

Anna Kucaba-Piętal

**USTALONY BOCZNY OPLYW TORUSA
W PRZYBLIŻENIU STOKESA**

28/1981



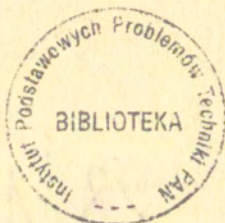
P. 269

WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 maja 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 28/1981



57085



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 130 egz. Ark. wyd. 1,4. Ark. druk. 2.
Oddano do drukarni w sierpniu 1981 r.
Nr zamówienia 485/0

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

USTALONY BOCZNY OPLÝW TORUSA
W PRZYBLIŻENIU STOKESA

1. W s t ę p

Osiowo-symetryczny problem przepływu Stokesa wokół otwartego torusa zwanego też pierścieniowym został rozwiązany już w latach sześćdziesiątych.

Peyne i Pell /1960/ dali poprawne rozwiązanie tego problemu rozwiązując go poprzez wprowadzenie funkcji prądu. W 1974 Wakiya, a w 1977 Majumdar i O'Neill podali rozwiązanie tegoż problemu inną metodą, znacznie prostszą od tamtej pod względem algebraicznym, wykorzystującą metody numeryczne.

Interesujące stało się zagadnienie przepływów asymetrycznych, zwanych też bocznymi, torusa. Ponieważ równania Stokesa są liniowe, znajomość rozkładu ciśnień i prędkości dla przepływów asymetrycznych torusa pozwala na opis / wobec znajomości przepływów osiowo-symetrycznych / przepływów pod dowolnym kierunkiem.

Asymetryczny przepływ torusa w przybliżeniu Stokesa został w 1963r. rozwiązany przez Deana i O'Neilla.

Biorąc divergencję z równania (2.1) oraz wykorzystując (2.2) otrzymujemy:

$$(2.3) \quad \nabla^2 p = 0$$

Lemat 2.1

Jeżeli $\underline{v} = (2\mu)^{-1} \cdot R p + \underline{v}_1$, to układ równań (2.1), (2.2) jest tożsamościowo spełniony oraz $\nabla^2 \underline{v}_1 = 0$.

R- wektor promień dowolnego punktu w cieczy.

Dowód

$$(2.4) \quad \nabla^2 \underline{v} = (2\mu)^{-1} \nabla^2 p + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \nabla^2 p + \nabla^2 \underline{v}_1$$

Wstawiając (2.4) do (2.1) otrzymuję

$$\nabla p = \nabla p + \frac{1}{2} \cdot R \nabla^2 p - \nabla^2 \underline{v}_1$$

Ze względu na (2.3) równanie jest spełnione tożsamościowo, gdy $\nabla^2 \underline{v}_1 = 0$.

W dalszym ciągu pracy będę poszukiwać rozwiązań układu (2.1)(2.2) w postaci

$$(2.5) \quad \underline{v} = (2\mu)^{-1} \cdot R p + \underline{v}_1$$

gdyż wtedy \underline{v}_1 , p są funkcjami harmonicznymi.

3. Rozwiązanie problemu I

Rozważam torus, który porusza się z prędkością translacyjną U w kierunku osi x czyli prostopadle do osi symetrii (Rys. 1). Wprowadzam cylindryczny układ współrzędnych (r, θ , z). Przepływ opisany jest równaniami (2.1)(2.2). Warunki brzegowe nałożone na pole prędkości są:

$$(3.1) \quad \underline{v} = U (\cos\theta, -\sin\theta, 0) \quad \text{-na brzegu torusa}$$

$$(3.2) \quad \underline{v} = 0 \quad \text{w nieskończoności.}$$

Rozwiązania układu poszukuję w postaci (2.5). Oznaczając przez (v_{1r} , $v_{1\theta}$, v_{1z}) składowe \underline{v}_1 w układzie cylindrycznym, w oparciu o prace Majumdera, O' Neilla (1979) oraz O' Neilla (1970) poszukuję

funkcji postaci:

$$(3.3) \quad v_{1r} = \frac{1}{2} U (\chi + \Psi) \cos \theta$$

$$(3.4) \quad v_{1\theta} = \frac{1}{2} U (\chi - \Psi) \sin \theta$$

$$(3.5) \quad v_{1z} = + U \Phi \cdot \cos \theta$$

oraz

$$(3.6) \quad p = \mu \cdot U \cdot Q \cdot \cos \theta$$

Funkcje χ, Ψ, Q, Φ nie zależą od θ , a jedynie od r, z oraz spełniają warunek / wynikający z harmoniczności $\nabla_1 /$.

$$(3.7) \quad L_1^2 Q = L_2^2 \chi = L_0^2 \Psi = L_1^2 \Phi = 0$$

gdzie operator L_m^2 jest definiowany

$$(3.8) \quad L_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad m = 0, 1, 2$$

Równanie ciągłości przyjmie teraz postać:

$$(3.9) \quad \left(3 + r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) Q + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \chi + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

zaś warunek brzegowy:

$$(3.10) \quad \Psi = \chi + 2$$

$$(3.11) \quad Q = -2/r \cdot \chi$$

$$(3.12) \quad \Phi = z/r \cdot \chi$$

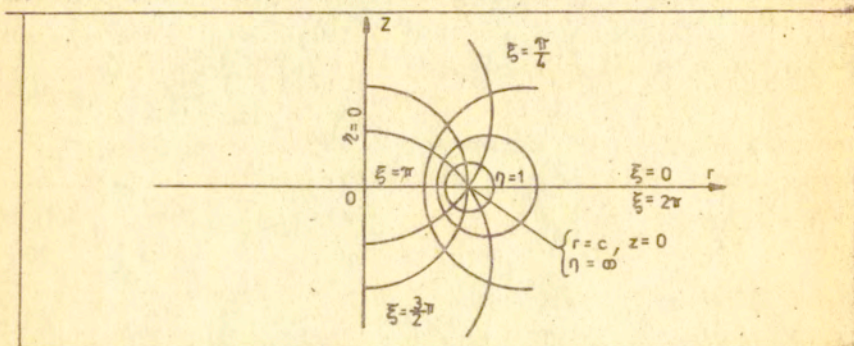
Prędkość w nieskończoności będzie przyjmować wartość zero jeśli $\Psi = 0, \chi = 0, \Phi = 0, Q = 0$ dla $(r^2 + z^2) \rightarrow \infty$.

Geometria torusa narzuca użycie układu współrzędnych toroidalnych (ξ, η, θ) /- Rys.2 /, w którym to rozwiązanie równania Laplace'a wyraża się poprzez pierścieniowe funkcje Legendra.

Toroidalne współrzędne [6] ξ, η, θ , w meridionalnej płaszczyźnie (r, z) są związane z cylindrycznym układem współrzędnych wzorami:

$$(3.13) \quad z = \frac{c \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad r = \frac{c \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$$

c dowolna stała, $c \neq 0$. Dla dalszych rozważań przyjmuję $c = 1$, z wyjątkiem paragrafu 7.



Rysunek 2. Układ współrzędnych toroidalnych w płaszczyźnie meridionalnej.

Krzywe $\eta = \text{const}$ dla $r \gg 0$ są okręgami, dla których punkt $(0, c)$ leży we wnętrzu koła. Krzywe $\eta = \eta_0$ definiują granice -profile torusa. Przepływ wokół tak zdefiniowanego torusa odbywa się w płaszczyźnie ($\theta = \text{const}$), której współrzędne spełniają warunki:

$$(3.14) \quad \infty > \eta > 0, \quad 2\pi > \xi > 0$$

Początek układu współrzędnych $r=z=0$ odpowiada $\xi = \pi, \eta = 0$, zaś nieskończoność $-\xi = \eta = 0$.

Promień torusa $a = \coth \eta_0$, promień tworzącej $b = \text{cosech} \eta_0$

$$\cosh \eta_0 = \frac{a}{b}. \quad / \text{Rys. 1} /$$

Równanie Laplace'a $\nabla^2 v_1 = 0$ w współrzędnych toroidalnych ma postać :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{(\cosh \eta - \cos \xi) \sinh \eta} \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} = 0$$

Przyjmując $v_1 = U(\cosh\eta - \cos\xi)^{1/2}$, $U = H(\eta) \cdot \Phi(\xi) \cdot \Psi(\theta)$
i dzieląc otrzymane równanie przez $H = H(\eta)$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{d\eta}^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\xi}^2 + \frac{1}{\sinh^2\eta} + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + \frac{\coth\eta dH}{H \cdot d\eta} + \frac{1}{4} = 0$$

Prowadzi ono do związków na funkcje.

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + m^2 \Phi = 0. & \frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + n^2 \Psi = 0 \\ \frac{dH}{d\eta}^2 + \coth\eta \frac{dH}{d\eta} - \left(n^2 + \frac{1/4}{1} + \frac{m^2}{\sinh^2\eta} \right) H = 0 \end{cases}$$

Ostatnie równanie jest równaniem Legendra, spełnianym przez funkcje pierścieniowe $P_{n-1/2}^m(\cosh\eta)$, stąd szukanym rozwiązaniem jest

$$(3.16) \quad W = (\cosh\eta - \cos\xi)^{1/2} P_{n-1/2}^m(\cosh\eta) \frac{\cos n\xi \cos m\theta}{\sin^n \xi \sin^m \theta}$$

Pokażę, że funkcje określające składowe prędkości χ , Ψ , Φ , Q dają się wyrazić poprzez funkcje pierścieniowe.

Lemat 3.1

Jeżeli funkcja spełnia $L_2^m f = 0$, to $f = (\cosh\eta - \cos\xi)^{1/2} \cdot P_{n-1/2}^m(\cosh\eta) \frac{\cos n\xi \cos m\theta}{\sin^n \xi \sin^m \theta}$

Dowód

Niech $f = U(\cosh\eta - \cos\xi)^{1/2}$
 $L_2^m f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{m}{\sinh^2\eta} + \coth\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{4} U = 0$

Przyjmując $U = H(\eta) \cdot \Phi(\xi)$ i dzieląc przez H dostaję równanie (3.14). Oczywiście $H \neq 0$.

Ze względu na symetrię przepływu oraz warunek (3.7) funkcje Q , χ , Ψ , Φ we współrzędnych toroidalnych można przedstawić jako:

$$(3.16) \quad \chi = (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{n-1/2}^2 (\cosh \eta) \cdot \cos n \xi$$

$$(3.17) \quad \varrho = (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{n-1/2}^2 (\cosh \eta) \cdot \cos n \xi$$

$$(3.18) \quad \psi = (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_{n-1/2} (\cosh \eta) \cdot \cos n \xi$$

$$(3.19) \quad \phi = (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{n-1/2}^1 (\cosh \eta) \cdot \sin n \xi$$

Współczynniki A_n, B_n, C_n, D_n zależą jedynie od $\cosh \eta_0 = \frac{a}{b}$, gdzie $\eta_0 = \text{const}$ opisuje brzeg torusa. Warunki brzegowe (3.10) - (3.11) implikują związki pomiędzy tymi współczynnikami.

$$(3.20) \quad B_n = - \text{ctgh} \eta_0 \cdot A_n \cdot \frac{P_{n-1/2}^2}{P_{n-1/2}^1} + \text{cosech} \eta_0 \cdot \frac{P_{n-3/2}^2 A_{n-1}}{P_{n-1/2}^1} + \frac{A_{n+1/2} P_{n+1/2}^2}{P_{n-1/2}^1}$$

$$(3.21) \quad C_n = \text{cosech} \eta_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{A_{n-1} P_{n-1/2}}{P_{n-1/2}^1} \partial_n - \frac{A_{n+1} P_{n+1/2}}{P_{n-1/2}^1}$$

$$(3.22) \quad D_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \gamma_n + A_n \frac{P_{n-1/2}}{P_{n-1/2}^1}$$

$$(3.23) \quad \partial_n = 1 \text{ dla } n \gg 2, \quad \partial_0 = 0 \quad \partial_1 = 2$$

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n>0 \end{cases} \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n>0 \end{cases}$$

Równanie ciągłości (3.9) pozwoli wyznaczyć A_n , zaś znajomość A_n umożliwia znalezienie pola prędkości i ciśnień w dowolnym punkcie przepływu.

Ponieważ funkcje $\varrho, \chi, \psi, \phi$ spełniają (3.7), to z przemienności różniczkowania i po wykonaniu prostych przekształceń spełniają one także równania:

$$(3.24) \quad L_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad L_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad L_1 \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{2}{r} \chi \right) = 0$$

$$(3.25) \quad L^2_1 \left(3Q + r \frac{\partial Q}{\partial r} + z \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0$$

zatem równanie ciągłości można zapisać w postaci :

$$(3.26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_{n-1/2}^1 = 0$$

Korzystając z przedstawień (3.16) - (3.19) na funkcje Q, χ, Ψ, Φ otrzymuję

$$(3.27) \quad \left(3 + \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) Q = \\ = \frac{(s - \cos \xi)^{1/2}}{2} B_n \begin{cases} - (n - 1/2) \cdot \cos(n+1)\xi \cdot P_{n-1/2}^1 + \\ - 5 \cdot P_{n-1/2}^1 \cdot \cos n\xi + \\ + (n + 1/2) \cdot \cos(n-1)\xi \cdot P_{n-3/2}^1, \end{cases}$$

$$(3.28) \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \chi = \\ = \frac{(s - \cos \xi)^{1/2}}{2} A_n \begin{cases} - (n-3) \cdot (n-1/2) \cos(n+1)\xi P_{n-1/2}^1 + \\ + 2 \cdot (n-9/4) \cdot \cos n\xi \cdot P_{n-1/2}^1 + \\ - (n+1/2) \cdot (n+3/2) \cdot \cos(n-1)\xi P_{n-3/2}^1, \end{cases}$$

$$(3.29) \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2 \cdot \frac{(s - \cos \xi)^{1/2}}{2} C_n \begin{cases} (n - 1/2) \cdot \cos(n+1)\xi P_{n+1/2}^1 + \\ - 2 \cdot n \cdot \cos n\xi \cdot P_{n-1/2}^1 + \\ + (n+1/2) \cdot \cos(n-1)\xi \cdot P_{n-3/2}^1 \end{cases}$$

$$(3.30) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{(s - \cos \xi)^{1/2}}{2} D_n \begin{cases} - (\cos(n+1)\xi) \cdot P_{n+1/2} \\ 2 \cdot P_{n-1/2} \cdot \cos n\xi \\ - \cos(n-1)\xi \cdot P_{n-3/2} \end{cases}$$

gdzie $s = \cosh r_0$, $P_{n-1/2} = P_{n-1/2}(s)$.

Po wykorzystaniu (3.10) dostaję związek na f_n - (3.26):

$$(3.31) \quad f_n = 0 \Leftrightarrow -(n-5/2) \cdot (n-3/2) \cdot A_{n-1/2} + 2(n^2 - 9/4) \cdot A_n + \\ - (n+3/2) \cdot (n+5/2) \cdot A_{n+1} - (n-3/2) \cdot B_{n-1} + \\ + 5 \cdot B_n + (n+3/2) B_{n+1} + 2 C_{n-1} \cdot (n-3/2) - \\ - n \cdot C_n + 2(n+3/2) \cdot C_{n+1/2} - D_{n-1} + D_n - D_{n+1} = 0$$

Uwzględniając (3.20) - (3.23) oraz wprowadzając oznaczenia:

$$(3.32) \quad V_n = 4\sqrt{2} Q_{n-1/2} / \pi P_{n-1/2}$$

$$(3.33) \quad W_n = 4 \operatorname{cosh} \varrho_0 P_{n-1/2}^2 / 2 \sinh \varrho_0 P_{n-1/2}^1$$

$$(3.34) \quad X_n = P_{n-3/2}^2 / 2 \sinh \varrho_0 \cdot P_{n-1/2}^1$$

$$(3.35) \quad Y_n = P_{n+1/2}^2 / 2 \sinh \varrho_0 \cdot P_{n-1/2}$$

$$(3.36) \quad Z_n = P_{n-1/2}^2 / P_{n-1/2}$$

dostaję rekurencyjny układ równań na A_n :

$$(3.37) \quad A_{n-1} \cdot \partial_n \left\{ (5-2 \cdot n) \cdot X_n + \frac{1}{2} \cdot (n-3/2) \cdot W_{n-1} - 1/2 \cdot \right. \\ \left. Z_{n-1} + 1/2 \cdot (n-5/2)(n-3/2) \right\} + A_n \left\{ (2 \cdot n + 3) \cdot X_{n+1} \cdot \right. \\ \left. \partial_{n+1} + (3/2-n)(n+3/2) \right\} + A_{n+1} \left\{ (5+2 \cdot n) \cdot Y_n - 1/2 \cdot \right. \\ \left. (n+3/2) \cdot W_{n+1} + 1/2 \cdot Z_{n+1} - 1/2 (n+3/2) \cdot (n+ \right. \\ \left. 3/2) \cdot (n+5/2) \right\} = 1/2 \cdot V_{n-1} \epsilon_{n-1} \partial_n - V_n \epsilon_n \\ + 1/2 \cdot V_{n+1} \epsilon_{n+1}$$

$$\partial_n, \epsilon_n - \text{jak wyżej (3.23)} \quad \zeta_n = \begin{cases} 0 & n=0, 1 \\ 1/2 & n \geq 2 \end{cases}$$

Nie można znaleźć rozwiązania powyższego układu równań w postaci zamkniętej. Jednakże fakt, że A_n jest zbieżny do zera dla $n \rightarrow \infty$ pozwala znaleźć jego przybliżone rozwiązanie numerycznie.

Układ r równań otrzymany z (3.37) jest układem na $r+1$ niewiadomych. $A_1 \dots A_{n+1}$. Przyjmując $A_{r+1} = 0$, pozostałe niewiadome można obliczyć. Macierz współczynników $A_1 \dots A_n$ jest macierzą trójdziagonalną, tak że numeryczne rozwiązanie takiego układu jest możliwe w prosty sposób dla dużej ilości współczynników A_n . Układ ten został rozwiązany. Wyniki obliczeń w dalszej części pracy.

Podczas przygotowywania tej pracy do druku ukazał się artykuł S. Gorena, O Neilla. [5] Przedstawienie na funkcje określające pole prędkości oraz otrzymane równanie na A_n (3.37) jest takie same.

Pokażę, że istotnie $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$.

Przyjmuję, że $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = K$.

wprowadzam oznaczenia:

$$(3.38) \quad f_{n-1} = (5-2n) \cdot X_n + 1/2 \cdot (n-3/2) W_{n-1} - \frac{1}{2} (Z_{n-1}) - \frac{1}{2} (n-5/2) \cdot (n-3/2)$$

$$(3.39) \quad f_n = (2n+3) \cdot X_{n+1} \partial_{n+1} - (n-3/2) Y_n - (\xi_n + \partial_n) - 5/2 W_n + Z_n + (n^2 - 9/4)$$

$$(3.40) \quad f_{n+1} = (5+2n) Y_n - 1/2 (n+3/2) W_{n+1} + 1/2 Z_{n+1} - 1/2 (n+3/2)(n+5/2)$$

$$(3.40)_a \quad P_n = 1/2 \cdot v_{n-1} \xi_{n-1} \partial_n - v_n \xi_n + 1/2 \cdot v_{n+1} \xi_{n+1}$$

Badam, czy A_n spełnia konieczny warunek zbieżności. Równanie (3.37) można zapisać w postaci

$$A_{n-1} f_{n-1} + A_n f_n + A_{n+1} f_{n+1} = P_n$$

Przechodząc z obu stron do granicy, otrzymuję

$$(3.41) \quad K \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{n-1} + f_n + f_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

stąd, wobec niezzerowania się w nieskończoności wyrażenia w nawiasie oraz wykorzystując przedstawienia funkcji Legendra dla dużych n [15], dostaję :

$$(3.42) \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 \eta} + \frac{2}{\cosh^4 \eta} \right)}{e^{(2n-3/4)\eta} \left(\frac{1}{\sinh \eta} \cdot \left(n^2 - \frac{5}{2}n + \frac{85}{8} \right) + 2 \coth \eta \right)} = 0.$$

4. Obliczenie działających sił

Siła działająca na torus wyraża się wzorem

$$(4.1) \quad F = \int_S R_n ds$$

gdzie R_n -tensor naprężeń związany z kierunkiem normalnej \underline{n} zewnętrznej do powierzchni torusa.

Składowe prędkości (2.1), (2.2) można zapisać

$$(4.2) \quad v_r = \hat{r}(\xi, \eta) \cos \theta$$

$$(4.3) \quad v_z = \hat{z}(\xi, \eta) \cos \theta$$

$$(4.4) \quad v_\theta = \hat{\theta}(\xi, \eta) \sin \theta$$

$$(4.5) \quad p = \hat{p}(\xi, \eta) \cos \theta$$

Dla prostoty wprowadzam "lokalny" układ biegunowych współrzędnych (r_1, θ_1) , /Rysunek 3/, związany z cylindrycznym:

$$(4.6) \quad z = r_1 \cdot \cos \theta_1$$

$$(4.7) \quad r = r_1 \cdot \sin \theta_1 + a$$

$$b = \operatorname{cosech} \eta_0, \quad a = \coth \eta_0$$

Całkowanie po θ_1 naprężeń działających na element powierzchni $r \cdot d\theta \cdot a \cdot d\theta_1$ daje hydrodynamiczną siłę działającą na segment torusa między θ a θ_1 .

Składowe tensora naprężeń w tymże układzie mają postać

$$(4.8) \quad p_{r1} r_1 = -p + 2/\mu \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$(4.9) \quad p_{\theta 1} \theta_1 = -p + 2/\mu \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r_1}$$

$$(4.10) \quad p_{r1} \theta_1 = \mu \frac{\partial v}{\partial r_1} + \frac{\partial u}{r_1} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} - \frac{v}{r_1}$$

(u, v) - składowe prędkości w układzie (r_1, θ_1)

Siła działająca na torus w układzie kartezjańskim (x, y, z) ma tylko jedną składową F_x

$$(4.11) \quad F_x = \int_S \left(-p \cdot \cos \theta_1 + \frac{\partial}{\partial r_1} u_x + \frac{\partial}{\partial x} u_{r1} \right) ds = \int_S f_x ds$$

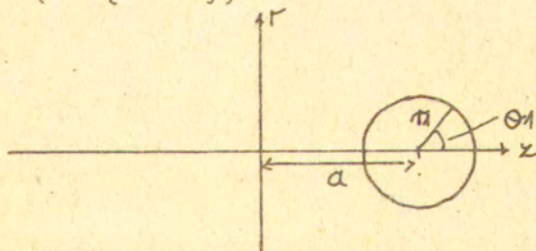
Wykorzystując związki jakie są między u_x, u_{r1} oraz warunki brzegowe otrzymujemy

$$(4.12) \quad \int_S \left(-p \cdot \cos \theta_1 + \frac{\partial}{\partial r_1} (\bar{u} - \bar{v}) + \left(\cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{\sin \theta_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) u_{r1} \right) ds$$

Podstawiając za składowe prędkości (3.3) - (3.6) dostaję

$$(4.13) \quad \int_S \left(\frac{\bar{p}}{\mu} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{u} - \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{w} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{M}$$

gdzie $M = (\cosh \eta - \cos \xi)$



Rysunek 3. Lokalny układ biegunowych współrzędnych.

Korzystając ze wzoru

$$(\cosh \eta - \cos \xi)^{-1/2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n q_{n-1/2} (\cosh \eta) \cos n \xi$$

$\epsilon_n = 1/2$ dla $n=0$, $\epsilon_n = 1$ dla $n=1$

otrzymujemy związki

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\epsilon}{M^{5/2}} d\epsilon = -4 \cdot Q_{n-1/2}^{'} \cdot \sqrt{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\epsilon \sin \epsilon}{M^{5/2}} d\epsilon = -\frac{8}{3} Q_{n-1/2}^{'} \cdot n \cdot \sqrt{2} ,$$

wrażenie (4.13) przyjmie teraz postać:

$$F = \pi \mu U \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cosh \eta}{M^2} \cdot Q + \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial z}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon$$

Ponieważ $P^m(z) \cdot Q^m(z) - Q^m(z) \cdot P^m(z) = -1 \cdot -\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}$

to w ostatecznej postaci (4.13_a) można zapisać

$$(4.14) \quad F_x = -\sqrt{2} \cdot \mu \cdot U \pi \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot D_n + 4 \cdot (n^2 - 1) B_n)$$

Takie samo wyrażenie na siłę otrzymali Goren O'Neill wyliczając je metodą podaną przez Pella, Paynego [14].

Po wykorzystaniu (3.20) - (3.22) wyrażenie (4.14) można zapisać jako

$$F_x = \sqrt{2} \mu U \sum A_n \left(4 \frac{P_{n-1/2}^2}{P_{n-1/2}} - 2(4n^2 - 1) + \right)$$

Odnosząc je do wyrażenia na siłę działającą na kulę, której promień równy jest $R = b + a$, która umieszczona jest w strumieniu poruszającym się z prędkością U , dostaję współczynnik bezwymiarowej siły

$$(4.16) \quad f_x = \frac{F_x}{6 \mu U R} = \frac{\sum (4 D_n + 4(n^2 - 1) B_n)}{(\coth \eta + \operatorname{cosech} \eta)}$$

Będę chciała otrzymać asymptotyczną wartość (4.16) dla cienkiego torusa, gdyż znany jest wynik Cox'a, opierającego się na teorii osobliwości. Otrzymał on

$$4.17 \quad f_x = \frac{3}{\ln(4e^{\eta}) + \frac{1}{2}} + o\left(\frac{1}{(\ln e)^3}\right)$$

Funkcje pierścieniowe dla dużych η mają postać:

$$(4.17) \quad P_{n-1/2}^m(\cosh \eta) = \frac{\Gamma(n) \cdot e^{(n-1/2)\eta}}{\pi^{1/2} \Gamma(-n+1/2+n)} + O\left(\frac{1}{e^{\eta}}\right)$$

$$(4.18) \quad Q_{n-1/2}^m(\cosh \eta) = \frac{e^{i m \eta} e^{(n+1/2)\eta} \Gamma(n+m)}{\Gamma(n-1/2)} + O\left(\frac{1}{e^{\eta}}\right)$$

Stosując powyższe wzory do równania (3.36) i przechodząc do granicy, otrzymałam:

$$(4.19) \quad A_n = O(e^{-(2n-3/2)\eta}) \quad \text{wzł. } A_1 = \frac{2(e^{\eta} - \log 4 e^{\eta})}{16 \log 4 e^{\eta} \cdot e^{2\eta}}$$

Korzystając ze związków między współczynnikami (3.20) wyrażenie (4.16) można zapisać:

$$(4.21) \quad f_x = \frac{Q_{-1/2} \cdot 8\sqrt{2}}{P_{n-1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot (n-3/2)}{e^{2n-3/2}\eta} \cdot (n-1/2)(-2n)$$

Wszystkie wyrazy szeregu są ujemne, oprócz pierwszego.

$$(4.22) \quad f_x = \frac{8\sqrt{2}}{3 \ln(4e^{\eta})} + O\left(\frac{1}{e^{\eta}}\right)$$

Porównując (4.22) wynik na współczynnik bezwymiarowej siły otrzymany w wyniku asymptotycznego przejścia $\eta \rightarrow \infty$ wyrażenia (4.16) z rezultatem Cox'a (4.17), widać zbieżność obu wyników. Zatem, wykorzystując graniczny przypadek rozwiązania opływu torusa we współrzędnych toroidalnych dochodzę do wyniku otrzymanego na gruncie "teorii rozkładu osobliwości".

5. Rozwiązanie problemu II

Rozważam torus obracający się ze stałą prędkością kątową Ω wokół osi y . Rozwiązanie znalezione zostało w podobny sposób jak dla ruchu translacyjnego /problem II/. Składowe prędkości w układzie cylindrycznym oraz ciśnienie są postaci:

$$(5.1) \quad p = \mu \cdot \Omega \cdot Q \cdot \cos \theta, \quad v_{1r} = \frac{1}{2} \Omega (\psi + \chi) \cos \theta$$

$$v_{1\theta} = \frac{1}{2} \Omega (\psi - \chi) \sin \theta \quad v_{1z} = \Omega \cdot \phi \cos \theta$$

Funkcje Ψ, χ, ϕ, Q spełniają (3.7). Prędkość na torusie wynosi $\underline{y} = (z \cos \theta, -z \sin \theta, -r \cos \theta)$

Stąd warunki brzegowe przyjmą postać:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \Psi &= \chi + 2z \\ Q &= -2\chi / r \\ \phi &= -\frac{2\chi}{r} - r \end{aligned}$$

Poszukuję funkcji w postaci szeregów pierścieniowych funkcji Legendra:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \chi &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^m P_{n-1/2}^2(\cosh \eta) \sin n \xi \\ Q &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_{n-1/2}^1(\cosh \eta) \sin n \xi \\ \phi &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_{n-1/2}^1(\cosh \eta) \cos n \xi \\ \Psi &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} D_n P_{n-1/2}^1(\cosh \eta) \sin n \xi \end{aligned}$$

Spełnienie warunków brzegowych implikuje związki pomiędzy współczynnikami tych / 5.3 / szeregów.

$$(5.4) \quad D_n = A_n \frac{P_{n-1/2}^2}{P_{n-1/2}} + \frac{8\sqrt{2}}{r} \cdot n \cdot \frac{Q_{n-1/2}^1}{P_{n-1/2}}$$

$$(5.5) \quad C_n = \frac{1}{2 \cdot \sinh \eta} \frac{P_{n-3/2}^2}{P_{n-1/2}} \cdot A_{n-1} + \frac{P_{n+1/2}^2}{P_{n-1/2}} \cdot A_{n+1} + \frac{4\sqrt{2}}{r} Q_{n-1/2}^1$$

$$(5.6) \quad B_n = \frac{1}{\sinh \eta} \frac{P_{n-3/2}^2}{P_{n-1/2}} \cdot A_{n-1} + \frac{P_{n+1/2}^2}{P_{n-1/2}} \cdot A_{n+1} + 2 \coth \eta \cdot \frac{P_{n-1/2}^2}{P_{n-1/2}}$$

Wszystkie funkcje Legendra występujące w powyższych wzorach brane są na brzegu tj. od argumentu $\cosh \eta_0$.

Wstawiając do równania ciągłości szeregi (5.3) i uwzględniając zależności (5.4), (5.5) otrzymuję układ równań na A_n :

$$(5.7) \quad \begin{aligned} A_{n-1} \xi_n \{ (n-3/2)(X_{n-1} + Y_{n-1} - 3/2) + (5-2n)X_n + \\ - 1/2 Z_{n-1} + (n-5/2)(n-3/2) \cdot 1/2 \} + A_n \{ -2(n-3/2) \\ \cdot Y_{n-1} - 5(X_n + Y_n + (-3/2))X_{n+1} + Z_n + (n-3/2)(n+3/2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{n+1} \left\{ (2 \cdot n + 5) Y_n - (n + 3/2) \cdot (X_{n+1} + Y_{n+1} - 3/2) - 1/2 \cdot Z_n + \right. \\
 & - 1/2 \cdot Z_{n+1} - 1/2 (n+3/2) \cdot (n+5/2) \left. \right\} = (n-1) V_{n-1} + 2 \cdot n \cdot V_n + \\
 & + (n+1) V_{n+1} + (n-3/2) U_{n-1} - 2 \cdot n \cdot U_n + (n + 3/2) U_{n+1} .
 \end{aligned}$$

(5.8) $U_n = 4\sqrt{2} \frac{Q_{n-1/2}}{P_{n-1/2}}$, pozostałe oznaczenia jak w (3.31) - (3.35)

Układ równań (5.8) został rozwiązany numerycznie w podobny sposób jak układ (3.36). Mając wyliczone współczynniki A_n , poprzez wzory (5.4) - (5.5), można znaleźć pole prędkości i ciśnienia w dowolnym punkcie, a także siły i momenty.

Zajmę się teraz obliczeniem momentu działającego na torus.

Należy zauważyć, że jeżeli torus porusza się ruchem postępowym, to działa nań jedynie siła. Natomiast na torus będący w ruchu obrotowym działa jedynie moment.

Pokazali to w swej pracy Majumdar O'Neill.

6. Wyznaczenie momentów

Moment G działający na torus jest dany wzorem

$$(6.1) \quad G = \int_S r \times R_n ds$$

i liczony jest względem środka torusa. Po wyrażeniu składowych prędkości i ciśnienia w postaci (25) i (5.1) - (5.3), G ma składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y, z) $(0, G_2, 0)$ gdzie:

$$(6.2) \quad G_2 = \frac{1}{2} \pi \mu \Omega \int_S (z \cdot f_x - r \cdot f_z) ds$$

$$(6.3) \quad f_x = -p \cdot \cos \theta_1 + \frac{\partial}{\partial r_1} u_x + \frac{\partial}{\partial x} u_{r1}$$

$$(6.4) \quad f_z = -p \cdot \frac{z}{R} + \frac{\partial}{\partial r_1} u_z + \frac{\partial}{\partial x} u_{r1}$$

θ_1, r_1 - współrzędne lokalnego układu wsp. zdefiniowanego (4.6), (4.7)

Wykorzystując warunki brzegowe oraz wzory (4.13) otrzymujemy:

$$(6.4_a) \quad G = \sqrt{2} \pi \Omega \pi \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 - 1) C_n - 4n \cdot D_n$$

Bezwymiarowy współczynnik momentu G_s można uzyskać odnosząc moment (6.4_a) działający na torus do momentu, jaki działałby na kulę o promieniu $R = \text{coth} \eta_0 + \text{cosech} \eta_0$. Czyli

$$(6.5) \quad G_s = \frac{\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 - 1) C_n - 4n D_n}{(\text{coth} \eta_0 + \text{cosech} \eta_0)}$$

Postępując podobnie jak przy liczeniu asymptotycznej wartości współczynnika bezwymiarowego siły, tj. wyliczając A_1 , A_n z równania (5.8) gdy $\cosh \eta \rightarrow \infty$ i wykorzystując asymptotyczne wzory na zachowanie się funkcji pierścieniowych $P_{n-1/2}^m(\cosh \eta)$ oraz $Q_{n-1/2}^m(\cosh \eta)$ otrzymujemy:

$$(6.6) \quad A_0 = \frac{\bar{e}^{2\eta}}{\ln(4e^\eta) - \frac{1}{2}} \quad A_n = 0 \quad (\bar{e}^{(n-1/2)\eta}) \text{ dla } n \gg 2$$

Wykorzystując istniejące związki pomiędzy współczynnikami (5.4) - (5.6) wzór na bezwymiarowy współczynnik momentu (6.5) przyjmie postać:

$$6.7 \quad G_s = \frac{\ln(2e^\eta) + \frac{7}{9}}{2(\ln(4e^\eta) - \frac{1}{2})} + O\left(-\frac{\bar{e}^{(n-1/2)\eta}}{n}\right)$$

Dla dostatecznie dużych η będzie się on zachowywać w nieskończoności podobnie jak \bar{e}^η .

Johnson i Wu (1979) analizując taki sam przepływ wokół cienkiego torusa ale na gruncie teorii osobliwości dla wysmukłych ciał otrzymali wzory na moment w cylindrycznym układzie współrzędnych (r, θ, z) . Po sprowadzeniu otrzymanych przez nich wzorów do bezwymiarowego współczynnika momentu (G_r, G_θ, G_z) można je zapisać jako:

$$(6.8) \quad G_r = \frac{\cos \theta}{e^\eta (\ln(4e^\eta) - 3/2)}$$

$$(6.9) \quad G_\theta = \frac{\sin \theta (3 \ln(4e^\eta) - 11)}{e^\eta (\ln(4e^\eta) - 3/2)}$$

Porównując powyższe wzory z (6.7), uzyskany jako graniczny przypadek rozwiązania tegoż zagadnienia metodą O'Neilla

z wykorzystaniem funkcji Legendra rysuje się zgodność otrzymanych wyników.

Wyniki obliczeń numerycznych i rysunki zamieszczone w pracy Gorena, O Neilla (1980) potwierdzają zbieżność obu teorii dla $\cosh \eta \rightarrow \infty$, czyli dla przypadku cienkiego torusa.

Obliczę teraz moment dipolowy dla torusa / the symmetric force dipole moment /, poruszającego się ruchem translacyjnym ze stałą prędkością U wzdłuż osi x i obracającego się z prędkością kątową Ω wokół osi y /Rys.1 /.

Opierając się na definicji [7]:

$$(6.10) \quad M_{ij} = \int_S (r_i f_j + r_j f_i) dS \quad i, j = x, y, z$$

$$\underline{r} = r_x \underline{e}_x + r_y \underline{e}_y + r_z \underline{e}_z$$

W przypadku torusa moment dipolowy - który jest tensorem II rzędu - ma tylko dwie niezerowe składowe $M_{xz} = M_{zx}$.

$$(6.11) \quad M_{xz} = \int_S \left(x \frac{\partial \psi}{\partial z} - \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} - r \frac{\partial z}{\partial \xi} - x \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \psi \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) dS$$

Uwzględniając warunki brzegowe (5.2), oraz wzory (4.13) i rekurencyjne związki pomiędzy funkcjami Legendra otrzymuję:

$$(6.12) \quad M_{xz} = \sinh \eta_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \mu \cdot \Omega \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot n \cdot D_n \cdot g(n) + 4 C_n \cdot f(n))$$

$f(n), g(n)$ określone w (6.13)

Podobnie jak ma to miejsce przy liczeniu momentu (6.1) - (6.4) moment dipolowy zależy tylko dla torusa od prędkości obrotowej. Czyli jeżeli torus porusza się jedynie ruchem postępowym, to moment dipolowy wynosi zero.

$$(6.13) \quad f(n) = (1/3 \cdot Q_{n-1/2} \cdot P_{n-1/2} + Q_{n-1/2} \cdot P'_{n-1/2})$$

$$g(n) = (1/3 \cdot Q'_{n-1/2} \cdot P'_{n-1/2} - Q_{n-1/2} (\sinh \frac{\cosh \eta}{3} \cdot P'_{n-1/2} - 2\sqrt{2} \cdot Q_{n-1/2} \cdot P'_{n-1/2}))$$

7. Zachowanie się rozwiązań przy "domykaniu" torusa.

Interesujące jest badanie zachowania się rozwiązań problemów I i II w przypadku $\frac{b}{a} \rightarrow 1$, co odpowiada sytuacji, że promień wewnętrznego otworka torusa zmniejsza się do zera, czyli gdy torus chcemy domknąć.

Znane są rozwiązania opływu torusa domkniętego prostopadle do jego osi symetrii poruszającego się, zarówno ruchem postępowym jak i obrotowym. (Majumdar (1979)). Sprowadzają się one do rozwiązania równania Stokesa za pomocą funkcji Bessela stosując odpowiedni - ze względu na geometrię zagadnienia układ współrzędnych "styczne kule". Nasuwa się pytanie, czy rozwiązanie dla torusa domkniętego $\frac{a}{b} = 1$ może być otrzymane jako graniczny przypadek dla torusa otwartego.

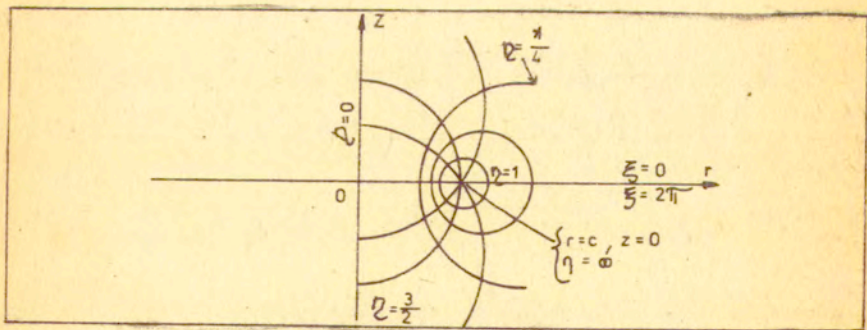
Ponieważ geometria torusa otwartego narzuca użycie toroidalnego układu współrzędnych /Rys. 4/, omówię go teraz szczegółowo.

Przekształcając meridionalną płaszczyznę walcowego układu współrzędnych (z, r, θ) :

$$(7.1) \quad z + ir = i.c.coth \frac{1}{2} (\eta + i\xi) \quad c \neq 0$$

otrzymujemy toroidalny układ współrzędnych η, θ, ξ , współrzędne którego spełniają związki:

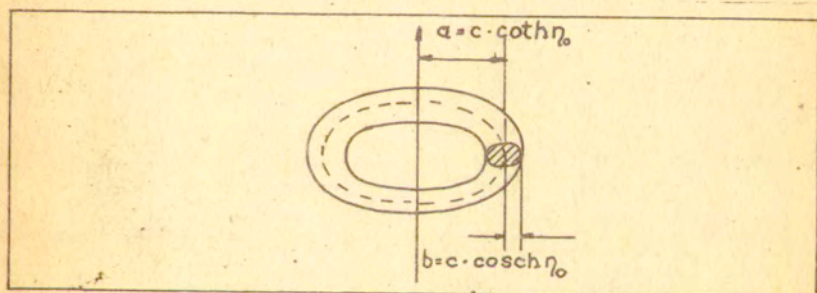
$$(7.2) \quad z = c \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad r = \frac{c \cdot \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad \theta = \theta$$



Rys 4. Układ współrzędnych toroidalnych.

Krzywe $\eta = \text{const}$ są w meridionalnej płaszczyźnie współosiowymi okręgami ze środkami w płaszczyźnie $z=0$. Środek typowego okręgu znajduje się w odległości $a=c \cdot \coth \eta_0$ od początku układu współrzędnych, promień jego wynosi $b=c \cdot \text{cosech} \eta_0$. Należy podkreślić, że c i a są jednoznacznie określone poprzez wartości a i b .

Przy obrocie wokół osi z otrzymujemy ekscentryczną rodzinę torusów. Dla ustalonego $\eta_0 = \text{const}$ zewnętrznie torusa opisywane jest $\eta_0 > \eta$, natomiast wewnątrz $\eta > \eta_0$. Wielkość $\eta = 0$ odpowiada torusowi o nieskończonym promieniu i jest równoważna całej płaszczyźnie $z = 0$. Dla $\eta_0 = \infty$ promień wewnętrzny torusa wynosi zero, torus jest wtedy nieskończenie cienki, o promieniu zewnętrznym $a = c$. Gdy η_0 zmniejsza się od ∞ do zera, promień torusa dąży od 0 do nieskończoności, środek okręgu przemieszcza się w dodatnim kierunku osi z od $z=c$ do



Rys.5 Torus.

Odwrotnymi do związków (2.2) są:

$$(7.4) \quad \eta = \ln \frac{z^2 + (r-c)^2}{z^2 + (r+c)^2}$$

$$(7.5) \quad \sin \xi = \frac{2 \cdot z \cdot c}{\sqrt{z^2 + (r-c)^2} \sqrt{z^2 + (r+c)^2}}$$

Początek układu współrzędnych jest charakteryzowany

$$(7.6) \quad \eta = 0, \quad \xi = \pi,$$

natomiast nieskończoność:

$$(7.6_a) \quad \eta = 0, \quad \xi = 0.$$

Stosunek $k = \frac{a}{b} = \cosh \eta_0$, mówi o stopniu domknięcia torusa. Gdy $\cosh \eta_0 = \infty$, to wtedy torus będzie nieskończenie cienki, natomiast dla $\cosh \eta_0 = 1$ torus będzie styczny w początku układu współrzędnych - przejdzie w zamknięty torus. Dla tego granicznego przypadku jednakże, dla ustalonego c , zarówno a jak i b przyjmą wartość nieskończoną, torus wypełni całą przestrzeń, nie będzie przepływu.

Czy torus o skończonym promieniu może być domknięty? Tak, lecz wtedy $c = \sinh \eta$, czyli $c=0$, co jest sprzeczne z definicją układu (7.2).

Postaram się odpowiedzieć na pytanie, jaki jest wpływ domknięcia torusa na współczynniki szeregów określających pole prędkości i ciśnień. Wyrażają się one przez szeregi funkcji pierścieniowych Legendra (3.3), (3.5), współczynniki których A_n , B_n , C_n , D_n , zależne są od wartości $P_{n-1/2}^m(\cosh \eta_0)$, $Q_{n-1/2}^m(\cosh \eta_0)$. W pobliżu $\eta=0$ funkcje pierścieniowe mają przedstawienie / dla $\eta < 2 \cdot \log(\sqrt{2} + 1) / [15]$.

$$(7.7) \quad P_{n-1/2}^m(\cosh \eta) = \frac{1}{m} \frac{(n+m-1/2)!}{(n-m-1/2)!} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\eta}{2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}+n, m+1, \sinh \frac{\eta}{2}\right)$$

$$(7.8) \quad Q_{n-1/2}(\cosh \eta) = \log \coth \frac{\eta}{2}$$

Znajduje to odbicie w zbieżności szeregów (3.20) - (3.22). Mianowicie, szereg o współczynnikach A_n staje się wolniej zbieżny. Oznaczając $A_{n1} = A_n(\cosh \eta_1)$, $\eta_1/2 \log(\sqrt{2} + 1)$, $A_{n2} = A_n(\cosh \eta_2)$, $\eta_2/2 \log(\sqrt{2} + 1)$, z rnia (3.42), otrzymuję że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n1}}{A_{n2}} = \frac{\ln(e^{2 \cdot 4}) \cdot (n^2 - 5/2 n + 2/8) + \coth \eta_2}{n^2 \cdot e^{(n-5/2)\eta_2}} = 0$

czyli istotnie A_{n1} jest wolniej zbieżny.

Analogicznie zachowują się szeregi B_n , C_n , -w miarę domknięcia torusa są wolniej zbieżne. Szereg o współczynnikach D_n jest rozbieżny, wobec faktu, że do wyrażenia które go określa (3.22) -wchodzi $Q_{n-1/2}$.

Jak zachowuje się prędkość w początku układu współrzędnych podczas domykania torusa dla przepływu osiowosymetrycznego? Opierając się na pracy Majumdera O Neilla [10] pole prędkości wzdłuż osi symetrii dla torusa jest postaci:

$$(7.10) \begin{pmatrix} v \\ v_r \\ v_z \end{pmatrix} = (\cosh \eta - \cos \xi) U \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ -\frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{pmatrix} \cdot B_n P_{n-1/2} \sin n \xi + \begin{pmatrix} A_n P_{n-1/2} \\ C_n P_{n-1/2} \end{pmatrix} \sin n \xi$$

gdzie współczynniki A_n , B_n , C_n spełniają związki:

$$(7.10)_a) B_n = -2 \coth \eta_0 \frac{A_{n-1} P_{n-1/2}^1 + \operatorname{cosec} \eta_0 \frac{A_{n-1} P_{n-3/2}^1}{P_{n-1/2}} + \frac{A_{n+1} P_{n+1/2}^1}{P_{n-1/2}}$$

$$(7.10)_b) C_n = \frac{\sqrt{2} \lambda_n}{\pi} - \operatorname{cosech} \eta_0 \left(\frac{A_{n+1} P_{n+1/2}}{P_{n-1/2}} - \frac{A_{n-1} P_{n-3/2}}{P_{n-1/2}} \right); \quad \lambda_n = \epsilon_n \frac{Q_{n-1/2}}{P_{n-1/2}}$$

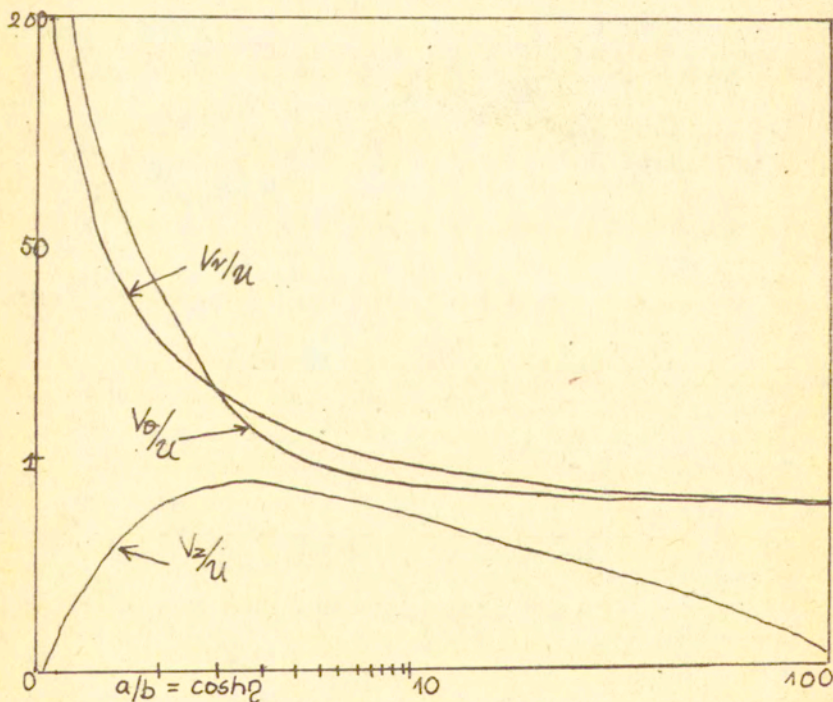
Badając zachowanie się prędkości w punkcie (0,0) otrzymujemy, że $v_r = \infty$ dla $\eta \rightarrow 0$, czyli że w początku układu prędkość przyjmuje nieskończoną wartość w miarę domykania torusa.

Dla przepływów asymetrycznych badając asymptotyczne zachowanie się równań określających pole prędkości znajdujemy, że i w tym przypadku prędkość w początku układu współrzędnych $v \rightarrow \infty$ podczas domykania torusa. Z kolei badając zachowanie się rozwiązania w granicy $\eta \rightarrow \infty$, gdy torus porusza się prostopadle do osi symetrii otrzymujemy, że w tym przypadku prędkość w początku układu współrzędnych równa jest prędkości w nieskończoności. Patrząc na zachowanie się prędkości w początku układu podczas "domykania" torusa uwidacznia się różnica pomiędzy tymże rozwiązaniem a otrzymanym explicite dla torusa domkniętego. Jeśli z torusem domkniętym poruszającym się ze stałą prędkością U związany jest układ współrzędnych, to prędkość w każdym punkcie torusa ma skończoną wartość. Badając asymptotyczne zachowanie się rozwiązania otrzymanego dla torusa otwartego otrzymujemy, że prędkość w punkcie "zlepiania" ma wartość nieskończoną.

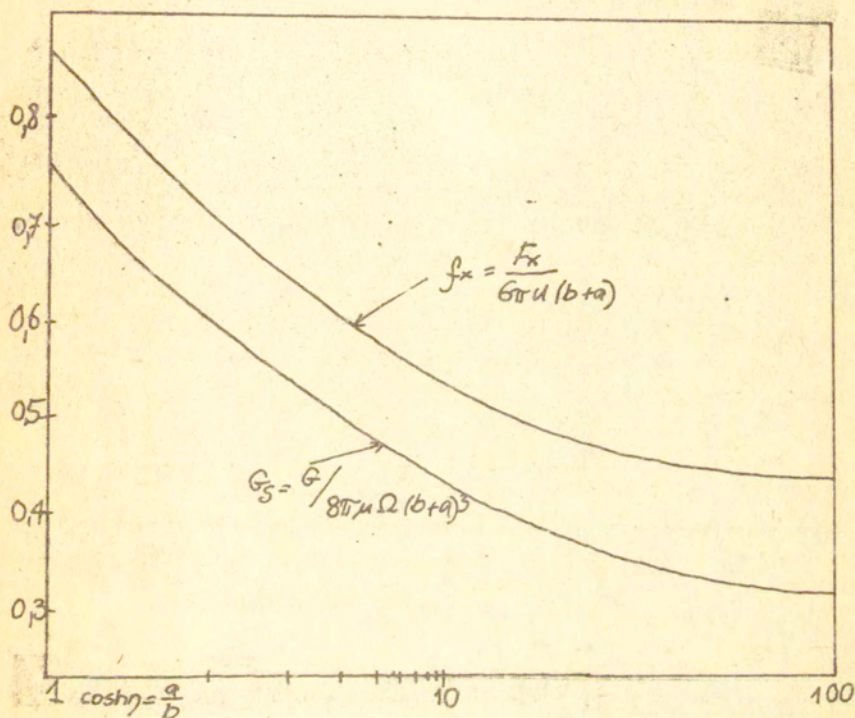
W przypadku obliczeń bezwymiarowego współczynnika siły i momentu siły dla $\cosh \eta \rightarrow 1$ należy zauważyć, że one przyjmują wartości skończone. Dzieje się tak dlatego, ponieważ wyrazy szeregu o współczynnikach B_n - który jest związany z $Q_{n-1/2}$ a więc odpowiedzialny za rozbieżność - są odniesione do promienia $R = \cosh \eta + \operatorname{cosech} \eta$, zaś

$$(7.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1/2}(\cosh \eta)}{\cosh \eta + \operatorname{cosech} \eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \cosh \eta / 2}{\cosh \eta + \operatorname{cosech} \eta} = 0$$

Poniższe wykresy wykonano na podstawie obliczeń numerycznych omówionych w następnej części pracy. Potwierdzają one wnioski otrzymane w wyniku rozważań teoretycznych.



rys. 6. wykres przedstawia zależność składowych prędkości w początku układu współrzędnych od $\cosh \eta$.



Rys. 7. Wykres przedstawia zależność bezwymiarowych współczynników siły i momentu siły od \cosh

| $\cosh \eta = \frac{a}{b}$ | v_1/u | v_0/u | v_2/u | f_x | G_s |
|----------------------------|---------|---------|---------|-------|-------|
| 1.05 | 89345 | 73267 | 0.0 | 0.83 | 0.64 |
| 1.1 | 635 | 246 | 0.01 | 0.83 | 0.63 |
| 1.5 | 32 | 15 | 0.09 | 0.79 | 0.61 |
| 2. | 27 | 3 | 0.87 | 0.76 | 0.56 |
| 10. | 0.9 | 0.8 | 0.06 | 0.61 | 0.42 |
| 50 | 0.1 | 0.5 | 0.03 | 0.46 | 0.32 |
| 100 | 0.01 | 0.03 | 0.01 | 0.44 | 0.3 |

8. Obliczenia numeryczne

Obliczeń dokonano na maszynie cyfrowej ODRA 1306.

Do rozwiązania układu równań posłużyłam się metodą eliminacji Gaussa dla macierzy trójdzielnej.

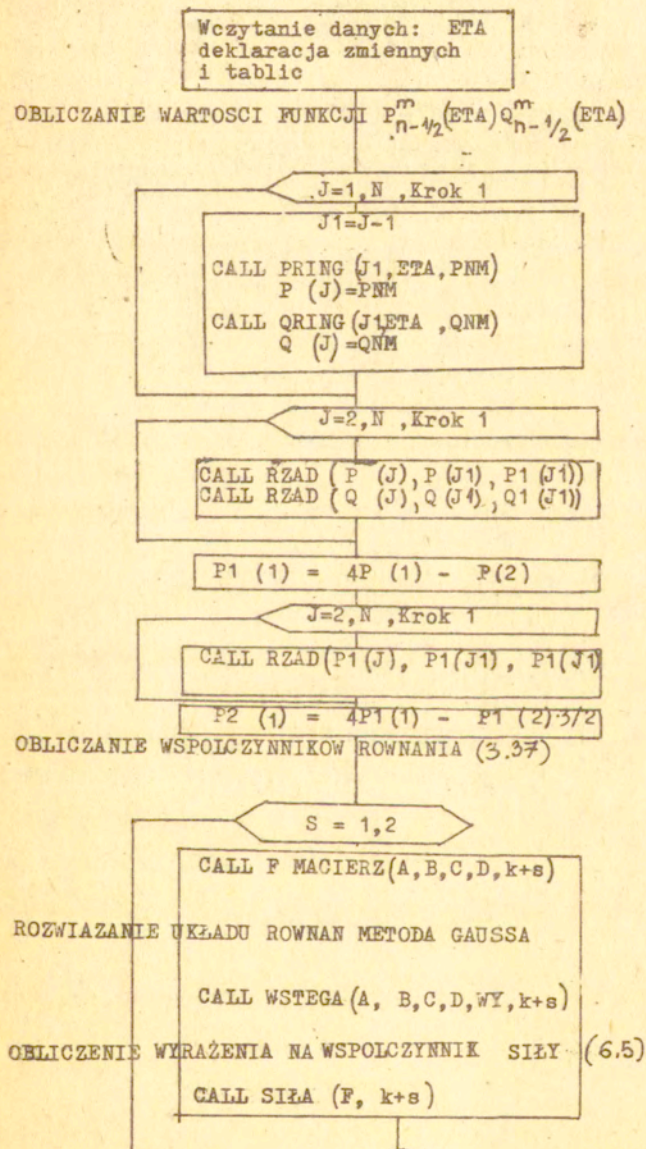
Funkcje Legendra $P_{n-1/2}(\cosh\eta)$, $Q_{n-1/2}(\cosh\eta)$, zostały obliczone z przedstawień w postaci szeregu hipergeometrycznego.

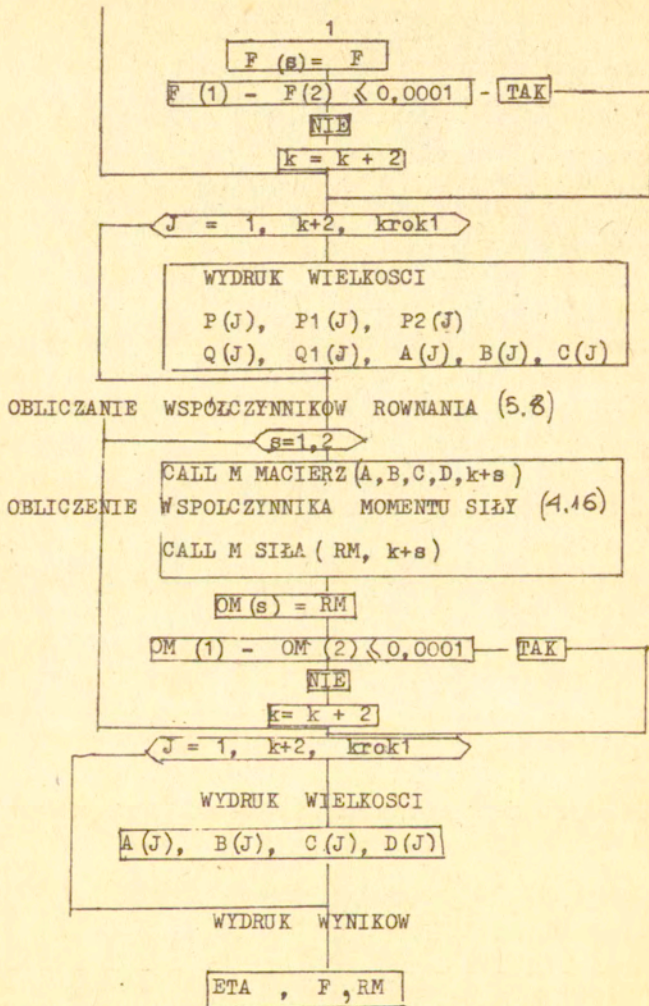
Funkcje $P_{n-1/2}^m(\cosh\eta)$, $P_{n-1/2}^2(\cosh\eta)$, $Q_{n-1/2}^m(\cosh\eta)$ ze wzorów rekurencyjnych.

Jako kryterium dokładności obliczeń przyjąłam, że współczynnik bezwymiarowej siły ma być obliczony z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Poniżej przytaczam schemat blokowy programu. Dla przejrzystości program korzysta z podprogramów:

- PRING(n, ETA) - oblicza funkcje $P_{n-1/2}(\cosh\eta)$
- QRING(n, ETA) - oblicza funkcje $Q_{n-1/2}(\cosh\eta)$
- WSTEGA(A, B, C, D, WY, n) - oblicza rozwiązanie układu równań metodą eliminacji Gaussa.
- RZAD (WE1, WE2, WY) - oblicza ze wzorów rekurencyjnych wartości $P_{n-1/2}^K(\cosh\eta)$, $Q_{n-1/2}^L(\cosh\eta)$
 $K=1, 2 \quad L=1,$
- F MACIERZ(A, B, C, D, n) - oblicza współczynniki macierzy trójdzielnej z układu równań (3.37)
- M MACIERZ(A, B, C, D, n) - jak wyżej - z układu równań (5.8)
- F SIŁA (F, K) - oblicza wartość bezwymiarowego współczynnika siły dla k wyrazów szeregu wg wzoru (6.5)
- M SIŁA (RM, K) - oblicza wartość bezwymiarowego współczynnika momentu siły dla k wyrazów szeregu wg. wzoru (4.16)

SCHEMAT BLOKOWY PROGRAMU
START





Wnioski

Zagadnienie bocznego wpływu torusa o dowolnym stosunku promieni - zostało w pracy rozwiązane metodą O'Neill'a z zastosowaniem toroidalnego układu współrzędnych. Zostało potraktowane ono - ze względu na liniowość równań Stokesa - jako dwa oddzielne zagadnienia; I - gdy torus porusza się translacyjnie, prostopadle do osi symetrii, ze stałą prędkością U , oraz II, gdy ruch torusa odbywa się wokół osi prostopadłej do osi symetrii ze stałą prędkością Ω . Zostały również w pracy obliczone siły i momenty działające na poruszający się torus. Ponieważ rozwiązanie wyraża się poprzez szeregi pierścieniowych funkcji Legendra, było więc możliwe badanie wpływu domykania torusa $\frac{a}{b} \rightarrow 1$ na zachowanie się prędkości w początku układu współrzędnych.

Badając asymptotyczne zachowanie się bezwymiarowego współczynnika siły i momentu / tj. siła i moment działające na torus odniesione do siły i momentu działającego w tymże ruchu na kulę o średnicy torusa / gdy torus staje się cienki $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ otrzymuję wynik zgodny z otrzymanym przez Cox'a, Johnsona, Wu (1979), którzy swoje rezultaty otrzymali na gruncie teorii wpływu wysmukłych brył - rozkładu osobliwości.

Numerycznie zostały policzone w pracy bezwymiarowy współczynnik siły i momentu. Wyniki otrzymane w pracy w całym zakresie $\frac{a}{b} = \cosh \eta$ zgadzają się z otrzymanymi przez Corena, O'Neill'a.

Należy zauważyć, że w przyjętym układzie współrzędnych / toroidalnym / przypadek, kiedy $\frac{a}{b} = 1$ / odpowiada torusowi o nieskończonym promieniu, co nie odpowiada fizycznej sytuacji.

LITERATURA

1. M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions, Dover (1965).
2. E. JOHNSON, T. WU: J. Fluid Mech. (1979) 95, 263-277.
3. W. DEAN, M. O'NEILL: Mathematica (1963) 10, 13,
4. J. DORREPAAL, S. MAJUMDAR, M. O'NEILL, K. RANGER: Quart. J. Mech. Appl. Math. (1976) 29, 381.
5. L. GOREN, M. O'NEILL: J. Fluid Mech. (1980) 101, 97.
6. J. HAPPEL, H. BRENNER: Low Reynolds Number Hydrodynamics. (1965), Prentice-Hall.
7. E. HOBSON: The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. (1965), Chelsee.
8. R. KANWAL: J. Fluid Mech. (1961) 10, 17.
9. H. LAMB: A Treatise on Hydrodynamics.
10. S. MAJUMDAR, M. O NEILL: Z. Angew. Math. phys. (1977) 28, 541.
11. M. O'NEILL: Mathematica (1961) 11, 67.
12. M. O'NEILL: Proc. Camb. Phil. Soc. (1969) 65, 543.
13. M. O'NEILL: Appl. Sci. Res. (1970), 21.
14. W. PELL, L. PEYNE: Mathematica (1960) 7, 78.
15. L. ROBIN: Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales. (1957), Paris.
16. S. WAKIYA: Journal of the Physical Soc. of Japan (1974) 37, 3.
17. B. FELDERHOF: Physica 84 A (1976) 569-576.