

2.20 — zagadnienia ogólne i varia

Elżbieta Walerian
Ryszard Janczar

TEORIE DYFRAKCJI
STOSOWANE DO OPISU
SKUTECZNOŚCI EKRANÓW AKUSTYCZNYCH

25/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 listopada 1984 r.



56923



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 2,43 Ark.druk. 4.25
Oddano do drukarni w czerwcu 1985 r.
Nr zamówienia 365/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Elżbieta Walerian

Ryszard Janczur

Zakład Aeroakustyki

IPPT PAN

TEORIE DYFRAKCJI STOSOWANE DO OPISU
SKUTECZNOŚCI EKRANÓW AKUSTYCZNYCH

I. Wstęp

Teorie dyfrakcji rozwinięte na gruncie optyki dla fal krótkich w porównaniu z wymiarami przeszkód, mają swoje zastosowanie w akustyce, przy tych samych założeniach o geometrii układu. Pod terminem dyfrakcja rozumie się w tym przypadku ugięcie fali na krawędzi przeszkody. W rzeczywistych układach akustycznych, w których dominującym zjawiskiem jest dyfrakcja, wykorzystanie przybliżonych, optycznych teorii dyfrakcji daje opis o zadowalającej zgodności z wynikami pomiarów.

Oba te warunki: dotyczący wymiarów i występowania dyfrakcji jako dominującego zjawiska, spełnione są w układach urbanistycznych. W teoretycznym opisie układów urbanistycznych można również, w stosunkowo prosty sposób, uwzględnić istnienie fal odbitych. Natomiast stosowanie teorii dyfrakcji do opisu pola w różnego rodzaju wnętrzach nastęrcza wiele trudności.

W układach urbanistycznych, gdzie dominuje hałas od tras komunikacyjnych, można również stosunkowo prosto opisać źródło. Pojedynczy pojazd, w odpowiednio dużej odległości można traktować jako

źródło punktowe [4]. W związku z tym trasę komunikacyjną przedstawia się jako ciąg źródeł punktowych rozmieszczonych wzdłuż linii odpowiadającej przebiegowi trasy. W odpowiednio dużych odległościach można przejść do modelu źródła liniowego [1], [2], którego działanie określa się wykonując całkowanie po rozłożonych wzdłuż linii źródłach punktowych.

Widmo hałasów komunikacyjnych ma również charakterystyczny kształt, dlatego w ramach teoretycznego opisu można wykonywać obliczenia dla jednej częstotliwości, następnie całkować po zadanym kształcie widma, podając odpowiednie wartości dla wybranych pasm, względnie dla całego widma skorygowanego krzywą A, otrzymując poziom dźwięku w dB/A/.

Ze względu na wymienione cechy źródeł hałasów komunikacyjnych, w teoretycznych rozważaniach dotyczących elementarnego zjawiska dyfrakcji można przyjąć działanie monochromatycznego źródła punktowego.

Ekranu akustyczne w urbanistyce to przede wszystkim specjalne konstrukcje w postaci ścian ekranujących hałas. Rolę ekranów mogą pełnić również jedne budynki w stosunku do drugich [5], względnie przyny ziemne [6].

Pierwszy rodzaj ekranów - ekrany płaskie, w swoim oddziaływaniu z falą akustyczną są traktowane jako półpłaszczyzny, na których zadane są określone warunki brzegowe. W ten sposób nie uwzględnia się istnienia podłoża, pomija się długość ekranu, zakładając, że jest ona wystarczająco duża aby wpływ fal ugiętych na bocznych krawędziach był do pominięcia. Nie uwzględnia się grubości ekranu i jego wewnętrznej struktury.

Ekran o skończonej grubości można zastąpić ekranem płaskim o odpowiednio dobranych wymiarach [5],[7]. Chcąc uwzględnić wewnętrzną strukturę ekranu: fakt, że fala propaguje się w jego wnętrzu, ulegając tam odbiciu, częściowemu rozproszeniu i ponownemu wypromieniowaniu do ośrodka należałoby posłużyć się metodami opisu stosowanymi dla pola elektromagnetycznego w falowodach [8].

Traktując ekran jako ekran płaski zakłada się, że jest on doskonale miękki / $p = 0$ (warunek Dirichleta) / lub doskonale twardy / $v_n = 0$ (warunek Neumanna) /. O ile przyjęcie ekranu doskonale twardego jest słuszne dla ekranów nie wyłożonych materiałem pochłaniającym, o tyle przyjęcie ekranu doskonale miękkiego dla przypadku ekranu z warstwą pochłaniającą może budzić wątpliwości. Warunek zerowania się ciśnienia akustycznego jest spełniony, gdy fala przechodzi z ośrodka gęstego akustycznie do znacznie rzadszego. Ma to miejsce w przypadku propagacji fali np. w wodzie przy wewnętrznym odbiciu od tafli wody, względnie przy rozproszeniu na pęcherzyku powietrza w wodzie.

Mimo tych zastrzeżeń traktując ekran pochłaniający jako doskonale miękki, dokonuje się obliczeń rozkładu pola wokół ekranu, gdzie po jednej stronie zeruje się ciśnienie akustyczne a po drugiej prędkość akustyczna [9],[10], oraz ekranu na którego obu stronach $v_n = 0$, ale u szczytu ekranu jest warstwa, na której $p = 0$ [11].

Na podstawie obliczeń wykonanych dla tych przypadków wnioskuje się o tym, z której strony ekranu umieszczenie warstwy

Pochłaniającej jest korzystniejsze ze względu na jego skuteczność i jaka z tego samego punktu widzenia powinna być szerokość warstwy pochłaniającej u szczytu ekranu.

Własności rzeczywistych powierzchni wyłożonych materiałem pochłaniającym są takie, że fala oddziałując z nim ulega odbiciu zmieniając swoją amplitudę, doznając jednocześnie przesunięcia fazy. Odpowiada to zespolonej impedancji powierzchniowej. Rozwiązanie oddziaływania półpłaszczyzny o takich właściwościach z falą akustyczną przedstawił między innymi de Bruijn [12].

Dość szeroko rozważane są przypadki umieszczenia ekranu o idealnych własnościach / "ekranu Kirchhoffa", eliminującego falę padającą / na podłożu o zespolonej impedancji powierzchniowej, jakim jest podłoże ziemne. Wprowadzenie podłoża powoduje to, że dyfrakcji na krawędzi ekranu podlega nie tylko fala padająca ze źródła ale również fala odbita od podłoża, obie zaś ulegają ponownemu odbiciu od podłoża. W punkcie obserwacji następuje interferencja tych fal [3], [6], [13], [14].

Ośrodkiem w którym propaguje się fala jest powietrze, w opisie teoretycznym traktuje się je jako idealny gaz, będący jednorodnym, nieruchomym ośrodkiem sprężystym, w którym propaguje się fala o małej amplitudzie. Wpływ warunków atmosferycznych jak i niejednorodności ośrodka na propagację fali w układzie urbanistycznym omówione są między innymi w pracy [15], [16].

Reasumując, przy teoretycznym opisie pola akustycznego w układzie urbanistycznym dokonuje się szeregu uproszczeń dotyczących geometrii układu, gładkości powierzchni itp. Wpro-

wadza się uproszczony opis rzeczywistego źródła dźwięku, wykorzystuje się, mierzone z pewną dokładnością, wielkości opisujące własności akustyczne powierzchni / warunki brzegowe na ekranie /.

Ze względu na te fakty od opisu teoretycznego, w trakcie którego dokonuje się pewnych przybliżeń obliczeniowych, nie należy wymagać większej dokładności niż ta, na którą pozwala dokładność ustalenia danych wejściowych. Stanowi to uzasadnienie stosowania przybliżonych teorii dyfrakcji.

W przypadku gdy pojawiają się istotne odchylenia od teoretycznych przewidywań, należy dokonać analizy wszystkich przyjętych założeń tak, aby na ich gruncie znaleźć wyjaśnienie obserwowanego odchylenia.

W obliczu rozwijającej się techniki pomiaru natężenia dźwięku, oraz możliwości stosowania w badaniach modelowych TDS /time delay spectrometry [17] /, pozwalającej precyzyjnie określić stosunki fazowe i amplitudowe sygnału, wydaje się być uzasadnione dokonanie przeglądu stosowanych do tej pory przybliżonych teorii dyfrakcji, pod kątem przyjętych przy ich wprowadzeniu założeń i przybliżeń. Pozwoli to na właściwą interpretację wyników eksperymentów oraz pomiarów, wykonywanych w warunkach rzeczywistych. Będzie to jednocześnie stanowić podstawę dla określenia pożądanych kierunków rozwijania opisu teoretycznego pola w złożonych układach akustycznych.

II. Teoria dyfrakcji Kirchhoffa

Na początku XIX wieku pierwsze falowe teorie dyfrakcji światła przedstawili, niezależnie od siebie, Young i Fresnel. Dy-

frakcję rozumieli jako efekt interferencji fali docierającej do punktu obserwacji zgodnie z prawami optyki geometrycznej i fali zaburzenia powstającej, w bliżej nie określony sposób, na skutek oddziaływania fali z krawędzią dyfrakcyjną.

Nieco później Fresnel, w oparciu o pochodzący z końca XVII wieku mechanizm rozchodzenia się fal Huygensa, przedstawił znaną konstrukcję sfer, pozwalającą na przybliżone określenie natężenia światła w kolejnych prążkach dyfrakcyjnych za otworem w ekranie [18].

Matematyczne ujęcie zjawiska dyfrakcji podał jako pierwszy Kirchhoff w 1862 roku. Punktem wyjścia było matematyczne sformułowanie zasady Huygensa. Przedstawiona przez Kirchhoffa teoria jest elementem falowej, skalarnej teorii światła, która odpowiada w swoim opisie matematycznym akustyce falowej. W obu tych przypadkach spełnione jest dla fali monochromatycznej równanie Helmholtza:

$$(1) \quad \nabla^2 \phi(P) + k^2 \phi(P) = 0,$$

$$(1a) \quad \psi(P) = \nabla \phi(P) = -\frac{i}{\omega \rho_0} \nabla p(P),$$

$$(1b) \quad p(P) = \rho_0 \frac{\partial \phi(P)}{\partial t} = i \omega \rho_0 \phi(P),$$

$\phi(P)$ - potencjał akustyczny w punkcie P,

$\psi(P)$ - prędkość akustyczna,

$p(P)$ - ciśnienie akustyczne,

ρ_0 - gęstość ośrodka propagacji /powietrza/,

k - liczba falowa,

ω - częstość kątowna / pulsacja /.

Stosując do równania (1) twierdzenie Greena, potencjał w punkcie P można przedstawić w następującej postaci /rys.1/:

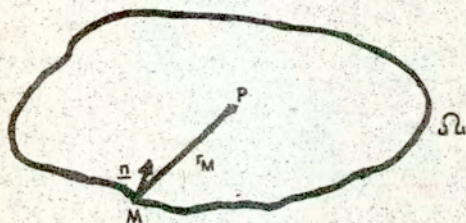
$$(2) \quad \Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \left\{ [\Phi(M)]_{\mathcal{S}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp i k r_M}{r_M} \right) - \left[\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} \frac{\exp i k r_M}{r_M} \right\} d\mathcal{S}$$

\mathcal{S} - powierzchnia zamknięta otaczająca punkt P,

\underline{n} - normalna wewnętrzna do powierzchni \mathcal{S} ,

r_M - odległość punktów powierzchni \mathcal{M} od punktu P,

$[\Phi(M)]_{\mathcal{S}}$, $\left[\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}}$ - wartości potencjału akustycznego i jego pochodnej normalnej na powierzchni \mathcal{S} .



Rys.1. Wielkości i oznaczenia występujące w całe Kirchhoffa (2).

Zgodnie ze wzorem (2) potencjał akustyczny w punkcie P można określić znając jego wartości i wartości jego pochodnej normalnej na otaczającej go powierzchni \mathcal{S} .

Występujące we wzorze (2) wyrażenie:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp i k r_M}{r_M} \right)$$

jest wyrażeniem opisującym promieniowanie elementarnego źródła dipolowego znajdującego się w punkcie M, wyrażenie:

$$\frac{\exp i k r_M}{r_M}$$

opisuje promieniowanie źródła punktowego znajdującego się w punkcie M. Jak z tego wynika, pole w punkcie P jest polem powstałym w wyniku promieniowania elementarnych źródeł dipolowych i punktowych, których amplitudy są odpowiednio określone przez wartości brzegowe potencjału akustycznego $[\Phi(M)]_a$ i jego pochodnej normalnej $\left[\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n}\right]_a$.

Wzór (2), noszący nazwę całki Kirchhoffa, można wykorzystać do określenia pola akustycznego za otworem w nieskończonym ekranie. W tym celu powierzchnię \mathcal{B} dzieli się na trzy części /rys.2/:

\mathcal{A} - powierzchnię otworu,

\mathcal{B} - powierzchnię ekranu,

\mathcal{C} - powierzchnię półkuli, zamykającą obszar wokół punktu P.

Na powierzchni otworu \mathcal{A} przyjmuje się wartości brzegowe:

$$(3) \quad [\Phi(\mathcal{A})]_a = \frac{\exp i k s_A}{s_A}, \quad \left[\frac{\partial \Phi(\mathcal{A})}{\partial n}\right]_a = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp i k r_A}{r_A}\right),$$

s_A - odległość punktów powierzchni otworu \mathcal{A} od punktu S /rys.2/, określone na podstawie promieniowania źródła punktowego S, znajdującego się na zewnątrz powierzchni \mathcal{A} . Przy tym zakłada się, że rozkład pola na powierzchni \mathcal{A} jest taki jak w polu swobodnym.

Na powierzchni ekranu \mathcal{B} , po stronie punktu obserwacji, przyjmuje się:

$$(4) \quad [\phi(B)]_{\mathcal{B}} = 0, \quad \left[\frac{\partial \phi(B)}{\partial n} \right]_{\mathcal{B}} = 0,$$

oznacza to, że ekran jest nieprzepuszczalny dla fali padającej ze źródła S. Taki ekran nosi nazwę "ekranu Kirchhoffa".

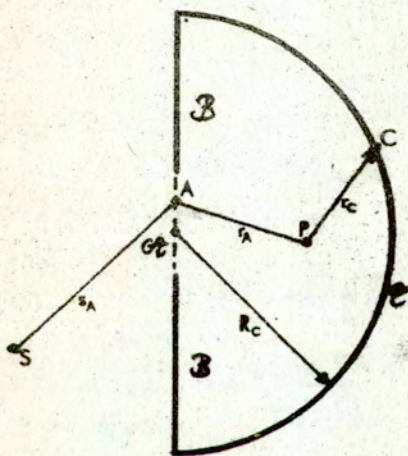
Na powierzchni półkuli \mathcal{E} :

$$(5) \quad \lim_{R_c \rightarrow \infty} |\phi(C)| = 0, \quad \lim_{R_c \rightarrow \infty} \tau_c |ik\phi(C)| = 0,$$

R_c - promień półkuli \mathcal{E} ,

r_c - odległość punktów powierzchni \mathcal{E} od punktu obserwacji P.

Spełnienie warunków (5) zapewnia znikanie całki po powierzchni \mathcal{E} w całce Kirchhoffa (2), gdy promień półkuli R_c dąży do nieskończoności.



Rys.2. Wielkości i oznaczenia występujące w określeniu warunków brzegowych (3) - (5).

Przyjęcie warunków brzegowych (3) - (5) redukuje całkowanie w całość Kirchhoffa (2) do całkowania po powierzchni otworu \mathcal{A} . Warunki brzegowe (3) na powierzchni otworu \mathcal{A} pomijają istnienie zaburzenia spowodowanego oddziaływaniem fali z krawędzią ekranu, przez to, w zależności od konkretnych warunków, mają charakter lepszego lub gorszego przybliżenia.

Przy powyższych założeniach pole w punkcie P jest wynikiem działania elementarnych źródeł dipolowych i punktowych rozłożonych na powierzchni fragmentu frontu fali padającej ze źródła S, który został wycięty przez otwór w ekranie.

Warunki brzegowe (4) na powierzchni ekranu \mathcal{B} zakładają równoczesne zerowanie się potencjału i jego pochodnej normalnej. Z punktu widzenia teorii potencjału przyjęcie takiego założenia daje w wyniku zerowanie się pola w całym obszarze za ekranem.

Mimo tej sprzeczności, intuicyjnie słuszne warunki brzegowe (3) - (5) / z których warunki na powierzchni \mathcal{B} są w pełni poprawne /, ograniczające całkowanie w całość Kirchhoffa (2) do powierzchni otworu, na której przyjmuje się rozkład pola taki jak w polu swobodnym, prowadzą do rozkładów pola za ekranem dość dobrze pokrywających się z wynikami eksperymentu.

Wyprzedzając nieco przedstawienie porównania teorii Kirchhoffa ze ścisłym rozwiązaniem, występującą zgodność można wyjaśnić tym, że dla ekranu w kształcie półpłaszczyzny wzór Kirchhoffa w obszarze swego obowiązywania jest zgodny z asymptotyczną postacią ścisłego rozwiązania problemu.

Aby otrzymać postać całki Kirchhoffa (2) bardziej dogodną w obliczeniach zostały przyjęte uproszczenia dotyczące geometrii układu, słuszne tam gdzie ten wzór początkowo stosowano, czyli dla przyrządów optycznych. Przyjęto, że [18] :

$$(6) \quad ks_A, k\tau_A \gg 1,$$

co oznacza, że odległości źródła i punktu obserwacji od otworu są duże w porównaniu z długością rozpatrywanej fali. Dodatkowo punkt obserwacji P powinien leżeć w pobliżu osi układu L_u [rys.3], co w przyrządzie optycznym oznacza opis obrazu w płaszczyźnie prostopadłej do linii L_u poprowadzonej ze źródła przez środek otworu małych rozmiarów, na którym przyjmuje się, że [rys.3] [18] :

$$(7) \quad \cos(\underline{s}_A, \underline{n}_A) = -\cos(\underline{\tau}_A, \underline{n}_A) = \text{const} = \cos\varphi,$$

- \underline{s}_A - wektor łączący źródło S z punktami A powierzchni otworu,
- $\underline{\tau}_A$ - wektor łączący punkt obserwacji z punktami A powierzchni otworu,
- \underline{n}_A - normalna do powierzchni otworu σ_A ,
- φ - kąt jaki tworzy odcinek SP z normalną \underline{n}_A .

Przy założeniach o geometrii układu (6), (7) i warunkach brzegowych (3) - (5) otrzymuje się wzór Kirchhoffa opisujący pole za otworem w ekranie:

$$(8) \quad \Phi(P) = -\frac{i}{\pi} \frac{\exp ikd}{d} \iint_{\sigma_A} \exp(iu^2) \exp(iv^2) du dv,$$

$$(8a) \quad u^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{s_A^0} + \frac{1}{\tau_A^0} \right) y_A^2 \cos^2\varphi,$$

$$(8b) \quad v^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{s_A^0} + \frac{1}{r_A^0} \right) z_A^2,$$

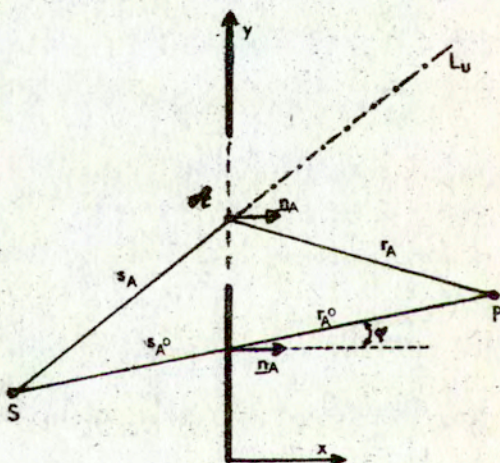
d - bezpośrednia odległość między źródłem S a punktem obserwacji P /rys.3/:

$$d = s_A^0 + r_A^0,$$

s_A^0 - odległość od źródła wzdłuż odcinka SP do punktu przecięcia przez niego płaszczyzny w której leży ekran /rys.3/,

r_A^0 - odległość punktu P wzdłuż odcinka SP do punktu przecięcia przez niego płaszczyzny w której leży ekran /rys.3/,

gdzie całkowanie odbywa się po powierzchni otworu $[u(y_A, z_A), v(y_A, z_A)]$ leżącego w płaszczyźnie (y, z) .



Rys.3. Oznaczenia przyjęte przy wprowadzaniu wzoru Kirchhoffa(8).

Przyjmując warunek (3), zakładający że pole na powierzchni otworu jest takie samo jak w przypadku gdyby nie było ekranu popełnia się błąd. Największego odchylenia rozkładu pola w płaszczyźnie otworu od rozkładu w polu swobodnym należy oczekiwać w pobliżu samej krawędzi, dlatego postulując odpowiednio duże wymiary otworu, nieprawdziwe warunki brzegowe przyjmuje się dla stosunkowo niedużej części powierzchni otworu. Powyższe, łącznie z upraszczającymi założeniami dotyczącymi geometrii układu (6), (7), przy oznaczeniu liniowych wymiarów otworu przez $[A]$, pozwala określić obszar stosowności wzoru Kirchhoffa (8) podwójną nierównością:

$$(9) \quad \lambda \ll [A] \ll s_0, r_0.$$

Jak z tego wynika, korzystając ze wzoru (8) w celu obliczenia pola za ekranem w kształcie półpłaszczyzny, czyli całkując po powierzchni otworu będącego drugą półpłaszczyzną, popełnia się stosunkowo największy błąd.

Przyjmując początek układu współrzędnych w punkcie przecięcia powierzchni ekranu przez prostą łączącą źródło z punktem obserwacji P /rys.4/, zakładając że krawędź ekranu będącego półpłaszczyzną pokrywa się z osią z, czyli że rzut odcinka SP na płaszczyznę (x, z) jest prostopadły do osi z, zmienne całkowania u, v we wzorze (8) otrzymuje się jako zmienne niezależne i całka powierzchniowa rozpada się na dwie niezależne całki Fresnela:

$$(10) \quad \Phi(P) = -\frac{i}{\pi} \frac{\exp i k d}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i v^2) dv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i u^2) du.$$

Pozwala to na natychmiastowe obliczenie całki po v :

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i v^2) dv = \sqrt{2} F(0) = \sqrt{\pi} \exp(i \frac{\pi}{4}).$$

Natomiast przy $y_A = y_A^0$ /rys. 4/, oznaczającym położenie krawędzi ekranu, całka po u staje się całką Fresnela:

$$(12) \quad F(w) = \int_w^{\infty} \exp(i u^2) du,$$

od argumentu:

$$(12a) \quad w = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(\frac{1}{s_A^0} + \frac{1}{r_A^0} \right) y_A^0 \cos \varphi = \operatorname{sgn}(y_A^0) \sqrt{\pi N} = \operatorname{sgn}(y_A^0) \sqrt{k \delta^2},$$

N - liczba Fresnela:

$$(12b) \quad N = \frac{2}{\lambda} (s_A + r_A - d) = \frac{2}{\lambda} \delta,$$

δ - różnica drogi liczonej bezpośrednio od źródła do punktu obserwacji $|d|$ i przez krawędź $|R|$:

$$(12c) \quad \delta = s_A + r_A - d = R - d,$$

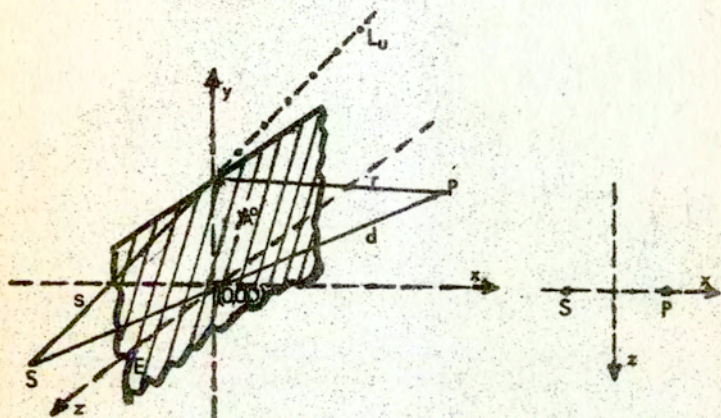
R - najmniejsza odległość liczona od źródła do punktu obserwacji przez krawędź.

Wzór Kirchhoffa dla ekranu w kształcie półpłaszczyzny przybiera postać:

$$(13) \quad \Phi_K(P) = \frac{\exp(-i \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} F(w) \Phi_0(P),$$

$$(13a) \quad \Phi_0(P) = \frac{\exp i k d}{d},$$

$$(13b) \quad \Phi_K(P) = \begin{cases} \Phi_K(P, \omega > 0) & \text{w obszarze cienia,} \\ \Phi_K(P, \omega < 0) & \text{w obszarze z falą} \\ & \text{bezpośrednią.} \end{cases}$$

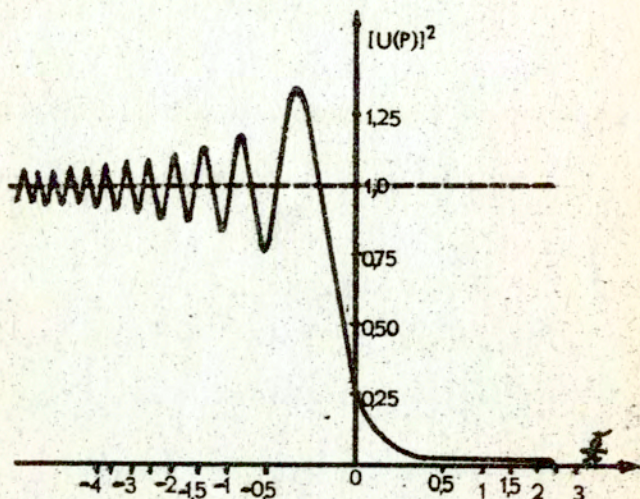


Rys. 4. Układ współrzędnych przyjęty do obliczenia dyfrakcji na krawędzi ekranu w kształcie półpłaszczyzny w oparciu o teorię Kirchhoffa.

Do analizy struktury rozwiązania wygodnie będzie posłużyć się zredukowaną wartością potencjału akustycznego w punkcie P:

$$(14) \quad u(P) = \frac{\Phi(P)}{\Phi_0(P)} = \frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi r}} F(\omega).$$

Wykres kwadratu modułu tej funkcji w zależności od różnicy dróg δ przedstawiony jest na rys.5.



Rys.5. Kwadrat modułu zredukowanej wartości potencjału akustycznego $u(P)$ w funkcji zredukowanej różnicy dróg δ/λ .

Ponieważ interesuje nas skuteczność ekranu zdefiniowana jako:

$$(15) \quad IL = -10 \log |u(P)|^2,$$

na podstawie rys.5, od razu można stwierdzić że:

$$(16) \quad IL(\delta=0) = 6 \text{ [dB]},$$

natomiast z empirycznego wzoru Maekawy:

$$(17) \quad IL_N (N < 1) = 10 \log (20N + 3),$$

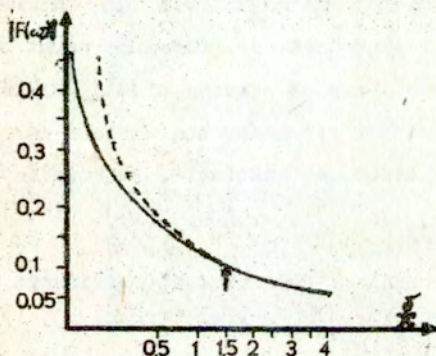
wynika

$$(18) \quad |L_M(N=0)| = 5 \text{ [dB]}.$$

Dla zakresu $\delta \gg 1$, całkę Fresnela we wzorach (13) i (14) można zastąpić jej asymptotyczną wartością:

$$(19) \quad F(w) \underset{w \gg 1}{=} \frac{1}{2w} \exp\left[i\left(w^2 + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Wartości modułu całki Fresnela i jej wartości asymptotyczne przedstawione są na rys. 6 w funkcji zredukowanej różnicy dróg δ/r .



Rys. 6. Wartości modułu całki Fresnela /linia ciągła/ i jej asymptotycznych wartości (19) /linia przerywana/ w funkcji względnej różnicy dróg δ/r .

Jak widać z rys. 6 przybliżenie asymptotyczne można stosować gdy różnica dróg: bezpośredniej i liczonej przez krawędź ekranu, między źródłem a punktem obserwacji wynosi co najmniej półtora długości rozpatrywanej fali.

Obliczając skuteczność ekranu wg wzoru (14), (15) z wykorzystaniem asymptotycznej wartości całki Fresnela (19) otrzymuje się:

$$(20) \quad IL(\delta > 1,5\lambda) = 10 \log(20N) + 3 \text{ [dB]},$$

czyli skuteczność o trzy decybele większą od wynikającej z empirycznego wzoru Maekawy:

$$(21) \quad IL_M(N > 1) = 10 \log(20N).$$

Reasumując, wzór (13) opisuje pole w półprzestrzeni za ekranem, zarówno w obszarze cienia $|\omega > 0|$ jak i w obszarze gdzie dociera fala bezpośrednio ze źródła $|\omega < 0|$. Można go stosować gdy źródło i punkt obserwacji leżą naprzeciwko siebie, choć na różnych wysokościach. Jednocześnie punkt obserwacji nie może być zbyt odległy od granicy cienia. Wykorzystując wzór (20), zawierający asymptotyczną wartość całki Fresnela, należy uwzględnić dodatkowo założenie, że różnica dróg

$$(22) \quad \delta > 1,5\lambda,$$

które podkreśla uczynione już uprzednio założenie (6), że wzór Kirchhoffa jest słuszny dla fal krótkich.

III. Teoria dyfrakcji Rubinowicza

W 1917 roku Rubinowicz opublikował pracę w której całkę Kirchhoffa w postaci (2), gdzie całkowanie ze względu na przyjęte warunki (3) - (5), zawężone jest do powierzchni otworu \mathcal{A} , rozłożył na falę geometryczną $\phi^g(\mathcal{P})$ i falę dyfrakcyjną $\phi^d(\mathcal{P})$. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie przedkłużył na obszar przed ekranem, otrzymując:

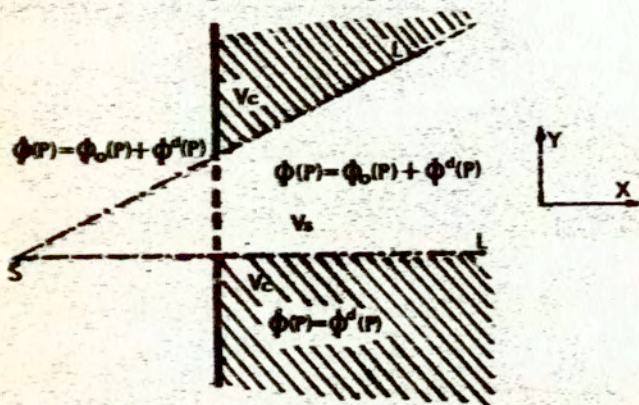
$$(23) \quad \phi(\mathcal{P}) = \phi^g(\mathcal{P}) + \phi^d(\mathcal{P}),$$

gdzie:

$$(23a) \quad \phi^s(P) = G(P) \phi_0(P),$$

$$(23b) \quad G(P) = \begin{cases} 1 & P \notin V_c, \\ 0 & P \in V_c, \end{cases}$$

V_c - obszar cienia geometrycznego.



Rys.7. Obszary obowiązywania rozwiązania Rubinowicza (23) .

Postać rozwiązania Rubinowicza (23) jest zgodna z prostą intuicją. W obszarze przed ekranem i w stożku "światłym" V_s [rys.7] występuje fala bezpośrednia, pochodząca ze źródła S, która znika w obszarze cienia V_c . Ekran /"ekran Kirchhoffa"/ działa w ten sposób, że eliminuje falę bezpośrednią, pochodzącą ze źródła S. Fala dyfrakcyjna, powstająca na skutek oddziaływania fali z krawędzią otworu występuje w całej przestrzeni. Rozwiązanie (23) wykazuje pozorną nieciągłość na granicy cienia. Ponieważ granica cienia nie stanowi dla fali

ładnej fizycznej przeszkody, rozwiązanie (23) powinno być na niej ciągłe. Wynika stąd wniosek, że skok fali geometrycznej $\Phi^g(\mathcal{P})$ musi być kompensowany przez skok fali dyfrakcyjnej $\Phi^d(\mathcal{P})$, co zostanie potwierdzone przy analizie struktury fali dyfrakcyjnej.

Postać rozwiązania Rubinowicza (23) daje możliwość wprowadzenia do opisu pola fali odbitej od ekranu, przez wprowadzenie źródła pozornego S' /rys. 8/, o mocy proporcjonalnej do współczynnika odbicia fali ciśnienia akustycznego. Współczynnik ten dla ekranu o zespolonej impedancji powierzchniowej jest liczbą zespoloną. Rozwiązanie będzie wtedy miało postać /rys. 8/:

$$(24) \quad \Phi(\mathcal{P}) = \Phi_z^g(\mathcal{P}) + \Phi_z^d(\mathcal{P}),$$

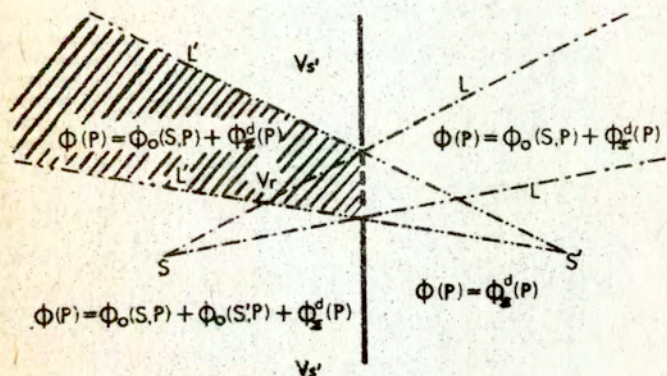
$$(24a) \quad \Phi_z^g(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P})\Phi_0(S, \mathcal{P}) + H(\mathcal{P})\Phi_0(S', \mathcal{P}),$$

$$(24b) \quad H(\mathcal{P}) = \begin{cases} 1 & \mathcal{P} \in V_{S'} \\ 0 & \mathcal{P} \in V_r \end{cases},$$

$$(24c) \quad \Phi_z^d(\mathcal{P}) = \Phi^d(S, \mathcal{P}) + \Phi^d(S', \mathcal{P}).$$

Pole geometryczne (24a) złożone jest z fali $\Phi_0(S, \mathcal{P})$ ^{pocho}dzącej ze źródła S , występującej w całym obszarze z wyjątkiem obszaru cienia V_0 /rys. 7/, /rys. 8/, oraz fali $\Phi_0(S', \mathcal{P})$ pochodzącej ze źródła pozornego S' , występującej w obszarze przed ekranem z wyjątkiem stożka cienia V_r , jaki powstaje na skutek tego, że rzeczywisty otwór w ekranie stanowi powierzchnię ekranującą dla fali odbitej $\Phi_0(S', \mathcal{P})$. Fala dyfrakcyjna

$\Phi_z^d(P)$ w rozwiązaniu (24c) jest sumą dwóch fal: $\Phi^d(S,P)$ powstającej na skutek oddziaływania z krawędzią fali pochodzącej ze źródła S i fali $\Phi^d(S',P)$ powstającej na skutek oddziaływania z krawędzią fali pochodzącej ze źródła S'. Sumaryczna fala dyfrakcyjna $\Phi_z^d(P)$ występuje w całej przestrzeni, w związku z tym, na skutek interferencji składowych fal dyfrakcyjnych $\Phi^d(S,P)$ i $\Phi^d(S',P)$ prążki interferencyjne wystąpią nie tylko w obszarze występowania fali $\Phi_0(S,P)$, pochodzącej ze źródła rzeczywistego, ale również w obszarze cienia V_0 fali pochodzącej z tego źródła, co nie występowało na gruncie teorii Kirchhoffa.



Rys.8. Obszary obowiązywania rozwiązania Rubinowicza (24) zawierającego falę odbitą od ekranu.

Całka Kirchhoffa (2) dla otworu w nieskończonym ekranie, zawierająca całkowanie po powierzchni otworu σ , opisywała całkowite pole za ekranem. Rozwiązanie Rubinowicza (23), opisujące pole w całym obszarze, w którym została wydzielona fala dyfrak-

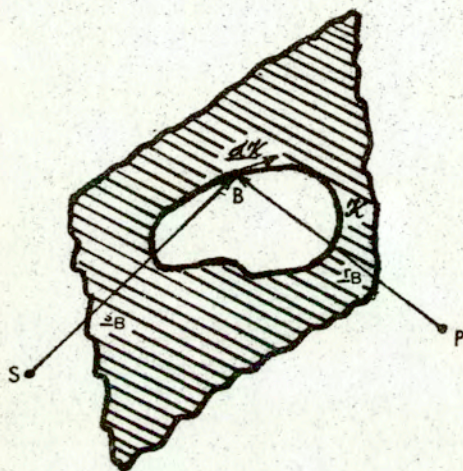
cyjna, zamiast całki powierzchniowej zawiera całkę liniową po krawędzi otworu /rys.9/ [25] :

$$(25) \quad \phi^d(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{X}} \frac{\exp[ik(s_B + \tau_B)]}{s_B \tau_B} \frac{\tau_B \cdot (s_B \times d\mathcal{X})}{s_B \tau_B + s_B \cdot \tau_B},$$

s_B, τ_B - wektory poprowadzone odpowiednio od źródła i od punktu obserwacji do bieżącego punktu krawędzi B,

s_B, τ_B - długości odpowiednich wektorów,

$d\mathcal{X}$ - wektor jednostkowy styczny do krawędzi w punkcie B.



Rys.9. Wielkości i oznaczenia występujące w całce liniowej (25).

To że wydzielona w rozwiązaniu Rubinowicza (23) fala dyfrakcyjna $\phi^d(\mathcal{P})$, która ma postać (25), zawiera całkowanie po krawędzi otworu \mathcal{X} , potwierdza interpretację Younga zjawiska dyfrakcji. Fala dyfrakcyjna zaburzająca pole swobodne w wyniku pojawienia się w nim ekranu, rzeczywiście powstaje na skutek

oddziaływania z samą krawędzią ekranu. Pozwala to jednocześnie na prostą interpretację zasady Babinet'a. Zastąpienie otworu komplementarnym ekranem zmieni w wyrażeniu określającym falę dyfrakcyjną kierunek wektora \underline{dX} na przeciwny, w związku z tym całe wyrażenie zmieni znak na przeciwny. Wynika z tego, że pole sumaryczne pochodzące od układu komplementarnych ekranów jest równe polu fali swobodnej.

Na gruncie teorii dyfrakcji Rubinowicza dla fal krótkich można pokazać [25], że oddziaływanie fali z krawędzią polega na odbiciu w punktach krawędzi dla których:

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial x} (s_0 + \tau_0) = 0,$$

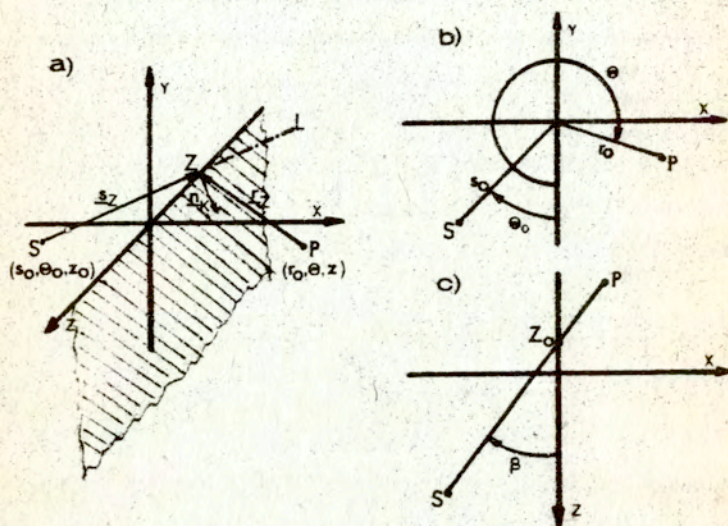
jednocześnie zachodzi następujący związek między kątami:

$$(27) \quad \cos(s_0, \underline{dX}) = \cos(-\tau_0, \underline{dX}).$$

Wyrażenie opisujące falę dyfrakcyjną (25) może być stosowane dla krawędzi różnych kształtów. Ze względu na ogólny charakter zapisu wektorowego wyrażenie (25) jest szeroko wykorzystywane przez akustyków japońskich [20] - [24] do opisu odbić od płaskich względnie niepłaskich, ograniczonych powierzchni, przy czym uwzględniane są również wielokrotne odbicia [23], [24].

Akustycy kanadyjscy zastosowali wyrażenie (25) do obliczenia efektywności płaskiego ekranu umieszczonego na podłożu o zespolonej impedancji powierzchniowej /podłoże trawiaste/[2] [14], oraz skuteczności ekranów o złożonym kształcie krawę-

dzi i ekranów w postaci pryzm ziemnych, gdzie konieczne jest uwzględnienie nie tylko odbicia od podłoża ale również odbicia od impedancyjnej powierzchni pryzm ziemnych.



Rys.10. Układ współrzędnych i oznaczenia przyjęte we wzorach określających falę dyfrakcyjną (28), (30).

Dla ekranu w kształcie półpłaszczyzny całkowanie w wyrażeniu (25) będzie się odbywało wzdłuż linii prostej będącej krawędzią półpłaszczyzny. W zapisie skalarным wyrażenie opisujące falę dyfrakcyjną, powstałą na krawędzi półpłaszczyzny /rys.10/ przybiera postać:

$$(28) \quad \phi_R^k(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(z_2 + r_2)] \left\{ -\frac{\cos(\alpha_2, z_2) \sin(z_2, z)}{s_2 r_2 [1 + \cos(z_2, \alpha_2)]} \right\} dz,$$

\underline{n}_z - normalna wewnętrzna do granicy cienia w punkcie krawędzi Z_0 ,

\underline{e}_z - wersor w kierunku osi z ,

\underline{s}_z - wektor łączący źródło z punktem krawędzi Z_0 ,

\underline{r}_z - wektor łączący punkt obserwacji z punktem krawędzi Z_0 .

Do całki postaci (28), przy $k \rightarrow \infty$, czyli dla fal bardzo krótkich, można zastosować metodę stałej fazy [19]. Prowadzi ona do zastąpienia całkowania wzdłuż krawędzi sumowaniem przyczynków pochodzących od otoczeń punktów krawędzi dla których:

$$(29) \quad \frac{d}{dx} (s_z + r_z) = 0.$$

W przypadku ekranu w kształcie półpłaszczyzny, jak to wynika z zasady Fermata, istnieje tylko jeden taki punkt dla którego jest spełniony warunek (29). Jest nim punkt krawędzi Z_0 , przez który droga ze źródła do punktu obserwacji jest najkrótsza /rys. 10c/. W takiej sytuacji potencjał akustyczny fali dyfrakcyjnej pochodzącej od krawędzi półpłaszczyzny w całej przestrzeni opisywany jest wyrażeniem [25], [26]:

$$(30) \quad \Phi_R^d(P) = -\frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sgn}(\pi + \theta_0 - \theta) \sqrt{\frac{2d^k}{R(R+d)}} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} (\sin \beta)^k F(w) \Phi_0(P),$$

$$(30a) \quad w = \sqrt{k s + r - d} = \sqrt{k(R-d)} = \sqrt{k\delta} > 0,$$

s_0 - najmniejsza odległość źródła od krawędzi ekranu,

r_0 - najmniejsza odległość punktu P od krawędzi ekranu,

θ_0 - kąt między odcinkiem s_0 a płaszczyzną ekranu,

θ - kąt między odcinkiem r_0 a płaszczyzną ekranu.

Kąt β jest kątem jaki tworzy ramię odcinka SP na płaszczyźnie

(x, z) z krawędzią ekranu, względnie kątem jaki tworzy płaszczyzna (SZ_0P) z płaszczyzną ekranu /rys.10c/.

W dużych odległościach od granicy cienia, czyli dla dużych wartości argumentu $|\delta| > 1,5$ całkę Fresnela występującą w wyrażeniu (30) można zastąpić jej wartością asymptotyczną (19), otrzymując:

$$(31) \quad \Phi_A^d(P) = -\frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{d^2}{8KR_3 \tau_0}} \exp[ik(R-d)] \operatorname{tg} \frac{\theta - \theta_0}{2} (\sin \beta)^2 \phi_0(P).$$

Przedstawione uprzednio rozwiązanie Kirchhoffa dla półpłaszczyzny (13) jest rozwiązaniem słusznym w pobliżu granicy cienia dla punktów, dla których rzut odcinka SP na płaszczyznę prostopadłą do ekranu tworzy z krawędzią ekranu kąt prosty /rys.4/, /rys.10/. Chcąc dokonać porównania rozwiązania Kirchhoffa (13) z rozwiązaniem Rubinowicza (30) należy więc przyjąć we wzorze (30) $\beta = \pi/2$.

Ponieważ, zgodnie z (23), rozwiązanie Rubinowicza w obszarze cienia składa się tylko z fali dyfrakcyjnej, można w tym obszarze porównać ją z rozwiązaniem Kirchhoffa (13b). W obszarze cienia stosunek obu rozwiązań określony jest czynnikiem:

$$(32) \quad \alpha_{RK} = \frac{\Phi_A^d(P)}{\Phi(P, \omega > 0)} = -\operatorname{sgn}(\pi + \theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2d^2}{R(R+d)}} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2},$$

przy zbliżaniu się do granicy cienia od strony cienia geometrycznego $|R \rightarrow d|$ α_{RK} , jak widać z (32), dąży do jedności. Tak więc rozwiązanie Rubinowicza pokrywa się w tym obszarze z całką Kirchhoffa (13b).

Po przeciwnej stronie granicy cienia, gdzie występuje fala bezpośrednia pełne rozwiązanie Rubinowicza jest sumą fali bezpośredniej i fali dyfrakcyjnej, natomiast czynnik α_{RK} przy przejściu przez granicę cienia zmienia znak na przeciwny przyjmując wartość -1 , w związku z tym pełne rozwiązanie Rubinowicza w tym obszarze można zapisać w postaci:

$$(33) \quad \phi_R(P) = \frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} F(\omega < 0) \phi_0(P) = \phi_K(P, \omega > 0),$$

czyli analogicznie do rozwiązania Kirchhoffa (13b). Jak z tego wynika przybliżona postać rozwiązania Rubinowicza w pobliżu granicy cienia jest taka sama jak rozwiązanie Kirchhoffa, które zostało wyprowadzone właśnie dla obszaru w pobliżu granicy cienia.

W obszarze cienia, poza bezpośrednim sąsiedztwem granicy cienia, zgodnie z oznaczeniami w wyrażeniu (13):

$$(34) \quad \phi_R(P) = \phi^d(P) = \alpha_{RK} \phi_K(P, \omega > 0),$$

w obszarze gdzie występuje fala bezpośrednia, poza bezpośrednim sąsiedztwem granicy cienia:

$$(35) \quad \phi_R(P) = \phi_K(P, \omega < 0) + (1 - \alpha_{RK}) \phi_K(P, \omega > 0).$$

Ponieważ:

$$|\alpha_{RK}| < 1,$$

$$\alpha_{RK} > 0$$

w obszarze cienia,

$$\alpha_{RK} < 0$$

w obszarze z falą bezpośrednią,

rozwiązanie Rubinowicza w obszarze cienia daje mniejsze wartości niż całka Kirchhoffa. Na granicy cienia osiąga wartość równą całce Kirchhoffa. W obszarze gdzie występuje fala bezpośrednia wartości potencjału wynikające z rozwiązania Rubinowicza, zgodnie z (35), są większe niż wynikające z całki Kirchhoffa.

Otrzymane rozwiązanie Rubinowicza (23), (30) jest słuszne w całej przestrzeni z wyjątkiem powierzchni ekranu i powierzchni otworu. Wynika to z przyjęcia warunków brzegowych (3), (4), przy czym błąd popełniany przez takie wprowadzenie warunków brzegowych jest tym mniejszy im otwór jest większy w porównaniu z długością fali, co akurat jest spełnione w przypadku ekranu w kształcie półprzestrzeni.

Za względu na metodę stałej fazy zastosowaną do obliczenia całki wzdłuż krawędzi ekranu (28), po raz drugi wykorzystane zostało założenie o małej długości fali.

Ogólnie rozwiązanie Rubinowicza (23), (30) jest rozwiązaniem słusznym dla zakresu wysokich częstotliwości, obowiązującym w całej przestrzeni z wyjątkiem płaszczyzny w której znajduje się ekran.

IV. Ścisłe rozwiązanie problemu półprzestrzeni w polu fali kulistej.

Poprawnie sformułowany opis pola akustycznego w którym znajduje się półprzestrzeń powinien być następujący:

- szukana funkcja, będąca rozwiązaniem problemu powinna spełniać równanie Helmholtza (1),
- funkcja musi znikać w nieskończoności / warunek wypromieniowania Sommerfelda (5)/,

- gęstość energii pola przy zbliżaniu się do krawędzi musi dążyć do zera /warunek na ostrzu/, co zapewnia jednoznaczność rozwiązania,
- na półpłaszczyźnie będącej ekranem muszą być spełnione warunki brzegowe wynikające z jego własności akustycznych, dla idealnego ekranu: zerowanie się ciśnienia lub prędkości akustycznej.

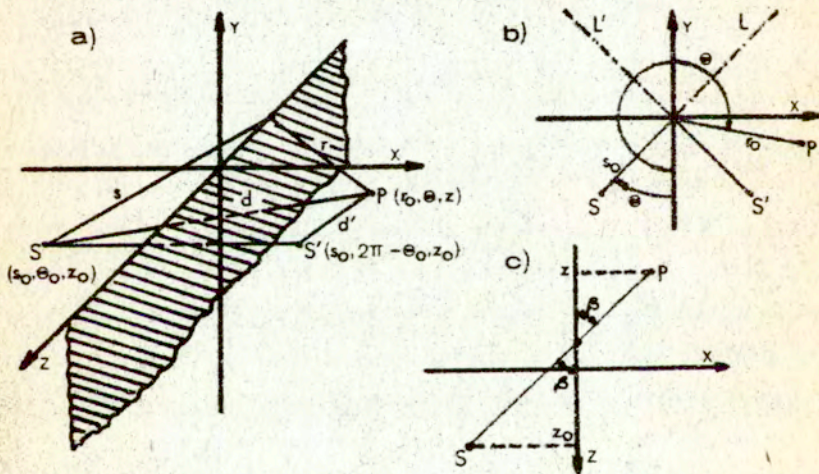
Każda funkcja spełniająca powyższe założenia jest szukanym rozwiązaniem. Ze względu na jednoznaczność rozwiązania, niezależnie od tego czy otrzymane różnymi metodami rozwiązania można w prosty sposób sprowadzić do tej samej postaci czy też nie, zawsze jest to to samo rozwiązanie. Dotyczy to oczywiście rozwiązań ścisłych.

Jeszcze przed rozwiązaniem problemu można określić zachowanie się szukanej funkcji w płaszczyźnie w której leży ekran. Na powierzchni ekranu doskonale miękkiego $\phi = 0$, traktowanego jako obiekt matematyczny /półpłaszczyzna/ bez grubości, zeruje się potencjał akustyczny, czyli ciśnienie akustyczne jest równe zero z założenia po obu stronach ekranu, jest więc funkcją ciągłą. Natomiast składowa normalna prędkości akustycznej doznaje skoku. Sytuacja jest odwrotna w przypadku ekranu doskonale twardego $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ ciągła z założenia jest składowa normalna prędkości akustycznej, skoku doznaje ciśnienie.

W płaszczyźnie będącej przedłużeniem ekranu do nieskończoności /w płaszczyźnie otworu/ zarówno ciśnienie akustyczne jak i składowa normalna prędkości muszą być ciągłe.

W 1896 roku Sommerfeld po raz pierwszy rozwiązał w sposób ścisły problem półpłaszczyzny w polu fali płaskiej. Wykorzystał w tym celu własności funkcji wielowartościowych [29], [30]. Rozwiązał on problem dla równań Maxwella, które dla fali monochromatycznej, przy odpowiednim wyborze polaryzacji redukują się do równania Helmholtza (1).

W 1914 roku Macdonald [31] otrzymał rozwiązanie dla padającej fali kulistej. Wykorzystał metodę separacji zmiennych otrzymując rozwiązanie w postaci szeregów, które następnie zapisał w zwartej postaci przy użyciu funkcji specjalnych. Rozwiązanie Macdonalda, ze względu na swoją zwartą postać i możliwość wprowadzenia asymptotycznych wartości funkcji specjalnych, stało się przedmiotem zainteresowania akustyków [32] - [34].



Rys.11. Układ współrzędnych przyjęty dla ścisłego rozwiązania Sommerfelda.

Przyjęty zostanie cylindryczny układ współrzędnych, gdzie:
 d - odległość między źródłem rzeczywistym S a punktem obserwacji P /rys.11/:

$$(36a) \quad d^2 = s_0^2 + r_0^2 - 2s_0 r_0 \cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2,$$

d' - odległość między źródłem pozornym S' a punktem obserwacji P :

$$(36b) \quad d'^2 = s_0^2 + r_0^2 - 2s_0 r_0 \cos(\theta + \theta_0) + (z - z_0)^2,$$

R - najkrótsza odległość między źródłem a punktem obserwacji liczona przez krawędź, /dla obu źródeł taka sama/:

$$(36c) \quad R^2 = (s_0 + r_0)^2 + (z - z_0)^2 = (s + r)^2$$

W przyjętym układzie współrzędnych pełne, ścisłe rozwiązanie problemu półprzestrzyny doskonale miękkiej ($\phi_s = 0$) w polu fali kulistej można zapisać w postaci [35]:

$$(37) \quad \phi_s(P) = f(k, m) - f(k, m'),$$

gdy półprzestrzyna jest doskonale twarda ($\frac{\partial \phi_H}{\partial n} = 0$):

$$(38) \quad \phi_H(P) = f(k, m) + f(k, m'),$$

gdzie:

$$(37a) \quad f(k, m) = ik \int_m^\infty \frac{H_1^{(1)}(u^2 + kd)}{\sqrt{u^2 + 2kd}} du,$$

$$(38a) \quad f(k, m') = ik \int_{m'}^\infty \frac{H_1^{(1)}(u^2 + kd')}{\sqrt{u^2 + 2kd'}} du,$$

$$m = -\operatorname{sgn}(\pi + \theta_0 - \theta) \sqrt{k(R-d)}, \quad m' = -\operatorname{sgn}(\pi - \theta_0 - \theta) \sqrt{k(R-d')},$$

$H_1^{(1)}(z)$ - funkcja Hankla pierwszego rodzaju, rzędu pierwszego. Jak wynika z (37), (38) rozwiązania zarówno dla ekranu doskonale miękkiego jak i doskonale twardego zawierają dwa składniki: pierwszy związany jest z działaniem źródła rzeczywistego S , drugi z działaniem źródła pozornego S' /źródła fali odbitej/.

Na podstawie ścisłych rozwiązań (37), (38) można ustalić wartości skoku na powierzchni ekranu: normalnej składowej prędkości akustycznej - dla ekranu miękkiego i ciśnienia - dla ekranu twardego.

Na półpłaszczyźnie doskonale miękkiej, z założenia:

$$(39) \quad \phi_s(\theta=0, 2\pi) = 0,$$

natomiast w rozkładzie normalnej składowej prędkości akustycznej przy przejściu przez powierzchnię ekranu pojawia się skok [35]:

$$(40) \quad \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right|_{\theta=0} - \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right|_{\theta=2\pi} = i 2k \frac{R}{d^2} \sqrt{\frac{3_0}{|y|}} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) H_1^{(1)}(kR).$$

W warunkach przybliżenia, gdy $k(R-d) \gg 1$:

$$(40a) \quad \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right|_{\theta=0} - \left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right|_{\theta=2\pi} = -2 \left. \frac{\partial \phi_0(P)}{\partial x} \right|_{y=0} + \frac{i}{2\sqrt{3_0|y|}^3} \frac{4\pi \frac{S_0}{\omega} \frac{S_0}{2}}{\omega \frac{S_0}{2}} H_0^{(1)}(kR),$$

$H_0^{(1)}(x)$ - funkcja Hankla pierwszego rodzaju, rzędu zerowego:

$$(40b) \quad H_0^{(1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Ponieważ drugi składnik w (40b) znika przy $y \rightarrow -\infty$, w dużych odległościach od krawędzi skok normalnej składowej prędkości staje się równy podwojonej wartości normalnej składowej

prędkości fali padającej, czyli wartości jaka występuje dla nieograniczonej miękkiej płaszczyzny. Jednocześnie widać, że drugi składnik w (40a) opisujący zaburzenie spowodowane istnieniem krawędzi, dla dużych argumentów (40b) przedstawia falę cylindryczną.

Podobnie dzieje się w płaszczyźnie otworu. W odpowiednio dużych odległościach od krawędzi zaburzenie jest falą cylindryczną, która znika w nieskończoności a pole staje się polem swobodnym.

Na półpłaszczyźnie doskonale twardej, z założenia:

$$(41) \quad \left. \frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right|_{\theta=0, 2\pi} = 0,$$

skoku doznaje ciśnienie akustyczne [35] :

$$(42) \quad \Phi_H(\theta=0) - \Phi_H(\theta=2\pi) = z \left[f(k, m = \sqrt{k(R-d)}) - f(k, m = \sqrt{k(R-d)}) \right].$$

W warunkach przybliżenia, gdy $k(R-d) \gg 1$:

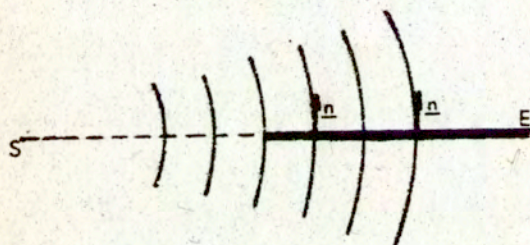
$$(42a) \quad \Phi_H(\theta=0) - \Phi_H(\theta=2\pi) = 2\Phi_0(P) - \frac{i}{\sqrt{s_0|y|} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} H_0^{(1)}(kR).$$

Z (42a) wynika, że na półpłaszczyźnie doskonale twardej skok ciśnienia akustycznego, przy oddalaniu jest od krawędzi $|y| \rightarrow -\infty$ dąży do podwojonej wartości ciśnienia akustycznego fali padającej, czyli do wartości występującej dla nieograniczonej doskonale twardej płaszczyzny. Ze względu na występującą w drugim składniku w (42a) funkcję Hankla (40b) ponownie widoczny jest cylindryczny charakter fali zaburzającej pole.

Interesujący przypadek ma miejsce gdy źródło umieszczone jest w płaszczyźnie otworu $\Theta_0 = \pi$. Źródło umieszczone jest wtedy dokładnie na wprost krawędzi /rys.12/. Ponieważ w polu swobodnym źródła punktowego ruch cząstek akustycznych odbywa się wzdłuż kierunków promieni poprowadzonych ze źródła, dla wszystkich płaszczyzn przechodzących przez źródło:

$$(43) \quad v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

W tym przypadku normalna do płaszczyzny n jest jednocześnie styczną do frontu fali. Umieszczenie ekranu doskonale twardego w płaszczyźnie $\Theta_0 = \pi$ nie zaburza więc pola, które pozostaje równe polu fali swobodnej.



Rys.12. Ekran doskonale twardy umieszczony w płaszczyźnie przechodzącej przez źródło punktowe.

Rozwiązania (37), (38) oprócz możliwości ustalenia ścisłych wartości skoków na powierzchni ekranu: normalnej składowej prędkości (40) - dla ekranu miękkiego i ciśnienia (42) - dla ekranu twardego, pozwalają na ścisłe ustalenie wartości pola na granicy cienia:

$$(44) \Phi_{S(H)}(\theta = \pi + \theta_0) = \frac{1}{2} \Phi_0(P) \bar{\Phi} f [k, m' = \sqrt{k(R-d)}].$$

Występująca we wzorze (44) całka $f [k, m' = \sqrt{k(R-d)}]$ związana jest z działaniem źródła pozornego S' . Uwzględniając tylko działanie źródła rzeczywistego S , ze wzoru (44) otrzymuje się tę samą wartość potencjału akustycznego na granicy cienia co w teorii Kirchhoffa (13) i rozwiązaniu Rubincowicza dla jednego źródła (30). Wartość ta jest równa połowie wartości potencjału akustycznego fali padającej.

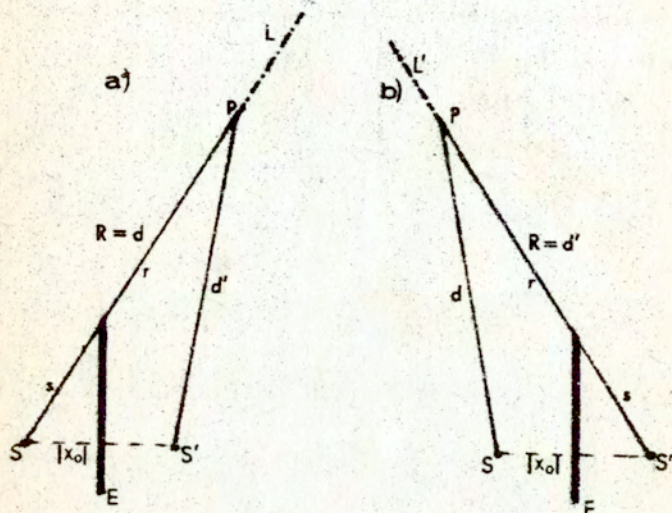
Na granicy fali odbitej:

$$(45) \Phi_{S(H)}(\theta = \pi - \theta_0) = \Phi_0(P) \bar{\Phi} \frac{1}{2} \Phi_r(P) - f [k, m = \sqrt{k(R-d)}],$$

$$(45a) \quad \Phi_r = \frac{\exp ikd'}{d'}.$$

Fala padająca $\Phi_0(P)$ i całka $f [k, m = \sqrt{k(R-d)}]$ są wynikiem działania źródła rzeczywistego S . Drugi składnik w wyrażeniu (45) opisuje wkład do pola akustycznego źródła pozornego S' . Jest on równy połowie potencjału akustycznego fali odbitej. Jak z tego wynika występuje tu pełna symetria

między działaniem źródła rzeczywistego S na granicy cienia i działaniem źródła pozornego S' na granicy fali odbitej /rys.13/.



Rys.13. Punkty obserwacji: na granicy cienia a) i na granicy fali odbitej b).

Przy $kR \{s, r, z_0, z\} \gg 1$ rozwiązanie (37), (38) można zapisać w postaci:

$$(46) \quad \Phi_{S(H)}(P) = \Phi_{S(H)}^g(P) + \Phi_{S(H)}^d(P),$$

$$(46a) \quad \Phi_{S(H)}^g(P) = \eta(\pi + \theta_0 - \theta) \Phi_0(P) \bar{\eta} \eta(\pi - \theta_0 - \theta) \Phi_r(P),$$

$$(46b) \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Postać wyrażen opisujacych fale dyfrakcyjna, przy $kR(s, r, z_0, z) \gg 1$, jest nastepujaca:

$$(46c) \quad \Phi_{S(H)}^d(P) = \Phi^d[d, \omega = \sqrt{k(R-d)}] + \Phi_{S(H)}^d[d', \omega' = \sqrt{k(R-d')}],$$

$$(46d) \quad \Phi^d(d, \omega) = -\frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sgn}(\pi + \theta_0 - \theta) \sqrt{\frac{2d^2}{R(R+d)}} F(\omega) \Phi_0(P),$$

$$(46e) \quad \Phi_{S(H)}^d(d', \omega') = -\frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sgn}(\pi - \theta_0 - \theta) \sqrt{\frac{2d'^2}{R(R+d')}} F(\omega') \Phi_r(P).$$

Porównujac (46) z (24) widać, że struktura rozwiązania Rubinowicza uwzględniającego istnienie fali odbitej od ekranu jest taka sama jak rozwiązania ścisłego. Do rozwiązania Rubinowicza (24) znaki "-" i "+" wchodzić jako konsekwencja wartości przyjmowanych przez współczynnik odbicia $b_{S(H)}$ dla fali ciśnienia akustycznego. W przypadku ekranu doskonale miękkiego:

$$(47) \quad b_S = -1,$$

doskonale twardego:

$$(48) \quad b_H = 1.$$

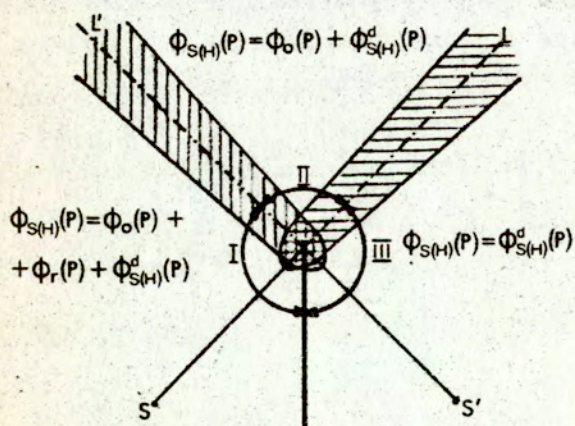
Wartości współczynników odbicia (47), (48) wynikają z odpowiedniego zerowania się ciśnienia i normalnej składowej prędkości dla dwóch typów ekranów: doskonale miękkiego i doskonale twardego.

Dla rozwiązania Rubinowicza (24), korzystając z (30), można zapisać wyrażenie na fale dyfrakcyjne pochodzące od źródła rzeczywistego S i źródła pozornego S' :

$$(49a) \quad \Phi^d(S, P) = -\frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sgn}(\pi + \theta_0 - \theta) \sqrt{\frac{2d^2}{R(R+d)}} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} (\sin \beta)^2 F(\omega) \Phi_0(P),$$

$$(49b) \quad \Phi_{S(H)}^d(S', P) = -\frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} \operatorname{sgn}(\pi - \theta_0 - \theta) \sqrt{\frac{2d'^2}{R(R+d')}} \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} (\sin \beta)^2 F(\omega) \Phi_0(P) \Big\}.$$

Analogicznie jak dla rozwiązania Rubinowicza (24) /rys.7, rys.8/ dla przybliżonej postaci rozwiązania ścisłego (46) można cały obszar podzielić na trzy podobszary /rys.14/.



Rys.14. Podział obszaru wokół ekranu.

We wszystkich trzech podobszarach będą występowały dwie fale dyfrakcyjne: jedna pochodząca od źródła rzeczywistego S , druga od źródła pozornego S' , w pierwszym obszarze oprócz tego będzie występowała fala padająca $\Phi_0(P)$ i fala odbita $\Phi_r(P)$, w drugim fala padająca.

W rozwiązaniach (24) i (46) składniki geometryczne są takie same, natomiast fale dyfrakcyjne pozostają z sobą w stałym stosunku:

$$(50) \quad \alpha_{RS}(S) = \frac{\Phi^d(S, P)}{\Phi^d(d, W)} = \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} (\sin \beta)^2,$$

$$(51) \quad \alpha_{RS}(S') = \frac{\Phi_{S(H)}^d(S', P)}{\Phi_{S(H)}^d(d', W')} = \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} (\sin \beta)^2.$$

W sytuacji gdy $\beta = \pi/2$, czyli gdy $z = z_0$, na granicy cienia i na granicy fali odbitej:

$$\alpha_{RS}(S) = 1, \quad \alpha_{RS}(S') = 1,$$

rozwiązanie Rubinowicza (24) i przybliżona postać rozwiązania ścisłego (46) pokrywają się. W pozostałych przypadkach:

$$(52) \quad \left| \sin \frac{\theta \mp \theta_0}{2} (\sin \beta)^2 \right| < 1,$$

rozwiązanie Rubinowicza daje wartości fal dyfrakcyjnych odpowiednio mniejsze niż to wynika z przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania.

Gdy równocześnie zachodzą nierówności:

$kR, k(R-d), k(R-d) \gg 1$ całki Fresnela w (46 d), (46e) można zastąpić pierwszym wyrazem ich asymptotycznego rozwinięcia, otrzymując:

$$(53) \quad \phi_{SM}^d(P) = -\frac{\exp(i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{d^2}{8kR S_0 r_0}} \exp[ik(R-d)] D_{SM}(\theta_0, \theta) \phi_0(P),$$

$$(53a) \quad D_{SM}(\theta_0, \theta) = \left(\cos \frac{\theta - \theta_0}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{\theta + \theta_0}{2}\right)^{-1},$$

Wyrażenia (53) zawierają obie fale dyfrakcyjne pochodzące zarówno od źródła rzeczywistego S jak i źródła pozornego S' .

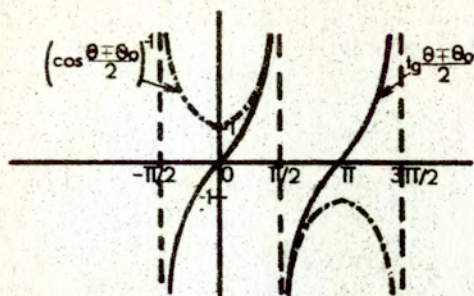
Pierwszy składnik współczynnika kierunkowości $D_{SM}(\theta_0, \theta)$ jest współczynnikiem kierunkowości fali dyfrakcyjnej pochodzącej od źródła S , drugi fali pochodzącej od źródła S' .

Określając w rozwiązaniu Rubinowicza (24) fale dyfrakcyjne na podstawie wzoru (31) otrzymuje się tę samą postać rozwiązania z tym, że współczynnik kierunkowości:

$$(54) \quad D_{SM}^R(\theta_0, \theta) = \alpha_{SR}(S) \left(\cos \frac{\theta - \theta_0}{2}\right)^{-1} \alpha_{SR}(S') \left(\cos \frac{\theta + \theta_0}{2}\right)^{-1} = \\ = \left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \bar{r} \operatorname{tg} \frac{\theta + \theta_0}{2} \right\} (\sin \beta)^2.$$

Przebieg współczynników kierunkowości dla pojedynczego źródła (53a) i (54), przy $\beta = \pi/2$, można prześledzić na /rys.15/.

Ponieważ rozwiązanie w postaci (53) dotyczy obszarów odległych od granicy cienia i granicy fali odbitej, rozwiązanie dla tego obszaru wynikające z teorii Rubinowicza zgodnie z (52), (54) zawsze saniża wartości fal dyfrakcyjnych.



Rys.15. Przebieg funkcji $(\cos \frac{\theta \mp \theta_0}{2})^{-1}$ i $\operatorname{tg} \frac{\theta \mp \theta_0}{2}$.

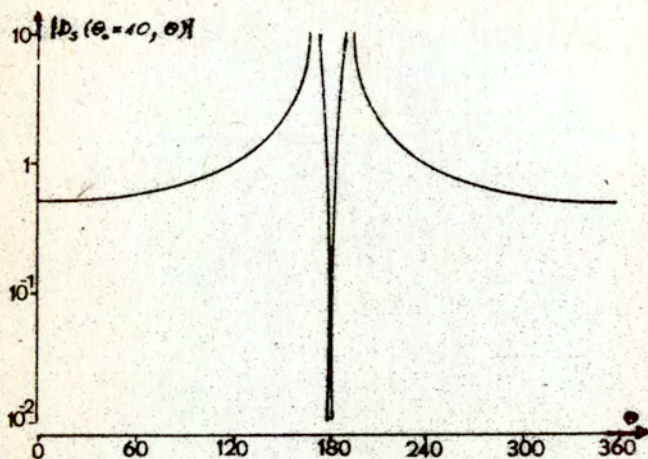
W obu przypadkach: rozwiązania (53) i rozwiązania Rubinowicza, ze współczynnikiem kierunkowości (54), niemożność ich stosowania w pobliżu granicy cienia i granicy fali odbitej spowodowana jest przyjmowaniem przez współczynniki kierunkowości nieskończenie dużych wartości. Na rys.15 - rys.18 przedstawione są współczynniki kierunkowości (53a) dla dwóch typowych ekranów: doskonale miękkiego i doskonale twardego, przy $\theta_0 = 10^\circ, 45^\circ$.

Wyrażenie (53) jest słuszne w całym obszarze poza bezpośrednim sąsiedztwem granicy cienia i granicy fali odbitej $\theta = \pi \pm \theta_0$. Ograniczenie to jest zawarte w założeniach:

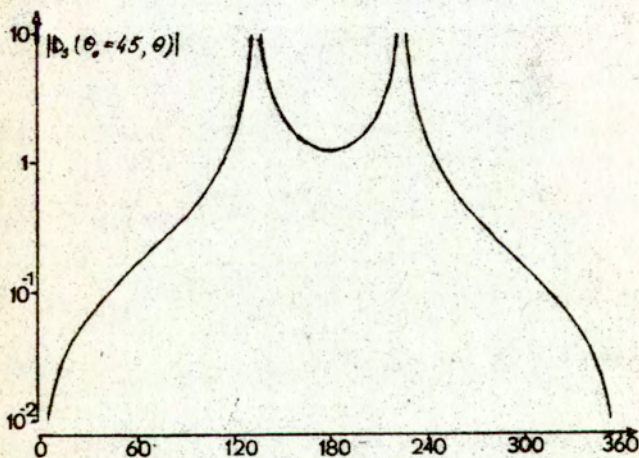
$$(55) \quad k(R-d) \gg 1, \quad k(R-d') \gg 1,$$

$$R = R(s_0, \tau_0, z, z_0),$$

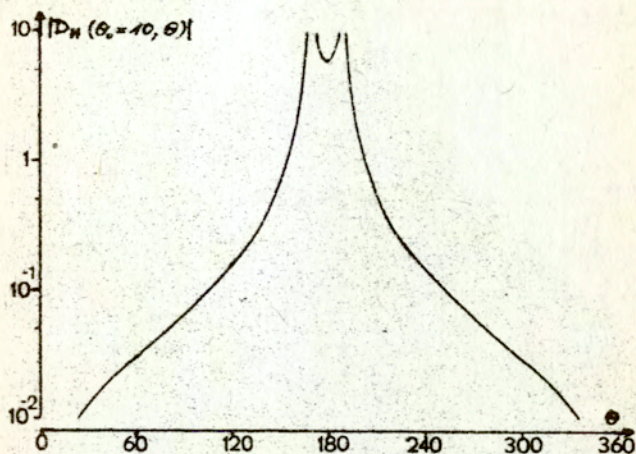
$$d = d(s_0, \tau_0, \theta_0, \theta, z_0, z), \quad d' = d'(s_0, \tau_0, \theta_0, \theta, z_0, z).$$



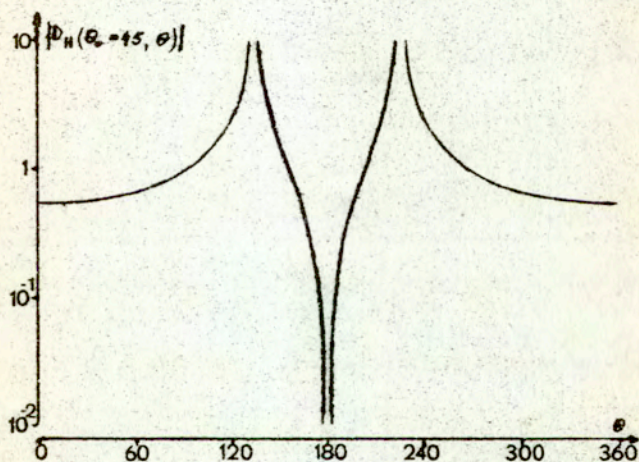
Rys.15. Współczynnik kierunkowości wynikający z (53a) dla ekranu doskonale miękkiego, przy $\theta_0 = 10^\circ$.



Rys.16. Współczynnik kierunkowości wynikający z (53a) dla ekranu doskonale miękkiego, przy $\theta_0 = 45^\circ$.



Rys.17. Współczynnik kierunkowości wynikający z (53a) dla ekranu doskonale twardego, przy $\theta_0 = 10^\circ$.



Rys.18. Współczynnik kierunkowości wynikający z (53a) dla ekranu doskonale twardego, przy $\theta_0 = 45^\circ$.

Przyjmując w (55) równość zamiast nierówności można otrzymać równanie powierzchni otaczających granicę cienia i granicę fali odbitej, wewnątrz których wyrażenie (53) nie może być stosowane. W punktach P leżących na powierzchniach o równaniach:

$$(56) \quad k(R-d) = 1, \quad k(R-d') = 1,$$

amplitudy fal dyfrakcyjnych są takie same. W punktach leżących na powierzchniach o równaniach:

$$(57) \quad k(R-d) = \epsilon, \quad k(R-d') = \epsilon, \quad \epsilon > 1,$$

czyli na zewnątrz powierzchni (56), stosując postać rozwiązania (53) popełnia się błąd rzędu ϵ^{-3} [29].

Przekrojami powierzchni (56) w płaszczyźnie $z = z_0$ są hiperbole /rys.19/ o równaniach:

$$(58) \quad k r_g(\theta_0, z_0, \theta, k) = \frac{\frac{2kz_0 - 1}{2(kz_0 - 1)}}{1 + \frac{kz_0}{kz_0 - 1} \cos(\theta \mp \theta_0)}.$$

Obszary w których nie można stosować wyrażenia (53) zaznaczone są symbolicznie na rys.14. Są to obszary w których nie można stosować wzoru Hurtaego [32] na skuteczność ekranu, ponieważ został on wprowadzony na podstawie rozwiązania w postaci (53). Obszary te zmniejszają się wraz ze wzrostem częstotliwości rozpatrywanej fali /rys.14/.

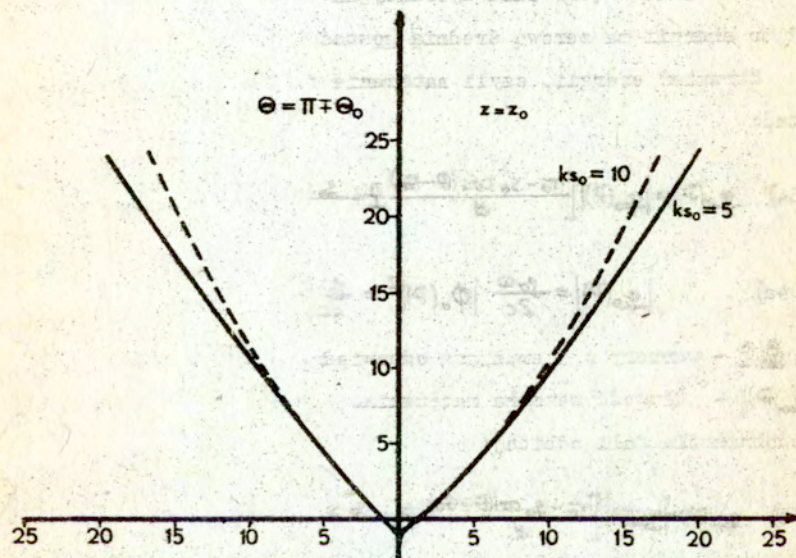
Analizę pola w którym znajduje się ekranująca półpłaszczyzna można uzupełnić o rozkład i transport energii. W obszarze stosowalności przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania

(53) zostaną przedstawione średnie w czasie okresu gęstości energii poszczególnych fal:

$$(59) \quad e(P) = i \frac{\rho_0 \omega^2}{4} [\phi \nabla^2 \phi^* - \phi^* \nabla^2 \phi],$$

oraz średnie w czasie okresu gęstości strumienia energii czyli natężenia fal akustycznych:

$$(60) \quad \vec{g}(P) = p(P) \vec{v}(P) = i [\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi].$$



Rys.19. Przekrój powierzchni (58) ograniczających stosowanie wyrażenia (53) w płaszczyźnie $z = z_0$, dla $k_{s_0} = 5, 10$.

Dla fali padającej:

$$(61) \quad e_0(P) = \frac{\rho_0 \omega^2}{c d} |\phi(P)|^2,$$

c - prędkość fali akustycznej,

dla fali odbitej:

$$(62) \quad c_r(P) = \frac{2c^2}{c} |\phi_r(P)|^2,$$

dla fali dyfrakcyjnej:

$$(63) \quad c_d(P) = 0.$$

Jak widać z (63) fala dyfrakcyjna powodująca zmianę rozkładu energii na zerową średnią gęstość energii.

Strumień energii, czyli natężenie fali padającej ma postać:

$$(64) \quad g_r(P) = |g_r(P)| \left[\frac{c - s_0 \cos(\theta - \alpha)}{d} \underline{e}_1 + \frac{s_0 \sin(\theta - \alpha)}{d} \underline{e}_2 + \frac{c - 2s_0}{d} \underline{e}_3 \right],$$

$$(64a) \quad |g_r(P)| = \frac{2c^2}{2c} |\phi_r(P)|^2 = \frac{2c^2}{2c} |\phi_r|^2,$$

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ - wektory w kierunkach odpowiednich osi /rys.11/

$|g_r(P)|$ - długość wektora natężenia.

Podobnie dla fali odbitej:

$$(65) \quad g_r(P) = |g_r(P)| \left[\frac{c - s_0 \cos(\theta + \alpha)}{d} \underline{e}_1 + \frac{s_0 \sin(\theta + \alpha)}{d} \underline{e}_2 + \frac{c - 2s_0}{d} \underline{e}_3 \right],$$

$$(65a) \quad |g_r(P)| = \frac{2c^2}{2c} |\phi_r(P)|^2 = \frac{2c^2}{2c} |\phi_r|^2.$$

Wektor natężenia dla fali dyfrakcyjnej ma składowe w kierunku \underline{e}_1 i w kierunku \underline{e}_2 natomiast nie ma składowej w kierunku \underline{e}_3 :

$$(66) \quad g_{s(\theta)}^d(P) = |g_{s(\theta)}^d(P)| \left[\frac{s_1 + \kappa}{R} \frac{s_1}{2} + \frac{z - 2z_0}{R} \frac{z}{2} \right],$$

$$(66a) \quad |g_{s(\theta)}^d(P)| = \frac{\mu_0 \omega^2}{2c} |\phi_{s(\theta)}^d(P)|^2 = \frac{\mu_0 \omega}{16\pi R s_1 \kappa} [D_{s(\theta)}(\theta_0, \theta)]^2$$

Dla rozwiązania Rubinowicza, słusznego w obszarach położonych daleko od krawędzi i daleko od granicy cienia i granicy fali odbitej, oznaczając:

$$(67) \quad \alpha_{s(\theta)}^D = \frac{D_{s(\theta)}^D(\theta_0, \theta)}{D_{s(\theta)}(\theta_0, \theta)},$$

otrzymuje się następującą postać wektora natężenia:

$$(68) \quad g_R^d(P) = |g_R^d(P)| \left[\frac{s_1 + \kappa}{R} \frac{s_1}{2} + \frac{z - 2z_0}{R} \frac{z}{2} \right],$$

$$(68a) \quad |g_R^d(P)| = [\alpha_{s(\theta)}^D]^2 |g_{s(\theta)}^d(P)|.$$

Jak widać obie przybliżone postaci rozwiązań (46), (46d), (53) i (24), (31), (54), dają ten sam kierunek transportu energii, różnica występuje w długości wektorów natężenia, których stosunek określony jest przez stosunek współczynników kierunkowości dla obu rozwiązań (67).

V. Wnioski

Po przedstawieniu trzech teorii dyfrakcji można dokonać przeglądu zakresu ich stosowalności.

Całka Kirchhoffa dobrze spełnia swoją rolę jako narzędzie opisu obrazów powstających w przyrządach optycznych w pobliżu

osi układu. Całka (8) daje możliwość uwzględnienia różnych kształtów otworów, przy zachowaniu relacji (9), dotyczącej wymiarów otworu.

Stosowanie całki Kirchhoffa do obliczania dyfrakcji na krawędzi półprzestrzeni narusza relację (9). Natomiast położenie punktu obserwacji blisko osi układu odpowiada w tym przypadku położenie w pobliżu granicy cienia.

Przyjmując, że istnienie relacji (22), dotyczącej wielkości różnicy dróg przebywanej przez falę do punktu obserwacji bezpośrednio i przez krawędź, nie narusza założenia o znajdowaniu się punktu obserwacji w pobliżu granicy cienia, skuteczność ekranu można opisać wzorem (20). Obliczona w ten sposób skuteczność ekranu jest o 3 [dB] większa od skuteczności obliczonej ze wzoru Maekawy (21).

Rozwiązanie Rubinowicza (23) jest istotne ze względu na samą interpretację zjawiska dyfrakcji. Zawiera ono pole geometryczne, którego rozkład wynika z prostoliniowego rozchodzenia się fal w postaci promieni świetlnych czy dźwiękowych. Pole geometryczne określa rozkład obszarów cienia dla przypadku "ekranu Kirchhoffa", działającego jako swego rodzaju ekran pochłaniający: fala po zetknięciu z nim znika, z tego punktu widzenia "ekran Kirchhoffa" stanowi powierzchnię, skoku dla prędkości akustycznej i ciśnienia akustycznego. Po stronie źródła na powierzchni ekranu prędkość i ciśnienie są równe prędkości i ciśnieniu fali padającej ze źródła, po przeciwnej stronie, z założenia (4) prędkość i ciśnienie są równe zero.

W teorii Rubinowicza fala oddziałując z "ekranem Kirchoffa" zostaje przez niego pochłonięta ale oprócz tego wchodzi w oddziaływanie z samą krawędzią ekranu.

Wynikiem tego oddziaływania jest fala dyfrakcyjna. Postać jaką przyjmuje fala dyfrakcyjna wynika z założenia, że rozkład pola na powierzchni otworu jest równy rozkładowi w polu swobodnym (3).

Obie teorie: Kirchoffa i Rubinowicza są obarczone tymi samymi błędami założenia o rozkładzie pola w płaszczyźnie w której znajduje się ekran tzn. na powierzchni samego ekranu i na powierzchni otworu. O ile rozkład pola na powierzchni otworu można traktować jako pewien rodzaj przybliżenia, o tyle rozkład pola na powierzchni ekranu prowadzi do przypisania mu nierzeczywistych własności.

Trudność tę można pokonać wprowadzając falę odbitą od ekranu. Oznacza to przyjęcie ekranu o idealnych własnościach: doskonale miękkiego lub doskonale twardego, do własności którego mogą się zbliżać własności rzeczywistych ekranów np. betonowej ściany.

Po tych ustaleniach można już przejść do wprowadzenia z wyrażenia (25) odpowiednio dobranej dla rozważanego przypadku postaci fali dyfrakcyjnej. Krawędzie ekranów opisywanych tą metodą mogą być krzywymi różnych kształtów, mogą to być krzywe niepełne.

W oparciu o teorię Rubinowicza opis dyfrakcji na "ekranie Kirchoffa" tzn. przy działaniu tylko źródła rzeczywistego, w pobliżu granicy cienia daje taki sam rozkład pola jak całka

Kirchhoffa z dokładnością do współczynnika (32) , którego moduł na granicy cienia jest równy jedności. Dla obszarów w pobliżu granicy cienia i fal krótkich, oba rozwiązania pozostają w dobrej zgodności z wynikami eksperymentów. Zgodność ta wyjaśnia się na gruncie rozwiązania ścisłego dla idealnej półpłaszczyzny, miękkiej lub twardej, w polu fali kulistej (37) , (38) .

Ścisłe rozwiązanie daje opis pola na tyle zgodny z rzeczywistymi rozkładami na ile własności rzeczywistych ekranów są bliskie własnościom idealnego ekranu.

W przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania (46) dla obszarów odległych od krawędzi można odnaleźć rozwiązanie Rubinowicza (24) uwzględniające istnienie fali odbitej od ekranu.

Charakterystyczne dla zjawiska dyfrakcji jest to, że w jego opisie każdorazowo pojawiają się całki Fresnela. Różnice między rozwiązaniami (46) i (24) wynikają z relacji jaka występuje między wartościami współczynników kierunkowości amplitud fal dyfrakcyjnych pochodzących od źródła rzeczywistego i źródła fali odbitej (50) , (51) w obu rozwiązaniach. Relacja ta zostaje zachowana przy następnym przybliżeniu kiedy opisuje się rozkład pola w obszarach oddalonych zarówno od krawędzi jak i granicy cienia i granicy fali odbitej. Będzie to zrozumiałe jeśli weźmie się pod uwagę fakt, że teoria Rubinowicza rozwiązuje zagadnienie skoku jednostkowego fali na powierzchni ekranu, co po uwzględnieniu łącznego działania źródła rze-

czywistego i pozornego daje właściwe warunki brzegowe na ekranie, natomiast rozkład pola na otworze, uzupełniający warunki brzegowe, pozostaje nadal rozkładem w polu swobodnym.

W przypadku rozwiązania ścisłego robi się tylko założenie dotyczące wartości przyjmowanej przez jedną ze związanych z sobą wielkości pola: normalnej składowej prędkości akustycznej lub ciśnienia akustycznego. Dodatkowe założenia wynikają z fizycznej zasady zachowania energii i stanowią podstawę do wyboru z całej klasy możliwych rozwiązań problemu tylko tego rozwiązania, które będzie miało sens fizyczny. Z tego powodu rozwiązanie ścisłe prawidłowo opisuje rozkłady pola na powierzchni ekranu i powierzchni otworu, nie wyłączając bezpośredniego sąsiedztwa samej krawędzi.

Fala dyfrakcyjna od źródła rzeczywistego ma największą amplitudę w pobliżu granicy cienia L , amplituda ta dość szybko maleje wraz z oddalaniem się od granicy cienia. Można to prześledzić na rys.5, gdzie dla dodatnich wartości różnicy dróg δ w obszarze cienia pole zawiera tylko falę dyfrakcyjną ^{pocho}dzącą od źródła rzeczywistego. Dla ujemnych wartości δ pole jest sumą fali padającej i fali dyfrakcyjnej, stąd na skutek sumowania obu fal pojawiają się oscylacje wokół wartości równej amplitudzie fali padającej. Ponieważ źródło pozorne jest lustrzanym odbiciem źródła rzeczywistego fala dyfrakcyjna pochodząca od źródła pozornego jest lustrzanym odbiciem fali dyfrakcyjnej pochodzącej od źródła rzeczywistego. Fala dyfrakcyjna od źródła pozornego w pobliżu granicy fali odbitej L' , podobnie jak fala

dyfrakcyjna od źródła rzeczywistego w pobliżu granicy cienia L , ma największą amplitudę, która maleje wraz z oddalaniem się od niej. Analizując pole w trzech obszarach wyróżnionych na rys. 14 widać, że dla obszaru I, ze względu na bliskość granicy fali odbitej L' , będzie dominowała fala dyfrakcyjna od źródła pozornego, w obszarze III, ze względu na bliskość granicy cienia - fala dyfrakcyjna od źródła rzeczywistego. W obszarze II będą one miały porównywalny udział.

Obszar III, obszar cienia geometrycznego jest obszarem brany przed wszystkim pod uwagę ze względu na skuteczność ekranu. Ponieważ dominuje w nim fala dyfrakcyjna od źródła rzeczywistego, stosowanie całki Kirchhoffa (13) lub rozwiązania Rubinowicza (23), uwzględniającego działanie tylko źródła rzeczywistego, prowadzi do dobrej zgodności obliczonych wartości pola z mierzonymi doświadczalnie.

Teoria Rubinowicza identyfikuje zjawisko dyfrakcji z działaniem krawędzi otworu. Dla fal krótkich, w przypadku półpraszczysty tylko jeden punkt krawędzi jest źródłem fali zaburzenia.

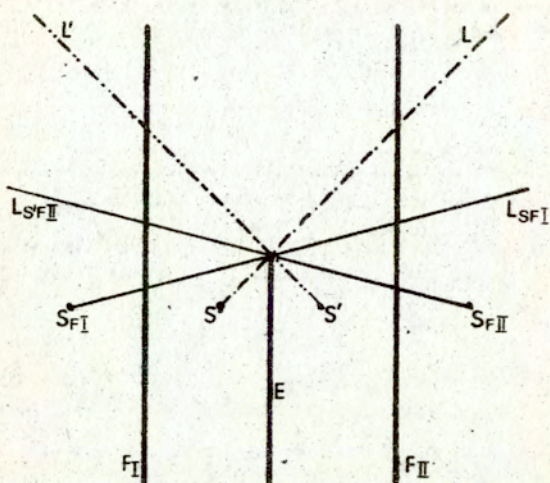
W przypadku ścisłego rozwiązania, w przybliżonych postaciach fal dyfrakcyjnych (46d), (46e), (53a), widoczne jest działanie również jednego punktu krawędzi. Jego położenie wynika z określenia najmniejszej odległości między źródłem a punktem obserwacji liczonej przez krawędź, czyli wielkości R , która zdefinicji jest odległością między źródłem a punktem obserwacji, liczoną przez punkt krawędzi Z_0 /rys.10/, /rys.11/, o którym mówi się w teorii Rubinowicza.

Aby uświadomić sobie w jaki sposób odbywa się transport energii i jakie są jego wielkości najlepiej posłużyć się wektorem natężenia fali akustycznej.

Obliczając natężenia poszczególnych fal na podstawie przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania (53) oraz rozwiązania Rubinowicza (24) otrzymuje się te same kierunki transportu energii (64) - (66), (68), przy czym istniejąca różnica w modułach wektorów natężenia wynika ze stosunku amplitud fal dyfrakcyjnych w obu rozwiązaniach.

Dla $\alpha = \alpha_0$ / $\beta = \pi/2$ / energia fali dyfrakcyjnej jest transportowana wzdłuż kierunków promieni \underline{p} wychodzących z punktu Z_0 , w płaszczyźnie prostopadłej do ekranu. Przy $\beta \neq \pi/2$ transport energii odbywa się znów wzdłuż kierunków promieni wychodzących z punktu Z_0 , z tym że leżą one wszystkie na poboczniczy stożka, którego osią jest krawędź ekranu, o kącie rozwarcia β .

Przedstawione do tej pory rozważania dotyczyły przestrzeni w której znajdowało się źródło fali kulistej i półpłaszczyzna. Jeśli w obszar zostaną wprowadzone np. dwie dodatkowe płaszczyzny odbijające /rys.20/ sytuacja staje się bardziej złożona i to nie tylko ze względu na ilość fal odbitych, które należy zsumować. Problem komplikuje fakt pojawienia się licznych granic fal geometrycznych dla kolejnych źródeł pozornych, w pobliżu których nie mogą być stosowane przybliżone wyrażenia na falę dyfrakcyjną w postaci (53).



Rys.20. Granice pól geometrycznych dla kolejnych źródeł pozornych pojawiających się w przypadku wielokrotnych odbić.

Ponieważ obliczenia pola w złożonych układach akustycznych, w których istnieją fale odbite, wymaga stosowania techniki komputerowej, słuszniejszym będzie wykorzystanie przybliżonej postaci rozwiązania (46), zakładającej tylko odpowiednio dużą odległość punktów obserwacji od krawędzi dyfrakcyjnej /oczywiście tylko wtedy gdy ten warunek jest spełniony/. Rozwiązania te zawierają całki Fresnela (12), które tylko w przypadku dużych wartości argumentu $\delta > 1,5\lambda$ /można zastąpić pierwszym wyrazem ich rozwinięcia asymptotycznego (19), otrzymując wyrażenie (53). Ze względu na ograniczony obszar stosowalności wzoru (53), w programie obliczeniowym należałoby umieścić dodatkową procedurę analizującą czy założenie $\delta > 1,5\lambda$ jest

spełnione, stąd dopiero wynikałaby decyzja którą postać przybliżonego rozwiązania można zastosować: (53) czy (46). Byłaby to niepotrzebna komplikacja, ponieważ i tak trzeba dysponować programem obliczania całki Fresnela.

Ogólnie można stwierdzić, że dla obliczenia skuteczności ekranu w obszarze cienia geometrycznego wystarczające jest posłużenie się najprostszymi teoriami dyfrakcji tzn. teorią Kirchhoffa i uwzględniającą działanie tylko jednego źródła teorią Rubinowicza. Kiedy należy uwzględnić odbicia od podłoża, a tym bardziej gdy należy uwzględnić działanie jeszcze innych występujących w otoczeniu płaszczyzn, sposób ten jest zawodny. Należy wtedy posłużyć się teoriami pozwalającymi na opis pola w całej przestrzeni, czyli rozwiązaniami Rubinowicza typu (24) z wyrażeniem na falę dyfrakcyjną (29) lub przybliżoną postacią rozwiązania (46), z odpowiednio wymaganą ilością źródeł pozornych.

Autorzy mają nadzieję, że przedstawione w pracy rozważania okażą się przydatne w rozwijaniu metod teoretycznego opisu pola w złożonych układach akustycznych.

VI. Literatura

- [1] U.J. Kurze, G.S. Anderson "Sound attenuation by barriers" Appl. Acoust 4, 1971, p. 35-53
- [2] R. Beracha "A simple method for prediction the traffic noise reduction by finite barriers" Acustica, 44 /1/, 1980, p.23
- [3] T. Isei, T.F.W. Embleton, J.E. Piercy "Noise reduction by barriers on finite impedance ground" J.A.S.A., 67, /1/, 1980, p. 46-58

- [4] Z. Maekawa "Noise reduction by distance from sources of various shapes" Appl. Acoust. 3, /3/, 1970, p.225
- [5] R. Janczur, E. Walerian "Pole akustyczne na fasadzie budynku ekranowanego przez inny budynek" Proc. XXX O.S.A. Gdańsk 83
- [6] D.A. Hutchins, H.W. Jones, L.T. Russel "Model studies of barriers performance in the presence of ground surface. Part I: Thin, perfectly reflecting barriers. Part II: Different shapes" J.A.S.A. 72, /6/, 1984, p. 1807-1826
- [7] K. Fujiwara, Y. Ando, Z. Maskawa "Noise control by barriers - part 1: noise reduction by a thick barriers" Appl. Acoust. 10, /2/, 1977, p.147
- [8] R. Mittra, S.W. Lee "Analytical techniques in the theory of guided waves" Macmillan 1971
- [9] R.P. Kending, S.I. Hayek "Diffraction by a hard-soft barrier" J.A.S.A. 70, /4/, 1981, p. 1156-1165
- [10] A.D. Rawlins "The solution of mixed boundary value problem in the theory of diffraction by semi-infinite plane" Proc. R. Soc. Lond. A. 346, 1975, p.469-484
- [11] A.D. Rawlins "Diffraction of sound by rigid screen with a soft or perfectly absorbing edge" J. Sound Vib. 45, /1/, 1976, p. 53-67
- [12] A. de Bruijn "Calculation of the edge effect of sound-absorbing structures" proefschrift, Woensdag, 1967
- [13] E.G. Jonasson "Sound reduction by barriers on the ground" J. Sound Vib. 22, /1/, 1972, p. 113-126
- [14] T.F.W. Embleton "Line integral theory of barriers attenuation in presence of the ground" J.A.S.A. 67, /1/, 1980, p.42-46
- [15] T.F.W. Embleton, G.J. Thiessen, J.E. Piercy "Propagation in an inversion and reflection at the ground" J.A.S.A. 59, /2/, 1976, p.278
- [16] T.F.W. Embleton, J.E. Piercy, N. Olson "Outdoor propagation over ground of finite impedance" J.A.S.A. 59, /2/, 1976. p.267
- [17] H. Biering, O.Z. Pedersen "System analysis and time delay spectrometry" Tech. Rev. 2, 1983

- [18] M. Born, E. Wolf "Principles of optics, electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light" Pergamon Press 1970 /first ed.1959/
- [19] G.L. James "Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves" England 1976
- [20] Y. Sakurai "Sound reflection of a curved rigid panel" J.A.S.J. /E/, 2, /2/, 1979, p.63
- [21] Y. Sakurai, K. Nagata "Sound reflection of a rigid plane panel and of "live end" composed by those panels" J.A.S.J. /E/, 2, /1/, 1981, p.5
- [22] Y. Sakurai, K. Nagata "Practical estimation of sound reflection of a panel-with a reflection coefficient" J.A.S.J. /E/, 2, /1/, 1982, p.7
- [23] Y. Sakurai, K. Ishida "Multiple reflection between rigid plane panels" J.A.S.J. /E/, 2, /3/, 1982, p.183
- [24] Y. Sakurai, K. Ishida "Multiple reflection between rigid curved panels" J.A.S.J. /E/, 4, /1/, 1983. p.27
- [25] W. Rubinowicz "Teoria dyfrakcji Kirchhoffa i jej interpretacja na podstawie poglądów Younga" Ossolineum 1972
- [26] A. Rubinowicz "Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung" PWN, Warszawa 1957
- [27] B. Nobel "Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations" Pergamon Press 1958
- [28] D.S. Jones "The theory of electromagnetism" Pergamon Press 1964
- [29] B.B. Baker, E.T. Copson "Mathematical theory of Huygens' principle" Oxford at the Clarendon Press 1950
- [30] E. Skudrzyk "The foundations of acoustics, basic mathematics and basic acoustics" Springer-Verlag 1971
- [31] H.H. Macdonald "A class of diffraction problems" Proc. Lond. Math.Soc. 14, 1915. p. 410-427
- [32] U.J. Kurze "Noise reduction by barriers" J.A.S.A. 55 /3/, 1974, p. 504-518
- [33] E. Kotarbińska "Analiza skuteczności działania ekranu przeciwdźwiękowego w pomieszczeniu quasi-płaskim" prac. dok. IPPP PAN, Warszawa 1982

- [34] T. Kawai, K. Fujimoto "Noise propagation around thin half-plane" *Acustica* 38, /5/, 1977, p. 313-323
- [35] ed. J.J. Bowman, T.B.A. Senior, P.L.E. Uslenghi "Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes" North-Holland Com. 1969

VII. Oznaczenia

- \mathcal{A} - powierzchnia otworu
- [\mathcal{A}] - wymiary otworu
- \mathcal{B} - powierzchnia ekranu
- b_H - ciśnieniowy współczynnik odbicia dla płaszczyzny doskonale twardej (48)
- b_S - ciśnieniowy współczynnik odbicia dla półpłaszczyzny doskonale miękkiej (47)
- e - powierzchnia półkuli zamykająca obszar wokół punktu P
- $D_S(H)(\theta, \theta)$ - współczynnik kierunkowości w przybliżonej postaci ściślejszego rozwiązania (53a)
- $D_S(H)(\theta_0, \theta)$ - współczynnik kierunkowości w rozwiązaniu Rubinowicza (54)
- c - prędkość fali akustycznej w powietrzu
- d - bezpośrednia odległość między źródłem S a punktem obserwacji (8), (13a)
- d' - bezpośrednia odległość między źródłem S' a punktem obserwacji (45a)
- $e(P)$ - średnia w czasie okresu gęstość energii fali akustycznej (59)
- $e^d(P)$ - gęstość energii fali dyfrakcyjnej (63)
- $e_0(P)$ - gęstość energii fali padającej (61)

- $e_r(P)$ - gęstość energii fali odbitej (62)
- $F(w)$ - całka Fresnela (12)
- $F(k, R, m)$ - całka postaci (37a)
- $G(P)$ - funkcja skoku jednostkowego (23b)
- $H(P)$ - funkcja skoku jednostkowego (24b)
- $H_1^{(1)}(z)$ - funkcja Hankla pierwszego rodzaju, rzędu pierwszego
(37a) , (38a)
- $H_0^{(1)}(x)$ - funkcja Hankla pierwszego rodzaju, rzędu zerowego
(40b)
- \mathcal{K} - krawędź otworu dyfrakcyjnego
- $d\mathcal{K}$ - wektor styczny do krawędzi (25)
- k - liczba falowa
- L - granica cienia
- L' - granica fali odbitej
- N - liczba Fresnela (12b)
- \underline{n} - normalna do powierzchni
- \underline{n}_A - normalna do powierzchni otworu (7)
- \underline{n}_Z - normalna do granicy cienia w punkcie krawędzi Z_0 (2a)
- P - punkt obserwacji
- p - ciśnienie akustyczne
- R - najkrótsza odległość liczona do środka do punktu obserwacji przez krawędź (12c)
- R_0 - promień półkuli (5)
- \underline{r}_A, r_A - wektor łączący punkt obserwacji z punktami A otworu i jego długość (7)

- r_A^0 - odległość od punktu obserwacji, wzdłuż odcinka SP, do punktu przebiecia przez niego płaszczyzny w której leży ekran (8a)
- \underline{r}_B, r_B - wektor łączący punkt obserwacji z punktami krawędzi B i jego długość (25)
- r_C - odległość punktów powierzchni \mathcal{C} od punktu P (5)
- r_M - odległość punktów powierzchni \mathcal{M} od punktu P (2)
- $r_g(\mathcal{Q}, s_o, \mathcal{O}, k)$ - rzut płaszczyzn ograniczających obszary stosowalności przybliżonego rozwiązania (53) na płaszczyznę $z = z_0$ (58)
- \underline{r}_Z, r_Z - wektor łączący punkt obserwacji z punktem krawędzi Z_0 i jego długość (28)
- \underline{s}_A, s_A - wektor łączący źródło z punktami A powierzchni otworu (5), (7)
- s_A^0 - odległość od źródła, wzdłuż odcinka SP, do punktu przebiecia przez niego płaszczyzny w której leży ekran (8a)
- \underline{s}_B, s_B - wektor łączący źródło z punktami krawędzi B i jego długość (25)
- \underline{s}_Z, s_Z - wektor łączący źródło z punktem krawędzi Z_0 i jego długość (28)
- $\underline{q}(P)$ - średnia w czasie okresu gęstość strumienia energii /natężenie fali akustycznej/ (60)
- $\underline{q}_S^{(H)}(P)$ - natężenie fali dyfrakcyjnej (66)
- $\underline{q}_0(P)$ - natężenie fali padającej (64)
- $\underline{q}_T(P)$ - natężenie fali odbitej (65)
- u - zmienne całkowania (10)

- u (P) - zredukowana wartość potencjału akustycznego (14)
- V_c - obszar cienia fali padającej ze źródła S (23b)
- V_r - obszar cienia fali odbitej (24b)
- V'_s - obszar występowania fali bezpośredniej pochodzącej ze źródła S' (24b)
- v (P) - prędkość akustyczna (1a)
- v - zmienna całkowania (10)
- y_A - współrzędna punktu otworu (8d)
- y_A^O - odległość od punktu przebicia przez odcinek SP płaszczyzny, w której leży ekran, do krawędzi ekranu (12a)
- z_A - współrzędna punktu otworu (8b)
- α_{RK} - stosunek rozwiązania Rubinowicza (30) do całki Kirchhoffa dla półpłaszczyzny (13) w obszarze cienia (32)
- $\alpha_{RS}(S)$ - stosunek fali dyfrakcyjnej Rubinowicza (49a) do fali dyfrakcyjnej w przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania, w przypadku działania źródła S (50)
- $\alpha_{RS}(S')$ - stosunek fali dyfrakcyjnej Rubinowicza (49b) do fali dyfrakcyjnej (46e) w przybliżonej postaci ścisłego rozwiązania, w przypadku działania źródła S' (51)
- $\alpha_{S(H)}^D$ - stosunek współczynnika kierunkowości w rozwiązaniu Rubinowicza (54) i w przybliżonej postaci (53a) ścisłego rozwiązania (67)
- δ - różnica dróg: liczonej bezpośrednio od źródła do punktu obserwacji i przez krawędź (12c)
- η - funkcja skoku jednostkowego (46a)
- θ - kąt między odcinkiem r_0 a płaszczyzną ekranu (30)

θ_0 - kąt między odcinkiem s_0 a płaszczyzną ekranu (30)

λ - długość fali

ρ_0 - gęstość ośrodka propagacji /powietrza/

$\phi(P)$ - potencjał akustyczny

$\phi_0(S, P)$ - potencjał fali bezpośredniej pochodzącej ze źródła S (24a)

$\phi_0(S', P)$ - potencjał fali bezpośredniej pochodzącej ze źródła S' (24a)

$\phi^d(P)$ - potencjał fali dyfrakcyjnej (23)

$\phi^d(S, P)$ - potencjał fali dyfrakcyjnej związanej z działaniem źródła S (24c)

$\phi^d(S', P)$ - potencjał fali dyfrakcyjnej związanej z działaniem źródła S' (24c)

$\phi_{\Sigma}^d(P)$ - potencjał fali dyfrakcyjnej Rubinowicza gdy występuje fala odbita od ekranu (24)

$\phi^E(P)$ - potencjał fali geometrycznej (23)

$\phi_{\Sigma}^E(P)$ - potencjał fali geometrycznej Rubinowicza gdy występuje fala odbita od ekranu (24)

$\phi_H(P)$ - potencjał fali akustycznej w obszarze z ekranem doskonale twardym (38)

$\phi_K(P)$ - potencjał akustyczny za ekranem Kirchhoffa w kształcie półpłaszczyzny (13)

$\phi_K(P, \omega > 0)$ - całka Kirchhoffa dla ekranu w kształcie półpłaszczyzny w obszarze cienia geometrycznego (13b)

$\phi_K(P, \omega < 0)$ - całka Kirchhoffa dla ekranu w kształcie półpłaszczyzny w obszarze gdzie występuje fala bezpośrednia (13b)

$\Phi_s (P)$ - potencjał akustyczny fali padającej ze źródła S
(13a)

$\Phi_r (P)$ - potencjał fali odbitej od ekranu (45a)

$\Phi_H^d (P)$ - potencjał fali dyfrakcyjnej pochodzącej od krawędzi
półpłaszczyzny w teorii Rubinowicza (28)

$\Phi_S (P)$ - potencjał fali akustycznej w obszarze z ekranem
doskonale miękkim (37)

$[\Phi(M)]_{ka}$ - wartość potencjału akustycznego na powierzchni (2)

$[\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n}]_{ka}$ - wartość pochodnej normalnej potencjału akustycznego
na powierzchni (2)

φ - kąt między odcinkiem SP a normalną do powierzchni
otworu \underline{n}_A (7)

ω - częstość kątowna /pulsacja/

\mathcal{S} - powierzchnia zamknięta otaczająca punkt P (2).

VIII. Streszczenie

Przedstawiono i porównano trzy teorie dyfrakcji. Rozważania poprzedzone omówieniem przybliżeń stosowanych w akustycznym opisie układów urbanistycznych, oraz metod stosowanych w akustyce dla określenia skuteczności ekranów urbanistycznych.

Każdy opis układu rzeczywistego musi, poza uwzględnieniem dyfrakcji na krawędziach znajdujących się w nim obiektów, brać pod uwagę występowanie fal odbitych. Istnienie fal odbitych oraz położenie obszarów, dla których wymagane jest określenie rozkładu pola akustycznego, determinuje wybór jednej z teorii dyfrakcji.

W rozdz. II została omówiona najstarsza teoria dyfrakcji

- teoria Kirchhoffa. Omówiono wynikający z przyjętych uproszczeń zakres jej stosowania, oraz relację jaka zachodzi między wynikami teorii dyfrakcji Kirchhoffa a szeroko stosowanym, empirycznym wzorem Maekawy, określającym skuteczność płaskiego ekranu akustycznego.

W rozdz. III przedstawiono teorię dyfrakcji Rubinowicza, będącą rozwinięciem teorii Kirchhoffa. Teoria Rubinowicza pozwala na uwzględnienie istnienia fal odbitych, stanowiąc jednocześnie podstawę dla pogładowej interpretacji zjawiska dyfrakcji.

Zakres stosowalności zarówno teorii Kirchhoffa jak i Rubinowicza ustalono w rozdz. IV przez porównanie ze ścisłym rozwiązaniem Sommerfelda. Rozwiązanie Sommerfelda jest ścisłym rozwiązaniem problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie idealnie miękkiej lub idealnie twardej.

We Wnioskach przeprowadzono analizę porównawczą przedstawionych teorii dyfrakcji. Jej wyniki będą przydatne w rozwijaniu metod teoretycznego opisu pola akustycznego w złożonych układach urbanistycznych.

Spis treści

I. Wstęp.....	3
II. Teoria dyfrakcji Kirchhoffa.....	7
III. Teoria dyfrakcji Rubinowicza.....	20
IV. Ścisłe rozwiązanie problemu półpłaszczyzny w polu fali kulistej.....	30
V. Wnioski.....	49

VI. Literatura.....	57
VII. Oznaczenia.....	60
VIII. Streszczenie.....	65