

3 / 1980

T. Kurcyk, W. K. Nowacki

POLE TEMPERATURY
W JEDNOWYMIAROWYM PROBLEMIE
DUŻYCH ODKSZTAŁCEŃ
TERMO-SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYCH

P. 269



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 stycznia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 3/1980



57170



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,9. Ark.druk. 1,25

Oddano do drukarni w lutym 1980 r.

Nr zamówienia 105/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

POLE TEMPERATURY W JEDNOWYMIAROWYM PROBLEMIE
DUŻYCH ODKSZTAŁCEN TERMO-SPRĘŻYSTO/LEPKO-
PLASTYCZNYCH

1. WSTĘP

Celem pracy jest rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w pręcie sprężysto plastycznym uderzającym ze znaczną prędkością w nieodkształcalną przegrodę. Rozważania będziemy prowadzili w oparciu o teorię ogólną, trójwymiarową dla dużych deformacji, zaproponowaną przez J. MANDELA [4].

W przypadku działania na elementy konstrukcji intensywnych krótkotrwałych obciążeń, gdy nie można pominąć efektów bezwładności, mówimy o problemach dynamicznych. Z problemami tymi jest związana propagacja fal. Zagadnienia falowe można badać w różnych aspektach:

- 1^o można badać ruch powierzchni nieciągłości w aspekcie lokalnym, tzn. określać prędkość w dowolnym punkcie, w danym kierunku normalnej do powierzchni nieciągłości oraz określać charakter wektora nieciągłości. Rozważa się przypadki propagacji fal przyspieszenia oraz fal silnych nieciągłości. Określa się rozwiązania na czole fali.
- 2^o bada się zjawiska propagacji fal w aspekcie globalnym. W tych przypadkach poszukuje się rozwiązania początkowo-brzegowego dla postawionego układu równań problemu. Inaczej mówiąc, nie poprzestaje się na rozwiązaniach zagadnienia jedynie na froncie fali słabej czy też silnej nieciągłości, lecz poszukuje się rozwiązań za frontem fali. Jest to zagadnienie

* OBR- Podstaw Technologii i Konstrukcji Maszyn

niezmiernie ważne. Dopiero w tym przypadku można rozważać zagadnienia odbić fal oraz wzajemnego ich przenikania. Proces falowy ewoluuje w czasie. Nie wystarczy jedynie rozważenie zjawisk na froncie fali. Szczególnie istotne jest to w przypadku ciał niesprężystych. Na froncie fali, w większości przypadków, odkształcenia niesprężyste nie osiągają swej maksymalnej wartości.

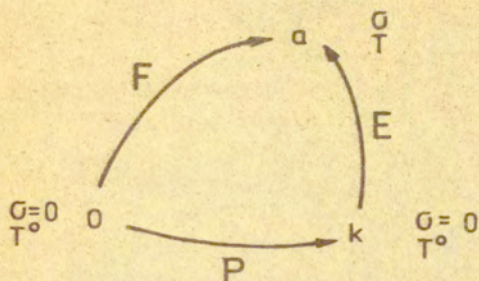
Maksimum odkształceń występuje za frontem fali. Ma to zwłaszcza miejsce w przypadku ciał niesprężystych, wrażliwych na prędkość odkształcenia, gdzie w otoczeniu frontu fali silnej nieciągłości ciało zachowuje się jak ciało sprężyste, natomiast za frontem dopiero uwidacznia się wpływ plastyczności.

W rozważanym przez nas przypadku, w którym chcemy uwzględnić wpływ pola deformacji na pole temperatury, należy rozwiązanie problemu konstruować globalnie. W pracy [7] przedstawiono pewne rozważania nad energią zmagazynowaną w metalu /monokryształe, polikryształe/. Ograniczono się jednak do teorii małych odkształceń. Na przykładzie pręta sprężysto/lepkoplastycznego, poddanego obciążeniom quasi-statycznym i dynamicznym zbadano wpływ pewnych przyjętych hipotez w równaniu termodynamiki na pole temperatury. Pokazano, że istnieje mała różnica między rozwiązaniami odpowiadającymi tym różnym hipotezom, jak też mała różnica w rozwiązaniu dla procesu adiabatycznego i izotermicznego. Do podobnych wniosków doszli autorzy pracy [9] dla przypadku fal skrętno-podłużnych w cienkościennym cylindrze. Obecnie przedstawimy rozwiązanie dla przypadku skończonych deformacji w pręcie sprężysto lepkoplastycznym w celu określenia w nim pola temperatury wywołanego polem odkształcenia. Dla procesu izotermicznego podobne zagadnienie było sformułowane w pracy [2], lecz jedynie w aspekcie lokalnym. Określono jedynie prędkość fali oraz rozwiązanie na jej froncie.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA PROBLEMU

Rozwiązania nasze oprzemy na teorii materiału sprężysto-
plastycznego zaproponowanej przez J. MANDELA [4], rozwiniętej następnie przez B. HALPHENA [3]. W skrócie przedstawimy elementy tej teorii słusznej dla skończonych deformacji ośrodka.

Niech (o) oznacza konfigurację odniesienia ciała w stanie beznaprężeniowym ($\underline{\underline{S}} = 0$) i w temperaturze T^0 /Rys. 1/. Niech



Rys. 1

(a) oznacza jego konfigurację aktualną w której $\underline{\underline{S}}$ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego oraz T jest temperaturą absolutną. Jeżeli dokonamy nagłego ociążenia elementu ciała z konfiguracji (a) , sprowadzając go jednocześnie do temperatury początkowej T^0 , otrzymamy konfigurację (k) nazywaną konfiguracją chwilową ociążenia, zdefiniowaną z dokładnością do dowolnej rotacji. Oznaczmy przez $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{E}}$ i $\underline{\underline{P}}$ odpowiednio gradienty:

transformacji całkowitej - przejście $(o) \rightarrow (a)$

transformacji sprężystej - przejście $(k) \rightarrow (a)$

transformacji plastycznej - przejście $(o) \rightarrow (k)$

Gradient deformacji całkowitej jest określony w następujący sposób:

$$(2.1) \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{P}}$$

Jeżeli różniczkować (2.1) względem czasu oraz pomnożyć obie strony równości przez $\underline{\underline{F}}^{-1}$ prawostronnie, to otrzymamy wyrażenie dla gradientów przemieszczania w postaci

$$(2.2) \quad \underline{\underline{V}} = \text{grad } \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{E}}^{-1} + \underline{\underline{E}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-1}$$

Oznaczając

$$(2.3) \quad \underline{V}^e = \underline{\dot{E}} \underline{E}^{-1}, \quad \underline{V}^p = \underline{E} \dot{\underline{P}} \underline{P}^{-1} \underline{E}^{-1},$$

a następnie przez \underline{D} , \underline{D}^e i \underline{D}^p odpowiednio części symetryczne \underline{V} , \underline{V}^e i \underline{V}^p otrzymamy związek

$$(2.4) \quad \underline{V} = \underline{V}^e + \underline{V}^p \quad \text{oraz} \quad \underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p,$$

przy czym \underline{D} jest prędkością deformacji całkowitej, \underline{D}^e - prędkością deformacji sprężystej a \underline{D}^p prędkością deformacji plastycznej.

Równania konstytutywne zaproponowane przez J. MANDELA [4] są następujące. Wyrażenie dla prędkości deformacji sprężystej w funkcji prędkości naprężenia i prędkości temperatury jest postaci :

$$(2.5) \quad \underline{D}^e = \underline{L} : \frac{\dot{\underline{\Sigma}}}{\rho} + \underline{A} \dot{T},$$

gdzie $\underline{\dot{\Sigma}}$ jest pochodną tensora Cauchy'ego zdefiniowaną jako:

$$(2.6) \quad \underline{\dot{\Sigma}} = \underline{\dot{\Sigma}} - \underline{V}^e \underline{\Sigma} - \underline{\Sigma} \underline{V}^{eT} + \underline{\Sigma} \operatorname{div} \underline{v},$$

\underline{L} i \underline{A} są macierzami zdefiniowanymi w sposób następujący:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} L_{mnr s} &= E_{i m}^{-1} E_{j n}^{-1} L_{i j k l}^0 E_{k r}^{-1} E_{l s}^{-1}, \\ A_{m n} &= E_{i m}^{-1} A_{i j}^0 E_{j n}^{-1}, \end{aligned}$$

przy czym $L_{i j k l}^0$ jest macierzą współczynników sprężystości, $A_{i j}^0$ jest macierzą współczynników rozszerzalności termicznej, ρ oznacza masę objętościową w konfiguracji aktualnej, znak : oznacza zwięźlenie względem pary indeksów, np : $\underline{L} : \underline{\dot{\Sigma}} = L_{i j m n} \dot{\Sigma}_{i j}$.

Dla materiału sprężysto lepkoplastycznego z natychmiastowymi deformacjami plastycznymi gradient prędkości transformacji plastycznej jest sumą członu lepkoplastycznego będącego funkcją aktualnego stanu materiału oraz członu opisującego plastycz-

ność natychmiastową.

Zakłada się istnienie powierzchni plastyczności zdefiniowanej jako:

$$(2.8) \quad f(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T) = 0$$

gdzie $\underline{\Psi}$ jest nowym tensorem naprężania zdefiniowanym jako:

$$(2.9) \quad \underline{\Psi} = \underline{E}^T \frac{\underline{\xi}}{\rho} \underline{E}^{-1}$$

$\underline{\alpha} = \{\alpha_k | k = 1, \dots, n\}$ jest rodziną parametrów ukrytych lub obserwowalnych definiujących stan wewnętrzny materiału /lub wzmocnienie materiału/. Przyjmuje się, że f jest funkcją wypukłą $\underline{\Psi}$.

Gradient prędkości transformacji plastycznej można przedstawić w postaci:

$$(2.10) \quad \dot{\underline{P}}^d = \langle \Phi^0(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T) \rangle + \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\Psi}}$$

przy czym $\lambda \geq 0$ gdy $f = 0$ i $\dot{f} = 0$, oraz $\lambda = 0$ gdy $f < 0$ lub $\dot{f} < 0$.

Funkcja $\langle \Phi^0(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T) \rangle$ jest częścią lepkoplastyczną tego gradientu.

W rozważaniach jakie będziemy prowadzili w pracy ograniczymy się jedynie do ciała sprężysto lepkoplastycznego nie wykazującego deformacji plastycznych natychmiastowych.

Zatem związek konstytutywny wyrażający prędkość deformacji całkowitej \underline{D} w funkcji $\underline{\xi}$ i \underline{T} otrzymamy, wykorzystując (2.3)-(2.5) i (2.10), w postaci:

$$(2.11) \quad \underline{D} = \underline{L} : \frac{\underline{\xi}}{\rho} + A \dot{T} + \{ \langle \Phi(\underline{\xi}, \underline{\alpha}, T) \rangle \},$$

gdzie $\Phi(\underline{\xi}, \underline{\alpha}, T) = \underline{E} \Phi^0(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T) \underline{E}^{-1}$ oraz $\{\Phi\}$ oznacza część symetryczną Φ .

Deformacja lepkoplastyczna powstanie jedynie gdy będzie spełniony warunek $f(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T) > 0$. Przyjmujemy analogicznie jak w [7], że $\underline{\dot{\alpha}}$ zależy jedynie od wartości aktualnej $\underline{\Psi}$ i T oraz od $\underline{\alpha}$ /niezależnie od $\underline{\dot{\Psi}}$ i \dot{T} /. Ewolucja parametrów wewnętrznych jest dana przez zależność postaci:

$$(2.12) \quad \underline{\dot{\alpha}}_n = f_1(\underline{\Psi}, \underline{\alpha}, T)$$

Równanie termodynamiki wyrażające prędkość temperatury w funkcji prędkości deformacji całkowitej, prędkości deformacji plastycznej i aktualnego stanu materiału jest postaci - por [3, 7]:

$$(2.13) \quad \dot{T} = \frac{1}{c_\varepsilon} [T \underline{M} : (\underline{D} - \underline{D}^p) - \varrho \frac{\partial U}{\partial \alpha_n} \dot{\alpha}_n + \frac{1}{\varrho} (\underline{G} : \underline{D}^p) - \frac{1}{\varrho} \text{div } \underline{q}] ,$$

gdzie c_ε oznacza ciepło właściwe mierzone przy stałej deformacji, $\underline{M} = -\underline{L}^{-1} : \underline{A}$, $U(\underline{\alpha}_n, T)$ jest energią wewnętrzną /lub energią zmagazynowaną/. W przypadku polikryształu metalu parametry α_n reprezentują zbiór wszystkich parametrów charakteryzujących dystrybucję elementów krystalicznych, głównie dyslokacji w poszczególnych kryształach, oddziaływania międzykrystaliczne naprężenia rezydualne oraz niejednorodności pola temperatury [7, 10].

Równanie ruchu ośrodka ma postać:

$$(2.14) \quad \text{div } \underline{G} = \varrho \underline{\dot{\Psi}}$$

gdzie $\dot{\Psi}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$, x_i - współrzędna w konfiguracji aktualnej.

3. JEDNOWYMIAROWY STAN NAPRĘŻENIA

Rozważymy problem termomechaniczny uderzenia pręta sprężysto lepkoplastycznego w nieodkształcalną przegrodę. Oprzemy się na uprzednio przedstawionej teorii termolepkoplastyczności dla skończonych odkształceń.

Rozważymy izotropowy pręt cylindryczny o długości l_0 uderzający z prędkością \dot{v}_0 w nieodkształcalną przegrodę. Przyjmujemy, że konfiguracja początkowa pręta jest jednorodna /gęstość

ξ_0 /, i że przekrój poprzeczny pręta jest stały. Zakładamy, że przekroje poprzeczne pozostają płaskie, ruch jest zdefiniowany przez $x = x(X, t)$. Tensor naprężenia Cauchy'ego jest jednakowy w każdym przekroju i ma we współrzędnych X_i jedną niezerową składową ϵ_{11} .

Przedstawiona tutaj teoria pomija efekty bezwładności poprzecznej, lecz nie pomija zwięzienia poprzecznego, które w przypadku skończonych deformacji może być bardzo istotne.

W układzie współrzędnych początkowych X_i gradienty transformacji sprężystej i plastycznej są wyrażone odpowiednio przez:

$$(3.1) \quad \underline{E} = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix}, \quad \underline{P} = \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 \end{vmatrix}$$

gdzie $E_3 = E_2$ i $P_3 = P_2$

Na podstawie (2.1) można natychmiast określić gradient transformacji całkowitej \underline{E} .

Dla składowej sprężystej oraz plastycznej tensora prędkości deformacji otrzymamy wyrażenia:

$$(3.2) \quad \underline{D}^e = \begin{vmatrix} \dot{E}_1 E_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{E}_2 E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{E}_2 E_2^{-1} \end{vmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{vmatrix} \dot{P}_1 P_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{P}_2 P_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{P}_2 P_2^{-1} \end{vmatrix}$$

Dla pręta izotropowego niezerowymi składowymi macierzy współczynników sprężystości są: $L_{1111}^e = E_0^{-1}$, $L_{1122} = L_{1133} = -\nu E_0^{-1}$. Dla składowej macierzy współczynników dylatacji termicznej A_{11}^e przyjmijmy stosunek przyrostu deformacji sprężystej do przyrostu temperatury $A_{11}^e = \delta \Delta^e / \delta T = \alpha$.

Pochodna tensora naprężenia $\check{\epsilon}_{11}$ jest postaci:

$$(3.3) \quad \check{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{11} + \epsilon_{11} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - 2 \dot{E}_1 E_1^{-1} \right).$$

Wyrażenie dla prędkości deformacji sprężystej (2.5) przyjmie postać:

$$(3.4) \quad D_{11}^e = \dot{E}_1 E_1^{-1} = \varrho_0 \varrho^{-1} E_0^{-1} E_1^{-1} \left[\dot{G}_{11} + G_{11} \left(\frac{\partial \dot{v}_1}{\partial X_1} - 2 \dot{E}_1 E_1^{-1} \right) \right] + \alpha E_1^{-2} \dot{T}.$$

Dla części lepkoplastycznej prędkości deformacji otrzymamy wyrażenie:

$$(3.5) \quad D_{11}^p = E_1 \dot{P}_1 P_1^{-1} E_1^{-1} = E_1 \{ \langle \Phi(G_{11}, \alpha_n, T) \rangle \} E_1^{-1},$$

oraz równanie:

$$(3.6) \quad \dot{\alpha}_n = f_1(G_{11}, \alpha_n, T).$$

Równanie termodynamiki (2.13) przybierze postać /dla procesu adiabatycznego/:

$$(3.7) \quad \dot{T} = \frac{1}{c_\xi} \left[\varrho^{-1} G_{11} \dot{P}_1 P_1^{-1} - \varrho_0^{-1} E_0 \alpha \dot{E}_1 E_1^{-1} T - \frac{\partial U}{\partial \alpha_n} \dot{\alpha}_n \right],$$

przy czym

$$(3.8) \quad \varrho = \varrho_0 (F_1 F_2^2)^{-1}.$$

Równanie ruchu ośrodka (2.14) przyjmie następującą postać /przy wykorzystaniu (3.8) oraz faktu, że $\partial x_1 / \partial X_1 = F_1$ /:

$$(3.9) \quad \frac{\partial G_{11}}{\partial X_1} F_2^2 = \varrho_0 \dot{v}_1,$$

gdzie $v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}$.

Wprowadzimy naprężenie nominalne w pręcie w postaci $\Sigma = F_2^2 G_{11}$.

Wprowadzimy również logarytmiczne miary odkształcenia, mianowicie:

$$(3.10) \quad e = \ln E_1, \quad f = \ln F_1, \quad g = \ln P_1.$$

Równania (3.4) - (3.10) po przekształceniach, mając na uwadze, że $D_{11} = D_{11}^e + D_{11}^p$ sprowadzamy do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \exp(f) \bar{E}_0^{-1} \left\{ \dot{\Sigma} + \Sigma \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \exp(-f) - 2\dot{e} \right] \right\} + \bar{\omega} \dot{T} , \\
 (3.11) \quad \dot{g} &= \left\langle \Phi(\Sigma, \alpha_n, T) \right\rangle , \\
 \rho_0 c_{\xi} \dot{T} &= \exp(f) \Sigma \dot{g} - E_0 \alpha T e - \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha_n} \dot{\alpha}_n , \\
 \dot{\alpha}_n &= f(\xi_{11}, \alpha_n, T) , \\
 \frac{\partial \Sigma}{\partial X} &= g_0 \dot{v}_1 , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial X} = f \exp(f) \\
 \dot{f} &= \dot{e} + \dot{g} .
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy układ sześciu równań różniczkowych względem niewiadomych: e, f, g, Σ, ψ_1 i T . Powyższy układ równań rozwiążemy z jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad e(X, 0) &= f(X, 0) = g(X, 0) = \Sigma(X, 0) = \psi_1(X, 0) = 0 , \\
 T(X, 0) &= T^0 ,
 \end{aligned}$$

oraz warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \psi_1(0, t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t < t_k \\
 \Sigma(0, t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t \gg t_k \\
 \Sigma(L_0, t) &= 0 ,
 \end{aligned}$$

gdzie t_k oznacza czas trwania kontaktu pręta z przegrodą. Wartość t_k określa się z rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego.

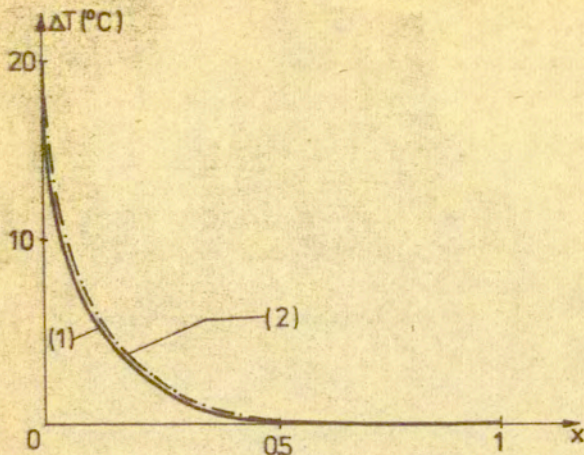
Powróćmy jeszcze do równania termodynamiki $(3.11)_3$.

W pracy [10] zaproponowano pewien model jednowymiarowy dla ciała lepkoplastycznego opisujący zachowanie się polikryształu metalu. Założono, że (por. również [7]):

1° jeden parametr α_1 związany ze średnim rozkładem dyslokacji w polikryształe wystarcza do scharakteryzowania jego stanu wewnętrznego /parametr α_1 przyjęto bezwymiarowy/, 2° granica plastyczności jest proporcjonalna do α_1 , 3° prędkość deformacji lepkoplastycznej jest funkcją wartości aktualnej σ_{11}, T i α_1 , 4° zmiana parametru stanu α_1 jest również funkcją σ_{11}, T i α_1 , oraz 5° energia zmagazynowana jest proporcjonalna do α_1^2 .

W pracy [7] przeprowadzono liczne obliczenia w zakresie procesów zarówno quasistatycznych jak i dynamicznych w celu zbadania wpływu różnych hipotez odnośnie zachowania się termosprężysto-lepkoplastycznego metalu. Przyjęto następujące trzy ^{rozne} hipotezy odnośnie równania termodynamiki $(3.11)_3$.

Założono że: 1° Całkowita moc plastyczna jest dysypowana termicznie, tzn. że w równaniu temperatury człon $\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 = 0$, 2° istnieje energia zmagazynowana (tzn. $\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 \neq 0$), 3° istnieje energia zmagazynowana, lecz równanie $(3.11)_3$ ulegnie modyfikacji; założono, że: $\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 = 0,1 \sum \dot{g} \exp(-f)$ - jak przyjmuje to szereg autorów, por. [7]. Dla identycznego jednowymiarowego zadania dynamicznego w zakresie małych deformacji, w pracy [7] otrzymano dla przyrostu temperatury wyzniki, które przedstawiono na rys. 2. Pokazano na nim zmianę temperatury w przecie wzdłuż jego długości, dla ustalonego czasu, dla drugiej i trzeciej z wyżej wspomnianych hipotez dla równania termodynamiki. Dla tych przypadków deformacja w przekroju pręta $x = 0$ osiągnęła wartość około 20%. Można zauważyć z wykresu, że różnice w polu temperatury dla tych przypadków są minimalne. Podobnie małe są różnice w naprężeniach i odkształceniach. Można zatem w naszych rozważaniach przyjąć uproszczenie w równaniu $(3.11)_3$, zakładając, że $\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 = 0,1 \sum \dot{g} \exp(-f)$ tymbardziej, że nie dysponujemy danymi doświadczalnymi, pozwalającymi na wyznaczenie wszystkich stałych fizycznych, charakterystycznych dla danego metalu w zakresie dużych odkształceń i znacznych prędkości deformacji.



Rys. 2. Zmiana temperatury wzdłuż długości pręta, dla czasu $t \approx 1,5 t^*$; /1/ - z uwzględnieniem energii zmagazynowanej, /2/ - j.w. lecz ze zmodyfikowanym równaniem termicznym.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA POCZĄTKOWO-BRZEGOWEGO.

Układ równań różniczkowych cząstkowych (3.11), ze względu na przyjęcie adiabatyczności procesu jest typu hiperbolicznego o zmiennych współczynnikach. Ze względu na nieliniowość powyższego układu równań rozwiążemy go numerycznie, wykorzystując metodę charakterystyk. Układ równań (3.11) ma następujące rodziny charakterystyk:

$$(4.1) \quad dX_1 = \pm a(\Sigma, f, T) dt, \\ X = \text{const} \quad (3\text{-krotne}),$$

gdzie a jest prędkością propagacji fal w pręcie wyrażoną w następujący sposób:

$$(4.2) \quad a(\Sigma, f, T) = \left\{ \frac{E_{ad} \exp(-f) + \Sigma}{\rho_0 \exp(f)} \right\}^{1/2},$$

przy czym oznaczono przez $E_{ad} = \bar{E}_0 [1 + \bar{E}_0 \bar{\alpha}^2 T / \rho_0 c_\epsilon]$ adiabaticzny moduł Younga. W przypadku małych odkształceń otrzymamy dla prędkości fal w przecie wyrażenie $a(T) = \sqrt{E_{ad} \rho_0^{-1}}$, a ponadto dla procesu izotermicznego prędkość fal redukuje się do wyrażenia $a_0 = \sqrt{E_0 \rho_0^{-1}}$.

Wzdłuż charakterystyk mamy następujące związki:

- wzdłuż $dX_1 = \pm a(\Sigma, f, T) dt$

$$(4.3) \quad d\Sigma \mp \rho_0 a(\Sigma, f, T) d\tau_1 \pm b(\Sigma, f, T, \alpha_n) dX_1 = 0$$

- dla $X_1 = \text{const}$:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} de &= [\bar{E}_0 \exp(-f) + \Sigma]^{-1} [d\Sigma + \Sigma \{ \langle \dot{\Phi}(\Sigma, \alpha_n, T) \rangle dt \} \bar{\alpha} dT \bar{E}_0, \\ df &= de + \{ \langle \dot{\Phi}(\Sigma, \alpha_n, T) \rangle dt \}, \\ \rho_0 c_\epsilon dT &= \exp(f) \cdot 0.9 \Sigma \{ \langle \dot{\Phi}(\Sigma, \alpha_n, T) \rangle dt \} \bar{E}_0 \bar{\alpha} T de, \end{aligned}$$

przy czym:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} b(\Sigma, f, T, \alpha_n) &= \{ \langle \dot{\Phi}(\Sigma, \alpha_n, T) \rangle \} \left[1 + \frac{1}{\rho_0 c_\epsilon} \bar{\alpha}^2 \bar{E}_0 T + \right. \\ &+ \Sigma \exp(f) [2 \bar{E}_0^{-1} + 0.9 \frac{\bar{\alpha}^2}{\rho_0 c_\epsilon^2}] \left. \right] [a(\Sigma, f, T) \bar{E}_0^{-1} \exp(f)] \end{aligned}$$

Można łatwo przekonać się, że dla małych odkształceń otrzymamy związki na charakterystykach o postaci podanej w pracy [7].

W przypadku fal silnych nieciągłości na ich frontach powinny być spełnione następujące warunki ciągłości dynamicznej i kinematycznej [6]:

$$\begin{aligned} [\Sigma] &= \bar{\tau} \xi \cdot a(\Sigma, f, T) [\psi_1] \\ (4.6) \quad [\psi_1] &= \bar{\tau} a(\Sigma, f, T) [\exp(f)] \end{aligned}$$

Rozwiązania postawionego problemu początkowo-brzegowego będziemy poszukiwali na drodze numerycznej. Ze względu na to, że prędkość propagacji fal jest funkcją naprężenia, odkształcenia oraz temperatury nie udaje się scałkować w postaci zamkniętej nawet na frontach fal silnych nieciągłości.

Zatem na czołach fal silnych nieciągłości będziemy poszukiwali metodą różnic skończonych. W obszarach odkształceń lepkoplastycznych rozwiązanie zostało skonstruowane w oparciu o metodę siatek charakterystyk. W obszarach odkształceń sprężystych /lub w obszarach odciążenia/ można znaleźć rozwiązania analityczne - por. np. [6].

W celu pełnego rozwiązania postawionego zadania początkowo-brzegowego należałoby uwzględnić również zmienność stałych fizycznych materiału z temperaturą. Zmianom temperatury ciała towarzyszą zmiany stałych sprężystości, granicy sprężystości, wytrzymałości na zerwanie, współczynnika lepkości itp.

W metalach zaobserwowano, że ze wzrostem temperatury nieznacznie maleją współczynniki sprężystości. Na przykład w stali moduł sprężystości maleje średnio o 3,5% przy wzroście temperatury o 100°C /w zakresie temperatur od 0 do 800°C/ - por. [11]. Zmiany te są istotne. Jak wykazują liczne badania granica sprężystości jest bardzo wrażliwa nie tylko na zmianę prędkości deformacji lecz również i na zmiany temperatury, zwłaszcza w zakresie niskich temperatur. W pracy [8] autorzy dla przypadku równań konstytutywnych lepkoplastyczności dla małych deformacji i jednoosiowego stanu naprężenia/ wykazali, że uzależniając w proponowanych równaniach zmianę granicy sprężystości oraz współczynnik lepkości z temperaturą otrzymuje się najlepszą zgodność z wynikami doświadczalnymi.

Z badań doświadczalnych dla aluminium przeprowadzonych przez J.L. CHIDDISTERA i L.E. MALVERNA [1] wynika, że granica sprężystości dwukrotnie maleje w zakresie temperatur 0° - 500°C /przy ustalonej prędkości odkształcenia $\approx 500 \text{ s}^{-1}$ /. Również

istotną sprawą w przypadku zagadnień falowych, gdy mamy do czynienia z odbiciami oraz nakładaniem się fal /gdy występują zmiany ściskanie-rozciąganie/, jest uwzględnienie efektu Bauchingera. Granica sprężystości w licznych przypadkach jest bardzo wrażliwa na zmianę znaku deformacji.

Celem pracy jest rozwiązanie postawionego termomechanicznego problemu początkowo-brzegowego dla skończonych deformacji oraz jednoczesnego porównania otrzymanych wyników z wynikami, które uzyskano w pracy [7] dla małych odkształceń. Ponieważ obliczenia przeprowadzone w [7] nie uwzględniały zmienności stałych fizycznych z temperaturą, w przykładzie numerycznym przyjmujemy też ich niezależność, chociaż należałoby je uzmiennić aby otrzymać rozwiązanie w pełni poprawne. Wpływ zmienności stałych fizycznych w funkcji temperatury na rozwiązanie zagadnienia zostanie zbadany oddzielnie.

5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Podobnie jak w pracy [6] przyjmujemy liniową zależność dla funkcji Φ występującej we wzorze $(3,11)_2$ w postaci:

$$(5.1) \quad \Phi = \eta_1(T_0) (\bar{\Sigma} - \alpha_1) ,$$

przy czym obecnie $\bar{\Sigma} = \Sigma E_0^{-1} \alpha_1^{-1}$.

Równanie ewolucji parametrów α_1 przyjmujemy następująco:

$$(5.2) \quad \dot{\alpha}_1 = \eta_2(T_0) (\bar{\Sigma} - \alpha_1) \alpha_1^{1-\nu}$$

gdzie $\eta_1(T_0) = 0.02$, $\eta_2(T_0) = 0.5335$, $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\nu \approx 4$ [7].

Przyjęto również identyczne dane jak w [6], mianowicie:

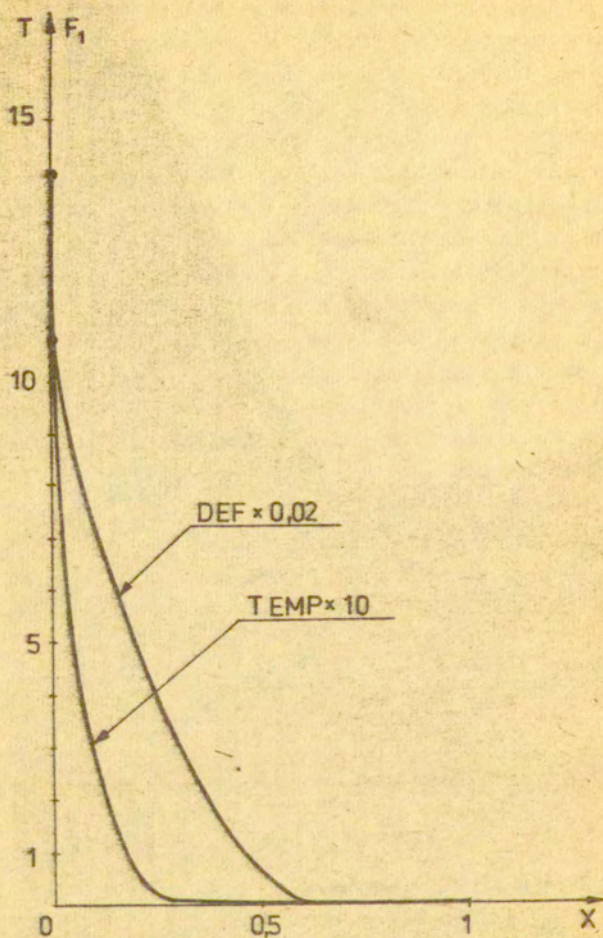
$E_0 = 7.06 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$, $\rho_0 = 2.7 \cdot 10^{+3} \text{ kgm}^3$, $c_\xi \approx 9 \cdot 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ deg}^{-1}$

$\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$. Pręt uderza w przegrodę z prędkością $V_0 = 20$

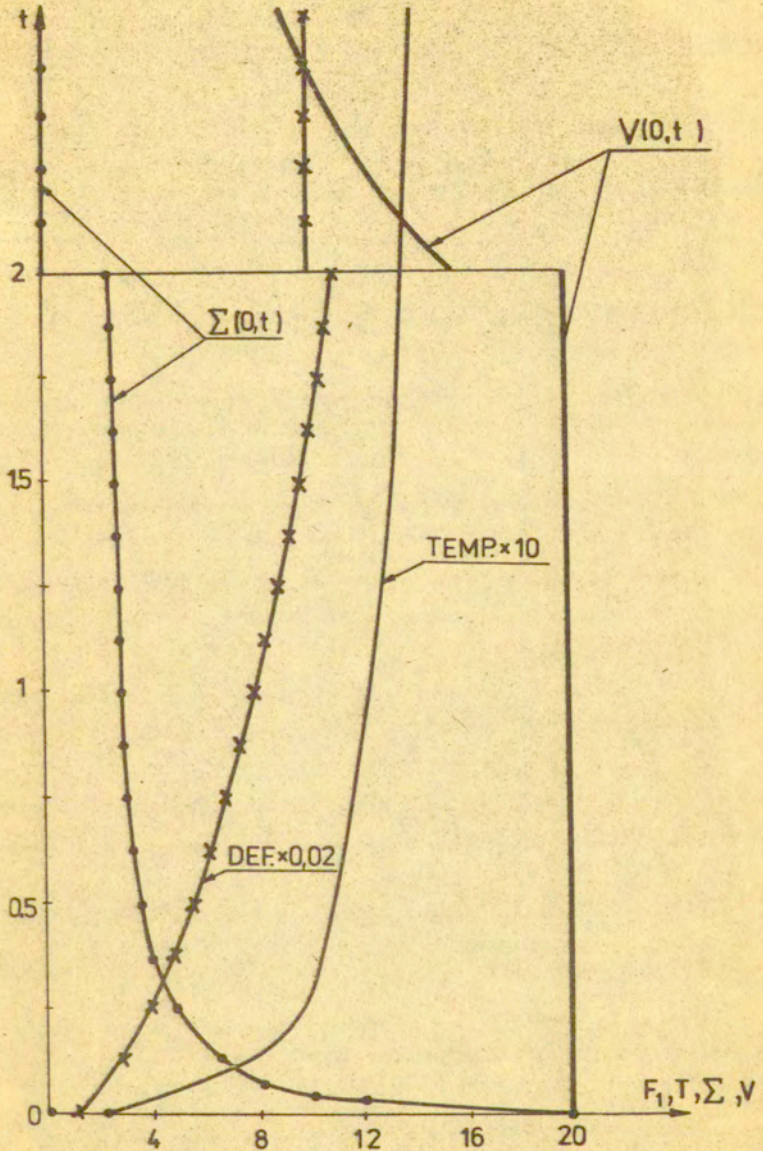
co odpowiada rzeczywistej prędkości uderzenia $v_0 = \alpha_0 \alpha_0 V_0 \approx 52 \text{ ms}^{-1}$.

Rozwiązanie numeryczne metodą różnic skończonych rozpiętych na siatkach charakterystyk nie nastarcza większych trudności.

Na rys. 3 przedstawiono zasadnicze wyniki obliczeń. Podano dla końca pręta uderzającego w przegrodę zmianę w czasie naprężenia, odkształcenia, temperatury oraz prędkości masowej. W chwili $t \approx 2L_0/c_0$ następuje oderwanie się pręta od przegrody. W przekroju tym ($X=0$) odkształcenie oraz temperatura osiągają największe wartości - por. rys. 4. Porównując otrzymane rezultaty z teorii skończonych deformacji z wynikami dla teorii małych odkształceń [7] można zauważyć, że różnice w naprężeniach i odkształceniach są minimalne. Natomiast otrzymuje się znaczne różnice dla pola temperatury. W niniejszym zadaniu przyrost temperatury w przekroju $X=0$ jest rzędu 140°C , gdy tymczasem dla teorii małych odkształceń otrzymano $\Delta T \approx 20^\circ\text{C}$. Otrzymane w niniejszej pracy wyniki są bliższe wyników doświadczalnych - por. [5]. Uwzględnienie zmian z temperaturą stałych fizycznych materiału powinno przybliżyć jeszcze bardziej rozwiązania do wyników doświadczalnych.



Rys. 3. Wykresy zmian naprężenia Σ , odkształcenia f , temperatury T i prędkości masowej V na brzegu pręta $X=0$ w funkcji czasu. Czas t^* - moment w którym pręt traci kontakt z przegrodą.



Rys. 4. Zmiana odkształcenia f oraz przyrostu temperatury wzdłuż długości pręta dla czasu $t \approx 1,5 t^*$.

LITERATURA

1. J.L. CHIDDISTER, L.E. HALVERN, Compression impact testing of aluminium at elevated temperature, *Exp. Mech.*, 3, 1963 pp. 81-90.
2. Y. D'ESCATHA, Problèmes dynamiques en viscoplasticité, Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie française, Paris, 1973, pp. 129-162.
3. B. HALPHEN, Sur le champ des vitesses en thermoplasticité finie, *Int. J. Solids Structures*, 11, 1975, pp.947-960.
4. J. MANDEL, Plasticité classique et viscoplasticité, Publications du CISM, Udine, Italy, 1971.
5. H.J. Mc QUEEN, J.J. JONAS, Hot workability testing techniques, w Książce : Metal Forming: Interrelation between Theory and Practice, Ed. A.L. HOFFMANN, New York 1965.
6. W.K. NOWACKI, Stress waves in non-elastic Solids, Pergamon Press, Oxford 1978.
7. W.K. NOWACKI, J. ZARKA, Sur le champ des températures obtenues en thermoélastoviscoplasticité, *Arch. of Mechanics*, 4, 26, 1974 pp. 701-715.
8. P. PERZYNA, T. WIERZBICKI, On temperature dependent and strain-rate sensitive plastic materials, *Bull. Acad. Sci.*, Série Sci. Tech., 4, 12, 1964.
9. K. PODOLAK, B. RANIECKI, A note on the influence of energy dissipation on the propagation of elastic-plastic waves, *Archives of Mechanics*, 4, 28, 1976.
10. J. ZARKA, Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations, *J. Méc.* 2, 12, 1973.
11. J. ZARKA, J. CASIER, J.J. ENGEL, Influence de la température sur le comportement mécanique des aciers, *Industrie minérale, Rhéologie*, 3, 4, 1977.