JULIAN FĄFARA.

Historyczny zarys
MATEMATYKI U STAROŻYTNYCH.

W TARNOPOLU.

Przedruk z programu szkolnego. Drukiem Józefa Pawłowskiego.

1884.

Już otaczająca przyroda podawała człowiekowi pierwsze pojęcia o ilościach. Powracające wedle niezmiennych praw słońce, zmiany pór roku, zmiany księżyca i inne zjawiska pojęcia te wywołać musiały. Ale i stosunki codziennego, choćby najpierwotniejszego życia towarzyskiego narzucały je niejako. Pasterz obliczał swą trzodę, rolnik, ukochawszy uprawianą przez się ziemię, chciał ją widzieć zabezpieczoną od grabieży sąsiada, więc ją wymierzał, najprostsze stosunki handlowe wymagały liczenia.

Mówić więc o tym lub owym kraju jako o ojczyźnie, kolebce wiedzy matematycznéj w jéj pierwocinach nie można; ojczyzną jéj step, na którym dziki nomada wypasał swe trzody, jałowy ugor, uprawiany potem więcéj cywilizowanego rolnika.

Daremnie Grecy Palamedesa uczynili wynalazcą sztuki liczenia. Już Platon pyta: Jakto czy może Agamemnon bez Palamedesa nie wiedział ile ma nóg?

Najdziksze pokolenia Ameryki i Afryki mają pojęcia pewne o liczbie, pokolenia, które dopiero w najnowszych czasach z cywilizacyą naszą się starły[1]).

Matymatykę więc najelementarniejszą, że ją tak nazwę naturalną znajdziemy u wszystkich ludów. Ogranicza się ona na najprostsze liczenie, mierzenie, i najprostszą konstrukcyą. Pojęcia prostéj i krzywéj linii, płaszczyzn, pojedyńczych figur a nawet ciał, daléj pojęcie jednostki lub wielości odbiera dziki mieszkaniec Patagonii tak bezpośrednio przez świat zmysłowy, jak i cywilizowany Europejczyk; a nawet stopień jasności tych pojęć nie powinienby przedstawiać wielkich różnic.

Ale od tych przyrodzonych pojęć do dzisiejszéj matematyki, téj wspaniałéj budowy, podziwianéj dla swéj loicznéj czystości linii, téj miłującéj matki podpierającéj chwiejne kroki innych umiejętności; to przestrzeń niezmierna.

Na przebycie jéj potrzebowała ludzkość tysięcy lat. Wszystkie ludy gromadziły materyał na tę budowę a stopień i kierunek rozwoju téj wiedzy u różnych ludów był różny. Jak wszędzie i tu potrzeba było matką wynalazków.

Egipcyanin budujący swe piramidy, kopiący kanały, stawiający obeliski i sfingi, zapewne szczególniéj ukochał geometryą; czczący swe bóstwo, słoń-

1) Humbold: Uiber die, bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen.

ce, Chaldejczyk był pierwszym astronomem, kupczący Fenicyanin uprawiał arytmetykę.

Rzeczywisty rozwój arytmetyki poczyna się utworzeniem układu liczbowego. Każdy układ ma tylko na wyrażenie pewnego szeregu liczb osobne wyrazy, a te łączone ze sobą w najrozmaitszy sposób dozwalają w mowie wyrazić wszelką liczbę. Ażeby zaś zatrzymać liczbę liczonych jednostek uwidoczniano je, podobnie jak to czynią i dzisiaj dzieci na palcach rąk. Przyszedłszy do 10 nie można było przez dorzucanie nowych jednostek dalej postąpić, przebiegano więc znowu ten sam szereg tworząc jednostki rzędu wyższego. Stąd nie powinna wcale dziwić ta okoliczność, że największa część narodów wytworzyła w liczeniu system dziesiątkowy i wcale nie można téj okoliczności użyć na dowód twierdzenia, że wiedza matematyczna w pierwszych już swoich zawiązkach była zdobyczą naukową pewnego tylko narodu i stąd dopiero rozeszła się pomiędzy inne.

System dziesiętny sama przyroda podała człowiekowi i niezależnie od siebie wprowadziły go rozmaite ludy w swoje liczenie. Ale walka o własność umysłową jest zaiste tak dawną jak walka o byt, nie dziwmyż się, że pojedyńcze ludy szczyciły się, jakoby one wykołysały niemowlę matematyczne, otaczając kolebkę jego poetycznymi mytami podobnie jak i swój początek.

Obok dziesiętnego układu znachodzimy jednak i inne. Niektóre ludy Ameryki i Afryki stanęły już przy pięciu palcach jednéj ręki, tworząc układ piątkowy. Inne utworzyły układ dwudziestkowy używając przy liczeniu palców u nóg i rąk. W języku niektórych plemion amerykańskich wyraz ręka oznacza pięć, dwie ręce dziesięć, ręce i nogi albo człowiek dwadzieścia. Dwudziestkowego układu używały także ludy keltyckie a francuskie quatre — vingt; zdaje się być pozostałością tego układu. Grecy i Rzymianie w mowie używali układu dziesiątkowego, Chińczycy nawet dwóch układów, bo dwójkowego i dwunastkowego.

Z razu nie odłączano liczby od liczonego przedmiotu, a w pewnych razach zastępowano je kamyczkami. Wyrazy greckie *ψηφίζειν* od *ψῆψος*, łaciński calculare od calculus, usprawiedliwiają to twierdzenie. Dla większéj dogodności nawlekano gałki takie na pręty, a na pręcie było tyle gałek, ile ich wskazywała zasada układu. Gałki na pierwszym pręcie oznaczały jednostki, na drugim dziesiątki, daléj setki i t, d. Tak powstał używany przez Rzymian abacus, przyrząd ułatwiający liczenie i dziś na wschodzie w użyciu.

Wcześnie już musiano uczuć potrzebę graficznego przedstawiania liczb by tym sposobem przyjść w pomoc pamięci. Wyciąć w korze drzewa lub wyryć w kamieniu tyle krések, ile jednostek zapamiętać miano, było przecież o wiele łatwiéj, aniżeli znakami graficznymi przedstawić artykułowane głosy mowy ludzkiéj. Czyż inaczéj i dziś znaczy wieśniak liczbę, którą chce zapamiętać? Zdawałoby się, że skoro w mowie tak przeważnie używano układu dziesiątkowego, znajdziemy i w graficznym przedstawieniu liczby tenże układ ściśle zachowany. Rzecz się ma tu inaczéj. I Grecy, a szczególniéj Rzymianie tak konsekwentnie przestrzegający układu dziesiętnego w mowie, odstępują od niego w pisaniu liczb. Pokrewieństwa, jakie zachodzi n. p. między liczbami 5, 50 i 500 tak widocznego w mowie, ani grecki ani rzymski sposób pisania liczb nie uwidocznia. W ogóle wpływ języka na pisanie liczb był nieznaczny, skoro Rzymianie liczyli undeviginti, undetriginta a nie pisali IXX lub IXXX lecz XIX i XXIX.

Grecy alfabet swój otrzymali od Fenicyan i używali go podobnie jak ludy semickie do pisania liczb. Z czasem jednak zatracił alfabet grecki trzy litery alfabetu semickiego jako nieodpowiedne naturze języka greckiego. Literami tymi były vau (vàv), litera szósta alfabetu semickiego, zade ośmnasta i koph dziewiętnasta. Pięć liter pierwszych odpowiada pierwszym pięciu jednostkom tak, że *α* znaczy 1.; *ε* = 5. następna szósta litera ζ, znaczy już 7. W semickim 6, oznaczała szósta litera Vau, której w alfabecie greckim już nie było, utworzyli więc Grecy osobny znak na sześć ϛ a chociaż kształtem zupełnie on różny od semickiéj wypuszczonej litery nazwiskiem przypominał ją, Grecy zwali go *ἐπίσημον βαῦ*. Pierwszych ośm liter wraz z osobnym znakiem na 6 przedstawiało pierwszych 9 jednostek, następnych ośm przedstawiało dziesiątki tak, że *ι* znaczy 10., *κ* — 20. a *π* — 80. W semickiem ośmnasta litera zade oznaczała 90. Grecy ją wyrzucili ze swego alfabetu a na oznaczenie 90 okazało się potrzebném nowe *ἐπίσημον* zwane *κόππα*, znak jego ϟ. Dotąd oznaczenie liczb, semickie i greckie zupełnie zgodne, od 90 już się różnią. Koph semickie znaczy 100 a greckie *κόππα* zastępuje wypuszczoną literę semicką zade, i znaczy 90. Od *ϱ*, które znaczy 100 dochodzi alfabet grecki aż do oznaczenia 800 przez *ω*. Na oznaczenie 900 brakło litery, powstał więc nowy znak ϡ zwany *ἐπίσημον σανπῖ*. Litery z kréskami u dołu jak ͵*α*, ͵*β*, ͵*γ*, służyły do oznaczenia tysięcy aż do ͵*ϑ* = 9000. Tym sposobem pisać można było tylko czterocyfrowe liczby. Odpowiednio do tego dzielili Grecy czytaną liczbę na klasy, po cztéry cyfry, a nie jak my po trzy, i nazywali najniższą klasę *μονάδες*, następną *μυϱιάδες*, trzecią *μύϱιαι μυϱιάδες*, czwartą *μυϱιάκις μύϱιαι μυϱιάδες*. W pismie oznaczali drugą klasę słowem *Μυϱιὰς* lub skróceniem *M*. Przed ten znak kładziono jako czynnik liczbę myriad, lub pisano ją nad znakiem. Później wypuszczano znak *M* a kropka dzieliła klasę monad od myriad. Pappus liczbę 18000 pisze *μυϱιάδες* $\bar{\alpha}$ *μονάδες* $\bar{\eta}$. Wypisanych dla przykładu kilka liczb z Diofantesa, lepiej tę rzecz objaśni *ϱν.͵ζϡπδ* = 1507984; *κϛ.͵βϱμδ* = 262144; *͵αϡϟα.͵εσιδ* = 19915214.

Ułamki pierwotne, to jest te, które w liczniku jednostkę mają, pisali Grecy dodając nad mianownik kréskę podobną do akcentu akutus, *γ*′ znaczyło $^1/_3$; *δ*′ = $^1/_4$; *ξδ*′ = $^1/_{64}$. $^1/_2$ miało osobny znak, przypominający łacińskie k. Inne ułamki oznaczano w ten sposób, że wypisywano mianownik nad licznikiem n. p. $\frac{\iota\alpha}{\vartheta}$ = $^9/_{11}$. Dla odróżnienia liczb w tekście prowadzono nad nimi poziomą kréskę. Grecy, od Pytagorasa począwszy dzielili arytmetykę na praktyczną *λογιστική* i umiejętną *ἀϱιθμητική*. Przypatrzmy się poznawszy sposób graficznego przedstawienia liczb u Greków, jak oni wykonywali w praktyce działania arytmetyczne. Eutokios żyjący w połowie 6go wieku po Chr w komentarzu do II. księgi Archimedesa o kuli i walcu, przeprowadza kilka przykładów mnożenia, dodawania i odejmowania.

Liczba $\overline{\sigma\xi\varepsilon}$ = 265 ma być do kwadratu podniesioną. Eutokios zaczyna mnożenie odwrotnie, aniżeli my to czynić zwykli, od najwyższych cyfr i liczy 200 razy 200 daje 4 myriady $\overset{\delta}{M}$; 200 razy 60 jednę myriadę i 2000 = $\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta$; 200 razy 5 daje 1000; — ${}_{,}\alpha$. Te iloczyny tworzą pierwszy szereg. Dalej 60 razy 200 daje jednę myriadę i 2000 — $\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta$; 60 razy 60 daje 3000, i 600. — ${}_{,}\gamma\chi$; 60 razy 5 daje 300 — τ; to drugi szereg. W końcu 5 razy 200 = 1000. — ${}_{,}\alpha$; 5 razy 60 = 300. — τ.; a 5 razy 5 da 25 — $\varkappa\varepsilon$. tak otrzymujemy trzeci szereg. Z dodawania wychodzi suma 7 myriad i 225 monad. $\overset{\zeta}{M}\sigma\varkappa\varepsilon$.

Rachunek ułożony w szema wygląda.

$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265		
$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265		
$\overset{\delta}{M}\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta{}_{,}\alpha$	40000	12000	1000
$\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta{}_{,}\gamma\chi\tau$	12000	3.600	300
${}_{,}\alpha\tau\varkappa\varepsilon$	1000	300	25
$\overset{\zeta}{M}\sigma\varkappa\varepsilon$	70225.		

Arabowie pierwotnie używali także liter do pisania liczb, a sposób ich tém różnił się od greckiego, że na oznaczenie 1000 dostarczał ich alfabet jeszcze odrębnego znaku.

Na sposób grecki pisze także liczby i język starosłowiański. System rzymski jako znany pomijam, również i inne, jak system podany przez gramatyka Herodiana[1]) podobny do rzymskiego, w końcu system o którym mówi Heilbronner w swéj historyi matematyki; jako systemy, które nigdy nie przeszły w praktyczne użycie.

Obydwom systemom tak greckiemu jak rzymskiemu za podstawę służy układ dziesiątkowy. W rzymski wchodzi nadto układ piątkowy. Nasz układ, który od Indów przeszedł do Arabów, a od tych do Europy, charakteryzują dwie cechy.

1. dziewięć znaków dla dziewięciu pierwszych liczb ma podwójne znaczenie. Pierwsze bezwzględne, drugie zależne od miejsca, na którym cyfra stoi. Każda cyfra przedstawia swój iloczyn z pewną potęgą z 10.
2. System ten, ażeby w każdym wypadku dokładnie oznaczyć wartość miejscową cyfry potrzebuje jeszcze jednego znaku na oznaczenie, że téj lub owéj potęgi z 10-w liczbie nie ma.

1) Stefani thesaurus linguae Graecae.

Systemy używane w starożytności znaku takiego nie potrzebywały, wypływało to z ich natury. Ptolomeusz pierwszy wprowadził znak 0 skrócone *οὐδεν*.

Geometryi uczyli się Grecy od Egipcyan. Samo rozpatrzenie się w budowlach egipskich przekonywa, że Egipcyanie bez pewnych wiadomości z geometryi nie potrafiliby byli wznieść takowych. Te ogromem zadziwiające piramidy, świątynie i pałace, na wiele mil ciągnące się kanały z potrzebnymi śluzami, dowodnie wskazują, że Egipcyanie rozporządzali nie małym zasobem wiadomości z geometryi.

Niektórzy uczeni[1]), opierając się na podanych przez Herodota, Diodora i wielu innych wiadomościach o podróżach naukowych Greków do Egiptu, przyznają Egipcyanom bardzo wysoki stopień wykształcenia w geometryi, i twierdzą, że cała wiedza Talesa, Pytagorasa a nawet Platona pochodziła z Egiptu.

Nieco światła na tę sprawę rzuca papyrus nabyty przez brytyjskie Muzeum w Londynie po Mr. Rhind. Jest to dość obszerny i praktyczny podręcznik geometryczny. Twierdzeń właściwych tam nie ma, wszystko ujęte w formę zadań rozwiązanych rachunkiem w liczbach. Tak n. p. wymierzyć prostokąt, jeżeli jeden bok 2, a drugi 10 jednostek miary wynosi. Znaleźć powierzchnię koła, którego promień ma 6 jednostek miary. Wytyczyć trójkąt prostokątny, którego przyprostokątnie 10 i 4 jednostek wynoszą, trapez, którego równoległe boki 6 i 4 jednostek mają, a każdy z nierównoległych 20. Uczy dalej podziału figur, w końcu oblicza objętość całych i ściętych piramid. Obliczenia te nie polegają na ścisłych teoretycznych poszukiwaniach, zadowalali się Egipcyanie przybliżeniem, zwłaszcza przy obliczeniu powierzchni koła i objętości piramid. Znali więc naukę o kątach i liniach równoległych, umieli nakreślić trójkąt, równoległobok i trapez z pojedyńczych części składowych, tudzież obliczyć powierzchnię tych figur. Znali również najelementarniejsze twierdzenia o kole i wpisanych w koło wielobokach. Ze stereometryi znany im był warunek prostopadłości prostéj do płaszczyzny, teorya równoległości linii i płaszczyzn w przestrzeni, z brył poznali praktycznie równoległościany, czworoboczne piramidy, proste stożki i walce, kulę i umiarowe bryły, z wyjątkiem dwunastościanu. Wniknęli głębiéj we własności kuli spowodowani ku temu potrzebami astronomii.

Wiek papyrusu tego oznacza Birch[2]) na 1100—1000 lat przed Chr. jest on przepisany z dawniejszego, jak dowodzi umieszczony na nim dopisek pochodzącego z 3400—3200 r. przed Chr.

Zadziwia, że tak wczesną cywilizacyą odznaczający się naród, nie rozwinął tych nabytków, że wkrótce Grecy, uczniowie Egipcyan, mistrzów swych prześcignęli. Przyczyną tego zjawiska była egipska kastowość. Tylko kasta kapłanów zajmowała się w Egipcie umiejętnościami, a matematyka w rychle stała się integralną częścią ich ksiąg świętych. Skamieniała więc, bo nie ła-

1) Röth: Geschichte unserer abenolaudischer Philosophie.

2) Lepsius Zeitschrift für Aegyptische Sprache und Alterthumskunde Jahrg. 1868. pag. 108.

two mogły nowe odkrycia, często dawniejszym przeciwne, znaleść pizyjęcie gościnne w tych księgach.

Prastarą cywilizacyą egipską przygłusza młoda swobodnie się rozwijająca grecka a za Ptolomeuszów sam Egipt staje się ogniskiem kultury heleńskiej.

Te pierwsze zdobycze kapłanów egipskich w geometryi przenieśli uczeni greccy do swéj ojczyzny i tutaj, pod pogodném niebem Helady, rozwinęły się one w wiedzę systematyczną, prawdziwą umiejętność.

Przechodzimy więc do Greków, aby się już do końca pracy naszéj z nimi więcéj nie rozstać. Szczęśliwy zaiste naród, nieprześcigniony na polu sztuki, we wszystkich prawie gałęziach wiedzy niepoślednie poczynił zdobycze.

Pomiędzy sławniejszymi matematykami, przy których w dalszym ciągu zatrzymać się nam przyjdzie, nie znajdziemy żadnego nazwiska rzymskiego. Wojowniczy ten lud tylko tymi częściami matematyki się zajmował, które w praktyce znachodziły zastósowanie jak sztuka miernicza. Pięknie wyraża Cicero tę różnicę między oboma narodami mówiąc: Ergo in Graecia musici floruerunt, discebantque id omnes, nec, qui nesciebat satis excultus doctrina putabatur; in summo apud illos honore geometria fuit. Itaque nihil mathematicis illustrius. At nos metiendi rationandique utilitate, hujus artis terminavimus modum.[1])

Najwiarygodniejszém źródłem, z którego czerpie historya matematyki swe wiadomości dotyczące czasu, aż do Ptolomeuszów jest Proklosa Comment. in Euclid. i Simplikiosa Comment in octo Aristotelis physicae auscultationis libros. Obaj w dziełach swych podają wiele historycznych dat, a obaj czerpali z zaginionéj historyi matematyki i astronomii napisanej przez Eudemosa, ucznia Arystotelesa.

Wedle zgodnego świadectwa starożytnych pisarzy, Tales pierwszy uczył matematyki w Grecyi. Proklos o nim pisze: Tales, który do Egiptu udał się, pierwszy przyniósł tę umiejętność do Helady; i wiele sam wynalazł, wielu rzeczy początki przekazał swym następcom, jedne uogólnił, inne uczynił łatwiejszymi do zmysłowego pojęcia[2]). Pochodził on z fenickiej [3]) rodziny w Milecie osiadłéj. Żył między 640—548 przed Chr. Pierwszą połowę życia poświęcił handlowi i podróżom. Podróże handlowe zaprowadziły go do Egiptu, gdzie tak się rozmiłował w naukach, że wszedłszy w osobiste stosunki z kapłanami egipskimi porzucił handel a poświęciwszy się umiejętności, wiele lat u nich na nauce strawił.

Już w podeszłym wieku wrócił do miasta rodzinnego między 595 a 590 rokiem przed Chr. Z razu nie zyskał rozgłosu w ojczyźnie a nawet nie mogli pojąć jego współziomkowie, jak można poświęcać umiejętności, która nie przynosi żadnych korzyści materyalnych tyle czasu. Dopiero gdy przepowiedział

1) M. Tullii Ciceronis Tusculanarum Quaestionum Lib. I. De mort. cont. cap. 2.
2) Proc. com p. 19.
3) Herodot. I. 170.

na rok 585 zaćmienie słońca, które rzeczywiście 28. maja tegoż roku nastąpiło, otoczyła go sława i policzono go między siedmiu ówczesnych mędrców.[1])

Odtąd miał Tales i wpływ na polityczne stosunki swéj ojczyzny, lecz wkrótce powraca do swoich prac naukowych, oddając się szczególnie astronomii. O nim to opowiada Platon [2]), że przyglądając się niebu wpadł do rowu. Towarzysząca mu niewolnica rzekła: Co na niebie się dzieje, chcesz zbadać, a nawet nie widzisz co pod nogami twymi leży.

Doczekał Tales bardzo podeszłego wieku i przeżył upadek państwa lydijskiego.

Proklos w komentarzu do Euklidesa podaje w krótkości twierdzenia, które miał odkryć Tales. I tak udowodnił, że kąty wierzchołkiem przeciwległe, daléj kąty przypodstawne w trójkącie równoramiennym są równe. Wykazał, że jeden bok i dwa przyległe temuż kąty wyznaczają dokładnie trójkąt i użył tego twierdzenia do oznaczenia oddalenia zbliżających się okrętów do portu, dalej udowodnił, że średnica połowi koło. Miał on pierwszy wpisać w koło trójkąt prostokątny i wykazać, że wszystkie kąty w półkolu są proste.

Wszystkie te twierdzenia są tak elementarne, że musieli je już Egipcyanie znać. Że w Grecyi uważano Talesa za wynalazcę dziwić nie może, gdy się zważy, że Tales pierwszy między Grekami uczył matematyki.

Oprócz wyżéj wymienionych twierdzeń znał zapewne Tales najważniejsze o równoległych liniach, o trójkątach równobocznych i równoramiennych, o równoległobokach; lecz nie pomylimy się twierdząc, że wszystkiego tego nauczył się Tales w Egipcie. Słowa Proklosa *καί πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρε* niczego nie dowodzą, bo nikt w Grecyi nie mógł oddzielić własnych zdobyczy Talesa od tego co z Egiptu przyniósł, a z tego co o Egipcyanach wiemy, jasnem, że bez wymienionych przez Proklosa jako własność Talesa twierdzeń obejść się oni nie mogli. Całą więc zasługą Talesa, że pierwszy przesadził geometryą na grunt grecki, że twierdzenia; których w niemowlęctwie geometrya miała nieskończenie wiele, uogolniać począł, że w końcu w dowodzenie więcej precyzyi wprowadził. Prostym n. p. jest dowód twierdzenia o kątach przypodstawnych w trójkącie równoramiennym. Tales obróciwszy ten sam trójkąt kładzie go w tém nowém położeniu na trójkąt w położeniu pierwszém i wykazuje, że w obu położeniach dokładnie się kryje.

Miał także Tales wymierzyć wysokość piramid za pomocą cieniu. Mierzył on cień w chwili, kiedy długość jego równa się wysokości przedmiotu, który go rzuca. Sposób ten mierzenia wysokości wymaga, ażeby można w chwili, kiedy wysokość słońca nad horyzontem wynosi 45°, wymierzyć całą długość cieniu, czego oczywiście przy piramidach, mających szeroką podstawę uczynić nie podobna. Tales mógł metodę tę stosować do obelisków. Wymiaru swego nie mógł oprzeć na prawie, że w każdéj porze dnia długość cieniu do wysokości przedmiotu, który go rzuca, jest wprost proporcyonalną, bo o proporcyach Tales nic nie wiedział.

1) Herodot I. c. 74.
2) Theaitetas c. 24.

Diogenes Laertios wspomina o dziełach Talesa traktujących o astronomii. Miał je Tales spisać wedle ówczesnego zwyczaju w 200 wierszach.

Szkoła jońska, którą tworzą uczniowie Talesa, nie przyczyniła się wcale do rozwoju matematyki, pozostawiając ją na tym stopniu, na jakim ją Tales postawił. Najsławniejsi uczniowie Talesa *Anaximandros*, *Anaximenes i Anaxagoras* zajmowali się przeważnie astronomią i spekulatywną filozofią. Ostatni z nich Anaxagoras uczeń Anaximenesa, żyjący między rokiem 500—428 przed Chr. najwięcéj uprawiał matematykę, pobudzony ku temu zapewne działaniem właśnie w tym czasie powstającéj szkoły italskiéj. Proklos, który tylko znakomitszych matematyków wylicza pisze o nim, że wiele w geometryi wynalazł [1]) również znajdujemy o nim i inną wzmiankę, wedle któréj, miał w więzieniu pisać o kwadraturze koła [2]). Współcześnie z Anaxagorasem żył *Oinopides* z Chios. Proklos powiada, że był nawet młodszym od niego. Miał on pierwszy podać sposób, jak z punktu danego do nieograniczonéj prostéj, wykreślić prostopadłą i kąt równy danemu. Jednakże twierdzenia te są tak prymitywne, że już za czasów Pytagorasa nie mogłyby były sławą okryć swego wynalascy.

Konstrukcye i zastósowania tychże do praktycznych celów, to główne zadania ówczesnych matematyków. Już Tales starał się o ścisłość i logiczność w dowodzeniu, o uogólnienie prawd matematycznych, zapewne i następcy jego w ślady jego wstępowali, nikt jednak nie pomyślał o tem, by zająć się własnościami ciał przestrzennych i wzajemnymi stosunkami tychże, nie szukając koniecznie użytku praktycznego, nikt, by wynalezione prawdy powiązać w systematyczną całość. W ogóle nie wspominają starożytni o żadném twierdzeniu donioślejszego znaczenia, któreby ze szkoły jońskiej pochodziło, a zdaje się, że nawet wymiarem powierzchni, co już Egipcyanom obcem nie było, mało, albo wcale się nie zajmowano w owych czasach, wszystkie bowiem twierdzenia odnoszą się wyłącznie do konstrukcyi i wymiaru linii.

Podeszłego już Talesa odwiedził w Milecie młodzian, który miał już wówczas uczonego sławę. Tales podzielił się z nim wiadomościami swymi i natchnął go myślą, by w Egipcie u kapłanów w Memfis i Tebach, szukał dalszego wykształcenia. Młodzieńcem tym był Pytagoras.

Pytagoras urodził się między rokiem 568 a 564 przed Chr. na wyspie Samos, ojciec jego był pochodzenia fenickiego.

Poszedł on za radą Talesa i odbył wiele podróży po Egipcie, Fenicyi, Arabii, Palestynie, Babilonii, Indyach i Persyi. O podróżach tych zachowali starożytni autorowie wiele bajecznych wieści, na uwagę jednakże zasługują świadectwa Cycerona i Pliniusza, którzy nietylko o podróży Pytagorasa do Egiptu, ale i do Persyi mówią. Że był w Egipcie, zdaje się być pewnym, a dowodzą tego urządzenia związku Pytagorejczyków, które wyraźne ślady wpływu Egiptu na sobie noszą, dowodzi i znakomita jego działalność na polu matematyki.

Na rodzinną wyspę powrócił Pytagoras dopiero około roku 513 przed Chr. i założył szkołę tamże. Gdy jednak uczniów brakło, udał się znowu

1) Proclus com. pag. 19.
2) Plutarchus de exilio 17.

w podróż po Heladzie. W trzy lata później widzimy go w Kroton, w południowej Italii. Tutaj udało mu się zebrać około siebie uczniów, tych w ścisły związek złączywszy nie tylko uczył — ale i nakłaniał, by się szlachetną podniosłością umysłu i obyczajnością odznaczali. Związek ten opierając się na kastowości egipskiéj miał przeważnie zasady arystokratyczne, a że właśnie wówczas powiał wiatr demokratyczny, przyszło więc do gwałtownego starcia. Pytagoras musiał uchodzić z Kroton do Tarentu, lecz z tych samych powodów wkrótce opuścił Tarent i schronił się do Metapontu, gdzie podczas nowego napadu na jego szkołę, poniósł śmierć w 90. roku życia, między 480 a 470 przed Chr.[1]).

Proklos mówi o nim: „Po tych matematykach zmienił Pytagoras zajęcie się tą gałęzią wiedzy w prawdziwą umiejętność, przyglądając się zasadom jéj z szerszego punktu widzenia i badając teoremata mniéj zmysłowo a więcéj umysłowo. On także wynalazł teoryą niewymierności i konstrukcyą kosmicznych (regularnych) ciał.[2])

A zatem Pytagoras pierwszy uwolnił matematykę od ustawicznego oglądania się na praktyczne cele — on ją pierwszy podniósł do rzędu prawdziwych umiejętności.

Chcąc zrozumieć szybki rozwój matematyki spowodowany przez Pytagorejczyków, potrzeba poznać główną zasadę ich filozofii. Otóż wedle téj filozofii wszystko, co pod zmysły podpadało, miało podwójny początek, który Pytagorejczycy słowami *τὸ πέρας* albo *τὸ πέραινον* i *τὸ ἄπειρον* oznaczali. Rzecz pod zmysły podpadająca, istotna zwała się *το πεπεράσμενον*, przez *πέραινον* ograniczona i oznaczona *ἄπειρον*. Nie uszło téż uwadze ich, że przedmioty rzeczywiste są w pewnéj zależności od siebie, i że ściśle oznaczony stosunek pomiędzy tymiż istnieje.

Pojęcia te schodzą się zupełnie z pojęciami ilości i stosunków wzajemnych tychże ilości, liczba zaś łączy obydwa te pojęcia w sobie — stąd liczby i stosunek tychże stały się podstawą systemu filozoficznego Pytagorasa, co dało początek do rozwoju arytmetyki. Zadziwia okoliczność, że do swych celów nie zastósowali Pytagorejczycy geometryi, która była wówczas i bardziej znaną i zupełnie tymże celom odpowiedzieć mogła, arytmetyka zaś dopiero pierwsze kroki stawiała. Może pociągała nowość, prawdopodobniej jednak spostrzeżono rychło, że arytmetyka, jako umiejętność oderwana, ma więcej wartości i obszerniejsze zastósowanie od geometryi przy spekulacyach filozoficznych. Nad ograniczonem *τὸ πέραινον* i nad nieograniczonem *τὸ ἄπειρον*, tymi dwoma pryncypiami wszech rzeczy postawili Pytagorejczycy bóstwo, jako najwyższą przyczynę i siłę, która wzajemny stosunek owych pryncypiów, oznacza i porządkuje. Filozofia ta wskróś mistyczna, stąd też i podział liczb na zupełne i niezupełne, na polygonalne i piramidalne, święta czwórka: $1+2+3+4=10$, na którą Pytagorejczycy przysięgali; jakkolwiek wzystko, to są rzeczy same w sobie błache, a może nawet ubliżające wielkim

1) Röth jak wyżej Bd. II. pag. 938 i następne.

2) Procl. com. pag. 19.

zasługom, jakie ta szkoła w rozwoju matematyki położyła; jednakże mimo to są one początkiem nowéj umiejętności zwanéj arytmetyką umiejętną.

Spostrzegli bowiem Pytagorejczycy, że wszelkie stosunki pomiędzy liczbami pozostają niezmienne, jakimkolwiekbądź zmianom liczone przedmioty ulegają, a w naturalném następstwie poczęto rozważać stosunki liczebne na liczbach oderwanych. Już wtedy zarysował się przedział między arytmetyką praktyczną, którą Grecy *λογιστική* zwali a umiejętną *ἀριθμητική*. Tę ostatnią wprowadzili Pytagorejczycy i pierwsze dali jej wykształcenie.

Krok w krok za rozwijającą się arytmetyką podążała i geometrya, a już tu widocznym potężny wpływ téjże na geometryą, wpływ, który ją później tak stanowczo miał przeobrazić. Pytagoras wprowadza proporcye i dzieli je na geometryczne, arytmetyczne i harmoniczne, stosuje je do geometryi i otrzymuje pojęcie podobieństwa figur. Z tem łączy się wynalezienie średniéj proporcyonalnéj do dwóch prostych i zamiana danego prostokąta w kwadrat o równéj powierzchni.

Pierwszy także wprowadził progresye prawdopodobnie arytmetyczne, które mu dostarczyły obfitego materyału do jego filozoficznych spekulacyi, z szeregu liczb nieparzystych otrzymał przez dodawanie, zaczynając zawsze od jednostki, szereg kwadratów. Z różnych szeregów dochodził w podobny sposób do liczb poligonalnych.

Prawdopodobnie z Egiptu przyniósł twierdzenie, że sześć trójkątów równobocznych cztéry kwadraty i trzy sześcioboki ułożone naokoło jednego punktu, wypełniają dokładnie płaszczyznę. Z twierdzenia tego wypływa, że suma kątów na około punktu wynosi 4R zaś przyległych 2R, a z tego znowu, że suma wewnętrznych kątów w trójkącie równą jest 2R. Znał zapewne już Tales to twierdzenie, a dowód tegoż twierdzenia objaśnia Eutokios we wstępie komentarza swego do Apolloniosa. Czytamy tu, że twierdzenia o sumie kątów dowodzili „starzy“ dla każdego kształtu trójkąta z osobna, najprzód dla równobocznego, następnie dla równoramiennego, w końcu dla nierównobocznego *πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ*. Późniejsi zaś udowodnili ogólne twierdzenie, że kąty w trójkącie każdym wynoszą 2 proste. [1]) Pytagorejczycy wedle Proklosa dowodzili jak następuje: W trójkącie $ΑΒΓ$ Fig. 1. prowadzimy przez $Α$ równoległą do $ΒΓ$, a zatem kąty naprzemianległe $ΔΑΒ = ΑΒΓ$ a $ΕΑΓ = ΑΓΒ$. Dodajmy kąt $ΒΑΓ$, wtedy kąty $ΔΑΒ$, $ΒΑΓ$, $ΓΑΕ$ albo $ΔΑΒ$ i $ΒΑΕ$ to jest dwa proste równają się trzem kątom trójkąta.

Któż nie zna twierdzenia o prostokątnym trójkącie, które nosi nazwisko Pytagorasa? Świadectwa autorów starożytnych zgodnie przypisują twierdzenie to Pytagorasowi. Proklos powiada: „Jeżeli słuchać mamy tych, którzy stare historye opowiadać chcą, teoremat ten należy Pytagoresowi przypisać — z powodu odkrycia miał on wołu ofiarować.“ [2])

Pod opowiadającym stare historye rozumieć tu należy Eudemosa, autora historyi matematyki, z któréj czerpał Proklos daty historyczne, pisząc swój

1) Apoll. conica. pag. 9.
2) Procl. com. pag. 110.

komentarz. Ów wół zabity sprzeciwia się wprawdzie zasadom Pytagorejczyków jednak i Plutarch każe ofiarować Pytagoresowi wołu, z powodu innego znowu twierdzenia.

W jaki sposób dowodził Pytagoras swego twierdzenia nie wiadomo, tyle pewna, że sposób ten zupełnie był różnym od Euklidesowego.[1]) Proklos bowiem mowi: Podziwiam wprawdzie i tych, którzy pierwsi prawdę problemu tego zbadali; wyżéj cenię jednak autora Elementów (στοιχεῖα Euklidesa) nie tylko dla tego, że teoremat ten najzwięzlejszym dowodem poparł, lecz także dla tego, że znajdujące się w IV. księdze ogólniejsze twierdzenie niezbitymi dowodami utwierdził.[2])

Z twierdzenia o trójkącie prostokątnym powstało prawo, wedle którego tworzą się trójkąty mające wymierny stosunek boków. Potrzeba wziąć jako liczbę wymiarową mniejszéj przyprostokątni, jakąkolwiek liczbę nieparzystą n. p. 3. Liczbę wymiarową przyprostokątni dłuższéj otrzymuje się podnosząc 3 do kwadratu — 9, odejmując 1 więc 8, i dzieląc przez 2, a zatem 4. Dodawszy do większéj przyprostokątni 1, otrzymujemy przeciwprostokątnię 5. Bezpośrednim wynikiem tych spekulacyi liczbowych i prawa o trójkącie prostokątnym, było odkrycie, że są linie, których stosunek wzajemny przez żadną liczbę nie da się wyrazić, że zatem są i liczby, których stosunku do jedności wyrazić nie można.

Odkrycie niewymiernych (incommensurabel) ilości i niewymiernych liczb (irrational) jest największą zasługą Pytagorasa, zastosowanie jednak nowego tego pojęcia do teoryi stosunków i proporcyi, zawdzięczamy uczniom Platona, chociaż już i Pytagorejczycy wykazywali, że stósunek zachodzący między bokiem a przekątnią w kwadracie jest niewymierny. Postawił i rozwiązał także Pytagoras następne zagadnienie: Do prostéj pod danym kątem przyłożyć *παραβάλλειν* równoległobok, któryby równym był danemu trójkątowi. Elementarne twierdzenia o kątach równoległych, trójkątach i równoległobokach, jakotéż i obliczenie powierzchni trójkątów, równoległoboków i trapezów znać musiał Pytagoras, skoro rozwiązał powyższe twierdzenie. Prawdopodobnie twierdzeń tych nauczył się Pytagoras w Egipcie, dowodzą tego zadania zawarte w wyżéj wspomnianym papyrusie Rhinda, bo i ich rozwiązanie opiera się na tych twierdzeniach. Pytagoras najprawdopodobniej, ściślej takowe udowodnił, rozwinął i uzupełnił. Inne zadanie, którego rozwiązanie polega na tem, by wykréślić do dwóch danych figur, trzecią któraby była równą jednéj a podobną do drugiej, przypisują także Pytagorasowi. Do rozwiązania zagadnienia tego, przedewszystkiem potrzebną była znajomość twierdzenia, że powierzchnie podobnych figur mają się do siebie jak kwadraty z odpowiednich boków.

Z liczbami polygonalnymi łączą się znowu umiarowe wieloboki i bryły. Te ostatnie służyły mistycyzmowi Pytagorejczyków jako symbole ówczesnych pierwiastków. Sześcian oznaczał ziemię, czworościan ogień, ośmiościan wyobrażał powietrze a dwudziestościan wodę. Niektóre z tych brył znane były

1) Elem. I. prop. 47 i 48.

2) Proclus com. pag. 110.

bezwatpienia Egipcyanom, a i architektura ich wskazuje, że znali czworościan, ośmiościan i sześcian. Skoro Egipcyanie wiedzieli, że sześć trójkątów równobocznych, cztéry kwadraty lub trzy sześcioboki zamykają płaszczyznę, próbowali składać trójkąty i czworoboki w kąty bryłowe, przyczem z trójkątów otrzymali trójścienne, czworościenne i pięciościenne kąty bryłowe, z kwadratu zaś tylko trójścienne. Tym sposobem odkryto twierdzenie, że kąty płaskie w bryłowym zawsze są mniejsze od 4R. a zarazem zapoznano się z umiarowymi wielobokami. Zdaje się, że dwudziestościan znano u Egipcyan, jednakże dwunastościanu nie znali, bo nie umieli w koło wpisać pięcioboku umiarowego. Wpisanie w koło umiarowego pięcioboku jest jedném z bardzo ważnych odkryć Pytagorasa, a jak wysoko odkycie to sam cenił, dowodzi okoliczność, że figury téj wraz z pięcioma przekątniami polecił uczniom swym używać, jako godła, po którym się poznawali. Było to tak zwane Pentalpha. Raz poznawszy pięciobok łatwo już było zbudować dwunastościan. Odkrycie to musiał Pytagoras w późnym wieku uczynić, wtedy, kiedy jego systemat filozoficzny zupełnie był wykończony, bo już w nim na dwunastościan nie było miejsca. Uczynił więc Pytagoras symbolem wszechświata dwunastościan, uważając go choć mylnie, za najbardziej do kuli zbliżony, bo przecież dwudziestościan więcéj do kuli się zbliża,

Oto czem się Pytagoras do rozwoju matematyki przyczynił. Własności konstruktywne trójkątów, równoległoboków i umiarowych wieloboków zupełnie rozwinął a zarazem uzyskał podstawy do poznania wymiarowych własności tychże figur przez obliczenia powierzchni, wprowadzenie proporcyi i podobieństwo figur. Naukę o kole traktował po macoszemu, w stereometryi szczególnie zajmował się kątami bryłowymi i umiarowymi bryłami. Wykreślenie tych brył i postawienie pojęcia o niewymierności to podstawy, które mu zapewniają imię wielkiego matematyka. Najważniejszą jednak zasługą jego, że uwolnił matematykę od ciągłego oglądania się na praktyczne cele, że ją wyzwolił z pęt codziennego życia, że ją podniósł do wyżyn samoistnéj umiejętności. Tym sposobem wyrobiła się czysto konstruktywna syntetyczna metoda, metoda po wszystkie czasy za najwłaściwszą w geometryi uznana.

Jakkolwiek znaczne były odkrycia Pytagorasa i uczniów jego w matematyce, dalszy jednak jéj rozwój tamowowała ścisła tajemnica, do jakiéj wszyscy członkowie związku obowiązanymi byli. Cały system filozoficzny a z nim i najnowsze zdobycze w matematyce tylko dla członków związku były przystępne, a surowo przestrzegano tajemnicy, skoro Hippokratesa z Chios wykluczono ze związku za to, że uczył za pieniądze matematyki. W rażącéj sprzeczności stanął tu tajemniczy, zamknięty w sobie i kastowy charakter związku Pytagorejskiego z wolnomyślnym sposobem myślenia Helady, starcie stało się nieuniknione i związek przemocą rozbito. Członkowie tegoż związku rozbiegli się po najdalszych koloniach greckich, często z całego mienia unosząc tylko życie, i później nie jeden z nich nauczaniem się trudnił. Dla wszystkich otworem stanął teraz gmach ich wiedzy, a zwiększony w ten sposób zastęp pracowników, nie mało się przyczynił do dalszego rozwoju matematyki. Wszystkie usiłowania ówczesnych matematyków, obracają się około rozwiązania następnych trzech zagadnień:

Kąt dany podzielić na dowolną liczbę części równych.

Prawa o zamianie — podziale i mierzeniu płaszczyzn przenieść na bryły, mianowicie znaleść twierdzenie dla sześcianów, któreby twierdzeniu Pytagorasa o kwadratach odpowiadało, przy czem ograniczano się na razie,na podwojenie sześcianu.

Obliczyć powierzchnię koła.

W rozwiązaniu pierwszego twierdzenia próbował sił swoich *Hippias* z Elidy żyjący równocześnie z Sokratesem. Wynalazł on linię krzywą za pomocą której, dzielił kąty nie tylko na trzy, ale i na dowolną liczbę części, które do siebie w danym stosunku stoją.

Konstrukcyą téj krzywéj podaje Pappos.[1])

„W kwadracie ABCD Fig. 2. niechaj opisze z wierzchołka A jako punktu środkowego bok kwadratu, ćwierć koła BED. Niechaj promień AB około punktu A obraca się z jednostajną chyżością tak, aby punkt B w pewnym czasie łuk BD opisał. Dokładnie w tymże samym czasie przesuwa się prosta BC ustawicznie do siebie równolegle, również z jednostajną chyżością z położenia BC w położenie AD; — wtedy dadzą miejsca przecięć téj prostéj z promieniem obracającym się około A krzywą BFG, którą nazywają Quadratrix *τετραγωνίζουσα*."

Każda równoległa do AD poprowadzona, przecina tę krzywą w punkcie n. p. F tak, że poprowadzony przez punkt ten promień AE dzieli łuk BED według proporcyi.

$$BED : ED = AB : AH.$$

Można jednak bok BA podzielić na dowolną liczbę części równych lub stojących w pewnym stosunku, a tém samem przez poprowadzenie odpowiednich promieni podzielić kwadrant BED i łuk ED na odpowiednie części.

Krzywa ta rozwiązuje w bardzo prosty a dowcipny sposób postawione zadanie i chlubnie świadczy o talencie Hippiasza. Wprawdzie Pappos widzi w rozwiązaniu tém usterki, a najważniejszy w tem, że krzywa ta powstaje mechanicznie przez ciągłe łączenie odpowiednich punktów z wolnéj ręki. Okoliczność ta ma dzisiaj o wiele mniejsze znaczenie.

Szkoła italska udowodniła, żę przekątnia kwadratu jest bokiem kwadratu o dwa razy tak wielkiej powierzchni. Otóż starali się późniejsi matematycy znaleść krawędź sześcianu, któryby miał dwa razy większą objętość jak dany. Sądzili, że rozwiązanie twierdzenia umożliwi dodawanie i odejmowanie sześcianów w podobny sposób, jak to twierdzenie Pytagorasa, dla kwadratów uczyniło.

Pierwszy *Hippokrates* z Chios wskazał drogę do rozwiązania twierdzenia tego sprowadzając je na planimetryą.

Był on pierwotnie kupcem, a straciwszy majątek przybył do Aten, gdzie z zapałem poświęcił się nauce matematyki. Miał on za pieniadze uczyć, za co

1) Collectiones mathematicae lib. IV. pag. 57.

go, jak się już wyżej wspomniało, Pytagorejczycy ze związku swego wykluczyli. Na czas 450—430 przed Chr. przypada działalność jego.

Proklos opowiada o nim, że szczególny miał talent do konstrukcyi i podaje sposób, w jaki powyższe zagadnienie Hippokrates rozwiązał. Rozwiązanie polegało na tem, że Hippokrates zagadnienie dane zamienił na inne, mianowicie: do dwóch prostych znaleść dwie średnie proporyonalne wedle proporcyi $a : x = x : y = y : b$, z téj bowiem wypływają następujące trzy:

$$a : x = a : x$$
$$a : x = x : y$$
$$\underline{a : x = y : b} \text{ przez pomnożenie}$$
$$a^3 : x^3 = a : b.$$

Rozwiązanie to daje nietylko bok podwójnego sześcianu, ale potrójnego, poczwórnego i t. d. bo położywszy $b = 2a$ jest x bokiem podwojonego, jeżeli zaś $b = 3a$ przedstawi x bok potrojonego sześcianu. Spotykamy tu po raz pierwszy nową metodę, tak często dziś używaną przy rozwiązaniu zawiłych geometrycznych zagadnień, sprowadzania tychże na bardziej pojedyńcze.

Na téj redukcyi opierają się matematycy szkoły Platońskiej rozwiązując to zagadnienie. Nie wiadomo, czy Hippokrates wynalazł sposób kreślenia proporcyi ciągłéj $a : x = x : y = y : b$ i czy tym sposobem zagadnienie zupełnie rozwiązał.

Rozwiązanie powyższe jak i dochodzenie kwadratury koła, świadczą o wielkim talencie Hippokratesa, Simplikios [1]) w komentarzu swym, w ktorym zachował obszerny wyciąg z zaginionej historyi matematyki Eudemosa, objaśnia dokładnie usiłowania jego dotyczące tego drugiego problemu.

Otóż Hippokrates zamienia najprzód sierp, stojący na boku kwadratu wpisanego w koło na trójkąt o równej powierzchni, a później pokazuje jak możnaby znaleść kwadraturę koła, gdyby sierp na boku wpisanego sześcioboku podobnie jak na boku kwadratu dał się zamienić na figurę prostolinijną o równej powierzchni. Nie uważa jednak zagadnienia za rozwiązane, owszem bada i inne sierpy, zamienia sierp, którego łuk zewnętrzny większym lub mniejszym jest od półkola, w figury prostokreślne.

Podaję wedle Simplikiosa sposób, w jaki Hippokrates zamieniał sierp nad bokiem kwadratu w trójkąt.

Nad prostą *AB* Fig 3. wykreślono półkole *ABΓ* i *AB* w punkcie *Δ* przepołowiono; w *Δ* stoi *ΓΔ* do *AB* prostopadle a prosta *AΓ* jest bokiem kwadratu w koło wpisanego, którego połową jest *ABΓ*.

Nad *AΓ* opiszmy półkole *AEΓ*. Ponieważ kwadrat *AB* równa się kwadratowi *AΓ* i kwadratowi z drugiego boku w koło wpisanego kwadratu t. j. kwadratowi *ΓB* (albowiem *AB* jest przeciwprostokątnią, prostokątnego trójkąta) i ponieważ dalej kwadraty ze średnic mają się do siebie jak przynależne koła i półkola, jest więc półkole *AΓB* dwa razy tak wielkie, jak półkole *AEΓ*. Półkole *AΓB* jest jednak dwa razy tak wielkie, jak ćwierćkole *AΓΔ* a więc

1) comment. in octo Aristotelis physicae auscultationis.

2) lunula, μηνίσκος figura kształtu sierpa zamknięta dwoma łukami.

równa się półkole *ΑΕΓ* kwadrantowi *ΑΓΔ*. Odjąwszy odcinek wspólny obom a zamknięty bokiem kwadratu i łukiem *ΑΓ*, pozostały sierp ma równą powierzchnię z trójkątem *ΑΓΔ*, ten znowu da się zamienić w kwadrat. Hippokrates znacznie pomnożył naukę o kole. Wedle Eudemosa miały następujące twierdzenia poprzedzać rzecz o kwadraturze koła, które Hippokrates pierwszy postawił i udowodnił. Najprzód, że w półkolu kąty wynoszą 90^0 zaś w odcinkach mniejszych lub większych od półkola, kąty są rozwarte lub ostre. Że kąt w półkolu jest prosty, wiedziano już przed Hippokratesem, a dowodzono twierdzenia tego opierając się na najprostszych własnościach równoramiennego i prostokątnego trójkąta. Udowodnił daléj Hippokrates, że powierzchnie koła mają się do siebie jak kwadraty średnic, w końcu, że podobne odcinki mają się do siebie jak kwadraty ich cięciw. Ostatnimi dwoma twierdzeniami rozszerzył Hippokrates odpowiednio twierdzenia o umiarowych wielobokach.

Obok Hippokratesa rozwiązaniem kwadratury koła, zajmował się *Antiphon*, sofista ateński współczesny Sokratesa i jego przeciwnik. Simplikios o nim mówi, że wpisywał w koło kwadrat, a podwajając jego boki sądził, że otrzyma wielobok o nieskończenie licznych a małych bokach, które z odpowiednimi łukami koła się zejdą. Pierwszy więc wprowadza w matematykę pojęcie nieskończoności. Myśl Antiphona zasługuje na uwagę i dziwić się trzeba, że go nie doprowadziła do wniosku, że koło równać się musi trójkątowi, którego podstawą jest obwód a wysokością promień. Tłómaczy się to tém, że żaden z matematyków przed Archimedesem nie znał odpowiednego twierdzenia o wielobokach umiarowych, które jakkolwiek pojedyńcze, dopiero matematycy szkoły aleksandryjskiéj udowodnili.

Bryson żyjący w połowie piątego wieku przed Chr. uważał koło za środek arytmetyczny, między opisanym i wpisanym wielobokiem, i tą drogą chciał dotrzeć do kwadratury koła.

Przebiegliśmy spory obszar czasu i dotarliśmy do roku 430. przed Chr. Zwróćmy się raz jeszcze i odtwórzmy w ogólnych rysach obraz, którego części oglądaliśmy po drodze.

Otóż elementarna część planimetryi otrzymała już w tym czasie zakończenie i zaokrąglenie.

Wprawdzie brakowało jeszcze pojedyńczych twierdzeń, inne udowodniono tylko dla szczegółowych wypadków, jak twierdzenia o podobieństwie figur, udowodnione tylko na wypadek wymiernych stosunków, milcząco rozszerzono i na niewymierne stosunki; jednakże twierdzenia zasadnicze były już odkryte i używali ówcześni matematycy tychże, częstokroć bardzo zręcznie do rozwiązania i trudniejszych zadań. W stereometryi natomiast nie spotykamy się prawie z nowymi odkryciami — uwagi godną jest niezaprzeczenie dowcipna redukcya Hippokratesa, dotycząca zagadnienia o podwojeniu sześcianu na planimetryczny problemat. Jednakże redukcyą tą matematycy ówcześni z przestrzeni na powierzchnię sprowadzeni, mniej uprawiali stereometryą. Arytmetyka umiejętna uwięziona w filozoficzne spekulacye, stawia pierwsze kroki.

Brak łatwego sposobu porozumiewania się, a w szczególności brak odpowiedniego podręcznika, nie dozwalał spojrzeć na umiejętność z jednego punktu widzenia i objąć całości. Stąd brak łączności pomiędzy pojedyńczymi zdobyczami umiejętności, brak systematycznéj spójni w rozwoju téjże, a co zatem idzie, brak ogólnie przyjętéj, jednostajnéj metody w badaniach. Dowody odznaczają się bojaźliwą dokładnością, przechodzącą w rozwlekłość, konstrukcya wchodzi w najdrobniejsze szczegóły. W założeniu znajdują się tylko najkonieczniejsze rzeczy, a wszystko uzyskuje się przez konstrukcyą i dowód tak, że często udowodniono wiele twierdzeń innych, zanim figura o tyle nakreślona, by przystąpić do dowodu właściwego twierdzenia.

Widzieć to można przy konstrukcyi sierpa na boku kwadratu. Hippokratesowi nie służy za punkt wyjścia trójkąt prostokątny równoramienny, ale uzyskuje go powoli i objaśnia szeroko konstrukcyą przytaczanymi twierdzeniami. O wiele zawilszą jest konstrukcya i wywód sierpów, których łuk jest większy lub mniejszy od półkola.

W dowodzeniu powtarzają ówcześni matematycy od czasu do czasu nie tylko założenia, ale przytaczają każde, choćby najdrobniejsze twierdzenie użyte do pomocy tyle razy, ile razy go użyć przyjdzie, a nawet starają się takowe po drodze choć w części poprzeć znowu dowodem. Powodem téj rozwlekłości jest znowu brak podręcznika, to też Hippokrates, który pisząc o kwadraturze koła, szczególnie brak ten uczuwać musiał, powodowany nad to i czynnością nauczycielską, pierwszy podręcznik matematyczny ułożył.

Tak przynajmniej opowiada w swym komentarzu Proklos, gdy pisze: *πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραφε.*

Z wojną peloponeską upadła świetność Aten téj metropolii nauk i sztuk. Upadek ten nie pozostał bez wpływu zgubnego i na matematykę, bo z czasów tych nie mamy do zapisania żadnych nowych odkryć, nie spotykamy się w ogóle z nazwiskiem sławniejszego matematyka, owszem na dalszy rozwój téj umiejętności, wywarli sofiści ówcześni wpływ szkodliwy, nawet Sokrates utrzymywał, że matematyką, astronomią i w ogóle naukami przyrodniczymi tylko o tyle zajmowaćby się potrzeba, o ile takowe nadają się do praktycznego użycia.

Tém większą więc zasługa Platona, że nie tylko nie podzielał zapatrywań swego nauczyciela, ale pełną idealizmu filozofią, przyczynił się potężnie do dalszego rozwoju matematyki.

Platon urodził się 429 a umarł 348 r. przed Chr. był pochodzenia ateńskiego. Po śmierci swego nauczyciela, odbywał liczne podróże. Odwiedził Egipt, oczywiście nie żeby się wyuczyć matematyki, Grecy bowiem prześcignęli już pod owe czasy swych pierwszych nauczycieli. Matematyki uczył go Theodorus z Cyreny. W Italii zapoznał się z Pytagorejczykami, był jednak zanadto prawdziwym Helenem, aby mógł smakować w mistyce i symbolice Pytagorasa. Podobnie jednak jak i Pytagoras uznawał ważność matematyki i uważał studium tejże, jako koniecznie potrzebne każdemu filozofowi.

W roku 380 powrócił do Aten i utworzył nową szkołę filozoficzną. W jakim poważaniu miał matematykę, dowodzi znany napis, *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην*, który nad swymi drzwiami umieścił.

Wkrótce też szkoła Platońska stała się punktem środkowym dla wszystkich, którzy nad matematyką pracowali, ogniwem łączącém matematyków starszych i nowych pracowników. I z tego okresu nie dochowały się żadne pisma, a to, co o matematykach ówczesnych i ich odkryciach wiemy, pochodzi z wyciągów, jakie z historyi matematyki Eudemosa uratowali Eutokios i Proklos w swych komentarzach.

Sam Plato, jakkolwiek gruntownie z matematyką obeznany, zwrócił się zupełnie na pole spekulacyi filozoficznych a wiedzy matematycznéj, raczéj ku kierowaniu swych uczniów, aniżeli do samoistnych badań w tym przedmiocie używał. Mimo to poczynił i on nowe odkrycia. Podał on inny sposób wyszukiwania wymiernych trójkątów prostokątnych. Wedle Platona jednę przyprostokątnię kładzie się równą jakiéjkolwiek parzystéj liczbie. Chcąc znaleść przeciwprostokątnię, potrzeba połowę téj liczby podnieść do kwadratu, i jednostkę dodać; odjąwszy zaś od tego kwadratu jednostkę, otrzyma się drugą przyprostokątnię. 4 niech będzie liczbą wymiarową jednéj przyprostokątni, 2. to jest połowa z tejże, podniesione do kwadratu i o jednostkę zwiększone, więc 5. jest liczbą wymiarową przeciwprostokątni, odjąwszy od kwadratu z 2. jednostkę, otrzymuje się 3, jako liczbę wymiarową drugiéj przyprostokątni. [1])

Nikomachus [2]) nazywa twierdzenie, że między dwie liczby kwadratowe, przypada jedna, między dwie sześcienne, dwie średnie proporcyonalne, *Πλατωνικὸν θεώρημα*.

Zagadnienie o podwojeniu sześcianu miał rozwiązać Plato, za pomocą przyrządu składającego się z dwóch linii, które można było między dwoma innymi, prostopadle do tychże zesuwać. Rozwiązanie polegało na dwukrotném użyciu twierdzenia: prostopadła z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnię poprowadzona jest średnią proporcyonalną, między odcinkami tejże przeciwprostokątni. Stereometrya nie dotrzymywała kroku w rozwoju swym planimetryi, „czeka ona na swego wynalazcę“ mówi o niéj Plato. Znano wprawdzie zasadnicze twierdzenia o położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni, opracowano bryły umiarowe, chociaż tylko częściowo, ale o innych bryłach jak graniastosłupach, ostrosłupach, walcu i stożku nie wiele więcéj wiedziano nadto, że istnieją. Rozpatrywanie się w stożku doprowadziło do odkrycia przecięć stożkowych, a przez odkrycie to wychodzi geometrya grecka z niemowlęctwa. Nie małą także zasługą Platona jest wprowadzenie ścisłości w definicyach. Pisma jego przepełnione pojęciami matematycznymi, wymagały tego, wskazują one oraz, że znał gruntownie cały zakres ówczesnéj matematyki, a znał też braki i niedostatki jéj, mógł więc wskazać drogi i metody prowadzące do udoskonalenia téj umiejętności i do rozszerzenia jéj materyalnego. To też za największą zasługę Platonowi poczytać należy wprowadzenie metody analitycznéj. Proklos nazywa ją „najlepszą“ a istota jéj leżała w tém, „że sprowadzała rzecz szukaną na udowodnione już twierdzenia“. [3])

1) Proklos com. pag. 111.
2) Nicomachi Geras. introd. arithm. lib. II. c. 24.
3) Procl. com. pag. 58.

Używają więc matematycy od Platona począwszy trzech metod, syntetycznéj, analitycznéj i apagogicznéj. Najmniéj doskonałą jest ostatnia, bo nie dowodzi twierdzenia wprost, ale wykazuje, że sprzeczne z twierdzeniem przypuszczenie, prowadzi do niedorzeczności. Tak apagogiczna, jako też i syntetyczna metoda najściśléj związaną jest z zasadniczymi twierdzeniami geometryi, wymagają one bowiem krótkich i łatwych do przejrzenia wniosków przy dowodzeniu. Idzie jednak o rozwiązanie zawiłych zadań, lub o dowód twierdzeń ogólnych, które ze szczegółowych przez indukcyą powstają, wtedy narzuca się sama metoda analityczna. Być więc może, że sposobu analitycznego używano w pojedyńczych wypadkach i przed Platonem nie zdając sobie z postępowania swego sprawy, pierwszy Plato to bezwiedne postępowanie analityczne zamienił w metodę, która tak znakomicie przyczyniła się do rozwoju matematyki.

Metody analitycznéj pierwszy *Leodamas* z Tasos używał, a nawet Platon w szczególności dla niego wynaleść miał tę metodę. Ani o życiu, ani o pracach Leodamasa nie dochowały się żadne wiadomości. Również nie wiele więcéj powiedzieć można o Ateńczyku *Theaitetesie* nad to, że zajmował się proporcyami z uwzględnieniem niewymierności, oraz ciałami umiarowymi a mianowicie stosunkiem, jaki zachodzi między krawędziami tychże ciał, a promieniem kuli opisanéj, stosunkiem, który przy wszystkich pięciu ciałach jest niewymierny.

Więcéj już wiemy o Pytagorejczyku *Archytasie*. Urodzony około 430 przed Chr. w Tarencie, kilkakrotnie piastował w swym rodzinném mieście najwyższe urzędy. Bywał w Atenach i tu poznał się i zaprzyjaźnił z Platonem. Zginął w skutek rozbicia okrętu około przylądka Matinum, 365 przed Chr. Obok spełnianych obowiązków obywatelskich znalazł dosyć czasu, by pracować nad matematyką. Piękne oparte na stereometryi rozwiązanie problemu delickiego, zachował nam Eutokios. [1])

Niech będą $A\Delta$ i Γ Fig 4. dwie dane proste i do nich należy znaleść dwie średnie proporcyonalne.

Na większéj $A\Delta$ Fig 4. zatacza się koło $AB\Delta Z$ i wkłada się w to koło prostą AB równą Γ, która przedłużona przecina w Π styczną w Δ do koła poprowadzoną. Do $\Pi\Delta$ kreśli się równoległą BEZ. Wyobraźmy sobie prosty półwalec na półkolu $AB\Delta$, dalej prostopadle na $A\Delta$ półkole leżące w równoległoboku półwalca. Obroćmy to półkole tak od Δ ku B, aby końcowy punkt A średnicy nieruchomym pozostał, wtedy przecina ono powierzchnię walca i opisuje na niéj linię krzywą. Gdy znowu około linii nieruchoméj $A\Delta$ trójkąt $A\Pi\Delta$ w przeciwnym obrotowi półkola kierunku obrócimy, to bokiem $A\Pi$ opisze stożkową powierzchnię, która przetnie krzywą opisaną przez półkole na walcu, a równocześnie punkt B na owéj stożkowéj powierzchni opisze półkole.

W chwili przecięcia, niechaj obracane półkole ma położenie $\Delta' KA$, trójkąt zaś położenie $\Delta\Lambda A$; punktem przecięcia jest K. Przez B opisane półkole BMZ przecina się z kołem $B\Delta ZA$ w BZ. Z punktu K poprowadźmy prosto-

1) Comm. in Arch. lib. II. p. 143.

padłą na płaszczyznę półkola $B\Delta A$, przetnie się ona z obwodem tegoż koła, bo walec stoi na niém postopadle. Poprowadzono ją, i jest nią IK. Z I do A poprowadzona prosta, przecina BZ w punkcie Θ, $A\Delta$ zaś spotyka półkole BMZ w M. Prowadzimy w końca $K\Delta'$, MI, $M\Theta$. Ponieważ oba półkola $\Delta' KA$ i BMZ stoją prostopadle do płaszczyzny $AZ\Delta B$ więc i $M\Theta$ linia przecięcia tychże prostopadłą jest do powierzchni koła, a zatem i do BZ. Wtedy prostokąt z ΘB i ΘZ, również i prostokąt z ΘA i ΘI równa się kwadratowi z $M\Theta$, a zatem trójkąt AMI podobny do $MI\Theta$ i $MA\Theta$ a kąt IMA prosty. Gdy jednak i kąt $\Delta' KA$ jest prostym, więc $\Delta' K$ równoległe do MI. Z podobieństwa trójkątów powyższych wynika proporcya $A\Delta'$ do AK jak AK do AI jak AI do AM. Lecz AM równe AB równe Γ, więc między prostymi $A\Delta$ i Γ znaleziono dwie proporcyonalne AK i AI.

Rozwiązanie to wskazuje na znakomity talent i odznacza się zupełną odrębnością od innych usiłowań w téj mierze. Archytas używając przecięć walca i przenikania się stożka z walcem posługuje się przeważnie stereometryą. O innych pracach Archytasa nie mówią nic pisarze starożytni.

Do najważniejszych odkryć szkoły Platońskiéj zaliczają się przecięcia stożkowe. *Menechmos* pierwszy odkrył te przecięcia i zbadał najgłówniejsze zasady tychże. Nosiły one w starożytnosci nazwisko swego odkrywcy *Μενεχμείους τριάδας*. O życiu Menechmosa nic nie wiémy, w jaki sposób otrzymywał swoje przecięcia, dowiadujemy się z fragmentu Geminosa zachowanego w komentarzu Eutokiosa. A więc najprzód powstawał stożek przez obrót trójkąta prostokątnego naokoło jednéj ze swych przyprostokątni, stąd przypuszczano, że wszystkie stożki są proste. Według tego, czy kąt u wierzchołka trójkąta z którego powstawał stożek, wynosił 45° więcéj lub mniéj, powstawał stożek prostokątny, rozwartokątny lub ostrokątny. Każdy rodzaj stożka dawał inną krzywą jako przecięcie, a w każdym stożku prowadzono prostopadle do boku cięcie. Stąd poszły też i pierwsze nazwy, tych krzywych. Parabolę zwano *ἡ τοῦ ὀρθωγονίου κώνου τομή*, przecięciem stożka prostokątnego, *ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή* przecięcie rozwartokątnego, późniejsza hyperbola i *ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομή* elipsa z przecięcia stożka ostrokątnego. [1]) O ile znał własności tych przecięć Menechmos poznać można z rozwiązania zagadnienia o podwojeniu sześcianu.

Niech będą Fig. 5. AB i $B\Gamma$ dwie prostopadłe do siebie proste, a ΔB i BE przynależne średnie proporcyonalne tak, że $B\Gamma$ ma się do $B\Delta$ jak $B\Delta$ do BE, jak BE do BA; poprowadźmy prostopadłe ΔZ, EZ. Ponieważ $B\Gamma$ do $B\Delta$ jak $B\Delta$ do BE, jest więc prostokąt ΓBE to jest prostokąt wykreślony z BE i danéj prostéj, równy kwadratowi z $B\Delta$ albo EZ. Ponieważ prostokąt z danéj prostéj i BE równa się kwadratowi z EZ, leży Z na paraboli któréj osią jest BE. I znowu skoro AB ma się do BE jak BE do $B\Delta$, więc prostokąt $AB\Delta$, z danéj prostéj i $B\Delta$ równa się kwadratowi z EB albo ΔZ; więc Z leży i na paraboli mającéj $B\Delta$ za oś. Skoro Z leży na obu parabolach więc jest dane, znane są i prostopadłe $Z\Delta$ i ZE, w końcu i punkta Δ i E.

1) Apoll. conica pag. 9.

Konstrukcyą wykonuje się w następny sposób:

Niech AB i $B\Gamma$ dane dwie proste stoją na sobie prostopadle i w kierunkach $B\Delta$ i BE w nieskończoność przedłużone. Nad osią BE wykreślmy parabolę tak, aby kwadraty prostopadłych z jakiegokolwiek punktu paraboli do BE wykreślone równały się prostokątom na $B\Gamma$. Opiszmy znowu nad $B\Delta$ jako nad osią parabolę tak, aby kwadraty z prostopadłych na oś równały się prostokątom na AB. Parabole te przetną się wzajemnie. Niechaj w Z się przecinają. Poprowadźmy z Z prostopadłe $Z\Delta$ i ΔE. Ponieważ ZE to jest ΔB w paraboli leży, więc prostokąt ΓBE równa się kwadratowi na $B\Delta$, stąd ΓB do $B\Delta$ jak $B\Delta$ do BE. Ponieważ i ΔZ to jest EB w paraboli wykreślono więc prostokąt ΔBA równa się kwadratowi na EB. A zatem ΔB do BE jak BE do BA. Ale ΔB ma się także do EB jak ΓB do ΔB; więc ΓB do ΔB jak ΔB do BE jak BE do BA. To jednak miało być znalezionem.

Drugie rozwiązanie tego zagadnienia podał także Menechmos, opierając się na powyższéj charakterystycznéj własności paraboli, i na téj własności hyperboli, że równołegłobok z asymptot i z jakiegokolwiek punktu hyperboli do nich poprowadzonych równoległych, jest dla danéj hyperboli stałym. Oba rozwiązania uskutecznione za pomocą analizy, z której rozwinięto konstrukcyą i dowód.

Na jakiéj drodze poznał Menechmos powyższe własności tych krzywych nie wiadomo. Zapewne szukać musiał za podobnymi twierdzeniami, jakie o kole znano, że z jakiegokolwiek punktu obwodu koła, poprawodzona na średnicę prostopadła, jest średnią geometrycznie proporcyonalną, pomiędzy odcinkami średnicy. Ognisk nie znał Menechmos, a do kreślenia swych krzywych miał używać przyrządów.

Brat Menechmosa *Deinostratos* próbował swych sił w rozwiązaniu zagadnienia o kwadraturze koła, używając ku temu krzywéj Hippiasza. Pappos zachował nam to rozwiązanie, które jest zarazem pięknym przykładem dowodu apagogicznego. [1])

Jeżeli Fig. 2. A jest środkiem ćwierci koła BED a BFG w niéj wykreśloną quadratrix, to prosta równa kwadrantowi BED jest trzecią proporcyonalną do AG i AD.

Dowód prowadzi tu Deinostratos nie wprost okazując, że stosunek BED : AD ani mniejszym, ani większym być nie może jak AD : AG. Bo gdyby BED : AD = AD : AK. a AK większe jak AG. to zatoczony promieniem AK łuk KFL przecinałby w punkcie F quadratrix i otrzymalibyśmy proporcyą BED : LFK = AD : AK a z porównania z proporcyą poprzednią wypada, że LKF = AD.

Jednakże BED : ED = BA : FI

BED : ED = KFL : KF = BA : KF

dla tego FI = FK co jest niemożliwe.

Gdyby zaś: BED : AD = AD : AI a AI mniejsze jak AG, to styczna IF do łuku INM wykreślonego promieniem AI z punktu środkowego A, przetnie quadratrix w punkcie F. Wtedy otrzymujemy proporcyą:

BED : INM = AD : AI więc INM = AD.

1) Collec. math. IV. prop. 26.

jednakże BED : ED = AB : FI

BED : ED = INM : IN = BA : IN

skąd musiałoby FI = IN, co znowu niemożliwe, więc BED : AD = AD : AG.

Współczesny z Platonem *Eudoksos* był uczniem Archytasa. Urodził się w Knidos około roku 410 przed Chr. umarł około roku 357. Bawił przez pewien czas w Atenach i wszedł w ścisły stosunek ze szkołą platońską. Jak wszyscy uczeni ówcześni nie poświęcał się Eudoksos, wyłącznie matematyce, jako lekarz przebywał w Egipcie. Z licznych dzieł jego wszystkie zaginęły. W pracach matematycznych odznaczył się szczególnie przez swe odkrycia w stereometryi. Twierdzenia, że ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa o równéj podstawie i wysokości, podobne twierdzenie o stożku, w końcu, że kule mają się do siebie jak sześciany ich średnic, są własnością Eudoksosa. [1])

Miał on także rozwiązać zagadnienie o podwojeniu sześcianu, kreśląc do dwóch prostych dwie średnie proporcyonalne za pomocą linii krzywych przez siebie wynalezionych. Jakie to były krzywe i w jaki sposób Eudoksos je otrzymywał nie wiadomo. Przyćmione późniéj cokolwiek odkrytymi przecięciami stożka poszły w niepamięć.

Ważną zasługę położyła szkoła platońska około rozwoju matematyki przez wprowadzenie teoryi miejsc geometrycznych. Że n. p. obwód koła jest miejscem geometrycznem wszystkich punktów równo oddalonych od punktu środkowego koła, że prostopadła stojąca w punkcie środkowym danéj prostéj jest miejscem geometrycznem wierzchołków trójkątów równoramiennych stojących na téjże prostéj jako podstawie, spostrzec musiano już i przed Platonem, jednakże dopiero szkoła platońska, a może i sam jéj założyciel wspólną cechę podobnych twierdzeń w teoryą rozwinął; dając tym sposobem matematyce nowy środek do rozwiązywania zagadnień. Wykrycie przecięć stożkowych poprzedziło wprowadzenie miejsc geometrycznych, nie charakteryzowano też tych krzywych jako miejsc geometrycznych w płaszczyźnie; chociaż nic prostszem być nie mogło jak, że n. p. elipsa jest miejscem geometrycznem wierzchołków takowych trójkątów, które mają wspólną podstawę i równy obwód. Przecięcia te zawsze odnoszono do stożka.

O miejscach geometrycznych pisał *Hermotimos* z Kolophon, który należał do najmłodszéj generacyi uczniów Platona.

Aristeus kończy zastęp przedeuklidesowych matematyków, a zarazem okres właściwego rozwoju greckiéj geometryi, bo w następnym okresie rozpoczynającym się założeniem szkoły aleksandryjskiéj nagromadzony materyał układa się pod rękę takich mistrzów, jak Euklides, Archimedes i Apollonios, w systematyczną całość.

Aristeus żył około 340 roku przed Chr. Pappos nazywa go starszym. Zestawił Aristeus twierdzenia o przecięciach stożka w pięciu księgach, o czém Pappos pisze: „Erant igitur conicorum elementorum primum Aristaei senioris libri quinque, velut iis, qui haec percipere possent cum brevitate conscripti.“ (Coll. math. p. 249.)

---

1) Archimedes de sphaera et cylindro I. p. 64.

Dzieło to Aristeusa na nowo opracowane wcielił prawdopodobnie Apollonios, jako część pierwszą swéj pracy o przecięciach stożka, sam bowiem przyznaje, że część pierwsza jest tylko nowém opracowaniem rzeczy już dawniej znanych.

Dalsze słowa Papposa, „Aristeus autem, qui scribit ea, quae ad hoc usque tempus tradita sunt, solidorum locorum libros quinque conicis cohaerentes vocavit“ (ibidem pag. 249.) wskazują, że napisał Aristeus inne dzieło o miejscach geometrycznych, pozostające z dziełem o przecięciach stożkowych w ścisłéj łączności. Prawdopodobnie już Pappos powyższego dzieła nie znał, nic bowiem o treści jego nie wspomina. Wprawdzie Chasles w swéj historyi matematyki (p. 86. tłumaczenie von Sohncke) objaśnia bliżéj treść dzieła tego mówiąc: „das zweite Buch (dzieła Mydorga o przecięciach stożkowych) ist für die Beschreibung der Kegelschnitte durch Punkte in der Ebene bestimmt, ein Gegenstand, mit dem sich Apollonius gar nicht beschäftigt hat, der sich aber in den locis solidis des Aristeus findet; denn dieses Werk betrachtet die Kegelschnitte in der Ebene und will auf sie aus ihren Eigenschaften kommen, welche keinen Theil der elementa conica des Apollonios ausmachen, da Aristeus selbst ein ähnliches Werk, welches von seinen locis solidis verschieden ist, geschrieben hat.“ Nie podaje jednak źródła, na którem się opiera, a Apollonios, który tak skrzętnie zebrał, opracował i pomnożył wszystko, co znaném było o przecięciach stożkowych, byłby najpewniéj nie pominął i Aristeusowego de locis solidis, gdyby ono o stożkowych przecięciach uczyło.

Arystoteles i uczniowie jego, nie przyczynili się niczem do rozwoju matematyki, dwaj tylko, Theophrastes z Eresos i Eudemos z Rodos, przez napisanie historyi matematyki i astronomii, aż do czasów mistrza swego Arystotelesa, przygotowali pod pewnymi względami Euklidesowe „Elementa“.

Historyczny zarys matematyki u starożytnych.

Część II. do zdobycia Aleksandryi 640 r.

Napisał **Julian Fąfara**, zastępca nauczyciela.

IV.

Znikła wolność Aten. Z nią uleciały i spłoszone muzy, żegnając na zawsze i słoneczną Akropolę i marmurowe świątynie. Po bitwie pod Koroneą wymknęło się przodownictwo polityczne z rąk Greków, kultura jednak i cywilizacya grecka tyle miała sił żywotnych, tak przewyższała cywilizacyą innych narodów, że zwyciężeni; narzucili ją swoim zwycięzcom. Wśród szczęku oręża, wśród zwycięskich pochodów z jednéj części świata do drugiéj, zakłada młody bohatér, zdobywca całego świata, Aleksandryą, która po śmierci swego założyciela, gdy Egipt przeszedł pod władztwo Ptolomeuszów, staje się siedliskiem greckiéj kultury i cywilizacyi a przedewszystkiem kwitną tu umiejętności ścisłe. Tu gromadzi hojność monarsza wszystkich uczonych, tu zbiera piśmienne ich dzieła w wspaniałą bibliotekę.

Ptolomeus Soter (305) jakoteż dwaj następcy jego Ptolomeus Philadelphus (285—247) i Ptolomeus Euergetes byli prawdziwymi Mecenesami umiejętności, a hojność dla uczonych dziedziczną była w ich rodzie.

Jednym z pierwszych uczonych aleksandryjskich był *Euklides*. Proklos [1]) wyliczając matematyków pisze o nim: Nie o wiele młodszym od tych był Euklides, który Elementa ułożył, wiele od Eudoksosa pochodzących rzeczy w całość zestawił i wiele przez Teateta rozpoczętego skończył, nadto to, co poprzednicy niedostatecznie udowodnili, niezbitymi dowodami poparł. Żył on za czasów pierwszego Ptolomeusa. Opowiadają o nim, że gdy Ptolomeus zapytał go, czy nie byłoby w nauce geometryi krótszéj drogi, jak przez Elementa, odpowiedział: do geometryi nie ma prostej drogi dla królów. Jest on młodszym od uczniów Platona, starszym od Eratostenesa i Archimedesa; ci byli współczesnymi jak podaje Eratostenes. Był on zwolennikiem filozofii platońskiéj, dla tego jako cel swego dzieła postawił sobie tak zwane platońskie bryły.

Z życia jego nic więcéj nie wiemy, nie znamy nawet ojczyzny jego, ani też roku jego urodzenia i śmierci, wiemy tylko, że działalność jego przypada około r. 300 przed Ch. Pięknie określa Pappos charakter jego. Mówi on: Euclides autem secutus Aristeum scriptorem luculentum in iis, quae de conicis tradiderat; neque antevertens, neque volens eorum tractationem destruere, cum

1) Prokl. com. pag. 19 et syg.

mitissimus esset et benignus erga omnes, praesertim eos, qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere et amplificare possent, ut par est, et nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans . . . . [1])

Najważniejszem dziełem jego są Elementa στοιχεῖα, a zarazem w układzie swym i najdoskonalszém, jakie nam starożytni w spuściźnie zostawili. W miarę, jak się rozwijała matematyka, nie na długo mógł wystarczyć podręcznik Hippokratesa, o którym wyżej wspomniałem. Leon, jeden z pierwszych uczniów Platona miał po Hippokratesie ułożyć nowy podręcznik lecz i ten wkrótce okazać się musiał niedostatecznym. Wykryciem przecięć stożkowych i teoryą miejsc geometrycznych powiększony materyał wymagał nowego podręcznika. Podręcznik taki, o którym Proklos mówi, że był „bardzo dobry“ napisał Theydios z Magnezyi. Wszystkie te usiłowania przewyższyły Euklidesowe Elementa. Przygotowany głębokimi studyami należycie ocenił potrzeby swéj umiejętności i utworzył podręcznik nie tylko do geometryi ale i arytmetyki, który przewyższał ścisłością dedukcyi, bogactwem i dokładnością poprzednie tak, że wyszły zupełnie z użycia, i że przez wiele wieków nikt nie pokusił się o napisanie nowego. Kończy dzieło to w głównych zarysach rozwój elementarnéj geometryi, matematycy zwracają się teraz do głębszych badań, mając ogólnie uznaną podstawę, do której odwołać się mogą, zyskuje wiele przedstawienie otrzymanych rezultatów na zwięzłości, traci owę rozwlekłość, która jest cechą dowodów n. p. Hippokratesa.

Trzynaście ksiąg, z których się Elementa składają, dadzą się na cztéry części podzielić. Pierwszych sześć ksiąg zapełnia planimetrya, od 7—10 księgi znajdujemy arytmetykę, dziesiąta traktuje o ilościach niewymiernych, trzy księgi ostatnie poświęcone stereometryi. Taką jest treść w najogólniejszym zarysie podana. Jednakże ważność dzieła a zarazem ta okoliczność, że dawno minął czas, w którym dzieło Euklidesa powszechniéj było znane zmusza mnie, że obfitszą treść podaję.

W księdze pierwszéj mówi o liniach prostych równoległych i nierównoległych o trójkątach i przystawaniu tychże, o czworobokach w szczególności zaś o równoległobokach. Własności równoległoboków w połączeniu z własnościami trójkątów prowadzą do pojęcia figur, które jakkolwiek nie przystają przecież są równe. Propositio 44 uczy do danéj linii pod danym kątem przyłożyć równoległobok παραβάλλειν, któryby był równy danemu trójkątowi. Następne twierdzenia uczą zamiany figur prostolinijnych na równoległobok o danym kącie a księga kończy się twierdzeniem Pytagoresa i odwróceniem tegoż.

W księdze drugiéj uczy kreślić kwadrat z kwadratów i prostokątów w najrozmaitszych kombinacyach, to jako sumy, to jako różnice aż w końcu zbiera wszystko w zadanie: narysować kwadrat równy jakiéjkolwiek danéj figurze. Księgę tę możnaby uważać jako należącą do arytmetyki o tyle, o ile i twierdzenie Pytagorasa do arytmetyki należy. Z czternastu twierdzeń składających tę księgę, pierwszych dziesięć są wyrażone i udowodnione geometrycznie, ze

1) Pappos Coll. math. pag. 165.

względu na swą istotę należą one jednak do arytmetyki, uczą bowiem mnożenia liczb złożonych. Pierwsze na przykład twierdzenie wyrażone arytmetycznie wygląda wedle naszego sposobu pisania: ab + ac + ad + ... = a (b + c + d + . . .) W księdze téj jako 11. twierdzenie znajduje się zadanie złotego cięcia.

Księga trzecia zajmuje się kołem. Twierdzenia odnoszą się do stykających się kół między sobą i z prostymi. Mówi dalej o kątach i stojących z nimi w związku odcinkach koła, kończy rozpatrywaniem rozmaitych wypadków przecinania się prostéj z prostą i kołem Z odcinków tych prostych tworzy rozmaite prostokąty o równéj powierzchni.

Wieloboki w koło wpisane i opisane na kole a w szczególności umiarowe są przedmiotem księgi czwartéj.

Treścią piątéj księgi jest teorya proporcyi, na liniach rozwinięta. Linie te stoją luźnie obok siebie nie tworząc figur. Euklides chce tym sposobem okazać, że jest to rzecz ogólniejszéj natury, aniżeli porównanie ilości geometrycznych.

Księga szósta daje geometryczne następstwa nauki o proporcyach. Podobieństwo figur wypływa wprost z proporcyi. Twierdzenia 28 i 29 zasługują na szczególną uwagę. Uczą one przyłożyć do danéj prostéj równoległobok, któryby z innym danym miał równe kąty, a był co do powierzchni o tyle większy (*ὑπερβάλλει*,) lub mniejszy (*ἐλλείπει*) również od danéj figury, ażeby gdy się mu odejmie lub doda tyle, ile do zrównania powierzchni potrzeba, ten kawałek do danego równoległoboku był podobny.

Księgą siódmą zaczyna się arytmetyka. Rzecz rozpoczyna się definicyami jednostki, liczby, ułamka pierwotnego (*μέρος* $= \frac{1}{n}$) ułamka pochodnego *μέρη*$=\frac{m}{n}$) wielokrotności, liczby parzystéj i nieparzystéj, parzysto parzystej (*ἀρτιάκις ἄρτιος*) parzysto nieparzystéj (*ἀρτιάκις περισσός*) nieparzysto nieparzystéj *περισσάκις περισσός*) liczb pierwszych (*πρῶτος*,) liczb pierwszych względem siebie i wielu innych rodzaji, w które obfituje arytmetyka starożytnych, jak naprzykład wspomniane już przy Platonie liczby kwadratowe (*ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι* Flächenzahlen) powstające z pomnożenia dwóch liczb, liczby sześcienne (*ἀριθμοὶ στερεοί* Körperzahlen) z pomnożenia trzech liczb. Same nazwy *ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι καὶ στερεοί* wskazują na usiłowania, ażeby wyniki rachunku zmysłowo przedstawić, wiedziano bowiem w ogóle, że aby znaleść miarę powierzchni trzeba dwa, zaś miarę bryły trzy wymiary z sobą pomnożyć. W księdze téj uczy wyszukiwać wspólną miarę w sposób i dziś używany przez powtarzające się dzielenie każdego dzielnika przez pozostałą resztę. Spotykamy się tu z proporcyami i z prawem, że iloczyn wyrazów wewnętrznych równa się iloczynowi wyrazów zewnętrznych, w końcu uczy wyszukiwać najmniejszą wspólną wielokrotność.

Dalszy ciąg nauki o proporcyach, gdzie także wprowadza proporcyą ciągłą i progresye znajdujemy w księdze ósméj. Ta sama materya wypełnia i księgę dziewiątą, gdzie dowodzi, że nieskończenie wiele jest liczb pierwszych, mówi o własnościach parzystych i nieparzystych liczb, sumuje szeregi geometryczne. Uczy, że sumy powstałe n. p. z 2, 3 lub 5 członów szeregu zaczynającego się od jednostki, którego dalsze człony przez podwajanie powstają, są liczbami pierwszymi jak $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Mnożąc taką sumę przez ostatni człon, w tym wypadku przez 16, otrzymujemy 496, liczbę doskonałą, która równa się sumie wszystkich swych dzielników.

I co do istoty i co do formy różnym od poprzedniego jest przedmiot, któremu Euklides poświęca księgę dziesiątą. Jest to księga ze względu na objętość najobszerniejsza, ze względu na treść najtrudniejsza. Traktuje ona w szczególniejszy sposób o ilościach niewymiernych, przedstawiając rzecz na sposób geometryczny, bo na liniach. Na wstępie znachodzimy i tu definicye liczb wymiernych i niewymiernych iracyonalnych, których to liczb kilka rodzajów wylicza. Wymiernymi ilościami (*σύμμετρα*) nazywa te, które się jedną i tą samą miarą dadzą wymierzyć, albo jak z tego w twierdzeniu 5. wnioskuje te, które się mają do siebie, jak liczba do liczby. W przeciwnym razie są niewymierne (*ἀσύμμετρα*) n. p. a i $\sqrt{b}$, jeżeli b nie jest kwadratem są niewymierne.

Zauważyć tu należy, że Euklidesowe *ἀσύμμετρον* odpowiada dzisiejszemu pojęciu liczby niewymiernéj (irracyonalnéj) podczas gdy jego *ῥητὸν* (racyonalne) i *ἄλογον* (irracyonalne) różni się od tego, co dziś wyrazy te oznaczają. Racyonalne *ῥητὸν* jest u Euklidesa to, co samo, albo w swéj potędze jest wymierne; więc te linie, które przez jednostkę długości albo, których kwadraty, przez jednostkę powierzchni, są wymierne, a zatem i a i $\sqrt{a}$; *ἄλογον* irracyonalne są u niego wszystkie ilości pierwiastkowe z wyjątkiem kwadratowego pierwiastka $\sqrt{a}$ Iloczyny więc $a. \sqrt{b}$. albo $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ są u Euklidesa irracyonalne, bo każdy z tych iloczynów jako iloczyn oznacza już powierzchnię, nie może więc być „w potędze wymierny“ (*δυνάμει σύμμετρον*). Wspomnieć tu należy twierdzenie pierwsze. Brzmi ono: „Jeżeli dane są dwie nierówne ilości, jeżeli daléj od większéj odejmiemy więcéj jak połowę, od pozostałéj reszty znowu więcéj jak połowę postępując tak daléj, pozostanie w końcu ilość, która będzie mniejsza od mniejszéj z danych dwóch ilości. Podobnie, gdy odejmuje się tylko połowę.

Na twierdzeniu tém polega metoda exhauscyjna. Ostatnie twierdzenie téj księgi mówi o niewymierności boku i przekątni w kwadracie.

Arytmetyczne księgi Euklidesa odznaczają się również umiejętną ścisłością i gruntownością dowodów, dowody te, dla braku odpowiednich symbolów, które pomału wprowadzają wieki późniejsze, przeprowadza Euklides, chcąc zmysłowo rzecz przedstawić, na liniach. Jak wysokiego stopnia abstrakcyi potrzeba, ażeby materyał księgi dziesiątéj w ten sposób przedstawić. Te formuły, które się nam jako bardzo skomplikowane pierwiastki z pierwiastków przedstawiają, rozwija Euklides na liniach. Ale podczas gdy nasze formuły wprawnemu oku odrazu wyjawiają wszelkie swe tajemnice, to linia prosta zupełnie podobną jest do innéj prostéj i tylko jéj długość stanowi tu odróżniającą cechę.

Stereometrya kończy „Elementa“ Euklidesa i nią rozpoczyna się księga jedynasta. W niéj spotykamy najprzód twierdzenia o równoległych i prostopadłych liniach i płaszczyznach, daléj o kątach bryłowych, w końcu o równoległościanach, uogólnionych w ostatniém twierdzeniu pojęciem graniastosłupa.

Księga dwunasta zajmuje się wymierzeniem ostrosłupa, graniastosłupa, stożka, walca, w końcu kuli. Nigdzie jednak nie podaje, jak się właściwie ma rachować. Opuszczenie to zdaje się, że jest umyślne i wskazuje jak niechętnie Grecy posługiwali się arytmetyką przy geometryi.

W trzynastéj księdze mówi o umiarowych w koło w pisanych wielobokach czém już i w czwartéj się zajmował. Tu szczególnie zajmuje się trójkątami i pięciobokami. Składa z tych wieloboków bryły wpisane w kulę; nareszcie wykazuje, że tylko pięć brył umiarowych jest możliwych.

Zapoznawszy się z treścią Elementów nasuwa się pytanie czy Euklides jest samoistnym twórcą dzieła tego. Oczywiście, że nie; dowodzą tego słowa Proklosa, kiedy mówi: wiele od Eudoksosa pochodzących rzeczy w całość zestawił i wiele przez Teateta rozpoczętego ukończył. Zresztą, każdy pisarz podręcznika liczyć się musi z dziełami poprzedników swych, a chcąc ocenić w jakim stopniu jest samoistnym trzebaby dzieła te znać. W téj mierze źródła są bardzo skąpe. Bez wątpienia wiele rzeczy w Elementach jest wynalazkiem Euklidesa jak n. p. dowód twierdzenia Pytagorasa o czém Proklos wspomina [1]). Metoda jakiéj używa Euklides jest syntetyczną, łączy ją jednak czasem z metodą analityczną. Sposób przedstawienia rzeczy ma odrębną cechę, nazywają go téż Euklidesowym. Wypowiada najprzód twierdzenie, następnie przygotowuje figurę wrysowując w nią potrzebne linie pomocnicze, daléj następuje dowód a kończy stereotypowo powtarzające się „quod demonstrandum erat“, „quod faciendum erat“.

Liczne tłómaczenia na wszystkie prawie języki, liczne komentarze, to dowód doskonałości dzieła tego. Wyliczę najważniejsze. Ze starożytnych komentowali Euklidesa Teon z Aleksandryi i Proklos, Boetius przetłumaczył go na język łaciński.

Na wschodzie Pers Nassir Eddin w połowie trzynastego wieku przełożył Euklidesa na arabskie, tłómaczenie to wydrukowano we Florencyi 1598. Z tego i innych tłómaczeń przełożono dzieło to na łacińskie. [2]) Pierwsze wydanie greckie wyszło w Bazylii 1533. Tytuł jego: *Εὐκλείδου στοιχείων βιβλία ιε ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν.*

Odtąd niezliczone wydania szły jedno po drugiem, do najlepszych zaliczają się Claviusza, Dasypodiusza, Barrowa i Gregorego. [3])

1) Proclos com. pag. 110.

2) Dr. H. Weissenborn. Zeitschr. für Math. u. Phys. Suppl. XXV. tłumaczami byli Adelhard Bath i Campanus. Pierwsze tłumaczenie pozostało w rękopisie, podaje ono dowody w skróceniu.

3) W Polsce zajmowano się także Euklidesem, oto prace na tém polu:

Euclidis liber tertius 1444. explicit per manus Johannis de Elkusch.

Tres libri Euclidis 1447. per Johannem de Osswanczyn.

Józefa Naronowicza Narońskiego: Opisanie własności téj księgi wtórego tomu, gdzie w nim Geometria albo Rozmiar ect. 1659. Wzięta z Euklidesa o początkach punktu, linij i wszelkiéj powierzchności; etc.

Pappos [1]) wspomina jeszcze o innych dziełach Euklidesa. Jedno z nich nosiło napis Porismata. Treść tego dzieła a zarazem niedokładną definicyą porismu znajdujemy także u Pappos wraz z kilkoma twierdzeniami pomocniczymi (lemma). Porismata są to twierdzenia niezupełne, które tak wypowiadają zależność między, wedle pewnych praw zmiennymi, że zachodzi potrzeba bliższego wyjaśnienia a zarazem dalszego rozwiązania.[2]) Twierdzenie, że gdy dane jest koło, można zawsze punkt środkowy tegoż koła znaleść jest porismem, bo łączy się z niem dalsze zadanie potrzebujące rozwiązania: podać konstrukcyą, za pomocą której punkt środkowy znaleść można. Zaginione porismata odtworzył, wedle notatek podanych przez Papposa, M. Chasles. Paris. 1860.

W całości zachowało się inne dzieło *Δεδόμενα*, Data siva theoremata geometrica. Jestto zbiór 95 twierdzeń, wedle Papposa tylko 90 [3]) poprzedzonych definicyami. Definicye tłumaczą, co Euklides przez daną ilość, czy to pod względem wielkości, czy pod względem położenia, rozumié.

Z dzieł Euklidesa mamy jeszcze księgę o podziale figur, *περὶ διαιρέσεων βιβλίον* a zaginęły cztéry księgi o przecięciach stożka. Również zaginęło dzieło o miejscach geometrycznych. Oprócz tych dzieł przypisują Euklidesowi i inne treści astronomicznéj (*Φαινόμενα*,) optycznéj i muzycznéj.

Jednym z największych uczonych szkoły aleksandryjskiéj był *Eratostenes*. Prace jego przedstawiają zadziwiającą rozmaitość, jak rozprawa filozoficzna o dobrém i złém i o wymierzeniu ziemi, dzieło o komedyi i geografiia, chronologia i rozprawa o podwojeniu sześcianu. Dla téj wielostronności nazywano go Pentathlon, co oznaczało szermierza, obeznanego ze wszystkimi sposobami walki, jakich na igrzyskach używano.

Urodził on się w Cyrenie w roku 276 albo 275 przed Chr. Ojciec jego nazywał się Aglaos. Kształceniem jego kierował ziomek jego Kallimachus pierwszy bibliotekarz aleksandryjski. Był Eratostenes i w Atenach, gdzie zapewne, poznawszy uczniów Platona, oddał się studyom matematycznym. Powołany do Aleksandryi, został po śmierci nauczyciela swego Kalimacha, bibliotekarzem. Zniechęcony do życia utratą wzroku, zamorzył się w 80 roku życia swego.

Questio geometrica, de Quantitate Planarum, Superficierum, Ex tribus prioribus libris Eucl. et Polyb. lib. desumpta . . . . . . a M. Andrea Stanislao Buchowski CIϽ IϽC.XCIX· Cracoviae.

Questio Stereometrica de Solidis regularibus, Ex libro XI. et sequentibus Euclidis desumpta . . . . . a M. Michaele Andrea Kochański . . . Anno, quo Infinitus factus est finito commensurabilis CIϽ.DCCC-X.

Józef Czech: Początków geometryi ksiąg ośmioro to jest sześć pierwszych, jedynasta i dwunasta z dodanymi przypisami i trygonometryą, dla pożytku młodzi akademickiéj. Wilno 1807. W dziesięć lat uskuteczniono drugie wydanie tego dzieła, także w Wilnie. Tłumaczenie Czecha dokonane z angielskiego Roberta Simsona 1775 Londyn.

1) Coll. math. p. 150.

2) Cantor. Geschicht. d. Math. pag. 241.

3) Coll. math. 158.

Wiele do rozwoju matematyki przyczynił się Eratostenes. W arytmetyce podał sposób jak można do pewnéj granicy wyszukać pierwsze liczby. Jest to tak zwane sito (*κόσκινον* cribrum) Eratostenesa. Sposób ten polega na tem, że wypisuje się wszystkie nieparzyste liczby aż do danéj granicy, od trójki wykreśla się każdą trzecią, od piątki każdą piątą od siódemki każdą siódmą liczbę, licząc zawsze i liczby już przekreślone. Postępując tak daléj pozostaną tylko te liczby, które są liczbami pierwszymi W zastósowaniu okazuje się metoda ta bardzo niedostateczną, zwłaszcza gdy się zamierza szeregowi liczb pierwszych nadać większe rozmiary, a przecież jestto jedyny nabytek w arytmetyce przez przeciąg prawie czterech wieków. Najznakomitsze siły poświęcały swą pracę geometryi i astronomii. Przykład wielkiego Euklidesa i Archimedesa porwał za sobą wszystkie matematyczne talenta, zaledwie przetrawiono odkrycia tego ostatniego a znowu Apollonios pchnął je swoimi dziełami na tę samę drogę. Zjawiska podobne leżą całkiem w naturze ludzkiéj a w rozwoju matematyki kilkakrotnie się powtarzają. Według świadectwa Paposa pisał Eratostenes o przecięciach stożka i miejscach geometrycznych. Dzieła te zaginęły, zajmował się także rozwiązaniem zagadnienia o podwojeniu sześcianu. Rozwiązanie zagadnienia tego zachował Pappos [1])

Między listwami AB i CD Fig. 6. znajdują się trzy prostokątne przystające trójkąty AEH, MKF i NGL albo trzy przystające prostokąty ACEH, MFTK i NGQL, dające się pomiędzy tymi listwami łatwo przesuwać. Dla ułatwienia przesuwania, czyni Pappos na listwach wcięcia, w które trójkąty te wchodzą.

Wspólna wysokość tych trójkątów AC i odcinek LX niech będą danymi prostymi, do których szuka się dwóch średnich proporcyonalnych. Zesuwa się tedy trójkąty tak długo, aż punkty końcowe P i O odkrytych części przeciwprostokątni z punktami A i X utworzą linię prostą, która listwę w R przecina. Z podobieństwa w ten sposób otrzymanych trójkątów ARC, PRH, OKR i XLR mamy proporcyą $AC : PH = PH : OK = OK : LX$.

Wspomieć tu należy o chronologii Eratostenesa, jakkolwiek dzieło to nie należy bezpośrednio do matematyki. Stoi ono najprawdopodobniéj w związku z edyktem Kanopejskim, który nakazuje do liczby 365 dni w roku, co rok czwarty dodawać dzień jeden, jako święto Euergetów. Edykt ten nosi datę 19 Tybi 9 roku panowania Ptolomeusa III. Euergetesa I to jest 7 marca 238 r. przed Chr. Na dwa więc wieki przed Chr. znano rok przestępny.

Przeniesiemy się z Aleksandryi na chwilę do Syrakuz, starożytnéj stolicy Sycylii, aby poznać jednego z najgenialszych matematyków starożytnego świata. Prawie nie potrzebuję dodać, że mówię tu o Archimedesie. Już w starożytności umiano ocenić wielkie zasługi, jakie około podniesienia swéj ulubionéj umiejętności położył, skoro Heraklides napisał jego życiorys. Dzieło to zaginęło. *Archimedes* urodził się w Syrakuzach w roku 287 przed. Chr. Niezgodne są wiadomości o jego pochodzeniu, bo gdy jedni opowiadają, że z niskiego pochodził rodu, drudzy czynią go krewnym króla. To z tego pewném, że z królem Hieronem

1) Papp. Coll. math. lib III. pag 5.

łączyły go przyjacielskie stosunki. Odbywał podróże, był i w Aleksandryi, a że go nie znachodzimy pomiędzy tamtejszymi uczonymi, przypisać to należy przyjaźni, czy też pokrewieństwu z królem Syrakuzańskim. Pracą zajmował się ze szczególną gorliwością, zapominając często o sprawach codziennego życia. Zginął z ręki żołnierza rzymskiego w czasie zdobycia Syrakuz.

Przez dwa lata udaremniał swoimi pomysłami zbobycie miasta tego a machiny, które budował na obronę miastu, otoczyły imię jego sławą. Archimedes jest twórcą umiejętnéj mechaniki i wyższéj geometryi, którą to umiejętność doprowadził do najwyższego punktu rozwoju w starożytności. Przez 19 następnych wieków, aż do Galileusza i Karteziusza, punktu tego geometrya nie przekroczyła. Z pism jego nie wszystkie się zachowały, mają one i pod względem lingwistycznym znaczenie, spisywał je bowiem Archimedes w dialekcie doryckim. Dzieła te są: dwie księgi o równowadze płaszczyzn (*ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπικῶν, ἤ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*) między nie wsunięta rozprawa o kwadraturze paraboli (*τετραγωνισμός παραβολῆς,*) dwie księgi o kuli i walcu (*περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*), o wymiarze koła (*κύκλου μέτρησις*) o liniach spiralnych (*περὶ ἑλίκων*), rozprawa o konoidach i sferoidach (*περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*), o liczbie piasku (*ψαμμίτης*). To są matematyczne pisma Archimedesa; wspomieć tu wypada jeszcze o dwóch fizykalnych rozprawach. Noszą one tytuł: o pływających ciałach (*περὶ τῶν ὀχουμένων*) i o zwierciadłach palących (*περὶ κατόπτρων καυστικῶν*).

Szczególne czyni wrażenie dzieło o wymiarze koła. Rozpatrując się w niém zapominamy o dwudziestu wiekach, które nas dzielą od autora, koniecznie chce się nam wierzyć, że dzieło to nowszych czasów. Dowodzi najprzód twierdzenia, że powierzchnia koła równą jest powierzchni trójkąta prostokątnego, którego jedną przyprostokątnią jest promień tegoż koła, drugą obwód. Bo gdyby ten trójkąt był mniejszy od koła, to możnaby tę różnicę oznaczyć i wpisawszy w koło kwadrat, dojść przez podwajanie boków jego do wieloboka wpisanego w koło, któryby się mniéj różnił od koła, aniżeli wspomniany trójkąt.

Jeżeli K oznacza powierzchnię koła, W powierzchnię wieloboka a T trójkąta to $K > W > T$, a zarazem $O < P$ jeżeli O jest obwodem wieloboka a P koła. Lecz wielobok równa się trójkątowi prostokątnemu, którego jedną przy prostokątnią jest obwód wieloboka, drugą prostopadła w poprowadzona ze środka koła na jeden z boków wieloboka. Prostopadła ta jest mniejszą od r. Mamy więc $W=\frac{O.w}{2}, T=\frac{P.r}{2}$. A że $W > T$ więc i $O.w > P.r$. Iloczyn więc z czynników mniejszych O i w byłby większy od iloczynu z czynników większych P i r. Przypuszczenie więc, że trójkąt T jest mniejszy od koła ostać się nie może. Podobnie ma się i z przypuszczeniem drugiem, że koło jest mniejsze od trójkąta. Bo opisawszy na koło kwadrat, przez podwajanie boków tego kwadratu dojdzie się do wieloboku, którego powierzchnia bardziejby się zbliżyła do powierzchni koła, aniżeli powierzchnia trójkąta. Otrzyma się wtedy następującą nierówność $K < W' < T$. Powierzchnia wieloboka $W'=\frac{O'.r}{2}$, trójkąta zaś $T=\frac{P.r}{2}$. Podłożywszy za W i T wartości mamy $\frac{O'.r}{2} < \frac{P.r}{2}$. Obwód koła musiałby być wedle tego przypuszczenia większy od obwodu opisanego wieloboku. Obliczając stosunek obwodu koła do średnicy, rozpoczyna Archimedes od sześcioboku wpisanego i opisanego. Przez ciągłe podwajanie liczby boków, dochodzi do 96-boku i znachodzi w końcu, dla stosunku obwodu wpisanego i opisanego 96-boku do średnicy, granice $3\,{}^{1}/_{7}$ i $3\,{}^{10}/_{71}$. Metody téj, zwanéj exhauscyjną, która w 17 stuleciu doszła zenitu swego w rachunku całkowym, używa we wszystkich swych pracach Archimedes i ona to nadaje im tę cechę nowości, o któréj się wyżéj wspomniało. Dzieło o wymierzeniu koła jest i pod względem arytmetycznym ważne. Podaje tu Archimedes cały szereg pierwiastków kwadratowych obliczonych w przybliżeniu. Znachodzimy tu, że ${}^{1351}/_{780} > \sqrt{3} > {}^{265}/_{153}$, dalej że $\sqrt{1373943\,{}^{33}/_{64}} > 1172\,{}^{1}/_{8}$, $\sqrt{5472132\,{}^{1}/_{16}} > 2339\,{}^{1}/_{4}$ i wiele innych. W jaki sposób otrzymał te rezultaty nie podaje żaden z pisarzy starożytnych.

Koło prowadzi Archimedesa do brył, które z niego powstają, mianowicie do walca i kuli, a obliczywszy powierzchnię i objętość tych brył wykrywa stosunek, że walec, kula i stożek o równéj podstawie, względnie średnicy, mają się do siebie ze względu na objętość a pierwsze dwie bryły i ze względu na powierzchnię jak 3 : 2 : 1.

Kwadraturę paraboli oblicza Archimedes wpisując w odcinek paraboli trójkąt. Trójkąt ten pierwszy będzie mniejszym od odcinka paraboli o nowe dwa mniejsze odcinki, w które znowu wpisuje trójkąty. Wpisywanie powtarza się i otrzymuje się wielobok, który coraz bardziéj zbliża się do odcinka paraboli, a którego powierzchnia równa się sumie wpisanych trójkątów. Powierzchnie tych trójkątów mają się do siebie jak człony progresyi 1, ${}^{1}/_{4}$, ${}^{1}/_{16}$, ${}^{1}/_{64}$ . . . . ., któréj suma $1\,{}^{1}/_{3}$ wynosi. Powierzchnia więc odcinka paraboli równą jest ${}^{4}/_{3}$ powierzchni pierwszego wpisanego w odcinek trókąta, albo ${}^{2}/_{3}$ opisanego równoległoboku mającego z trójkątem równą podstawę i wysokość.

Załatwiwszy się z parabolą przechodzi Archimedes do brył, które powstają przez obrót przecięć stożkowych około ich osi. Rozważa więc sferoidę (elipsoid), paraboliczny stożek (paraboloid) i hyperboliczny stożek (hyperboloid.) Nazwy paraboloid i hyperboloid oznaczają właściwie tylko linie krzywe do parabol i hyperbol podobne i niewłaściwie rozszerzono je do nazwania ciał powstałych z obrotu paraboli i hyperboli około osi. [1]) Nazwy Archimedesa dokładnie oddają i sposób powstawania tych brył i kształt ich; paraboliczny stożek jest więc bryłą do stożka podobną i powstaje przez obrót paraboli około swéj osi, podobnie rzecz się ma ze stożkiem hyperbolicznym, sferoid jest bryłą podobną do kuli a powstaje z obrotu elipsy. Archimedes nie opisuje bliżéj téj bryły przymiotnikiem eliptyczny, niezachodzi tu bowiem żadna wątpliwość, co do kształtu przecięcia, z którego sferoid powstaje.

Obliczając objętość paraboloidu opisuje na nim i wpisuje weń walce, daléj dowodzi, że gdy wysokość tych walców w nieskończoność maleje, różnica w objętości walców wpisanych i opisanych będzie nieskończenie małą. Stosuje więc i tu metodę, jakiéj przy obliczaniu powierzchni koła użył. W dziele o pa-

1) Müller. Beiträge zur Terminologie der grch. Matematiker. 1860.

raboli i konoidach odwołuje się Archimedes do Elementów przecięć stożkowych. Okoliczność ta dała powód do przypuszczenia, że Archimedes takie Elementa przecięć ułożył. Czy Archimedes odwołuje się do dzieła swego, czy do Elementów Euklidesa, który i o przecięciach stożkowych pisał, rozstrzygnąć trudno, zwłaszcza że pisarze starożytni mówiąc o Euklidesie nazywają go zwykle pisarzem Elementów a pod wyrazem *στοιχεῖα* prawie zawsze dzieło Euklidesa rozumieją. W pismach swych używa Archimedes dla przecięć stożka starych nazw, które sposób ich powstania tłómaczą, zna także asymptoty hyperboli i nazywa je najbliższymi paraboli *αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς.*

W dziele o równowadze ciał i punkcie ciężkości figur płaskich udowadnia najprzód znane prawo dzwigni, potem oznacza punkt ciężkości prostokątów i trójkątów, w końcu odcinka parabolicznego.

Archimedes pierwszy okazał własności linii spiralnéj, która téż nosi nazwisko jego (śruba Archimedesa), chociaż wynalazcą jej, jak to sam Archimedes podaje, był przyjaciel jego Konon.

Pismem swojem o liczbie piasku, chciał Archimedes okazać, że ilość ziarnek piasku na ziemi wcale nie jest nieskończenie wielką, lecz da się wyrazić liczbą. Chodziło tu Archimedesowi o wykazanie jak można wymawianie wysokich liczb uprościć a może chciał pojęciu nieskończenie małego, które wprowadził w matematykę, przeciwstawić pojęcie nieskończenie wielkiego, a przedstawić tego nie mógł na ilościach przestrzennych, liczba tylko mogła to pojęcie objaśnić.

Wiele dzieł Archimedesa zaginęło, znamy je zaledwie z tytułów. W jednóm zajmuje się siedmiobokiem w około wpisanym, inne traktuje o stykających się kołach, trzecie o liniach równoległych, czwarte o trójkątach. Pappos [1]) wspomina o 13 półumiarowych wielobokach, które tworzył Archimedes. Zamknięte one były umiarowymi, ale ze względu na liczbę boków różnymi wielobokami, „aequilateris quidem, et aequiangulis polygonis non autem similibus contenta“. Jedna z tych brył ograniczona jest ośmioma ścianami, trzy czternastoma, na ograniczenie dwóch potrzeba 26 ścian, trzy ograniczone są 32 ścianami jedna ma ścian 38, dwie 62 a ostatnia 92.

Dziesięć z tych brył mają ściany dwojakiego rodzaju, trzy trojakiego rodzaju. Do ograniczenia tych brył używa Archimedes trójkątów, czworoboków, pięcioboków, sześcioboków, ośmioboków, dziesięcioboków i dwunastoboków.

Najwyżej ze wszystkich dzieł swoich stawiał Archimedes dzieło o kuli i walcu, skoro chciał aby walec z kulą wpisaną zdobił jego grobowiec. Po tym znaku odszukał Cicero grobowiec ten w 75 r. przed Chr. i odnowił go. Zapewne przez pamięć na wielkiego swego ziomka, ten sam znak umieszczali Syrakuzanie na swych monetach. W księdze o kole i walcu znachodzimy między innymi twierdzenie, że powierzchnia kuli równą jest poczwórnéj powierzchni wielkiego koła, daléj, że powierzchnia walca, który ma za podstawę koło wielkie a za wysokość średnicę czyli walca na kuli opisa-

1) Coll math. lib. V. pag. 83 i 84.

nego, półtora razy jest większą od powierzchni kuli. Znajduje się tam i zagadnienie, które przez długi czas zajmowało Archimedesa; kulę płaszczyzną tak przeciąć, ażeby powierzchnie i objętość otrzymanych w ten sposób odcinków stały w pewnym stosunku. Zagadnienia tego Archimedes nie rozwiązał sprowadził je do rozwiązania proporcyi $(a-x) : b = c^2 : x^2$.

O obronie dwuletniéj Syrakuz i o spaleniu floty rzymskiéj wiele piszą starożytni, jednakże nie podają w téj mierze bliższych wyjaśnień. Spalenie floty połączyli, najprawdopodobniéj z dziełem Archimedesa o zwierciadłach palących nie rozumiejący rzeczy pisarze; nie wiedzieli bowiem, że na tak daleką odległość nie mogły działać sferyczne zwierciadła, mające nadto stałe ogniska. Wielką jednak musiała być sława Archimedesa w starożytności, skoro nie wahano się przypisać mu rzeczy nawet niemożliwych.

Nie pogardzał, jak widzimy, Archimedes i praktycznem zastosowaniem swéj umiejętności, a dzieło o punkcie ciężkości, zwykle do pism matematycznych zaliczane, wraz z inném o pływających ciałach jest podstawą nowéj umiejętności. Dziełami tymi stał się Archimedes ojcem machaniki, bo to, co w téj materyi pozostawił Arystoteles, wcale nie nosi znamion matematycznéj umiejętności. Jeszcze o jednym wynalazku z uwielbieniem wspomina Cicero [1]). Był to przyrząd poruszany wodą, a służył do objaśnienia biegu ciał niebieskich. Opisał go Archimedes w zaginionem dziele *περὶ σφαιροποιΐας*.

Dzieła Archimedesa znalazły wielu komentatorów i tłómaczy, do tych należy: Eutokios, Commandinus, Maurolykus, Borelli i inni. Szczególnie ważnym jest komentarz Eutokiosa, zawiera bowiem wiele historycznych notatek. Dołączono go do dzieł Archimedesa wydanych w językach greckim i łacińskim w Bazylei 1544.

W przedmowie do kwadratury koła wspomina Archimedes o przyjacielu swoim *Kononie z Samos*, wynalazcy linii spiralnéj, oddając wielkie pochwały jego talentowi i ubolewając nad wczesną śmiercią jego. Według Apoloniosa [2]) miał Konon pisać o przecięciach stożkowych, wszystkie jednak pisma Konona zaginęły. Z pism Archimedesa dowiadujemy się jeszcze o jednym matematyku. Nazywał się *Dositeos*, prócz tego, że był przyjacielem Archimedesa, ani o pracach, ani o życiu jego nie mamy żadnych wiadomości.

W przybliżeniu tylko da się oznaczyć czas, w którym żył *Nikomedes* wynalazca konchoidy. Żył on najprawdopodobniéj między rokiem 250 a 150 przed Chr. Rozwiązał w bardzo dowcipny sposób zagadnienie o podwojeniu sześcianu za pomocą krzywéj, którą dla podobieństwa z muszlą konchoidą nazwał. Linia ta ma tę własność, że wszystkie promienie poprowadzone z punktu stałego do téj linii, inną prostą tak są przecięte, że odcinki tychże leżące między konchoidą a przecinającą prostą, są równe, Punkt stały nazwał Nikomedes biegunem (polus), prostą zaś przecinającą promienie, kierownicą (regula). Odległość między biegunem a prostą może być równą, większą lub mniejszą od stałego od-

1) Tusculanarum Quaestionum lib. I. 25

2) Apollonii Per. Conic. libr. octo: Horum autem primum Conon Samius ad Thrasydeum scribens explicavit, non rite confectis demonstrationibus quamobrem Nicoteles Cyrenaeus cum nonnihil reprehendit . . . . . . lib. IV. Praef. pag. 217.

cinka między prostą a konchoidą i wedle tego może ona mieć trzy rozmaite kształty. Czy je starożytni znali, niewiadomo, a już zupełnie niejasne są słowa Papposa: „linea vocetur conchoides prima, nam et secunda, et tertia, et quarta exponitur, quae ad alia theoremata utiles sunt. [1])

Do kreślenia konchoidy podał Nikomedes przyrząd, za pomocą którego można ją jednym ciągiem podobnie jak koło wykreślić. Ani quadratrix ani linie spiralne nie miały podobnego przyrządu. Po zwykłéj linii i cyrklu, które miały być wynalazkiem bratanka mitycznego Dedala, przyrząd ten jest pierwszym, do rysunku geometrycznego. Figura 7. objaśnia ten przyrząd. Składa się on z dwóch linii złączonych z sobą pod kątem prostym. Jedna z tych linii, która zastępuje kierownicę ma wzdłuż wycięcie, druga sztyft przedstawiający biegun. Oprócz tego jest jeszcze inna linia mająca wzdłuż podobne wycięcie jak pierwsza i sztyft. Wycięciem swojem zesuwa się ta linia po biegunie tak ażeby, jéj sztyft wśród ruchu tego pozostał w wycięciu kierownicy, wtedy koniec jéj opisuje konchoidę.

Nikomedes poznał, że konchoida coraz bardziéj zbliża się do kierownicy, a Proklos nawet o asymptotach konchoidy mówi, poznał także, że konchoida przecina każdą prostą biegnącą między nią a kierownicą, w końcu użył jéj do rozwiązania zagadnienia o podwojeniu sześcianu.

Rozwiązanie to należy do najpiękniejszych. Niech Fig. 8. AB i BC będą tymi prostymi, do których wyszukać mamy dwie średnie proporcyonalne. Uzupełniany prostokąt ABCD, dzielimy AB i BC na dwie równe części, prowadzimy EF prostopadle do BC w punkcie środkowym i odcinamy z punktu C prostą $CF = AL$. Punkty D i L łączymy prostą DL i przedłużamy ją aż do zetknięcia się z przedłużeniem BC w punkcie G. Punkt G łączymy z punktem F i prowadzimy CH równolegle do GF. Równoległą CH uważamy za kierownicę, F za biegun, $AL = \frac{1}{2} AB$ za oddalenie konchoidy od kierownicy i wrysowujemy konchoidę, która przecina przedłużoną BC w punkcie K. Konchoidę w tym celu się rysuje, ażeby w kąt HCK wpisać $HK = AL$ w ten sposób, by ta linia w przedłużeniu spotkała punkt F. W końcu poprowadziwszy prostą KDM otrzymujemy szukane średnie proporcyonalne AM i CK.

Z podobieństwa trójkątów AMD i CDK mamy $AM : DC = AD : CK$ albo $AM : AB = BC : CK$ ponieważ $\frac{1}{2} AB = AL$ zaś $\frac{1}{2} GC = BC$, rzetelną jest proporcya $AM : AL = GC : CK$ ta zaś w połączeniu z proporcyą $GC : CK = FH : HK$ daje $AM : AL = FH : HK$. ale i

$$(AM + AL) : AL = (FH + HK) : HK \text{ czyli } ML : AL = FK : HK$$

a że $AL = HK$ to i $ML = FK$ więc i $ML^2 = FK^2$. Jednak

$$(AM + AL)^2 = \overline{AM}^2 + 2\,AM.AL + \overline{AL}^2 = AM\,(AM + 2\,AL) + \overline{AL}^2;$$

a że $AM + 2\,AL = MB$, a $AM + AL = ML$ mamy więc

$$\overline{ML}^2 = AM.BM + \overline{AL}^2. \text{ Podobnie i } \overline{EK}^2 = CK.BK + \overline{CE}^2.$$

Dodawszy po obu stronach $\overline{EF}^2$ otrzymamy

$$\overline{EK}^2 + \overline{EF}^2 = CK.BK + \overline{CE}^2 + \overline{EF}^2 \text{ ze względu na}$$

trójkąty EFK i EFC jest $\overline{EK}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{FK}^2$ a $\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{FC}^2$.

Podstawiwszy te wartości w poprzednie zrównanie otrzymamy

$$\overline{FK}^2 = CK.\,BK + \overline{FC}^2.$$

1) Coll. math. lib IV, Propos. XXII.

Porównawszy ostatnie zrównanie, ze zrównaniem powyżej otrzymaném $\overline{ML}^2 = AM.MB + \overline{AL}^2$, otrzymamy, ponieważ $\overline{FK}^2 = \overline{ML}^2$ a $CF = AL$ $CK.\ BK = AM.BM$ a stąd proporcyą $BM : BK = CK : AM$.

Ponieważ $BM : BK = AB : CK$ mamy więc z połączenia proporcyą $AB : CK = CK : AM$. Z podobieństwa trójkątów CDK i MAD wynika proporcya

$$CD \text{ albo } AB : CK = AM : AD \text{ albo } BC.$$

Zestawiwszy ostatnie dwie proporcye otrzymujemy proporcyą ciągłą $AB : CK = CK : AM = AM : BC$, która rozwiązuje zagadnienie.

Pappos [1]) mówi: et nos in Analemma Diodori, cum velemus angulum tripartito secare praedicta linea usi simus. Ze słów tych widać, że Pappos rozwiązał zagadnienie o podziale kąta na trzy równe części za pomocą konchoidy. Proklos jednak opowiada, że rozwiązania tego dokonał sam wynalazca konchoidy. W czém różniły się te dwa rozwiązania nie wiadomo, podaję rozwiązanie Papposa.

Dany jest kąt ABC. Fig. 9. Z jakiegokolwiek punktu poprowadzono prostopadłą AC. Uzupełniwszy prostokąt ABCF przedłuża się prostą FA aż do E. Punkt E otrzymuje się kreśląc konchoidę w ten sposób, aby B było biegunem, AC kierownicą, a odległość stała między konchoidą a kierownicą równa się podwójnéj przekątni prostokąta AB. Wtedy kąt EBC jest trzecią częścią danego kąta. Przepoławiamy DE i punkt środkowy G łączymy z punktem A. Ponieważ ADE jest trójkątem prostokątnym, to $\frac{1}{2}\ DE = DG = GE = GA$. Mamy przeto dwa trójkąty równoramienne ABG i AEG. Kąt $AGB = 2\ AEB$ jako zewnętrzny trójkąta AGE, ale kąt $AEB = EBC$ jako naprzemianległe, zaś kąt $AGB = ABG$, więc $ABG = 2\ EBC$.

Przecięciami stożka; jak się wyżéj wspomniało, zajmował się Euklides [2]) a o dwóch innych matymatykach, pracujących również na tem polu, Kononie z Samos i Nikotelesie z Cyreny wspomina Apolonios. [3]) Żaden jednak nie odłączył krzywych tych od stożka i nie poznał ich, jako miejsc geometrycznych w płaszczyźnie. Twierdzeniem: do prostéj, pod danym kątem przyłożyć (*παραβάλλειν*) równoległobok, któryby był równy danemu trójkątowi, dalej podobnymi twierdzeniami (28 i 29) księgi VI. Elementów, był przecież Euklides tak bliskim odkrycia tego. Bo gdyby był przyłożył do prostéj po obu stronach téjże kwadraty równe danemu prostokątowi n. p. ABCD Fig. 10, byłyby boki tych kwadratów swą długością wskazały punkt E pod linią daną i odpowiedni mu punkt nad daną linią. Powiększając podstawę tych prostokątów a zatrzymując tę samę wysokość, otrzyma się jako następny prostokąt ACFG, a bok kwadratu równego temuż prostokątowi zaznaczy punkt H. Bokiem kwadratu równego prostokątowi trzeciemu jest KL, czwartemu MN. i t. d. Jeżeli punkty A, E, H, L, N połączymy, otrzymamy linię krzywą złożoną z dwóch gałęzi a własność jej widoczna ze sposobu w jaki powstała. Jest to parabola. Na podstawie twierdzeń 28 i 29 księgi VI. Elementów możnaby otrzymać elipsę

1) Coll, math lib. IV. Propos. XXII.
2) Pappos VII. 164. Euklidis libros quatuor conicorum cum Apolonios explevisset.
3) Conicorum lib IV. pag. 217.

i hyperbolę w podobny sposób. Pierwszy *Apolonios* tę własność przecięć stożkowych wykrył i w ten sposób przeniósł je na płaszczyznę,[1]) pierwszy też zmienił nazwiska tych przecięć, odpowiednio do nowego ich powstawania, przez przykładanie płaszczyzn do danéj prostéj, pierwszy w końcu poznał, że w każdym stożku wszystkie trzy przecięcia są możlliwe [2]). Przecięcie stożka prostokątnego nazwał parabola, rozwartokątnego hyperbola, ostrokątnego elipsa. Te odkrycia zjednały mu zaszczytny przydomek wielkiego geometry. Quem illius temporis homines, admirati propter mirificam conicorum theorematum demonstrationem Magnum Geometram apellarunt, mówi o nim Eutokios.

Nie wiele powiedzieć można o życiu Apolloniosa. Urodził się w Perga w Pamphilii i stąd nazwano go Pergeus. Żył za panowania Ptolomeusza Euergetesa, i Ptolomeusza Filipatora. Jako młodzieniec przybył do Aleksandryi i uczył się matematyki od następców Euklidesa. Późniéj przebywał w Perganum, gdzie zaprzyjaźnił się z pewnym Eudemosem, któremu poświęca trzy pierwsze księgi swego dzieła

Dziełem swojem „Conicorum libri octo“ stanął Apolonios obok największych matematyków starożytności. W księdze I. tłómaczy Apolonios powstawanie stożka przez obrót prostéj, utwierdzonéj w punkcie a zsuwającéj się po obwodzie koła. Każde przecięcie przez ten punkt stały jest trójkątem a na szczególniejszą uwagę zasługuje trójkąt przechodzący przez oś. Daléj prowadzi Apolonios nowe cięcia stożka, zawsze prostopadle do trójkąta przechodzącego przez oś i pokazuje, jak nadając tymże rozmaity kierunek do boku stożka, otrzymuje się różne przecięcia. Prosta, w któréj się przecina przecięcie stożka z trójkątem przechodzącym przez oś, jest średnicą, punkt, w którym średnica dotyka powierzchni stożka, jest wierzchołkiem przecięcia. Parabolę otrzymuje Apollonios przecinając stożek równolegle do boku jego a charakterystyczną własność téj krzywéj wyprowadza jak następuje. [3])

Trójkąt $AB\Gamma$ (Fig. 11.) jest przecięciem przeż oś stożka. Przez prostą ΔE, która prostopadłą jest do $B\Gamma$ przecinamy stożek tak, by średnica przecięcia ZH równoległą była do boku $A\Gamma$. ΔZE jest figurą przecięcia. Z punktu Z poprowadzono prostopadłą $Z\Theta$ w płaszczyźnie przecięcia a długość jéj wedle założenia czyni zadość proporcyi $B\Gamma^2 : BA.A\Gamma = Z\Theta : ZA$.

Z jakiegokolwiek punktu K krzywéj idzie równoległa KA do ΔE. Przez A poprowadźmy równoległą MN do $B\Gamma$. Płaszczyzna przechodząca przez $KAMN$ będzie równoległą do podstawy i będzie kołem o średnicy MN, a że KA stoi prostopadle na MN więc $MA.NA = KA^2$.

Wedle założenia $Z\Theta : ZA = B\Gamma : \Gamma A$

$B\Gamma : BA$. Z podobieństwa.

trójkątów $B\Gamma A$, MNA i MAZ mamy propozycyą

$B\Gamma : \Gamma A = MN : NA = MA : AZ$, daléj

1) Pappos. Coll. math. lib. VII.

2) Verum postea Apollonius Pergaeus universe inspexit in omni cono, tam recto, quam scaleno omnes sectiones inesse juxta plani ad conum diversam inclinationem. Eutocii Commentarii.

3) Conicorum lib. I. propositio XI. pag. 31.

$$B\Gamma : BA = MN : MA = MA : MZ = NA : ZA$$

więc i $\Theta Z : ZA = MA \,.\, NA : AZ \,.\, ZA$.

Przyjąwszy ZA za wspólną wysokość prostokątów o podstawach ΘZ i AZ, otrzymamy proporcyą $\Theta Z : AZ = \Theta Z \,.\, ZA : AZ \,.\, ZA$.

Z porównania dwóch ostatnich proporcyi otrzymamy

$$MA.NA : AZ.AZ = \Theta Z.ZA : AZ.AZ$$

a że w proporcyi téj wyraz drugi równy czwartemu więc

$$MA.NA = \Theta Z.ZA; \text{ ale } MA.NA = KA^2$$

więc $KA^2 = \Theta Z.ZA$. Przecięcie czyniące temu warunkowi zadość, nazywa się parabola a prosta ΘZ ὀρθή w łacińskiem latus rectum, dziś parameter.

Z powyższego widzimy, że Apolonios te same linie prowadzi, których i dziś w analitycznéj geometryi używamy. Mamy tu zupełny układ współrzędnych, początek jego leży na przecięciu stożka, osią odciętych jest średnica przecięcia a osią rzędnych jest prostopadła poprowadzona w punkcie początkowym układu. Parameter jest u Apoloniosa prosta wystawiona na wierzchołku przecięcia stożka prostopadle do jego średnicy, która tak się ma do oddalenia wierzchołka przecięcia od wierzchołka stożka, jak kwadrat z podstawy trójkąta przechodzącego przez oś stożka do prostokąta powstałego z obu pozostałych boków tegoż trójkąta. Przecięcie, w którym kwadrat rzędnych równa się iloczynowi z odciętych i parametru nazywa Apolonios parabolą, hyperbolą, gdy kwadrat większy od iloczynu, a elipsą, gdy kwadrat mniejszy od iloczynu z odciętych i parametru.

Apolonios nie rachuje formułkami i równaniami, jak się to dziś czyni, ale łączy proporcye linij i płaszczyzn, a są one tylko innym wyrazem téj saméj myśli, którą zawierają w sobie równania przecięć stożkowych i prowadzą do tych samych wyników.

W pierwszych czterech księgach zebrał Apolonios wszystko to, co znanem było o przecięciach stożkowych jego poprzednikom; metoda jednak, jakiéj w przedstawieniu rzeczy używa, daléj nowy zupełnie punkt widzenia, z którego rozpatruje przecięcia te, w końcu materyał ostatnich ksiąg dzieła jego to wyłączna własność Apoloniosa. Dzieło to jest koroną greckiéj geometryi, jest ostatnim i najwyższym stopniem, do którego dotarła ta umiejętność w starożytności.

Na szczególną uwagę zasługuje księga piąta, w któréj się Apolonios wysoko po nad swój wiek wznosi. Księga ta zajmuje się najkrótszymi i najdłuższymi liniami, które do przecięcia stożkowego z danego punktu poprowadzić można. Jakkolwiek Apolonios bardzo wiele przypadków uwzględnia, ogranicza się jednak przyjmując, że punkt dany leży na obwodzie, albo na jednéj z obu osi przecięcia.

Księga szósta zawiera twierdzenia o przystawaniu i podobieństwie przecięć stożkowych i odcinków tychże, w szczególności zajmuje się rozmaitymi przypadkami zagadnienia, jak na danym prostym stożku oznaczyć przecięcie przystające do danego przecięcia.

Księga siódma podaje kilka nowych własności przecięć stożkowych, szczególnie ze względu na średnice i osie. Na księdze siódméj i na krótko podanéj przez Papposa treści, dzieła Apoloniosa oparł i się odtworzył Halley prawdopodobnie na zawsze zaginioną księgę ósmą, dziwnie przejmując się duchem metody Apoloniosa. Hypatia, Eutokios, Pappos i wielu innych komentowało dzieło to. Zachowały się komentarze Eutokiosa i Papposa. Pierwszy obejmuje tylko cztery pierwsze księgi, w drugim znachodzimy wiele twierdzeń pomocniczych (lemma), które często z dziełem Apoloniosa nie stoją w bezpośrednim związku. Póżniej przełożono dzieło Apoloniosa na język arabski. Do 17. stulecia znane były tylko pierwsze cztéry księgi. Sądzono, że następne zaginęły. Piątą odtworzył sławny włoski matematyk Viviani. „Divinatio in quintum Apollonii conicorum librum 1659“. Golius i Borelii równocześnie odkryli piątą, szóstą i siódmą księgę, pierwszy na wschodzie, drugi w bibliotece Medyceuszów we Florencyi, w tłómaczeniu arabskim. Najlepszego wydania dokonał Halley „Apollonii Pergaeii. Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo“ Oxoniae 1710.

Z licznych dzieł Apoloniosa zachowało się jeszcze jedno, dwie księgi „*περὶ τῆς τοῦ λόγου ἀποτομῆς*“ (de sectione rationis) w tłumaczeniu arabskiém. Na język łaciński przełożył i wydał Halley 1706 [1]). Rozwiązuje tu Apolonios rozmaite wypadki zagadnienia z punktu leżącego na płaszczyźnie dwóch, co do położenia danych prostych, poprowadzić poprzeczną, któréjby odcinki od danego punktu do punktów przecięcia się z tymi prostymi, były w pewnym danym stosunku. Trzy takie zagadnienia podał Niewęgłowski w swojej geometryi [2]).

Inne dzieła zaginęły, lecz znaczną liczbę tychże otworzyli nowsi matematycy, wedle treści podanéj przez Papposa. Tak odtworzył Snellius *περὶ διωρισμένης τομῆς* (de sectione determinata), Halley oprócz ósméj księgi Conicorum *περὶ χωρίου ἀποτομῆς* (de sectione spatii), Vieta *περὶ ἐπαφῶν* (de tactionibus), Gethaldi *περὶ νεύσεων* (de inclinationibus), Fermati Simpson *ἐπίπεδοι τόποι* (loci plani). Oprócz tych zaginęło dzieło o dwunastościanie i dwudziestościanie wpisanym w to samo koło, daléj dzieło pod tytułem *περὶ τοῦ κοχλίου*, którego treść jest zupełnie nie znaną.

Usiłowania, podjęte celem odtworzenia zaginionych dzieł przez najznakomitszych matematyków są najlepszym dowodem jak znakomicie Apolonios przyczynił się do rozwoju matematyki.

Od Nikomedesa nieco młodszym był *Diokles*, wynalazca Kissoidy [3]), któréj użył do rozwiązania zagadnienia o podwojeniu sześcianu. Dzieło jego *περὶ πυρείων* zaginęło. *Πυρείων* oznacza przyrząd złożony z dwóch drewnianych kawałków, służących do wzniecenia ognia. Co mogło być treścią dzieła

1) Tłómaczenie niemieckie Augusta Richtera Elbląg 1836.

2) Geometrya przez Niewęgłowskiego Paryż 1869 str. 416 i dalsze.

3) Pappos, który tak skrzętnie zebrał wszystkie rozwiązania problemu delickiego pominął rozwiązanie Dioklesa, chociaż o kisoidzie kilkakrotnie wspomina n. p. Lib. IV. prop. 30. Rozwiązanie zachował Eutokios Comm. in libr. II. Archim de splacer et cyl.

tego niewiadomo. Eutokios zachował rozwiązanie zagadnienia delickiego. W koło AHEG, na prostopadle stojących średnicach, odcięto proste AC i CM, dla których mamy znaleść dwie średnie proporcyonalne. W koło to wrysowuje się kissoidę, to jest linię krzywą EDG Fig. 12., mającą tę własność, że odcinek DE prostéj z wierzchołka E kissoidy poprowadzonéj, a leżący wewnątrz téj krzywéj, równa się odcinkowi LK téj saméj prostéj leżącemu między kołem a prostopadłą wystawioną w punkcie A do średnicy AE. Linię krzywą tę otrzymywał Diokles w następujący sposób. Symetrycznie do HG prowadzimy IK i BF prostopadle do AE. Prosta łącząca punkty E i K przecina BF w punkcie D, który leży na kissoidzie. W podobny sposób prowadząc więcéj prostopadłych otrzymamy cały szereg punktów, a z połączenia tych punktów otrzymamy kissoidę. Punkty A i M łączymy prostą, przedłużając ją aż do punktu zetknięcia się z kissoidą w D. Wtedy trójkąt EKI podobny jest do BDE, mamy więc proporcyą IK : IE = BD : BE ale AI : IK = IK : IE.

Z porównania obu proporcyi otrzymujemy

$$AI : IK = BD : BE \text{ albo } IK : AI = BE : BD$$

a że IK = BF a AI = BE więc BF : BE = BE : BD, jednak

AB : BF = BF : BE mamy więc proporcyą ciągłą AB : BF = BF : BE = BE : BD. Proste więc BF i BE są średnie proporcyonalne między AB i BD a tem samem i do AC i CM, bo AB : BD = AC : CM.

Hypsikles z Aleksandryi żył według Heilbronnera i innych za czasów Ptolomeusa, więc przy końcu drugiego wieku po Chr. Prawdopodobniejszym jest czas, jaki podaje Vossius, Bretschneider i Cantor, opierając się na astronomicznem dziele Hypsiklesa *ἀναφορικός*. Według tych ostatnich żył Hypsikles między 250 a 150 rokiem przed Chr. Przypisują mu zwykle 14 i 15 księgę Elementów Euklidesa. Najnowsze badania wykryły jednak takie różnice między obydwoma księgami, że dwóch autorów przyjąć potrzeba, 14. mógł napisać Hypsikles, autor 15. żył w kilka wieków po Chr. Czternasta księga zajmuje się porównaniem brył umiarowych.

Między rokiem 200 a 100 przed Chr. żył *Perseus*, który przez obrót koła, naokoło prostéj leżącéj w płaszczyźnie koła a nie przechodzącéj przez jego środek, otrzymywał bryły zwane spirami. Kształt tych brył zmieniał się w miarę większego lub mniejszego oddalenia osi obrotu od środka koła. Spiry przecinał Perseus płaszczyzną równoległą do osi obrotu a z przecięcia otrzymywał krzywe, których własności rozpatrywał. Szczególniéjszego znaczenia nie miały te linie, poszły w zapomnienie.

W części pierwszéj Księgi V. podaje Pappos [1]) kilka zajmujących twierdzeń o figurach, mających równe obwody (isoperimetryczne), nie podając, kto twierdzenia te postawił i udowodnił. Znajdują się one także w komentarzu Theona z Aleksandryi, skąd się także dowiadujemy, że wynalazł je *Zenodorus*.

Wspomnimy tu jeszcze o jednym matematyku, jest nim *Serenus* z Antissy na wyspie Lesbos. Znakomite dzieło Apoloniosa wywarło ten wpływ, że starano się je przez badanie wszystkich możliwych przecięć stożka i walca, uzu-

1) Coll. math. lib. V. pag. 74. et syg.

pełnić i zaokrąglić. Podobny cel miał i Serenus na oku, pisząc dwa traktaty o przecięciach walca i przecięciach stożka przechodzących przez wierzchołek. Dzieła te zdradzają żywy interes w rozwijaniu teoretycznem wiedzy i wcale nie widać usiłowania, by zużytkować praktycznie wykryte prawdy.

Nowy praktyczny kierunek geometryi aleksandryjskiéj czuć się daje dopiero z początkiem 200 roku przed Chr. a około roku 100 znajduje swego najznakomitszego przedstawiciela w *Heronie* z Aleksandryi. Nauczycielem jego był Ktesybius [1]). Dzieła Herona zachowały się w wielu rękopismach, są one jednak wszystkie zepsute mnóstwem dodatków w jednych a opuszczeń w innych. Zajmował się mechaniką, pisał o windach, o przyrządach do rzucania pocisków, tytuły dalszych jego dzieł są: geometrya, geodezya, stereometrya, o wymiarach i o dioptrach. Geometrya i stereometrya podaje porównanie rozmaitych miar, sposoby obliczania płaszczyzn i brył, rozprawa zaś *περὶ διόπτρας* zasady sztuki mierniczéj.

Nie teoretyczny rozwój matematyki, ale praktyczne zastosowanie zdobytych prawd jest celem dzieł Herona. Tworzyły one najprawdopodobniéj dzieło jedno, [1]) które pod ręką póżniejszych przepisywaczy rozpadło się na pojedyncze rozprawy. Przeznaczone ono było szczególnie dla mierniczych i budowniczych.

Z dzieł Herona widać, że był to nieposledni matematyk, a że w starożytności nie zyskał tego rozgłosu i sławy, co inni, że nie znalazł komentatorów jak Euklides, Archimedes lub Apolonios; leży to w charakterze dzieł jego, w których, jak się już powiedziało, idzie mu nie o teoryą ale o praktyczne zastósowania. Dzieła te mają ze względu na praktykę wysoką wartość, a jego sztuka miernicza tak jest doskonałą, że koniecznie przypuścić trzeba, iż inne dzieła podobnéj treści poprzedziły dzieło Herona. Korzystał najprawdopodobniéj i z dzieł egipskich, których może za jego czasów używano jeszcze a téj okoliczności dowodzić się zdaje sposób, w jaki rzecz przedstawia. Powtarzające się często u Herona „*ποίει οὕτος*, uczyń to tak“ przedstawia się w prost, jako tłómaczenie podobnych zwrotów z papirusu Rinda, zawierającego matematyczny podręcznik Ahmesa egipskiego matematyka.

Jakkolwiek teorya matematyki nie jest celem głównym dzieł Herona, to niepodobna, aby matematyk téj miary, co Heron nie przyczynił się do rozwoju swéj umiejętności. Jako taki przyczynek uważać należy rozwiązanie trójkąta z danych trzech boków, czyli tak zwane twierdzenie Herona.

Skoro w trójkąt ABC Fig. 13. wpiszemy koło, okaże on się dwa razy większym, aniżeli trójkąt, którego wysokością jest promień HE a podstawą połowa obwodu trójkąta ABC czyli CG, jeżeli $BG = AD$. HL stoi prostopadle na HC, BL na BC. Następnie prowadzimy prostą CL i promienie HE, HD, HF, proste HC, HA i HB.

---

1) Ktesybius syn golarza w młodości sam prowadził rzemiosło ojca, doszedł do wielkiego znaczenia i sławy jako genialny wynalazca fizykalnych przyrządów jako to: wodnych organów i przyrządu do rzucania pocisków za pomocą zgęszczonego powietrza. Żył między rokiem 170 i 117 za panowania Ptolomeusa IX. Physkon, zwanego także Euergetesem II.

2) Cantor: Geschich. d. Math. 318.

Ponieważ kąty HCL = CBL = 90°, jest więc CL średnicą koła na trójkątach CHL i CBL opisanego a czworobok CHBL jest w koło wpisanym więc przeciwległe kąty CHB + CLB = 180°. Ale kąt CHB = CHE + EHB = $\frac{1}{2}$ FHE + $\frac{1}{2}$ DHE, dodawszy do tychże AHD = $\frac{1}{2}$ DHF, otrzymamy CHB + AHD = 180°, bo kąty FHE + DHE + DHF = 360°; więc kąt CLB = AHD.

Ale kąt CBL = ADH = 90°, więc trójkąt BCL podobny do DAH a stąd proporcya:

$$BC : BL = DA : DH = BG : HE \text{ czyli}$$

$\frac{BC}{BG} = \frac{BL}{HE}$. Z podobieństwa trójkątów KBL i HEK mamy $\frac{BL}{HE} = \frac{KB}{EK}$, a zatem $\frac{BC}{BG} = \frac{KB}{EK}$ dodawszy obustronnie jednostkę otrzymamy:

$\frac{BC}{BG} + \frac{BG}{BG} = \frac{KB}{EK} + \frac{EK}{EK}$ albo $\frac{CG}{BG} = \frac{BE}{EK}$, a więc i

$\frac{CG^2}{CG.BG} = \frac{CE.BE}{CE.EK}$ położywszy zamiast CE.EK wartość HE^2 otrzymaną z trójkąta prostokątnego CHK mamy $\frac{CG^2}{CG.BG} = \frac{CE.BE}{HE^2}$, a stąd

$(CG.HE)^2 = CE.\ EB.\ CG.\ BG.$

Ale powierzchnia trójkąta:

$ABC = 2\ CHG = 2\ \frac{CG.HE}{2} = CG.HE$, położywszy za CG.HE wyżej otrzymaną wartość, mamy dla powierzchni trójkąta ABC wzór:

$$\sqrt{CE.\ EB.\ CG.\ BG.}$$

Skoro położymy AB = c, AC = b, BC = a, i wzór powyższy uporządkujemy przybierze kształt:

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}}.$$

Heron rozwiązał także zagadnienie o podwojeniu sześcianu. Pappos [1]) podając rozwiązanie to powiada, że jest ono ad manuum operationes maxime accomodata.

Z prostych AB i BC Fig 14., między które wyszukać mamy dwie średnie proporcyonalne, tworzymy prostokąt ABCD i prowadzimy obie przekątnie połowiące się w G. Linii, około punktu B. obracającéj się nadajemy takie położenie, ażeby punkty jéj przecięcia się E i F, z przedłużeniami prostych CD i AD jednakowo były oddalone od punktu G., wtedy

$$AB : AF = AF : CE = CE : BC.$$

Prowadzimy proste GE i GF, dalej GH prostopadle do AD. Z trójkąta GHF otrzymamy.

$GF^2 = GH^2 + HF^2 = GH^2 + (AH + AF^2) = GH^2 + AH^2 + AF\,(2\,AH + AF).$

Ponieważ $GH^2 + AH^2 = AG^2$, zaś 2 AH + AF = DF,

więc $$GF^2 = AG^2 + AF.\ DF.$$

1) Coll. math. lib IV. pag 6.

Z trójkąta GIE w podobny sposób otrzymamy

$$GE^2 = GC^2 + CE.\ DE,$$

a że $GF = GE$ a $AG = GC$, więc i $AF.\ DF = CE.\ DE$

Z iloczynów tych otrzymamy proporcyą

$$AF : CE = DE : DF,$$

ale i następujące proporcye są rzetelne

$$AB : AF = DE : DF;\ DE : DF = CE : BC.$$

Z ostatnich trzech proporcyi otrzymujemy proporcyą ciągłą: $AB : AF = AF : CE = CE : BC$.

Nie o wiele młodszym od Herona był *Geminos* z Rodus. O życiu i pochodzeniu jego nie ma żadnych wiadomości. Z pism jego pozostało dzieło traktujące o astronomii *εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα*. Matematyczne dzieło Geminosa, zawierające wiele notatek historycznych, dotyczących krzywych, jak linii spiralnéj, konchoidy, kisoidy i innych zaginęło. Dzieło to cytują często Proklos i Eutokios, pierwszy w komentarzu do Euklidesa, drugi do Apoloniosa. Zagadnienie postawione przez Archimedesa, kulę płaszczyzną przeciąć tak, by odcinki jéj stały w danym stosunku, rozwiązał *Dionysiodoros*. Rozwiązanie to podaje Eutokios. [1])

Dionysiodoros pochodził z miasta Amisus, leżącego w Azyi na południowym brzegu morza Czarnego. Żył przed Chr.

Za pierwszego tryumwiratu żył *Teodosios* z Tripolis znany jako autor dzieła: *σφαιρικῶν βιβ. γ̄.* W trzech księgach podał dość zupełny wykład geometryi sferycznéj z wyjątkiem części trygonometrycznéj.

Przebiegliśmy wiek pełnego rozwoju, wiek złoty matematyki i szkoły aleksandryjskiéj. Przed wschodzącem nowem światłem chrześciaństwa ustępowała grecka cywilizacya, chyliła się ku zachodowi, a z nią i matematyka. Wśród zmierzchu, jaki poprzedził zupełny zachód, spotykamy jeszcze znakomitych matematyków, ale są oni odosobnieni, nie tworząc tego nieprzerwanego łańcucha, który tak szczęśliwie rozpoczął Euklides.

Bezpośrednim poprzednikiem Ptolomeusa był Theon ze Smyrny i Menelaos z Aleksandryi. Obaj żyli około 100 roku po Chr., o obydwóch wspomina w dziele swym Ptolomeos.

Theon ze Smyrny jest autorem dzieła: *Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν.* W dziele tém uczy Theon tyle matematyki, ile umieć potrzeba, by zrozumieć pisma Platona. Nie jest to komentarz do pojedynczych miejsc z pism Platona; ale podręcznik, dający pewną zaokrągloną całość.

Dzieło *Menelaosa* o sferyce odnaleziono w tłómaczeniu arabskiem i przełożono na łacińskie. [2]) Mamy w tém dziele pewien rodzaj sferycznéj trygonometryi, a więc najważniejsze twierdzenia o trójkącie sferycznym, znajdują

1) Comm. in Arch. lib. II. de sphaer. et cyl.
2) E. Halley. Oxford 1758.

się tu także twierdzenia o poprzecznych w płaskim i sferycznym trójkącie, znane pod nazwą twierdzeń Menelaosa. Zaginęło dzieło w sześciu księgach o cięciwach. Traktowało ono prawdopodobnie o zestawianiu tablic trygonometrycznych. Już i Hipparch w pismach swych używa stosunków cięciw na oznaczenie wielkości kąta. 1)

Spotykamy tu więc pierwsze ślady trygonometryi, i ten w skutkach znakomity wynalazek zawdzięczamy Grekom, chociaż dopiero Arabowie nadali trygonometryi dzisiejszą formę i wykształcenie.

Dzieło *Klaudiusa Ptolomeusa* nosi tytuł *Μεγάλη σύνταξις* a treść jego stanowi wykład astronomii i trygonometryi. Dzieło to późniéj, przełożone z greckiego na arabskie a z arabskiego na język łaciński, otrzymało tytuł Almagest. Słowo Almagest powstało przez połączenie arabskiego rodzajnika al i greckiego superlativu *μέγιστος*. W księdze I. dzieła tego, które między rokiem 125 a 151 powstało, stworzył Ptolomeus trygonometryą, zastósowaną do potrzeb astronomii i uzupełnił nią usiłowania Hipparcha i Menelaosa.

Opierając się na kilku znanych twierdzeniach o wielobokach wpisanych w koło, miądzy którymi najważniejszém jest twierdzenie, że iloczyn z obu przekątni czworoboka wpisanego w koło równa się sumie z iloczynów boków przeciwległych tegoż czworoboka (twierdzenie Ptolomeusa), oblicza boki trójkąta, czworo-pięcio- i dziesięcioboka, uważając je za cięciwy odpowiadające łukom 60^0, 90^0, 120^0 i 36^0, w sto dwudziestych częściach średnicy.

Daléj z cięciw dwóch łuków oblicza cięciwę odpowiednią różnicy lub sumie tychże łuków, z cięciwy danego łuku, cięciwę przynależną do połowy tegoż łuku.

Obwód koła dzieli Ptolomeus na 360 części *τμήματα*, a każdą część połowi jeszcze. Zestawił w ten sposób tablice cięciw wszystkich łuków od 0—180^0 od 30 do 30 minut, a uważać je należy za pierwsze tablice trygonometryczne. Średnicę podzielił na 120 części, każdą część na 60 mniejszych części a i te dzielą się znowu na 60 części. Części te po łacinie zwano partes minutae primae et secundae, a stąd nazwy minut i sekund w innych językach powstały.

Dla astronomii stworzono trygonometryą, a że do celów astronomicznych potrzebniejszą była trygonometrya sferyczna, powstała téż ona pierwéj i wykształciła się pierwéj aniżeli płaska, która starożytnym obcą była, zwłaszcza w zastósowaniu do mierzenia.

Rozdział jedynasty Alamagestu zawiera w sobie wykład właściwéj trygonometryi. Dla Ptolomeusa punktem wyjścia jest twierdzenie Menelaosa; między sześciu odcinkami boków trójkąta, utworzonymi przez poprzeczną linię, taki panuje stosunek, że iloczyn z trzech odcinków, które nie mają wspólnego punktu końcowego, równa się iloczynowi trzech pozostałych odcinków. Jest to twierdzenie znane pod nazwą twierdzenia o sześciu ilościach, regula sex quantitatum. Pozostałych ksiąg 12 Almagestu zajmują się astronomią i należą do historyi téjże umiejętności.

Tłómaczenia i komentarze Almagestu są bardzo liczne. Komentarz Theona z Alexandryi dochodzi do księgi 11., z komentarza Papposa pozostała mała tylko część o księdze piątéj.

1) Hipparchos z Bytynii sławny astronom uczył w Aleksandryi od 160—120 r. prz. Chr.

Szczególną uwagę zwrócili na dzieło to Arabowie. Matematycy, Alhazen ben Joseph i chrześcianin Sergius w roku 827 przełożyli Almagest na język arabski, cesarz Fryderyk II. polecił przełożyć dzieło to na język łaciński, a w 1541 roku wyszło pierwsze tłómaczenie łacińskie wedle tekstu greckiego.

Wspomnieć tu należy o inném jeszcze dziele Ptolomeusa, o jego geografii. Już Hipparch oznaczał położenie na ziemi za pomocą długości i szerokości geograficznéj a więc przez układ współrzędnych. Początkiem długości był pierwszy południk przechodzący przez Rodus. Po nim Marinus z Tyru przełożył pierwszy południk na wyspy kanaryjskie.

Ptolomeus nazywa oddalenie ze wschodu na zachód długością *μῆκος* z południa na północ, szerokością *πλάτος*, tłómacząc, że ziemia bardziéj się rozszerza w kierunku pierwszym, aniżeli w drugim, a przez długość oznacza się zawsze większy wymiar. Oznaczył w ten sposób Ptolomeus miejsca leżące między 67° północnéj a 16° południowéj szerokości wzdłuż 180° długości geograficznéj. Dzieło to podaje także zasady kartografii.

W roku 75. zdobył Caesar Aleksandryą. Łuna palącego się Bruchejonu, gdzie mieściła się biblioteka, przyświecała zwycięstwu temu. 400 tysięcy tomów stało się pastwą pożaru. Skodę wyrządzoną naprawił Antonius, pozostawiając w Aleksandryi księgozbiór Attalusa III. króla Pergamum, który umierając, senat rzymski uczynił spadkobiercą swych skarbów. Jeżeli już przedtem zajmowano się przerabianiem i komentowaniem dzieł dawniejszych, to teraz, gdy zobaczono, jak jeden przypadek nieszczęśliwy może niepowetowane straty sprowadzić, z szczególną gorliwością i zamiłowaniem rzucono się do kompilacyi, komentarzów i przeróbek znakomitszych dzieł, chcąc tym sposobem zabezpieczyć skarby wiedzy od zatraty. Kierunek taki nie sprzyjał dalszemu rozwojowi umiejętności, i w matematyce, z wyjątkiem Diofantesa, nie spotykamy już wybitniejszych a samodzielnych pracowników.

Zwrot w zapatrywaniach filozoficznych ku mistycyzmowi Pytagorasa, który znajduje wyraz swój w powstającéj szkole nowopytagorejczyków, sprawił, że gorliwie poczęto zajmować się arytmetyką. Na polu tém pracuje *Nikomachos* z Gerasy, zwolennik filozofii Pytagorasa. Żył około roku 100 po Chr. [1]) Jemu przypisują dzieło o mistycznem znaczeniu liczb, miało ono prawdopodobnie tytuł *Θεολογούμενα ἀριθμετικῆς* jak i podobne dzieło Jamblichosa osnute na tle dzieła Nikomacha. Otrząść się jednak z tych mistycznych spekulacyi potrafił w innem dziele *Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς βιβλ. β.*

W dziele tem przedstawia się arytmetyka po raz pierwszy wolną od pęt geometrycznych pojęć i geometrycznego sposobu przedstawienia. Nikomachos wyjaśnia naukę o liczbach na liczbach a nie jak Euklides na liniach. Jestto postęp, który wywarł stanowczy wpływ na dalszy rozwój arytmetyki i nadał jéj jak to wykazują późniejsze dzieła, inny kierunek. Najważniejsze twierdzenia Nikomacha dotyczą liczb pierwszych i polygonalnych i arytmetycznych progresyi. Znachodzimy tu po raz pierwszy twierdzenie, że suma nieparzystych liczb począwszy od 1. daje szereg kwadratów. Nie koniecznie szczęśliwym jest

1) Nesselmann: Algebra der Griech., Cantor Gesch. d. Math.

Nikomachos w gonieniu za osobliwościami, często wskazuje na rzecz, jako niezwykłą, która się zupełnie prostą i naturalną przedstawia. Nikomachos miał w starożytności wielką sławę, dzieło jego komentował Jamblichos, Proklos a wkrótce, po okazaniu się dzieła tego, tłómaczył je Apulejus na język łaciński. Nazwisko Nikomachosa przeszło nawet w przysłowie, *ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός*.

Wspomnę tu jeszcze o dwóch poprzednikach Diofantesa. Byli nimi, sławny *Porfyrios* i *Anatolios* z Aleksandryi, biskup z Laodicei w Syryi. Żyli obaj w trzecim wieku po Chr. dzieła ich arytmetyczne zaginęły.

Wątpliwości dotyczące życia i pism *Diofantesa* rozpoczynają się z ostatnią zgłoską nazwiska jego, bo go i Diofantos i Diofantes nazywano. Żył między 200 a 350 rokiem po Chr. [1]) Znakomite dzieło jego *Ἀριθμητικῶν βιβλ. ιγ* przypada na czas, kiedy matematyka Greków chyliła się ku upadkowi, dla niéj nie było dzieła tego, które zdolne było nadać téj umiejętności nowy kierunek. Wśród upadku pozostało ono bez wpływu, ziomkowie Diofantesa nie rozumieli dzieła jego. Podczas gdy w setkach egzemplarzy zachowoło się dzieło Euklidesa, znamy zaledwie kilka zdefektowanych i niepoprawnych egzemplarzy dzieła Diofantesa.

Oprócz wyżéj wspomianego dzieła mamy małą rozprawę zatytułowaną *περὶ πολογώνων ἀριθμῶν*, w końcu trzecie znane tylko z cytat umieszczonych w pierwszém dziele, *περίσματα*.

Z pierwszego dzieła *Ἀριθμητικά* pozostało ksiąg sześć, watykański tylko kodeks dzieli ten sam materyał na ksiąg siedm. Brakuje więc ksiąg sześć względnie siedm. Badania jednak wykazały, że brakuje znacznie mniéj jakby się ze stosunku znanych i zaginionych ksiąg zdawało, bo podział na księgi jest dowolny a prawdopodobnie i oba wyżéj wymienione dzieła wchodziły w skład głównego dzieła, daléj, że brakują księgi ze środka a nie z końca, a mianowicie defekt przypada prawdopodobnie pomiędzy pierwszą a drugą księgą, w końcu, że zdefektowanie datuje się z przed 13 lub 14 wieków i że dokonano go w Grecyi jeszcze.

Zadania, których rozwiązaniem zajmuje się w dziele swoim Diofantes rozpadają się na dwie grupy, jedne z nich prowadzą do zrównań oznaczonych drugie do nieoznaczonych. Zrównania oznaczone drugiego stopnia są zwykle czyste albo dadzą się na czyste sprowadzić. Dla tego sądzono, że Diofantes zrównań mięszanych kwadratowych nie umiał rozwiązać, zwłaszcza, że nie podaje nigdzie metody do rozwiązania zrównań takich. [2])

Tymczasem zadanie 23. księgi I., 6, 7, 8 i 9 księgi VI. prowadzą do zrównań kwadratowych mięszanych a przy każdém podaje Diofantes rozwiązanie. W jaki sposób do rozwiązań doszedł nie wiadomo, wprawdzie obiecuje później metodę, jakiéj używał przy rozwiązaniu zrównań kwadratowych mięszanych, wyłożyć, jednakże przyrzeczenia danego nie dotrzymuje.

---

1) Nesselmann: Algebra d. Griech.

2) Reimer: Bossuts Gesch. d. Math pag. 55. Klügel. Math. Wörterbuch Th. I. pag. 31.

Nesselmann po gruntownem studyum nad dziełem Diofantesa stanowczo twierdzi, że Diofantes zrównania mięszane kwadratowe rozwiązywał. [1])

Główną jednak zasługą Diofantesa jest rozwiązanie zrównań nieoznaczonych, nazywamy je diofantycznymi.

Zanim przypatrzymy się metodzie, jakiéj używa Diofantes przy rozwiązaniu zrównań, trzeba się nam obznajomić ze skróceniami, które wprowadza w swą algebrę, symbolów bowiem w dzisiejszém znaczeniu nie spotykamy u niego.

W pisaniu liczb znachodzimy u Diofantesa tylko małą różnicę, łączy on liczbę zawsze ze znakiem $\tilde{\mu}^{o}$ skrócone *μονάς* jednostka; tak więc $\tilde{\mu}^{o}\,\overline{\iota}$ znaczy 10. Niewiadomą w zrównaniu nazywa krótko *ἀριθμός* a znakiem jéj końcowe *ς*, którego Grecy na oznaczenie liczby nie użyli. Znak ten podwaja *ςς*, jeżeli współczynnik niewiadoméj większy od jednostki. Współczynnik 1 zawsze napisany. Kwadrat niewiadoméj nazywa *δύναμις*, w skróceniu $\delta\tilde{v}$, jej sześcian *κύβος* skrócone $\kappa^{\tilde{v}}$. Wprowadza potęgę czwartą *δυναμοδύναμις*, piątą *δοναμόκυβος* i szóstą *κυβόκυβος*, odpowiedne znaki są $\delta\delta^{\tilde{v}}$, $\delta\kappa^{\tilde{v}}$, $\kappa\kappa^{\tilde{v}}$. Znaki te służą tylko na oznaczenie niewiadoméj a nawet słowem *δύναμις* oznacza kwadrat tylko niewiadoméj, bo chcąc oznaczyć kwadrat innéj liczby używa wyrazu *τετράγωνος*. Znaki więc $\delta^{\tilde{v}}$, $\kappa^{\tilde{v}}$, $\delta\delta^{\tilde{v}}$, $\delta\kappa^{\tilde{v}}$, $\kappa\kappa^{\tilde{v}}$ znaczą tyle co x^2, x^3, x^4, x^5, x^6. Wprowadza także Diofantes ułamek $1/x$ i zowie go *ἀριθμοστόν*, dalej ułamek kwadratowy $1/x^2$ *δοναμοστόν*, ułamek kubiczny $1/x^3$ *κυβοστόν* aż do ułamka kubiczno kubicznego $1/x^6$ *κυβοκυβοστόν*.

Diofantes uczy dalej mnożenia potęg i algebraicznych ułamków pierwotnych, podając na każdy możliwy wypadek jak $x^2 . x^3 = x^5$; $1/x^4 . x^6 = x^2$ osobną regułę.

Dodawanie nazywa *ὕπαρξις*, odejmowanie *λεῖψις*. Dodawanie wykonywa przez proste napisanie wyrazów obok siebie $\delta^{\tilde{v}}\ \overline{\alpha}\ \varsigma\varsigma\overline{\delta}$ znaczny $x^2 + 4\,x$.

Jako znak odejmowania wprowadza Diofantes odwrócone i obcięte ⋔, a wyrazy, które odejmuje, porządkuje zawsze za dodajnikami, $\delta\tilde{v}\ \overline{\alpha}\ \tilde{\mu}^{o}\ \overline{\iota\beta}$ ⋔ $\varsigma\varsigma^{o\iota}\overline{\xi}$ znaczy $x^2 + 12 - 7\,x$. O odrębnie stojącym wyrazie ujemnym w ogóle ujemna liczba w dzisiejszém znaczeniu jest zupełnie obcą Diofantesowi. Rozróżnia wprawdzie liczby, które mają być dodane i liczby, które mają być odjęte, rachuje różnicami, wypowiada nawet regułę, że liczba mająca być odjętą pomnożona przez liczbę mającą być odjętą, daje taką, którą dodać należy; zna jednak tylko takie różnice, w których ujemna większą jest od odjemnika. Odejmowania liczby większéj od mniejszéj wcale Diofantes nie zna z odejmowania takiego nie otrzymuje żadnéj liczby.

Strony zrównania nazywa Diofantes *μέρος* albo *ἴσωσις* a łączy je słowami *ἴσος*, *ἴσος ἐστὶ* albo skróceniem *ι*. Spotykamy się u Diofantesa z wysoko rozwiniętym rachunkiem algebraicznym, główna różnica leży w tém, że podczas

---

2) Neselmann Algebra d. Griech. Cantor Gesch. d. Math.

gdy dzisiejsza algebra ma symbole, które same do wypowiedzenia prawd wystarczają, algebra Diofantesa używa naprzemian to skróceń, to całych słów a nawet skróceniom nadaje zakończenia przypadkowe.

Między zrównaniami pierwszego stopnia a czystymi zrównaniami stopni wyższych nie czyni Diofantes różnicy, ale bez względu na wykładnik niewiadoméj daje następującą regułę do rozwiązania zrównań: „Gdy się przy zadaniu przyjdzie do zrównania, które po obu stronach tę samę potęgę niewiadoméj, ale w różnéj ilości (z różnymi współczynnikami) ma, to trzeba równe od równego odejmować aż wyraz jeden równy będzie jednemu. Znajdują się jednak na jednéj albo na obydwóch stronach zrównania pojedyńcze wyrazy, które mają być odjęte, to trzeba te ujemne wyrazy po obu stronach dodawać, aż po obu stronach otrzyma się wyrazy, które będą dodajnikami i wtedy trzeba podobnie równe od równego odejmować, aż na każdéj stronie zrównania tylko jeden wyraz pozostanie“. Wyrazy zrównania nazywa Diofantes *εἶδος*. Wyraz ten w języku łacińskim przetłómaczono przez *species*, a stąd powstała nazwa *arithmetica speciosa* dla algebry.

Jednolitéj metody do rozwiązania zadań nie znachodzimy u Diofantesa, każde zadanie swymi właściwościami powoduje Diofantesa do użycia innego fortelu, który oddając przy rozwiązaniu jednego zadania znakomitą usługę, nie może być do drugiego zastósowanym. Najważniejszém tu jest bez zaprzeczenia ustawienie zrównania, po należytym wyborze niewiadoméj. W sztuce téj jest Diofantes prawdziwym mistrzem.

Piękny przykład należytego wyboru niewiadomej podaje zadanie 12 księgi I. Żąda się, ażeby podzielić liczbę dwa razy na dwie części tak, by jedna część tejże z podziału pierwszego do odpowiednej części z drugiego podziału była w pewnym stosunku i ażeby podobnie pozostała część liczby z drugiego podziału do części pozostałéj z pierwszego podziału była w danym stosunku.

Liczbę 100, tak podzielić na dwie części w dwojaki sposób, ażeby większa jéj część z podziału pierwszego była dwa razy tak wielką jak część mniejsza z drngiego podziału; zaś większa liczba z drugiego podziału trzy razy większą od liczby mniejszéj z podziału pierwszego.

Połóż mniejszą liczbę drugiego podziału równe x to liczba większa z podziału pierwszego jest $2\,x$. Mniejsza liczba z podziału pierwszego jest wtedy $100 - 2\,x$, a większa liczba z drugiego podziału $300 - 6\,x$.

Suma części z podziału drugiego wynosić musi 100, więc $300 - 5\,x = 100$ a z tego $x = 40$. Ponieważ większa liczba z pierwszego podziału równa się $2\,x$ jest więc nią 80, mniejsza z tegoż podziału wynosi $100 - 2\,x = 20$. Dla większéj z drugiego podziału znaleźliśmy $300 - 6\,x$, co daje 60, a w końcu mniejsza z drugiego podziału $x = 40$. Nie można sobie trafniejszego doboru nieznajoméj wyobrazić, niewprawny rachmistrz wprowadziłby tu aż cztéry niewiadome.

Zadanie 27 księgi IV. należy znaleść dwie liczby, których iloczyn do każdéj z osobna dodany daje liczbę sześcienną jako sumę, wchodzi w zakres nieoznaczonych, daje bowiem nieskończenie wiele rozwiązań. Otóż pierwsza z tych liczb niech się równa x pomnożone przez jakąkolwiek liczbę sześcienną

n. p. 8 a więc $8\ x$; wtedy musi być liczbą drugą $x^2 - 1$ i w ten sposób uczyniono pierwszemu warunkowi zadosyć, bo iloczyn z obydwóch jest $8\ x^3 - 8\ x$, a gdy dodamy liczbę pierwszą $8\ x$, otrzymamy $8\ x^3$, więc liczbę sześcienną. Ale iloczyn ten dodany do drugiéj liczby ma także dać liczbę sześcienną, to znaczy $8\ x^3 + x^2 - 8\ x - 1$ ma być sześcianem. Niech tym sześcianem będzie $(2\ x - 1)^3 = 8\ x^3 - 12\ x^2 + 6\ x - 1$. Złączywszy oba wyrazy, otrzymamy zrównanie:

$$8\ x^3 + x^2 - 8\ x - 1 = 8\ x^3 - 12\ x^2 + 6\ x - 1.$$

Liczbę sześcienną $(2\ x - 1)^3$ tak dobiera Diofantes, aby wyraz z trzecią potęgą i wyraz wiadomy odpadł, wtedy zrównanie powyższe przechodzi na $13\ x^2 - 14\ x = 0$, to zaś przez x podzielone daje zrównanie stopnia pierwszego $13\ x - 14 = 0$ a z tego $x = \frac{14}{13}$. Pierwsza więc liczba jest $8. \frac{14}{13} = \frac{112}{13}$; a druga $\left(\frac{14}{13}\right)^2 - 1 = \frac{27}{169}$.

Nieoznaczone jest to zrównanie dla tego, bo pierwsza liczba może mieć dowolną wartość ax, druga równa się wtedy $bx^2 - 1$, ale b należy tak dobrać, aby iloczyn $a.b$ był liczbą sześcienną.

Poza stopień drugi nie wychodzą zrównania Diofantesa. Jeden tylko przykład zrównania stopnia trzeciego znajduje się w księdze VI. 19. Idzie w zadaniu tem o znalezienie liczby sześciennéj, któraby o 2 od liczby kwadratowéj większą była. Diofantes kładzie pierwiastek żądanéj liczby sześciennéj $= x - 1$ a pierwiastek liczby kwadratowéj $x + 1$, a zatem $(x - 1)^3 = (x + 1)^2 + 2$ albo $x^3 - 3\ x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2\ x + 3$ „ a z tego znachodzi się $x = 4$ "dodaje Diofantes nie podając sposobu, jakim do rozwiązania tego doszedł.

Z takich zadań składa się dzieło Diofantesa. Nie zamierzał w dziele tém podać systematycznego wykładu algebry, dla tego pojedyńcze prawa i reguły rozrzucone są po całém dziele, umieszcza je Diofantes tam, gdzie mu ich do rozwiązania poszczególnego zadania potrzeba.

Słusznie nazywają Diofantesa wynalazcą algebry, łączy on to wszystko, co dotąd na tém polu zrobiono w całość organiczną a zarazem odkrywa nową drogę, którą czytelnika przez labirynt najzawilszych zagadnień arytmetycznych przeprowadza. Dzieło Diofantesa tak jest odosobnione w literaturze matematycznéj Greków, tak nieprzygotowane innėm dziełem, że łatwo możnaby Diofantesowi to wszystko, co się w dziele jego znajduje za wyłączną własność przypisać. Sposób jednak w jaki przygotowuje czytelnika do czytania dzieła swego w pierwszéj księdze tłómacząc skrócenia i działania algebraiczne, poucza, że Diofantes rzeczy te czytelnikowi niejako przypomina, zwracając uwagę jego, że w działaniach tych nabyć trzeba wprawy, by dalsze księgi rozumieć.

O życiu Diofantesa nie mamy żadnych wiadomości, kilka dat podaje wierszowany nagrobek, zachowany w Antologii greckiéj. W podobném układaniu zadań arytmetycznych lubowali się starożytni i u Diofantesa w księdze V. kilka zadań ułożonych heksametrem znajdujemy.

Nagrobek ten brzmi:

Diofantes, mistrz liczby, pod tym głazem leży,
A tu liczba lat jego w zagadce ukryta:
Tych część szósta, w chłopięcéj swawoli przeżyta;
Dwunasta w gronie męskiéj spędzona młodzieży;
W końcu siódméj, poślubił towarzyszkę sobie.
Ta w lat pięć po weselu, syna mu powiła,
A syn, gdy mu połowa owych lat wybiła,
Co miał ojciec u kresu, legł zawcześnie w grobie.
W lat cztéry później ojca pogrzebła tęsknota.
Przechodniu! zgadnij liczbę lat jego żywota.

Zadanie to daje następujące zrównanie:

$$\frac{1}{6} x + \frac{1}{12} x + \frac{1}{7} x + 5 + \frac{1}{2} x + 4 = x$$

a z tego $x = 84$. Wszystkie epigramy arytmetyczne są bardzo podobne do siebie i najczęściéj prowadzą na zrównanie kształtu:

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \ldots\ldots\right) x + a = x.$$

Treścią swą z powyższem dziełem Diofantesa spokrewnioną jest jego rozprawa o liczbach polygonalnych, która prawdopodobnie stanowiła nawet część dzieła tego. W rozprawie téj podaje Diofantes w sposób ogólny reguły tworzenia tych liczb i prawa wypowiadające własności tychże, i wyprowadza z tych ogólnych reguł i praw, reguły i prawa szczególne, dotyczące rozmaitych gatunków liczb poligonalnych.

W starożytności nie znalazł Diofantes godnego siebie komentatora. Na język łaciński przełożył i wydał dzieło Diofantesa Xylander albo Holzmann profesor w Heidelbergu 1338. Jedyne greckie wydanie uskutecznił Bachet de Meziriac 1621. W roku 1670 wznowił wydanie to Fermat, opatrzywszy je komentarzem. Na język niemiecki przełożył Diofantesa profesor berliński Otto Schulz. [1])

Z pewną niechęcią rozstać się nam przychodzi z Diofantesem, jest on bowiem ostatnim wielkim matematykiem starożytności, po nim już chyżym krokiem spieszy matematyka ku upadkowi. Aleksandrya przestaje być punktem środkowym, około którego skupiali się ówcześni uczeni. Nowa szkoła filozoficzna zwana nowoplatońską otwiera akademią w Atenach. Umiejętności wracają do słonecznéj ojczyzny swojéj Helady, aby tam, gdzie wzrosły i rozwinęły się tak szczęśliwie, na ziemi ojczystéj, zamrzeć.

Pierwszy, o którym wspomnieć nam trzeba, o którym zresztą już tak często wspominaliśmy był *Pappos*. Znakomity to matematyk i godny lepszych czasów. Żył najprawdopodobniéj na końcu trzeciego lub na początku czwartego wieku po Chr. Dzieło jego: *Collectiones mathematicae* jest zbiorem najpiękniejszych odkryć, dokonanych przez znakomitych matematyków, które wchodzą przeważnie w zakres geometryi wyższéj. Dzieło to jest obfitem i pewnem źródłem do rozpoznania historycznego rozwoju matematyki w starożytności. W dziele tém podaje Pappos treść rozmaitych pism matematycznych, dodając swoje ob-

1) Diophantus von Aleksandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygonzahlen aus dem griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet. Berlin 1822.

jaśnienia, często w dalekim zaledwie związku z przedmiotem zostające. Obok podawanych treści z obcych dzieł znajdujemy tam i własne odkrycia Papposa a w końcu i kilka twierdzeń wchodzących w zakres mechaniki. Dzieło to przełożył na język łaciński Commandinus i wydał w Wenecyi w roku 1589. Najnowszego wydania dokonał Hultsch. Berlin 1876—1878.

Oprócz powyższego dzieła napisał Pappos komentarz do pierwszych czterech ksiąg Almagestu Ptolomeusa. Komentarz ten zaginął, zachował się jednak inny komentarz do Almagestu *Theona* z Aleksandryi, jeden z najlepszych komentarzy starożytnych. W dziele tém wyłożony jest rachunek sexagesimalny, mianowicie mnożenie, dzielenie i wyciąganie kwadratowego pierwiastka. Theon napisał jeszcze komentarz do Elementów Euklidesa, który umieścił Comandinus w swojem wydaniu Elementów.

Hypatya, córka Theona, była jedną z ostatnich pisarzy aleksandryjskich, którzy pióra swe poświęcali matematyce. O pismach matematycznych Hypatyi wspomina Suidas. Miejsce to bywa w dwojaki sposób tłómaczone tak, że wedle jednego tłómaczenia jest Hypatya uczoną komentatorką Diofantesa i Apoloniosa, wedle drugiego, komentuje dzieło Apoloniosa o przecięciach stożkowych i astronomiczne tablice Diofantesa. Przyjąwszy tłumaczenie drugie, stoimy w obec wątpliwości, czy Diofantes, autor arytmetyki, i Diofantes, autor owych tablic, jest tą samą osobistością. Żyła Hypatya za czasów Arkadiusa, hołdowała pogaństwu, a że uważano ją za przyczynę sprzeczki powstałéj między patryarchą Cyrylem a namiestnikiem Aleksandryi Orestesem, zamordował ją w okrutny sposób sfanatyzowany tłum. Jest ona ostatnią przedstawicielką storożytnéj pogańskiej Grecyi, ostatnią nauczycielką platońskiéj filozofii, ostatnią kapłanką umierającéj Palady.

Proklos jako kierownik akademii w Atenach następca sławnego Syrianusa zwany dla tego *Diadochos* (następca), napisał komentarz do pierwszéj księgi Elementów Euklidesa, dzieło ważne jako źródło historyczne. Urodził się w roku 410.

Eutokios z Askalon żył w drugiéj połowie szóstego wieku. Komentarze jego do dzieła Archimedesa o kuli i walcu, do przecięć stożkowych Apoloniosa są ważne pod względem historycznym.

Dotarliśmy więc do czasu, w którym pod gwałtownym naciskiem ludów północnych upada zachodnie państwo, powstający mahometanizm wstrząsa państwem wschodniem, które się przez ośm wieków jeszcze opiera nawale ludów azyatyckich, w 640 roku zdobywa kalif Omar Aleksandryą i pali bibliotekę, uniewinniając swój czyn barbarzyński znanymi słowy: Jeżeli księgi te zawierają to co koran, czytać ich nie potrzebujemy, jeżeli co innego w sobie mieszczą, czytać ich nie powinniśmy. Grecka kultura i cywilizacya otrzymała cios śmiertelny, tu kończy się jéj historya. Dziwném zrządzeniem właśnie ten sam naród, który jéj zadał ten cios, był powołany do przechowania jéj skarbów, by później były podstawą odradzającéj się cywilizacyi ludów zachodnich.

Fig. 1

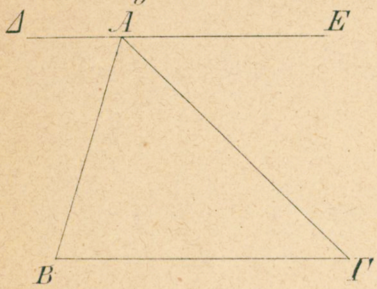

Fig. 2

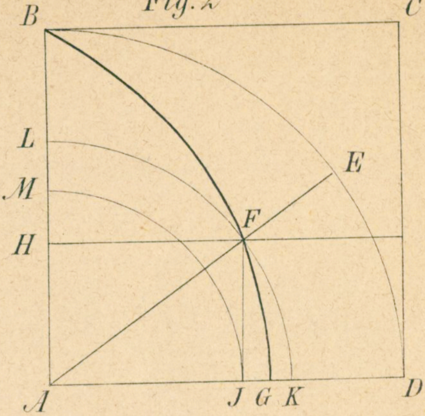

Fig. 4

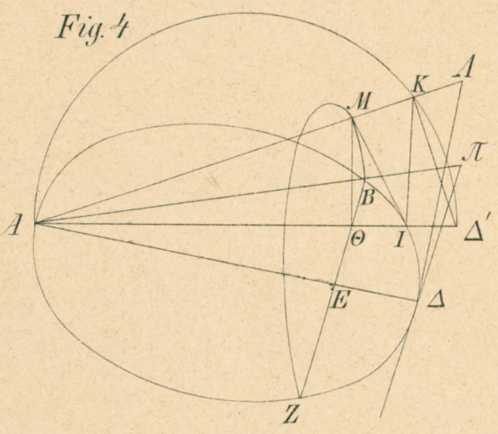

Fig. 3

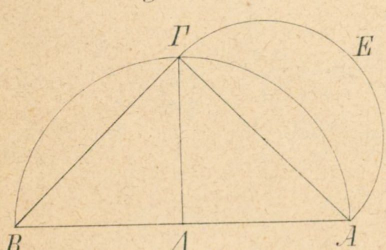

Fig. 5

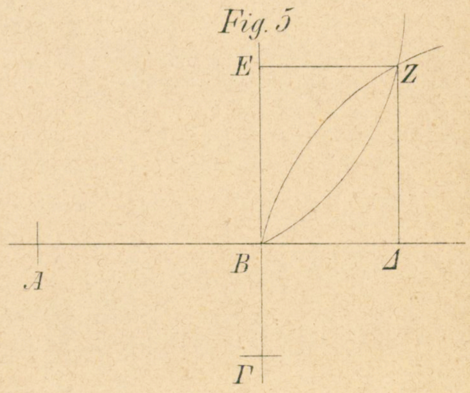

Fig. 6.

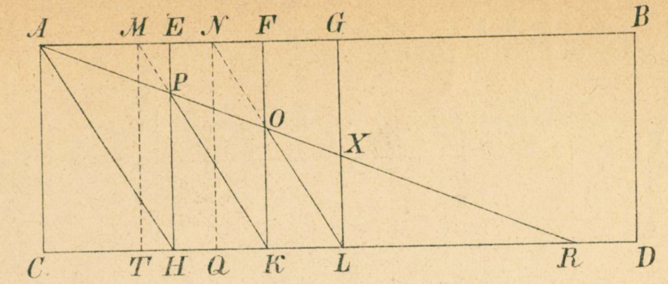

Fig. 10.

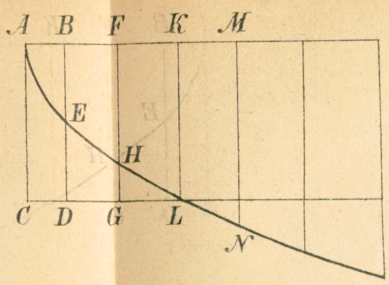

Fig. 12.

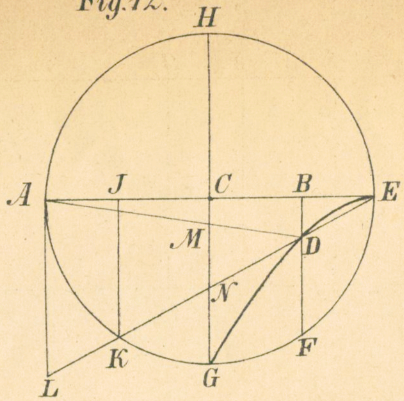

Fig. 8.

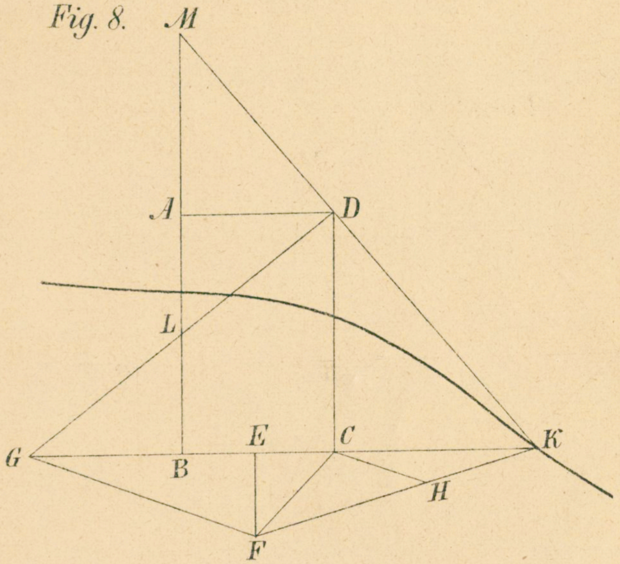

Fig. 11.

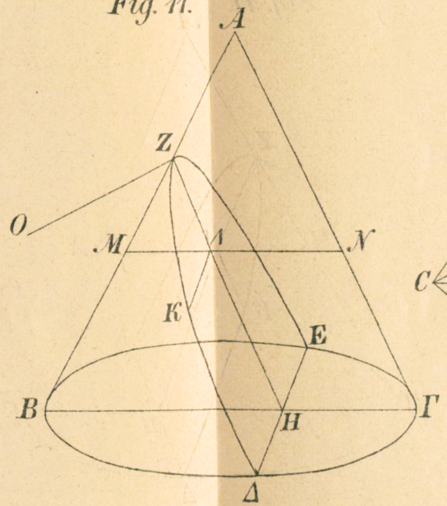

Fig. 13.

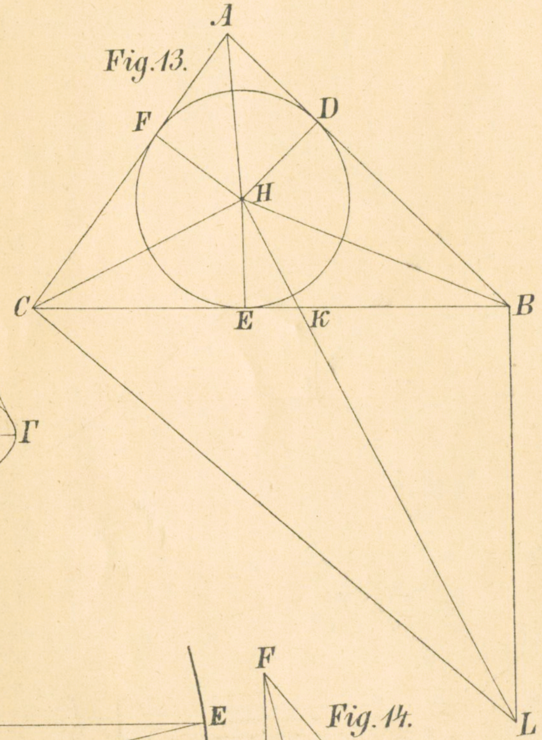

Fig. 7.

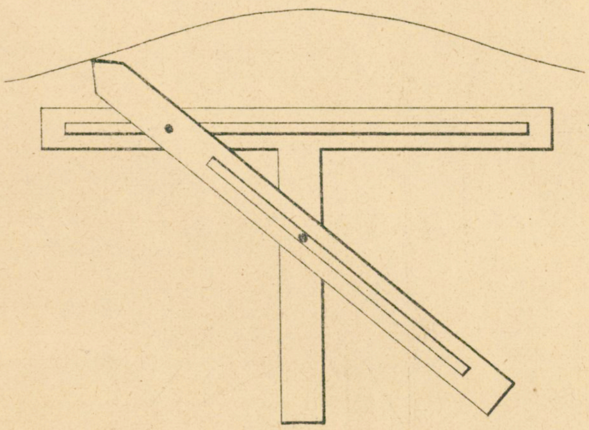

Fig 9.

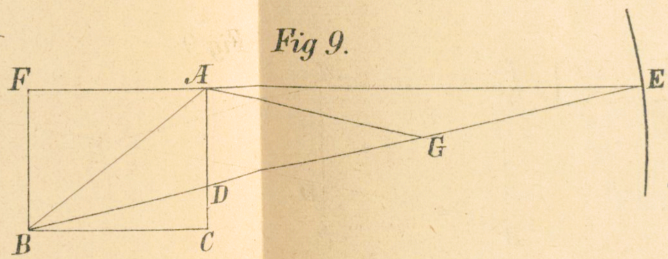

Fig. 14.