

13 / 1980

Krzysztof Mytkowski

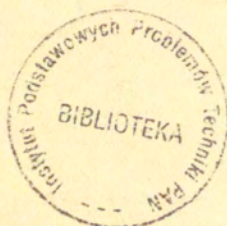
FILTR NUMERYCZNY
DO ANALIZY SYGNAŁU AKUSTYCZNEGO
W UKŁADZIE CYFROWYM
WARSZAWA 1980

P. 269



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 października 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 13/1980



57160



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark. wyd. 0,9. Ark. druk. 1,5 .

Oddano do drukarni w maju 1980 r.

Nr zamówienia 323/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Krzysztof Mytkowski
Pracownia Fonetyki Akustycznej IPPT PAN



P. 269

FILTR NUMERYCZNY DO ANALIZY SYGNAŁU AKUSTYCZNEGO
W UKŁADZIE CYFROWYM¹

Streszczenie.

Przedmiotem niniejszego opracowania jest przedstawienie nowej metody filtracji, która może być zrealizowana w czasie rzeczywistym przy użyciu dostępnych w kraju układów scalonych.

W pracy podano sposób filtracji, który nie wymaga członów mnożących i jest przez to łatwy do realizacji technicznej. Praca ma charakter teoretyczny, a wynikiem jej są równania matematyczne oraz charakterystyki opisujące otrzymane filtry.

Wyprowadzone zależności mogą być wykorzystane przy projektowaniu cyfrowych analizatorów dla sygnału akustycznego a także dla innych sygnałów posiadających charakter drgań kwaziperiodycznych.

1. Wstęp.

Realizacja techniczna filtrów cyfrowych będących numerycznym odpowiednikiem klasycznych filtrów analogowych napotyka na poważne trudności praktyczne. Dobrze opracowane teoretycznie filtry typu Butterwortha, Czebyszewa czy Bessela realizowane są w wersji cyfrowej za pomocą szybkich komputerów wyposażonych w zmiennoprzecinkowy hardware. Ewentualna realizacja analizatora cyfrowego wymienionych filtrów w układzie pracującym w czasie rzeczywistym będzie skomplikowana i nieopłacalna. Przyczyną tego jest fakt występowania w równaniach różnicowych tych filtrów współczynników liczbowych, które różnią się między sobą o kilka

¹ Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego I-24.

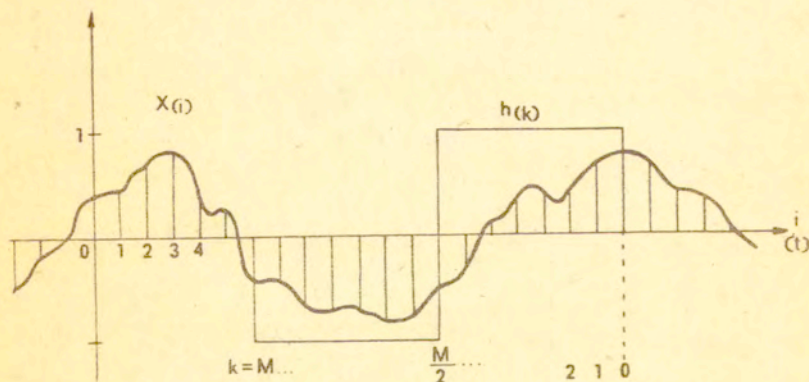
rzędów wielkości. Ponadto konieczna jest dokładność mnożenia, ze względu na występowanie niekorzystnego zjawiska kumulowania się błędów zaokrągleń [1].

Niniejsze opracowanie jest wynikiem kilkuletnich poszukiwań autora w kierunku wynalezienia takiej filtracji cyfrowej, która nadawałaby się do taniej i zminiaturyzowanej realizacji przy użyciu układów scalonych. Praca ma charakter teoretyczny i jest kierowana przede wszystkim do inżynierów zainteresowanych konstruowaniem cyfrowych analizatorów widmowych.

2. Istota uproszczonego filtru cyfrowego.

Koncepcja uproszczenia równania filtru polega na zastąpieniu oscylacyjnej postaci odpowiedzi impulsowej filtru (charakterystyki czasowej) kilkoma okresami fali prostokątnej. Uzyskuje się w ten sposób prostą postać równania różnicowego. Prostota równania polegająca na operowaniu współczynnikami wagowymi wynoszącymi 1 lub 2 pokazana zostanie na przykładzie.

Założmy, że rozpatrywany filtr posiada charakterystykę czasową o kształcie jednego okresu fali prostokątnej (rys. 1). Filtr taki będzie dalej określany jako filtr P1.



Rys. 1. Ilustracja filtracji sygnału filtrem P1.

Z definicji filtru nierekursywnego wiadomo, że :

$$y_i = \sum_{k=0}^{M-1} h_k x_{i-k} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots,$$

a dla naszego przykładu wartość sygnału wyjściowego wynosi :

$$y_i = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} x_{i-k} - \sum_{k=\frac{M}{2}}^{M-1} x_{i-k} \quad (1)$$

Przekształcając wyrażenie (1) w celu uzyskania postaci rekursywnej otrzymamy :

$$y_i = y_{i-1} + x_i - 2x_{i-\frac{M}{2}} + x_{i-M} \quad (2)$$

Powyższe równanie realizuje filtr, którego charakterystyka częstotliwościowa (rys. 2a) ma szerokie pasmo przepuszczania i niezadawalający kształt. Lepsze warunki można uzyskać poprzez zastosowanie filtrów o charakterystyce czasowej w kształcie kilku okresów (rys. 3a, 5a) fali prostopadłej - filtry P2 i P3. Z rysunków tych widać, że amplitudy wstęg bocznych maleją powoli z szybkością około 6 dB/oktawę. Możemy jednak znacznie obniżyć poziom wstęg bocznych gdy zastosujemy człony podwójne o charakterystykach czasowych posiadających różne wartości okresu T_0 (rys. 6). Przedstawione charakterystyki częstotliwościowe dotyczą idealnego przypadku dla nieskończonej liczby próbek sygnału przypadających na okres T_0 (charakterystyka graniczna). Charakterystyki te można traktować jako uniwersalne dla dowolnej liczby próbek przypadających na okres T_0 przy założeniu, że najwyższa częstotliwość zawarta w sygnale jest mniejsza od połowy częstotliwości próbkowania. Analiza przeprowadzona w punkcie 6 wykaże znikomy wpływ próbkowania na charakterystyki częstotliwościowe. W dalszych fragmentach pracy będzie przeprowadzona szczegółowa analiza filtrów P1, P2, P3 zmierzająca do analitycznego przedstawienia charakterystyki częstotliwościowej i fazowej oraz wyprowadzenia równań różnicowych.

3. Analiza filtru P1.

3.1. Wyprowadzenie równania różnicowego filtru P1.

Jak wspomniano poprzednio filtr P1 jest to filtr, którego odpowiedź impulsowa ma kształt jednego okresu fali prostokątnej. Jeżeli przyjmiemy, że próbki sygnału zgromadzone są w pamięci, mamy wówczas dostęp do przyszłych momentów czasowych i możemy ustawić funkcję h_k tak, aby obejmowała N próbek przeszłych i N próbek przyszłych (rys. 2b). Przesuwając charakterystykę czasową h_k w kierunku przyszłych wartości x_i nie narusza się kształtu charakterystyki częstotliwościowej, uzyskuje się natomiast korzystną charakterystykę fazową wynoszącą $\frac{\pi}{2}$ z uwagi na antysymetryczny kształt charakterystyki czasowej

$$h_k = -h_{(-k)} \quad [1].$$

Odpowiedź impulsową h_k możemy potraktować jako sumę trzech skoków jednostkowych i przedstawić analitycznie

$$h_{(k)} = \frac{1}{2N} (1_{(k-N)} - 2 \cdot 1_{(k)} + 1_{(k+N)})$$

gdzie : $1_{(k)}$ - numeryczny skok jednostkowy

N - liczba próbek przypadająca na połowę okresu T_0 .

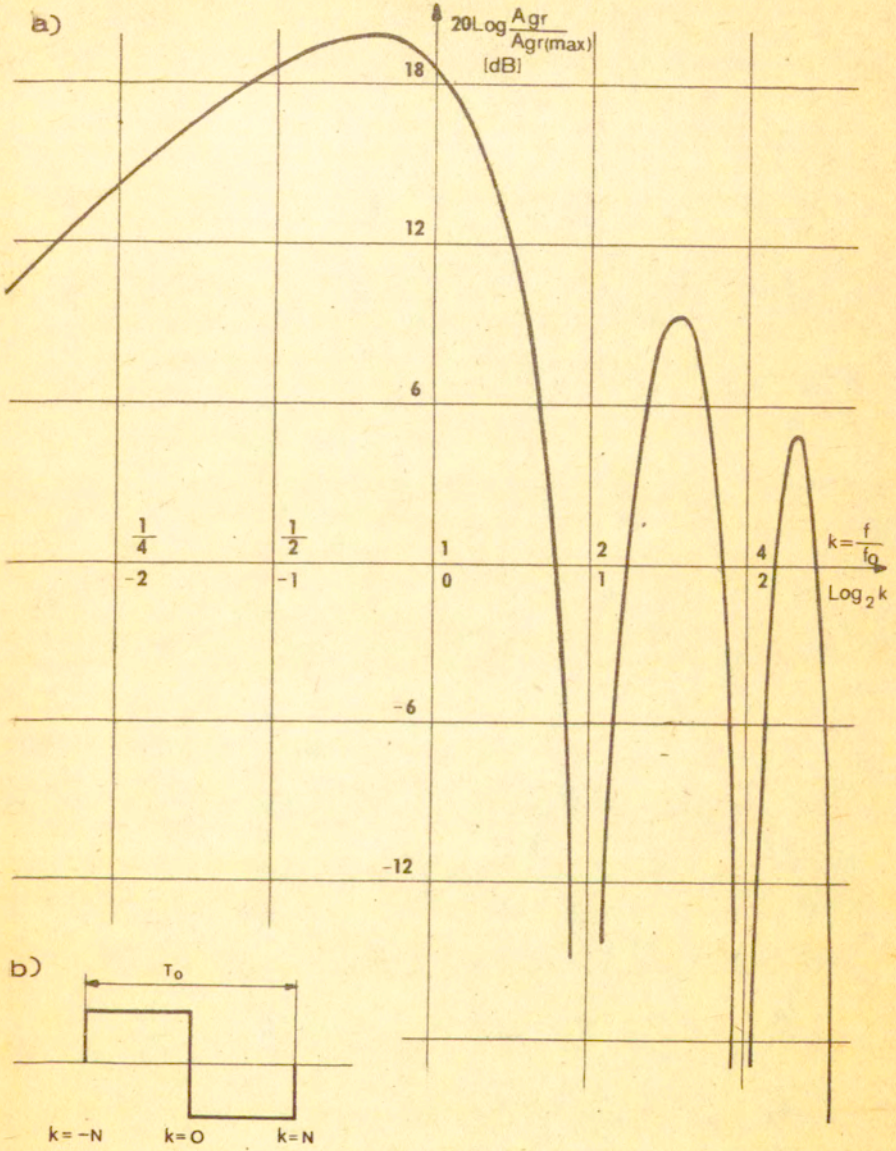
Współczynnik $\frac{1}{2N}$ występujący w powyższym wyrażeniu został wprowadzony po to, aby uniezależnić od liczby próbek przypadających na okres T_0 poziom poziom sygnału wyjściowego. Współczynnik ma znaczenie normalizacyjne i wpływa tylko i wyłącznie na amplitudę sygnału wyjściowego y .

Transformata dyskretna skoku jednostkowego wynosi :

$$X(z) = \frac{z'}{z-1}$$

Wykorzystując twierdzenie o transformacji sygnału przesuniętego, otrzymujemy transmitancję dyskretną

$$H(z) = \frac{1}{2N} \frac{z}{z-1} (z^{-N} - 2 + z^N) \quad (3)$$



Rys. 2. Charakterystyki filtra P1 :
a/ graniczna charakterystyka amplitudowa
b/ charakterystyka czasowa

Po podzieleniu wyrażenia przez z i podstawieniu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

otrzymuje się

$$Y(z)z^{2N} \cdot (1 - z^{-1}) = X(z)(z^{-N} - 2 + z^N).$$

Korzystając z równoważności mnożenia przez z^{-1} opóźnieniu sygnału o jeden okres próbkowania oraz przechodząc z dziedziny transformat w dziedzinę funkcji czasu, otrzymujemy równanie różnicowe

$$y_i - y_{i-1} = \frac{x_{i-N} - 2x_i + x_{i+N}}{2N} \quad (4)$$

Zgodnie z powyższym bieżąca wartość sygnału wyjściowego może być obliczona jako suma ważona bieżącej wartości sygnału wejściowego x_i , poprzedniej wartości sygnału wyjściowego y_{i-1} oraz wartości sygnału wejściowego przesuniętych o N próbek do przodu i do tyłu.

3.2. Obliczanie charakterystyki częstotliwościowej filtra P1.

Charakterystykę amplitudową i fazową filtra numerycznego uzyskuje się poprzez podstawienie

$$z = e^{j\omega T}$$

(gdzie T jest okresem próbkowania) do transmitancji dyskretnej.

Po wstawieniu powyższego do (3) otrzymujemy :

$$h(j\omega T) = \frac{1}{2N} \frac{e^{-j\omega NT} - 2 + e^{j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}}$$

i po przekształceniach

$$h(j\omega T) = \frac{\cos(\omega NT) - 1}{2N(1 - \cos \omega T)} (1 - \cos(\omega T) - j \sin(\omega T)) \quad (5)$$

Jeżeli przedstawimy wyrażenie (5) w postaci wykładniczej, to otrzymamy zależność amplitudy i fazy sygnału wyjściowego od częstotliwości sygnału wejściowego

$$A(\omega T) = \left| \frac{\cos(\omega NT) - 1}{2N \sin \frac{\omega T}{2}} \right| \quad (6)$$

$$\varphi(\omega T) = \frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Wyrażenia (6) i (7) wygodnie będzie przedstawić w postaci dwóch członów, z których pierwszy będzie charakteryzował przypadek graniczny charakterystyki przy $N \rightarrow \infty$ i $T \rightarrow 0$, drugi natomiast będzie stanowił charakterystykę korekcyjną jednakową dla wszystkich trzech filtrów P1, P2 i P3.

$$A(\omega T) = A_{gr}(\omega) \cdot A_k(\omega T)$$

$$\varphi(\omega T) = \varphi_{gr}(\omega) + \varphi_k(\omega T)$$

gdzie : A_{gr} - graniczna charakterystyka amplitudowa

φ_{gr} - graniczna charakterystyka fazowa

A_k - korekcyjna charakterystyka amplitudowa

φ_k - korekcyjna charakterystyka fazowa

Obliczenie granicy $A(\omega T)$ przy $N \rightarrow \infty$ i $T \rightarrow 0$:

Zauważmy, że przy wzroście częstotliwości próbkowania, ilość próbek N sygnału prędkości kątowej ω przypadających na połowę okresu T_0 rośnie w ten sposób, że iloczyn $T N = \frac{1}{2} T_0$ jest stały. Po wstawieniu parametru T_0 do (6) dostaniemy :

$$A_{gr}(\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} \left| \frac{\cos\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) - 1}{\frac{T_0}{T} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) - 1}{\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) - 1}{\frac{\omega T_0}{2}} \right|$$

Po wyrugowaniu parametru T_0 oraz prędkości kątowej ω otrzymamy

graniczną charakterystykę amplitudową

$$A_{gr}(f) = \left| \frac{\cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) - 1}{\pi \frac{f}{f_0}} \right| \quad (7)$$

gdzie :

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Obliczenie granicznej charakterystyki fazowej jest trywialne

$$\varphi_{gr} = -\frac{\pi}{2} = \text{const} \quad (8)$$

Charakterystyki korekcyjne otrzymamy poprzez podzielenie wyrażenia (6) przez (7) oraz odjęcie wyrażenia (7) i (8), otrzymujemy :

$$A_k(f, f_p) = \left| \frac{\pi \frac{f}{f_p}}{\sin\left(\pi \frac{f}{f_p}\right)} \right| \quad (9)$$

gdzie: $f_p = \frac{1}{T}$

$$\varphi_k(f, f_p) = \frac{\pi f}{f_p} \quad (10)$$

3.3. Analiza przebiegu charakterystyki amplitudowej filtra P1.

a/ Miejsca zerowe funkcji (miejsca dla których tłumienie sygnału jest bliskie nieskończoności).

Funkcja (7) osiąga wartość zero gdy jej licznik jest zerowy, czyli :

$$\cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) - 1 = 0$$

stąd otrzymamy

$$\frac{f}{f_0} = 2n$$

gdzie :

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

b/ Miejsca ekstremalne funkcji.

Ażeby określić miejsca ekstremalne obliczona zostanie pochodna funkcji

$$\frac{d}{df} (A_{gr}) = \frac{\frac{\pi f}{f_0} \sin \frac{\pi f}{f_0} + \cos \frac{\pi f}{f_0} - 1}{\frac{\pi f^2}{f_0}}$$

Po przyrównaniu licznika do zera oraz przekształceniach otrzymujemy

$$2 \sin \frac{\pi f}{2f_0} \left(\frac{\pi f}{f_0} \cos \frac{\pi f}{2f_0} - \sin \frac{\pi f}{2f_0} \right) = 0$$

Równanie powyższe jest spełnione gdy

$$\sin \frac{\pi f}{2f_0} = 0$$

co daje

$$\frac{f}{f_0} = 2n \quad (\text{minima odpowiadające miejscom zerowym})$$

gdzie :

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

oraz gdy

$$\operatorname{tg} \frac{\pi f}{2f_0} = -\frac{\pi f}{f_0} \quad (11)$$

Rozwiązanie równania jest nietrywialne. Wyliczono dla celów niniejszej pracy pierwszych 6 wartości $\frac{f}{f_0}$ dla których spełniona jest zależność (11). Funkcja (7) osiąga dla tych wartości lokalne maksima. Wyniki obliczeń zestawione są w poniższej tabelce.

L.p.	1	2	3	4	5	6
$\frac{f}{f_0}$	0,7420	2,9311	4,9592	6,9710	8,9774	10,982
A gr	0,7246	0,2147	0,1278	0,09113	0,07082	0,05792

Z zestawienia maksimów wynika, że maksimum globalne (częstotliwość rezonansowa filtra) jest przesunięte w kierunku niższych częstotliwości w stosunku do częstotliwości charakteryzującej odpowiedź impulsową, czyli że

$$f_{rez} = 0,742 f_0 \quad (12)$$

c/ Wartości amplitudy A gr przy częstotliwości f zmierzającej do zera oraz do ∞ .

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)}{\frac{\pi f}{f_0}} = \lim_{f \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi f}{f_0}\right) = 0$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)}{\frac{\pi f}{f_0}} = 0$$

Przebieg graficzny charakterystyki amplitudowej przedstawiono na rys. 2 a.

4. Analiza filtru P2.

4.1. Wyprowadzenie równania różnicowego filtru P2.

Filtr P2 posiada charakterystykę czasową składającą się z dwóch okresów fali prostokątnej (rys. 3 b). Przyjęto, tak jak uprzednio, że bieżący punkt sygnału $x_{(i)}$ pokrywa się ze środkiem przebiegu $h_{(k)}$ (antysymetryczny kształt przebiegu).

Analityczne przedstawienie charakterystyki czasowej ma postać :

$$h_{(k)} = \frac{1}{4N} \left(1_{(k-2N)} - 2 \cdot 1_{(k-N)} + 2 \cdot 1_{(k)} - 2 \cdot 1_{(k+N)} + 1_{(k+2N)} \right)$$

Transformata dyskretna powyższego wyrażenia wynosi :

$$H(z) = \frac{1}{4N} \frac{z^{-2N} - 2z^{-N} + 2 - 2z^N + 2z^{2N}}{1 - z^{-1}} \quad (13)$$

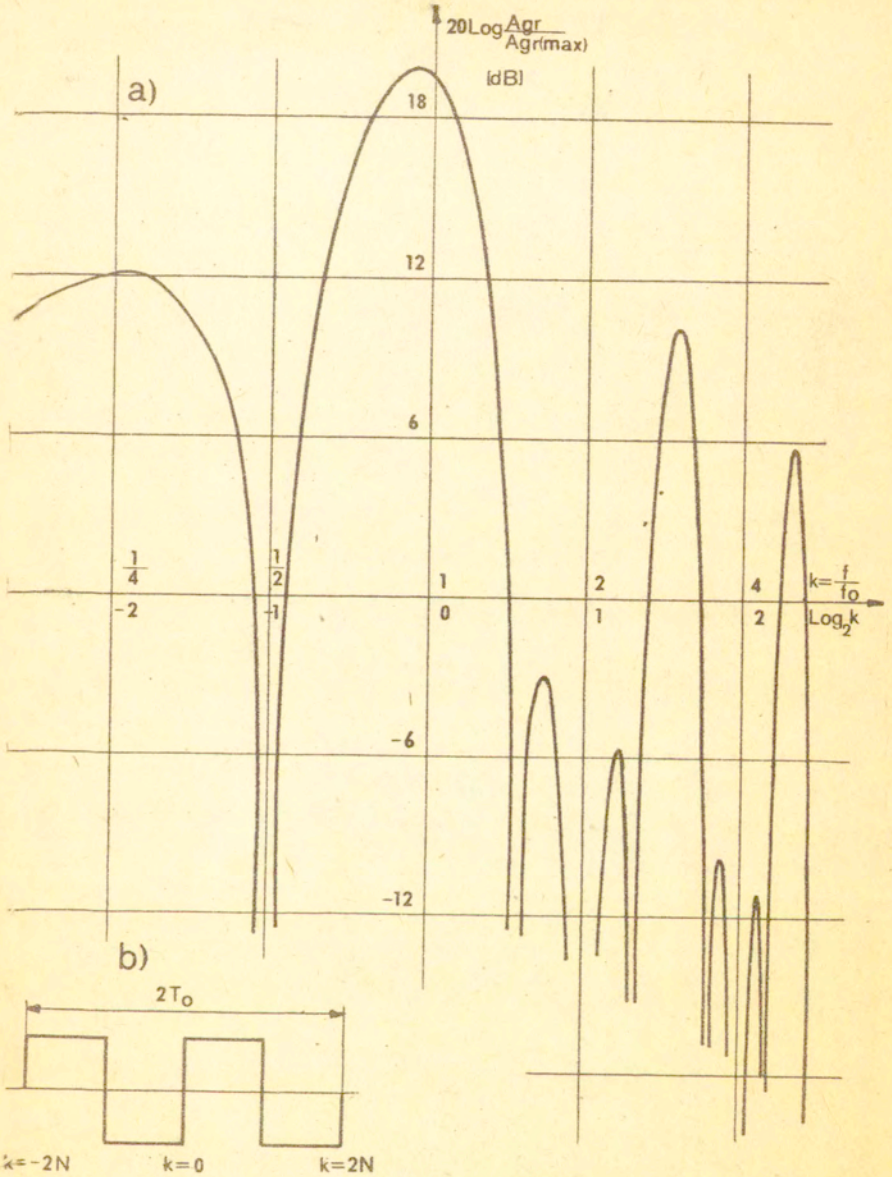
Przechodząc z dziedziny transformat na dziedzinę funkcji czasu otrzymujemy równanie różnicowe

$$y_i - y_{i-1} = \frac{x_{i-2N} - 2x_{i-N} + 2 - 2x_{i+N} + x_{i+2N}}{4N} \quad (14)$$

którego postać jest podobna do równania (4) otrzymanego dla filtru P1.

4.2. Obliczenie charakterystyki częstotliwościowej filtru P2.

Wstawienie $z = \exp(j\omega T)$ do (13) implikuje



Rys. 3. Charakterystyki filtru P2.
a/ graniczna charakterystyka amplitudowa
b/ charakterystyka czasowa

$$G(j\omega) = \frac{1}{4N} \frac{e^{-2j\omega NT} - 2e^{-j\omega NT} + 2 - 2e^{j\omega NT} + e^{j\omega 2NT}}{1 - e^{-j\omega T}}$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$A(\omega T) = \left| \frac{\cos(\omega NT) [\cos(\omega NT) - 1]}{2N \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \right|$$

oraz

$$\varphi(\omega T) = \frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Po rozłożeniu powyższych wielkości na człony : graniczny niezależny od próbkowania oraz korekcyjny zależny od próbkowania (patrz punkt 3.2.) otrzymamy

$$A_{gr}(f) = \left| \frac{\cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) [\cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) - 1]}{\pi \frac{f}{f_0}} \right| \quad (15)$$

$$A_k(f, f_p) = \left| \frac{\pi \frac{f}{f_p}}{\sin\left(\pi \frac{f}{f_p}\right)} \right| \quad (16)$$

oraz

$$\varphi_{gr} = -\frac{\pi}{2} \quad (17)$$

$$\varphi_k(f, f_p) = \frac{\pi f}{f_p} \quad (18)$$

Wyrażenia (16), (17) i (18) okazały się identyczne jak wyrażenia (8), (9) i (10) obliczone dla filtra P1. Można wykazać na podstawie analizy postaci transformat dyskretnych, że wielkości A_k , φ_k oraz φ_{gr} są stałe, niezależne od liczby okresów fali prostokątnej zawartych w charakterystykach czasowych filtrów P1, P2 ... Pn.

4.3. Analiza przebiegu charakterystyki amplitudowej filtra P2.

a/ Miejsca zerowe amplitudy sygnału wyjściowego y_1
Przyrównując licznik (15) do zera otrzymujemy :

$$1) \quad \frac{f}{f_0} = 2n$$

$$2) \quad \frac{f}{f_0} = n + \frac{1}{2}$$

gdzie :

$$n = 0, 1, 2 \dots,$$

b/ Punkty nieciągłości

Należy zauważyć, że funkcja (15) jest funkcją nieciągłą. Punkty nieciągłości znajdują się w miejscach, w których licznik wyrażenia (15) zmienia znak na przeciwny, tj. w miejscach w których

$$\cos\left(\frac{\pi f}{f_0}\right) = 0$$

a więc

$$\frac{f}{f_0} = n + \frac{1}{2}$$

gdzie :

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

c/ Ekstrema

Obliczenie pochodnej z wyrażenia (15) z uwagi na punkty nieciągłości jest nieco utrudnione, dlatego poczynione zostanie założenie, że nie interesuje nas zachowanie się funkcji w punktach nieciągłości i do określenia ekstremów posłużymy się pochodną wyrażenia (15) z pominięciem operatora modułu. W wyniku obliczenia otrzymamy :

$$f'(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(x \cos^3 \frac{x}{2} - 3 x \cos \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \dots \right)}{x^2} + \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^2} \quad (19)$$

gdzie :

$$x = \pi \frac{f}{f_0}$$

Równanie powyższe jest spełnione gdy

$$\sin \frac{\pi f}{2f_0} = 0$$

co daje

$$\frac{f}{f_0} = 2n \quad (\text{miejsca minimalne równoważne miejscom zerowym})$$

gdzie :

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

oraz

$$x - 3x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} = 0 \quad (20)$$

Rozwiązania równania (20) określają maksima charakterystyki amplitudowej. Kilka początkowych wartości $\frac{f}{f_0}$ spełniających równanie (20) obliczono przy użyciu metod numerycznych i zestawiono w poniższej tabelce.

L.p.	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{f}{f_0}$	0,2618	0,9281	1,6568	2,3292	2,9773	3,6621	4,9865
A gr	0,2644	0,6772	0,04789	0,03415	0,2130	0,02172	0,1275

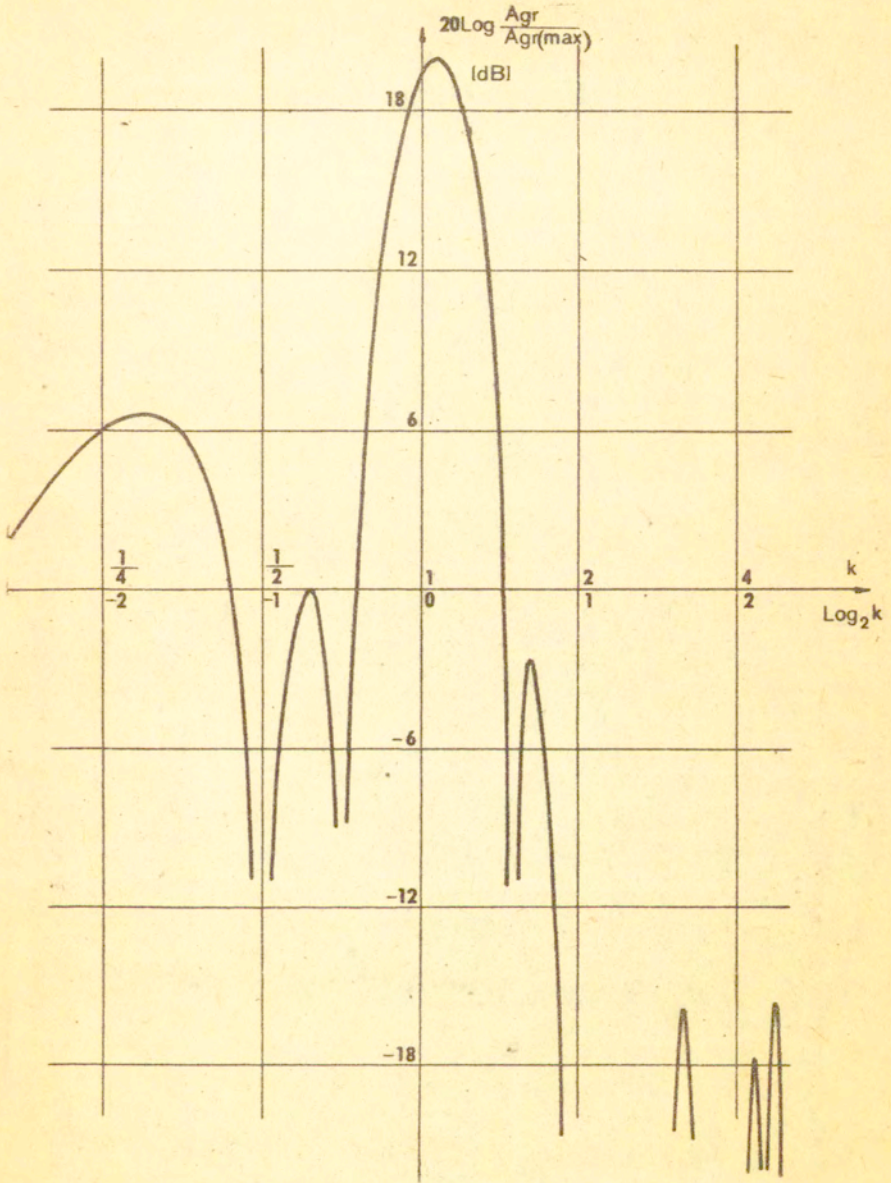
Z podanego zestawienia wynika, że częstotliwość rezonansowa dla filtru P2 wynosi

$$f_{\text{rez}} = 0,9281 f_0 \quad (21)$$

a więc jest umiejscowiona bliżej f_0 niż w filtrze P1 (patrz rys. 3 a).

4.4. Przebieg charakterystyki amplitudowej filtru złożonego z dwóch członów P2.

Obniżenie poziomu wstęp bocznych, które psują przebieg charakterystyki, możemy uzyskać przy pomocy szeregowego łączenia filtrów, co odpowiada wielokrotnej filtracji. Zwiększenie efektu poprawy charakterystyki filtru uzyskamy poprzez połączenie członów P2 w taki sposób, aby odpowiadające tym członom parametry f_0 różniły się nieco między sobą. Przykład takiego połączenia członów, dla których $f_0'' = \sqrt{2} f_0'$ (przesunięcie wynoszące 1/2 oktawy) przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Charakterystyka filtru składającego się z dwóch członów P2 przesuniętych o 0,5 oktawy.

5. Analiza filtru P3.

5.1. Równanie różnicowe oraz charakterystyka amplitudowa filtru P3.

Postępowanie przy wyprowadzaniu równania różnicowego oraz charakterystyki częstotliwościowej jest identyczne jak poprzednio. Ograniczymy się więc do podania gotowych zależności :

$$y_i - y_{i-1} = \frac{x_{i-3N} - 2x_{i-2N} + 2x_{i-N} - 2 + 2x_{i+N} - 2x_{i+2N} + x_{i+3N}}{6N} \quad 22$$

$$A_{gr}(f) = \frac{[4 \cos^2(\pi \frac{f}{f_0}) - 1][1 - \cos(\pi \frac{f}{f_0})]}{3 \pi \frac{f}{f_0}} \quad (23)$$

φ_{gr} , A_k , φ_k - jak poprzednio

Przebieg charakterystyki amplitudowej filtru P3 przedstawiono na rys. 5 a.

Przedstawiona na rys. 5 charakterystyka amplitudowa osiąga maksymalne tłumienie (miejsca zerowe wyrażenia (23)) w następujących punktach :

$$1/ \quad \frac{f}{f_0} = 2n \quad (\text{minimum lokalne})$$

$$2/ \quad \frac{f}{f_0} = 2(n+1) \pm \frac{1}{3} \quad (\text{p. nieciągłości})$$

$$3/ \quad \frac{f}{f_0} = 2(n+1) \pm \frac{2}{3} \quad (\text{p. nieciągłości})$$

gdzie :

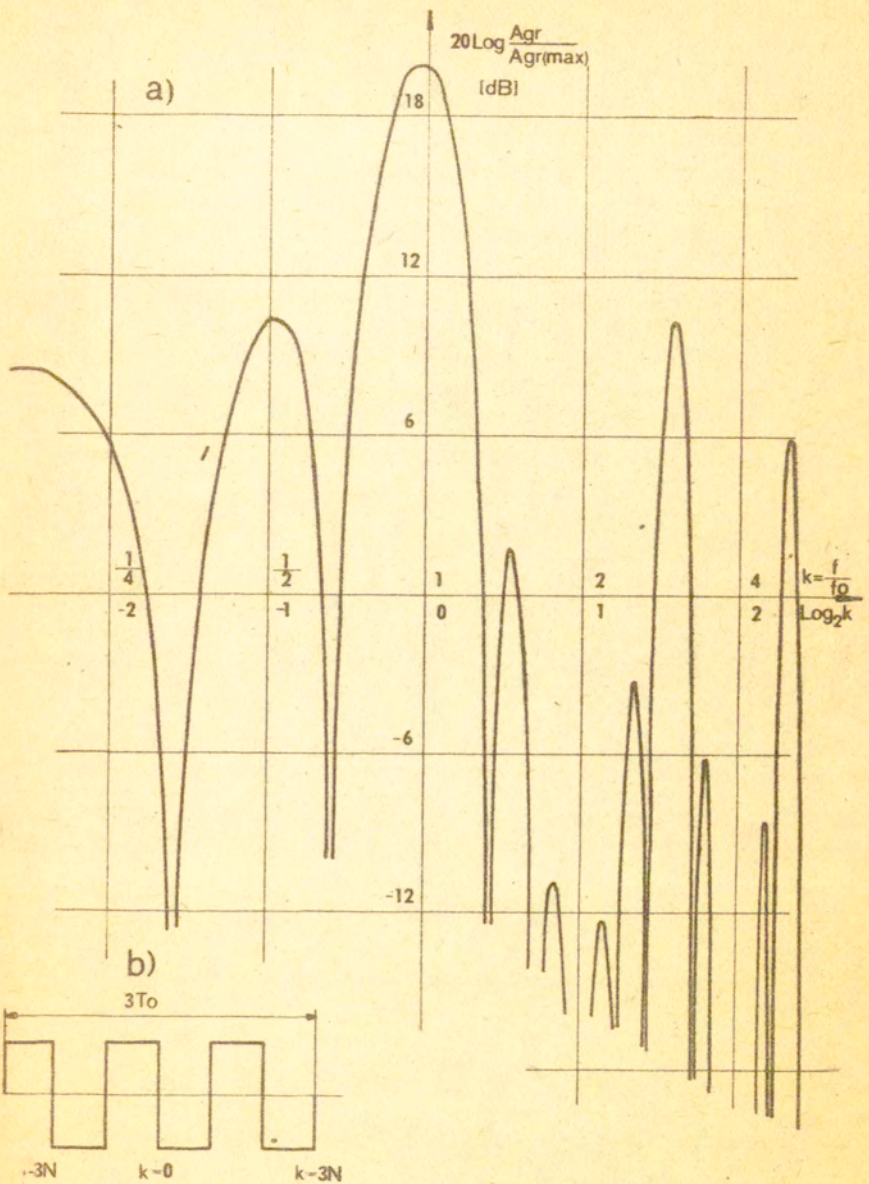
$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

5.2. Charakterystyka amplitudowa filtru składającego się z dwóch członów P3.

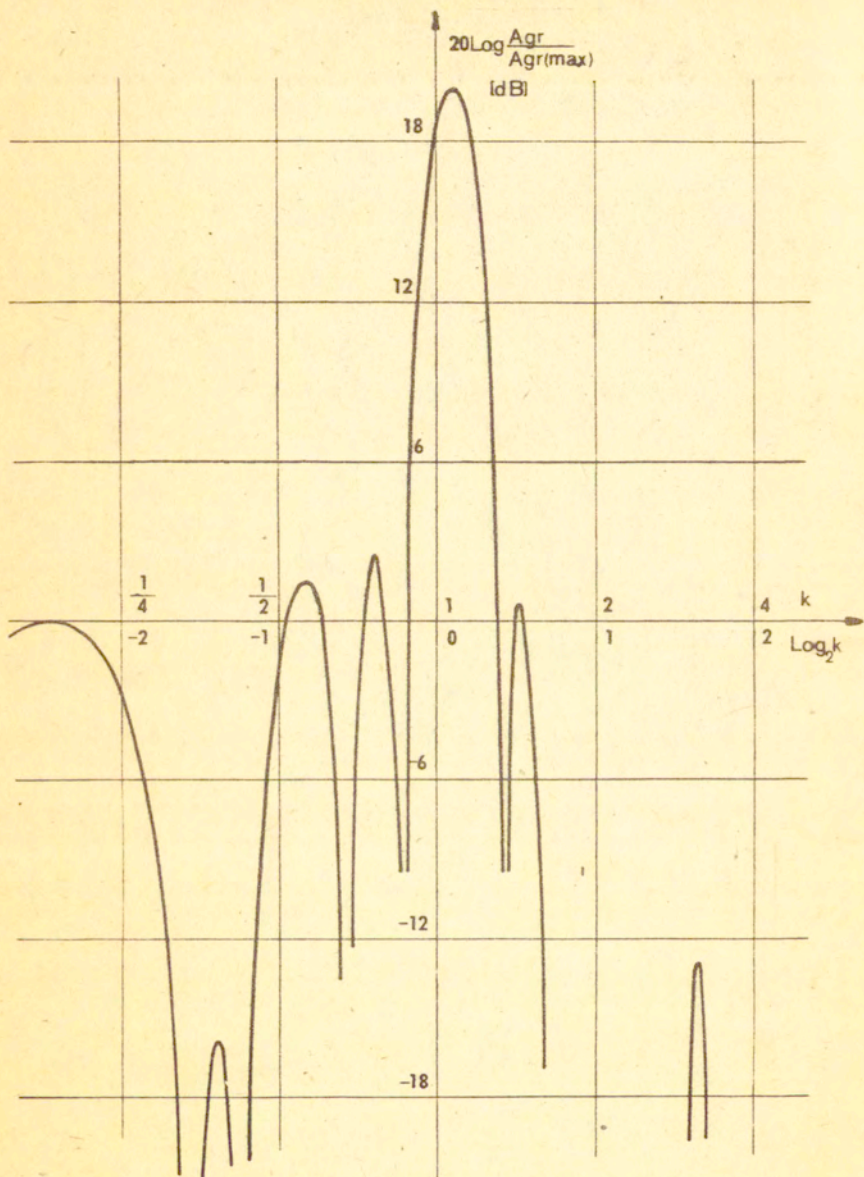
Na rys. 6 przedstawiona jest charakterystyka filtru składającego się z dwóch członów P3 przesuniętych względem siebie o $\frac{1}{3}$ oktawy. Wielkość przesunięcia wynosząca $\frac{1}{3}$ oktawy przyjęta została a priori i nie musi wcale oznaczać najkorzystniejszej kombinacji połączeń członów.

6. Analiza wpływu częstotliwości próbkowania na kształt charakterystyk amplitudowych i fazowych filtrów P.

Wpływ próbkowania na przebieg charakterystyk amplitudowych



Rys. 5. Charakterystyka filtru P3.
a/ graniczna charakterystyka amplitudowa
b/ charakterystyka czasowa



Kys. 6. Graniczna charakterystyka amplitudowa dwóch członów P3 przesuniętych względem siebie o $\frac{1}{3}$ oktawy ($f_0'' = \sqrt[3]{2} f_0$).

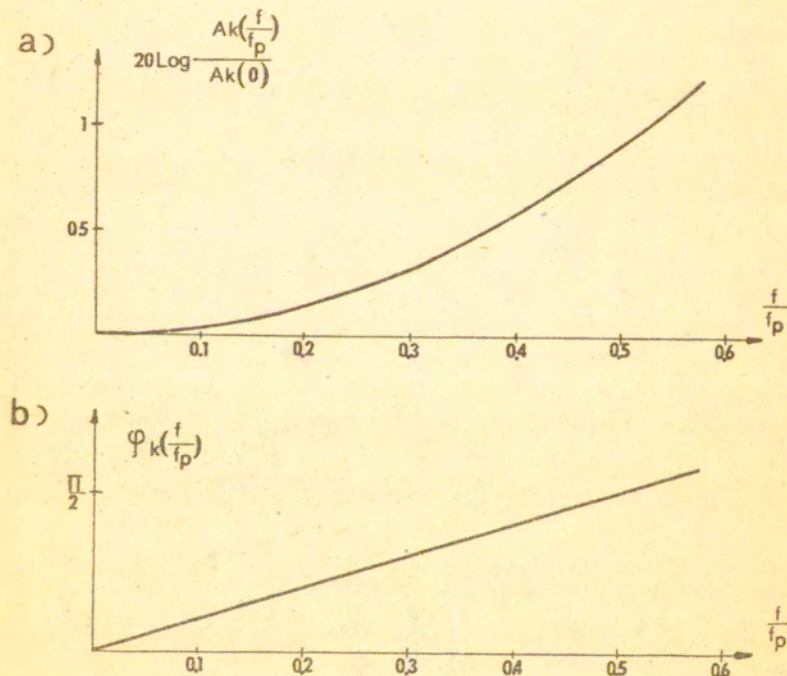
i fazowych filtrów P1, P2, ..., Pn uwidoczniiony jest w zależnościach korekcyjnych :

$$A_k\left(\frac{f}{f_p}\right) = \left| \frac{\mathcal{H}\left(\frac{f}{f_p}\right)}{\sin\left(\mathcal{H}\left(\frac{f}{f_p}\right)\right)} \right|$$

oraz

$$\varphi_k\left(\frac{f}{f_p}\right) = \frac{\mathcal{H}f}{f_p}$$

Mając na uwadze fakt, że w praktycznych układach maksymalna częstotliwość występująca w sygnale filtrowanym nie może przekraczać połowy częstotliwości próbkowania (prawo Shannona-Kotielnikowa) wykreślono na rys. 7 przebieg charakterystyk korekcyjnych.



Rys. 7. Charakterystyki korekcyjne dla członów P.
 a/ amplitudowa
 b/ fazowa

Z rysunku łatwo zauważyć, że wpływ próbkowania na charakterystyki amplitudowe jest pomijalny. Bardziej znacząca wydaje się być korekcyjna charakterystyka fazowa. Charakterystyki fazowe nie są brane na ogół pod uwagę, jednakże gdy zależy nam na stałości fazy, można ją zapewnić przyjmując odpowiednio duży stosunek $\frac{f_p}{f_0}$.

Zmienność fazy w paśmie przepustowym można oszacować przy pomocy następującego wzoru :

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{f_p} (f_g - f_d) \quad (24)$$

gdzie :

- f_g - górna częstotliwość przepuszczania
- f_d - dolna częstotliwość przepuszczania
- f_p - częstotliwość próbkowania

7. Wnioski.

Zaprezentowane w pracy filtry cechują się następującymi własnościami :

- a/ Stały stosunek szerokości pasma przepuszczania do częstotliwości środkowej - stosunek ten wyznaczony jest strukturalnie.
- b/ Niesymetryczny kształt charakterystyki amplitudowej.
- c/ Występowanie dodatkowych pasm przepustowych o poziomie obniżonym w stosunku do pasma zasadniczego.
- d/ Duża stałość charakterystyki fazowej.

Z powyższych własności można wysunąć wniosek, że zaprezentowany rodzaj filtracji nie kwalifikuje się do zastosowań laboratoryjnych. Natomiast filtracja ta nadaje się bardzo dobrze do wykorzystania przy projektowaniu komercyjnych analizatorów sygnałów akustycznych do takich celów jak np. rozpoznawanie sygnałów. Znajomość zasad projektowania układów cyfrowych umożliwia zaprojektowanie w oparciu o wyprowadzone w pracy równania analizatora, który będzie urządzeniem tanim i co najważniejsze - zminiaturyzowanym.

Przewaga przedstawionej filtracji w stosunku do innych podobnego typu filtracji cyfrowych polega na tym, że można zrealizować ją układowo bez konieczności użycia operacji mnożenia, wykorzystując tylko operacje sumowania, odejmowania i przesuwania

zawartości rejestrów.

Można by w tym miejscu postawić zarzut, że wprowadzenie niepotrzebne jest mnożenie ale niezbędne jest dzielenie, które występuje w równaniach różnicowych i jest niemniej kłopotliwe w realizacji technicznej niż mnożenie. Zarzut taki byłby słuszny gdyby nie fakt, że dzielenie uwzględnione w równaniach różnicowych ma tylko za zadanie uniezależnić wielkość amplitudy wyjściowej od ilości próbek przypadających na okres T_0 . Ilość tych próbek zmienia się bowiem w zależności od numeru kanału. Problem dzielenia normalizacyjnego przez $2n \cdot N$ (gdzie n jest ilością okresów w charakterystyce czasowej) proponuje się ominąć na dwa sposoby :

1/ W przypadku użycia jednego tylko członu proponuje się całkowicie zrezygnować z dzielenia, natomiast różnice poziomów w poszczególnych kanałach skorygować na etapie wstępnego przepuszczania sygnału analogowego przed konwersją przez filtr, którego charakterystyka równomiernie narasta z szybkością 6 dB/oktawę.

2/ W przypadku użycia większej liczby członów proponuje się zastąpić wielkość $2n \cdot N$ w mianowniku najbliższą wartością z szeregu potęgowego $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^m$ i zastąpić przez to dzielenie przesuwaniem zawartości rejestru w lewo. Wprowadzony przez to błąd jest niewielki. Wielkość odchylenia poziomu sygnału w danym kanale od poziomu nominalnego nie powinna w tym przypadku przekroczyć ± 3 dB.

Inną dziedziną zastosowań opisanej filtracji może być symulacja filtrów przy użyciu maszyn cyfrowych o niewielkich mocach obliczeniowych, które nie mogą podołać bardziej złożonym rodzajom filtracji. Autor zaprogramował na podstawie wyprowadzonych równań filtru P2 analizator sygnału mowy próbkowanej z częstotliwością 20 kHz przy użyciu prostego minikomputera MERA 303. Analizator obejmował jedenastoma kanałami o szerokości 0,5 oktawy pasmo 150 Hz - 5 kHz. Uzyskano czas analizy wynoszący niecałe 2 min dla segmentu o długości 0,25 s.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEAUCHAMP, K.O., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1978.
- [2] CAPPELLINI, V., CONSTANTINIDES, A.G., EMILIANI, P., Digital Filters and their Applications, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1978.
- [3] FREDERICK, D.K., CARLSON, A.B., Układy liniowe w telekomunikacji i automatyce, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1976.