Appl.Mech., 24, 361, 1957.
- 4 Rice J.R., J.Appl.Mech., 35, 379, 1968.
- 5 Eshelby J.D., Phys.Rev., 90, 2, 1953.
- 6 Eshelby J.D., Solid State Phys., 3, 79, 1956.
- 7 Zorski H., Arch.Mech.Stos., 18, 3, 301-377, 1966.
- 8 Matczyński M., Arch.Mech.Stos., 22, 4, 439-478, 1970.
- 9 Kaczyński A., Arch.Mech., 28, 2, 1976.
- 10 Rice J.R., /w:/ Fracture, wyd.H.Liebowitz, Vol.2, Acad. Press, New York and London, 1968.
- 11 Budiansky B., Rice J.R., J.Appl.Mech., 40, 201, 1973.
- 12 Knowles J.K., Sternberg E., Arch.Rat.Mech.Anal., 44, 3, 201, 1972.