

**Henryk Petryk**

**ZAGADNIENIE PRZESUWANIA  
OBCIĄŻONEGO KLINA  
PO POWIERZCHNI  
IDEALNIE PLASTYCZNEGO OŚRODKA**

**38 / 1981**

p.269

**WARSZAWA 1981**

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 czerwca 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 38/1981



57075



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 140 egz. Ark.wyd.1,2. Ark. druk. 1,75  
Oddano do drukarni w listopadzie 1981 r.  
Nr zamówienia 6261/81 Z - 97.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Sniadeckich 8

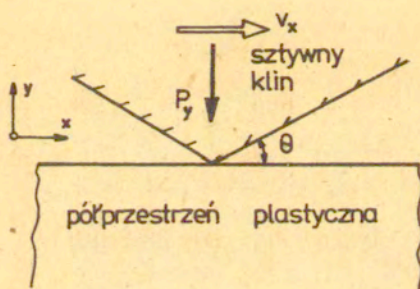
Henryk Petryk

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

ZAGADNIENIE PRZESUWANIA OBCIĄŻONEGO KLINA PO  
POWIERZCHNI IDEALNIE PLASTYCZNEGO OŚRODKA <sup>\*/</sup>

1. WSTĘP

Ogólny schemat rozważanego zagadnienia przedstawiony jest na rys.1a

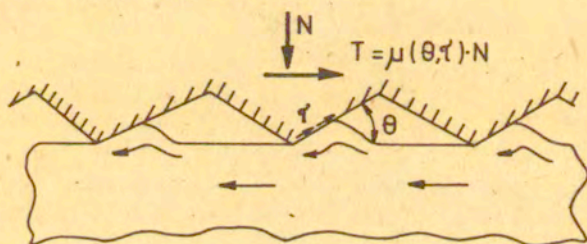


Rys. 1a.

Sztywny klin obciążony siłą pionową  $P_y$  przesuwa się względem plastycznej półprzestrzeni z pewną prędkością o składowej poziomej  $v_x$ . Zakładamy, że siła  $P_y$  ma zadaną, ustaloną wartość, a przemieszczenie klina w kierunku poziomym jest wymuszone kinematycznie. Rozpatrywać będziemy proces stacjonarny przyjmując, że składowa pionowa prędkości klina  $v_y=0$ . Wstępna faza płynięcia nieustalonego będzie w rozważaniach pominięta. Przyjmujemy, że kąt  $\theta$  nachylenia powierzchni roboczej klina do powierzchni plastycznego ośrodka jest mniejszy od  $\pi/2$ .

<sup>\*/</sup> Zasadnicze rezultaty tej pracy przedstawiono na XX-tej Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Kozubnik 1978.

Celowość rozpatrywania tak postawionego zagadnienia wynika z co najmniej dwóch przesłanek. Po pierwsze, tego typu wymuszenie plastycznego płynięcia występuje w szeregu procesów obróbki plastycznej metali, w szczególności przy dogniataniu powierzchni. Znajomość odpowiednich rozwiązań teoretycznych pozwala lepiej zrozumieć, a także przewidzieć przebieg procesu deformacji, co z kolei może ułatwić optymalne zaprojektowanie kształtu narzędzi. Można np. badać warunki, w jakich występuje, niekorzystne w tym przypadku, zjawisko tworzenia się wiórów. Po drugie, przedstawiając powierzchnię twardszego z dwóch ciał będących w kontakcie w postaci szeregu następujących po sobie mikronierówności w kształcie klina /rys.1b/ można opisywać i tłumaczyć zjawiska tarcia i zużycia powierzchni ciał ciągliwych.



Rys.1b.

Przykładowo, znając rozwiązanie teoretyczne dla jednego klina, można na drodze teoretycznej wyznaczyć zależność współczynnika tarcia  $\mu$  od kształtu mikronierówności i sił adhezji na ich powierzchni.

W pracy zakłada się izotropowy, jednorodny, nieściśliwy, sztywno-plastyczny model materiału bez wzmocnienia. Przyjęto, że długość klina  $l$  mierzona w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $/x, y/$  jest wystarczająco duża, aby wystąpił płaski stan odkształcenia. Wprowadzenie tych założeń pozwala na zastosowanie do analizy metody linii poślizgów [1,2]. Oczywiście niezbędne jest przy tym wprowadzenie innych założeń klasycznej teorii plastycznego płynięcia, jak: niewrażliwość materiału na prędkość odkształcenia, brak efektów dynamicznych,

termicznych itd. Nie jest natomiast konieczne precyzowanie warunku plastyczności - w przypadku płaskiej deformacji model materiału jest wystarczająco określony przez podanie wartości granicy plastyczności na ścinanie  $k$ .

Ponieważ założony model materiału jest niewrażliwy na zmianę skali czasu, rozwiązanie nie zależy od wartości prędkości  $v_x$ . Wartość siły  $P_y$  nie wpływa na postać rozwiązania - dowolny wymiar liniowy rozwiązania będzie wprost proporcjonalny do wartości  $P_y$ . Tak więc warunki brzegowe rozpatrywanego zagadnienia są określone przez wartości dwóch parametrów: kąta  $\theta$  nachylenia powierzchni roboczej klina do powierzchni ośrodka oraz współczynnika tarcia na powierzchni klina. Dla uproszczenia przyjmijmy warunek tarcia na powierzchni klina w postaci  $|\tau| \leq m \cdot k$ , gdzie  $\tau$  oznacza naprężenie styczne działające na tej powierzchni, a  $m \in [0, 1]$  jest stałą. Zakładamy, że poślizg po powierzchni klina jest możliwy, gdy  $|\tau| = m \cdot k$ , lub gdy nacisk normalny na powierzchnię klina jest równy zeru: w tym szczególnym przypadku poślizg może nastąpić przy dowolnej wartości  $|\tau| \leq m \cdot k$ , np.  $\tau = 0$ . Przy przyjęciu innych warunków tarcia, np. Coulomba analizę można prowadzić w sposób analogiczny, jednakże obliczenie staje się znacznie bardziej pracochłonne.

Charakterystyczną cechą rozpatrywanego zagadnienia, w istotny sposób utrudniającą przeprowadzenie jego analizy jest to, że położenie swobodnej powierzchni w fazie ustalonego płynięcia nie jest z góry znane. Zagadnienia tego typu nie muszą mieć jednoznacznego rozwiązania. W dalszej części pracy pokazano, że określonym wartościom parametrów  $\theta$ ,  $m$ , a więc określonym warunkom brzegowym, odpowiada na ogół nieskończona klasa różnych rozwiązań spełniających wszystkie warunki dla naprężeń i prędkości. Zachodzi pytanie, które z tych rozwiązań ma sens fizyczny. Problem ten nie jest dotychczas rozstrzygnięty. W pracy przyjęto tzw. "hipotezę minimum siły", według której za właściwe rozwiązanie należy przyjąć to, które daje minimalną wartość siły potrzebnej do realizacji kinematycznie wymuszonego procesu. W analizowanym tu zagadnieniu minimalizacji podlega wartość siły

poziomej  $P_x$  niezbędnej do przesunięcia klina obciążonego siłą pionową  $P_y$  ustalonej wartości. Inaczej mówiąc, minimalizacji podlega wartość współczynnika  $\mu = P_x/P_y$ .

Pomimo pozornej prostoty warunków brzegowych istnieje szereg możliwych, bardziej i mniej złożonych, schematów deformacji. Dotychczas w literaturze, według rozeznania autora, rozpatrywane były tylko niektóre z nich [3,4]. Niniejsza praca miała na celu dokonanie systematycznej analizy zagadnienia, obejmującej cały zakres zmienności parametrów  $\theta$  i  $m$ . W rozdziale 2 przedstawiono kolejno sześć różnych typów rozwiązań. Podano schematy siatek linii poślizgów i odpowiednich hodografów, określono zakresy ich stosowalności. Wyniki obliczeń zamieszczono w rozdziale 3.

## 2. SCHEMATY ROZWIĄZAŃ

Na rysunkach nr 2, 4, 5, 6, 7, 8 podano kolejno schematy rozwiązań typu I + VI.

Rozwiązania typu I + III, słuszne tylko dla  $\theta < \frac{1}{2} \arccos m$ , opisują proces związany z uplastycznieniem wierzchniej warstwy ośrodka na pewną głębokość  $h > 0$ . Nie jest przy tym wykluczone równoczesne tworzenie się wióra /typ III rozwiązania/. Pozostałe rozwiązania są słuszne tylko dla  $\theta > \frac{1}{2} \arccos m$  i dotyczą zasadniczo procesu skrawania warstwy /typ V i VI/.

Wszystkie podane poniżej rozwiązania są kompletne, tzn. spełniają wszystkie warunki dla naprężeń i prędkości. Warunek dodatniości mocy dysypowanej sprawdzono, korzystając z metody Greena [5] względnie Forda [6]. Przy pomocy kryteriów Hilla [7] określono zakresy stosowalności rozwiązań z uwagi na warunek nieprzeciążenia naroży obszarów sztywnych. Gdy warunek ten jest spełniony, to statycznie dopuszczalne przedłużenie pola naprężeń w półprzestrzeń można zbudować metodą podaną przez autora w pracy [8].

TYP I ROZWIĄZANIA

Schemat siatki linii poślizgów typu I przedstawiony jest na rys.2a. Charakterystyczną cechą rozwiązania jest występowanie przed klinem "stojącej fali" deformowanego materiału. Elementy powierzchni swobodnej przed i po deformacji znajdują się na tym samym poziomie. Przyjmuje się, że objętość materiału znajdująca się powyżej tego poziomu została wypchnięta z ośrodka podczas fazy nieustalonego płynięcia poprzedzającej przepływ stacjonarny.

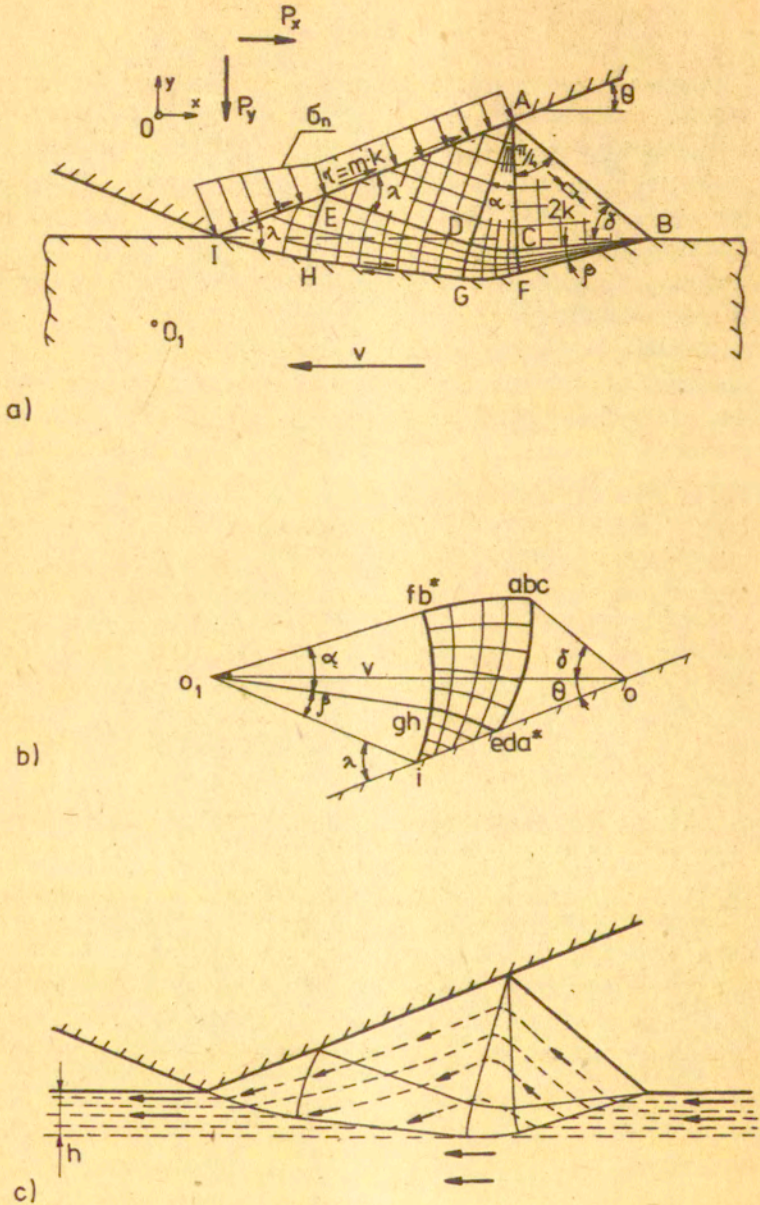
Swobodny brzeg AB jest prostoliniowy, a jego końce A i B są punktami osobliwymi rozwiązania. Rozwiązanie zależy od trzech parametrów: kątów wachlarzy  $\alpha$  i  $\beta$  oraz kąta  $\lambda (\leq \frac{\pi}{4})$ , jaki tworzą charakterystyki rodziny  $\alpha$  z konturem klina. Zgodnie z założonym warunkiem tarcia, naprężenia styczne  $\tau$  na powierzchni kontaktu wynoszą  $\tau = k \cdot \cos 2\lambda = m \cdot k$ , a więc  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ . Konstrukcja rozwiązania jest możliwa dla  $0 < \theta < \lambda$ .

Dla założonej dowolnie wartości kąta  $\alpha$  należy tak dobrać wartość kąta  $\beta$ , aby przy zadanej wartości kąta  $\theta$  punkty B i I leżały na tym samym poziomie. Widoczne jest, że dla tych samych warunków brzegowych określonych przez wartości  $m$  i  $\theta$  otrzymuje się nieskończoną klasę rozwiązań, każde o innych wartościach kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Zgodnie z przyjętą "hipotezą minimum siły" sens fizyczny będzie miało to rozwiązanie z tej klasy, z którego wynika najmniejsza wartość współczynnika  $\mu = P_x/P_y$ .

Jednakże wybrane w ten sposób rozwiązanie musi spełniać warunek nieprzeciążenia naroży obszarów sztywnych. Klasa możliwych rozwiązań jest ograniczona przez ten warunek. Kryteria Hilla [7], po uwzględnieniu zależności Hencky'ego, prowadzą do następujących nierówności ograniczających wartość kąta  $\beta$ :

$$/1/ \quad \beta \leq \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \lambda - \theta - \alpha \right) \quad \text{dla naroża B,}$$

$$/2/ \quad \beta \leq \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \pi - \lambda + \theta - \alpha \right) \quad \text{dla naroża I.}$$



Rys.2. Typ I rozwiązania



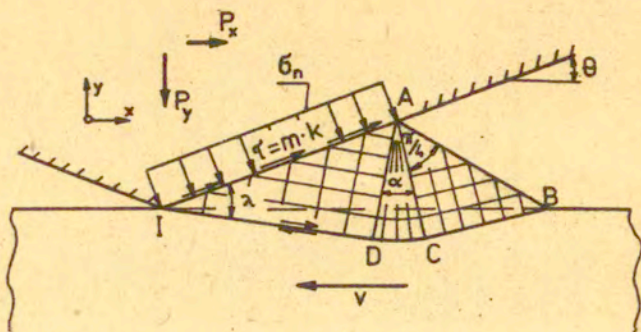
Istotnym ograniczeniem jest tu nierówność /1/, gdyż z niej wynika nierówność /2/. Aby to wykazać, wystarczy zapisać prawą stronę nierówności /2/ w postaci  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \lambda - \theta - \alpha \right) + \left( \frac{\pi}{4} - \lambda + \theta \right)$  : pierwszy człon występuje po prawej stronie nierówności /1/, a drugi jest nieujemny.

Na rys.2a zaznaczono schematycznie rozkład nacisków na powierzchni klina. Ze związków Hencky'ego można wyznaczyć wartość ciśnienia hydrostatycznego  $p_M$  w dowolnym punkcie M siatki linii poślizgów. Przykładowo,  $p_A = p_E = k(1 + 2\alpha)$ ,  $p_I = k(1 + 2\alpha + 4\beta)$ . Stąd nacisk normalny  $\sigma_n$  wzdłuż AE wynosi  $k(1 + 2\alpha + \sin 2\lambda)$ , a maksimum równe  $k(1 + 2\alpha + 4\beta + \sin 2\lambda)$  osiąga w punkcie I.

Analizując pole prędkości wygodnie jest przyjąć, że klin jest nieruchomy, a przesuwa się deformowany ośrodek /ta umowa będzie stosowana również przy omawianiu innych typów rozwiązań/. Hodograf /ściślej: jego schemat/, budowany według znanych zasad, [2] przedstawiono na rys.2b, a na rys.2c zobrażowano przy pomocy strzałek pole prędkości, naniesione na zarys siatki linii poślizgów z rys.2a. Linie kreskowane oznaczają trajektorie poszczególnych cząstek. Linia BFGHI /rys.2a/ jest linią nieciągłości prędkości, w obszarach ABC i ADE deformacja nie następuje. Ponieważ punkty B i I leżą na tym samym poziomie, to z warunku nieściśliwości wynika, że wzdłuż AB składowa normalna wektora prędkości jest automatycznie równa zero. Rozwiązanie opisuje więc rzeczywiście proces stacjonarny.

W deformacji bierze udział tylko warstwa materiału o grubości  $h$  - pozostała część ośrodka znajduje się w stanie sztywnym. Analizując pole prędkości łatwo stwierdzić, że prostoliniowe włókna materiału prostopadłe do powierzchni ośrodka przed deformacją ulegną w trakcie deformacji zakrzywieniu przy powierzchni w kierunku zgodnym z ruchem klina względem ośrodka. Odształcenia są bardzo duże, dążąc do nieskończoności na głębokości  $h$ .

Szczególny przypadek siatki linii poślizgów z rys.2a gdy  $\beta = 0$  jest przedstawiony na rys.3. Taki schemat rozwiązania rozpatrywał Segal [4]. Jak się okazuje /patrz rozdz.3/, przy  $m > 0$  to szczególne rozwiązanie daje najmniejszą wartość współczynnika  $\mu = P_x/P_y$ .



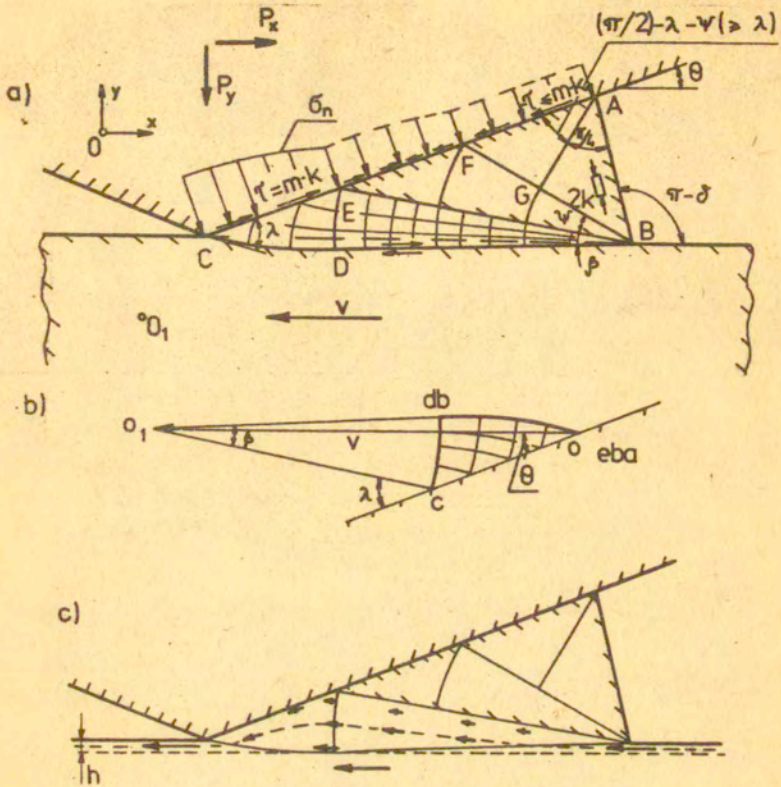
Rys.3. Szczególny przypadek rozwiązania typu I

Interesujący z teoretycznego punktu widzenia problem powstaje przy braku tarcia na powierzchni klina  $m=0$ , kiedy to wszystkie rozwiązania dają dla tej samej wartości kąta  $\theta$  tę samą wartość stosunku  $P_x/P_y$ . Ponieważ kryterium minimum siły nie pozwala wówczas na wybranie jakiegokolwiek rozwiązania, należy zastosować inne kryterium wyboru. Przy przedstawianiu liczbowych rezultatów /rozdział 3/ przyjęto, że parametry rozwiązania zmieniają się w sposób ciągły przy przejściu granicznym  $m \rightarrow 0$ .

#### TYP II ROZWIĄZANIA

Schemat siatki linii poślizgów typu II przedstawiono na rys.4a. W tym rozwiązaniu obszar plastycznej deformacji BECDB nie sięga powierzchni swobodnej, lecz jest "przykryty" obszarem AEB sztywnego materiału przyległym do narzędzia. Hodograf oraz schemat deformacji przedstawiono odpowiednio na rys.4b i c. Charakterystyka CDB jest linią nieciągłości prędkości, natomiast na sztywno-plastycznej granicy EB skok prędkości nie występuje.

Postać siatki linii poślizgów w obszarze BECDB zależy od dwóch parametrów: kąta  $\lambda$ , jaki tworzą na odcinku CE linie poślizgu rodziny  $\alpha$  z konturem klina oraz kąta  $\beta$  wachlarza EBD /złożonego z odcinków prostych i łuków okręgowów/. Z założonego warunku tarcia wynika, że  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ .



Rys.4. Typ II rozwiązania

Aby rozwiązanie opisywało proces stacjonarny, punkty B i C muszą leżeć na tym samym poziomie. Dla zadanej wartości kąta  $\theta$ , wynika stąd dokładnie jedna wartość kąta  $\beta$ . Konstrukcja rozwiązania jest możliwa dla  $0 < \theta < \lambda$ .

Tak więc określonym przez wartości  $m$  i  $\theta$  warunkom brzegowym odpowiada jedna siatka linii poślizgów w obszarze uplastycznionym BECDB. Pole prędkości jest również określone jednoznacznie. Jednakże pole naprężeń jest określone z dokładnością do wartości ciśnienia hydrostatycznego w pewnym punkcie siatki, np. ciśnienia  $p_{BE}$  wzdłuż linii BE, które może być w pewnym zakresie przyjęte dowolnie. Rozwiązanie jest więc niejednoznaczne.

Zauważmy, że dla ustalonej siatki linii poślizgów przyjęta wartość ciśnienia  $p_{BE}$  nie wpływa na wartość siły  $P_x$ , natomiast wartość siły  $P_y$  wzrasta ze wzrostem  $p_{BE}$ . Tym samym, w celu uzyskania rozwiązania dającego możliwie małą wartość stosunku  $P_x/P_y$  należy przyjąć możliwie dużą wartość  $p_{BE}$ , nie powodującą jednak przekroczenia warunku plastyczności w obszarach sztywnych.

Wprowadźmy oznaczenie  $p_{BE} = k(1 + 2\psi)$ . Aby określić sens wielkości  $\psi$  założmy, że naprężenia w sztywnym obszarze ABE spełniają warunek plastyczności oraz zbudujmy w tym obszarze siatkę linii poślizgów /rys.2a/. Wówczas kąt wachlarza EBF można oznaczyć przez  $\psi$ , a powyższe wyrażenie na wartość  $p_{BE}$  wyniknie z zależności Henckého.

Kąt  $\delta$  nachylenia odcinka AB powierzchni swobodnej musi spełniać nierówność

$$/3/ \quad \delta \geq \frac{\pi}{4} + \psi + \lambda - \theta,$$

gdyż w przeciwnym wypadku, zgodnie z kryterium Hilla [7], naroże EBA byłoby przeciążone. Równocześnie, z warunku nieprzeciążenia naroża B od strony ośrodka wynika ograniczenie na wartość  $\psi$

$$/4/ \quad \psi \leq -2\beta + \frac{\pi}{4} + \lambda - \theta,$$

natomiast z warunku tarcia  $|\tau| \leq m \cdot k$  wzdłuż FA otrzymujemy

$$/5/ \quad \psi \leq \frac{\pi}{2} - 2\lambda.$$

Warunek nieprzeciążenia naroża C, postaci

$$/6/ \quad \psi \leq \frac{3}{4}\pi - 2\beta - \lambda + \theta,$$

nie odgrywa roli, gdyż nierówność /6/ wynika z /4/. Dowód tego faktu wynika z rozpisania prawej strony nierówności /6/ w postaci  $\frac{\pi}{4} - 2\beta + \lambda - \theta + 2(\frac{\pi}{4} - \lambda + \theta)$ , ponieważ wielkość występująca w nawiasie jest dodatnia.

Szukaną wartość  $p_{BE}$  otrzymuje się, wstawiając do wzoru  $p_{BE} = k(1 + 2W)$  maksymalną wartość  $W$ , spełniającą równocześnie nierówności /4/ i /5/. Dla pewnych kombinacji wartości  $m$  i  $\theta$ , decydującym ograniczeniem staje się nierówność /5/. Oznacza to, że na odcinku AF naprężenia styczne osiągają wartość, umożliwiającą poślizg materiału w kierunku FA. Można wówczas skonstruować rozwiązanie opisujące proces tworzenia się wióra /typ III rozwiązania/.

### TYP III ROZWIĄZANIA

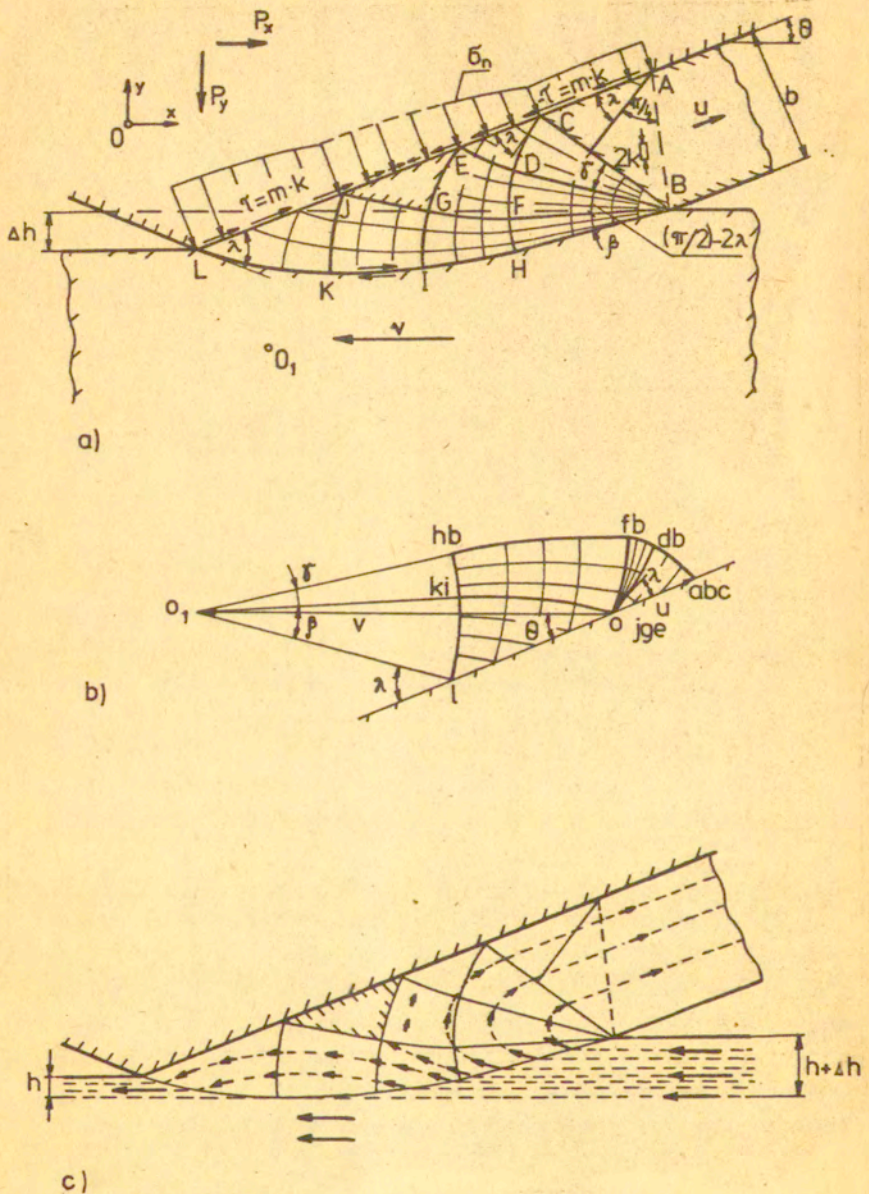
Na rys.5a przedstawiono schemat siatki linii poślizgów typu III. Hodograf oraz schemat deformacji pokazane są odpowiednio na rys.5b i c. Warstwa materiału ulegającego deformacji rozdziela się na dwie części. Pierwsza z nich o grubości  $\Delta h$  przekształca się w wiór, a druga o grubości  $h$  po przejściu przez obszar deformacji plastycznych stanowi nową, wierzchnią warstwę ośrodka.

Materiał tworzący sztywny wiór jest na zewnątrz linii AB wolny od naprężeń. Naprężenia styczne  $\tau$  działające na odcinkach LJ i EA spełniają warunek zaistnienia poślizgu  $|\tau| = m \cdot k$ , ale zwrot ich jest przeciwny. Zmiana zwrotu naprężeń stycznych następuje na odcinku JE, przy czym dokonuje się ona w sposób ciągły. Wskutek tego poślizg na odcinku JE zachodzić nie może, a obszar JGE musi być sztywny. Począwszy od granic JG i GE tego obszaru, prędkość wzrasta od zera w sposób ciągły - jedynie linia LKIH B jest linią nieciągłości prędkości.

Postać rozwiązania zależy od trzech parametrów: kątów  $\lambda$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Zgodnie z warunkiem tarcia,  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ . Przy ustalonych wartościach  $\lambda$  i  $\theta$  /przy czym  $\lambda > \theta$ /, kąt  $\beta$  ma wartość określoną poprzez warunki kinematyczne /równą wartości kąta  $\beta$  w rozwiązaniu typu II/. Rozwiązanie nie jest określone jednoznacznie przez wartości  $m$  i  $\theta$ , gdyż trzeci parametr  $\gamma$  może przyjmować dowolną wartość z zakresu

/7/

$$0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} (3\lambda - \frac{\pi}{4} - \theta - 2\beta) .$$



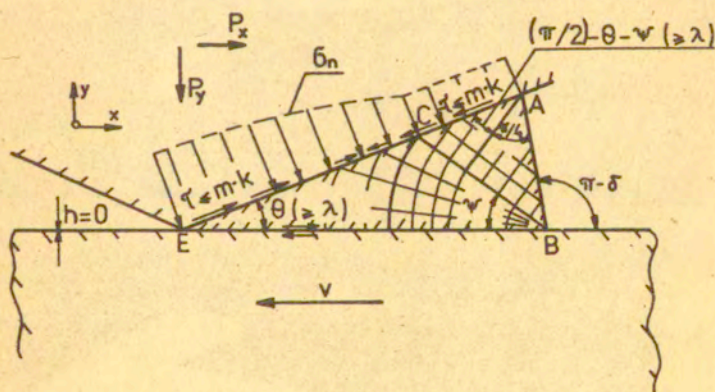
Rys.5. Typ III rozwiązania

Prawa część nierówności /7/ wyraża warunek nieprzecięcia naroża B od strony ośrodka. Podobnie jak dla poprzednich typów rozwiązań można wykazać, że przy spełnionej nierówności /7/ naroże przy wierzchołku klina L jest również nieprzeciężone.

Jakościowa analiza pola naprężeń prowadzi do wniosku, że w miarę zwiększania kąta  $\gamma$  zmniejsza się wartość stosunku  $P_x/P_y$ . Właściwe rozwiązanie z klasy rozwiązań możliwych otrzyma się prawdopodobnie przy przyjęciu maksymalnej wartości spełniającej nierówność /7/.

#### TYP IV ROZWIĄZANIA

Dla dużych wartości współczynnika tarcia  $m$  może zaistnieć sytuacja przedstawiona na rys.6. Materiał wypchnięty z ośrodka do obszaru EAB w trakcie fazy nieustalonego płynięcia nie ulega już dalszej deformacji. Następuje jedynie ścinanie materiału



Rys.6. Typ IV rozwiązania

wzdłuż prostej linii nieciągłości EB /bez utraty spójności materiału/. Tak proste rozwiązanie jest również niejednoznaczne, gdyż wartość ciśnienia hydrostatycznego  $p_{BE}$  wzdłuż linii EB można dobrać w pewnym zakresie dowolnie.

Właściwą /według hipotezy minimum siły/ wartość tego ciśnienia można wyznaczyć, postępując podobnie jak dla rozwiązania typu II. Zakładając istnienie stanu granicznego w obszarze ABE, można zbudować w tym obszarze siatkę linii poślizgów. Wówczas  $P_{BE} = k(1 + 2\psi)$ , gdzie  $\psi$  jest kątem wachlarza EBC. Ponieważ  $P_x = k \cdot \overline{EB}$ ,  $P_y = P_{EB} \cdot \overline{EB}$ , więc ze wzrostem kąta  $\psi$  maleje wartość stosunku  $P_x/P_y = 1/(1 + 2\psi)$ . Maksymalna dopuszczalna wartość kąta  $\psi$  wynosi  $\pi/4$ , gdyż przy większych wartościach  $\psi$  naroże B/o kącie rozwarcia  $180^\circ$  byłoby przeciążone.

Z założonego warunku tarcia wynika, że kąt, jaki tworzą charakterystyki z konturem klina, nie może być mniejszy od  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ . Stąd  $\theta \geq \lambda$  oraz  $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \theta - \psi \geq \lambda$ . Drugi z tych warunków będzie spełniony dla  $\psi = \pi/4$  jeżeli  $\theta \leq \frac{\pi}{4} - \lambda$ . Tak więc w zakresie  $\lambda \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} - \lambda$  właściwe rozwiązanie otrzymamy /niezależnie od konkretnych wartości  $\theta$  i  $\lambda$  / dla  $\psi = \pi/4$ , dla którego  $\mu = P_x/P_y = 1/(1 + \frac{\pi}{2}) \approx 0.389$ . Przy większych wartościach kąta  $\theta$  możliwe jest powstawanie wióra zgodnie z rozwiązaniem typu V, co wymaga przyłożenia siły  $P_x$  mniejszej niż uzyskana z rozwiązania typu IV.

#### TYP V ROZWIĄZANIA

Przy dostatecznie dużych wartościach kąta  $\theta$  proces dogniatania powierzchni przechodzi w proces skrawania warstwy. Postać siatki linii poślizgów odpowiadającej takiemu procesowi oraz odpowiedni hodograf przedstawiono na rys.7a i b. Taki schemat siatki linii poślizgów otrzymuje się jako szczególny przypadek rozwiązania typu III przy założeniu  $\beta = 0$ .

Z uwagi na warunek tarcia, rozwiązanie typu V można zbudować, gdy  $\lambda \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ . Z warunku nieprzeciążenia naroża B wynika nierówność

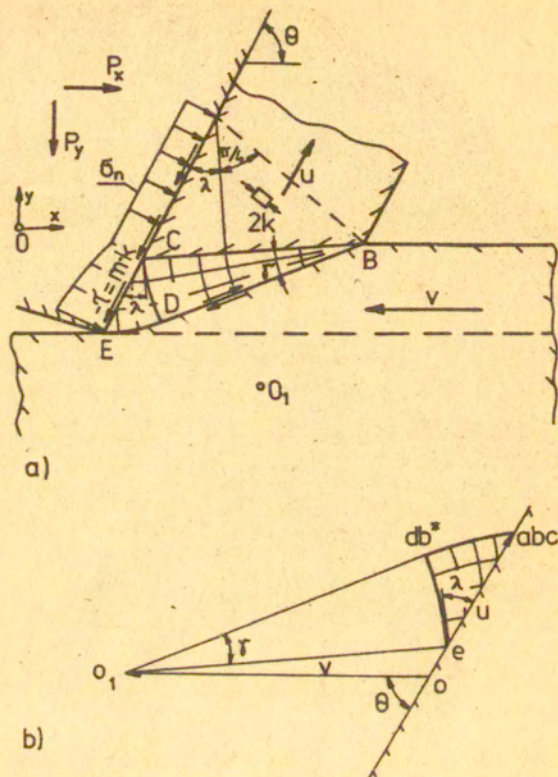
$$/8/ \quad 0 < 2\gamma \leq \theta + \lambda - \frac{\pi}{4},$$

a więc  $\theta > \frac{\pi}{4} - \lambda$ . Przy spełnionej nierówności /8/, naroże H nie jest przeciążone.





TYP VI ROZWIĄZANIA



rys.8.

Schemat siatki linii poślizgów przedstawiony na rys.8a, opisujący proces skrawania warstwy bez powstawania narostu na powierzchni ostrza, podany został przez Kudo[3]. Odpowiedni hodograf pokazany jest na rys.8b. Materiał powyżej linii AB jest wolny od naprężeń, naprężenia styczne wzdłuż AE mają stałą wartość. Linia EDB jest linią nieciągłości prędkości, powyżej linii CB deformacja nie następuje.

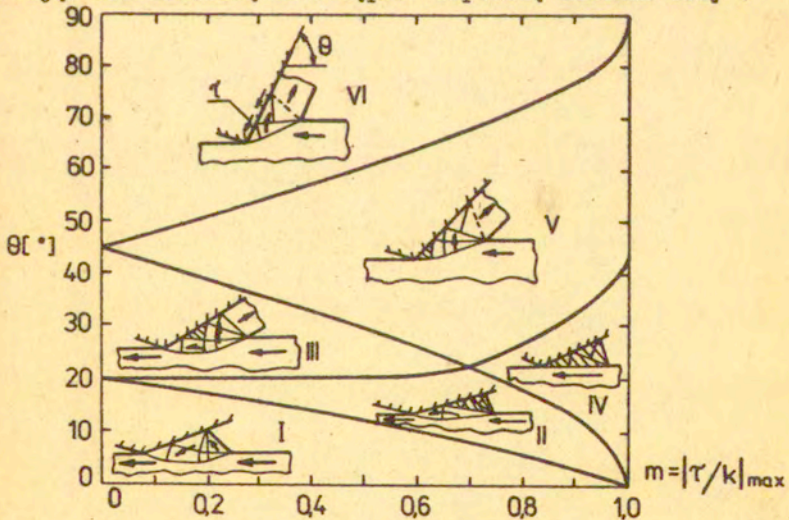
Z warunku tarcia wynika, że  $\theta \geq \frac{\pi}{2} - \lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \arccos m$ .  
Rozwiązanie jest niejednoznaczne, gdyż można je skonstruować dla dowolnej wartości kąta  $\gamma$  z zakresu

$$/9/ \quad (0 \leq) \gamma < \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4}\pi - \theta - \lambda \right),$$

określonego przez warunek nieprzecięcia naroża B. Dla  $\gamma = 0$  otrzymujemy klasyczne rozwiązanie Lee i Shaffera [9].

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ

Zasadniczym celem przeprowadzonych obliczeń było określenie, w jakich zakresach wartości współczynnika tarcia  $m$  na powierzchni klina i kąta  $\theta$  nachylenia powierzchni roboczej klina do powierzchni ośrodka obowiązują poszczególne typy rozwiązań. Z uwagi na niejednoznaczność rozwiązań możliwe jest skonstruowanie rozwiązań różnych typów dla tych samych wartości  $m$  i  $\theta$ . Wyboru właściwego rozwiązania dokonano wykorzystując sformułowaną na wstępie "hipotezę minimum siły".



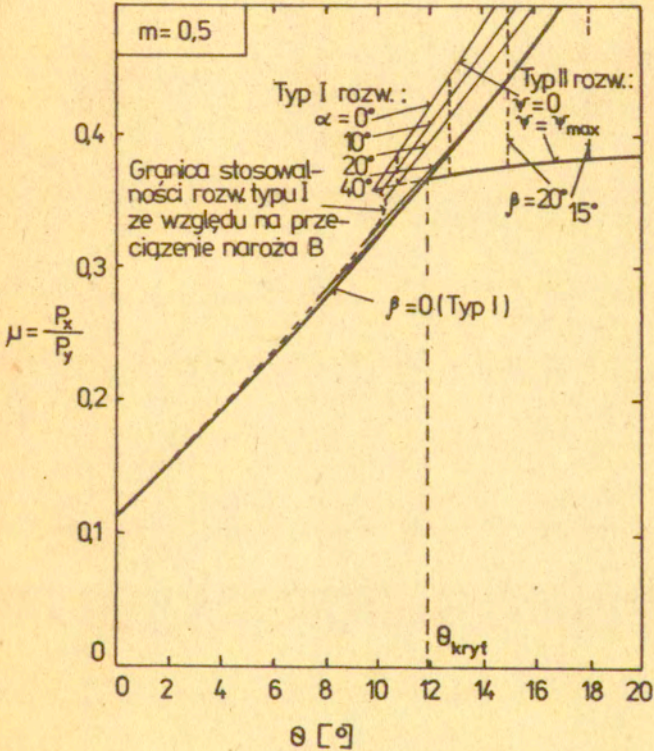
Rys.9. Zakresy stosowalności poszczególnych typów rozwiązań według "hipotezy minimum siły"

Dla określenia zakresów stosowalności rozwiązań typu I i II niezbędne okazało się wykonanie odpowiednich obliczeń numerycznych. Bardzo efektywną metodą konstruowania siatek linii poślizgów oraz wyznaczania parametrów rozwiązań jest metoda macierzowa, zaproponowana przez Collinsa [10] i podana w formie szczegółowo opracowanej techniki obliczeniowej przez Dewhursta i Collinsa [11]. Metoda ta ma ścisły związek z metodą szeregów potęgowych proponowaną przez Ewinga [12]. Opracowano programy obliczeniowe DOGN 1 i DOGN 2 wyznaczające przy użyciu metody macierzowej parametry rozwiązań odpowiednio typu I i II. Tabulogramy tych programów napisano w języku ALGOL 1204. Obliczenia numeryczne wykonano na maszynie cyfrowej ODRA 1204. Zastosowanie metody macierzowej umożliwiło przebadanie kilku tysięcy siatek linii poślizgów w stosunkowo krótkim czasie pracy EMC.

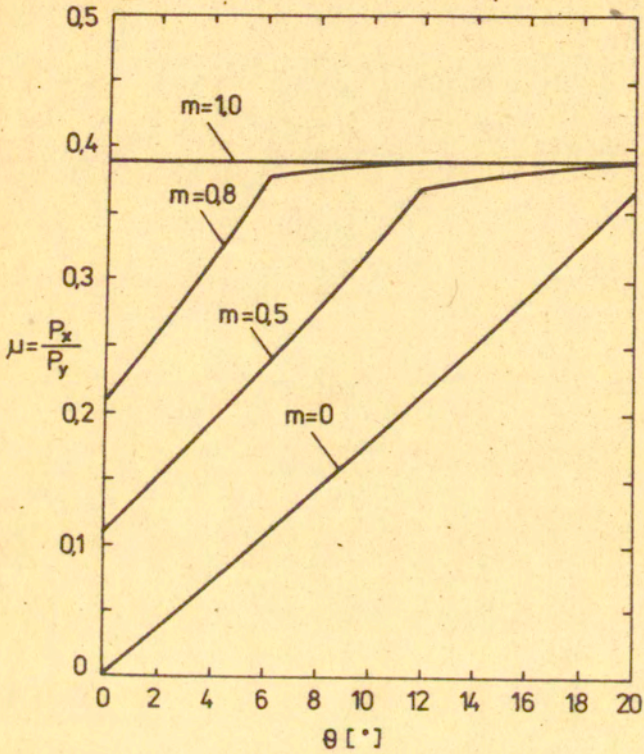
W oparciu o wyniki przeprowadzonych obliczeń sporządzono zbiorczy wykres przedstawiony na rys.9. Na płaszczyźnie  $(m, \theta)$  wydzielono obszary, w których zaznaczony schematycznie mechanizm deformacji wymaga najmniejszej wartości siły poziomej  $P_x$  działającej na klin przy ustalonej wartości siły  $P_y$ . Część linii odgraniczających poszczególne obszary opisana jest następującymi równaniami /stanowiącymi graniczne przypadki nierówności podanych w rozdziale 2/ : linia pomiędzy obszarami V i VI:  $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos m$ , pomiędzy V i IV:  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos m$ , pomiędzy III i V oraz II i IV:  $\theta = \frac{1}{2} \arccos m$ . Przebieg linii odgraniczających obszary II i III oraz I i II wyznaczono na podstawie wyników obliczeń numerycznych.

Na rys.10 przedstawiono bardziej szczegółowo rezultaty obliczeń numerycznych dla  $m = 0.5$ . Okazuje się, że spośród rozwiązań typu I najmniejszą wartość  $\mu = P_x/P_y$  daje szczególny przypadek rozwiązania gdy  $f = 0$ , niezależnie od wartości  $\theta$ . Podobne wyniki otrzymano dla innych wartości  $m$ . Z wykresu widać, że dla  $\theta > \theta_{kryt} \approx 12^\circ$  jeszcze mniejszą wartość  $\mu$  uzyskamy z rozwiązania typu II przy odpowiednio dużej wartości kąta  $\psi$ . Tak więc, zgodnie z hipotezą minimum siły, przy  $\theta = \theta_{kryt}$  nastąpi zmiana mechanizmu deformacji, przy czym geometria rozwiązania zmieni się w sposób skokowy.

Warto zaznaczyć, że z wykresu rys.10 wynika położenie jednego punktu linii odgraniczającej obszary stosowalności rozwiązań typu I i II wykreślonej na rys.9.

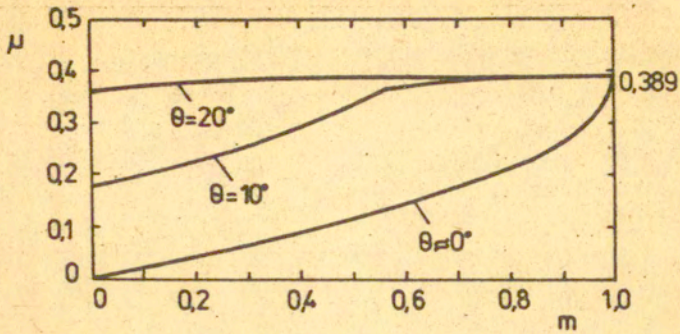


Rys. 10.

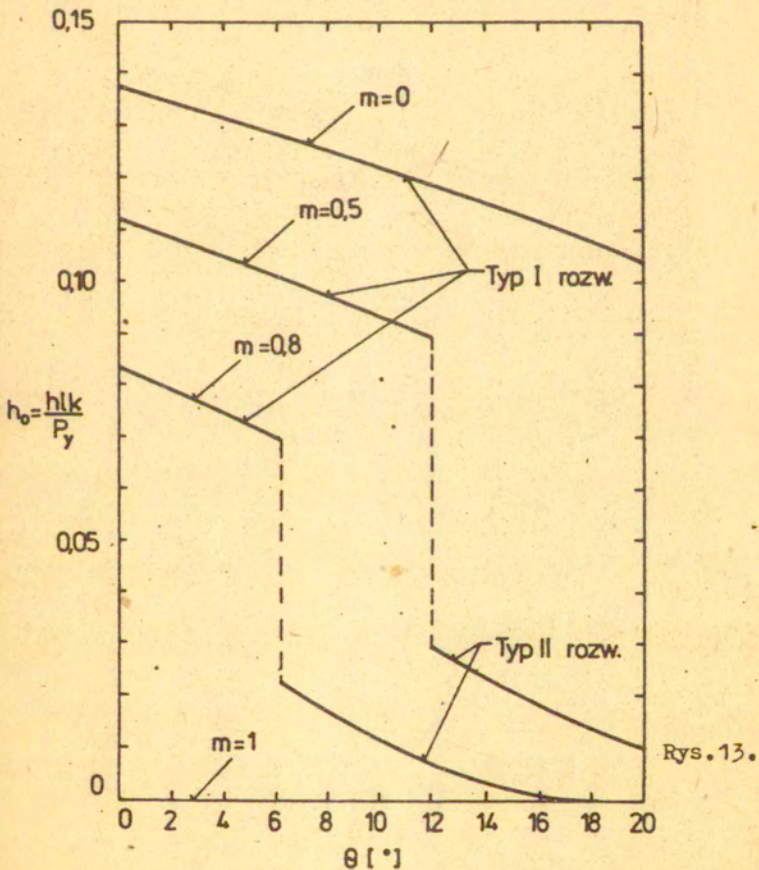


Rys.11.

Rys.11 ilustruje zależność współczynnika  $\mu$  od kąta  $\theta$  dla różnych wartości współczynnika tarcia  $m$ , natomiast na rys.12 przed-



Rys. 12.



Rys. 13.

tawiono wykresy zależności  $\mu$  od  $m$  dla różnych wartości  $\theta$ . Rys. 13 pokazuje, jak zmienia się głębokość uplastycznienia ośrodka w zależności od wartości kąta  $\theta$  przy różnych wartościach współczynnika tarcia  $m$ . Na osi pionowej odkładano bezwymiarowy współczynnik  $h_0$ , proporcjonalny do głębokości uplastycznienia ośrodka  $h$ . Znając długość klina  $l$ , wartość siły obciążającej klin  $P_y$  oraz wartość granicy plastyczności na ścinanie  $k$ , można wyznaczyć głębokość uplastycznienia ze wzoru  $h = h_0(P_y/lk)$ . Nieciągłość wykresów  $h_0(\theta)$  wynika ze wspomnianej powyżej skokowej zmiany geometrii rozwiązania przy zmianie typu rozwiązania z I na II.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Z przeprowadzonej analizy wynika, że stacjonarne zagadnienie przesuwania klina po powierzchni plastycznego ośrodka jest zagadnieniem złożonym, z uwagi na istnienie różnych, niekiedy dosyć skomplikowanych, możliwych schematów deformacji. Wykazano, że w ramach teorii plastycznego płynięcia ciał sztywno-idealnie plastycznych zagadnienie to posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Niejednoznaczność rozwiązań jest związana z tym, że geometria ciała w fazie ustalonego płynięcia nie jest z góry określona.

Przedstawione rozwiązania obejmują cały zakres zmienności parametrów  $m$  i  $\theta$ , określających warunki brzegowe zagadnienia. Nie jest jednak wykluczone istnienie jeszcze innych, nierozpatrzonych tu mechanizmów deformacji, które w pewnych zakresach parametrów  $m$  i  $\theta$  mogłyby być konkurencyjne w stosunku do mechanizmów przebadanych. Ponadto zastosowana "hipoteza minimum siły", choć jest zgodna z inżynierską intuicją, nie jest dotychczas wystarczająco uzasadniona naukowo. Należy mieć też na uwadze, że przedstawione rozwiązania nie uwzględniają rzeczywistych własności materiału, w szczególności wzmocnienia i własności sprężystych materiału. Wykazana jest więc pewna ostrożność przy formułowaniu



wniosków praktycznych tylko na podstawie rezultatów uzyskanych w tej pracy.

Powyższe wątpliwości nie powinny prowadzić do wniosku, że uzyskane wyniki teoretyczne nie mają praktycznego znaczenia. Metoda linii poślizgów już wielokrotnie prowadziła do rezultatów zadziwiająco zgodnych z rzeczywistym zachowaniem się metali. Tak więc o praktycznej przydatności przedstawionych wyników zdecydować może dopiero eksperyment.

LITERATURA

1. R.HILL, The mathematical theory of plasticity, Oxford 1950
2. W.SZCZEPIŃSKI, Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, Warszawa, 1967
3. H.KUDO, Some new slip-line solutions for two-dimensional steady-state machining, Int.J.Mech.Sci., 2, 43, 1965
4. V.M.SEGAL, Technologiêeskiye zadaçi teorii plastičnosti, Minsk 1977
5. A.P.GREEN, The plastic yielding of notched bars due to bending, Q.J.Mech.Appl.Math., 6, 223, 1953
6. H.FORD, Advanced Mechanics of Materials, London 1963
7. R.HILL, On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress, J.Mech.Phys.Solids, 2, 278, 1954
8. H.PETRYK, Non-unique slip-line field solutions for the wedge indentation problem, J.Mec.Appl., 4, 255-282, 1980
9. E.H.LEE, B.W.SHAFER, The theory of plasticity applied to a problem of machining, J.Appl. Mech., 18, 405, 1951
10. I.F.COLLINS, The algebraic-geometry of slip line fields with applications to boundary value problems, Proc.Roy. Soc. A 303, 317, 1968
11. P.DEWHURST, I.F.COLLINS, A matrix technique for constructing slip-line field solutions to a class of plane strain plasticity problems, Int.J.Num.Meth.Engng., 2, 357, 1973
12. D.J.F.EWING, A series-method for constructing plastic slipline fields, J.Mech.Phys.Solids, 15, 105, 1967

SPIS TREŚCI

1. Wstęp .....	str	3
2. Schematy rozwiązań .....	"	6
Typ I rozwiązania .....	"	7
Typ II rozwiązania .....	"	10
Typ III rozwiązania .....	"	13
Typ IV rozwiązania .....	"	15
Typ V rozwiązania .....	"	16
Typ VI rozwiązania .....	"	18
3. Wyniki obliczeń .....	"	19
4. Uwagi końcowe .....	"	24
Literatura .....	"	26