

H. Kudrewicz, S. Przeździecki

METODA WIENERA-HOPFA DLA RÓWNAŃ

$$U(x) = K(x)L(x) + D(x)$$

W PRZYPADKU FUNKCJI $K(x)$ Z ZERAMI

21 / 1982

P. 269a

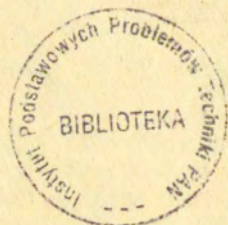
WARSZAWA 1982

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 194.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 kwietnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr21/1982



57053



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd.1,5. Ark.druk. 3,25.

Oddano do drukarni w sierpniu 1982r.

Nr zamówienia 456/o/82. | Z-97.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Halina Kudrewicz, Stanisław Przeździecki

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

METODA WIENERA-HOPFA DLA RÓWNIANIA

$$U(\alpha) = K(\alpha)L(\alpha) + D(\alpha)$$

W PRZYPADKU FUNKCJI $K(\alpha)$ Z ZERAMI .

STRUKTURA ROZWIĄZANIA DLA ZAGADNIENIA

DYFRAKCJI FALI PŁASKIEJ NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE

IMPEDANCYJNEJ

Praca dotyczy rozwiązania równania Wienera-Hopfa występującego w zagadnieniu dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej i stanowi zarówno odrębną całość jako pełne przedstawienie metody rozwiązań równania W.H., gdy faktoryzowana funkcja ma zera, jak też uzupełnienie do publikacji [5].

Zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej sprowadza się do problemu rozwiązania równania Helmholtza na płaszczyźnie z mieszanymi warunkami danymi na półprostej oraz warunkiem w ostrzu i nieskończoności.

Rozwiązania poszukuje się w postaci superpozycji fal płaskich będącej całką po linii położonej na dwupłatowej powierzchni Riemanna α z dwoma punktami rozgałęzienia $\alpha = \pm k$ (k rzeczywiste). Nieznane amplitudy są określone poprzez wektorową funkcję $L(\alpha)$ analityczną na prawo od skierowanej linii całkowania (lub poprzez $U(\alpha)$ analityczną na lewo od linii). Wykorzystując warunki dane na

półprostej, dla funkcji $L(\alpha)$ i $U(\alpha)$ otrzymuje się wektorowe równanie Wienera-Hopfa $U(\alpha) = K(\alpha)L(\alpha) + D(\alpha)$, gdzie znana jest wektorowa funkcja $D(\alpha) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0$ i macierz $K(\alpha)$ o wymiarze 2×2 . W przypadku, gdy impedancja po obu stronach półprzestrzeni jest taka sama, układ ten można rozwiązać metodą Wienera-Hopfa. Układ sprowadza się do dwóch niezależnych równań, przy czym funkcje $K_1(\alpha)$ i $K_2(\alpha)$ różnią się tylko mnożnikiem $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$, co powoduje, że faktoryzacja jednej z nich określa faktoryzację drugiej.

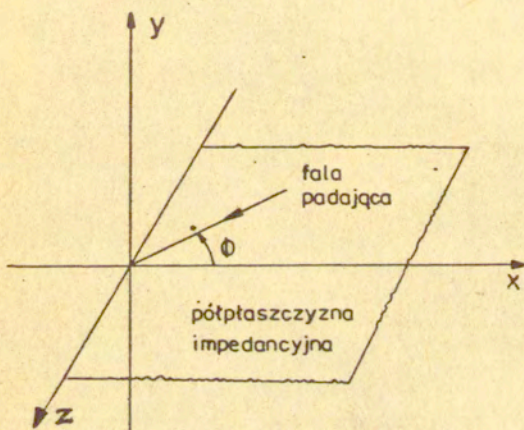
Funkcja $K(\alpha)$ ma dla każdej wartości impedancji η (która jest liczbą zespoloną) $\eta \neq 0$, $\eta \neq \pm 1$ dwa zera $\alpha = \pm d$ położone na rozpatrywanej powierzchni α .

Pokazano, że rozwiązanie równania Wienera-Hopfa zależy od położenia względem tych zer linii, w otoczeniu której dokonuje się faktoryzacji i istnieją cztery zasadniczo różne położenia linii.

Znaleziono ogólne rozwiązanie $L_1(\alpha)$, $U_1(\alpha)$ $\{L_2(\alpha), U_2(\alpha)\}$ równania w otoczeniu każdej z czterech linii i zbadano zachowanie rozwiązania przy $|\alpha| \rightarrow \infty$.

1. Sformułowanie problemu

Zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej, Rys.1, w przypadku, gdy kierunek fali padającej jest prostopadły do krawędzi półpłaszczyzny sprowadza się do rozwiązania dwóch niezależnych problemów dla pola TM i TE .



Rys.1

Każdy z nich polega na rozwiązaniu równania Helmholtza

/1/ $\nabla^2 u + ku = 0$

z mieszanymi warunkami brzegowymi dla pola TM

$$u = i \frac{R}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = +0, x > 0$$

/2/ $u = -i \frac{R}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = -0, x > 0$,

gdzie: $u = E_z$, $\underline{E} = (0, 0, E_z)$

a dla pola TE

$$u = i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = +0, x > 0$$

$$u = -i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = -0, x > 0$$

gdzie $u = H_z$, $\underline{H} = (0, 0, H_z)$, przy oznaczeniach osi jak na Rys. 1.

Współczynnik k jest liczbą falową ośrodka, przyjmujemy k rzeczywiste.

Współczynnik η jest parametrem charakteryzującym impedancję półprzestrzeni, jest to dowolna liczba zespolona, przy czym warunek $\operatorname{Re} \eta > 0$ charakteryzuje półprzestrzeń pasywną, warunek $\operatorname{Re} \eta < 0$ - aktywną.

Rozwiązania poszukuje się w klasie funkcji spełniających warunek odpowiedniej regularności w zerze i warunek "wypromieniowania" lub "fali wybiegającej" w nieskończoności, formułowany dla pasywnej impedancji. Zakłada się, że całe pole $u(x, y)$ jest sumą pola padającego

/4/ $u_i(x,y) = e^{-ik(x \cos \phi + y \sin \phi)}$

i pola ugiętego $u_s(x,y)$.

Pole ugięte poszukuje się w postaci superpozycji fal płaskich

$$u_s(x,y) = \int_Q A(\alpha) e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y > 0$$

/5/
$$u_s(x,y) = \int_Q B(\alpha) e^{i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y < 0$$

gdzie:

/6/
$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

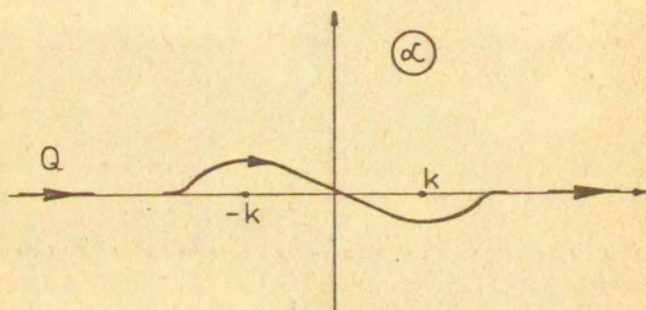
Linia całkowania Q leży na dwupłatowej powierzchni Riemanna α z punktami rozgałęzienia $\alpha = \pm k$ tak, że α przebiega od $-\infty$ do ∞ .

Aby całki były zbieżne, linia Q dla dużych α do modułu α , musi pokrywać się z osią $\text{Im } \alpha$ na tym płacie, na którym $\text{Im } \gamma > 0$.

Ten warunek ustala położenie linii względem punktów rozgałęzienia $\alpha = \pm k$; mianowicie punkty $\alpha = -k$ i $\alpha = k$ muszą leżeć po przeciwnych stronach linii. Ostatecznie rozwiązanie przybiera postać:

$$/7/ \quad u_5(x,y) = \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{y} L_2(\alpha) + \frac{y}{|y|} L_1(\alpha) \right] e^{i\alpha x} e^{i\delta|y|} d\alpha$$

gdzie dotychczas ustalono tylko położenie linii Q dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ i w otoczeniu punktów $\alpha = \pm k$, jak pokazuje Rys.2.



Rys.2

Do wyznaczenia pozostaje cały przebieg linii Q oraz dwie funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, o których wiadomo, że są analityczne w obszarze poniżej (na prawo od) linii Q wraz z linią, oznaczonym przez \mathcal{C} i dążą do zera dla $\alpha \rightarrow \infty$ w tym obszarze. Funkcje te wiążą się z funkcjami $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ zależnościami

$$A(\alpha) - B(\alpha) = L_1(\alpha)$$

/8/

$$\gamma [A(\alpha) + B(\alpha)] = L_2(\alpha)$$

które otrzymuje się przez wykorzystanie warunków brzegowych (2) dla pola TM i (3) dla pola TE przy założonej postaci rozwiązania (5).

Każda z funkcji $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ spełnia w pewnym otoczeniu linii Q równania Wienera-Hopfa, które dla problemu TM mają postać

$$/9a/ \quad U_1(\alpha) = (k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}) L_1(\alpha) - \frac{1}{\pi} \frac{\eta k \sin \phi}{\alpha + k \cos \phi}$$

$$/9b/ \quad U_2(\alpha) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} L_2(\alpha) + \frac{1}{\pi} \frac{k}{\alpha + k \cos \phi}$$

Przez podstawienie $\frac{1}{\eta}$ w miejsce η w równaniach /9ab/ otrzyma się równania Wienera-Hopfa dla problemu TE.

2. Metoda rozwiązania

Zajmijmy się najpierw równaniem /9b/. Podzielmy obie strony równania /9b/ przez η i przepiszmy je w postaci

$$/10/ \quad U(\alpha) = K(\alpha) L(\alpha) + D(\alpha)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$/11/ \quad U(\alpha) = \frac{1}{\eta} U_2(\alpha)$$

$$/12/ \quad K(\alpha) = \frac{k+p\sqrt{k^2-\alpha^2}}{p\sqrt{k^2-\alpha^2}}$$

$$/13/ \quad L(\alpha) = L_2(\alpha)$$

$$/14/ \quad D(\alpha) = \frac{D}{\alpha - \alpha_0}$$

$$/15/ \quad D = \frac{k}{p\eta} \quad , \quad \alpha_0 = -k \cos \phi$$

Równanie /10/ rozwiążemy metodą Wienera-Hopfa, której najbardziej istotnym etapem jest faktoryzacja funkcji $K(\alpha)$. Twierdzenie o istnieniu takiej operacji dla pewnej klasy funkcji zostało sformułowane przez Wienera i Hopfa [3].

2.1. Twierdzenie o faktoryzacji

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej α niech Q oznacza gładką linię skierowaną nie tworzącą pętli i taką, że dla $\alpha \in Q$ mamy $\text{Im} \alpha \rightarrow 0$ przy $\text{Re} \alpha \rightarrow \pm \infty$. Niech Ω oznacza obszar położony powyżej (na lewo od) linii Q i zawierający linię Q wraz z pewnym jej

otoczeniem. Niech \mathfrak{D} oznacza obszar położony poniżej (na prawo od) linii Q i zawierający Q wraz z pewnym jej otoczeniem. Część wspólna $\Omega \cap \mathfrak{D}$ tworzy wstęgę zawierającą linię Q wraz z pewnym jej otoczeniem. Niech we wstędze $\Omega \cap \mathfrak{D}$ dana będzie funkcja analityczna $K(\alpha)$.

Definicja. Indeks funkcji $K(\alpha)$ na linii Q nazywamy liczbę wyrażającą przyrost argumentu $K(\alpha)$ wzdłuż tej linii podzielony przez 2π .

$$/16/ \quad \text{ind } K(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg K(\alpha) \right]_{-\infty + i0}^{+\infty + i0} \quad \text{dla } \alpha \in Q$$

Twierdzenie Wienera-Hopfa

Jeżeli funkcja $K(\alpha)$ jest różna od zera w każdym punkcie wstęgi $\Omega \cap \mathfrak{D}$, spełnia warunek $K(\alpha) \rightarrow 1$ przy $\alpha \rightarrow \pm\infty$ i jej indeks na krzywej Q leżącej w tej wstędze jest równy zero, to istnieją funkcje:

$K_-(\alpha)$ - analityczna i różna od zera dla $\alpha \in \mathfrak{D}$
 oraz $K_+(\alpha)$ - analityczna i różna od zera dla $\alpha \in \Omega$ takie, że

$$/17/ \quad K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega \cap \mathfrak{D}$$

i

$$/18/ \quad K_-(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } |\alpha| \rightarrow \infty \quad \text{i } \alpha \in \mathfrak{D}$$

oraz

$$/19/ \quad K_+(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy} \quad |\alpha| \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \alpha \in \Omega$$

Funkcje te wyrażają się wzorami:

$$/20/ \quad K_-(\alpha) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right] \quad \text{dla} \quad \alpha \in \mathfrak{U}$$

$$/21/ \quad K_+(\alpha) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right] \quad \text{dla} \quad \alpha \in \Omega$$

Dowód znaleźć można np. w [2]. Jakkolwiek w klasycznym twierdzeniu Wienera-Hopfa faktoryzacja jest przeprowadzana w pasie równoległym do osi rzeczywistych, a linia Q jest prostą $\text{Im } \alpha = \tau$ leżącą w tym pasie, to w ogólniejszym sformułowaniu faktoryzacji we wstędze, dowód przebiega tak samo.

Uwaga. W dowodzie w istotny sposób korzysta się z założenia o zerowym indeksie funkcji $K(\alpha)$ na linii Q , którego brak w sformułowanym przez Wienera i Hopfa twierdzeniu. Jest to warunek konieczny i wystarczający na to, aby z założenia $K(\alpha) \rightarrow 1$ przy $|\alpha| \rightarrow \infty$ we wstędze $\Omega \cap \mathfrak{U}$, wynikał wniosek $\ln K(\alpha) \rightarrow 0$ przy $|\alpha| \rightarrow \infty$ w tej wstędze i w konsekwencji, zbieżność całki.

O jednoznaczności faktoryzacji mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli we wstędze $\Omega \cap \mathcal{U}$ istnieje faktoryzacja

$$/22/ \quad K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

taka, że funkcja $K_-(\alpha)$ jest analityczna i nie ma punktów zerowych w \mathcal{U} , natomiast funkcja $K_+(\alpha)$ jest analityczna i nie ma punktów zerowych w Ω , to każda inna faktoryzacja

$$/23/ \quad K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

wyraża się wzorem:

$$K_-(\alpha) = C(\alpha) K_-(\alpha)$$

$$/24/ \quad K_+(\alpha) = C(\alpha) K_+(\alpha)$$

gdzie $C(\alpha)$ jest dowolną funkcją całkowitą.

Dowód. Z założenia mamy

$$/25/ \quad K_+(\alpha) \neq 0 \quad \text{dla } \alpha \in \Omega, \quad K_-(\alpha) \neq 0 \quad \text{dla } \alpha \in \mathcal{U}$$

Z istnienia dwóch faktoryzacji wynika równość:

$$/26/ \quad \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} = \frac{K_-^o(\alpha)}{K_+^o(\alpha)} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega \cap \mathfrak{D}$$

Stąd następnie

$$/27/ \quad \frac{K_-(\alpha)}{K_-^o(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_+^o(\alpha)} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega \cap \mathfrak{D}$$

Wobec założenia /25/ lewa strona /27/ jest funkcją analityczną w \mathfrak{D} , a prawa strona jest funkcją analityczną w Ω . Zatem z twierdzenia o przedłużeniu analitycznym wynika, że istnieje funkcja całkowita taka, że

$$\frac{K_-(\alpha)}{K_-^o(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_+^o(\alpha)} = C(\alpha)$$

co kończy dowód.

Wniosek. W klasie funkcji $K_-(\alpha)$, $K_+(\alpha)$ dążących do jedności przy α dążącym do nieskończoności faktoryzacja jest jednoznaczna.

2.2. Rozwiązanie ogólne równania Wienera-Hopfa w wybranej wstędze

We wstędze $\Omega \cap \mathfrak{D}$ dane są dwie funkcje analityczne $K(\alpha)$ i $D(\alpha)$, przy czym $D(\alpha) = \frac{D}{\alpha - \alpha_0}$ gdzie D jest dowolną stałą, $\alpha_0 \in \Omega$.

Należy znaleźć funkcje : $U(\alpha)$ - analityczną w Ω
i $L(\alpha)$ - analityczną w \mathfrak{D} takie, że w $\Omega \cap \mathfrak{D}$
spełnione jest równanie:

$$/28/ \quad U(\alpha) = K(\alpha)L(\alpha) + D(\alpha) \quad \text{dla } \alpha \in \Omega \cap \mathfrak{D}$$

Twierdzenie 2.

Jeżeli istnieje faktoryzacja $K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}$ taka,
że funkcja $K_-(\alpha)$ jest analityczna i nie ma
punktów zerowych w \mathfrak{D} , a funkcja $K_+(\alpha)$ jest
analityczna i nie ma punktów zerowych w Ω , to każ-
de rozwiązanie równania Wienera-Hopfa /28/ wyraża się
wzorem:

$$L(\alpha) = \frac{C(\alpha) - M_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}$$

/29/

$$U(\alpha) = \frac{C(\alpha) + M_+(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

gdzie $C(\alpha)$ jest dowolną funkcją całkowitą, nato-
miast

$$M_-(\alpha) = D \frac{K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

/30/

$$M_+(\alpha) = D \frac{K_+(\alpha) - K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

Dowód. Skorzystajmy z ogólnej postaci faktoryzacji funkcji $K(\alpha)$, wzory /24-25/ i przepismy równanie /28/ w postaci:

$$/31/ \quad U(\alpha) = \frac{K_{-}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha)}{K_{+}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha)} L(\alpha) + D(\alpha)$$

skąd mamy:

$$/32/ \quad K_{+}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha)U(\alpha) = K_{-}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha)L(\alpha) + D(\alpha)K_{+}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha)$$

Rozkładając drugi wyraz prawej strony /32/ na sumę funkcji analitycznej w Ω i analitycznej w \mathfrak{U} mamy:

$$/33/ \quad D(\alpha)K_{+}^{\circ}(\alpha)C^{\circ}(\alpha) = \left[(M_{+}(\alpha) + C^{\prime}(\alpha)) + (M_{-}(\alpha) - C^{\prime}(\alpha)) \right] C^{\circ}(\alpha)$$

gdzie $C^{\prime}(\alpha)$ jest dowolną funkcją całkowitą.

Podstawiając rozkład /33/ do równania /32/ uporządkujemy je tak, aby lewa strona była analityczna w Ω , a prawa analityczna w \mathfrak{U} .

Mamy:

$$/34/ \quad \left[K_{+}^{\circ}(\alpha)U(\alpha) - (M_{+}(\alpha) + C^{\prime}(\alpha)) \right] C^{\circ}(\alpha) = \left[K_{-}^{\circ}(\alpha)L(\alpha) + (M_{-}(\alpha) - C^{\prime}(\alpha)) \right] C^{\circ}(\alpha)$$

Powyższa równość zachodzi we wstępie, $\Omega \cap \mathfrak{U}$, a zatem z twierdzenia o przedłużeniu analitycznym istnieje funkcja całkowita $P(\alpha)$, taka, że

$$[K_+(\alpha)U(\alpha) - (M_+(\alpha) + C'(\alpha))]C^{\circ}(\alpha) = [K_-(\alpha)L(\alpha) + (M_-(\alpha) - C'(\alpha))]C^{\circ}(\alpha) = P(\alpha)$$

skąd

$$U(\alpha) = \left[\frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)} + C'(\alpha) + M_+(\alpha) \right] \frac{1}{K_+(\alpha)}$$

$$L(\alpha) = \left[\frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)} + C'(\alpha) - M_-(\alpha) \right] \frac{1}{K_-(\alpha)}$$

W ogólności iloraz $\frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)}$ dwóch funkcji całkowitych

tych jest funkcją meromorficzną. Z założenia, funkcja $U(\alpha)$ jest analityczna w Ω .

Ponieważ $C'(\alpha)$ jest funkcją całkowitą, a $M_+(\alpha)$ i $K_+(\alpha)$ są funkcjami analitycznymi w Ω , to z pierwszego równania /35/ wynika, że $\frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)}$ nie może mieć biegunów w Ω . Podobnie z drugiego z równań /35/ wynika, że $\frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)}$ nie może mieć biegunów w \mathfrak{U} . Zatem

$$\text{/36/} \quad \frac{P(\alpha)}{C^{\circ}(\alpha)} + C'(\alpha) = C(\alpha)$$

jest dowolną funkcją całkowitą, co kończy dowód.

Uwaga. Jeżeli funkcja $K(\alpha)$ spełnia założenia

twierdzenia Wienera-Hopfa, to w klasie funkcji

$L(\alpha), U(\alpha)$ znikających w nieskończoności (to znaczy takich, że $L(\alpha) \rightarrow 0$ przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \mathfrak{U}$, $U(\alpha) \rightarrow 0$ przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \mathfrak{Q}$) rozwiązanie /29/ jest jednoznaczne: $C(\alpha) \equiv 0$.

3. Przedłużenie analityczne funkcji $K_-(\alpha), K_+(\alpha)$

Rozwiązanie równań Wienera-Hopfa /9/ pozwoli ze

wzoru /8/ znaleźć szukane pole $u_s(x, y)$

Pozostanie sprawdzić, czy funkcja $u_s(x, y)$

spełnia warunek narzucony w ostrzu: $\xi = 0$ i w nieskończoności: $\xi \rightarrow \infty$, gdzie $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Warunek w ostrzu pozwala ustalić zachowanie się funkcji

$L(\alpha)$ lub $U(\alpha)$ dla $\alpha \rightarrow \infty$, co zazwyczaj narzuca warunek na funkcję $C(\alpha)$ występującą w rozwiązaniu ogólnym równań Wienera-Hopfa, a również wybiera położenie linii Q .

Dla zweryfikowania warunku nałożonego na pole $u_s(x, y)$

w nieskończoności zachodzi potrzeba obliczenia lub

znalezienia rozwinięcia asymptotycznego całki /8/

dla $\xi \rightarrow \infty$. W tym celu potrzebne jest przedłużenie

funkcji $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ z obszaru \mathfrak{U} na

pozostałą część wybranej płaszczyzny α z odcieniem,
Przedłużenie funkcji $L(\alpha)$ otrzymuje się za pomocą
przedłużenia funkcji $K_-(\alpha)$.

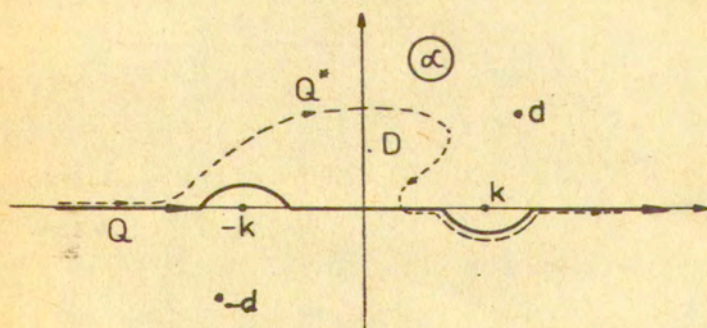
Zgodnie z oznaczeniem /12/

$$/37/ \quad K(\alpha) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}} = \frac{\eta(\alpha + d)(\alpha - d)}{\sqrt{k^2 - \alpha^2} (k - \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2})}$$

gdzie

$$/38/ \quad d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$$

Niech linia Q rozdziela punkty k i $-k$, oraz
punkty d i $-d$, jak na Rys.3.



Rys.3

Jak łatwo sprawdzić, funkcja $K(\alpha)$ spełnia na linii Q wszystkie założenia twierdzenia Wienera-Hopfa (dla k rzeczywistych wstęga analityczności $E(\alpha)$ sprowadza się do linii Q). Zatem funkcja $K_-(\alpha)$ istnieje i jest dana całką Cauchy'ego /20/ dla $\alpha \in \mathfrak{U}$. Przy ustalonym k zależy ona od parametru η i linii Q .

$$K_-(\alpha) = K_-(\alpha; \eta, Q) \quad \alpha \in \mathfrak{U}$$

Całkę Cauchy'ego można przedłużyć przez zmianę linii całkowania.

3.1. Zmiana linii całkowania w obszarze skończonym

Poprowadźmy linie Q i Q^* , jak na Rys.3 i rozpatrzmy różnicę całek /20/ wzdłuż tych linii. Jest ona równa całce po brzegu δD obszaru D , Rys.3.

$$\int_{Q^*} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta - \int_Q \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = \oint_{\delta D} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta$$

Jeżeli parametr α leży poniżej linii Q i $K(\alpha)$ jest analityczna i różna od zera w D , to $\oint_{\delta D} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = 0$

$$i \quad /40/ \quad \int_Q \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = \int_{Q^*} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta$$

dla α leżących poniżej Q .

W konsekwencji:

$$K_-(\alpha; \eta, Q) = K_-(\alpha; \eta, Q^*)$$

Ale $K_-(\alpha; \eta, Q^*)$ jest analityczna dla $\alpha \in \mathcal{U} \cup D$, a więc jest przedłużeniem analitycznym funkcji $K_-(\alpha, \eta, Q)$.

Wniosek 1. Funkcję $K_-(\alpha, \eta, Q)$ można przedłużać analitycznie na obszar jednospójny nie zawierający punktu k i punktu d ($-d$), jeżeli ten znajduje się w obszarze Ω (na lewo od linii Q).

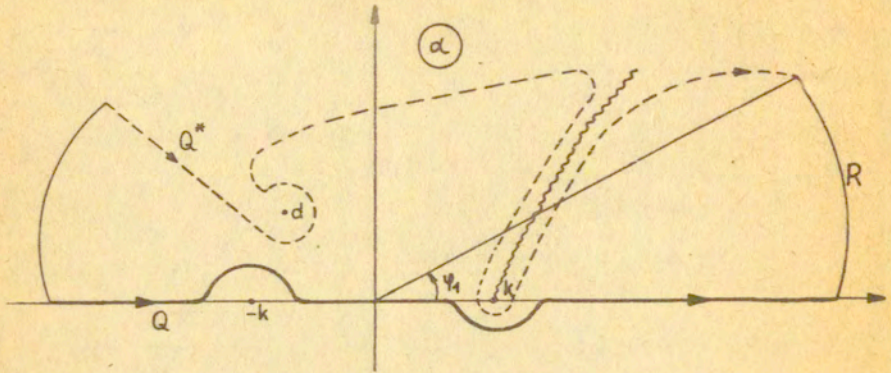
3.2. Zmiana linii całkowania przy $|\alpha| \rightarrow \infty$

Poprowadźmy linię Q^* jak na Rys. 4. i obliczmy całkę Cauchy'ego

$$/41/ \quad I = \int_R \frac{\ln K(\zeta)}{\alpha - \zeta} d\zeta$$

po łuku $R = \{\alpha = \zeta e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \varphi_2)\}$

gdym $\zeta \rightarrow \infty$.



Rys. 4

Dla $\alpha \rightarrow \infty$ można przyjąć następujące przybliżenie

$$/42/ \quad K(\alpha) = 1 + \frac{k}{\eta} \frac{1}{\delta} \approx 1 - \frac{k}{\eta} \frac{i}{\alpha}$$

Znak " - " przy drugim składniku przybliżenia wynika stąd, że na linii Q przy $\alpha \rightarrow \infty$ mamy $\text{Im} \chi > 0$.

Uwzględniając /42/ mamy dla całki /41/ następujące oszacowanie

$$\left| \int_R \frac{\ln K(z)}{z - \alpha} dz \right| \ll \int_0^{\psi_1} \frac{2 \left| \frac{k}{\eta} \right| d\varphi}{\left| e^{i\varphi} - \alpha \right|} \ll \frac{2 \left| \frac{k}{\eta} \right| \psi_1}{\left| \rho \right| - |\alpha|} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

Wniosek 2. Funkcję $K_-(\alpha, \eta, Q)$ można przedłużyć analitycznie na obszar jednopójny nie zawierający punktu k i punktu d ($-d$), ograniczony linią Q^*

której kpióce mogą leżeć powyżej osi $\operatorname{Im} \alpha = 0$, jak zilustrowano na Rys. 4.

Wniosek 3. Całki Cauchy'ego /20/ po liniach Q i Q^* między którymi leży zero funkcji $K(\alpha)$ są na ogół różne (gdyż w obszarze ograniczonym tymi liniami $\ln K(\alpha)$ nie jest funkcją analityczną).

W ten sam sposób dowodzi się możliwości przedłużenia analitycznego funkcji $K_*(\alpha, \eta, Q)$ na dowolny obszar jednospójny ograniczony linią Q nie obejmującą punktu $-k$ i punktu $-d(d)$, o ile leży poniżej linii Q .

4. Rozwiązanie równań Wienera-Hopfa dla funkcji $K(\alpha)$

Z dwoma zerami

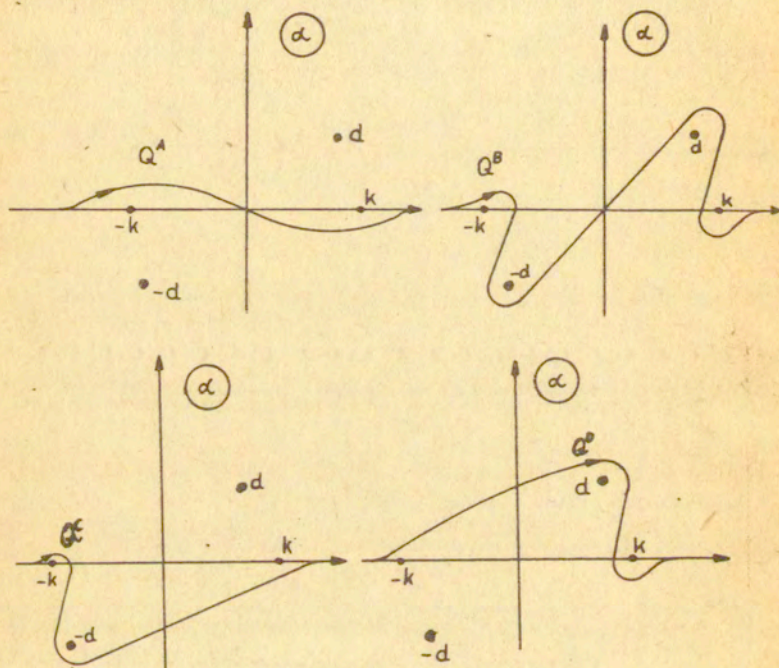
W ogólności, gdy funkcja $K(\alpha)$ ma zera, rozwiązanie równań Wienera-Hopfa jest zależne od położenia linii całkowania Q

$$L(\alpha) = L^Q(\alpha) \quad , \quad U(\alpha) = U^Q(\alpha)$$

Lemat. Jeżeli w jednospójnym obszarze objętym liniami Q_1 i Q_2 funkcja $K(\alpha)$ jest analityczna i różna od zera, to $L^{Q_1}(\alpha) = L^{Q_2}(\alpha)$, $U^{Q_1}(\alpha) = U^{Q_2}(\alpha)$.

Dowód wynika z ogólnej postaci rozwiązania /29/ i możliwości jednoznacznego przedłużenia całek Cauchy'ego /20/, /21/ (wniosek 1 i 2 z poprzedniego paragrafu).

Ponieważ funkcja $K(\alpha)$ ma dwa punkty zerowe d i $-d$ (dla $\eta \neq \pm 1$; $\eta \neq 0$) , więc istnieją cztery istotnie różne położenia linii Q (jeżeli Q_1 i Q_2 spełniają założenie Lematu, to mówimy, że różnią się nieistotnie), Rys.5.



Rys.5

4.1. Faktoryzacja funkcji $K(\alpha)$ z zerami

Dla rozwiązania równania Wienera-Hopfa w otoczeniu każdej z linii Q^A , Q^B , Q^C , Q^D należy sfaktoryzować funkcję $K(\alpha)$ w otoczeniu każdej z tych linii.

Funkcja $K(\alpha)$ spełnia założenia twierdzenia
Wienera-Hopfa na linii Q^A i Q^B . W szczególności

$$/43/ \quad \operatorname{ind}_{Q^A} K(\alpha) = \operatorname{ind}_{Q^B} K(\alpha) = 0$$

natomiast nie spełnia warunku zerowego indeksu na
linii Q^C i Q^D

$$/44/ \quad \operatorname{ind}_{Q^C} K(\alpha) = 1$$

$$/45/ \quad \operatorname{ind}_{Q^D} K(\alpha) = -1$$

Obliczenia indeksu znajdują się w Dodatku.

Z tego wynika, że dla sfaktoryzowania funkcji $K(\alpha)$
w otoczeniu linii Q^C i Q^D nie można bezpośrednio skorzystać z twierdzenia Wienera-Hopfa. Można jednak w tym celu wykorzystać funkcję pomocniczą $\bar{K}(\alpha)$ dobraną do funkcji $K(\alpha)$ tak, aby nie miała innych niż $K(\alpha)$ punktów osobliwych, aby nie miała zer i aby spełniała warunek $\bar{K}(\alpha) \rightarrow 1$ przy $|\alpha| \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \Omega \cap \mathcal{U}$.

$$/46/ \quad \bar{K}(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha-k)(\alpha+k)}{(\alpha-d)(\alpha+d)}$$

Okazuje się, że tak skonstruowana funkcja spełnia warunek zerowego indeksu na każdej z linii /obliczenia znajdują się w Dodatku/.

$$/47/ \quad \text{ind}_{Q^A} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^B} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^C} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^D} \bar{K}(\alpha) = 0$$

Zatem istnieje faktoryzacja

$$/48/ \quad \bar{K}(\alpha) = \frac{\bar{K}_-(\alpha)}{\bar{K}_+(\alpha)}$$

gdzie funkcje $\bar{K}_-(\alpha)$, $\bar{K}_+(\alpha)$ są określone odpowiednio całką Cauchy'ego

$$/49/ \quad \bar{K}_-(\alpha) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Q^A} \frac{\ln \bar{K}(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right] \quad \text{dla } \alpha \in \mathcal{U}^A$$

$$/50/ \quad \bar{K}_+(\alpha) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{Q^A} \frac{\ln \bar{K}(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta \right] \quad \text{dla } \alpha \in \Omega^A$$

i

$$/51/ \quad \bar{K}_-(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \quad \text{i } \alpha \in \mathcal{U}^A$$

oraz

$$/52/ \quad \bar{K}_+(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \quad \text{i } \alpha \in \Omega^A$$

Korzystając z tożsamości

$$K(\alpha) = \frac{(\alpha-d)(\alpha+d)}{(\alpha-k)(\alpha+k)} \bar{K}(\alpha)$$

możemy przy pomocy faktoryzacji /48/ sfaktoryzować funkcję $K(\alpha)$ w otoczeniu każdej z linii tak, aby

funkcja $K_{-}^A(\alpha)$ nie miała zer w obszarze \mathfrak{U}^A , a funkcja $K_{+}^A(\alpha)$ nie miała zer w obszarze Ω^A , funkcja $K_{-}^B(\alpha)$ nie miała zer w obszarze \mathfrak{U}^B , a funkcja $K_{+}^B(\alpha)$ nie miała zer w obszarze Ω^B , itd.

Otrzymamy:

$$/53/ \quad K_{+}^A(\alpha) = \frac{\alpha+k}{\alpha+d} \bar{K}_{+}(\alpha) ; \quad K_{-}^A(\alpha) = \frac{\alpha-d}{\alpha-k} \bar{K}_{-}(\alpha) , \quad \text{gdzie } K(\alpha) = \frac{K_{-}^A(\alpha)}{K_{+}^A(\alpha)}$$

$$/54/ \quad K_{+}^B(\alpha) = \frac{\alpha+k}{\alpha+d} \bar{K}_{+}(\alpha) ; \quad K_{-}^B(\alpha) = \frac{\alpha+d}{\alpha-k} \bar{K}_{-}(\alpha) , \quad \text{gdzie } K(\alpha) = \frac{K_{-}^B(\alpha)}{K_{+}^B(\alpha)}$$

$$/55/ \quad K_{+}^C(\alpha) = (\alpha+k) \bar{K}_{+}(\alpha) ; \quad K_{-}^C(\alpha) = \frac{(\alpha-d)(\alpha+d)}{\alpha-k} \bar{K}_{-}(\alpha) , \quad \text{gdzie } K(\alpha) = \frac{K_{-}^C(\alpha)}{K_{+}^C(\alpha)}$$

$$/56/ \quad K_{+}^D(\alpha) = \frac{\alpha+k}{(\alpha-d)(\alpha+d)} \bar{K}_{+}(\alpha) ; \quad K_{-}^D(\alpha) = \frac{\bar{K}_{-}(\alpha)}{\alpha-k} , \quad \text{gdzie } K(\alpha) = \frac{K_{-}^D(\alpha)}{K_{+}^D(\alpha)}$$

Lewe strony wzorów /53/ i /54/ są całkami Cauchy'ego /20/ i /21/. Prawe strony dają przedłużenie analityczne tych całek za pomocą przedłużenia całek /49/, /50/, w których funkcja $\bar{K}(\alpha)$ nie ma zer. Każda z funkcji $K_{\pm}^x(\alpha)$ ($x=A, B, C, D$) ma bieguny lub zera w punktach $\alpha = \pm d$ tak, jak pokazują wzory /53-56/. Punkty $\alpha = \pm k$ są punktami rozgałęzienia.

Ze wzorów /53-56/ wynika następujące zachowanie funkcji $K_{\pm}^x(\alpha)$ w nieskończoności:

$$/57/ \quad K_{+}^A(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^A, \quad K_{-}^A(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^A$$

$$/58/ \quad K_{+}^B(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^B, \quad K_{-}^B(\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^B$$

$$/59/ \quad K_{+}^C(\alpha) \sim \alpha \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^C, \quad K_{-}^C(\alpha) \sim \alpha \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^C$$

$$/60/ \quad K_{+}^D(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^D, \quad K_{-}^D(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^D$$

4.2. Rozwiązanie równania /9b/

Zgodnie z twierdzeniem 2, rozwiązanie $L^x(\alpha), U^x(\alpha)$ równania Wienera-Hopfa /28/ w otoczeniu linii Q^x , $X=A, B, C, D$, wyraża się wzorem

$$L^x(\alpha) = \frac{C^x(\alpha) - M_-^x(\alpha)}{K_-^x(\alpha)}$$

/61/

$$U^x(\alpha) = \frac{C^x(\alpha) + M_+^x(\alpha)}{K_+^x(\alpha)}$$

gdzie funkcje $K_{\pm}^x(\alpha)$ dla $X=A, B, C, D$ są dane przez zależności /53-56/, a funkcje $M_{\pm}^x(\alpha)$ są dane przez zależności

$$M_-^x(\alpha) = D \frac{K_+^x(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

/62/

$$M_+^x(\alpha) = D \frac{K_+^x(\alpha) - K_+^x(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

Ze wzorów /62/ i /57-60/ wynika następujące zachowanie funkcji $M_{\pm}^x(\alpha)$ w nieskończoności

$$/63/ \quad M_-^A(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^A, \quad M_+^A(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^A$$

$$/64/ \quad M_{-}^B(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{D}^B, \quad M_{+}^B(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^B$$

$$/65/ \quad M_{-}^C(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{D}^C, \quad M_{+}^C(\alpha) \sim 1 \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^C$$

$$/66/ \quad M_{-}^D(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{D}^D, \quad M_{+}^D(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha^2} \text{ przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^D$$

Zatem równanie Wienera-Hopfa ^{me} w klasie funkcji $L(\alpha)$, $U(\alpha)$ dążących do zera w nieskończoności jedno rozwiązanie

/67/ w otoczeniu linii Q^A dla $C^A(\alpha) \equiv 0$

$$L^A(\alpha) = - \frac{M_{-}^A(\alpha)}{K_{-}^A(\alpha)} = - \frac{D}{\alpha - \alpha_0} \bar{K}_{+}(\alpha_0) \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 + d} \frac{\alpha - k}{\alpha - d} \frac{1}{\bar{K}_{-}(\alpha)}$$

/67/

$$U^A(\alpha) = \frac{M_{+}^A(\alpha)}{K_{+}^A(\alpha)}$$

i jedno rozwiązanie w otoczeniu linii Q^B dla $C^B(\alpha) \equiv 0$

$$L^B(\alpha) = - \frac{M_{-}^B(\alpha)}{K_{-}^B(\alpha)} = - \frac{D}{\alpha - \alpha_0} \bar{K}_{+}(\alpha) \frac{\alpha_0 + k}{\alpha_0 - d} \frac{\alpha - k}{\alpha + d} \frac{1}{\bar{K}_{-}(\alpha)}$$

/68/

$$U^B(\alpha) = \frac{M_{+}^B(\alpha)}{K_{+}^B(\alpha)}$$

o wyniku też bezpośrednio z Twierdzenia 2.

W otoczeniu linii Q^c równanie W-H ma jednoparametrową rodzinę rozwiązań w klasie funkcji znikających w nieskończoności: $C^c(\alpha) = C_1$

$$L^c(\alpha) = \frac{C_1 - M_-^c(\alpha)}{K_-^c(\alpha)} = \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[C_1(\alpha - \alpha_0) - D(\alpha_0 + k) \bar{K}_+(\alpha_0) \right] \frac{\alpha - k}{(\alpha - d)(\alpha + d)} \frac{1}{K_-(\alpha)}$$

/69/

$$U^c(\alpha) = \frac{C_1 + M_+^c(\alpha)}{K_+^c(\alpha)}$$

C_1 może przyjmować dowolne wartości, przy czym wyróżnione są dwie

/70/
$$C_1 = - \frac{D(\alpha_0 + k) \bar{K}_+(\alpha_0)}{\alpha_0 \pm d}$$

Dla wartości C_1 określonej wzorem /70/ ze znakiem "+" w mianowniku rozwiązanie /69/ jest równe rozwiązaniu /67/, a ze znakiem "-" rozwiązanie /69/ jest równe rozwiązaniu /68/.

Zarówno funkcje $L^c(\alpha) = L^c(\alpha, C_1)$, $U^c(\alpha) = U^c(\alpha, C_1)$ jak i funkcje $L^A(\alpha)$, $U^A(\alpha)$ oraz $L^B(\alpha)$, $U^B(\alpha)$ dążą do zera w nieskończoności jednakowo szybko

$$L^x(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^x$$

/71/

$$U^x(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^x \text{ dla } x = A, B, C$$

Ze wzorów /61/ wynika, że w otoczeniu linii Q^0 nie istnieje rozwiązanie $L^0(\alpha)$, $U^0(\alpha)$

w klasie funkcji znikających w nieskończoności.

Dla $d=0$ jest tylko jedno rozwiązanie w klasie funkcji znikających w nieskończoności

$$L^A(\alpha) = L^B(\alpha) = L^C(\alpha, C_1^0); \quad U^A(\alpha) = U^B(\alpha) = U^C(\alpha, C_1^0) .$$

4.3. Rozwiązanie równania /9a/

Wykorzystując funkcję $K(\alpha)$, przepisujemy równanie /9a/ w postaci:

$$/72/ \quad \tilde{U}(\alpha) = \tilde{K}(\alpha) \tilde{L}(\alpha) + \frac{\tilde{D}}{\alpha - \alpha_0}$$

gdzie oznaczamy:

$$/73/ \quad \tilde{U}(\alpha) = \frac{1}{\eta} U_1(\alpha)$$

$$/74/ \quad \tilde{K}(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} K(\alpha)$$

$$/75/ \quad \tilde{L}(\alpha) = L_1(\alpha)$$

$$/76/ \quad \tilde{D} = -\frac{k \sin \phi}{\pi}, \quad \alpha_0 = -k \cos \phi$$

Zera $\alpha = \pm d$ funkcji $K(\alpha)$ są jedyne zerami funkcji $\tilde{K}(\alpha)$

Faktoryzację funkcji $\tilde{K}(\alpha)$ w otoczeniu każdej z linii Q^x , $x=A, B, C, D$, Rys.5, wyraża się poprzez iloczyn czynników wynikłych z faktoryzacji funkcji $K(\infty)$ i faktoryzacji funkcji $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$

$$/77/ \quad \tilde{K}^x(\alpha) = \frac{\tilde{K}_-^x(\alpha)}{\tilde{K}_+^x(\alpha)} \quad \text{dla } x=A, B, C, D$$

gdzie

$$/78/ \quad \tilde{K}_-^x(\alpha) = \sqrt{k-\alpha} K_-^x(\alpha)$$

$$/79/ \quad \tilde{K}_+^x(\alpha) = \frac{K_+^x(\alpha)}{\sqrt{k+\alpha}}$$

a funkcje $K_{\pm}^x(\alpha)$ wyrażają się wzorami /53-56/.

Stąd i z zależności /57-60/ wynika następujące zachowanie funkcji $\tilde{K}_{\pm}^x(\alpha)$ w nieskończoności

$$/80/ \quad \tilde{K}_+^A(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^A, \quad \tilde{K}_-^A(\alpha) \sim \alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^A$$

$$/81/ \quad \tilde{K}_+^B(\alpha) \sim \alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^B, \quad \tilde{K}_-^B(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^B$$

$$/82/ \quad \tilde{K}_+^c(\alpha) \sim \alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^c, \quad \tilde{K}_-^c(\alpha) \sim \alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^c$$

$$/83/ \quad \tilde{K}_+^D(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{3}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^D, \quad \tilde{K}_-^D(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^D$$

Rozwiązanie ogólne równania /72/ w otoczeniu każdej z linii Q^X , $X=A, B, C, D$ jest dane wzorami /61/ i /62/, gdzie na miejsce występujących funkcji $L^X(\alpha)$, $U^X(\alpha)$, $K_{\pm}^X(\alpha)$, $M_{\pm}^X(\alpha)$ i liczby D , należy podstawić odpowiednio $\tilde{L}^X(\alpha)$, $\tilde{U}^X(\alpha)$, $\tilde{M}_{\pm}^X(\alpha)$ i \tilde{D} .

Ze wzorów /62/ i zależności /80-83/ wynikają następujące zależności asymptotyczne

$$/84/ \quad \tilde{M}_{\pm}^X(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U} \text{ dla}$$

każdego $X=A, B, C, D$

oraz

$$/85/ \quad \tilde{M}_+^A(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{3}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^A$$

/86/ $\tilde{M}_+^B(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{3}{2}}$ przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \Omega^B$

/87/ $M_+^C(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{4}{2}}$ przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \Omega^C$

/88/ $M_+^D(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{5}{2}}$ przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \Omega^D$

Równanie /9a/ ma w klasie funkcji znikających w nieskończoności jedno rozwiązanie w otoczeniu linii Q^A, Q^B, Q^D

$$\tilde{L}^X(\alpha) = -\frac{\tilde{M}_+^X(\alpha)}{\tilde{K}_-^X(\alpha)}$$

/89/

$$\tilde{U}^X(\alpha) = \frac{\tilde{M}_+^X(\alpha)}{\tilde{K}_+^X(\alpha)} \quad \text{dla } X=A, B, D$$

oraz jednoparametrową rodzinę rozwiązań w otoczeniu linii Q^C

$$\tilde{L}^C(\alpha) = \frac{\tilde{C}_1 - \tilde{M}_+^C(\alpha)}{\tilde{K}_-^C(\alpha)}$$

/90/

$$\tilde{U}^C(\alpha) = \frac{\tilde{C}_1 + \tilde{M}_+^C(\alpha)}{\tilde{K}_+^C(\alpha)}$$

gdzie wyróżnione są wartości

$$/91/ \quad \tilde{C}_1 = - \frac{D(\alpha_0+k) \tilde{K}_+(\alpha_0)}{\sqrt{k+\alpha_0} (\alpha_0 \pm d)}$$

Rozwiązanie w otoczeniu każdej z linii Q^A, Q^B, Q^C dąży do zera w nieskończoności tak samo szybko

$$/92/ \quad \tilde{L}^X(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{3}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^X$$

dla $X=A, B, C$

$$/93/ \quad \tilde{U}^X(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^X$$

dla $X=A, B, C$

Natomiast rozwiązanie w otoczeniu linii Q^D dąży do zera inaczej

$$/94/ \quad \tilde{L}^D(\alpha) \sim \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \mathcal{U}^D$$

$$/95/ \quad \tilde{U}^D(\alpha) \sim \alpha^{-1} \quad \text{przy } \alpha \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^D$$

5. Uwagi o rozwiązaniu problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej

W oparciu o przeprowadzoną analizę wszystkich rozwiązań równań Wienera-Hopfa /9/ można dokończyć konstrukcję rozwiązania problemu dyfrakcji danego całką /7/, wykorzystując warunki dane dla $u_5(x,y)$ w zerze i w nieskończoności.

Linia Q^D nie może być linią całkowania /7/, gdyż rozwiązanie $L_2^D(\alpha)$, $U_2^D(\alpha)$ równania /9b/ nie znika w nieskończoności, natomiast rozwiązania równań /9/ w otoczeniu każdej z trzech pozostałych linii dają funkcję $u_5(x,y)$ deążącą do zera jednakowo szybko przy $x \rightarrow 0$, $y = \pm 0$. Warunek w zerze nie wyklucza żadnej z linii Q^A, Q^B, Q^C . O wyborze linii rozstrzyga zatem zachowanie $u_5(x,y)$ w nieskończoności.

Do obliczenia wartości asymptotycznej całki $u_5(x,y) = u_5(\infty, \xi)$ przy $\xi \rightarrow \infty$ najwygodniej zastosować metodę punktu stodłowego. Funkcja podcałkowa ma oprócz bieguna $\alpha = \alpha_0$ biegun $\alpha = d$ dla $Q = Q^A$, biegun $\alpha = -d$ dla $Q = Q^B$ i dwa bieguny $\alpha = d$, $\alpha = -d$ dla $Q = Q^C$. Można pokazać, że w tym ostatnim przypadku w rozwinięciu asymptotycznym całki będą występowały dla η z obszaru powyżej S_{TM} , Rys. 6a [5] dwie fale płaskie $U_1^A(x,y) = F_1(d, \chi_d, \eta) e^{idx} e^{i\chi_d y}$, $U_2^A(x,y) = F_2(d, \chi_d, \eta) e^{-idx} e^{i\chi_d y}$, z których jedna nie jest falą wybiega-

Analiza wyboru rozwiązania z pośród dwóch pozostałych funkcji $U_5(x,y)$ została przeprowadzona w pracy [5]. Do przedstawionego tam sposobu rozwiązania typu TM, Rys.7, str.40, należy wprowadzić następującą poprawkę. W miejsce rozwiązania U^E w obszarze zawartym między krzywą S_{TM} , a półosią $\text{Im } \eta = 0, \text{Re } \eta < 0$ należy położyć U^I tak, by rozwiązanie było ciągłe na półosi $-\infty < \text{Re } \eta < -1$, a nieciągłe na odcinku $-1 < \text{Re } \eta < 0$. Wynika to stąd, że drugi punkt rozgałęzienia /oprócz $\eta = -1/$ znajduje się w zerze, a nie w nieskończoności przeciwnie niż w rozwiązaniu typu TE, Rys.9, str.43, [5].

Jest to tylko jedna z możliwych konstrukcji, gdyż nie jest tu znane kryterium wyboru linii nieciągłości łączącej punkty rozgałęzienia.

Dla zinterpretowania wyników pracy [5] w świetle analizy rozwiązań równań Wienera-Hopfa przeprowadzonej tutaj, pożyteczne będzie następujące podsumowanie.

W pracy [5] w zależności od impedancji η ułożono zera funkcji $K(\alpha)$ na dwupłatowej powierzchni Riemanna α . Jeżeli znamy położenie zer $K(\alpha)$, to przeprowadzenie linii Q wyznacza zera funkcji $K_-(\alpha)$, a tym samym bieguny funkcji podcałkowej całki $U_5(x,y)$; mianowicie biegunami funkcji podcałkowej są te zera, które leżą na lewo od skierowanej linii Q .

Jak pokazano w niniejszej pracy, z czterech przypadków położenia linii $Q\sqrt{\quad}$ ^{wyeliminowane są (dla pasywnych) dwa:} kiedy funkcja podcałkowa nie ma biegunów (linia Q^D) oraz ma dwa bieguny (linia Q^C); pozostały do rozpatrzenia dwa następne, kiedy funkcja podcałkowa ma biegun d (linia Q^A) lub biegun $-d$ (linia Q^B).

Wiadomo, że linia Q musi końcami leżeć na osi $\text{Im } \alpha = 0$ na tym płacie, na którym $\text{Im } \gamma > 0$. Biorąc pod uwagę operację rozwinięcia asymptotycznego całki

$U_5(x, y)$ metodą punktu siodłowego, wygodnie jest powierzchni Riemanna podzielić na takie dwa płaty, aby na jednym z nich leżały wszystkie krzywe najszybszego spadku $S(\theta)$ dla $0 < \theta < \pi$. Wtedy cięcia na płaszczyźnie α należy poprowadzić wzdłuż linii $S(\pi)$ z punktu $\alpha = k$ i wzdłuż linii $S(0)$ z punktu $\alpha = k$, wg oznaczeń na Rys. 6 i 8 w pracy [5]. Jeżeli linia Q leży też cała na tym płacie, nazwijmy go płatem A , to wtedy wystarczy faktoryzować funkcję $K(\alpha)$ tylko na tym płacie i przedłużyć funkcje podcałkowe $L_1(\alpha), L_2(\alpha)$ tylko na tę płaszczyznę z cięciem. Faktycznie, dla impedancji pasywnej (dla której formuluje się warunek asymptotycznego zachowania $U_5(x, y)$ w nieskończoności) łatwo sprawdzić, że istotnie różne od linii Q leżącej na płacie A , położenie linii Q^* na płacie B , prowadzi do funkcji $U_5(x, y)$, która nie spełnia warunku w nieskończoności.

Na płaszczyźnie η , Rys. 6 i 7, [5] krzywa S_{TM} rozdziela płaszczyznę na dwie części. Dla η leżących powyżej krzywej, zera funkcji $K(\alpha)$ leżą na płacie A, dla η leżących poniżej krzywej, zera leżą na płacie B. Ponieważ pracujemy na płacie A, to dla η z obszaru poniżej S_{TM} funkcja $K(\alpha)$ nie ma zer na tym płacie i dostajemy rozwiązanie niezależne od położenia linii Q na tym płacie (bez fali płaskiej (powierzchniowej) w rozwinięciu asymptotycznym). W kontakście oznaczeń przyjętych obecnie, mylące może być oznaczenie $u^i = u^{\bar{i}}$ na Rys.7 [5], gdyż położenie linii $Q^{\bar{i}}$ i $Q^{\bar{\bar{i}}}$ nie jest istotnie różne. Symbol $u^{\bar{\bar{i}}}$ należałoby zarezerwować dla funkcji $u_s(x,y)$ skonstruowanej przez rozwiązanie równań W.H. w otoczeniu linii położonej na płacie B (która nie spełnia warunku w nieskończoności), ale wtedy oczywiście $u^{\bar{i}} \neq u^{\bar{\bar{i}}}$.

W pracy [5], dla sfaktoryzowania funkcji wykorzystano podaną w [1] metodę zamiany zmiennych, która pozwoliła na ominięcie obliczania całek Cauchy'ego dla wyznaczenia funkcji $K_-(\alpha)$, $K_+(\alpha)$. Wszystkie wyniki faktoryzacji (w otoczeniu Q^A i Q^B) przedstawione są wzorami /82/ i /83/.

Dla η leżących poniżej krzywej S_{TM} , kiedy funkcja $K(\alpha)$ nie ma zer na płacie A, we wzorze /82/ {/83/} należy wziąć znak "-" w wykładniku potęgi. Wtedy

funkcja $K_-(\alpha)$, $\{K_+(\alpha)\}$ jest jednoznaczna, nie zależy od wyboru gałęzi $\sqrt{1-\eta^2}$ (jest parzysta względem $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$)

Dla η leżących powyżej krzywej S_{TM} oba wyniki faktoryzacji w otoczeniu linii Q^A i Q^B dane są przy pomocy jednej funkcji /82/, gdzie należy wziąć znak "+" w wykładniku potęgi, ale dwuznacznej, z punktami rozgałęzienia $\eta = \pm 1$. Jedna gałąź funkcji daje faktoryzację w otoczeniu linii Q^A , druga w otoczeniu Q^B . Wybór tych gałęzi został omówiony w rozdziale 7, [5].

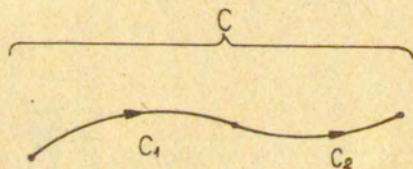
DODATEK

Definicja. Indeks funkcji $F(\alpha)$ analitycznej i różnej od zera na skierowanej linii C nazywamy przyrost argumentu funkcji $F(\alpha)$ wzdłuż linii C dzielony przez 2π

$$\operatorname{ind}_C F(\alpha) = \int_C d(\arg F(\alpha))$$

Własności indeksu

1. Indeksy funkcji $F(\alpha)$ na linii C skierowanej od punktu a do punktu b i na linii C skierowanej przeciwnie różnią się znakiem.



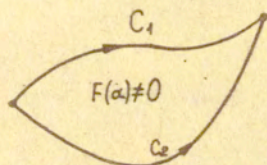
Rys.1

2. Jeżeli linia C rozpada się na dwie części C_1 i C_2 skierowane tak samo jak C , Rys.1, to

$$\operatorname{ind}_C F(\alpha) = \operatorname{ind}_{C_1} F(\alpha) + \operatorname{ind}_{C_2} F(\alpha)$$

3. Jeżeli linie C_1 i C_2 mają wspólny początek i wspólny koniec, Rys.2, a w obszarze objętym tymi liniami funkcja $F(\alpha)$ jest analityczna i nie ma zer, to

$$\operatorname{ind}_{C_1} F(\alpha) = \operatorname{ind}_{C_2} F(\alpha)$$



Rys.2

4. Jeżeli $F(\alpha)$ jest analityczna w obszarze objętym dodatnio skierowaną linią C , to

$$\operatorname{ind}_C F(\alpha) = n$$

gdzie n jest ilością zer I rzędu funkcji $F(\alpha)$ w tym obszarze (zera rzędu k liczy się tak, jak k zer I rzędu).

5. Jeżeli $F_1(\alpha)$ i $F_2(\alpha)$ są różne od zera na linii C ,
to

$$\operatorname{ind}_C F_1(\alpha) \cdot F_2(\alpha) = \operatorname{ind}_C F_1(\alpha) + \operatorname{ind}_C F_2(\alpha)$$

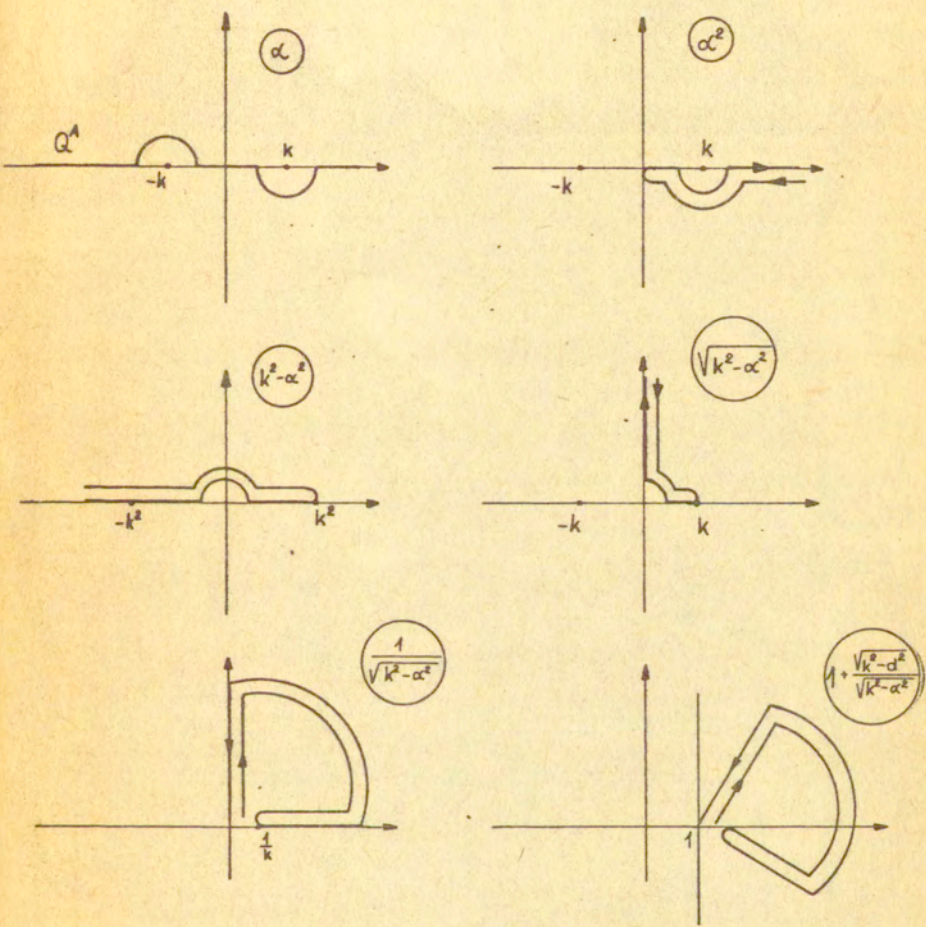
$$\operatorname{ind}_C \frac{F_1(\alpha)}{F_2(\alpha)} = \operatorname{ind}_C F_1(\alpha) - \operatorname{ind}_C F_2(\alpha)$$

Twierdzenie 1.

Dla funkcji
$$K(\alpha) = \frac{k + p\sqrt{k^2 - \alpha^2}}{q\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

$$\operatorname{ind}_Q K(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Q=Q^A \text{ i } Q=Q^B \\ +1 & \text{dla } Q=Q^C \\ -1 & \text{dla } Q=Q^D \end{cases}$$

gdzie linie Q^A, Q^B, Q^C, Q^D przedstawione są
na Rys.5 w tekście.



Rys. 3

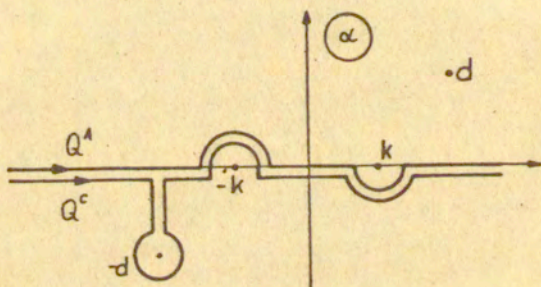
Dowód.

Na rys.3 jest przedstawione odwzorowanie linii Q^A przy pomocy funkcji $K(\alpha) = \frac{k + \eta\sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta\sqrt{k^2 - \alpha^2}} = 1 + \frac{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$

gdzie $d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$ jest zerem funkcji $K(\alpha)$.

Bezpośrednio z rysunku odczytujemy wynik

/1/ $\text{ind}_{Q^A} K(\alpha) = 0$



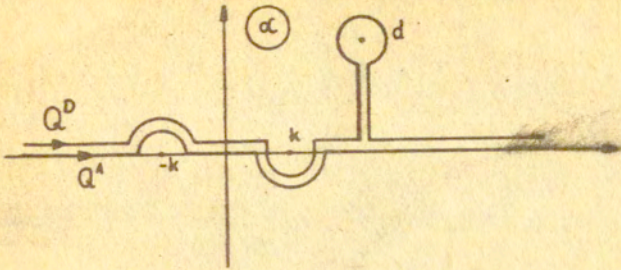
Rys. 4

Na Rys.4 przedstawiono linię Q^A i Q^c . Korzystając z własności 4 i 2, mamy

/2/ $\text{ind}_{Q^c} K(\alpha) - \text{ind}_{Q^A} K(\alpha) = 1$

Korzystając z wyniku /1/ otrzymujemy

/3/ $\text{ind}_{Q^c} K(\alpha) = 1$



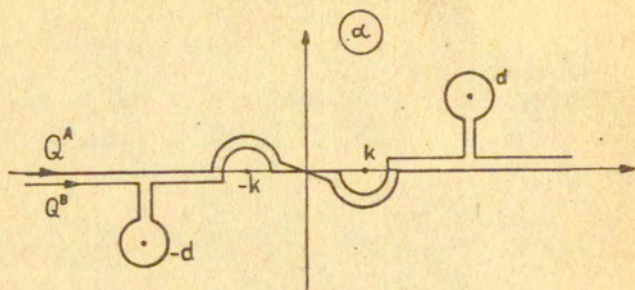
Rys.5

Podobnie dla linii zamkniętej Q^A-Q^D , Rys.5
mamy

$$\text{ind}_{Q^A} K(\alpha) - \text{ind}_{Q^D} K(\alpha) = 1$$

a stąd, z /1/ i z własności 1 otrzymujemy

$$\text{ind}_{Q^D} K(\alpha) = -1$$



Rys.6

Linie Q^A i Q^B przecinają się w zerze tworzą dwie zamknięte pętle, jedna wzdłuż osi $\text{Im } \alpha = 0$ dla $\text{Re } \alpha < 0$ i druga dla $\text{Re } \alpha > 0$. Dla każdej z nich mamy odpowiednio

$$\text{ind}_{Q^B} K(\alpha) - \text{ind}_{Q^A} K(\alpha) = 1$$

$$\text{ind}_{Q^B} K(\alpha) - \text{ind}_{Q^A} K(\alpha) = -1$$

dodając te równania stronami i korzystając z własności 2 otrzymujemy

$$\text{ind}_{Q^B} K(\alpha) - \text{ind}_{Q^A} K(\alpha) = 0$$

a stąd i z /1/

$$/4/ \quad \text{ind}_{Q^B} K(\alpha) = 0$$

Twierdzenie 2.

Dla funkcji

$$/5/ \quad \bar{K}(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha-k)(\alpha+k)}{(\alpha-d)(\alpha+d)}$$

$$/6/ \quad \text{ind}_{Q^A} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^B} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^C} \bar{K}(\alpha) = \text{ind}_{Q^D} \bar{K}(\alpha) = 0$$

Dowód. Ponieważ dla każdej z linii Q^x , $x=A, B, C, D$

$$\text{ind}_{Q^x}(\alpha-c) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{dla } c \text{ leżącego pod linią} \\ +\frac{1}{2} & \text{dla } c \text{ leżącego nad linią} \end{cases}$$

to ze wzoru /5/, wyników /1/-/4/ i własności 5 mamy

$$/7/ \quad \text{ind}_{Q^A} \bar{K}(\alpha) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$/8/ \quad \text{ind}_{Q^B} \bar{K}(\alpha) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

/9/

$$\operatorname{ind}_{Q^c} \bar{K}(\alpha) = +1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

/10/

$$\operatorname{ind}_{Q^D} \bar{K}(\alpha) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

co należało pokazać.

Literatura

- [1] B.Noble. - Methodes based on the Wiener-Hopf technique. Pergamon Press, London 1958.
- [2] A.G.Sveshnikov, A.N.Tikhonov - The Theory of Functions of a Complex Variable, Mir Publishers, Moscow, 1971.
- [3] N.Wiener and E.Hopf - Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, S.B.Preuss. Acad.Wiss. 1931, 696-706.
- [4] T.B.A.Senior - Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. Proc.Roy.Soc.A 213, str.436 /1952/.
- [5] H.Kudrewicz, S.Przeździecki - Dyfrakcja fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Analiza rozwiązania w zależności od impedancji półpłaszczyzny. Prace IPPT Nr 187, 1981.