Andrzej Olas

KRYTERIUM STATECZNOŚCI ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Nr 12/80

BADANIE STATECZNOŚCI RUCHU LINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

WARSZAWA 1980

Prace wpłynęły do Redakcji dnia 27 marca 1980 r.

Zarejestrowane pod nr 12/1980

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,7. Ark.druk, 3 .
Oddano do drukarni w kwietniu 1980 r.
Nr zamówienia 268/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Andrzej OLAS
Zakład Układów Mechanicznych

O PEWNYM KRYTERIUM STATECZNOŚCI ROZWIĄZANIA TRYWIALNEGO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

1. Przedmiotem rozważań będzie stateczność w sensie Lapunowa rozwiązania trywialnego układu równań różniczkowych

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1}$$

określonego na zbiorze $Z = \{(t,x) : t \in J = (a,\infty), x \in R^n : \|x\| < H\}$ gdzie $f(t,x) \in C^{(0,1)}_{(t,x)}(Z)$. Założymy że (1) jest układem zredukowanym to znaczy takim, że

$$f(t,0) = 0$$

a więc układ (1) ma rozwiązanie trywialne $x = 0$.

Celem rozważań jest sformułowanie kryterium stateczności rozwiązania trywialnego układu (1). W pracy korzysta się z pojęć i sposobu rozumowania stosowanych w drugiej metodzie Lapunowa badania stateczności. Wiadomo, że istnienie funkcji Lapunowa jest warunkiem koniecznym i dostatecznym stateczności badanego rozwiązania trywialnego. Istniejące dowody dotyczące konieczności istnienia funkcji Lapunowa nie są jednak dowodami konstruktywnymi. Nie znając rozwiązań układu nie umiemy w przypadku ogólnym podać sposobu konstrukcji funkcji Lapunowa. Z tej przyczyny badania stateczności drugą metodą Lapunowa wciąż dostarczają tylko kryteriów wystarczających na to aby układ był stateczny, często bardzo grubych. Praktyka badania stateczności dostarczyła jako narzędzia znacznej liczby funkcji wypróbowanych już jako funkcja Lapunowa w odniesieniu do odpowiednich układów równań. Niniejsza praca stanowi próbę wskazania możliwości wykorzystania tych funkcji do uzyskania lepszych niż dotąd kryteriów stateczności.

Streścimy w pewnym uproszczeniu tok rozważań pracy. Założeniem twierdzenia Lapunowa o stateczności jest warunek aby pochodna wzdłuż rozwiązania układu (1) funkcji $V(t,x)$ /pochodną tę oznacza się $\dot{V}(t,x)$/ spełniała nierówność

$$\dot{V}(t,x) \leq 0 \tag{2}$$

dla x należących do pewnego otoczenia punktu $0 \in R^n$ i $t \in J$. W pracy wykażemy że warunek ten można polepszyć rozważając wyrażenie

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau$$

Przyjmując mianowicie, że w rozpatrywanym przedziale $[t_0,t]$ mieści się m podprzedziałów $[t_i,t_{i+1}]$ o długości T, takich że koniec t_m ostatniego podprzedziału pokrywa się z punktem t otrzymujemy

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau$$

Po wykonaniu przekształceń dochodzi się do postaci

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_i,x_i))d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau$$

Rozpatrując rozwiązanie o warunku początkowym bliskim do rozwiązania trywialnego i przyjmując że w otoczeniu początku układu zachodzi dla pewnego T i dla wszystkich t_0, x_0

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau \leq 0 \tag{3}$$

wnioskujemy, że przyrost funkcji $V(t,x(t,t_0,x_0))$ wzdłuż rozwiązania szacować można przy pomocy kresu górnego wyrażenia

$$\int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau \quad \text{dla} \quad 0 \leq u \leq T$$

a więc wyrażenia określonego na skończonym przedziale czasu niezależnie od chwili t . To rozumowanie jest podstawą tezy twierdzenia.

Twierdzi się, że jeżeli zachodzi (3) to rozwiązanie trywialne układu (1) jest stateczne. Warto zaznaczyć, że jeżeli spełniona jest zależność (2) to zachodzi (3) wynika stąd że twierdzenie Lapunowa o stateczności jest szczególnym przypadkiem twierdzenia sformułowanego w pracy.

Bezpośrednie zastosowanie twierdzenia do badania stateczności napotyka na trudności, ponieważ przyrost funkcji $V(t,x(t,t_0,x_0))$ należy wyznaczać wzdłuż rozwiązania, które nie jest znane. Korzystając z faktu, że całka w wyrażeniu (3) jest obliczana na przedziale ograniczonym niezależnie od długości przedziału $[t_0,t]$ można posłużyć się rozwiązaniem przybliżonym. Załączony przykład wykazuje zasadność takiego podejścia.

2. W paragrafie tym przypomnimy własności rozwiązania równania różniczkowego (1) , następnie zbadamy wyrażenie $\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau$.

Przy przyjętych założeniach co do układu (1) prawdziwe jest twierdzenie o ciągłości rozwiązania względem warunków początkowych, a mianowicie [1] : jeżeli $x(t,t_0,x_0)$ jest w przedziale $t\in(a,b)$ rozwiązaniem (1) , to dla każdego $\varepsilon>0$ i $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ istnieje $\delta>0$, takie że rozwiązanie $x(t,\bar{t},z_0)$ gdzie $\bar{t}\in[\alpha,\beta]$ i $\|z_0-x(\bar{t},t_0,x_0)\|<\delta$ istnieje dla $t\in[\alpha,\beta]$ przy czym $\|x(t,\bar{t},z_0)-x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ dla $t\in[\alpha,\beta]$.

Twierdzenie to wykorzystamy jak idzie o rozwiązania bliskie rozwiązaniu trywialnemu $x=0$ dla $t\in\mathcal{J}$. Prawdziwy jest następujący wniosek:

Wniosek 1. Dla każdego $\varepsilon_1>0$ i dla każdego przedziału $[t_0,t_0+T]$ można dobrać $\delta_1>0$ takie, że dla każdego x_0 takiego że $\|x_0\|<\delta_1$ istnieje rozwiązanie $x(t,t_0,x_0)$ i zachodzi

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon_1 \quad dla \quad t\in[t_0,t_0+T]$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenie $\int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau$. Przyjmiemy, że funkcja $\dot{V}(t,x)$ jest ciągłą funkcją skalarną określoną na pewnym zbiorze $Z_0 = J \times U_0$, $U_0 = \{x \in R^n : \|x\| \le h < H\}$. Wiadomo, że $\dot{V}(t,0) = 0$. Wobec tego na mocy ciągłości tej funkcji dla każdego $\varepsilon_2 > 0, t_0 \in J, T > 0$ można dobrać takie $\delta_2 > 0$ że dla każdego x takiego, że $\|x\| < \delta_2$ funkcja $\dot{V}(t,x)$ istnieje i zachodzi

$$|\dot{V}(t,x)| < \varepsilon_2 \qquad dla \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

Uwzględniając powyższe i biorąc pod uwagę wniosek 1 otrzymujemy

Wniosek 2. Dla każdego $\varepsilon_3 > 0$ i dla każdego przedziału $[t_0, t_0+T]$ można dobrać $\delta_3 > 0$ takie, że dla każdego x_0 takiego że $\|x_0\| < \delta_3$ zachodzi:

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \right| < \varepsilon_3 \qquad dla \quad u \in [t_0, t_0+T]$$

Aby wykazać prawdziwość powyższego wniosku obierzmy ε_3, t_0, T, ustalmy takie $\delta_2 > 0$ aby było

$$|\dot{V}(t,x)| < \frac{\varepsilon_3}{T} \qquad dla \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

Dalej ustalmy takie $\delta_1^* > 0$ aby było dla $\|x_0\| < \delta_1^*$

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \delta_2 \qquad dla \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

Zachodzi wtedy dla $\|x_0\| < \delta_1^*$ /tzn. ustalamy $\delta_3 = \delta_1^*$

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \right| < \int_{t_0}^{t_0+u} \sup_{\|x\| < \delta_2} |\dot{V}(t,x)| d\tau \le \int_{t_0}^{t_0+u} \frac{\varepsilon_3}{T} d\tau \le \varepsilon_3$$

co chcieliśmy wykazać.

Przejdziemy teraz do przekształcenia wyrażenia

$$\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau$$

Przyjmujemy przy tym, że rozwiązanie $x(\tau, t_0, x_0)$ istnieje w przedziale $[t_0, t]$ i pozostaje w zbiorze U_0 . Przy tych założeniach powyższe wyrażenie istnieje.

Niech dana będzie liczba T. Przedział $t - t_o$ podzielimy na $m+1$ $(m \geq 0)$ podprzedziałów o długości T w taki sposób, że koniec ostatniego podprzedziału - punkt t_{m+1} pokrywa się z punktem t. Punkty podziału oznaczymy przez t_i, $i=0,\ldots,m+1$, $m=E\left(\frac{t-t_o}{T}\right)$ przy czym $t_1=t_o+v$, $v=t-t_o-mT<T$. Oznaczymy $x(t_i,t_o,x_o)=x_i$.

Zachodzi

$$\int_{t_o}^{t} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau = \int_{t_o}^{t_o+u} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau +$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau$$

Wykorzystamy teraz fakt, że rozwiązanie $x(\tau,t_o,x_o)$ ma własność grupową, to jest zachodzi dla każdego $\tau, \bar t, t_o$

$$x(\tau,t_o,x_o) = x(\tau,x(\bar t,t_o,x_o))$$

wobec czego zachodzą równości

(4) $$x(\tau,t_o,x_o)=x(\tau,t_i,x_i)$$

Wykorzystując (4) otrzymujemy

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot V(\tau,x(\tau,t_{i-1},x_{i-1}))d\tau \quad i=2,\ldots,m+1$$

i ostatecznie mamy

(5) $$\int_{t_o}^{t} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau = \int_{t_o}^{t_o+u} \dot V(\tau,x(\tau,t_o,x_o))d\tau + \sum_{i=2}^{m+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot V(\tau,x(\tau,t_{i-1},x_{i-1}))d\tau$$

3. W paragrafie tym udowodnimy twierdzenie o stateczności rozwiązania trywialnego układu (1).

Twierdzenie 1. Niech dany będzie układ

(1) $$\dot x = f(t,x)$$

określony na zbiorze $Z=\{(t,x): t\in J,\ x\in R^n;\ \|x\|<H\}$ gdzie

$f \in C^{(0,1)}_{(t,x)}(Z)$ oraz zachodzi

$$f(t,0)=0$$

Jeżeli istnieją:

(a) dodatnio określona funkcja skalarna

$$V(t,x) \in C^{(1,1)}_{(t,x)}(Z_0)$$

gdzie $Z_0 = J \times U_0$,

(b) liczba dodatnia T

(c) otoczenie U punktu $0 \in R^n$

takie że zachodzi

$$(6) \quad \bigwedge_{t_0 \in J} \bigwedge_{x_0 \in U} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \leq 0$$

to rozwiązanie trywialne układu (1) jest stateczne w sensie Lapunowa dla $t \to +\infty$.

Dowód. Na podstawie założenia istnieją ciągła i dodatnio określona funkcja $W(x)$, taka że

$$(7) \quad V(t,x) \geq W(x) > 0 \quad dla \ x \neq 0$$

oraz

$$V(t,0) = W(0) = 0$$

W przestrzeni R^n rozważmy sferę S_ε

$$(8) \quad \|x\| = \varepsilon$$

leżącą całkowicie w U . Ponieważ sfera jest zbiorem zwartym a funkcja $W(x)$ jest ciągła i dodatnia w S_ε , więc na mocy twierdzenia Weierstrassa kres dolny tej funkcji jest osiągnięty w pewnym punkcie $x^* \in S_\varepsilon$ a zatem

$$(9) \quad \inf_{x \in S_\varepsilon} W(x) = W(x^*) = \alpha > 0$$

Obierzmy dowolne $t_0 \in J$. Funkcja $V(t_0,x)$ jest ciągła względem x przy czym $V(t_0, 0) = 0$. Istnieje więc takie otoczenie $\|x_0\| < \delta_2 < \varepsilon$ że dla $\|x_0\| < \delta_2$ zachodzi

$$0 \leq V(t_0, x_0) < \frac{\alpha}{2}$$

Wykorzystajmy teraz wniosek 2 dobierając δ_3 tak aby dla każdego x_0 takiego, że $\|x_0\| < \delta_3$ było

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\, d\tau \right| < \frac{\alpha}{2} \quad dla \quad u \in [0, T]$$

obierając $\delta_4 = \min(\delta_2, \delta_3)$ otrzymujemy dla $\|x_0\| < \delta_4$

(10) $$0 \leq V(t_0, x_0) < \frac{\alpha}{2}$$

(11) $$\left| \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\, d\tau \right| < \frac{\alpha}{2} \quad dla \quad u \in [0, T]$$

Rozpatrzmy dowolne rozwiązanie niezerowe $x(t, t_0, x_0)$ wybrane dla ustalonego t_0 i x_0 takiego że $\|x_0\| < \delta_4$. Udowodnimy, że trajektoria tego rozwiązania pozostaje całkowicie wewnątrz sfery S_ε to znaczy że

(12) $$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad dla \quad t \in [t_0, \infty)$$

Dla $t = t_0$ mamy $\|x_0\| < \delta_4 < \varepsilon$.

Załóżmy, że nierówność (12) nie jest spełniona dla wszystkich $t \in [t_0, \infty)$ i niech $t^* > t_0$ będzie pewnym punktem rozwiązania $x(t, t_0, x_0)$ leżącym na sferze S_ε tzn. że $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ dla $t \in [t_0, t^*)$ i $\|x(t, t_0, x_0)\| = \varepsilon$.

Zbadamy zachowanie się funkcji $V(t, x(t, t_0, x_0))$, wzdłuż rozwiązania $x(t, t_0, x_0)$. Mamy

$$V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t^*} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\, d\tau$$

Na mocy (5) otrzymujemy

$$V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m+1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+T} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_{i-1}, x_{i-1}))\, d\tau$$

Na mocy założenia że $S_\varepsilon \subset U$ zachodzi

$$x_i \in U \qquad i=1,\dots,m$$

a więc możemy szacować wykorzystując (6)

$$V(t^*,x(t^*,t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0) + \left|\int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau,x(\tau,t_0,x_0))d\tau\right|$$

skąd otrzymamy na mocy (10) i (11)

$$(13) \qquad V(t^*,x(t^*,t_0,x_0)) < \alpha$$

Z drugiej strony ponieważ $x(t^*,t_0,x_0) \in S_\varepsilon$ mamy na mocy (7) i (9)

$$V(t^*,x(t^*,t_0,x_0)) \geqslant \alpha$$

co wykazuje sprzeczność z (13), a więc rozwiązanie $x(t,t_0,x_0)$ dla dowolnego skończonego $t \in J$ pozostaje wewnątrz sfery S_ε i ponieważ $\varepsilon < H$, to rozwiązanie jest określone dla $t \in J$ przy czym $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ dla $t \in J$ jeżeli tylko $\|x_0\| < \delta_4$. A to oznacza że rozwiązanie $x(t,t_0,x_0)$ jest stateczne w sensie Lapunowa dla $t \to +\infty$, co kończy dowód.

4. Przykład. W celu wykazania stosowalności twierdzenia a także w celu porównania rezultatu osiągniętego w taki sposób z wynikami osiągniętymi metodami funkcji Lapunowa wykonano przykład. Rozpatrzmy równanie Hilla z tłumieniem

$$(14) \qquad \ddot{z} + 2a\dot{z} + [1+h(t)]z = 0$$

Najlepszy wynik dotyczący stateczności takiego równania metodą doboru funkcji Lapunowa uzyskano w pracy Radziszewskiego i Zaleskiego [1]. Równanie (14) badano w postaci układu równań pierwszego rzędu

$$(15) \qquad \dot{x} = A(t)x \qquad x \in R^2$$

gdzie

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-h & -2a \end{bmatrix}$$

Stosując opracowaną w [2] metodę doboru najlepszej w pewnym sensie funkcji Lapunowa wyznaczono tam taką funkcję

(16) $$V = \langle x, Sx \rangle$$

gdzie

$$S = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zastosowanie tej funkcji daje następujący warunek dostateczny stateczności asymptotycznej układu: jeżeli istnieje $d > 0$ takie że zachodzi

(17) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \Lambda_*(A)d\tau \leq -d$$

to układ jest asymptotycznie stateczny. Wynik ten porównamy z wynikiem jaki uzyskamy poniżej. Rozważania ograniczymy do jednej wartości parametru a, $a = 0{,}5$.
Celem obliczeń jest podanie największej liczby $k > 0$, takiej że jeżeli funkcja $h(t)$ występująca w (15) spełnia warunek

(18) $$\sup_{t\in\mathcal{J}} |h(t)| \leq k$$

to układ jest stateczny.

Badając rozwiązania układu (15) i ich stateczność przy zastosowaniu warunku (18) wystarczy badać rozwiązania o chwili początkowej $t_0 = 0$, [1] .
Tok obliczeń jest niestety długi i żmudny. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest fakt, że funkcja $h(t)$ nie jest wyspecyfikowana; z tego powodu konieczne jest szacowanie nie tylko błędu między rozwiązaniem przybliżonym a dokładnym, ale także szacowanie pewnych funkcji występujących w założonym rozwiązaniu przybliżonym. Wybitnie wzrosła też wskutek powyższej przyczyny ilość przekształceń. Rozważanie akurat takiego przykładu uzasadnione jest jednak możliwością porównania rezultatów uzyskanych różną drogą. Tok obliczeń przedstawia się następująco:

- obranie i przekształcanie rozwiązania przybliżonego /doprowadzenie macierzy B_1, B_2, B_3 do postaci (29)
- szacowanie liczb f, e, d; szacowanie błędu.

Rozwiązanie przybliżone $y(t,0,x_0)$ układu (15) rozważać będziemy w postaci

$$(19)\quad y(t,0,x_0) = \left[I + \int_0^t A(\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_0^t\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A(\tau_1)A(\tau_2)A(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1\right]x_0$$

Obierzemy chwilę T i oznaczymy

$$(20)\qquad B_1 = \frac{1}{T}\int_0^T A(\tau_1)d\tau_1$$

$$(21)\qquad B_2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1$$

$$(22)\qquad B_3 = \frac{1}{T^3}\int_0^T\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A(\tau_1)A(\tau_2)A(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1$$

otrzymując

$$(23)\qquad y(T,0,x_0) = \left[I + B_1T + B_2T^2 + B_3T^3\right]x_0$$

W związkach (20)-(22) występują całki funkcji $h(t)$. Oznaczymy

$$(24)\quad g(t)=\frac{1}{T}\int_0^t h(\tau)d\tau,\ f(t)=\frac{2}{T}\int_0^t g(\tau)d\tau,\ e(t)=\frac{3}{T}\int_0^t f(\tau)d\tau,\ d(t)=\int_0^t g^2(\tau)d\tau .$$

Do przekształcenia wyrażeń (20) - (22) wykorzystuje się następujące związki, łatwe do wyprowadzenia metodą całkowania przez części

$$\int_0^T t h(t)dt = T^2\left(g(T)-\tfrac{1}{2}f(T)\right)$$

$$\int_0^T t g(t)dt = T^2\left(\tfrac{1}{2}f(T)-\tfrac{1}{6}e(T)\right)$$

$$\int_0^T t^2 h(t)dt = T^3\left(g(T)-f(T)+\tfrac{1}{3}e(T)\right)$$

$$\int_0^T h(t)g(t)dt = T\ \frac{g^2(T)}{2}$$

$$\int_0^T t h(t)g(t)dt = T^2\left(\tfrac{1}{2}g^2(T)-\tfrac{1}{6}d(T)\right)$$

$$\int_0^T\int_0^\tau t h(t)dt d\tau = T^3\left(\tfrac{1}{2}f(T)-\tfrac{1}{3}e(T)\right)$$

$$\int_0^T f(t)h(t)dt = T\left(\tfrac{1}{2}g(T)f(T)-\tfrac{1}{3}d(T)\right)$$

Zastosowanie powyższych związków do wzorów (20) - (22) daje wyrażenia

$$(25)\qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+g) & 1 \end{bmatrix}$$

$$(26)\qquad B_2 = \begin{bmatrix} -0{,}5(1+f) & -0{,}5 \\ 0{,}5(1+f) & -g+0{,}5f \end{bmatrix}$$

$$(27)\qquad B_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(1+e) & \frac{1}{3}e-\frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}g-\frac{1}{2}f+\frac{1}{6}e+\frac{1}{2}gf-\frac{1}{3}d & \frac{1}{6}+\frac{1}{2}g-\frac{1}{6}e \end{bmatrix}$$

gdzie przez g, f, e, d oznaczono wartości odpowiednich funkcji w chwili T.

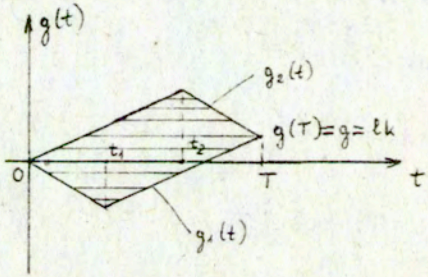
5. W tym paragrafie zajmiemy się szacowaniem wartości f, e, d w zależności od liczby k i wartości $g = g(T)$, oraz szacowaniem błędu rozwiązania.

Mamy z definicji funkcji $g(t)$ zależność $g(0) = 0$. Z warunku (18) mamy $|g(t)| \leq \frac{kt}{T}$ w szczególności $|g| \leq k$. Wartość $g = g(T)$ możemy wyrazić wobec tego związkiem

$$g = \ell k$$

gdzie $\ell \in [-1,1]$.

Łatwo zauważyć, że dla wybranych liczb k i ℓ /a więc dla wybranej wartości g /obszar, w którym zawiera się wykres funkcji $g(t)$ na mocy związku (18) musi zaiwerać się między łamanymi $g_1(t)$ i $g_2(t)$ /obszar zakreskowany na rys. 1/.



Rys. 1

gdzie łamane te dane są wzorami

$$g_1(t) = \begin{cases} -\frac{kt}{T} & t \in [0, t_1] \\ \frac{kt}{T} + k(\ell - 1) & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad t_1 = \frac{1-\ell}{2}T$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{kt}{T} & t \in [0, t_2] \\ -\frac{kt}{T} + k(\ell + 1) & t \in [t_2, T] \end{cases}, \quad t_2 = \frac{1+\ell}{2}T$$

wykorzystując ten fakt otrzymujemy następujące szacowania na liczby f, e, d

$$(28) \qquad -1 \leq f_1 = \frac{k}{2}(-1+2l+l^2) \leq f \leq \frac{k}{2}(1+2l-l^2) = f_2 \leq 1$$

$$(29) \qquad -1 \leq e_1 = \frac{k}{4}(-3+3l+3l^2+l^3) \leq e \leq \frac{k}{4}(3+3l-3l^2+l^3) = e_2 \leq 1$$

$$(30) \qquad 0 \leq d_1 = k^2|l^3| \leq d \leq \frac{k^2}{4}(1+3l+3l^2-3l^3) = d_2 = 1$$

Szacowania te wykorzystamy do wyznaczenia norm macierzy S, B_1, B_2, B_3. Przyjmiemy $T \leq 10^{-2}$, $|l| \leq 1$, $k \leq 1$ i oznaczymy

$$\alpha = \sup_{t \in j} \|A\| = 2{,}2912878$$

Otrzymujemy

$$\|S\| \leq 1{,}5811388$$

$$\|B_1\| \leq 2{,}4494897$$

$$\|B_2\| \leq 2{,}1213203$$

$$\|B_3\| \leq 2{,}3452076$$

Zajmiemy się teraz oszacowaniem błędu, jaki popełniamy, przyjmując rozwiązanie (19). Oznaczymy błąd przez $u(t, x_0)$,

$$x(t, 0, x_0) = y(t, 0, x_0) + u(t, x_0)$$

W celu jego oszacowania wykorzystamy podane przez Peano rozwinięcie macierzy fundamentalnej w szereg; oznaczając [3]

$$R(t) = \frac{1}{T^4}\left[\int_0^t\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)A(\tau_2)A(\tau_3)A(\tau_4)\,d\tau_4\,d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1 + \ldots + \int_0^t\int_0^{\tau_1}\ldots\int_0^{\tau_{n-1}} A(\tau_1)\ldots A(\tau_n)\,d\tau_n\ldots d\tau_1 + \ldots\right]$$

mamy

$$(31) \qquad u(t, x_0) = T^4 R(t) x_0$$

Zachodzi

$$\left\| \int_0^t \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_{i-1}} A(\tau_i) \ldots A(\tau_1) d\tau_i \ldots d\tau_1 \right\| \leq \frac{\alpha^i}{i!} T^i$$

Skąd otrzymujemy dla $t \in [0,T]$

$$\|R(t)\| \leq \frac{1}{T^4} \left(e^{\alpha t} - 1 - \alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{2!} - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right) \leq e^{\alpha T} \frac{\alpha^4}{4!}$$

a więc oznaczając $R(T) = R$ mamy

$$\|R\| \leq e^{\alpha T} \frac{\alpha^4}{4!} = 1{,}1750582$$

6. W tym paragrafie zajmiemy się obliczeniem wyrażenia $\int_0^T \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau$.

Mamy:

$$\int_0^T \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau = V(T, x(T, 0, x_0)) - V(0, x_0)$$

Po podstawieniu tu zależności na $x(t, 0, x_0)$ otrzymujemy

$$\int_0^T \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau = \langle (I + TB_1 + T^2B_2 + T^3B_3 + T^4R)x_0, S(I + TB_1 + T^2B_2 + T^3B_3 + T^4R)x_0 \rangle$$

$$- \langle x_0, Sx_0 \rangle = \langle x_0, \bar{S} x_0 \rangle$$

gdzie

$$\bar{S} = M_1 T + M_2 T^2 + \ldots + M_8 T^8$$

zaś macierze M_i, $i = 1, \ldots, 8$ dane są poniżej wzorami (32) - (39) obok tych wyrażeń podano szacowanie norm macierzy M_i, $i = 1, \ldots, 4$ oznaczając $m_i = \sup_{t \in [0,T]} \|M_i\|$

(32) $M_1 = SB_1 + B_1^T S$ $\qquad m_1 = 7{,}7459664$

(33) $M_2 = B_1^T S B_1 + SB_2 + B_2^T S$ $\qquad m_2 = 16{,}195035$

(34) $M_3 = B_1^T S B_2 + B_2^T S B_1 + B_3^T S + SB_3$ $\qquad m_3 = 15{,}162163$

(35) $M_4 = R^T S + SR + B_1^T S B_3 + B_3^T S B_1 + B_2^T S B_2$ $\qquad m_4 = 28{,}996883$

(36) $M_5 = B_1^T S R + R^T S B_1 + B_2^T S B_3 + B_3^T S B_2$ $\qquad m_5 = 24{,}834091$

(37) $M_6 = B_2^T S R + R^T S B_2 + B_3^T S B_3$ $\qquad m_6 = 13{,}382528$

(38) $M_7 = B_3^T S R + R^T S B_3$ $m_7 = 17{,}392522$

(39) $M_8 = R^T S R$ $m_8 = 2{,}1831758$

Zgodnie z wykazanym twierdzeniem, na to aby układ (15) był stateczny wystarczy aby było

$$\langle x_0, \bar{S} x_0 \rangle \leq 0$$

do czego znów wystarcza aby macierz $-\bar{S}$ była dodatnio określona. Na mocy kryterium Silvestra na to aby $-\bar{S}$ była dodatnio określona potrzeba by było $\det(-\bar{S}) = \det(\bar{S}) > 0$ oraz $\bar{S}_{11} < 0$. Rozpoczniemy od badania $\det \bar{S}$.

Oznaczymy przez $M_j^{(i)}, j=1,\dots,8; i=1,2$ i-tą kolumnę j-tej macierzy oraz przez $\det M_{j_1} M_{j_2}$ wyznacznik macierzy $[M_{j_1}^{(1)} M_{j_2}^{(2)}]$ Otrzymujemy

$$\det \bar{S} = T^2 \det M_{11} + T^3 (\det M_{12} + \det M_{21}) + T^4 (\det M_{13} + \det M_{31} + \det M_{22}) + G$$

Oznaczymy

$$F(l,k) = T^2 \det M_{11} + T^3 (\det M_{12} + \det M_{21}) + T^4 (\det M_{13} + \det M_{31} + \det M_{22})$$

zaś G możemy szacować

$$G \geq G_1 = -T^5 (4m_1 m_4 + 4m_2 m_3) - T^6 (4m_1 m_5 + 4m_2 m_4 + 2m_3^2)$$
$$-T^7 (4m_1 m_6 + 4m_2 m_5 + 4m_3 m_4) - T^8 (4m_1 m_7 + 4m_2 m_6 + 4m_3 m_5 + 2m_4^2)$$
$$-T^9 (4m_1 m_8 + 4m_2 m_7 + 4m_3 m_6 + 4m_4 m_5) - T^{10} (4m_2 m_8 + 4m_3 m_7 + 4m_4 m_6 + 2m_5^2) - T^{11} (4m_3 m_8 +$$
$$+ 4m_4 m_7 + 4m_5 m_6) - T^{12} (4m_4 m_8 + 4m_5 m_7 + 2m_6^2) - T^{13} (4m_5 m_8 + 4m_6 m_7)$$
$$-T^{14} (4m_6 m_8 + 2m_7^2) - T^{15} (4m_7 m_8) - T^{16} \cdot 2m_8^2$$

Aby zbadać $\det \bar{S}$ jako funkcję l i k zbadamy funkcję $F(l,k)$ i oszacujemy funkcję G_1. Badanie funkcji $F(l,k)$ zajmie poniżej sporo miejsca, natomiast od razu tutaj oszacujemy funkcję G_1. Mamy wykorzystując normy (32) - (39) i przyjmując że $T < 10^{-4}$

$$G_1 \geq G_2 = -T^5 \cdot 1880{,}6425 - T^6 \cdot 3107{,}6605 - T^7 \cdot 3782{,}02 - T^8 \cdot 6601$$

7. W tym paragrafie zajmiemy się badaniem funkcji $F(l,k)$, dokładniej wyznaczeniem $\min\limits_{l,k} F(l,k)$.

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$F(l,k) = F(g(l,k), f(l,k), e(l,k), d(l,k)) = T^2(0{,}75 - g^2) + T^3(g^2 - 0{,}75)$$
$$\tag{40} + T^4\left(\tfrac{7}{16} - 0{,}75 f^2 + ge - 0{,}5 g^2 - \tfrac{2}{3} gd + g^2 f\right)$$

gdzie $g = lk$ a funkcje $f(l,k), e(l,k), d(l,k)$ są oszacowane związkami (28)- (30). Wyrażenie (40) jest funkcją liniową e i d oraz funkcją kwadratową f, przy czym współczynnik przy f^2 jest ujemny. Poszukując $\min F(l,k)$ wystarcza więc wyznaczać minima następujących funkcji

a/ dla $l \geq 0$ $(g \geq 0)$

$$\tag{41} F_1(l,k) = F(g(l,k), f_1(l,k), e_1(l,k), d_2(l,k))$$

$$\tag{42} F_2(l,k) = F(g(l,k), f_2(l,k), e_1(l,k), d_2(l,k))$$

b/ dla $l \leq 0$ $(g < 0)$

$$\tag{43} F_3(l,k) = F(g(l,k), f_1(l,k), e_2(l,k), d_1(l,k))$$

$$\tag{44} F_4(l,k) = F(g(l,k), f_2(l,k), e_2(l,k), d_1(l,k))$$

W odróżnieniu od wyrażenia (40) gdzie znamy tylko oszacowanie na f, e, d powyższe cztery funkcje są wyznaczone jednoznacznie.

Zajmiemy się teraz bliżej postacią tych czterech funkcji. Podstawiając do (41) -(44) związki (28) - (30) na f_i, e_i, d_i, $i = 1,2$ otrzymujemy następującą postać

$$F_i(l,k) = b_0 + b_2^{(i)}(l)\,k^2 + b_3^{(i)}(l)\,k^3 \qquad i = 1, \ldots, 4$$

a więc funkcje te są wielomianami stopnia trzeciego ze względu na k, przy czym nie występuje wyraz z k w pierwszej potędze, a także jak widać z danych niżej współczynników $b_0, b_2^{(i)}$, $b_3^{(i)}$, $i = 1,2,3,4$, funkcje te są wielomianami czwartego stopnia ze względu na l. Współczynniki $b_0, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}$ mają postać

$$b_0 = T^2 \cdot 0{,}75 - T^3 \cdot 0{,}75 + T^4 \tfrac{7}{16}$$

$$b_2^{(1)}(l) = -l^2T^2 + l^2T^3 - T^4\tfrac{3}{16}(-1+2l+l^2)^2 + T^4\tfrac{1}{4}l(-3+3l+3l^2+l^3) - T^4\,0{,}5l^2$$

$$b_2^{(2)}(l) = -l^2T^2 + l^2T^3 - T^4\tfrac{3}{16}(1+2l-l^2)^2 + T^4\tfrac{1}{4}l(-3+3l+3l^2+l^3) - T^4 \cdot 0{,}5l^2$$

$$b_2^{(3)}(l) = -l^2T^2 + l^2T^3 - T^4\tfrac{3}{16}(-1+2l+l^2)^2 + T^4\tfrac{1}{4}l(3+3l-3l^2+l^3) - T^4 \cdot 0{,}5l^2$$

$$b_2^{(4)}(l) = -l^2T^2 + l^2T^3 - T^4\tfrac{3}{16}(1+2l-l^2)^2 + T^4\tfrac{1}{4}l(3+3l-3l^2+l^3) - T^4 \cdot 0{,}5l^2$$

$$b_3^{(1)}(l) = -T^4\tfrac{1}{6}(1+3l+3l^2-3l^3) + T^4\,0{,}5l^2(-1+2l+l^2)$$

$$b_3^{(2)}(l) = -T^4\tfrac{1}{6}(1+3l+3l^2-3l^3) + T^4\,0{,}5l^2(1+2l-l^2)$$

$$b_3^{(3)}(l) = T^4\tfrac{2}{3}l^4 + T^4\,0{,}5l^2(-1+2l+l^2)$$

$$b_3^{(4)}(l) = T^4\tfrac{2}{3}l^4 + T^4\,0{,}5l^2(1+2l-l^2)$$

Przypomnijmy, że poprzednio przyjęliśmy $k \in [0,1]$ i $T < 10^{-4}$. Badając funkcje F_i rozróżnimy dwa przedziały to jest pierwszy gdy $|l| \leq 0{,}6$ i drugi gdy $0{,}6 < |l| \leq 1$.
Zachodzą następujące szacowania

Tabela 1.

$T < 10^{-4}$, $k \in [0,1]$	$i = 1, \ldots, 4$
1. $\lvert l \rvert \leq 0{,}6$	2. $0{,}6 < \lvert l \rvert \leq 1$
$b_0 \geqslant 0{,}7425 \cdot T^2$ $\lvert b_2^{(i)} \rvert \leqslant 0{,}3639 \cdot T^2$ $\lvert b_3^{(i)} \rvert \leqslant 0{,}0002 \cdot T^2$ $G_2 \geqslant -0{,}002\, T^2$	$\lvert b_2^{(i)} \rvert \geqslant 0{,}3597 \cdot T^2$ $\lvert b_3^{(i)} \rvert \leqslant 0{,}0002 \cdot T^2$ $\left\lvert \frac{db_2^{(i)}(l)}{dl} \right\rvert \geqslant T^2 \cdot 0{,}699$ $\left\lvert \frac{db_3^{(i)}(l)}{dl} \right\rvert \leqslant T^2 \cdot 0{,}0006$

Jak wynika z pozycji pierwszej tabeli 1 zachodzi szacowanie

$$F_i(l,k) \geqslant 0{,}3764\, T^2 > 0 \quad \text{dla} \quad |l| \leq 0{,}6$$

Badanie funkcji $F_i(l,k)$ w przedziale drugim rozpoczniemy od zbadania pochodnych $\frac{\partial F_i}{\partial k}$. Jest

$$\frac{\partial F_i}{\partial k} = 2 b_2^{(i)} k + 3 b_3^{(i)} k^2$$

Wykorzystując szacowania z pozycji drugiej tabeli 1 łatwo zauważyć że w przedziale drugim jest

$$\frac{\partial F_i}{\partial k} \neq 0$$

Wobec tego dla ustalonego $l = \bar{l}$ funkcja $F_i(\bar{l},k)$ osiąga wartości największą i najmniejszą na brzegu przedziału $[0,1]$. Dla $k = 0$ funkcja $F_i(l,k)$ osiąga maksimum, zaś dla $k = 1$ funkcja osiąga minimum.

Z kolei zbadamy w przdziale drugim pochodną $\frac{\partial F_i}{\partial l}$ przy czym ograniczymy się do jej badania w następującym przedziale zmienności k : $k \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$. Wynika to z faktu, że jak się później okaże $F_i(k,l)$ dla $k \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ jest dodatnia.

Mamy

$$\frac{dF_i}{dl} = \frac{db_2^{(i)}}{dl}k^2 + \frac{db_3^{(i)}}{dl}k^3$$

skąd i z tabeli 1 wynika że $\frac{dF_i}{dl} \neq 0$. Wobec tego w przedziale drugim wartości największych i najmniejszych trzeba szukać dla l = -0,6; 0,6; -1,1. Dla l = -0,6; 0,6 funkcje osiągają maksimum, wartości najmniejsze funkcje osiągają dla l = -1 i l = + 1.

Podstawiając do związków (28) - (30) wartości l = -1 i l = 1 otrzymujemy $f_1 = f_2$, $e_1 = e_2$, $d_1 = d_2$, a więc

$$F_1(1,k) = F_2(1,k) = F_3(1,k) = F_4(1,k) \quad ; \quad F_1(-1,k) = F_2(-1,k) = F_3(-1,k) = F_4(-1,k)$$

Należy więc ostatecznie badać funkcję (40) dla l = 1 i -1

$$F(1,k) = T^2(0{,}75 - k^2) + T^3(k^2 - 0{,}75) + T^4\left(\frac{7}{16} - 0{,}25k^2 + \frac{1}{3}k^3\right)$$

$$F(-1,k) = T^2(0{,}75 - k^2) + T^3(k^2 - 0{,}75) + T^4\left(\frac{7}{16} - 0{,}25k^2 - \frac{1}{3}k^3\right)$$

Oczywiście jest $F(-1,k) \le F(1,k)$. Zachodzi

$$\det\bar{S} \geq F(-1,k) - G_2$$

co pozwala wnioskować o znaku $\det\bar{S}$ ze znaku prawej strony. Wprowadzimy nową zmienną pisząc

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} + T^2 x$$

i oznaczając

$$\bar{F}(x) = F\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2} + T^2 x\right) = T^4\left(-\sqrt{3}x + 3{,}349365 \cdot 10^{-2}\right) + T^5(\sqrt{3}x -$$

$$(45) \quad - 1880{,}6425) + T^6(-x^2 - 1{,}1830127x - 3107{,}6605) + T^7(x^2 - 3782{,}02)$$

$$+ T^8(-1{,}1160254x^2 - 6601{,}0) - T^{10}\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

Wartości funkcji $\bar{F}(x)$ w sposób istotny zależy od wyboru paramteru T. Na przykład dla $T = 10^{-2}$ jest $\bar{F}(x) < 0$ dla małych dodatnich x . Największe wartości funkcja osiąga dla $T = 1,1873122\ 10^{-5}$. Tę wartość przyjmiemy do dalszych obliczeń. Jest wówczas $\bar{F}(0)=0$. Ze względu na monotoniczność funkcji $\bar{F}(x)$, z faktu że dla pewnego $\bar{x} \in [0, (1-\frac{\sqrt{3}}{2})T^{-2}]$ zachodzi $\bar{F}(\bar{x})>0$ wynika że $\bar{F}(x)>0$ dla $x \in [0, \bar{x}]$ stąd znów wynika że $F(-1,k)-6>0$ dla $k \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}+T^2 x]$. Wyznaczenie najmniejszego dodatniego pierwiastka $\bar{x}$ równania

$$\bar{F}(x) \doteq 0$$

pozwala więc określić przedział $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}+T^2\bar{x}]$ w którym $\bar{F}(x)$ jest nieujemna, z czego wynika, że w tym przedziale jest

$$\det \bar{S} > 0$$

co jest jak mówiliśmy, jednym z dwu warunków dodatniej określoności macierzy $-\bar{S}$.

Po podstawieniu do (45) obranej wartości T otrzymujemy

$$\frac{1}{T^4}\bar{F}(x) = -9,3373995\cdot 10^{-31} x^3 - 1,4096935\cdot 10^{-10} x^2 - 1,7320303 x + 1,1164224\cdot 10^{-2}$$

Najmniejszy pierwiastek równania

$$\bar{F}(x) = 0$$

wyznaczono jako

$$x = 6,445744\cdot 10^{-3}$$

Skąd otrzymujemy jako wniosek

$$\det \bar{S} > 0 \quad \text{dla} \quad k \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2} + 9,086631\cdot 10^{-13}]$$

6. Zbadamy teraz znak wyrazu $\bar{S}_{11}$. Jest

$$\bar{S}_{11} = T[M_1]_{11} + T^2[M_2]_{11} + \ldots + T^8[M_8]_{11}$$

oraz

$$[M_1]_{11} = -(1+\ell k)$$

Mamy dla $|\ell| \leq 1$ i $k \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2} + 9,086631\cdot 10^{-13}]$

$$\max_{l,k} [-(1+l k)] < -1,338745 \cdot 10^{-1}$$

Szacując wyrazy pozostałych macierzy M_i, $i=2,\dots,8$ wzorami (32) - (39) i uwzględniając, że przyjęto T rzędu 10^{-5} łatwo upewnić się że zachodzi

$$\bar{S}_{11} < 0$$

7. Wnioski. Zgodnie z rozważaniami paragrafu 4 wykazaliśmy że macierz $-\bar{S}$ spełnia kryteria Silvestra dodatniej określoności co zapewnia na mocy poprzednich rozważań stateczność układu (15) .
Możemy więc sformułować wniosek:

Jeżeli funkcja spełnia warunek

(46) $$\sup_{t\in\mathcal{J}} |h(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + 9,086631 \cdot 10^{-13}$$

to układy

$$\ddot{z} + \dot{z} + [1+h(t)] z = 0$$

i odpowiadający mu układ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+h) & -1 \end{bmatrix} x$$

są stateczne.

Jak powiedzieliśmy na początku najlepszy dotąd wynik dotyczący stateczności układu (15) /a zarazem stateczności asymptotycznej przy użyciu drugiej metody Lapunowa/ uzyskano w pracy [2] . Warunki stateczności uzyskane tam /tj. cytowany tutaj warunek (17)/ i w tej pracy /tj. warunek (46)/ nie są w pełni porównywalne; rozumiemy przez to fakt że istnieją funkcje spełniające (17) a nie spałniające (46) , jak i odwrotnie są funkcje spełniające (46) a nie spełniające (17). Przykładem funkcji dla której (17) nie jest spełnione a zachodzi (46) /a więc tylko warunek tu wyprowadzony dowodzi stateczności układu dla tak przyjętej funkcji $h(t)$ / jest funkcja

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + 9{,}086631 \cdot 10^{-13} & \text{dla } t \neq n^2,\ n = 1, 2, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dla } t = n^2 \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Zaznaczmy od razu że wystarczy funkcję tę zmniejszyć co do wartości bezwzględnej o liczbę większą niż $9{,}086631\ 10^{-13}$ aby taka funkcja spełniała już warunek (17) . Poprwka rzędu 10^{-13} jaką daje uzyskane tu kryterium w stosunku do poprzednich nie ma żadnego znaczenia praktycznego; trzeba jednak powiedzieć że wskazaliśmy w ten sposób dotychczasowe wyniki można poprawić. Zarazem wykazaliśmy stosowalność twierdzenia. Trzeba podkreślić że wykonany przykład jest nietypowy - funkcja $h(t)$ nie została w tym przykładzie wyspecyfikowana /przyjęliśmy jedynie ograniczenia na jej kres dolny i górny/ co spowodowało konieczność prowadzenia poza szacowaniem błędu dodatkowych szacowań. Wynikła stąd znaczna ilość żmudnych obliczeń oraz zmniejszyła się dokładność z jaką wyznacza się rozwiązanie przybliżone /im mniejsza liczba wyrazów w rozwinięciu w szereg Peano uwzględniano tym mniej złożone były przekształcenia/. Można twierdzić, że w analizie stateczności układu o jednoznacznie zadanej prawej stronie można będzie z powodzeniem sformułować algorytm badania stateczności i stosować metody komputerowe, w których dokładność z jaką przyjmie się rozwiązanie przybliżone można będzie zwiększać do chwili dopóki będzie to polepszało warunek stateczności; wydaje się że w ten sposób można będzie uzyskać nowe w pełni przydatne w zastosowaniach wyniki dotyczące stateczności.

Literatura

[1] DEMIDOWICZ B.P., Matematyczna teoria stabilności, WNT Warszawa, 1972

[2] RADZISZEWSKI B., ZALESKI A., Asymptotyczna stateczność rozwiązań ...., Jubileusz prof. S.Ziemby, wyd. IPPT PAN Warszawa, 1977

[3] GANTMACHER F.R., Teoria matric, Nauka, Moskwa, 1966.

Andrzej OLAS
Zakład Układów Mechanicznych

O BADANIU STATECZNOŚCI RUCHU LINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

1. Teoria stateczności ruchu jest szybko rozwijającą się dziedziną mechaniki. Mimo, że w dorobku jej znajduje się szereg finezyjnych, jak idzie o aparat matematyczny, metod zdarza się, że teoria ta zawodzi w badaniu konkretnego układu fizycznego i to takiego, o którym intuicja poparta doświadczeniem mówi, że badane rozwiązanie jest stateczne. Dzieje się tak nawet w odniesieniu do powszechnie stosowanego i uważanego za jeden z prostszych modeli ruchu układu mechanicznego - równania różniczkowego zwyczajnego liniowego o zmiennych współczynnikach /myślimy tu o równaniu n-wymiarowym/. Równanie takie jest modelem ruchu takich układów fizycznych jak przekładnie zębate, układy z masą niewyważoną, układy z luzami itp. Wszelkie równania w wariacjach oraz równania wrażliwości układu są także tej postaci.

Powszechność stosowania powyższego modelu uzasadnia każdą próbę uzyskania nowego wyniku dotyczącego stateczności ruchu takiego modelu, byleby tylko wynik taki był zweryfikowany co do jego przydatności aplikacyjnej.

Prezentowana tu praca formułuje pewne nowe warunki stateczności równania liniowego. Przypomnijmy, że w odniesieniu do takiego równania zachodzi równoważność pojęć "stateczności w sensie Lapunowa" i "stateczności w sensie Lagrange'a", por. [1 str. 93] . Dlatego mówiąc o stateczności będziemy rozumieli przez to pojęcie zarówno stateczność w sensie Lapunowa jak i Lagrange'a. Praca składa się z szeregu lematów, twierdzenia i przykładu. Lemat 1 zawiera sformułowanie warunków dostatecznych na to, aby równanie było stateczne w sensie Lagrange'a. Następne trzy lematy zawierają sformułowanie warunków dostatecznych na to, aby funkcja jednej zmiennej była ograniczona od góry. W lemacie 5 dowodzi się własności wprowadzonej poprzednio funkcji $\overline{V}(t)$. Wreszcie twierdzenie formułuje warunki dostateczne stateczności równania liniowego umożliwiające uzyskanie w pewnych przypadkach wyników lepszych niż uzyskane dotąd metodą funkcji Lapunowa. Jako przykład zbadano stateczność często występującego w literaturze równania Hilla z tłumieniem postaci

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + [1+h(t)]y = 0$$

Dokonano porównania z wynikami dotychczasowymi; porównanie wykazuje, że udało się poszerzyć zbiór funkcji $h(t)$ zapewniających stateczność równania.

Pozostał do omówienia układ pracy. W pracy używa się pojęć z teorii stateczności, algebry macierzy i form kwadratowych, teorii równań różniczkowych i analizy matematycznej. Zwięzłe wyłożenie toku rozumowania przy użyciu tak różnorodnych pojęć możliwe było tylko przy przyjęciu bardzo sformalizowanego toku wykładu. Zastosowanie metody opisowej znacznie zwiększyłoby objętość pracy. W celu ułatwienia czytelnikowi śledzenia toku rozważań każdy paragraf zaczyna się od zadania opisującego jego zawartość.

2. W paragrafie tym omówimy założenia i przypomnimy pewną własność form kwadratowych.

Rozważać będziemy rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego o zmiennych współczynnikach. Równanie to badać będziemy w przestrzeni fazowej R^n, w przedziałach czasu należących do $J=(a,\infty), a>-\infty$.

Badamy równanie

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

gdzie $x \in R^n$, $t \in J$, $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $i,j = 1,\dots,n$. Przyjmiemy, że elementy $a_{ij}(t)$ są co najmniej klasy $C^0(J)$. Przez $x(t,t_0,x_0)$ oznaczymy rozwiązanie równania (1) o warunku początkowym $x(t,t_0,x_0) = x_0$. Oznaczymy $R^n_0 = R^n \setminus 0$, oznaczymy jeszcze $I = [t_0, \infty)$.

Rozważmy formę kwadratową rzeczywistą $\langle x, S(t)x \rangle$ /a więc z definicji macierz $S(t)$ jest symetryczna/, taką że elementy $s_{ij}(t)$ macierzy $S(t)$ są określone na J . Rozpatrywali będziemy formy kwadratowe o macierzach $S(t)$ takich, że elementy $s_{ij}(t)$ są ograniczone na J . Oznaczmy przez $\overline{\lambda}(t), \Lambda(t)$ odpowiednio najmniejszy i największy pierwiastek równania charaktyrystycznego $\det(S(t) - \lambda(t)I) = 0$. Wiadomo, że w tym przypadku pierwiastki równania charakterystycznego są także funkcjami ograniczonymi, a więc istnieją liczby $\inf\limits_{t \in J} \overline{\lambda}(t)$ i $\sup\limits_{t \in J} \Lambda(t)$.

Oznaczmy

$$(2) \qquad \inf_{t \in J} \overline{\lambda}(t) = a \quad , \quad \sup_{t \in J} \Lambda(t) = b$$

Jak wiadomo [1, str. 38] zachodzi

$$(3) \qquad \overline{\lambda}(t) \|x\|^2 \leqslant \langle x, S(t)x \rangle \leq \Lambda(t) \|x\|^2$$

Jak wiadomo, forma $\langle x, S(t)x \rangle$ jest dodatnio określona jeżeli jest $a > 0$.

Rozpatrzmy określony na $R^n_0 \times J$ iloraz $\dfrac{\langle x, S_1(t)x \rangle}{\langle x, S(t)x \rangle}$ dwóch form kwadratowych rzeczywistych, takich że forma znajdująca się w mianowniku jest dodatnio określona; oznaczmy przez $\overline{\lambda}_1(t), \Lambda_1(t)$ odpowiednio najmniejszy i największy pierwiastek równania charakterystycznego $\det(S_1(t) - \lambda(t)I) = 0$, oznaczmy także $a_1 = \inf\limits_{t \in J} \overline{\lambda}_1(t)$, $b_1 = \sup\limits_{t \in J} \Lambda_1(t)$. .

Zachodzi

$$\inf_{t \in J} \frac{\langle x, S_1(t)x \rangle}{\langle x, S(t)x \rangle} \geqslant \frac{\inf \langle x, S_1(t)x \rangle}{\sup \langle x, S(t)x \rangle} = \frac{a_1}{b}$$

$$\sup_{t\in J} \frac{\langle x, S_1(t)x\rangle}{\langle x, S(t)x\rangle} \leqslant \frac{\sup \langle x, S_1(t)x\rangle}{\inf \langle x, S(t)x\rangle} = \frac{b_1}{a}$$

a więc iloraz dwóch form kwadratowych, taki że forma stojąca w mianowniku jest dodatnio określona, jest funkcją ograniczoną na $R_0^n \times J$.

3. W paragrafie tym sformułujemy lemat dotyczący warunku dostatecznego stateczności w sensie Lagrange'a równania (1) .
Lemat 1. Niech dane będzie równanie (1) , takie że elementy macierzy $A(t)$ są klasy $C^0(J)$.

Jeżeli istnieje dodatnio określona, rzeczywista, symetryczna macierz $S(t)$ taka, że funkcja

$$\bar{V}(t) = \ln \langle x, S(t)x\rangle \Big|_{x = x(t,t_0,x_0)} \tag{4}$$

spełnia dla każdego $x_0 \in R_0^n, t_0 \in J, t \in I$ warunek, aby różnica $\bar{V}(t) - \bar{V}(t_0)$ była ograniczona z góry, to równanie jest steteczne w sensie Lagrange'a.
Dowód. Obierzmy x_0, t_0 ; sprawdzimy najpierw czy funkcja $\bar{V}(t)$ jest dobrze określona. Ponieważ jest $x_0 \in R_0^n$ to zachodzi $x(t,t_0,x_0) \in R_0^n$ i stąd

$$\langle x, S(t)x\rangle \Big|_{x = x(t,t_0,x_0)} > 0$$

i wobec tego $\bar{V}(t)$ jest dobrze określona na J . Zachodzi

$$\bar{V}(t) - \bar{V}(t_0) = \ln \frac{\langle x(t,t_0,x_0), S(t)x(t,t_0,x_0)\rangle}{\langle x_0, S(t)x_0\rangle} \tag{5}$$

Na mocy założenia o ograniczoności z góry różnicy $\bar{V}(t) - \bar{V}(t_0)$ istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego t mamy

$$\ln \frac{\langle x(t,t_0,x_0), S(t)x(t,t_0,x_0)\rangle}{\langle x_0, S(t)x_0\rangle} < M$$

czyli

$$(6) \qquad \frac{\langle x(t,t_0,x_0), S(t)x(t,t_0,x_0)\rangle}{\langle x_0, S(t)x_0\rangle} < e^M$$

Dokonamy oszacowania lewej strony wyrażenia (6). Na mocy nierówności (3) możemy napisać

$$(7) \quad \frac{\langle x(t,t_0,x_0), S(t)x(t,t_0,x_0)\rangle}{\langle x_0, S(t)x_0\rangle} \geqslant \frac{a\|x(t,t_0,x_0)\|^2}{b\|x_0\|^2}$$

przy czym na mocy dodatniej określoności formy $\langle x, S(t)x\rangle$ jest $a>0$, $b>0$. Z nierówności (6) i (7) wynika, że dla każdego t

$$(8) \qquad \frac{a\|x(t,t_0,x_0)\|^2}{b\|x_0\|^2} < e^M$$

Mamy wykazać, że równanie (1) jest stateczne w sensie Lagrange'a tzn., że [1] : - każde rozwiązanie $x(t,t_0,x_0)$ jest nieograniczenie przedłużalne w prawo, tzn. istnieje dla $t\in I$
- norma każdego rozwiązania $\|x(t,t_0,x_0)\|$ jest ograniczona w przedziale I.

Pierwsza własność jest znaną własnością równań liniowych o macierzy $A(t)$ dostatecznie regularnej i układ (1) własność tę ma. Należy wykazać że układ (1) ma własność drugą.

Rozwiązanie trywialne $x = 0$ jest ograniczone, wystarczy więc zbadać rozwiązania nietrywialne. Badamy rozwiązanie o obranych poprzednio warunkach początkowych x_0, t_0. Ze związku (8) otrzymujemy, że

$$\|x(t,t_0,x_0)\| < \left(\frac{b}{a}e^{M}\right)^{1/2}\|x_0\|$$

dla każdego $t\in I$ a więc norma tego rozwiązania jest ograniczona dla $t\in I$. Ponieważ warunki początkowe x_0, t_0 obrane były dowolnie, oznacza to, że ograniczona jest norma każdego rozwiązania w przedziale I, co chcieliśmy dowieść i co kończy dowód całego lematu.

4. Z wykazanego lematu wynika, że badanie stateczności równania (1) sprowadzić można do badania ograniczoności z góry różnicy $f(t)-f(t_0)$ pewnej funkcji jednej zmiennej f. Paragraf ten poświęcimy sformułowaniu warunków wystarczających na to, aby różnica $f(t)-f(t_0)$ była ograniczona z góry. Lemat 2 ma na celu wykazanie prawdziwości związku, który w lematach 3 i 4 będzie wykorzystany do sformułowania warunków dostatecznych ograniczoności z góry różnicy $f(t)-f(t_0)$.

Lemat 2. Niech będzie $f: J\to R$, $f\in C^m(J)$.

Dla każdego $k\in\{1,\dots,m\}$, $t_1,t_2\in J$ zachodzi związek

$$(9)\quad f(t_2)=f(t_1)+f'(t_1)(t_2-t_1)+\dots+f^{(k-1)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^{k-1}}{(k-1)!}+\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{\tau_1}\dots\int_{t_1}^{\tau_{k-1}} f^{(k)}(\tau_k)\,d\tau_k\dots d\tau_1$$

Dowód. Słuszność lematu wykażemy przez indukcję. Dla $k=1$ zachodzi wprost z definicji całki oznaczonej

$$(10)\quad f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} f'(\tau)\,d\tau$$

Wykażemy teraz, że jeżeli (9) zachodzi dla liczby $k\leq m-1$ to (9) zachodzi także dla liczby $k+1$.

Ponieważ jest $k\leq m-1$, to istnieje ciągła pochodna rzędu $k+1$. Wykorzystując (9) możemy zapisać

$$(11)\quad f'(t_2)=f'(t_1)+f^{(2)}(t_1)(t_2-t_1)+\dots+f^{(k)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^{k-1}}{(k-1)!}+\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{\tau_1}\dots\int_{t_1}^{\tau_{k-1}} f^{(k+1)}(\tau_k)\,d\tau_k\dots d\tau_1$$

Wstawiając (11) do (10) otrzymujemy

$$f(t_2)=f(t_1)+f'(t_1)(t_2-t_1)+\ldots+f^{(k)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^k}{k!}+\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{\tau_1}\ldots\int_{t_1}^{\tau_k} f^{(k+1)}(\tau_{k+1})\,d\tau_{k+1}\ldots d\tau_1$$

co dowodzi prawidłowości (9) dla liczby $k+1$ i kończy dowód.

Lemat 3. Niech będzie funkcja $f: J\to R$.

Jeżeli

(a) istnieje liczba naturalna m, taka że pochodne $f^{(i)}$, $i=1,\ldots,m$ istnieją i są ograniczone z góry na J

(b) istnieje liczba dodatnia ε taka że dla każdego $t\in J$ zachodzi

$$f^{(m)}(t)<-\varepsilon \tag{12}$$

to dla każdego $t_0\in J$, $t\in I$ różnica $f(t)-f(t_0)$ jest ograniczona z góry.

Dowód. Oznaczmy

$$K=\max_{i\in\{1,\ldots,m\}}\ \sup_{t\in J} f^{(i)}(t)$$

Oznaczmy dalej

$$M=\sup_{\tau>0} K\left(\tau+\frac{\tau^2}{2!}+\ldots+\frac{\tau^{(m-1)}}{(m-1)!}\right)-\varepsilon\frac{\tau^m}{m!}$$

Liczba $M<\infty$ istnieje gdyż $\lim_{\tau\to\infty} K\left(\tau+\ldots+\frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!}\right)-\varepsilon\frac{\tau^m}{m!}=-\infty$.

Dowód przeprowadzimy przez zaprzeczenie. Twierdzimy że f nie jest ograniczona, w szczególności twierdzimy że istnieje $t_0\in J$, $\bar t\in I$ takie że $f(\bar t)-f(t_0)>M$. Wartość funkcji f w chwili $\bar t$ oszacujemy korzystając ze wzoru (8).

Mamy

$$f(\bar t)=f(t_0)+f'(t_0)(\bar t-t_0)+\ldots+f^{(m-1)}(t_0)\frac{(\bar t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}+\int_{t_0}^{\bar t}\int_{t_0}^{\tau_1}\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}} f^{(m)}(\tau_m)\,d\tau_m\ldots d\tau_1$$

Korzystając z (11) i (12) jest

$$f(\bar{t})-f(t_0) \quad K\left[(\bar{t}-t_0)+\frac{(\bar{t}-t_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\bar{t}-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right]-\varepsilon\frac{(\bar{t}-t_0)^m}{m!}\leq M$$

co wykazuje sprzeczność i dowodzi lematu.

Lemat 4. Niech będzie funkcja $f: J \to R$.

Jeżeli

(a) istnieje liczba naturalna m taka, że pochodne $f^{(i)}, i=1,\ldots,m$ istnieją i są ograniczone z góry na J

(b) istnieje liczba dodatnia ε taka, że dla każdego $t \in J$ zachodzi albo

$$f^{(m-1)}(t)<-\varepsilon \quad \text{albo} \quad f^{(m)}(t)<-\varepsilon$$

to różnica $f(t)-f(t_0)$ jest dla każdego $t_0 \in J, t \in I$ ograniczona z góry.

Dowód. W chwili t_0 może być $f^{(m-1)}(t_0)\geq-\varepsilon$ lub $f^{(m-1)}(t_0)<-\varepsilon$

Przyjmijmy najpierw, że $f^{(m-1)}(t_0)<-\varepsilon$.

Wykażemy, że zachodzi

$$f^{(m-1)}(t)<-\varepsilon \quad \text{dla } t\in I \tag{13}$$

Dowód przeprowadzimy przez zaprzeczenie. Załóżmy, że tak nie jest, a więc istnieje $t_1\in I$ takie, że

$$f^{(m-1)}(t_1)=-\varepsilon, \; f^{(m-1)}(t)<-\varepsilon \quad \text{dla } t\in[t_0,t_1) \tag{14}$$

Na mocy (b) jest $f^{(m)}(t_1)<-\varepsilon$. Obierzmy t^* tak bliskie t_1, $t^*\in[t_0,t_1)$, aby zachodziło

$$f^{(m)}(t)<-\varepsilon \quad \text{dla } t\in(t^*,t_1) \tag{15}$$

Istnienie takiego t^* wynika z ciągłości funkcji $f^{(m)}(t)$.
Mamy

$$f^{(m-1)}(t_1)-f^{(m-1)}(t^*)=\int_{t^*}^{t_1} f^{(m)}(\tau)d\tau$$

$$f^{(m-1)}(t^*)=f^{(m-1)}(t_1)-\int_{t^*}^{t_1} f^{(m)}(\tau)d\tau$$

i na mocy (15) mamy

$$f^{(m-1)}(t^*)\geq -\varepsilon+\varepsilon(t_1-t^*)>-\varepsilon$$

co jest sprzeczne z (14) i dowodzi, że jeżeli

$$f^{(m-1)}(t_0)<-\varepsilon$$

to zachodzi (13) i na mocy lematu 3 różnica $f(t)-f(t_0)$ jest ograniczona z góry.
Pozostaje rozpatrzyć przypadek $f^{(m-1)}(t_0)\geq-\varepsilon$. Wykażemy, że istnieje chwila $\bar{t}\in I$ taka, że $f^{(m-1)}(\bar{t})<-\varepsilon$.
Przyjmijmy, że taka chwila nie istnieje. Wobec tego mamy

$$f^{(m)}(t)<-\varepsilon \qquad dla\ t\in I$$

i dalej

$$f^{(m-1)}(t)<f^{(m-1)}(t_0)-\varepsilon(t-t_0)$$

skąd przyjmując $\bar{t}=t_0+\frac{f^{(m-1)}(t_0)}{\varepsilon}+1$ otrzymujemy,

$$f^{(m-1)}(\bar{t})<-\varepsilon$$

a więc zgodnie z regułą Claviusa teza o istnieniu chwili $\bar{t}$ jest prawdziwa. Zmienność funkcji $f^{(m-1)}(t)$ w przedziale $[\bar{t},\infty)$ takim, że zachodzi $f^{(m-1)}(\bar{t})<-\varepsilon$ badaliśmy powyżej stwierdzając, że zachodzi

$$f^{(m-1)}(t)<-\varepsilon \qquad dla\ \ t\in[\bar{t},\infty)$$

Możemy zapisać

$$(16)\quad f(t)-f(t_0)=f(t)-f(\bar{t})+f(\bar{t})-f(t_0)$$

Różnica $f(t)-f(\bar{t})$ jest ograniczona z góry na mocy lematu 3. Różnica $f(\bar{t})-f(t_0)$ jest ograniczona ponieważ przedział $[t_0,\bar{t}]$ jest przedziałem ograniczonym.
Z (16) wynika wobec tego że różnica $f(t)-f(t_0)$ jest ograniczona z góry dla każdego $t_0 \in J, t \in I$, co kończy dowód lematu.

5. W paragrafie tym przypomnimy za [1] pojęcie pochodnej wzdłuż rozwiązań równania (1), oraz wprowadzimy pojęcie r-tej pochodnej wzdłuż rozwiązań (1).
Wprowadzonych pojęć użyjemy w dowodzie lematu 5.

Niech będzie następującym odwzorowaniem

$$(17) \quad F: J \times R_0^n \to R \qquad , F \in C^m(J \times R_0^n)$$

Wprowadzamy pojęcie pochodnej funkcji F wzdłuż rozwiązań równania (1), oznaczając ją $\dot{F}(t,x)$ i definiując następujące [1] :

$$(18) \quad \dot{F}(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} F, Ax \rangle \qquad \dot{F}: J \times R_0^n \to R$$

Kropka może więc oznaczać zarówno pochodną zwyczajną jak i pochodną wzdłuż rozwiązań. Aby uniknąć nieporozumień, wszędzie zapisując pochodną piszemy argumenty i wtedy $\dot{F}(t,x)$ oznacza pochodną funkcji $F(t,x)$ wzdłuż rozwiązań równania (1), zaś $\dot{f}(t)$ pochodną funkcji $f(t)$ względem czasu.

Z (18) otrzymujemy wzór na r-tą pochodną wzdłuż rozwiązań równania (1)

$$(19) \quad F^{(r)}(t,x) = \frac{\partial F^{(r-1)}}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} F^{(r-1)}, Ax \rangle$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli $F(t,x) \in C^m(J \times R_0^n)$, oraz elementy $a_{ij}(t)$ macierzy $A(t)$ są klasy $C^{m-1}(J)$ to F posiada pierwszą aż do m-tej pochodną wzdłuż rozwiązań równania (1).

Pomiędzy pochodną $F^{(k)}(t,x)$ a pochodną zwyczajną funkcji $\bar{F}(t)$, $\bar{F}(t) = F(t,x)|_{x=x(t,t_0,x_0)}$ zachodzi następujący związek

$$(20)\qquad \bar{F}^{(k)}(t) = F^{(k)}(t,x)\Big|_{x=x(t,t_0,x_0)}$$

Reguły obliczania pochodnej sumy, iloczynu, ilorazu funkcji są takie same jak przy obliczaniu pochodnej.

Pochodną wzdłuż rozwiązań równania (1) formy kwadratowej

$$(21)\qquad \sigma(t,x) = \langle x, S(t)x \rangle$$

jest forma kwadratowa

$$(22)\qquad u(t,x) = \langle x, (A^T(t)S(t) + S(t)A(t))x \rangle$$

Możemy teraz przystąpić do dowodu lematu 5. Lemat dotyczy własności funkcji $\bar{V}(t)$ danej związkiem (4).

Lemat 5. Niech dane będzie równanie (1) oraz macierz $S(t)$.

Jeżeli istnieje liczba naturalna m taka, że

(a) elementy $a_{ij}(t), i,j=1,\dots,n$ macierzy $A(t)$ są klasy $C^{m-1}(J)$, oraz funkcje $a_{ij}(t)$ tak jak i ich pochodne $a_{ij}^{(k)}(t)$, $k=1,\dots,m-1$ są ograniczone na J,

(b) macierz $S(t)$ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną o elementach $s_{ij}(t), i,j=1,\dots,n$ klasy $C^m(J)$ oraz funkcje $s_{ij}(t)$ jak i ich pochodne $s_{ij}^{(k)}(t), k=1,\dots,m$ są ograniczone na J

to dla każdego $t_0 \in J$, $x_0 \in R_0^n$ funkcja

$$(4)\qquad \bar{V}(t) = \ln \langle x, S(t)x \rangle \Big|_{x=x(t,t_0,x_0)}\ .$$

jest klasy $C^m(J)$, a pochodne $\bar{V}^{(i)}(t), i=1,\dots,m$ są ograniczone.

Dowód. Fakt, że $\bar{V}(t) \in C^m(J)$ wynika po pierwsze z założenia, że $S(t) \in C^m(J)$, po drugie z faktu, że ponieważ $a_{ij} \in C^{m-1}(J)$ to $x(t,t_0,x_0) \in C^m(J)$ oraz po trzecie z twierdzenia o regularności superpozycji funkcji[x/].

Przy poczynionych założeniach funkcja $V(t,x) = \ln\langle x, S(t)x\rangle$ posiada pierwszą aż do m-tej pochodną wzdłuż rozwiązań równania (1) /mówiliśmy o tym wyżej/. Aby wykazać ograniczoność pochodnych $\bar{V}^{(i)}(t)$ zbadamy właśnie pochodne $V^{(i)}(t,x)$. Uwzględniając związek (20) aby wykazać ograniczoność pochodnych $\bar{V}^{(i)}$ wystarczy wykazać ograniczoność pochodnych $V^{(i)}(t,x)$ w swoich zbiorach określoności.

Ograniczoność pochodnych $V^{(i)}(t,x)$ wykażemy wykorzystując wykazaną w paragrafie 1 ograniczoność ilorazu dwóch form kwadratowych. Dowód polegać będzie na wprowadzeniu wyrażenia pomocniczego $G(t,x)$ i wykazaniu ograniczoności jego pochodnych $G^{(i)}(t,x)$ /co zajmie większą część dowodu/ a następnie na wykazaniu, że ograniczoność $G^{(i)}(t,x)$ pociąga za sobą ograniczoność $V^{(i)}(t,x)$.

Rozpatrzmy to wyrażenie przyjmując, że ma ono pierwszą do m-tej pochodną wzdłuż rozwiązania równania (1),

$$G(t,x) = \prod_{j=1}^{r} w_j(t,x) \tag{23}$$

$$w_j(t,x) = \frac{u_j(t,x)}{v(t,x)} \tag{24}$$

a więc jest ono iloczynem skończonej liczby r czynników $w_j(t,x)$ mających postać ilorazu dwóch form kwadratowych, przy czym forma stojąca w mianowniku jest dana wzorem (21), a więc jest dodatnio określona.

Pochodna wzdłuż rozwiązania równania (1) takiego wyrażenia ma postać

$$\dot{G}(t,x) = \sum_{k=1}^{s}\Big[\dot{w}_k(t,x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r} w_j(t,x)\Big] \tag{25}$$

---

x/ Z regularności $V(t,x)$ wynika regularność $\bar{V}(t)$. Krócej jednak jest dowodzić regularności każdej z nich oddzielnie.

gdzie

$$(26) \qquad \dot{w}_k(t,x) = \frac{\dot{u}_k(t,x)}{\sigma(t,x)} - \frac{u_k(t,x)}{\sigma(t,x)} \cdot \frac{\dot{\sigma}(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

Uwzględniając fakt, że pochodne formy kwadratowej wzdłuż rozwiązania (1) jest także formą kwadratową i oznaczając

$$(27) \qquad \overline{w}_k(t,x) = \frac{\dot{u}_k(t,x)}{\sigma(t,x)} \qquad\qquad w(t,x) = \frac{-r\dot{\sigma}(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

gdzie $-r\dot{\sigma}(t,x)$ jest oczywiście formą kwadratową, otrzymamy

$$(28) \qquad \dot{G}(t,x) = \sum_{k=1}^{r} \overline{w}_k(t,x) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} w_j(t,x) + w(t,x)G(t,x)$$

a więc pochodna $\dot{G}(t,x)$ jest sumą $r+1$ składników z których każdy jest iloczynem analogicznej budowy jak iloczyn (23) , to znaczy, czynniki każdego z tych iloczynów mają postać ilorazu dwóch form kwadratowych, przy czym forma stojąca w mianowniku jest dana wzorem (21) a więc jest dodatnio określona.

Zbadamy teraz jaką postać ma pochodna wzdłuż rozwiązań równania (1) wyrażenia będącego sumą iloczynów postaci (23) , to znaczy wyrażenia

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{s} G_i(t,x) = \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} w_{ij}(t,x)$$

gdzie

$$(30) \qquad w_{ij}(t,x) = \frac{u_{ij}(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

i gdzie $u_{ij}(t,x)$ są formami kwadratowymi, zaś $G_i(t,x)$ ma pochodne $G^{(j)}(t,x), j=1,\dots,m$. Zgodnie z tym co stwierdziliśmy powyżej pochodna wzdłuż rozwiązań równania (1) każdego z iloczynów będących składnikami sumy (29) jest sumą iloczynów analogicznej postaci. Wobec tego pochodna wyrażenia (29) będącego sumą iloczynów postaci (23) jest także sumą iloczynów analogicznej postaci a więc

$$(31) \qquad \left[\sum_{i=1}^{s} G_i(t,x)\right]^{\bullet} = \sum_{i=1}^{\bar{s}} \prod_{j=1}^{\bar{r}_i} w_{ij}(t,x)$$

gdzie

$$(32) \qquad w_{ij}(t,x) = \frac{\bar{u}_{ij}(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

i gdzie $\bar{u}_{ij}(t,x)$ są formami kwadratowymi.

Powyżej stwierdzone fakty wystarczają aby do wykazania, że wszystkie pochodne $G^{(i)}(t,x), i=1,\dots,m$ są także sumą iloczynów postaci (23) można było użyć zasady indukcji. Rzeczywiście $\dot{G}(t,x)$ jest taką sumą. Jeżeli funkcja $G^{(k)}(t,x)$ jest sumą iloczynów postaci (23) to $G^{(k+1)}(t,x)$ /jeżeli istnieje/ także jest taką sumą. Z zasady indukcji matematycznej wynika wobec tego, że pochodne $G^{(i)}(t,x), i=1,\dots,m$ wyrażenia $G(t,x)$ są sumą iloczynów postaci (23).

Przedstawiając powyżej tok dowodu lematu, powiedzieliśmy że wykażemy ograniczoność pochodnych $G^{(i)}(t,x)$ wyrażenia $G(t,x)$ na zbiorze $J\times R^n_0$. Aby tę własność wykazać wystarczy, wykorzystując fakt, że wszystkie pochodne $G^{(i)}(t,x), i=1,\dots,m$ są skończoną sumą iloczynów postaci (23) wykazać ograniczoność iloczynu takiej postaci. Zgodnie z rozważaniami paragrafu 1 dowolna funkcja postaci (24) jest ograniczona na $J\times R^n_0$. Iloczyn skończonej liczby takich funkcji jest także ograniczony, skąd wynika poszukiwana ograniczoność pochodnych $G^{(i)}(t,x)$ na zbiorze $J\times R^n_0$.

Przechodzimy do wykazania ograniczoności pochodnych $V^{(i)}(t,x), i=1,\dots,m$. Mamy

$$(33) \qquad \dot{V}(t,x) = \frac{u(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

a więc $\dot{V}(t,x)$ jest funkcją ograniczoną i ma postać iloczynu (23) dla $r=1$. Wobec tego to co powiedziano wyżej o ograniczoności pochodnych wyrażenia (23) stosuje się do pochodnych $V^{(i)}(t,x), i=2,\dots,m$; w ten sposób skończyliśmy długi i żmudny dowód lematu 5.

6. Przechodzimy do sformułowania i dowodu twierdzenia o stateczności układu (1). W dowodzie wykorzystamy lematy 1, 3 i 4.

Twierdzenie. Niech dany będzie układ (1).

Jeżeli istnieją: liczba naturalna m, liczba dodatnia ε i dodatnio określona forma kwadratowa $\langle x, S(t)x \rangle$ takie, że spełnione są założenia:

(a) elementy $a_{ij}(t)$ macierzy $A(t)$ są klasy $C^{m-1}(J)$ i wraz z pochodnymi $a_{ij}^{(k)}(t), k=1,\dots,m-1$ są ograniczone na J

(b) elementy $s_{ij}(t)$ macierzy $S(t)$ są klasy $C^{m}(J)$ i wraz z pochodnymi $s_{ij}^{(k)}(t), k=1,\dots,m$ są ograniczone na J

(c) zachodzi[x/] dla każdego $(t,x) \in J \times R_0^n$

$$V^{(m)}(t,x) < -\varepsilon \quad \text{lub} \quad V^{(m-1)}(t,x) < -\varepsilon$$

to równanie (1) jest stateczne /zarówno w sensie Lapunowa jak i Lagrange'a/.

Dowód. Przyjmijmy dowolne $x_0 \in R_0^n, t_0 \in J$. Założenia (a) i (b) zapeniają na mocy lematu 5 istnienie i ograniczoność z góry pochodnych $\bar{V}^{(i)}(t), i=1,\dots,m$ funkcji (4) na przedziale I, a więc funkcja spełnia założenie (a) lematu 4.

Wykorzystując związek (20) wykażemy, że jeżeli zachodzi założenie (c) twierdzenia, to zachodzi zależność

---

x/ Dopuszczalna jest więc sytuacja taka, że ani pierwsza ani druga nierówność nie jest spełniona w całym zbiorze $J \times R_0^n$ byle by tam gdzie nie jest spełniona pierwsza nierówność, zachodziła druga i odwrotnie.

(34) $$\bigwedge_{t\in I}\left[(\bar{V}^{(m)}(t)<-\varepsilon)\vee(\bar{V}^{(m-1)}(t)<-\varepsilon)\right]$$

to znaczy, że dla każdego $t\in I$ zachodzi $\bar{V}^{(m)}(t)<-\varepsilon$ albo $\bar{V}^{(m-1)}(t)<-\varepsilon$. Przede wszystkim zapiszemy założenie (c) w postaci kwantyfikatorowej

(35) $$\bigwedge_{x\in R^n_0}\ \bigwedge_{t\in J}\left[(V^{(m)}(t,x)<-\varepsilon)\vee(V^{(m-1)}(t,x)<-\varepsilon)\right]$$

Twierdzimy, że jeżeli zachodzi (35) , to zachodzi (34) . Załóżmy, że tak nie jest, to znaczy, że zachodzi (35) i jednocześnie istnieje $t^*\in I$ takie że (34) nie zachodzi tzn. że jest jednocześnie

(36) $$\bar{V}^{(m)}(t^*)\geq-\varepsilon$$

(37) $$\bar{V}^{(m-1)}(t^*)\geq-\varepsilon$$

Na mocy (20) oznacza to, że zachodzi jednocześnie dla $\bar{x}=x(t^*,t_0,x_0)$

(38) $$V^{(m)}(t^*,\bar{x})\geq-\varepsilon$$

(39) $$V^{(m-1)}(t^*,\bar{x})\geq-\varepsilon$$

co jest sprzeczne z (35) i dowodzi, że (34) zachodzi, a więc spełnione jest założenie b lematu 4 . Spełnienie założeń lematu 4 pozwala twierdzić że różnica $\bar{V}(t)-\bar{V}(t_0)$ jest ograniczona z góry na I.

Jest więc spełnione założenie lematu 1 jak i stąd wynika, ponieważ rozumowanie powyższe jest prawdziwe dla każdego

$(t_0,x_0) \in J \times R^n_0$ równanie jest stateczne w sensie Lagrange'a, a więc jest stateczne także w sensie Lapunowa, co kończy dowód twierdzenia.

Zbadajmy teraz jaką formę przyjmują założenia twierdzenia dla przypadku $n=2, m=2$ /a więc $x \in R^n_0$ i badamy pochodne $\dot{V}(t,x), \ddot{V}(t,x)$ /; taki przypadek wystąpi w zamieszczonym na końcu pracy przykładzie. Mamy oznaczając $W = \langle x, S(t)x \rangle$

$$(40) \qquad \dot{V}(t,x) = \frac{\dot{W}(t,x)}{W(t,x)}$$

$$(41) \qquad \ddot{V}(t,x) = \frac{\ddot{W}(t,x)W(t,x) - (\dot{W}(t,x))^2}{(W(t,x))^2}$$

Łatwo zauważyć, że ograniczoność funkcji $\dot{V}(t,x), \ddot{V}(t,x)$ wystarczy badać na zbiorze $J \times \bar{S}_1$ zamiast na zbiorze $J \times R^n_0$ gdzie $\bar{S}_1$ jest okręgiem jednostkowym w R^2

$$\bar{S}_1 = \{ x \in R^2 : x_1 = \cos\alpha, \; x_2 = \sin\alpha, \; \alpha \in [0, 2\pi) \}$$

Dalej ze względu na ograniczoność funkcji $W(t,x)$ na okręgu jednostkowym wystarczy badać tylko liczniki prawych stron wyrażeń (40), (41).

Stąd założenie (c) twierdzania w naszym przypadku przyjmuje postać

(c) zachodzi dla każdego $t \in J, x \in \bar{S}_1$

$$(42) \qquad \dot{W}(t,x) < -\varepsilon$$

lub

$$(43) \qquad \ddot{W}(t,x)W(t,x) - (\dot{W}(t,x))^2 < -\varepsilon$$

Powróćmy do udowodnionego twierdzenia.

Przy tych samych założeniach można sformułować i dowieść twierdzenie o stateczności asymptotycznej równania (1) ; dowodem tego faktu w tej pracy, ze względu na brak miejsca, nie będziemy się zajmowali. Pozostawimy także otwartą kwestię relacji między założeniami twierdzenia Lapunowa o stateczności asymptotycznej i założeniami twierdzenia sformułowanego w tej pracy. Natomiast zgodnie z tym co powiedzieliśmy na początku pracy przedstawimy przykład ilustrujący zastosowanie tw erdzenia dla badania równania Hilla z tłumieniem. Na tym przykładzie wykażemy, że zastosowanie sformułowanego wyżej twierdzenia może dać wynik ogólniejszy niż zastosowanie twierdzenia Lapunowa.

7. Przykład. Rozpatrzmy równanie

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + [1 + f(t,y,\dot{y})]\,y = 0 \tag{44}$$

gdzie $a > 0$, $f(t,0,0) = 0$.

Najlepsze wyniki dotyczące stateczności rozwiązania trywialnego takiego równania /badano stateczność wykładniczą/ uzyskano w pracach B.Radziszewskiego i innych [2, 3, 4]. Równanie (44) badano w postaci równania pierwszegi rzędu

$$\dot{x} = A(t)\,x \qquad x \in R^2 \tag{45}$$

gdzie

$$f(t,y,\dot{y}) = g(t,x)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+g(t,x)) & -2a \end{bmatrix}$$

Stusując opracowaną w [2] metodę doboru najlepszej w pewnym sensie f'nkcji Lapunowa wyznaczono tam taką funkcję w postaci

$$W = \langle x, Sx \rangle \tag{46}$$

gdzie

(47) $$S = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(48) $$S = \begin{bmatrix} 2a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zastosowanie tej funkcji daje następujące warunki dostateczne stateczności wykładniczej rozwiązania trywialnego równania (44)

(49) $$c_1(a) + \varepsilon \leqslant f(t,y,\dot{y}) \leqslant c_2(a) - \varepsilon$$

gdzie

(50) $$c_1(a) = \begin{cases} -2a\sqrt{1-a^2} & \text{dla} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & \text{dla} \quad a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(51) $$c_2(a) = \begin{cases} 2a\sqrt{1-a^2} & \text{dla} \quad 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4a^2 - 1 & \text{dla} \quad a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią.

Rozpatrzmy szczególny przypadek równania (44), a mianowicie gdy jest

(52) $$f(t,y,\dot{y}) = h(t) \quad , \; h \in C^1(J)$$

Wykażemy że w tym przypadku zbiór funkcji (4) takich, że równanie (44) jest stateczne można rozszerzyć. Równanie (44) zbadamy dla $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Równanie (44) badać będziemy w postaci (45) gdzie

$$(53)\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+h(t)) & -2a \end{bmatrix}$$

stosując wyżej sformułowane twierdzenie dla $m=2,\ n=2$. Przyjmiemy $V = \ln W(t,x)$ gdzie W jest dane przez (46) zaś S przez (47). Mamy

$$(54)\qquad \dot{W}(t,x) = \langle x, S_1 x\rangle\ ,\quad \ddot{W}(t,x) = \langle x, S x\rangle$$

$$(55)\qquad S_1 = \begin{bmatrix} -2a-2ah & -2a^2-h \\ -2a^2-h & -2a \end{bmatrix};\quad S_2 = \begin{bmatrix} (4a^2+2h)(1+h)-2a\dot{h}, & 2ah+4a^3-\dot{h} \\ 2ah+4a^3-\dot{h} & ,\ 4a^2-2h \end{bmatrix}$$

Tok postępowania przedstawia się następująco. Równanie (45) i macierz S spełniają założenia (a) i (b) twierdzenia dla $m=2$. Wobec tego równanie (45) będzie stateczne dla takich funkcji dla których istnieje $\varepsilon>0$ takie, że spełnione jest założenie (c) w postaci podanej na końcu paragrafu 6. Będziemy więc badali wyrażenia (42), (43) na kole jednostkowym $S_1 \subset R^2$ podstawiając do nich związki (54); zauważmy, że czas t występuje w tych wyrażeniach tylko jako argument funkcji $h(t)$ i $\dot{h}(t)$ co uwzględniamy w oznaczeniach. Oznaczając lewe strony wyrażeń (42), (43) przez $W_1(h(t),\alpha)$, $W_2(h(t),\alpha,\dot{h}(t))$ /po wprowadzeniu parametryzacji α okręgu jednostkowego S_1/, a więc

$$(56)\qquad W_1(h(t),\alpha) = \dot{W}(t,x)\Big|_{\substack{x_1=\cos\alpha \\ x_2=\sin\alpha}}$$

$$(57)\qquad W_2(h(t),\dot{h}(t),\alpha) = \left[\ddot{W}(t,x)W(t,x) - (\dot{W}(t,x))^2\right]\Big|_{\substack{x_1=\cos\alpha \\ x_2=\sin\alpha}}$$

otrzymamy

(58) $$W_1(h(t),\alpha) = -2a\beta_1(\alpha) - \beta_2(\alpha)h(t)$$

(59) $$W_2(h(t),\dot{h}(t),\alpha) = \beta_1(\alpha)\left[2\cos 2\alpha - 2a\beta_2(\alpha)\right]h(t) + $$
$$+ h^2(t)\left[2\beta_1(\alpha)\cos^2\alpha - \beta_2^2(\alpha)\right] - \beta_1(\alpha)\beta_2(\alpha)\dot{h}(t)$$

gdzie

(60) $$0 < \beta_1(\alpha) = 1 + a\cos 2\alpha$$

(61) $$\beta_2(\alpha) = 2a\cos^2\alpha + \sin 2\alpha$$

Po dokonanych przekształceniach zadanie przedstawia się następująco: należy wyznaczyć takie funkcje $h(t)$ dla których istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $t \in J$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ zachodzi albo

(62) $$W_1(h(t),\alpha) < -\varepsilon$$

albo

(63) $$W_2(h(t),\dot{h}(t),\alpha) < -\varepsilon$$

Poszukiwany wynik uzyskano tutaj szacując z góry i z dołu wyrażenia $\beta_1(\alpha)$ i $\beta_2(\alpha)$. Nie przytoczymy tu z braku miejsca szacowań prowadzących do celu, natomiast zwrócimy uwagę na sposób szacowania wyrażenia $-\beta_2(\alpha)h(t)$. Wyrażenie to używane jest w szacowaniu nierówności (63) wtedy gdy (62) nie zachodzi. Jest wtedy wobec tego

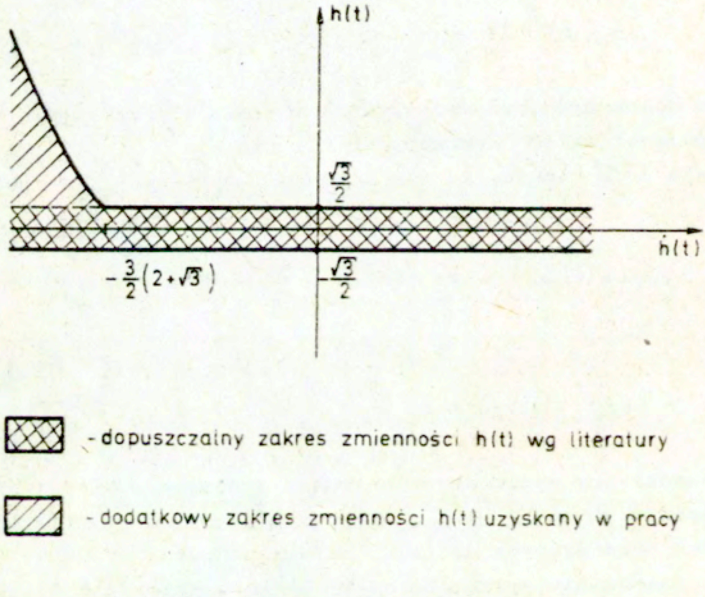
$$-2a\beta_1(\alpha) - \beta_2(\alpha)h(t) \geq -\varepsilon$$

skąd wynika

$$\beta_2(\alpha) < 0$$

$$-\beta_2(\alpha)h(t) \geq 2a\beta_1(\alpha) - \varepsilon$$

Szacując wyrażenie (62), (63) otrzymujemy w interesującym nas przedziale zmienności parametru $\alpha \in [0, 2\pi)$ następujące warunki na funkcję $h(t)$ zapewniające stateczność równania (44)
Jeżeli $-2a\sqrt{1-a^2}+\varepsilon_1 < h(t) < 2a\sqrt{1-a^2}-\varepsilon_1$ to $\dot{h}(t)$ jest dowolne. Jeżeli
$h(t) \geqslant 2a\sqrt{1-a^2}-\varepsilon_1$ to $\dot{h}(t) < -\frac{1+a}{a(1-a^2)} h^2(t)[1+h(t)-\varepsilon_1$
gdzie ε_1 jest dowolną stałą dodatnią.
Pierwszy z tych warunków jest identyczny z warunkiem (49) z literatury. Drugi z nich nie jest znany w literaturze.
Załączony rysunek 1 ilusturje uzyskany wynik dla $a = \frac{1}{2}$.



rys. 1

Literatura

[1] Demidowicz B.P., Matematyczna teoria stanilności, WNT Warszawa, 1972

[2] Radziszewski B., O najlepszej funkcji Lapunowa ...., Prace IPPT, 26, 1977

[3] Radziszewski B., Szadkowski A., O odborze najlepszej funkcji Lapunowa, Nonlin. Vibr. Probl. 18, 1977

[4] Radziszewski B., Zaleski A., Asymptotyczna stateczność rozwiązań ..., Jubileusz prof. S.Ziemby, wyd. IPPT PAN 1977.