Anna Brahmer-Kacprzyńska
Walter Zielke

Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

FUNKCJA RIEMANNA DLA UKŁADU RÓWNAŃ MAXWELLA OŚRODKA ANIZOTROPOWEGO

Relacje pomiędzy falami padającymi, odbitymi i przepuszczonymi /transmitowanymi/ przez pewną warstwę ośrodka można otrzymać korzystając z własności odpowiedniej funkcji Riemanna.

W pracy wyprowadzimy takie związki całkowe dla fal będących rozwiązaniami układu równań hiperbolicznych postaci /1/:

/1/ $$L[U] \equiv I U_t + \Lambda U_x + Z(x) U = 0$$

Jest to układ równań hiperbolicznych dyspersyjnych z dwoma zmiennymi niezależnymi t oraz x. W przyjętym zapisie wskaźniki dolne oznaczają różniczkowanie. Wektor U ma cztery składowe. $Z(x)$ jest macierzową funkcją zmiennej przestrzennej. Funkcja ta znika poza skończonym obszarem $0<x<l$.

Przyjmujemy, że badany układ jest dany w postaci normalnej tzn. macierz Λ jest macierzą diagonalną, której elementami są odpowiednie pierwiastki charakterystyczne układu:

/2/ $$\lambda_i = \frac{dx_i}{dt}$$

Badany układ ma 4 rzeczywiste, stałe pierwiastki charakterystyczne λ_i . Mogą być one podwójne, wtedy układ jest nie "w pełni hiperbolicznym". Charakterystyki układu /1/ są liniami prostymi. Macierz Λ ma postać:

/3/
$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}$$

Zakładamy iż zachodzi $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3, \lambda_4 < 0$.

Do postaci /1/ z omówionymi powyżej własnościami można sprowadzić układ równań Maxwella opisujący propagację fal elektromagnetycznych w ośrodku anizotropowym, przy założeniu, że wektory pól E oraz H są funkcjami tylko jednej zmiennej przestrzennej. Wyrazem odpowiedzialnym za dyspersję, a więc nieróżniczkowanym, będzie wyraz związany z przewodnością ośrodka [1]. Zakładamy, że jest on różny od zera tylko dla pewnej warstwy zajmującej obszar $0<x<l$.

Charakterystyki układu równań /1/ dzielą półprzestrzeń x, t $(t>0)$ na 6 obszarów jak na rys. 1. Zgodnie z teorią równań różniczkowych cząstkowych [2] układ równań /1/ w postaci diagonalnej jest równoważny układowi równań całkowych spełnionych wzdłuż krzywych charakterystycznych. Jeśli na krzywej charakterystycznej C_k wprowadzi się różniczkowanie w kierunku charakterystyki:

/4/
$$\frac{d}{dt} = D^k = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

to układ /1/ można zapisać następująco:

/5/
$$\frac{d}{dt} U_k = \left[Z(x) U \right]_k \qquad (k = 1, \dots 4)$$

gdzie wskaźnik κ oznacza składowe wzdłuż charakterystyk. Układowi równań /5/ odpowiada układ równań całkowych:

/6/ $$U_\kappa(x,t) = U_\kappa(x^{(0)},0) - \int_{C_\kappa} [Z(x)U]_\kappa \, dt$$

Zakładamy, że w obszarze $x<0$ istnieje "fala padająca" U_+^i, o postaci:

/7/ $$U_+^i = \begin{vmatrix} u_1^i(x-\lambda_1 t) \\ u_2^i(x-\lambda_2 t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie tej postaci jest zgodne z własnościami układu /1/. Padanie fali płaskiej U_+^i zgodnie z kierunkiem dodatniej osi x na warstwę zajmującą obszar $0<x<l$ spowoduje pojawienie się w obszarze $x<0$ fal odbitych U_+^r oraz fal transmitowanych U_+^t w obszarze $x>l$

Rozważając układ równań całkowych /6/ dla kolejnych obszarów jak na rys. 1 zbadamy obszary występowania tych fal dla różnych położeń punktu obserwacji (β,τ)

Obszar I:

$$\beta \leq 0, \quad \beta - \lambda_\kappa \tau < 0, \qquad \kappa = 1,2,3,4.$$

W obszarze tym $Z=0$, ~~więc~~ w układzie /6/ wszystkie funkcje $[Z(x)U]_\kappa$ wzdłuż odpowiednich krzywych C_κ są równe zeru. Wobec tego zgodnie z założeniem /7/ otrzymujemy

/8/ $$U(\beta,\tau) = \begin{vmatrix} u_1^i(\beta-\lambda_1\tau) \\ u_2^i(\beta-\lambda_2\tau) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

przy czym $u_1^i(\beta - \lambda_1\tau) = u_1^i(x_1)$, $u_2^i(\beta - \lambda_2\tau) = u_1^i(x_2)$

W obszarze II:

$$\beta \leq 0 \ , \ \beta - \lambda_1\tau < 0 \ , \ \beta - \lambda_2\tau < 0 , \ \beta - \lambda_3\tau < 0 \ , \ \beta - \lambda_4\tau > 0$$

tylko charakterystyka C_4 przechodzi przez obszar $Z \neq 0$ przy czym dla wszystkich punktów β , τ leżących na niej otrzymujemy te same wartości U_4 , wobec tego otrzymujemy:

/9/ $$U(\beta,\tau) = \left| \begin{matrix} u_1^i(\beta - \lambda_1\tau) \\ u_2^i(\beta - \lambda_2\tau) \\ 0 \\ u_4(\beta - \lambda_4\tau) \end{matrix} \right|$$

gdzie $$u_4(\beta - \lambda_4\tau) = \int_0^\tau [Z(x)U]_4 \, dt$$

Postępując analogicznie otrzymuje się

Obszar III:

$$\beta \leq 0 \ , \ \beta - \lambda_1\tau < 0 \ , \ \beta - \lambda_2\tau < 0 \ , \ \beta - \lambda_3\tau > 0 \ , \ \beta - \lambda_4\tau > 0$$

/10/ $$U(\beta,\tau) = \left| \begin{matrix} u_1^i(\beta - \lambda_1\tau) \\ u_2^i(\beta - \lambda_2\tau) \\ u_3^r(\beta - \lambda_3\tau) \\ u_4^r(\beta - \lambda_4\tau) \end{matrix} \right|$$

Obszar IV $\beta \geq l$, $\beta - \lambda_1\tau < 0$, $\beta - \lambda_2\tau < 0$, $\beta - \lambda_3\tau > 0$, $\beta - \lambda_4\tau > 0$

Charakterystyki $C_{3,4}$ nie przechodzą przez warstwę $Z \neq 0$

a $\int_{C_{1,2}} [Z(x)U]_{1,2}\, dt = U^t_{1,2}\ (\beta - \lambda_{1,2}\tau)$

/11/ $$U(\beta,\tau) = \begin{vmatrix} u_1^t\ (\beta - \lambda_1\tau) \\ u_2^t\ (\beta - \lambda_2\tau) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Obszar V $\beta \geq l$, $\beta - \lambda_1\tau < 0$, $\beta - \lambda_2\tau > 0$, $\beta - \lambda_3\tau > 0$, $\beta - \lambda_4\tau > 0$

Charakterystyki $C_{3,4}$ nie przechodzą przez warstwę $Z \neq 0$ a charakterystyka C_2 nie trafia na obszar niezerowych wartości początkowych U^i

/12/ $$U(\beta,\tau) = \begin{vmatrix} u_1^t\ (\beta - \lambda_1\tau) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Obszar VI $\beta \geq l$, $\beta - \lambda_1\tau > 0$, $\beta - \lambda_2\tau > 0$, $\beta - \lambda_3\tau > 0$, $\beta - \lambda_4\tau > 0$

Wszystkie punkty (β,τ) w tym obszarze znajdują się poza obszarem wpływu niezerowych warunków początkowych zgodnie z założeniem /7/, wobec tego

/13/ $$U = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Relacje całkowe między falami padającymi, odbitymi i przepuszczonymi przez warstwę można otrzymać dzięki funkcji Riemanna, podobnie jak w pracy [3] dla układu równań teorii magnetojonowej.

Dla układu /1/ wprowadza się tensorową funkcję Riemanna czterech zmiennych $R(x,t;\beta,\tau)$, żądając, aby spełniała ona równanie sprzężone względem /1/.

/14/ $$\overset{*}{L}_{x,t}[R] = \left(-I\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda\frac{\partial}{\partial x} + Z^{Tr}(x)R\right) = 0$$

oraz warunek "końcowy" dla $t=\tau$

/15/ $$R(x,\tau;\beta,\tau) = \delta(x-\beta)\,I$$

gdzie x,τ - punkt obserwacji,
x,t - bieżący punkt całkowania.

Dzięki tym własnościom funkcji Riemanna i warunkowi początkowemu /7/ dla fali padającej, całkując tożsamość

/16/ $$R\,L[U] - \overset{*}{L}[R]\,U = \frac{\partial}{\partial x}\,R\Lambda U + \frac{\partial}{\partial t}(RU)$$

po półnieskończonym pasku $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $x \geqslant 0$ otrzymamy:

/17/ $$U(\beta,\tau) = \int_{\substack{0\\x=0}}^{-\beta+\tau} R(0,t;\beta,\tau)\,\Lambda\,U(0,t)\,dt$$

Wykonując całkowanie tożsamości /16/ po pasku: $x \leq l$, $0 \leq t \leq \tau$ otrzymamy:

$$U(\beta,\tau) = \int\limits_{\substack{\beta-\tau \\ t=0}}^{0} R\, U(0,x)\, dx \;-\; \int\limits_{\substack{0 \\ x=l}}^{t_0=\beta+\tau-l} R\, \Lambda\, U(l,t)\, dt \tag{/18/}$$

W zależności od tego, w którym z obszarów I - VI znajduje się punkt β,τ otrzymamy różne związki między odpowiednimi falami.

Dla rozwiązania problemu odwrotnego, polegającego na znalezieniu nieznanego współczynnika $Z(x)$ w układzie /1/ interesujące są punkty obserwacji z obszaru III i IV.

Związki całkowe przyjmują wtedy postać:

Obszar III :

$$\begin{vmatrix} u_1^i(\beta-\lambda_1\tau) \\ u_2^i(\beta-\lambda_2\tau) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^r(\beta-\lambda_3\tau) \\ u_4^r(\beta-\lambda_4\tau) \end{vmatrix} = \tag{/19/}$$

$$= \int\limits_{\substack{\beta-\tau \\ t=0}}^{0} R(x,0;\bar{\beta},\tau) \begin{vmatrix} u_1^i(x-0) \\ u_2^i(x-0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} dx \;-\; \int\limits_{x=l}^{\beta+\tau-l} R(l,t;\beta,\tau)\,\Lambda \begin{vmatrix} u_1^i(l-\lambda_1 t) \\ u_2^i(l-\lambda_2 t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} dt$$

$$\begin{vmatrix} u_1^t(\beta-\lambda_1\tau) \\ u_2^t(\beta-\lambda_2\tau) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \int_0^{-\beta+\tau} R(0,-\beta+\tau;\beta,\tau)\,\Lambda \begin{vmatrix} u_1^i(\beta-\lambda_1\tau) \\ u_2^i(\beta-\lambda_2\tau) \\ u_3^r(\beta-\lambda_3\tau) \\ u_4^r(\beta-\lambda_4\tau) \end{vmatrix} \tag{20}$$

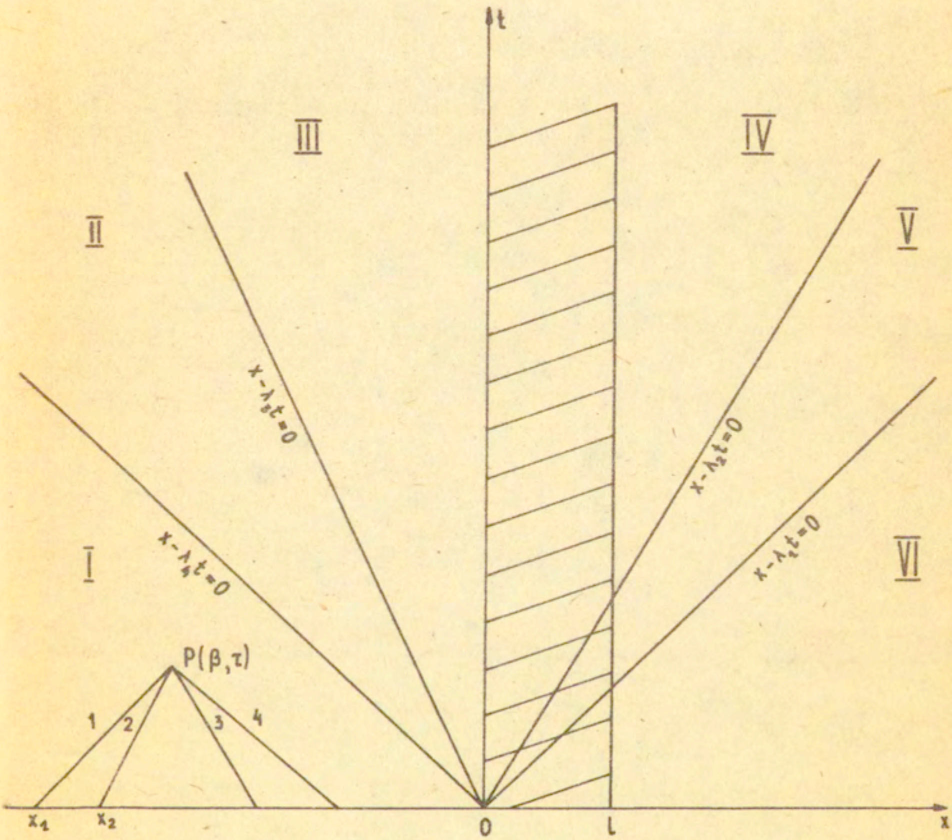
Wykorzystanie otrzymanych relacji w połączeniu z pomiarami wielkości U^i, U^r, U^t poza warstwą doprowadza do określenia współczynnika $Z(x)$ związanego z parametrami warstwy badanej.

LITERATURA

[1] J.A. STRATTON - Electromagnetic Theory, New York 1941.

[2] R. COURANT, D. HILBERT - Methods of Mathematical Physics, vol II, Interscience, New York 1966.

[3] A. BRAHMER-KACPRZYNSKA, W.ZIELKE - Funkcja Riemanna dla układu równań magnetojonowej plazmy, Prace IPPT, 61/76.


t
III
IV
II
V
$x-\lambda_3 t=0$
$x-\lambda_2 t=0$
I
$x-\lambda_4 t=0$
$x-\lambda_1 t=0$
VI
$P(\beta,\tau)$
1
2
3
4
x_1
x_2
0
l
x

Rys. 1