BOLZANO. PARADOXIEN DES UNENDLICHEN

645

Bolzano.

Dr. Bernard Bolzano's

Paradoxien des Unendlichen

herausgegeben

aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers

von

Dr. Fr. Přihonsky.

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'attmettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. *(Leibniz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II. part* 1. *p.* 243.)

2. unveränderte Auflage.

Berlin,
Mayer & Müller.
1889.

Wegen Entfernung des Herausgebers vom Druckorte bittet man folgende Druckfehler zu entschuldigen:

Seite 22, Zeile 16 statt x lies π.
„ 25, „ 6 von unten st. $=$ setze $+$.
„ 26, „ 7 v. u. Gleichung 5 st. $S = \frac{1-e}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} \cdot \frac{2}{P}$

lies $S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} \cdot \frac{2}{P}$

„ 27, „ 14 st. einder l. einander.
„ 28 u. 30 soll die Figur eine ununterbrochene Grade bilden.
„ 38, Zeile 8 st. der l. das.
„ 46, „ 8 st. desselben l. derselben.
„ 47, „ 2 von unten streiche das: irgend ein.
„ 52, „ 16 st. alle Reihen, l. aber alle Reihen.
„ 55, „ 10 von unten st. der Reihe, l. die Reihe.
„ 58, „ 9 verbinde die Null mit (A) und l. $0(A)$.
„ 60, „ 5 von unten schalte vor „dass" ein: d. h.
„ 77, „ 1 st. strengsten l. strengstem.
„ 81, „ 13 von unten st. einem l. einen.
„ 86, „ 6 st. $\pm n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ l. $\pm n\pi \mp \frac{\pi}{2}$
„ 96, „ 4 st. $b\mu$ l. $b\omega$.
„ 98, „ 11 u. s. w. von unten st. ε l. E.
„ 104, „ 1 v. u. l. $bR\,(=ba+aR) = bS\,(=aS-ab)$.
„ 121, „ 2 von unten st. aufgestellt l. aufgehellt.
„ 123, „ 13 von unten st. SS l. 55.
„ 126, „ 12 st. aller Atome l. aller umstehenden Atome.

Vorwort des Herausgebers.

Die merkwürdige Abhandlung über die Paradoxien des Unendlichen begann ihr Verfasser bereits im Jahre 1847 während eines ländlichen Aufenthaltes in Gesellschaft des Herausgebers auf der anmuthigen Villa zu Liboch bei Melnik, vollendete sie aber erst, durch Arbeiten anderer Art unterbrochen, in den Sommermonaten des folgenden Jahres, dem letzten seines Lebens. Er bethätigte mit diesem Werke nicht nur, dass seine geistigen Vermögen trotz des bereits vorgerückten Alters (er stand damals in seinem 67. Jahre) und der sichtlichen Abnahme der körperlichen Kräfte an ihrer Frische und Regsamkeit noch immer nichts verloren hatten; sondern er lieferte hiermit zugleich der gelehrten Welt einen neuen Beweis, welch ungemeine Einsichten in die abstractesten Tiefen der Mathematik, der reinen Naturwissenschaft und Metaphysik ihm waren zu Theil geworden. Wahrhaftig, hätte Bolzano nichts Anderes geschrieben und uns hinterlassen als diese Abhandlung allein: er müsste, wie wir fest glauben, schon um ihretwillen den ausgezeichnetsten Geistern unsers Jahrhunderts beigezählt werden! Die interessantesten und verwickeltsten Fragen, welche die Bearbeiter jener apriorischen Wissenschaften in Bezug auf den Begriff des Unendlichen von jeher beschäftigten, versteht er mit bewundernswerther Leichtigkeit zu lösen und mit solch einer Klarheit vor den Augen des Lesers zu entfalten, dass auch derjenige, der nur nicht ganz ein Fremdling auf diesem Gebiete ist und von den hierher einschlagenden Dingen nur Weniges begriffen hat, dem Vortrage des Verfassers zu folgen und seine Lehrsätze, mindestens ihrem grossen Theile nach, verständlich zu finden vermag. Der Kenner überdies muss, wofern er der Abhandlung einige Aufmerksamkeit schenket (und sollten wir dies nicht von einem jeden Gelehrten erwarten dürfen?), bald gewahr werden, von welcher Wichtigkeit die hier angedeuteten und in andern Werken Bolzano's (seiner Logik insbesondere und Athanasia) umständlicher auseinandergesetzten Ansichten seien, und wie es mit ihnen auf nichts Geringeres abgesehen sei, als auf eine völlige Umgestaltung aller bisherigen wissenschaftlichen Darstellung.

Der Herausgeber erhielt diese Abhandlung im Manuscripte aus dem Nachlasse des Verfassers von dessen Erben mit der Verbindlichkeit, sie sobald als möglich zum Drucke zu fördern, und übernahm diese Verpflichtung um so bereitwilliger, je mehr sie mit seinen innersten Gefühlen (Bolzano war sein unvergesslicher Lehrer und Freund) zusammenstimmte. Gern hätte er sich auch derselben schon früher entledigt, wären ihm nicht bedeutende Hindernisse in den Weg getreten, die er nicht eher als im Verlaufe dieses Jahres hat beseitigen können. Nun erst sah er sich in den Stand gesetzt, die lange bereits besorgte Abschrift nach dem nicht immer sehr lesbaren, hier und da sogar incorrecten Manuscripte zu verbessern, eine genaue Inhaltsanzeige zur leichteren Benutzung des Büchleins zu fertigen und einen tauglichen Verlagsort dafür aufzusuchen. Er wählet

Leipzig; weil er einerseits von diesem Umstande eine grössere Verbreitung der Abhandlung selbst erwartet, andererseits eben hiermit die berühmte Bücherstadt, die Zierde und den Stolz seines neuen Vaterlandes (er ist ein geborner Böhme), zu ehren gedenkt: denn er lebt des Glaubens, es werde einst, wird nur erst Bolzano's hoher Genius allgemeine Anerkennung finden, Leipzig eben nicht zum letzten Ruhme gereichen, zur Erscheinung dieser Paradoxien beigetragen zu haben.

Budissin, am 10. Juli 1850.

Inhalt.

§. 47. Beleuchtung des Lehrsatzes, dass die gemeine Cykloide in dem Puncte, wo sie auf ihre Grundlinie trifft, eine unendlich grosse Krümmung habe.

§. 48. Wie es komme, dass manche räumliche Ausdehnungen, die sich durch einen unendlichen Raum verbreiten, gleichwohl nur eine endliche Grösse haben; andere dagegen, die in einem endlichen Raume beschränkt sind, doch eine unendliche Grösse besitzen; und noch manche andere eine endliche Grösse behalten, ob sie gleich unendlich viele Umgänge um einen Punct herum machen.

§. 49. Noch einige paradoxe Verhältnisse räumlicher Ausdehnungen, die eine unendliche Grösse besitzen.

§. 50. Paradoxien des Unendlichen auf dem Gebiete der Physik und Metaphysik.

Welche Wahrheiten man anerkennen müsse, um diese Paradoxien richtig zu beurtheilen.

Beweis, dass es nicht zwei durchaus gleiche Dinge, somit auch nicht einander durchaus gleiche Atome (einfache Substanzen) im Weltall gebe; ferner

dass es nothwendig einfache Substanzen gebe, und dass diese Substanzen veränderlich seien.

§. 51. Vorurtheile, über die man sich wegsetzen müsse, um die hierher gehörigen Paradoxien richtig zu beurtheilen.

Es gibt keine todte, bloss träge Materie.

§. 52. Es ist ein Vorurtheil der Schule, dass die Annahme einer unmittelbaren Einwirkung der Substanzen unerlaubt sei.

§. 53. Eben so ist es ein Vorurtheil, zu glauben, dass unmittelbare Einwirkungen in die Ferne nicht möglich seien.

§. 54. Ein Durchdringen der Substanzen muss unbedingt geläugnet werden.

§. 55. Vorurtheil von der vollkommenen Unräumlichkeit geistiger Wesen, insofern sie nicht einmal den Ort eines Punctes sollen einnehmen können.

Zwischen den geschaffenen Substanzen gibt es keine anderen als Gradunterschiede.

§. 56. Das grosse Paradoxon von der Verbindung zwischen den geistigen und materiellen Substanzen behebt sich nach dieser Ansicht von selbst.

Ob bei des Verf. Ansichten von der Unendlichkeit des Weltalls ein Fortrücken des Ganzen nach irgend einer gegebenen Richtung oder auch eine drehende Bewegung desselben um eine gegebene Weltaxe oder einen Weltmittelpunct statthaben könne.

§. 70. Zwei durch Euler berühmt gewordene Paradoxien.

---

§. 1.

Nicht zwar, wie Kästner sagt, alle, aber gewiss die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiete der Mathematik begegnen, sind Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgend einer Weise sich auf ihn stützen. Noch unstreitiger ist es, dass gerade diejenigen mathematischen Paradoxien, die unsere grösste Beachtung verdienen, weil die Entscheidung hochwichtiger Fragen in mancher anderen Wissenschaft, wie in der Metaphysik und Physik, von einer befriedigenden Widerlegung ihres Scheinwiderspruches abhängt, unter dieser Gattung sich finden.

Und dieses ist eben der Grund, warum ich mich in der vorliegenden Abhandlung ausschliesslich nur mit der Betrachtung der Paradoxien des Unendlichen befasse. Dass es aber nicht möglich sein würde, den Schein des Widerspruches, der an diesen mathematischen Paradoxien haftet, als das, was er ist, als einen blossen Schein zu erkennen, wenn wir uns nicht vor Allem deutlich machten, welchen Begriff wir doch eigentlich mit dem Unendlichen verbinden, erachtet man von selbst. Dies also schicken wir voraus.

§. 2.

Dass man das Unendliche allem blos Endlichen entgegensetze, sagt schon das Wort. Und durch den Umstand, dass wir die Benennung des Ersten aus jener des Zweiten ableiten, verräth sich überdies, dass wir uns auch den Begriff des Unendlichen als einen solchen denken, der aus jenem des Endlichen erst durch Hinzufügung eines neuen Bestandtheiles (dergleichen ja auch der blosse Begriff der Verneinung schon ist) hervorgehe. Dass endlich beide Begriffe auf Mengen, näher auf Vielheiten (d. h. auf Mengen von Einheiten), somit auch auf Grössen angewandt werden, lässt sich schon aus dem Grunde nicht abläugnen, weil es ja eben die Mathematik, d. h. die Grössenlehre ist, wo wir am Häufigsten von dem Unendlichen sprechen, indem wir endliche sowohl als unendliche Vielheiten, und nebst den endlichen Grössen auch nicht nur unendlich grosse, sondern selbst unendlich kleine Grössen zum Gegenstande unserer Betrachtung und — Berechnung sogar erheben. — Ohne noch anzunehmen, dass jene beiden Begriffe (des Endlichen nämlich und des Unendlichen) sich stets nur auf Gegenstände anwenden lassen, an denen in irgend einem Betrachte sich Grösse und Vielheit nachweisen lässt, dürfen wir hoffen, dass eine genauere Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen wir eine Menge für endlich oder für unendlich erklären, uns auch darüber, was das Unendliche überhaupt sei, Aufschluss gewähren werde.

§. 3.

Zu diesem Zwecke müssen wir jedoch bis zu einem der einfachsten Begriffe unseres Verstandes zurückgehen, um uns über das Wort, das wir zu seiner Bezeichnung gebrauchen wollen, erst zu verständigen. Es ist der Begriff, der dem Bindeworte Und zu Grunde liegt, den ich jedoch, wenn er so deutlich hervortreten soll, als es die Zwecke der Mathematik sowohl als auch der Philosophie in unzähligen Fällen erheischen, am Füglichsten durch die Worte: ein Inbegriff gewisser Dinge oder ein aus gewissen Theilen bestehendes Ganze, glaube ausdrücken zu können, wenn nämlich festgesetzt wird, dass wir diese Worte in einer so weiten Bedeutung auslegen wollen, dass sich behaupten lasse, in allen Sätzen, wo man das Bindewort Und anzuwenden pflegt, also z. B. in den gleich folgenden: „Die Sonne, die Erde und der Mond — stehen in gegenseitiger Einwirkung aufeinander;“ „Die Rose und der Begriff einer Rose — sind ein Paar sehr verschiedene Dinge;“ „Die Namen Sokrates und Sohn des Sophroniskus — bezeichnen einerlei Person,“ — sei der Gegenstand, von dem man in diesen Sätzen spricht, ein gewisser Inbegriff von Dingen, ein aus gewissen Theilen bestehendes Ganze: im ersten namentlich sei es dasjenige Ganze, das Sonne, Erde und Mond miteinander bilden, von welchem man aussagt, dass es ein Ganzes sei, dessen Theile in gegenseitiger Einwirkung aufeinander stehen; im zweiten sei es der Inbegriff, den die zwei Gegenstände „die Rose und der Begriff einer Rose“ miteinander ausmachen, worüber man urtheile, dass sie zwei sehr verschiedene Dinge wären, u. s. w. Schon dieses Wenige dürfte zur Verständigung über den hier in Rede stehenden Begriff genügen, wenn wir noch allenfalls beifügen, dass jeder beliebige Gegenstand A mit allen beliebigen andern B, C, D ..... in einen Inbegriff vereinigt werden könne oder (noch richtiger gesprochen) an sich selbst schon einen Inbegriff bilde, von dem sich manche mehr oder weniger wichtige Wahrheit aussagen lasse, sofern nur jede der Vorstellungen A, B, C, D .... in der That einen anderen Gegenstand vorstellt, oder sofern nur keiner der Sätze: A ist dasselbe mit B, A ist dasselbe mit C, B ist dasselbe mit C, u. s. w. wahr ist. Denn ist z. B. A dasselbe Ding mit B, dann ist es allerdings ungereimt, von einem Inbegriffe der Dinge A und B zu reden.

§. 4.

Es gibt Inbegriffe, die, obgleich dieselben Theile *A*, *B*, *C*, *D* .... enthaltend, doch nach dem Gesichtspuncte (Begriffe), unter dem wir sie so eben auffassen, sich als verschieden (wir nennen es wesentlich verschieden) darstellen, z. B. ein ganzes und ein in Stücke zerbrochenes Glas als Trinkgefäss betrachtet. Wir nennen dasjenige, worin der Grund dieses Unterschiedes an solchen Inbegriffen bestehet, die Art der Verbindung oder Anordnung ihrer Theile. Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Theile gleichgiltig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloss diese ändert), nenne ich eine Menge; und eine Menge, deren Theile alle als Einheiten einer gewissen Art *A*, d. h. als Gegenstände, die dem Begriffe *A* unterstehen, betrachtet werden, heisst eine Vielheit von *A*.

§. 5.

Bekanntlich gibt es auch Inbegriffe, deren Theile selbst noch zusammengesetzt, d. h. abermals Inbegriffe sind. Unter ihnen auch solche, die wir aus einem Gesichtspuncte betrachten, für den sich nichts an ihnen Wesentliches ändert, wenn wir die Theile der Theile als Theile des Ganzen selbst auffassen. Ich nenne sie, mit einem von Mathematikern erborgten Worte, Summen. Denn das eben ist der Begriff einer Summe, dass $A + (B + C) = A + B + C$ sein müsse.

§. 6.

Betrachten wir einen Gegenstand als gehörig zu einer Gattung von Dingen, deren je zwei, *M* und *N*, niemals ein anderes Verhältniss zu einander haben können, als dass sie einander entweder gleich sind, oder dass sich das eine von ihnen als eine Summe darstellt, die einen dem andern gleichen

Theil in sich fasst, d. h. dass entweder $M = N$ oder $M = N + \nu$ oder $N = M + \mu$, wo von den Theilen ν und μ abermals dasselbe gelten muss, dass sie nämlich einander entweder gleich, oder der eine als ein in dem andern enthaltener Theil anzusehen sind: so betrachten wir diesen Gegenstand als eine Grösse.

§. 7.

Wenn ein gegebener Inbegriff von Dingen .... A, B, C, D, E, F .... L, M, N ..... von einer solchen Beschaffenheit ist, dass sich für jeden Theil M irgend ein und auch nur Ein anderer N nachweisen lässt von der Art, dass wir nach einem für alle Theile des Inbegriffes gleichen Gesetze entweder N durch sein Verhältniss zu M, oder M durch sein Verhältniss zu N bestimmen können: so nenne ich diesen Inbegriff eine Reihe, und seine Theile die Glieder dieser Reihe; jenes Gesetz, nach welchem entweder N durch sein Verhältniss zu M, oder M durch sein Verhältniss zu N bestimmbar ist, das Bildungsgesetz der Reihe; das eine dieser Glieder, welches man will, nenne ich (ohne durch diese Benennung den Begriff einer wirklichen Zeit- oder Raumfolge bezeichnen zu wollen) das vordere oder vorhergehende, das andere das hintere oder nachfolgende; jedes Glied M, welches sowohl ein vorderes als ein nachfolgendes hat, d. h. das nicht nur selbst aus einem andern, sondern aus welchem auch wieder ein anderes nach dem für die Reihe geltenden Bildungsgesetze ableitbar ist, nenne ich ein inneres Glied der Reihe, wornach man von selbst schon erachtet, welche Glieder ich, falls sie vorhanden sind, äussere, welches das erste oder das letzte Glied nenne*).

---

*) Nähere Erläuterungen über diese, wie über einige schon in den vorigen §§ aufgestellten Begriffe sind in der Wissenschaftslehre zu suchen.

§. 8.

Denken wir uns eine Reihe, deren erstes Glied eine Einheit von der Art A ist, jedes nachfolgende aber aus seinem vorhergehenden auf die Weise abgeleitet wird, dass wir einen ihm gleichen Gegenstand nehmend, denselben mit einer neuen Einheit von der Art A zu einer Summe verbinden: so werden offenbar alle in dieser Reihe vorkommenden Glieder — mit Ausnahme des ersten, das eine blosse Einheit von der Art A darbietet — Vielheiten von der Art A sein und dies zwar solche, die ich endliche oder zählbare Vielheiten, auch wohl geradezu (und selbst mit Inbegriff des ersten Gliedes) Zahlen, bestimmter: ganze Zahlen nenne.

§. 9.

Nach der verschiedenen Beschaffenheit des hier durch A bezeichneten Begriffes kann es eine bald grössere, bald geringere Menge der Gegenstände, welche er unter sich fasst, d. h. der Einheiten von der Art A, und darum auch eine bald grössere, bald geringere Menge der Glieder in der besprochenen Reihe geben. Namentlich kann es derselben auch so viele geben, dass diese Reihe, so fern sie diese Einheiten alle erschöpfen (in sich aufnehmen) soll, durchaus kein letztes Glied haben darf; wie wir dies in der Folge noch umständlicher nachweisen wollen. Dies also vor der Hand vorausgesetzt, werde ich eine Vielheit, die grösser als jede endliche ist, d. h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, dass jede endliche Menge nur einen Theil von ihr darstellt, eine unendliche Vielheit nennen.

§. 10.

Man wird mir, wie ich hoffe, zugeben, dass die hier aufgestellte Erklärung der beiden Begriffe einer endlichen und einer **unendlichen** Vielheit den Unterschied zwischen denselben in Wahrheit so bestimme, wie ihn diejenigen, die diese Ausdrücke in einem strengen Sinne gebrauchten, sich gedacht haben. Man wird auch zugeben, dass in diesen Erklärungen kein versteckter Zirkel liege. Es handelt sich also nur noch darum, ob wir durch eine blosse Erklärung dessen, was eine unendliche **Vielheit** heisse, im Stande sein werden, zu bestimmen, was ein **Unendliches** überhaupt sei. So wäre es, falls es sich zeigen sollte, es gebe streng genommen nichts Anderes, als eben nur Vielheiten, auf welche der Begriff des Unendlichen in seiner eigentlichen Bedeutung angewandt werde, d. h. wenn es sich zeigen sollte, dass die Unendlichkeit eigentlich nur eine Beschaffenheit von Vielheiten ist, oder dass wir Alles, was wir für **unendlich** erklären, nur darum so nennen, weil und inwiefern wir daran eine Beschaffenheit gewahren, die sich als eine unendliche Vielheit ansehen lässt. Das ist nun, däucht mir, wirklich. Der Mathematiker gebraucht dieses Wort offenbar nie in einem anderen Sinne; denn es sind überhaupt fast nur Grössen, mit deren Bestimmung er sich beschäftigt, wozu er sich der Annahme einer aus ihnen, die von derselben Art ist, zur **Einheit** und des Begriffes einer Zahl bedient. Findet er eine Grösse, grösser als jede Anzahl der zur Einheit angenommenen, so nennt er sie **unendlich gross**; findet er eine so klein, dass jedes Vielfache derselben kleiner ist als die Einheit, so nennt er sie **unendlich klein**; und ausser diesen beiden Gattungen des Unendlichen und den von ihnen noch ferner abgeleiteten Arten unendlich grosser und unendlich kleiner **Grössen von höherer Ordnung**, die alle aus demselben Begriffe hervorgehen, gibt es für ihn sonst kein Unendliches.

§. 11.

Mit diesem den Mathematikern so wohl bekannten Unendlichen nun sind einige Philosophen, zumal der neueren Zeit, wie Hegel und seine Anhänger, noch nicht zufrieden zu stellen, nennen es verächtlich das schlechte Unendliche und wollen noch ein viel höheres, das wahre, das qualitative Unendliche kennen, welches sie namentlich in Gott und überhaupt im Absoluten nur finden. Wenn sie, wie Hegel, Erdmann u. A. sich das mathematische Unendliche nur als eine Grösse denken, welche veränderlich ist und in ihrem Wachsthume keine Gränze hat (was freilich manche Mathematiker, wie wir bald sehen werden, als die Erklärung ihres Begriffes aufgestellt haben): so pflichte ich ihnen in ihrem Tadel dieses Begriffes einer in das Unendliche nur wachsenden, nie es erreichenden Grösse selbst bei. Eine wahrhaft unendliche Grösse, z. B. die Länge der ganzen beiderseits gränzenlosen Geraden (d. h. die Grösse desjenigen Raumdinges, das alle Puncte enthält, die durch ihr blosses begrifflich vorstellbares Verhältniss zu zwei gegebenen bestimmt sind), braucht eben nicht veränderlich zu sein, wie sie es denn in dem hier angeführten Beispiele in der That nicht ist; und eine Grösse, die nur stets grösser angenommen werden kann, als wir sie schon genommen haben, und grösser als jede gegebene (endliche) Grösse zu werden vermag, kann dabei gleichwohl beständig eine bloss endliche Grösse verbleiben, wie dieses namentlich von jeder Zahlgrösse 1, 2, 3, 4 ...... gilt. Was ich nicht zugestehe, ist bloss, dass der Philosoph einen Gegenstand kenne, dem er das Prädicat der Unendlichkeit beizulegen berechtiget sei, ohne in diesem Gegenstande in irgend einer Beziehung erst eine unendliche Grösse oder doch Vielheit nachgewiesen zu haben. Wenn ich darthun kann, dass selbst in Gott als in demjenigen Wesen, das wir als die vollkommenste Einheit betrachten, sich Gesichtspuncte nachweisen lassen, aus welchen wir eine unendliche Vielheit in ihm erblicken, und dass es eben nur diese Gesichtspuncte sind, aus denen wir ihm Unendlichkeit beilegen: so wird es kaum nöthig sein, noch ferner darzuthun, dass ähnliche Rücksichten auch in allen anderen Fällen, wo der Begriff der Unendlichkeit in seinem guten Rechte ist, zu Grunde liegen. Ich sage nun: wir nennen Gott unendlich, weil wir ihm Kräfte von mehr als Einer Art zugestehen müssen, die eine unendliche Grösse besitzen. So müssen wir ihm eine Erkenntnisskraft beilegen, die wahre Allwissenheit ist, also eine unendliche Menge von Wahrheiten, weil alle überhaupt, umfasst, u. s. w. Und welcher wäre denn der Begriff, den man uns statt des hier aufgestellten von dem wahren Unendlichen aufdringen will? Es soll das All sein, das jedes beliebige Etwas umfasst, das absolute All, ausser dem es nichts gibt. Nach dieser Angabe wäre es ein Unendliches, das auch nach unserer Erklärung unendlich Vieles in sich schliesst. Es wäre ein Inbegriff von nicht nur allen wirklichen Dingen, sondern auch allem demjenigen, was keine Wirklichkeit hat, den Sätzen und Wahrheiten an sich. Und so dürfte denn — auch abgesehen von all den übrigen Irrthümern, die man in diese Lehre vom All verwoben hat — kein Grund vorhanden sein, unsern Begriff von dem Unendlichen zu verlassen, um jenen anzunehmen.

§. 12.

Doch auch so manche andere Erklärungen von dem Unendlichen, die selbst von Mathematikern und in der Meinung aufgestellt wurden, dass sie nur die Bestandtheile dieses Einen und desselben Begriffes darböten, kann ich nicht umhin, als unrichtig zu verwerfen.

1. In der That haben, wie ich nur eben vorhin erwähnte, einige Mathematiker, unter ihnen selbst Cauchy (in seinem *Cours d'Analyse* u. m. a. Schriften), der Verfasser des Artikels „Unendlich" in Klügels Wörterbuche, geglaubt, das Unendliche zu erklären, wenn sie es als eine veränderliche Grösse beschreiben, deren Werth unbegränzt wächst und füglich grösser werden könne, als jede gegebene, noch so grosse Grösse. Die Gränze dieses unbegränzten Wachsens sei die unendlich grosse Grösse. So sei die Tangente

des rechten Winkels, als stetige Grösse gedacht, unbegränzt, ohne Ende, im eigentlichen Sinne unendlich. Das Fehlerhafte dieser Erklärung erhellt schon daraus, weil das, was die Mathematiker eine veränderliche Grösse nennen, eigentlich nicht eine Grösse, sondern der blosse Begriff, die blosse Vorstellung von einer Grösse ist, und zwar eine solche Vorstellung, die nicht eine einzige, sondern eine unendliche Menge von einander verschiedener, in ihrem Werthe, d. h. in ihrer Grossheit selbst sich unterscheidender Grössen unter sich befasst. Was man unendlich nennt, sind ja nicht jene verschiedenen Werthe, welche der hier zum Beispiel angeführte Ausdruck *tang.* φ für verschiedene Werthe von φ darstellt, sondern nur jener einzelne Werth, von dem man (obgleich in diesem Falle mit Unrecht) sich vorstellt, dass jener Ausdruck ihn für den Werth $\varphi = \frac{\pi}{2}$ annehme. Auch ist es wohl ein Widerspruch, von der Gränze eines unbegränzten Wachsens und bei der Erklärung des unendlich Kleinen eben so von der Gränze einer unbegränzten Abnahme zu reden. Und wenn man jene für das unendlich Grosse erklärt: so sollte man der Analogie nach diese, d. h. die blosse Null (ein Nichts) für das unendlich Kleine erklären; was doch gewiss unrichtig ist und weder Cauchy noch Grunert zu sagen sich erlauben.

2. War die so eben betrachtete Erklärung zu weit, so ist dagegen die von Spinoza und vielen anderen Philosophen sowohl als Mathematikern angenommene, dass nur Dasjenige unendlich sei, was keiner ferneren Vermehrung fähig ist, oder dem nichts mehr beigefügt (addirt) werden kann, viel zu enge. Der Mathematiker erlaubt sich zu jeder Grösse, auch der unendlich grossen, noch andere, und nicht nur endliche, sondern selbst andere schon bereits unendliche Grössen zuzusetzen, ja er vervielfältigt die unendliche Grösse sogar unendlichemal u. s. w. Und wenn Einige noch darüber streiten, ob dies Verfahren auch ein gesetzmässiges sei: welcher Mathe-

matiker, der nur nicht alles Unendliche verwirft, wird nicht zugeben müssen, dass die Länge einer nur nach der Einen Seite hin begränzten, nach der andern aber in das Unendliche fortlaufenden Geraden unendlich gross sei, und gleichwohl durch Zusätze nach der ersten Seite hin vergrössert werden könne?

3. Nicht befriedigender ist die Erklärung Jener, die sich genau an die Bestandtheile des Wortes halten und sagen, unendlich sei, was kein Ende hat. Dächten sie dabei nur an ein Ende in der Zeit, ein Aufhören: so könnten nur Dinge, die in der Zeit sind, endlich oder unendlich heissen. Allein wir fragen auch bei Dingen, die in keiner Zeit sind, z. B. bei Linien oder Grössen überhaupt, ob sie endlich oder unendlich sind. Nehmen sie aber das Wort in einem weiteren Sinne, etwa gleichgeltend mit Gränze überhaupt: so erinnere ich erstlich, dass es gar manche Gegenstände gibt, bei denen man füglich nicht nachweisen kann, dass sich an ihnen eine Gränze befinde, ohne dem Worte eine höchst schwankende, Alles verwirrende Bedeutung unterzuschieben, und die gleichwohl Niemand zu den unendlichen zählt. So hat doch wohl ein jeder einfache Theil der Zeit oder des Raumes (ein Punct in der Zeit oder im Raume) keine Gränzen, wird vielmehr selbst gewöhnlich nur als Gränze (einer Zeitlänge oder Linie) betrachtet, ja von den Meisten geradezu so definirt, nicht anders als ob dies zu seinem Wesen gehörte; noch Niemandem aber fiel ein (es wäre denn etwa Hegel), in dem blossen Puncte eine Unendlichkeit sehen zu wollen. Eben so wenig kennt der Mathematiker an der Kreislinie und an so vielen anderen in sich zurückkehrenden Linien und Flächen eine Gränze, und betrachtet sie doch nur als endliche Dinge (es müsste denn sein, dass er auf die unendliche Menge der in ihnen enthaltenen Puncte zu sprechen käme, in welchem Betrachte er aber auch an jeder begränzten Linie etwas Unendliches anerkennen muss). Zweitens bemerke ich, dass es gar viele Gegenstände gebe, die unläugbar begränzt sind und dabei doch als Grössen an-

gesehen werden, die zu den unendlichen gehören. So ist es nicht nur bei der schon früher erwähnten Geraden, die nur nach Einer Seite zu in das Unendliche reicht, sondern auch bei dem Flächenraume, den ein Paar unendliche Parallelen, oder die beiden in das Unendliche reichenden Schenkel eines auf einer Ebene verzeichneten Winkels, zwischen sich einschliessen, u. m. a. So werden wir auch in der rationalen Psychologie eine Erkenntnisskraft schon dann unendlich gross nennen, wenn sie, auch ohne allwissend zu sein, nur irgend eine unendliche Menge von Wahrheiten, z. B. nur die ganze unendliche Reihe der Decimalstellen, welche die einzige Grösse $\sqrt{2}$ enthält, zu überschauen vermag.

4. Am Gewöhnlichsten heisst es: unendlich gross sei, was grösser ist als jede angebliche Grösse. Hier bedarf es vor Allem einer genaueren Bestimmung darüber, was man sich bei dem Worte angeblich denke? Soll es nur soviel bedeuten, dass etwas möglich sei, d. h. Wirklichkeit haben könne, oder nur, dass es nichts Widersprechendes sei? Im ersten Falle beschränkt man den Begriff des Endlichen einzig auf jene Gattung von Dingen, die zu den Wirklichkeiten gehören, entweder zu aller Zeit wirklich sind, oder doch zu gewissen Zeiten wirklich gewesen sind oder noch werden sollen, oder wenigstens irgend einmal zur Wirklichkeit gelangen könnten. In diesem Sinne scheint in der That Fries (Naturphilosophie §. 47) das Unendliche genommen zu haben, wenn er es das Unvollendbare nennt. Der Sprachgebrauch aber wendet den Begriff des Endlichen und eben so auch jenen des Unendlichen auf Beides, sowohl auf Gegenstände an, denen Wirklichkeit zukommt, wie namentlich auf Gott, als auch auf andere, bei denen von gar keiner Existenz derselben gesprochen werden kann, dergleichen die blossen Sätze und Wahrheiten an sich, sammt ihren Bestandtheilen, den Vorstellungen an sich; indem wir endliche sowohl als unendliche Mengen derselben annehmen. Versteht man aber unter dem Angeblichen alles Dasjenige, was sich nur eben nicht widerspricht: dann

legt man es schon in die Erklärung des Begriffes, dass es kein Unendliches gebe; denn eine Grösse, die grösser sein soll, als eine jede, die sich nicht widerspricht, müsste auch grösser als sie selbst sein, was freilich ungereimt ist. Allein es gibt noch eine dritte Bedeutung, in der man das Wort angeblich nehmen könnte, wenn man darunter nur etwa Solches verstände, was eben uns nur gegeben werden kann, d. h. ein Gegenstand unserer Erfahrung zu werden vermag. Doch ich frage Jeden, ob er die Worte endlich und unendlich nicht jedenfalls in einem solchen Sinne nehme, und — soll in der Wissenschaft ein nützlicher Gebrauch von ihnen gemacht werden — auch nothwendig nur in einem solchen Sinne nehmen müsse, dabei sie jedenfalls eine gewisse innere Beschaffenheit der Gegenstände, die wir so nennen, keineswegs aber ein blosses Verhältniss derselben zu unserem Erkenntnissvermögen, zu unserer Sinnlichkeit sogar (ob wir Erfahrungen über sie einziehen können oder nicht können) betreffen. Somit kann denn die Frage, ob etwas endlich oder unendlich sei, gewiss nicht davon abhängen, ob der in Rede stehende Gegenstand eine Grösse besitze, die wir noch wahrzunehmen (etwa zu überschauen oder nicht zu überschauen) vermögen.

§. 13.

Sind wir nun mit uns einig geworden, welchen Begriff wir mit dem Worte Unendlich verbinden wollen, und haben wir uns auch die Bestandtheile, aus denen wir diesen Begriff zusammensetzen, zu einem klaren Bewusstsein erhoben: so ist die nächste Frage, ob er auch Gegenständlichkeit habe, d. h. ob es auch Dinge gebe, auf die er sich anwenden lässt, Mengen, die wir in der erklärten Bedeutung unendlich nennen dürfen? Und dieses wage ich mit Entschiedenheit zu bejahen. Es gibt schon im Reiche derjenigen Dinge, die keinen Anspruch auf Wirklichkeit, ja nur auf Möglichkeit machen, unstreitig Mengen, die unendlich sind. Die Menge der Sätze und Wahrheiten an sich ist, wie sich sehr leicht einsehen lässt, unendlich; denn wenn wir irgend eine Wahrheit, etwa den Satz, dass es Wahrheiten überhaupt gebe, oder sonst jeden beliebigen, den ich durch *A* bezeichnen will, betrachten: finden wir, dass der Satz, welchen die Worte „*A* ist wahr" ausdrücken, ein von *A* selbst verschiedener sei; denn dieser hat offenbar ein ganz anderes Subject als jener. Sein Subject nämlich ist der ganze Satz *A* selbst. Allein nach eben dem Gesetze, wie wir hier aus dem Satze *A* diesen von ihm verschiedenen, den ich *B* nennen will, ableiten, lässt sich aus *B* wieder ein dritter Satz *C* ableiten, und so ohne Ende fort. Der Inbegriff all dieser Sätze, deren jeder folgende zu dem nächst vorhergehenden in dem nur eben angegebenen Verhältnisse steht, dass er denselben zu seinem Subjecte erhebt und von demselben aussagt, dass er ein wahrer Satz sei, dieser Inbegriff — sage ich — umfasst eine Menge von Theilen (Sätzen), die grösser als jede endliche Menge ist. Denn ohne meine Erinnerung bemerkt der Leser die Aehnlichkeit, welche die Reihe dieser Sätze nach dem so eben angegebenen Bildungsgesetze mit der §. 8 betrachteten Reihe der Zahlen hat; eine Aehnlichkeit, bestehend darin, dass es zu jedem Gliede der letzteren ein ihm entsprechendes der ersteren gibt, dass es somit für jede auch noch so grosse Anzahl auch eine ihr gleiche Anzahl verschiedener Sätze gibt, und dass wir immer noch neue Sätze darüber bilden können, oder besser zu sagen, dass es solche Sätze, gleichviel ob wir sie bilden oder nicht, an sich selbst gebe. Woraus denn folgt, dass der Inbegriff all dieser Sätze eine Vielheit besitze, die grösser als jede Zahl, d. h. die unendlich ist.

§. 14.

Aber wie einfach und einleuchtend auch der eben gelieferte Beweis ist: doch gibt es eine beträchtliche Anzahl Gelehrter und sehr scharfsinniger Männer, die den Satz selbst, den ich hier dargethan zu haben glaube, nicht nur für paradox, sondern geradezu für falsch erklären. Sie läugnen, es gebe irgend ein Unendliches. Nicht nur unter den Dingen, die Wirklichkeit haben, sondern auch unter den übrigen gibt es nach ihrer Behauptung kein einzelnes, auch keinen Inbegriff mehrerer, an dem sich in irgend einem Betrachte eine unendliche Menge von Theilen annehmen liesse. Die Gründe, welche sie gegen das Unendliche im Reiche der Wirklichkeit erheben, wollen wir später betrachten, weil wir auch später erst die Gründe für das Vorhandensein eines solchen Unendlichen vorbringen werden. Hier also lasset uns nur die Gründe vernehmen, durch welche dargethan werden soll, dass es nirgends, nicht einmal unter den Dingen, die keinen Anspruch auf Wirklichkeit machen, etwas Unendliches gebe. 1. „Eine „unendliche Menge," sagt man, „kann es schon aus dem Grunde „nirgends geben, weil eine unendliche Menge nie in ein „Ganzes vereinigt, nie in Gedanken zusammengefasst werden kann." — Diese Behauptung muss ich geradezu als einen Irrthum bezeichnen, als einen Irrthum, den die falsche Ansicht erzeugte, dass man, um ein aus gewissen Gegenständen *a*, *b*, *c*, *d* .... bestehendes Ganze zu denken, zuvor sich Vorstellungen, die einen jeden dieser Gegenstände im Einzelnen vorstellen (Einzelvorstellungen von ihnen), gebildet haben müsse. So ist es durchaus nicht; ich kann mir die Menge, den Inbegriff oder, wenn man so lieber will, das Ganze der Bewohner Prags oder Pekings denken, ohne mir einen jeden dieser Bewohner im Einzelnen, d. h. durch eine ausschliesslich ihn nur betreffende Vorstellung, vorzustellen. Ich thue das wirklich jetzt eben, indem ich von dieser Menge derselben spreche und z. B. das Urtheil fälle, dass ihre Anzahl in Prag zwischen den beiden Zahlen 100,000 und 120,000 liege. Es ist nämlich, sobald wir erst eine Vorstellung *A* besitzen, die jeden der Gegenstände *a*, *b*, *c*, *d* ...., sonst aber nichts Anderes vorstellt, überaus leicht zu einer Vorstellung zu gelangen, welche den Inbegriff, den alle diese Gegenstände zusammen ausmachen, vorstellt. Dazu bedarf es in der That nichts Anderen, als den Begriff, den das Wort Inbegriff bezeichnet, mit der Vorstellung *A* in der Art zu verbinden, wie es die Worte: der Inbegriff aller *A*, andeuten. Durch diese einzige Bemerkung, deren Richtigkeit Jedem, wie ich glaube, einleuchten muss, fällt alle Schwierigkeit weg, die man bei dem Begriffe einer Menge, wenn sie aus unendlich vielen Theilen besteht, finden will; sobald nur ein Gattungsbegriff, der jeden dieser Theile, sonst aber nichts Anderes umfasst, vorhanden ist, wie dieses bei dem Begriffe: „Die Menge aller Sätze oder Wahrheiten an sich“, der Fall ist, wo der benöthigte Gattungsbegriff kein anderer als der schon vorliegende: „ein Satz oder eine Wahrheit an sich“ ist. — Allein ich darf noch einen zweiten Irrthum, den man in jenem Einwurfe verräth, nicht ungerügt lassen.

Es ist die Meinung, „dass eine Menge nicht vorhanden „wäre, wenn nicht erst Jemand, der sie denkt, vorhanden „wäre.“ Wer dies behauptet, der sollte, um so folgerecht zu sein, als man es überhaupt bei einem Irrthum sein kann, nicht nur behaupten, dass es keine unendliche Mengen von Sätzen oder Wahrheiten an sich gebe, sondern er sollte behaupten, dass es überhaupt gar keine Sätze und Wahrheiten an sich gebe. Denn wenn wir den Begriff von Sätzen und Wahrheiten an sich zu einem klaren Bewusstsein bei uns erhoben haben und an der Gegenständlichkeit desselben in der That gar nicht zweifeln: so können wir wohl schwerlich auf Behauptungen, wie die nur angeführte ist, gerathen, oder doch sicher nicht bei denselben beharren. Um dies auf eine Jedem einleuchtende Weise zu zeigen, erlaube ich mir die Frage aufzuwerfen, ob an den Polen der Erde nicht auch sich Körper, flüssige sowohl als feste, befinden, Luft, Wasser, Steine u. dergl., ob diese Körper nicht nach gewissen Gesetzen auf einander einwirken, z. B. so, dass die Geschwindigkeiten, die sie einander bei ihrem Conflicte mittheilen, sich verkehrt wie ihre

Massen verhalten u. dergl., und ob dieses Alles erfolge, auch wenn kein Mensch, noch irgend ein anderes denkendes Wesen da ist, das es beobachtet? Bejahet man dieses (und wer müsste es nicht bejahen?): dann gibt es auch Sätze und Wahrheiten an sich, die alle diese Vorgänge ausdrücken, ohne dass irgend Jemand sie denkt und kennt. Und in diesen Sätzen ist häufig von Ganzen und Mengen die Rede; denn jeder Körper ist doch ein Ganzes und bringt gar viele seiner Wirkungen nur durch die Menge der Theile, aus denen er besteht, hervor. Es gibt also Mengen und Ganze, auch ohne dass ein Wesen, welches sie denkt, da ist. Und wenn dies nicht wäre, wenn diese Mengen nicht selbst da wären: wie könnten die Urtheile, welche wir über sie fällen, wahr sein? Oder vielmehr, was müsste der Sinn dieser Urtheile sein, wenn sie erst dadurch wahr werden sollten, dass Jemand da ist, der diese Vorgänge wahrnimmt? Wenn ich sage: „Dieser Block löste sich vor meinen Augen von jenem Felsen ab und stürzte, die Luft durchschneidend, herunter;" so müsste dies ohngefähr folgenden Sinn haben: Indem ich gewisse einfache Wesen dort oben zusammen dachte, entstand eine Verbindung derselben, die ich Block nenne; diese Verbindung entfernte sich von gewissen anderen, die sich, indem ich sie zusammen dachte, zu einem Ganzen vereinigten, welches ich einen Felsen nenne; u. s. w.

2. Allein man dürfte sagen: „es bleibe bei allem dem „wahr, dass es nur unser Werk, und zwar ein grossentheils „sehr willkürliches Werk sei, ob wir gewisse einfache Gegen„stände in einen Inbegriff zusammendenken oder nicht zusam„mendenken wollen; und nur erst, wenn wir dies thun, ent„stehen Verhältnisse zwischen ihnen. Der mittelste Atom in „diesem an meinem Rocke befindlichen Knopfe und der mit„telste Atom in jenem Thurmknopfe dort gehen einander nicht „das Geringste an und stehen in gar keiner Verbindung mit „einander; erst durch mein gegenwärtiges Zusammendenken „derselben entsteht eine Art Verbindung zwischen ihnen." —

Auch Diesem muss ich widersprechen. Die beiden Atome waren, noch ehe das denkende Wesen ihre Vorstellungen zusammenfügte, in gegenseitiger Einwirkung aufeinander, z. B. durch die Kraft der Anziehung u dgl.; und wenn anders jenes denkende Wesen in Folge seiner Gedanken nicht auch noch Handlungen vornimmt, die eine Aenderung in den Verhältnissen zwischen den beiden Atomen bewirken: so ist es durchaus unwahr, dass erst durch jenes Zusammendenken derselben Verhältnisse unter ihnen entständen, die ausserdem nicht da wären. Soll ich mit Wahrheit urtheilen, dass jener Atom der niedere, dieser der höhere sei, und dass somit dieser durch jenen um irgend ein Kleines in die Höhe gezogen werde u. s. w.: so müsste dies Alles stattfinden, auch wenn ich nicht daran gedacht hätte u. s. w.

3. Doch Andere sagen: „Nicht, dass ein Inbegriff von „einem denkenden Wesen wirklich gedacht werde, ist „dazu nothwendig, dass er bestehe: wohl aber ist dazu nothwendig, dass er gedacht werden könne. Und weil nun kein „Wesen möglich ist, das eine unendliche Menge von Dingen „jedes im Einzelnen sich vorzustellen und diese Vorstellungen „dann zu verbinden vermag: so ist auch kein Inbegriff, der „eine unendliche Menge von Dingen als Theile in sich fasste, „möglich.“

Wie irrig die hier wiederholte Voraussetzung sei, dass zu dem Denken eines Inbegriffs das Denken aller seiner Theile im Einzelnen d. h. das Denken eines jeden einzelnen Theiles vermittelst einer denselben vorstellenden Einzelvorstellung erfordert werde, haben wir No. 1. schon gesehen; auch brauchen wir nicht erst auf das allwissende Wesen als auf ein solches zu verweisen, dem selbst die Auffassung einer unendlichen Menge von Dingen, jedes im Einzelnen, keine Mühe verursacht. Allein wir dürfen nicht einmal die erste Voraussetzung zugeben, nämlich, dass das Vorhandensein eines Inbegriffes von Dingen auf der Bedingung beruhe, dass ein solcher Inbegriff gedacht werden kann. Denn das „Gedacht werden können einer Sache" kann nie den Grund ihrer Möglichkeit enthalten; sondern es ist vielmehr gerade umgekehrt die Möglichkeit einer Sache erst der Grund davon, dass ein vernünftiges Wesen, wenn es sich nicht eben irrt, die Sache möglich oder wie man (nur uneigentlich) sagt, sie denkbar findet, sie denken kann. Von der Richtigkeit dieser Bemerkung und von der gänzlichen Unhaltbarkeit der freilich sehr verbreiteten Ansicht, welche ich hier bekämpfe, wird man sich noch völliger überzeugen, wenn man sich die Bestandtheile, aus welchen der höchst wichtige Begriff der Möglichkeit besteht, deutlich zu machen sucht. Dass man möglich Dasjenige nennt, was sein kann, ist offenbar keine Zerlegung dieses Begriffes; denn in dem Worte Können steckt der Begriff der Möglichkeit noch ganz. Aber noch unrichtiger wäre es, die Erklärung aufstellen zu wollen, dass möglich Dasjenige sei, was gedacht werden kann. Denken im eigentlichen Sinne des Wortes, wo es auch schon das blosse Vorstellen befasst, können wir uns auch das Unmögliche; und denken es uns ja wirklich, so oft wir darüber urtheilen, und es z. B. eben für unmöglich erklären; wie wenn wir sagen, dass es keine Grösse gebe und geben könne, welche durch 0 oder $\sqrt{-1}$ vorgestellt wird. Aber auch wenn man unter dem Denken hier nicht ein blosses Vorstellen, sondern ein eigentliches Fürwahrhalten versteht, ist es falsch, dass Alles möglich sei, was wir für wahr halten können. Durch Irrthum halten wir ja zuweilen auch das Unmögliche, z. B. dass wir die Quadratur des Zirkels gefunden hätten, für wahr. Es müsste also gesagt werden (wie ich schon oben verbessernd annahm), möglich sei Dasjenige, worüber ein denkendes Wesen, wenn es der Wahrheit gemäss urtheilt, das Urtheil ausspricht, dass es sein könne, d. h. dass es möglich sei. Eine Erklärung, die einen offenbaren Zirkel enthält! Wir sind also wohl genöthigt, die Beziehung auf ein denkendes Wesen bei der Erklärung des Möglichen ganz aufzugeben und uns nach einem andern Merkmale umzusehen. Möglich ist, hört man zuweilen auch sagen, „was sich nicht widerspricht." Allerdings ist Alles, was einen Widerspruch schon in sich selbst enthält, z. B. dass eine Kugel keine Kugel sei, unmöglich. Aber nicht alles Unmögliche ist nur eben von solcher Art, dass der Widerspruch schon in den blossen Bestandtheilen, aus welchen wir die Vorstellung desselben zusammmengesetzt haben, vorkommt. Dass ein Körper, der von sieben ebenen Seitenflächen eingeschlossen ist, von gleichen Seitenflächen eingeschlossen sei, ist unmöglich; aber das Widersprechende liegt nicht schon in den Worten, die hier verbunden werden, offen zu Tage. Wir müssen also unsere Erklärung erweitern. Wollten wir aber sagen, unmöglich sei, was mit irgend einer Wahrheit im Widerspruche steht: so würden wir Alles, was nicht ist, auch eben darum schon für unmöglich erklären, weil der Satz, dass es ist, der Wahrheit, dass es nicht ist, widerspräche. Wir würden also gar keinen Unterschied zwischen dem Möglichen und dem Wirklichen, ja dem Nothwendigen sogar zulassen, was wir doch Alle thun. Wir sehen demnach, das Gebiet der Wahrheiten, denen das Unmögliche widerspricht, müsse nur auf eine gewisse Gattung derselben beschränkt werden; und nun kann es uns kaum mehr entgehen, welche Gattung von Wahrheiten dies sei. Es sind die reinen Begriffswahrheiten. Was irgend einer reinen Begriffswahrheit widerspricht, ist das Unmögliche zu nennen; möglich also, was mit keiner reinen Begriffswahrheit im Widerspruche steht. Wer einmal eingesehen hat, dies sei der richtige Begriff der Möglichkeit, dem kann es kaum mehr in den Sinn kommen, die Behauptung aufzustellen, dass etwas nur erst dann möglich sei, wenn es gedacht, d. h. von einem denkenden Wesen, das sich in seinem Urtheile nicht irrt, für möglich angesehen wird. Denn dieses hiesse ja sagen: „Ein Satz widerspricht nur erst dann keiner reinen Begriffs„wahrheit, wenn es keiner reinen Begriffswahrheit widerspricht, „dass es ein denkendes Wesen gebe, welches von diesem Satze „der Wahrheit gemäss das Urtheil fällt, dass er keiner reinen „Begriffswahrheit widerspreche." Wer sieht nicht, wie gar nicht zur Sache gehörig diese Einmengung eines denkenden Wesens hier sei? — Ist es aber entschieden, dass nicht das Denken die Möglichkeit erst mache: wo bleibt noch irgend ein Grund, aus dem vermeintlichen Umstande, dass eine unendliche Menge von Dingen nicht zusammen gedacht werden kann, zu folgern, dass es dergleichen Mengen nicht geben könne?

§. 15.

Ich betrachte es nun als genügend dargethan und vertheidiget, dass es unendliche Mengen, wenigstens unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, gebe; dass namentlich die Menge aller Wahrheiten an sich eine unendliche sei. Man wird in ähnlicher Weise, wie §. 13 geschlossen wurde, auch zugeben, dass die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen, deren Begriff wir §. 8 erklärten), unendlich sei. Aber auch dieser Satz klingt paradox, und wir dürfen ihn eigentlich als die erste der auf dem Gebiete der Mathematik erscheinenden Paradoxien betrachten; denn die vorhin betrachtete gehört eigentlich noch in eine allgemeinere Wissenschaft als in die Grössenlehre.

„Wenn jede Zahl," dürfte man sagen, „ihrem Begriffe „nach eine bloss endliche Menge ist, wie kann die Menge aller „Zahlen eine unendliche sein? Wenn wir die Reihe der natür„lichen Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

„betrachten: so werden wir gewahr, dass die Menge der Zah„len, die diese Reihe, anzufangen von der ersten (der Einheit) „bis zu irgend einer z. B. der Zahl 6, enthält, immer durch „diese letzte selbst ausgedrückt wird. Somit muss ja die Menge „aller Zahlen genau so gross als die letzte derselben und „somit selbst eine Zahl, also nicht unendlich sein."

Das Täuschende dieses Schlusses verschwindet auf der Stelle, sobald man sich nur erinnert, dass in der Menge aller

Zahlen in der natürlichen Reihe derselben keine die letzte stehe; dass somit der Begriff einer letzten (höchsten) Zahl ein gegenstandloser, weil einen Widerspruch in sich schliessender, Begriff sei. Denn nach dem, in der Erklärung jener Reihe (§. 8) angegebenen Bildungsgesetze derselben hat jedes ihrer Glieder wieder ein folgendes. Dies Paradoxon wäre denn also durch diese einzige Bemerkung schon als gelöst zu betrachten.

§. 16.

Ist die Menge der Zahlen (nämlich der sogenannten ganzen Zahlen) unendlich: so ist um so gewisser die Menge der Grössen (nach der § 6. und Wissenschaftslehre §. 87 vorkommenden Erklärung) eine unendliche. Denn jener Erklärung zufolge sind nicht nur alle Zahlen zugleich auch Grössen, sondern es gibt noch weit mehr Grössen als Zahlen, weil auch die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., ingleichen die sogenannten irrationalen Ausdrücke $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ... π, e, ... Grössen bezeichnen. Ja dieser Erklärung zufolge ist es auch kein Widerspruch, von Grössen zu reden, welche unendlich gross, und anderen, welche unendlich klein sind, sofern man unter der unendlich grossen Grösse nur eine solche versteht, die bei der einmal zu Grunde gelegten Einheit als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Menge dieser Einheiten nur ein Theil ist; unter der unendlich kleinen Grösse aber eine solche, bei der die Einheit selbst als ein Ganzes erscheint, von welchem jede endliche Vielheit dieser Grösse nur einen Theil ausmacht. — Die Menge aller Zahlen zeigt sich sofort als ein nicht zu bestreitendes Beispiel einer unendlich grossen Grösse. Als einer Grösse, sage ich; freilich aber nicht als Beispiel einer unendlich grossen Zahl; denn eine Zahl ist diese unendlich grosse Vielheit allerdings nicht zu nennen, wie wir nur eben im vorigen §. bemerkten. Wenn wir dagegen die Grösse, die in Beziehung auf eine zur

Einheit angenommene andere unendlich gross erscheint, nun selbst zur Einheit machen und die vorhin als Einheit betrachtete mit ihr messen: so wird sich diese jetzt als unendlich klein darstellen.

§. 17.

Eine höchst wichtige Gattung unendlich grosser Grössen, die gleichfalls noch nicht in das Gebiet des Wirklichen gehören, obwohl sie Bestimmungen am Wirklichen sein können, sind Zeit und Raum. Weder die Zeit noch der Raum ist etwas Wirkliches; denn sie sind weder Substanzen, noch auch Beschaffenheiten an den Substanzen; sondern sie treten bloss als Bestimmungen an allen unvollkommenen (begränzten, endlichen oder — was auf dasselbe hinausläuft — abhängigen, geschaffenen) Substanzen auf; indem sich jede der letzteren fortwährend in einer gewissen Zeit und auch in einem gewissen Raume befinden muss; dergestalt, dass jede einfache Substanz zu jedem Zeitpuncte, d. h. in jedem einfachen Theile der Zeit, sich in irgend einem einfachen Theile des Raumes, d. h. in irgend einem Puncte desselben, aufhalten muss. In der Zeit nun sowohl als auch im Raume ist die Menge der einfachen Theile oder Puncte, aus denen jene und dieser bestehen, unendlich. Ja nicht nur die Menge der einfachen Theile, aus denen die ganze Zeit und der ganze Raum zusammengesetzt ist, d. h. die Menge der Zeit- und Raumpuncte, welche es überhaupt gibt, ist unendlich gross; sondern schon die Menge der Zeitpuncte, die zwischen je zwei einander auch noch so nahestehenden Zeitpunkten α und β, ingleichen die Menge der Raumpuncte, die zwischen je zwei einander auch noch so nahestehenden Raumpuncten a und b liegen, ist unendlich. In eine Vertheidigung dieser Sätze brauche ich mich um so weniger einzulassen, da es kaum irgend einen Mathematiker gibt, der, falls er nur nicht jedes Unendliche überhaupt läugnet, sie uns nicht zugestände. —

Die Gegner aller Unendlichkeit aber retten sich, um das hier so klar vorliegende Unendliche nicht zugestehen zu müssen, hinter den Vorwand, „dass wir der Puncte in Zeit und Raum „freilich wohl immer mehrere, als wir uns schon gedacht, „hinzudenken können, dass aber die Menge derer, die es „in Wirklichkeit gibt, doch stets nur eine endliche bleibt.“ Darauf entgegne ich aber, dass weder die Zeit noch der Raum, somit auch weder die einfachen Theile der Zeit, noch jene des Raumes etwas Wirkliches sind; dass es somit ungereimt sei, von einer endlichen Menge derselben, die in der Wirklichkeit bestehen, zu reden; noch ungereimter aber, sich vorzustellen, dass diese Theile erst durch unser Denken ihre Wirklichkeit erhalten. Denn daraus würde folgen, dass die Beschaffenheiten der Zeit sowohl als jene des Raumes von unserem Denken oder Fürwahrhalten abhängen, und dass somit das Verhältniss des Durchmessers zum Umfange des Kreises rational war, so lange wir aus Irrthum dafür hielten, es wäre rational, und dass der Raum alle diejenigen Eigenschaften, die wir erst in der Folgezeit kennen lernen werden, auch dann erst annehmen werde! — Berichtigen aber die Gegner den obigen Ausdruck dahin, dass nur ein Denken, welches der Wahrheit gemäss ist, die wahren Eigenschaften der Zeit und des Raumes bestimme: so sagen sie etwas ganz Tautologisches, dass nämmlich das, was wahr ist, wahr sei; woraus gewiss nicht das Geringste gegen die von uns behauptete Unendlichkeit der Zeit und des Raumes geschlossen werden kann. Es ist somit jedenfalls abgeschmackt, zu sagen, dass Zeit und Raum nur soviel Puncte enthielten, als wir uns eben denken.

§. 18.

Wiewohl eine jede Grösse, überhaupt jeder Gegenstand, der uns in irgend einer Beziehung für unendlich gelten soll, sich in eben dieser Beziehung muss betrachten lassen, als ein aus einer unendlichen Menge von Theilen bestehendes Ganzes:

so gilt doch nicht umgekehrt, dass jede Grösse, welche wir als die Summe einer unendlichen Menge anderer, die alle endlich sind, betrachten, selbst eine unendliche sein müsse. So wird z. B. allgemein anerkannt, dass die irrationalen Grössen, wie $\sqrt{2}$, in Bezug auf die bei ihnen zu Grunde liegende Einheit endliche Grössen sind, obgleich sie angesehen werden können als zusammengesetzt aus einer unendlichen Menge von Brüchen von der Form $\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots$, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; eben so, dass die Summe der unendlichen Reihe Summanden von der Form: $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf. $= \frac{a}{1-e}$ der endlichen Grösse $\frac{a}{1-e}$ gleichkomme, so oft $e < 1$ ist*). In der Behauptung

---

*) Da der gewöhnliche Beweis für die Summirung dieser Reihe nicht völlig strenge scheint, sei es erlaubt, bei dieser Gelegenheit folgenden anzudeuten. Nehmen wir $a = 1$ und e positiv an (weil die Anwendung auf andere Fälle sich von selbst ergibt), und setzen wir als symbolische Gleichung

(1) $S = 1 + e + e^2 + \ldots$ in inf.

so ist wenigstens so viel gewiss, dass S eine positive, gleichviel ob endliche oder unendlich grosse, Grösse bezeichne. — Es ist aber auch für jeden beliebigen ganzzähligen Werth von n

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

oder auch

(2) $S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + \ldots$ in inf.

wofür wir auch

(3) $S = \frac{1-e^n}{1-e} + \overset{1}{P}$

schreiben können, wenn wir den Werth der unendlichen Reihe $e^n + e^{n+1} + \ldots$ in inf. durch $\overset{1}{P}$ bezeichnen; wobei wir wenigstens dies sicher wissen, dass $\overset{1}{P}$ eine von e und n abhängige, messbare oder unalso, dass eine Summe von unendlich vielen endlichen Grössen

---

messbare, jedenfalls aber positive Grösse bezeichnet. Dieselbe unendliche Reihe können wir aber auch auf folgende Art darstellen:

$$e^n + e^{n+1} + \dots \text{ in inf.} = e^n[1 + e + \dots \text{ in inf.}]$$

Hier hat nun die aus unendlich vielen Gliedern bestehende Summe in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichung, nämlich

$$[1 + e + e^2 + \dots\dots \text{ in inf.}]$$

zwar ganz das Aussehen der in der symbolischen Gleichung (1) $= S$ gesetzten Reihe, ist aber gleichwohl mit ihr nicht für einerlei zu halten; indem die Menge der Summanden hier und in (1), obwohl beidemal unendlich, doch nicht dieselbe ist; sondern hier unstreitig um n Glieder weniger hat, als in (1).

Wir können also mit voller Zuversicht nur die Gleichung $[1 + e + e^2 + \dots$ in inf.$] = S - \overset{2}{P}$ ansetzen, wobei wir annehmen dürfen, dass $\overset{1}{P}$ jedenfalls eine von n abhängige, stets positive Grösse bezeichne. Sonach erhalten wir

$$(4)\quad S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n\left[S - \overset{2}{P}\right] \text{ oder}$$

$$S\left[1 - e^n\right] = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n\,\overset{2}{P}, \text{ oder endlich}$$

$$(5)\quad S = \frac{1-e}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n}\cdot\overset{2}{P}$$

Die beiden Gleichungen (3) und (5) geben durch Verbindung

$$\frac{-e^n}{1-e} + \overset{1}{P} = \frac{-e^n}{1-e^n}\cdot\overset{2}{P}$$

oder

$$\overset{1}{P} + \frac{e^n}{1-e^n}\cdot\overset{2}{P} = + \frac{e^n}{1-e^n}$$

woraus zu ersehen, dass, wenn wir n beliebig gross annehmen und dadurch den Werth von $\frac{e^n}{1-e^n}$ unter jede beliebige, auch noch so selbst doch nur eine endliche Grösse gebe, liegt sicher nichts Widersprechendes, weil sie sonst nicht als wahr sich erweisen liesse. Das Paradoxe aber, das man in ihr gewahren dürfte, gehet nur daraus hervor, dass man vergisst, wie die hier zu addirenden Glieder immer kleiner und kleiner werden. Denn dass eine Summe von Addenden, deren jeder folgende z. B. die Hälfte von dem nächstvorhergehenden beträgt, nie mehr betragen könne, als das Doppelte des ersten, kann wohl Niemand befremden, indem bei jedem auch noch so späten Gliede dieser Reihe zu jenem Doppelten immer gerade so viel noch mangelt, als dieses letzte Glied beträgt.

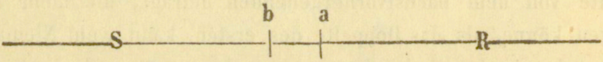
§. 19.

Schon bei den bisher betrachteten Beispielen des Unendlichen konnte uns nicht entgehen, dass nicht alle unendliche Mengen *in Hinsicht auf ihre Vielheit einder gleich* zu achten seien; sondern lass manche derselben *grösser* (oder *kleiner*) als eine andere sei, d. h. die andere als einen Theil in sich schliesse (eder im Gegentheile sich selbst in der andern als blosser Theil befinde). Auch dieses ist eine Behauptung, die Vielen *paradox* klingt. Und freilich Alle, die das Unendliche als etwas Solches erklären, das keiner weiteren Vermehrung fähig ist, müssen es nicht nur paradox, sondern geradezu *widersprechend* finden, dass Ein Unendliches grösser sei als ein anderes. Allein wir haben schon oben gefunden, dass diese Ansicht auf einem Begriffe von dem Unendlichen beruhe, der mit dem Sprachgebrauche des Wortes

---

kleine Grösse $\frac{1}{N}$ herabdrücken, auch jede der Grössen $\overset{1}{P}$ und $\frac{e^n}{1-e^n}.\overset{2}{P}$ für sich unter jeden beliebigen Werth herabsinken müsse. Ist aber Dieses, so belehrt jede der beiden Gleichungen (3) und (5), dass, weil doch S bei einerlei e nur einen unveränderlichen Werth haben, somit nicht von *n* abhängen kann, $S = \frac{1}{1-e}$ sei.

gar nicht übereinstimmt. Nach unserer nicht nur dem Sprachgebrauche, sondern auch dem Zwecke der Wissenschaft entsprechenden Erklärung kann Niemand etwas Widerstreitendes, ja nur Auffallendes in dem Gedanken finden, dass Eine unendliche Menge grösser als eine andere sein soll. Wem muss es z. B. nicht einleuchten, dass die Länge der



nach der Richtung a R unbegränzt fortlaufenden Geraden eine unendliche sei? dass aber die von dem Puncte b aus nach derselben Richtung hinlaufende Gerade b R noch um das Stück b a grösser, denn a R zu nennen sei? und dass die nach beiden Seiten a R und a S hin unbegränzt fortlaufende Gerade um eine Grösse, die selbst noch unendlich ist, grösser zu nennen sei? u. s. w.

§. 20.

Uebergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, *wenn beide unendlich sind*, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachtheil für die Erkenntniss mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, dass es sehr nöthig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zu einander stehen, dass es *einerseits* möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch *andrerseits* möglich, dass die eine dieser Mengen die andere als einen blossen **Theil** in sich fasst, so dass die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich d. h. als Einheiten betrachten, die **mannigfaltigsten Verhältnisse** zu einander haben.

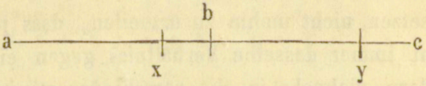
Den Beweis dieser Behauptung werde ich durch zwei Beispiele führen, in welchen das Gesagte unwidersprechlich stattfindet.

1. Nehmen wir zwei beliebige (abstracte) Grössen, z. B. 5 und 12: so leuchtet ein, dass die Menge der Grössen, welche es zwischen Null und 5 gibt (oder die kleiner als 5 sind), ingleichen auch die Menge der Grössen, die kleiner als 12 sind, unendlich sei; und eben so gewiss ist die letzte Menge für grösser als die erste zu erklären, da diese ja unwidersprechlich nur ein Theil von jener ist. Wir können sogar, wenn wir an die Stelle der Grössen 5 und 12 was immer für andere setzen, nicht umhin zu urtheilen, dass jene beiden Mengen nicht immer dasselbe Verhältniss gegen einander behalten, sondern vielmehr in die verschiedenartigsten Verhältnisse treten. Allein nicht minder wahr als alles Dieses ist auch Nachstehendes: Wenn x was immer für eine zwischen Null und 5 gelegene Grösse bezeichnet, und wir bestimmen das Verhältniss zwischen x und y durch die Gleichung

$$5y = 12x;$$

so ist auch y eine zwischen Null und 12 liegende Grösse; und umgekehrt, so oft y zwischen Null und 12 liegt, so liegt x zwischen Null und 5. Auch folgt aus jener Gleichung, dass zu jedem Werthe von x nur Ein Werth von y, und umgekehrt gehöre. Aus diesem Beidem ist aber klar, dass es zu jedem in der Menge der zwischen 0 und 5 liegenden Grössen $= x$ eine in der Menge der zwischen 0 und 12 liegenden Grössen $= y$ gebe, die sich mit jener zu einem Paare verbinden lässt, mit dem Erfolge, dass nicht ein einziges der Dinge, aus denen diese beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt.

2. Das zweite Beispiel werde von einem räumlichen Gegenstande entlehnt. Wer es schon weiss, dass die Beschaffenheiten des Raumes auf jene der Zeit, und die Beschaffenheiten der Zeit auf jene der abstracten Zahlen und Grössen sich gründen, brauchte freilich nicht erst aus einem Beispiele zu ersehen, dass es dergleichen unendliche Mengen, wie wir so eben unter den Grössen überhaupt gefunden, auch in der Zeit und in dem Raume gebe. Doch ist es wegen der richtigen Anwendung, die wir von unserem Satze in der Folge zu machen haben, nöthig, wenigstens Einen Fall, wo solche Mengen vorhanden sind, im Einzelnen zu betrachten. Es seien also *a*, *b*, *c*, drei beliebige Puncte in einer Geraden, und das Verhältniss der Entfernungen $ab : ac$ ein ganz beliebiges, doch so, dass ac die grössere von beiden bezeichne. Dann wird, obgleich



die Mengen der Puncte, welche in den ab und ac liegen, beide unendlich sind, dennoch die Menge der Puncte in ac jene der Puncte in ab übertreffen, weil in der ac nebst allen Puncten der ab auch noch alle der bc liegen, die in ab nicht anzutreffen sind. Ja wir können sogar nicht umhin, wenn das Verhältniss der Entfernungen $ab : ac$ beliebig abgeändert wird, zu urtheilen, dass auch das Verhältniss dieser zwei Mengen ein sehr verschiedenes sein werde. Gleichwohl gilt auch von diesen zwei Mengen dasselbe, was vorhin von den zwei Mengen der Grossen, die zwischen Null und 5 und zwischen 0 und 12 liegen, in Hinsicht auf die Paare, welche sich aus je einem Dinge der einen und je einem der andern Menge bilden lassen, erwiesen wurde. Denn sei x irgend ein Punct in der ab: so wird, wenn wir in der Richtung ax den Punct y so nehmen, dass das Verhältniss

$$ab : ac = ax : ay$$

bestehe, auch y ein Punct in ac sein. Und wenn umgekehrt

y ein Punct in ac ist, wird x, wenn wir nur ax aus ay nach derselben Gleichung bestimmen, ein Punct der ab sein. Auch wird ein jedes andere x ein anderes y und umgekehrt ein jedes andere y ein anderes x bestimmen. Aus diesen beiden Wahrheiten aber ist abermals zu ersehen, dass sich zu jedem Puncte der ab Ein Punct der ac, und zu jedem der ac Ein Punct der ab auswählen lasse, mit dem Erfolge, dass von den Paaren, die wir aus je zwei solchen Puncten bilden, behauptet werden kann, es sei kein einziger Punct weder in der Menge der Puncte von ab, noch in der Menge der Puncte von ac, der nicht in Einem dieser Paare erschiene, und auch kein einziger, der zwei oder mehrmal daselbst erschiene.

§. 21.

Bloss aus dem Grunde also, weil zwei Mengen A und B in einem solchen Verhältnisse zu einander stehen, dass wir zu jedem in der Einen A befindlichen Theile a, nach einer gewissen Regel verfahrend, auch einen in B befindlichen Theil b mit dem Erfolge aussuchen können, dass die sämmtlichen Paare $(a + b)$, die wir so bilden, jedes in A oder B befindliche Ding enthalten und jedes nur einmal enthalten, — bloss aus diesem Umstande ist es — so sehen wir — noch keineswegs erlaubt zu schliessen, dass diese beiden Mengen, wenn sie unendlich sind, in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Theile (d. h. wenn wir von allen Verschiedenheiten derselben absehen) einander gleich seien; sondern sie können trotz jenem Verhältnisse zwischen ihnen, das für sich selbst allerdings beiderseits gleich ist, ein Verhältniss der Ungleichheit in ihren Vielheiten haben, so dass die eine derselben sich als ein Ganzes, davon die andere ein Theil, herausstellen kann. Auf eine Gleichheit dieser Vielheiten wird erst geschlossen werden dürfen, wenn irgend ein anderer Grund noch dazukommt, wie etwa, dass beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe, z. B. eine ganz gleiche Entstehungsweise haben.

§. 22.

Das Paradoxe, das — wie ich gar nicht in Abrede stelle — diesen Behauptungen anklebt, geht einzig aus dem Umstande hervor, dass jenes gegenseitige Verhältniss, welches wir an den zwei mit einander verglichenen Mengen finden, bestehend darin, dass wir die Theile derselben mit dem schon mehrmal erwähnten Erfolge paarweise zusammenstellen können, in jedem Falle, wo diese Mengen endlich sind, allerdings hinreicht, um sie in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Theile für völlig gleich zu erklären. Zwei endliche Mengen nämlich, wenn sie von einer solchen Beschaffenheit sind, dass wir zu jedem Dinge *a* der einen, eines der anderen *b* auffinden und zu einem Paare vereinigen können, mit dem Erfolge, dass in keiner der beiden Mengen ein Ding zurückbleibt, für das sich kein entsprechendes in der anderen vorfände, und dass es auch keines gibt, das in zwei oder mehreren Paaren erschiene, sind ihrer Vielheit nach einander immer gleich. Es gewinnt also den Anschein, dass dieses auch der Fall sein sollte, wenn diese Mengen, statt endlich, unendlich sind.

So scheint es, sage ich; aber bei einer näheren Betrachtung zeigt sich, dass es keineswegs so zu sein brauche, indem der Grund, warum es bei allen endlichen Mengen eintrifft, nur eben in ihrer Endlichkeit liegt, bei den unendlichen also wegfällt. Sind nämlich beide Mengen *A* und *B* endlich, oder (denn auch schon dieses genügt) wissen wir nur von der einen *A*, dass sie endlich sei, und sehen wir, um beide Mengen jetzt nur in Hinsicht auf ihre Vielheiten zu betrachten, von allem Unterschiede zwischen den Dingen, aus denen sie bestehen, ab: so müssen wir, indem wir irgend ein beliebiges Ding in der Menge *A* durch 1, irgend ein anderes durch 2 bezeichnen u. s. w. dergestalt, dass wir jedem folgenden immer die Zahl der Dinge, die wir bisher betrachtet haben (dasselbe mit dazugenommen), zu seiner Bezeichnung ertheilen, irgend einmal bei einem Dinge in *A* anlangen, nach dessen Bezeichnung keines mehr übrig ist, welches noch unbezeichnet wäre. Dies unmittelbar zufolge des Begriffes einer endlichen oder zählbaren Vielheit. Erhielt nun dieses so eben besprochene Letzte in A die Zahl n zu seiner Bezeichnung: so ist die Anzahl der Dinge in $A = n$. Weil nun zu jedem der Dinge in A eines in B zu finden sein soll, das sich mit ihm in ein Paar vereinigen lässt: so muss, wenn wir ein jedes der Dinge aus B mit eben dem Zeichen bezeichnen, welches dasjenige aus A an sich hat, mit dem es zu einem Paare vereiniget wird, sich finden, dass es der Dinge in B, die wir auf solche Weise verbraucht haben, gleichfalls n gibt; indem ein jedes derselben ein Zeichen erhielt, das zu erkennen gibt, wie viele wir bisher verbraucht. Somit erhellet, dass es der Dinge in B sicher nicht weniger gibt als n; denn diese Zahl führt Eines (dasjenige, was wir zuletzt gebrauchten) wirklich. Aber es gibt derselben auch nicht mehr; denn gäbe es nur noch ein einziges über die bisher verbrauchten, so gäbe es zu diesem keines in A, mit dem es zu einem Paare könnte vereiniget werden; was der Voraussetzung widerspricht. Demnach ist die Zahl der Dinge in B weder kleiner noch grösser als n, also $= n$. Beide Mengen haben somit eine und dieselbe oder wie man auch sprechen kann, die gleiche Vielheit. Dieser Schlusssatz fällt offenbar weg, sobald die Menge der Dinge in A eine unendliche ist; denn nun gelangen nicht nur wir Zählenden nie an ein Letztes in A, sondern es gibt, kraft der Erklärung einer unendlichen Menge, an und für sich kein solches letztes Ding in A, d. h. so viele man auch bereits bezeichnet habe, so gibt es immer noch andere zu bezeichnen; daher entfällt denn auch, trotz dem, dass es in der Menge der B gleichfalls an Dingen nie fehlt, welche mit denen in A zu neuen und immer neuen Paaren vereiniget werden können, doch aller Grund zu schliessen, dass die Vielheit beider Mengen eine und dieselbe sei.

§. 23.

Das nun Gesagte zeigt wohl, dass der **Grund**, der die nothwendige Gleichheit endlicher Mengen bewirkt, sobald das mehr besprochene Verhältniss zwischen denselben statt hat, **bei den unendlichen Mengen wegfällt**; es zeigt uns aber noch nicht, wie und wodurch bei letzteren oft eine Ungleichheit herbeigeführt werde. Dies wird uns erst aus Betrachtung der angeführten Beispiele ersichtlich. Diese lehren uns nämlich, dass die aus den zwei zu vergleichenden Mengen genommenen Theile a und b, die wir zu einem Paare $(a + b)$ verbinden, **in ihren Mengen nicht ganz in derselben Weise erscheinen.** Denn wenn die Theile a' und b' noch ein zweites Paar bilden, und wir vergleichen die Verhältnisse, in welchen a und a' in der Menge A, b und b' aber in der Menge B erscheinen, untereinander: so zeigt sich alsbald, dass sie verschieden sind. Heben wir (in dem ersten Beispiele) aus der Menge der Grössen, die zwischen 0 und 5 liegen, ganz nach Belieben zwei, etwa die Grössen 3 und 4 hervor: so sind die ihnen zugehörigen (mit ihnen Paare bildenden) in B offenbar

$$\frac{12}{5} \cdot 3 \text{ und } \frac{12}{5} \cdot 4 \text{ d. i. } 7\tfrac{1}{5} \text{ und } 9\tfrac{3}{5}.$$

Verstehen wir nun (wie wir sollen) unter dem **Verhältnisse** zwischen zwei Dingen den Inbegriff **aller** an ihrem Vereine sich kundgebender Beschaffenheiten, so dürfen wir an dem Verhältnisse, in welchem die Theile 3 und 4 in der einen, und $7\frac{1}{5}$ und $9\frac{3}{5}$ in der anderen Menge zu einander stehen, nicht etwa einseitiger Weise bloss dasjenige Verhältniss, das man das **geometrische** zu nennen pflegt, beachten, sondern auf alles hiezu Gehörige sehen, namentlich also auch darauf, dass der **arithmetische** Unterschied zwischen den Grössen 3 und 4 ein ganz anderer sei, als zwischen den Grössen $7\frac{1}{5}$ und $9\frac{3}{5}$; indem jener $= 1$, diese $= 2\frac{2}{5}$ ist. Obwohl also jede Grösse in A oder B mit einer und nur einer einzigen in B oder A zu einem Paare sich vereinigen lässt: so ist doch die

Menge der Grössen in *B* eine andere (grössere) als in *A*, weil auch der Abstand, welchen je zwei solcher Grössen in *B* von einander haben, ein anderer (grösserer) ist, als der Abstand, welcher die zwei ihnen zugehörigen in *A* von einander trennt. Und hieraus folgt natürlich, dass je zwei dieser Grössen in *B* eine andere (grössere) Menge von solchen Grössen noch zwischen sich haben, als es in *A* der Fall ist; und somit ist kein Wunder, dass auch die ganze Menge der Grössen in *B* eine andere (grössere) ist, als in *A*. — Ganz ähnlich verhält es sich in dem zweiten Beispiele: daher wir über dasselbe nichts weiter sagen wollen, als dass die Puncte in *ab*, die mit den Puncten in *ac* in Paare zusammengedacht worden sind, einander alle näher stehen, als die ihnen zugehörigen in *ac*; indem der Abstand je zweier dort zu dem Abstande je zweier hier sich immer wie $ab : ac$ verhält.

§. 24.

Dürfen wir nun den Satz des §. 20 durch das Bisherige als zur Genüge erwiesen und erläutert ansehen: so ergibt sich als eine der nächsten Folgerungen aus demselben, dass wir zwei Summen von Grössen, welche einander paarweise (d. h. je eine aus der einen mit je einer aus der anderen) gleich sind, wenn ihre Menge unendlich ist, nicht sofort schon einander gleichsetzen dürfen; es sei denn, dass wir uns erst überzeugt hätten, dass auch die unendliche Vielheit dieser Grössen in beiden Summen die nämliche sei. Dass die Summanden ihre Summe bestimmen, und dass somit gleiche Summanden auch gleiche Summen geben, ist wohl ganz unstreitig und gilt nicht nur, wenn die Menge dieser Summanden endlich, sondern auch, wenn sie unendlich ist. Nur muss, weil es verschiedene unendliche Mengen gibt, im letzteren Falle auch erwiesen sein, dass die unendliche Menge dieser Summanden in der Einen Summe genau die nämliche wie in der anderen sei. Dies aber schliessen zu dürfen, ist es nach unserem Satze keineswegs schon genug, wenn sich auf irgend eine Weise zu jedem in der Einen Summe befindlichen Gliede ein ihm gleiches auch in der andern ausfindig machen lässt; sondern dies wird mit Sicherheit erst dann gefolgert werden können, wenn beide Mengen gleiche Bestimmungsgründe haben. In welche Ungereimtheiten die Rechnung mit dem Unendlichen verwickle, wenn man dies übersieht, werden wir in der Folge aus manchem Beispiele ersehen.

§. 25.

Ich komme nun zu der Behauptung, dass es ein Unendliches nicht bloss unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, sondern auch auf dem Gebiete der Wirklichkeit selbst gebe. Wer immer nur, es sei durch eine Reihe von Schlüssen aus reinen Begriffswahrheiten, oder auf sonst eine andere Weise, zu der hochwichtigen Ueberzeugung gelangt ist, dass ein Gott sei, ein Wesen, welches den Grund seines Seins in keinem anderen hat, und eben deshalb ein allvollkommenes ist, d. h. alle Vollkommenheiten und Kräfte, welche nur neben einander vorhanden sein können, und jede derselben in jenem höchsten Grade, in welchem sie nur neben einander sein können, in sich vereiniget: der nimmt schon eben hiermit das Dasein eines Wesens an, welches in mehr als Einem Betrachte, in seinem Wissen, in seinem Wollen, in seinem Wirken nach Aussen (in seiner Macht) Unendlichkeit hat, unendlich Vieles (nämlich das All der Wahrheiten) weiss, unendlich Vieles (nämlich die Summe alles nur an sich möglichen Guten) will, und Alles, was es will, durch seine Kraft, nach Aussen zu wirken, in Wirklichkeit setzt. Aus dieser letzteren Eigenschaft Gottes ergibt sich die weitere Folge, dass es auch ausser ihm Wesen, nämlich geschaffene gibt, die wir im Gegensatze zu ihm nur endliche Wesen nennen; an denen sich aber dennoch manches Unendliche nachweisen lässt. Denn schon die Menge dieser Wesen muss eine unendliche sein; ingleichen die Menge der Zustände, die jedes einzelne dieser Wesen während einer auch noch so kurzen Zeit erfährt, muss (weil jede solche Zeit der Augenblicke unendlich viele enthält) unendlich gross sein u. s. w. Auch auf dem Gebiete der Wirklichkeit begegnen wir also überall einer Unendlichkeit.

§. 26.

Doch dieses zuzugestehen weigern sich selbst mehrere derjenigen Gelehrten, welche bei Dingen, die keine Wirklichkeit haben (wie bei den blossen Sätzen und Wahrheiten an sich), eine Unendlichkeit nicht abläugnen zu können einsehen. Denn ein Unendliches sogar auf dem Gebiete der Wirklichkeit zuzulassen, das, meinen sie, werde durch den uralten Grundsatz, dass alles Wirkliche eine durchgängige Bestimmtheit haben muss, verboten. Allein ich glaube, schon in der Wissenschaftslehre (Bd. I. §. 45) gezeigt zu haben, dass dieser Grundsatz in eben dem Sinne, in dem er von allen wirklichen Dingen gilt, auch von den unwirklichen gelte. Ueberall nämlich gilt er bloss in dem Sinne, dass jedem Gegenstande (jedem beliebigen Etwas) von je zwei widersprechenden Beschaffenheiten die Eine zukomme, die andere abgesprochen werden müsse. Wäre es demnach gegründet, dass wir durch die Annahme einer Unendlichkeit bei Dingen, die Wirklichkeit haben, gegen diesen Grundsatz verstossen: so dürften wir auch bei den unwirklichen Objecten unseres Nachdenkens von keiner Unendlichkeit sprechen, also nicht einmal eine unendliche Menge von Wahrheiten an sich oder von blossen Zahlen zulassen. Doch wir verstossen gegen den angezogenen Grundsatz dadurch allein, dass wir etwas für unendlich erklären, noch gar nicht. Wir sagen da nur, es gebe an diesem Gegenstande in einem gewissen Betrachte eine Vielheit von Theilen, die grösser als jede beliebige

Zahl ist; also wohl allerdings eine Vielheit, die sich durch eine blosse Zahl nicht bestimmen lässt. Daraus folgt aber noch gar nicht, dass diese Vielheit etwas auf keine Art zu Bestimmendes sei; folgt durchaus nicht, dass es auch nur ein einziges Paar einander contradictorisch entgegenstehender Beschaffenheiten *b* und Nicht-*b* gebe, deren beide ihr müssten abgesprochen werden. Was keine Farbe hat, z. B. ein Satz, der lässt sich freilich nicht durch die Angabe seiner Farbe; was keinen Ton von sich gibt, nicht durch die Angabe seines Tones bestimmen u. s. w. Aber deshalb sind dergleichen Dinge noch gar nicht unbestimmbar und machen keine Ausnahme von jenem Grundsatze, dass von den beiden Prädicaten *b* oder Nicht-*b* (blau oder nicht-blau, wohllautend oder nicht wohllautend u. s. w.), wenn wir sie nur so auslegen, wie wir es müssen, damit sie contradictorisch bleiben, jedem Dinge eines derselben zukommt. Ganz in der gleichen Weise, wie Nichtblau oder Nichtwohlriechend eine Bestimmung (freilich nur eine sehr weite) des pythagoräischen Lehrsatzes ist, ist auch die blosse Angabe, dass die Menge der Puncte zwischen *m* und *n* unendlich sei, Eine von den Bestimmungen dieser Menge. Und es bedarf oft gar nicht vieler Angaben, um eine dergleichen unendliche Menge von Dingen vollständig d. h. so zu bestimmen, dass alle ihre Beschaffenheiten bloss aus den etlichen, die man so eben angab, schon von selbst folgen. So haben wir die so eben erwähnte unendliche Menge von Puncten zwischen *m* und *n* schon auf das Vollkommenste bestimmt, sobald wir nur die zwei Puncte *m* und *n* selbst (etwa durch eine auf sie sich beziehende Anschauung) bestimmen. Denn dann ist ja bloss durch jene wenigen Worte von jedem anderen Puncte schon genau entschieden, ob er zu dieser Menge gehöre oder nicht.

§. 27.

Durfte ich in dem Bisherigen so manche Annahme eines Unendlichen gegen ungerechte Bestreiter desselben vertheidigen: so muss ich gegenwärtig mit gleicher Offenheit bekennen, dass viele Gelehrte, besonders aus der Klasse der Mathematiker, auf der entgegengesetzten Seite zu weit gegangen sind; indem sie bald ein unendlich Grosses, bald auch ein unendlich Kleines in Fällen angenommen haben, wo meiner innersten Ueberzeugung nach keines besteht.

1. Gegen die Annahme einer unendlich grossen Zeitlänge, wenn man darunter eine Zeitlänge versteht, welche entweder keinen Anfang oder kein Ende oder gar weder das Eine noch das Andere hat (also die ganze Zeit oder der Inbegriff aller Zeitpuncte überhaupt ist), habe auch ich nichts einzuwenden: wohl aber finde ich es nöthig, sich das Grössenverhältniss, das eine zwischen zwei Zeitpuncten gelegene Entfernung oder Zeitlänge zu jeder anderen zwischen zwei Zeitpuncten gelegenen Entfernung oder Zeitlänge hat, als ein bloss endliches, durch blosse Begriffe völlig bestimmbares Grössenverhältniss zu denken, also nie eine durch Anfang und Ende begränzte Zeitdauer als unendlichemal grösser oder kleiner denn eine andere dergleichen Zeitdauer vorauszusetzen. Gerade dies aber thun bekanntlich gar viele Mathematiker, indem sie nicht nur von unendlich grossen Zeiträumen, die gleichwohl von beiden Seiten begränzt sein sollen, sondern noch öfterer von unendlich kleinen Zeittheilen sprechen, im Vergleiche mit denen dann jede endliche Zeitlänge, z. B. einer Secunde, schon eben darum als unendlich gross zugestanden werden müsste.

2. Ein Aehnliches gilt von den Entfernungen zwischen je zweien Puncten im Raume, die meiner Ansicht nach immer in einem bloss endlichen (durch reine Begriffe völlig bestimmbaren) Verhältnisse zu einander stehen können, während nichts gewöhnlicher bei unseren Mathema-

tikern ist, als von unendlich grossen und unendlich kleinen Entfernungen zu reden.

3. So ist es endlich auch mit den in der Metaphysik sowohl als Physik anzunehmenden Kräften im Weltall, deren keine wir als unendlichemal grösser oder kleiner als eine andere, wohl aber alle in einem durch blosse Begriffe völlig bestimmbaren Verhältnisse zu jeder anderen voraussetzen müssen; wie oft man sich auch das Gegentheil zu thun erlaubt. Die Gründe, aus denen ich dies Alles behaupte, werde ich hier allerdings Niemandem ganz deutlich zu machen vermögen, der die Begriffe, welche ich mit den Worten: Anschauung und Begriff, Ableitbarkeit eines Satzes aus anderen, objective Abfolge einer Wahrheit aus anderen Wahrheiten u. m. a. verbinde, endlich auch die Erklärungen von Zeit und Raum noch gar nicht kennt. Wer jedoch wenigstens die beiden Abhandlungen: „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte"*), und „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes"**) gelesen, dürfte nachstehenden Beweis nicht völlig unverständlich finden.

Aus den Erklärungen der Zeit und des Raumes ergibt sich unmittelbar, dass alle abhängigen (d. h. geschaffenen) Substanzen fortwährend in gegenseitiger Einwirkung auf einander stehen; ingleichen, dass es verstattet sei, von je zwei Zeitpuncten α und β, wie nahe oder ferne sie auch einander stehen mögen, den Zustand der Welt in dem früheren α als eine Ursache und den Zustand der Welt in dem späteren β als eine (wenigstens mittelbare) Wirkung zu betrachten, sofern wir nur noch die in der Zwischenzeit $\alpha\beta$ etwa stattgefundenen unmittelbaren Einwirkungen Gottes mit zu der Ursache rechnen. Hieraus folgt weiter, dass aus der Angabe der

---

*) Prag 1842. In Commission bei Kronberger & Rziwnas.

**) Prag 1843. In Commission bei Kronberger & Rziwnas.

beiden Zeitpuncte α und β, aus der Angabe der sämmtlichen Kräfte, welche die geschaffenen Substanzen in dem Zeitpuncte α gehabt, aus der Angabe der Orte, wo eine jede sich befunden, endlich aus Angabe der göttlichen Einwirkungen, welche die eine oder die andere jener Substanzen innerhalb $\alpha\beta$ erfuhr, — sowohl die Kräfte, die eben diese Substanzen in dem Zeitpuncte β erhielten, als auch die Orte, die ihnen zu Theil wurden, in der Art ableitbar seien, wie eine Wirkung (gleichviel ob eine mittel- oder unmittelbare) aus ihrer vollständigen Ursache ableitbar sein muss. Dies nun wieder erheischt, dass alle Beschaffenheiten der Wirkung sich aus Beschaffenheiten ihrer Ursache ableiten lassen, vermittelst eines aus lauter reinen Begriffen zusammengesetzten Obersatzes von der Form: Jede Ursache von der Beschaffenheit u, u′, u″ ...... hat eine Wirkung von der Beschaffenheit w, w′, w″ ..... Eine leichte Folge hieraus, die wir gerade zu unserem Zwecke benöthigen, ist: Jeder Umstand an der Ursache, der für die Wirkung nicht gleichgiltig, d. h. der so geartet ist, dass die Wirkung nicht fortwährend gleich verbleibt, wie er auch immer sich ändere, muss sich durch blosse Begriffe, bei denen höchstens einige solche Anschauungen, welche auch zur Bestimmung der Wirkung erforderlich sind, zu Grunde gelegt werden, vollständig bestimmen lassen.

Nach diesen Vorausschickungen nun sind unsere oben aufgestellten Behauptungen leicht zu begründen. Denn gäbe es

1. auch nur zwei Zeitpuncte α und β, deren Entfernung von einander unendliche Male grösser oder kleiner als die Entfernung zweier anderer γ und δ wäre: so würde hieraus die Ungereimtheit hervorgehen, dass sich der Zustand der Welt, der in dem Zeitpuncte β eintreten soll, schlechterdings nicht bestimmen liesse aus jenem Zustande derselben, der in dem Zeitpuncte α stattfand, die in der Zwischenzeit eingetretenen göttlichen Einwirkungen sowohl als auch die Grösse der Zeitlänge $\alpha\beta$ dazugerechnet. Auch zur Bestimmung des Zustandes nämlich, in welchem sich die geschaffenen Wesen, ja nur

die **Grössen ihrer Kräfte** in einem einzigen Zeitpuncte α befinden, ist die Zugrundelegung einer eigenen Zeiteinheit nöthig; denn weil diese Kräfte blosse **Veränderungskräfte** sind, so kann ihre Grösse unmöglich anders als durch Berücksichtigung einer gegebenen Zeitlänge, innerhalb deren sie eine gegebene Wirkung zu Stande bringen, beurtheilet werden. Nehmen wir also (was uns verstattet sein muss) die Zeitlänge $\gamma\delta$ zu dieser Zeiteinheit an: so wird selbst in dem günstigsten Falle, wenn sich bei dieser Zeiteinheit alle Kräfte der geschaffenen Substanzen, wie sie im Zeitpuncte α bestehen, genau bestimmen liessen, und wenn auch alles Andere, was zur vollständigen Ursache des in dem Zeitpuncte β eingetretenen Weltzustandes gehört, sich ganz genau bestimmen liesse, doch die Entfernung, in welcher dieser Zeitpunct selbst von α steht, durch jene Zeiteinheit sich nicht bestimmen lassen, indem sie bloss als eine unendlich grosse oder unendlich kleine sich herausstellt. Soll also **umgekehrt** verstattet sein, jeden beliebigen Zustand der Welt (unter den schon mehrmal erwähnten Bedingungen) als Ursache von jedem beliebigen späteren zu betrachten: so darf es auch nicht zwei Zeitpuncte α und β geben, deren Entfernung von einander im Vergleiche zu der Entfernung, darin ein Paar andere γ und δ stehen, sich als unendlich gross oder klein herausstellen würde.

2. Gäbe es auch nur zwei Puncte im Raume a und b, deren Entfernung von einander sich im Vergleiche zu einem Paare anderer c und d unendlich gross oder klein erfände: so würde es zur Bestimmung des Zustandes der Welt in irgend einem Zeitpuncte α unter Anderem auch gehören, die Grösse der Kraft (etwa der Anziehung oder der Abstossung) zu bestimmen, welche die in jenem Zeitpuncte so eben in dem Orte a befindliche Substanz A auf die in dem Orte b befindliche B ausübt. Dies aber würde sich, wenn wir (wie jedenfalls erlaubt ist) die Entfernung cd zur Längeneinheit annähmen, selbst in dem günstigsten Falle, dass es bei allen übrigen Kräften gelänge, bei dieser Einen Kraft als etwas Unmögliches

erweisen. Denn wenn die Kraft der Anziehung oder Abstossung, welche die Substanz A auf eine der B sonst völlig ähnliche Substanz in zur Längeneinheit angenommener Entfernung $(=cd)$ ausübt, auch eine ganz bestimmte Grösse hätte: so wäre doch und zwar gerade darum, weil diese Grösse bestimmt ist, die Grösse der Anziehung oder Abstossung, mit welcher A auf B wirkt, unbestimmbar, wenn das Verhältniss der Entfernungen $ab:cd$, von welchem sie jedenfalls abhängt, unendlich und somit unbestimmt wäre.

3. Gäbe es endlich auch nur eine einzige Kraft k, die sich in ihrem Vergleiche mit einer anderen l als unendlich gross oder klein darböte: so würde, wenn wir den Zeitpunct, wo dies Verhältniss statt hat, durch α bezeichnen, für diesen Zeitpunct selbst in dem günstigsten Falle, dass alle übrigen Kräfte bei den zu ihrem Maasse gewählten Zeit- und Raumeinheiten sich als endlich erwiesen hätten, wo denn somit auch l eine endliche Grösse wäre, die Grösse k sich eben darum als eine unendlich grosse oder kleine, d. h. als unbestimmbar herausstellen. Hiedurch aber würde der ganze Weltzustand im Zeitpuncte α als unbestimmbar erscheinen, somit die Unmöglichkeit der Ableitung irgend eines späteren Weltzustandes, als einer durch ihn hervorgebrachten Wirkung, eintreten.

§. 28.

In dem Vorstehenden glaube ich nun die Grundregeln festgestellt zu haben, nach denen sich alle befremdend klingende Lehren, die wir noch in der Folge aufzuführen haben, beurtheilen lassen und entschieden werden muss, ob sie als Irrthümer aufgegeben oder als Sätze, die trotz ihrem Anscheine der Widersinnigkeit doch Wahrheiten sind, beibehalten werden müssen. Die Ordnung, in der wir diese Paradoxa vorführen, mag das wissenschaftliche Gebiet, welchem sie angehören, und ihre eigene grössere oder geringere Wichtigkeit bestimmen.

Die erste und umfassendste Wissenschaft, auf deren Gebiete uns Paradoxien des Unendlichen begegnen, ist — wie uns schon einige Beispiele zeigten — die allgemeine Grössenlehre, wo es an solchen selbst in der Zahlenlehre nicht fehlt. Mit diesen wollen wir also beginnen.

Schon der Begriff einer Rechnung des Unendlichen hat, ich gestehe es, den Anschein, einen Selbstwiderspruch zu enthalten. Denn etwas berechnen wollen, heisst doch, eine Bestimmung desselben durch Zahlen versuchen. Wie aber will man das Unendliche durch Zahlen zu bestimmen versuchen, — jenes Unendliche, das unserer eigenen Erklärung nach stets etwas Solches sein muss, das wir als eine aus unendlich vielen Theilen bestehende Menge, d. h. als eine Menge betrachten, die grösser als eine jede Zahl ist, die sonach unmöglich durch die Angabe einer blossen Zahl bestimmt werden kann? — Doch diese Bedenklichkeit verschwindet, wenn wir erwägen, dass eine regelrecht vorgehende Rechnung des Unendlichen nicht eine Berechnung, was eben an ihm durch keine Zahl bestimmbar ist, nämlich nicht die Berechnung der unendlichen Vielheit an sich, sondern nur eine Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem einen und dem andern Unendlichen bezwecke; eine Sache, die in gewissen Fällen allerdings ausführbar ist, wie wir durch mehrere Beispiele zeigen wollen.

§. 29.

Wer zugesteht, dass es unendliche Vielheiten und somit auch unendliche Grössen überhaupt gebe, der kann auch nicht mehr in Abrede stellen, dass es unendliche Grössen gebe, die sich durch ihre Grösse (Grossheit) selbst gar mannigfach unterscheiden. Wenn wir z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen durch

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n, n+1, \ldots \text{ in inf.}$$

darstellen: so wird die Zeichnung

$$1+2+3+4+\ldots+n+(n+1)+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

die **Summe** dieser natürlichen Zahlen; folgende Zeichnung aber

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{ in inf.}$$

in welcher die einzelnen Addendi $1^0, 2^0, 3^0 \ldots$ insgesammt blosse Einheiten vorstellen, die blosse **Menge** aller natürlichen Zahlen darbieten. Bezeichnen wir diese durch $\overset{0}{N}$, und bilden wir also die bloss symbolische Gleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots\ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{0}{N} \ldots (1),$$

und bezeichnen wir eben so die Menge der natürlichen Zahlen von $(n+1)$ durch $\overset{n}{N}$, und bilden somit die Gleichung

$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{n}{N} \ldots\ldots (2):$$

so erhalten wir durch Abzug die gewiss ganz untadelhafte Gleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n = \overset{0}{N} - \overset{n}{N} \ldots\ldots (3),$$

aus der wir also ersehen, wie zwei unendliche Grössen $\overset{0}{N}$ und $\overset{n}{N}$ zuweilen einen ganz bestimmten endlichen Unterschied haben.

Bezeichnen wir dagegen die Grösse, welche die **Summe** aller natürlichen Zahlen darbietet, durch $\overset{0}{S}$, oder setzen die bloss symbolische Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + (n+1) + \ldots \text{ in inf.} = \overset{0}{S} \ldots\ldots (4)$$

an: so werden wir wohl auf der Stelle begreifen, dass $\overset{0}{S}$ weit grösser sein müsse als $\overset{0}{N}$; aber nicht eben so leicht wird es uns gelingen, den Unterschied zwischen diesen beiden unendlichen Grössen oder auch ihr (geometrisches) **Verhältniss** zu einander auf eine genaue Art zu bestimmen. Denn wollten wir, wie es wohl Manche gethan, die Gleichung

$$\overset{0}{S} = \overset{0}{N} . \frac{(\overset{0}{N} + 1)}{2}$$

aufstellen: so hätten wir zu ihrer Rechtfertigung kaum einen anderen Grund, als weil bei jeder endlichen Menge von Gliedern die Gleichung:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

besteht, woraus zu folgen scheint, dass bei der ganzen unendlichen Menge der Zahlen, nur n in $\overset{o}{N}$ übergehe. Allein so ist es in der That nicht; weil es ja ungereimt ist, bei einer unendlichen Reihe von einem letzten Gliede desselben, das den Werth $\overset{o}{N}$ hätte, zu reden.

Die bloss symbolische Gleichung (4) inzwischen zu Grunde gelegt, wird allerdings erlaubt sein, durch successive Multiplication beider Glieder mit $\overset{o}{N}$ auch folgende Gleichungen abzuleiten:

$$1^0 . \overset{o}{N} + 2^0 . \overset{o}{N} + 3^0 \overset{o}{N} + \ldots \text{ in inf.} = (\overset{o}{N})^2$$

$$1^0 . (\overset{o}{N})^2 + 2^0 . (\overset{o}{N})^2 + 3^0 (\overset{o}{N})^2 + \ldots \text{in inf.} = (\overset{o}{N})^3 \text{ u. s. w.}$$

wodurch wir uns überzeugen, dass es auch unendliche Grössen von sogenannten höheren Ordnungen gebe, deren die eine die andere unendlichemal übertrifft. Dass es aber auch unendliche Grössen gibt, die jedes beliebige rationelle sowohl als irrationelle Verhältniss $\alpha : \beta$ zu einander haben, folgt ja schon daraus, weil, sofern $\overset{o}{N}$ nur irgend eine sich immer gleichbleibende unendliche Grösse bezeichnet, $\alpha . \overset{o}{N}$ und $\beta . \overset{o}{N}$ ein Paar gleichfalls unendliche Grössen sind, die sich wie $\alpha : \beta$ verhalten.

Nicht minder einleuchtend wird man es wohl auch finden, dass die ganze Menge (Vielheit) von Grössen, die zwischen zwei gegebenen, z. B. 7 und 8, liegen, ob sie gleich eine unendliche ist, und somit durch keine auch noch so grosse Zahl bestimmt werden kann, doch lediglich nur von der Grösse des Abstandes jener zwei Gränzgrössen von einander, d. h. von der Grösse $8-7$ abhänge und somit eine gleiche sein müsse, so oft nur dieser Abstand gleich ist. Dieses vorausgesetzt, wird es, wenn wir die Menge aller zwischen a und b liegenden Grössen durch

$$\text{Mult.}\,(b-a)$$

bezeichnen, unzählige Gleichungen von folgender Form geben:

$$\text{Mult.}\,(8-7) = \text{Mult.}\,(13-12);$$

ingleichen auch von der Form

$$\text{Mult.}\,(b-a) : \text{Mult.}\,(d-c) = b-a : d-c,$$

gegen deren Richtigkeit sich nichts Stichhaltiges einwenden lässt.

§. 30.

Und wie nun schon diese wenigen Beispiele genügend darthun, dass eine **Rechnung mit unendlich Grossem** bestehe, so auch bestehet eine mit dem **unendlich Kleinen.** Denn ist $\overset{o}{N}$ unendlich gross, so stellt ja

$$\frac{1}{\overset{o}{N}}$$

nothwendig eine Grösse vor, die unendlich klein ist, und wir werden wenigstens in der **allgemeinen** Grössenlehre keinen Grund haben, eine solche Vorstellung für durchaus gegenstandlos zu erklären. Denn um ein einziges Beispiel zu geben, wenn man die Frage aufwirft, welche Wahrscheinlichkeit es hat, dass Jemand, der eine Kugel auf das Gerathewohl abschiesst, sie dergestalt abschiessen werde, dass ihr Mittelpunct auf seinem Wege genau durch den Mittelpunct jenes auf diesem Baume hängenden Apfels hindurchgehen werde: so muss Jeder zugestehen, dass die Menge aller hier möglichen Fälle von einer gleichen oder noch geringeren Wahrscheinlichkeit unendlich sei, woraus denn folgt, dass der Grad jener Wahrscheinlichkeit eine Grösse habe $=$ oder $<$ irgend ein $\frac{1}{\infty}$. Hiermit ist aber auch schon erwiesen, dass wir der unendlich kleinen Grössen unendlich viele haben, deren die eine zur anderen jedes beliebige Verhältniss haben, namentlich auch unendlichemal grösser sein kann; daher denn auch unendlich viele Ordnungen wie unter den unendlich grossen, so eben unter den unendlich kleinen Grössen bestehen; und es wird unter Beobachtung gewisser Regeln allerdings möglich sein, gar manche richtige Gleichungen zwischen Grössen von dieser Art zu finden.

Ist es z. B. erst entschieden, dass der Werth einer veränderlichen Grösse y von einer anderen x in der Art abhange, dass zwischen beiden fortwährend die Gleichung besteht:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und verträgt es sich mit der Natur jener besonderen Gattung von Grössen, welche hier x und y bezeichnen, dass sie auch unendlich klein werden, also auch unendlich kleine Zuwächse annehmen können: so muss, wenn wir x um einen durch dx bezeichneten unendlich kleinen Theil zunehmen lassen und die Veränderung, welche dann y erfährt, durch dy bezeichnen, nothwendig auch folgende Gleichung bestehen:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a(x + dx)^3 + b(x + dx)^2 + c(x + dx) + d,$$

aus der unwidersprechlich auch die nachstehende fliesst:

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c) + (6x^2 + 3ax + b)\,dx + (4x + a)\,dx^2 + dx^3,$$

die das Verhältniss der beiden unendlich kleinen Grössen als ein nicht nur von a, b, c und x, sondern auch von dem Werthe der Veränderlichen dx selbst abhängiges darstellt.

§. 31.

Allein die meisten Mathematiker, welche sich an die Rechnung mit dem Unendlichen gewagt, gingen viel weiter, als es nach den hier aufgestellten Grundsätzen geschehen darf. Nicht nur erlaubten sie sich ohne Bedenken bald ein unendlich Grosses, bald ein unendlich Kleines bei Grössen vorauszusetzen, die ihrer Natur nach eines solchen unfähig sind (wovon erst in der Folge Beispiele angeführt werden sollen): sondern sie nahmen sich auch heraus, Grössen, welche aus der Summirung einer unendlichen Reihe hervorgehen, einander bald gleich zu setzen, bald wieder die eine als grösser oder kleiner denn die andere zu erklären, bloss weil in beiden sich Glieder, welche in einem solchen Verhältnisse der Gleichheit oder Ungleichheit stehen, paarweise aufweisen lassen, obwohl ihre Mengen offenbar ungleich waren; sie wagten es, auszusprechen, dass nicht nur jede unendlich kleine Grösse in der Summirung mit einer endlichen, oder auch jede von einer höheren Ordnung neben einer von niederer Ordnung, sondern auch jede unendlich grosse Grösse von niederer Ordnung in der Summirung neben einer von höherer Ordnung gleich einer blossen Null verschwinde; sie verfielen, um ihre auf diesen Satz gestützte Rechnungsmethode nur einigermaassen zu rechtfertigen, auf die Behauptung, dass es erlaubt sei, auch eine blosse Null als Divisor zu betrachten, und dass der Quotient

$$\frac{1}{0}$$

im Grunde nichts Anderes als eine unendlich grosse Grösse, der Quotient $\frac{0}{0}$ aber eine ganz unbestimmte Grösse bezeichne. Wir müssen nachweisen, wie falsch und irreführend diese Begriffe sind, weil sie auch heut zu Tage noch mehr oder weniger im Schwange sind.

§. 32.

Erst noch 1830 versuchte in Gergonnés *Annales de Mathématique* (T. 20. No. 12) ein mit *M. R. S.* Unterzeichneter zu beweisen, dass die bekannte unendliche Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

den Werth $\frac{a}{2}$ habe; indem er, diesen Werth $= x$ gesetzt, schliessen zu dürfen glaubte, dass

$$x = a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.} = a - (a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.})$$

und die in den Klammern eingeschlossene Reihe identisch mit der zu berechnenden, somit abermals $= x$ zu setzen sei, welches denn

$$x = a - x$$

und somit $$x = \frac{a}{2}$$ gibt.

Der Fehlschluss liegt hier nicht tief verborgen. Die Reihe in den Klammern hat offenbar nicht mehr dieselbe Gliedermenge, wie die zuerst $= x$ gesetzte; sondern ihr fehlt das erste a. Ihr Werth hätte also, falls er überhaupt angeblich wäre, durch $x - a$ bezeichnet werden müssen; was aber die identische Gleichung

$$x = a + x - a$$

gegeben hätte.

„Aber eben darin," dürfte man sagen, „liegt etwas Para-„doxes, dass diese Reihe, die doch gewiss nicht unendlich gross „ist, keinen genau bestimmbaren, messbaren Werth haben sollte, „zumal da sie durch eine in das Unendliche fortgesetzte Divi-„sion von $2 = 1 + 1$ in a hervorgehe; ein Ursprung, der ganz „für die Richtigkeit der Voraussetzung spricht, dass ihr wah-„rer Werth doch nur $\frac{a}{2}$ sei."

Ich erinnere, es sei doch eine an sich nicht unbegreifliche Sache, dass es auch G r ö s s e n a u s d r ü c k e gebe, die k e i n e w i r k l i c h e G r ö s s e bezeichnen, wie wir denn schon die Null selbst als einen solchen allgemein anerkennen und anerkennen müssen.

Eine R e i h e insonderheit, wenn wir erklären, sie nur als eine Grösse, nämlich nur als die S u m m e ihrer Glieder betrachten zu wollen, muss kraft des B e g r i f f e s einer Summe (die zu den Mengen, d. h. zu denjenigen Inbegriffen gehört, bei denen auf keine **Ordnung** ihrer Theile geachtet werden soll) von einer solchen Beschaffenheit sein, dass sie keine Veränderung in ihrem Werthe erfährt, — welche Veränderung wir auch in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder vornehmen mögen. Bei Grössen muss namentlich sein:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Dies Merkmal nun bietet uns einen klaren Beweis dar, dass die hier in Rede stehende Zeichnung:

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.}$$

kein Ausdruck einer wirklichen Grösse sei. Denn sicher würden wir an der hier vorgestellten Grösse, falls eine vorgestellt würde, nichts ändern, wenn wir jene Zeichnung so abänderten:

(1) $$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots\ldots \text{ in inf.};$$

weil hier nichts Anderes geschah, als dass je zwei unmittelbar einander folgende Glieder in Eine Theilsumme vereinigt wurden: was gewiss möglich sein muss, weil die gegebene Reihe wirklich kein **letztes** Glied haben soll. Dadurch erhalten wir aber

$$0 + 0 + 0 + \ldots\ldots \text{ in inf.},$$

was offenbar nur $= 0$ ist.

Eben so wenig kann jedoch an der Grösse, die jener Ausdruck vorstellt, falls er in Wirklichkeit eine vorstellt, sich etwas ändern, wenn wir ihn so umformen:

(2) $$a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots\ldots \text{in inf.}$$

wo wir, mit Uebergehung des ersten, je zwei der folgenden Glieder in eine Theilsumme verbinden, oder auch so:

(3) $$-a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

was man aus (1) erhält, wenn man die Glieder in jedem Paare versetzt, und mit dem so gewonnenen Ausdrucke dann dieselbe Veränderung vornimmt, durch welche (2) aus (1) hervorging. Wäre somit der gegebene Grössenausdruck **nicht gegenstandlos**, so müssten die Ausdrücke (1), (2) und (3) alle dieselbe Grösse bezeichnen; weil doch einleuchtend ist, dass die

Vorstellung einer Summe von einer und derselben Menge von Grössen nicht mehrere von einander verschiedene Grössen vorstellen kann, wie es z. B. wohl bei den Vorstellungen $\sqrt{+1}$, arc. Sin. $= \frac{1}{2}$ u. m. a. der Fall ist. Allein die hier vorliegende Grössenvorstellung:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots . \text{ in inf.}$$

müsste, wenn sie nicht durchaus gegenstandlos ist, mit demselben Rechte, mit dem wir sie etwa der Null gleichsetzen wollten (die man in uneigentlichem Sinne freilich auch eine Grösse zu nennen pflegt), auch $= + a$ und auch $= - a$ gesetzt werden; was durchaus ungereimt ist, und uns somit zu dem Schlusse berechtigt, dass wir hier eine schlechterdings gegenstandlose Vorstellung vor uns haben.

Dass die besprochene Reihe durch eine in das Unendliche fortgesetzte Division von $2 = 1 + 1$ in a zum Vorschein komme, ist wahr; alle Reihen, welche auf eine solche Art zum Vorschein kommen, können begreiflicher Weise gerade darum, weil jene Division stets einen Rest (hier abwechselnd bald $- a$ bald $+ a$) zurücklässt, den wahren Werth des Quotienten (hier $\frac{a}{2}$) höchstens nur dann angeben, wenn die durch fernere Division hervortretenden Reste kleiner als jede auch noch so kleine Grösse werden; wie dieser Fall bei der §. 18 betrachteten Reihe $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf., welche durch Division von $1 - e$ in a erzeugt wird, stattfindet, so oft $e < 1$ ist. Wenn aber, wie in dem vorliegenden Falle, $e = 1$, oder wenn gar $e > 1$ ist, wo die Reste somit nur um so höher steigen, je weiter das Geschäft des Dividirens fortsgesetzt wird, ist nichts begreiflicher, als dass der Werth der Reihe dem Quotienten $\frac{a}{1 - e}$ nicht gleichgestellt werden könne. Oder wie sollte z. B. die Reihe mit abwechselnden Vorzeichen:

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + \ldots \text{ in inf.,}$$

welche durch eine in das Unendliche fortgesetzte Division von $1+10$ in 1 entsteht, $=\frac{1}{11}$ gesetzt werden dürfen? Wer vollends wollte die aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzte Reihe

$$1+10+100+1000+\ldots \text{ in inf.}$$

dem negativen Werthe $-\frac{1}{9}$ gleichschätzen, bloss weil $\frac{1}{1-10}$ durch Entwicklung auf diese Reihe leitet? Gleichwohl nimmt solche Summirungen der vorhin erwähnte *M. R. S.* noch immer in Schutz, und will z. B. die Richtigkeit der Gleichung

$$1-2+4-8+16-32+64-128+\ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{3}$$

nur aus dem Grunde erweisen, weil ja doch

$$x = 1-2+4-8+16-32+64-\ldots$$
$$= 1-2(1-2+4-8+16-32+\ldots) = 1-2x$$

wäre; wobei abermal übersehen ist, dass die in den Klammern enthaltene Reihe gar nicht die nämliche mit der ursprünglich angenommenen sei, weil sie nicht mehr die nämliche Menge der Glieder hat. Dass auch dieser Grössenausdruck gegenstandlos sei, erhellet auf ähnliche Art, wie bei dem früher betrachteten, weil er zu widersprechenden Ergebnissen führt. Denn einerseits müsste sein:

$$1-2+4-8+16-32+64-\ldots$$
$$= 1+(-2+4)+(-8+16)+(-32+64)+\ldots$$
$$= 1+2+8+32+64+\ldots$$

andrerseits eben so gewiss:

$$=(1-2)+(4-8)+(16-32)+(64-128)+\ldots$$
$$=-1-4-16-64-\ldots$$

so dass sich also durch einen doppelten berechtigten Vorgang einmal ein unendlich grosser positiver, das andremal ein unendlich grosser negativer Werth desselben Ausdruckes ergäbe.

§. 33.

Wollen wir also in unseren Rechnungen mit dem Unendlichen nicht auf Irrwege gerathen: so dürfen wir nie uns erlauben, zwei unendlich grosse Grössen, die aus Summirung der Glieder zweier unendlicher Reihen entstanden sind, schon darum für gleich, oder die eine für grösser oder kleiner als die andere zu erklären', weil je Ein Glied in der einen je einem in der anderen Reihe entweder gleich oder grösser oder kleiner als das der letzteren ist. Wir dürfen eben so wenig die Eine Summe für die grössere erklären, bloss weil sie die sämmtlichen Glieder der andern und nebstdem noch gar viele, sogar unendlich viele Glieder (die alle positiv sind) in sich schliesst, welche der andern fehlen. Denn auch bei alle dem kann sie noch kleiner, ja unendlichemal kleiner sein als diese. Ein Beispiel liefert uns die sehr bekannte Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen, verglichen mit der Summe der ersten Potenzen dieser Zahlen. Gewiss kann Niemand in Abrede stellen, dass jedes Glied der Reihe aller Quadrate

$$\left.\begin{array}{r} 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 \\ + \ldots \text{ in inf.} = \\ 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100 \\ + \ldots \text{ in inf.} = \end{array}\right\} \overset{2}{S}$$

weil es ja gleichfalls eine natürliche Zahl ist, auch in der Reihe aller ersten Potenzen der natürlichen Zahlen

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+ \\ 13+14+15+16 \ldots \text{ in inf.} = \overset{1}{S}$$

erscheine; ingleichen dass in der letzteren Reihe $\overset{1}{S}$ nebst allen Gliedern der $\overset{2}{S}$ noch gar viele (ja unendlich viele) Glieder erscheinen, die in der Reihe $\overset{2}{S}$ fehlen, weil sie nicht eben Quadratzahlen sind. Gleichwohl ist $\overset{2}{S}$, die Summe aller Quadratzahlen, nicht etwa kleiner, sondern unstreitig grösser als $\overset{1}{S}$, die Summe der ersten Potenzen aller Zahlen. Denn erstlich ist, trotz allem Anscheine des Gegentheils, die *Gliedermenge* in beiden (noch nicht als Summe betrachteten und somit nicht in beliebige Mengen von Theilen zerlegbaren) Reihen gewiss dieselbe. Dadurch, dass wir jedes einzelne Glied der Reihe $\overset{1}{S}$ in der $\overset{2}{S}$ auf das Quadrat erheben, ändern wir bloss die Beschaffenheit (die Grösse) dieser Glieder, nicht ihre Vielheit. Ist aber die Menge der Glieder in $\overset{1}{S}$ und $\overset{2}{S}$ dieselbe: so liegt am Tage, dass $\overset{2}{S}$ viel grösser als $\overset{1}{S}$ sein müsse, indem, mit Ausnahme des *ersten* Gliedes, jedes der übrigen in $\overset{2}{S}$ entschieden grösser als das gleichvielste in $\overset{1}{S}$ ist; so zwar, dass $\overset{2}{S}$ als Grösse betrachtet das ganze $\overset{1}{S}$ als einen Theil in sich fasst, und noch einen zweiten Theil hat, der für sich selbst abermals eine unendliche Reihe von gleicher Gliederzahl mit $\overset{1}{S}$ darbietet, nämlich:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 \ldots n(n-1) \ldots \text{in inf.},$$

darin, mit Ausnahme der *zwei* ersten, alle folgenden Glieder grösser als die gleichvielsten in $\overset{1}{S}$ sind, so dass die Summe der ganzen Reihe unstreitig abermals grösser als $\overset{1}{S}$ ist. Ziehen wir daher von diesem Reste der Reihe $\overset{1}{S}$ zum zweitenmal ab; so erhalten wir als *zweiten* Rest eine Reihe von derselben Gliedermenge

$$-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48 \ldots n(n-2) \ldots \text{in inf.}$$

darin, mit Ausschluss der *drei* ersten Glieder, abermals alle folgenden grösser als die gleichvielsten in $\overset{1}{S}$ sind; so dass auch dieser dritte Rest ohne Widerspruch grösser als $\overset{1}{S}$ zu schätzen ist. Da sich nun diese Schlüsse ohne Ende fortsetzen lassen, so erhellet, dass die Summe $\overset{2}{S}$ unendlichemal grösser sei als die Summe $\overset{1}{S}$; indem wir allgemein

$$\overset{2}{S} - \overset{1}{S} = (1 - m) + (2^2 - 2m) + (3^2 - 3m) + (4^2 - 4m) + \ldots (m^2 - m^2) + \ldots + n(n - m) + \ldots \text{ in inf.}$$

haben, in welcher Reihe nur eine endliche Menge von Gliedern, nämlich nur die $m - 1$ ersten negativ, das $m^{te} = 0$, alle folgenden aber positiv sind und ins Unendliche wachsen.

§. 34.

Ehe wir die Unrichtigkeit der übrigen, schon in §. 31 erwähnten Behauptungen in das gehörige Licht stellen können, müssen wir den Begriff der Null etwas genauer, als man gewöhnlich thut, bestimmen *).

Unstreitig wollen alle Mathematiker mit dem Zeichen 0 nur einen solchen Begriff verbunden wissen, dass es, *A* sei was immer für ein Grössenausdruck, unentschieden ob einer wirklichen Grösse entsprechend, oder ganz gegenstandlos, erlaubt bleibe, die beiden Gleichungen

$$\text{I. } A - A = 0, \qquad \text{II. } A \pm 0 = A$$

zu schreiben. Hier wird nun Jeder zugestehen, dass dieses nur verstattet sein könne, wenn wir das Zeichen 0 selbst nicht als die Vorstellung einer wirklichen Grösse, sondern als blosse Abwesenheit einer Grösse und die Zeichnung $A \pm 0$ als eine Forderung betrachten, zu der etwaigen Grösse, die *A* bezeichnet, in Wahrheit weder etwas zusetzen noch abziehen zu wollen. Irrig wäre es aber zu glauben, dass schon die blosse Erklärung, dass Null eine gegenstandlose Grössenvorstellung sei, zur vollständigen Bestimmung des Begriffes, den Mathematiker mit diesem Zeichen verbinden, hinreiche. Denn

---

*) Sehr gern räume ich Herrn M. Ohm das Verdienst ein, in seinem sehr schätzbaren „Versuche eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik" (2. Aufl. Berlin 1828) der Erste gewesen zu sein, der auf die Schwierigkeiten in dem Begriffe der Null das mathematische Publicum aufmerksam gemacht hat.

offenbar gibt es noch andere in der Mathematik übliche Grössenbezeichnungen, wie namentlich das in der Analysis so ungemein wichtig gewordene Zeichen $\sqrt{-1}$, die gleichfalls gegenstandlos sind, die wir dessohngeachtet nicht als gleichgeltend mit 0 ansehen und behandeln dürfen. Bestimmen wir aber die Bedeutung des Zeichens 0 genauer durch die Erklärung: es solle so aufgefasst werden, dass die zwei Gleichungen I und II allgemein gelten: so stellen wir einen Begriff auf, der einerseits völlig so weit ist, als der bisherige Gebrauch und das Interesse der Wissenschaft es fordert, und andrerseits doch auch enge genug ist, um jeden Missbrauch desselben zu verhindern.

Es ist aber, näher betrachtet, nicht bloss der Begriff der Null, der durch die festgesetzte Allgemeingiltigkeit der beiden Gleichungen I und II auf eine eigene Weise bestimmt wird, sondern es erfahren auch die Begriffe des **Addirens** und des **Subtrahirens**, welche hier unter den Zeichen $+$ und $-$ auftreten, durch die Festsetzung dieser Gleichungen eine eigenthümliche Erweiterung, die sehr zum Vortheile der Wissenschaft gereicht.

Derselbe Vortheil der Wissenschaft verlangt noch überdies, man möge auch den Begriff der **Multiplication** so weit auffassen, dass sich, was auch A sei (ob eine endliche oder unendlich grosse oder unendlich kleine Grösse, oder auch eine blosse gegenstandlose Grössenvorstellung wie $\sqrt{-1}$ oder 0) die Gleichung

$$\text{III.} \quad 0 \times A = A \times 0 = 0$$

ansetzen lasse.

Endlich müssen wir auch im Interesse der Wissenschaft fordern, man möge auch den Begriff der **Division** so allgemein fassen, als es nur möglich ist, um nicht mit einer der drei schon aufgestellten Gleichungen in Widerspruch zu gerathen, also auch in der Gleichung

$$\text{IV.} \quad B \times \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \times B = A$$

dem Zeichen B einen so weiten Umfang zu geben, als es nur jene drei Gleichungen in der ihnen schon zugestandenen Allgemeinheit erlauben. Diese erlauben nun immerhin, dass B jede beliebige endliche sowohl als unendlich grosse oder unendlich kleine wirkliche Grösse, auch wohl die imaginäre $\sqrt{-1}$ bezeichne; schlechterdings aber nicht, dass $B = 0$ gesetzt werde, d. h. dass wir die Null oder irgend einen der Null gleichgeltenden Ausdruck jemals als einen Divisor anwenden. Denn da nach III $0\,(A) = 0$ sein muss, was immer A sei: so müsste, wenn wir in IV $B = 0$ setzten, auch $B\,(\frac{A}{B}) = 0$ sein, welches mit der in IV geforderten Gleichung $B\,(\frac{A}{B}) = A$ nur in dem einzigen Falle, wenn auch $A = 0$ wäre, übereinstimmen würde. Wir müssen also, um nicht in Widersprüche zu gerathen, die Regel festsetzen, dass man die Null oder einen der Null gleichgeltenden Ausdruck nie als Divisor anwenden dürfe in einer Gleichung, welche noch etwas Anderes als eine bloss identische sein soll, wie etwa

$$\frac{A}{0} = \frac{A}{0}$$

Dass die Beobachtung dieser Regel durchaus nothwendig sei, beweisen nebst dem so eben Gesagten gar viele höchst ungereimte Folgerungen, die sich aus völlig richtigen Vordersätzen ergeben, sobald wir uns Divisionen mit Null erlauben.

Sei a was immer für eine reelle Grösse: so stellt sich, wenn das Dividiren durch einen der Null gleichgeltenden Ausdruck z. B. $1 - 1$ erlaubt sein soll, nach der bekannten, gewiss ganz regelrechten Divisionsmethode folgende Gleichung dar:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + \ldots\ldots + a + \frac{a}{1-1}$$

wo der Summanden von der Form a jede beliebige Anzahl auftreten kann. Ziehen wir nun zu beiden Seiten den gleichen Grössenausdruck $\frac{a}{1-1}$ ab: so ergibt sich die höchst ungereimte Gleichung

$$a + a + \ldots + a = 0.$$

Sind *a* und *b* ein Paar verschiedene Grössen: so gelten die zwei identischen Gleichungen:

$$a - b = a - b$$

$$b - a = b - a.$$ Also durch Addition auch

$$a - a = b - b$$ oder

$$a\,(1 - 1) = b\,(1 - 1)$$

Ist es nun erlaubt, die beiden Glieder einer Gleichung durch einen der Null gleichgeltenden Factor zu dividiren, so erhalten wir das ungereimte Ergebniss $a = b$, was immer *a* und *b* sein mögen. Doch es ist allgemein bekannt, dass man nur allzu leicht bei grösseren Rechnungen auf ein unrichtiges Ergebniss stösst, wenn man einen gemeinschaftlichen Factor aus beiden Gliedern der Gleichung entfernt, ohne sich erst überzeugt zu haben, dass er nicht Null sei.

§. 35.

Es wird nun leicht sein, zu zeigen, wie unrichtig die von so Manchen aufgestellte Behauptung sei, dass nicht nur eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung in der Verbindung durch Addition oder Subtraction mit einer anderen von niederer Ordnung oder mit einer endlichen, sondern auch jede endliche, ja selbst unendlich grosse von jeder beliebig hohen Ordnung in ihrer Verbindung durch Addition oder Subtraction mit einer anderen unendlich grossen von höherer Ordnung gleich einer blossen Null verschwinde. Soll dies nun so verstanden werden — und in dem gewöhnlichen Vortrage, der noch etwas unvorsichtiger als die so eben gebrauchten Ausdrücke lautet, warnt man vor einer solchen Missdeutung nicht — soll dieses, sage ich, so ausgelegt werden, dass man aus dem Complexe der beiden Grössen $M \pm m$, deren die erste unendlichemal grösser ist als die zweite, diese schlechterdings weglassen dürfe, auch wenn in dem Verfolge der Rechnung die Grösse *M* vielleicht selbst (etwa durch Abzug einer ihr gleichen) wegfällt: dann brauche ich die Irrigkeit dieser Regel nicht erst zu beweisen.

Doch man wird sagen: So sei es nicht gemeint. Wenn man die Grössen M und $M \pm m$ für gleich erkläre, so meine man nicht, dass sie ein gleiches Resultat gewähren, wenn sie in fortgesetzter Rechnung neue Verbindungen durch Addiren oder Subtrahiren eingehen; sondern ihre Gleichheit bestehe nur darin, dass sie bei dem Geschäfte des M e s s e n s, namentlich durch eine Grösse *N*, welche von gleichem Range mit ihnen, in einem endlichen (also völlig bestimmbaren) Verhältnisse zu Einer von ihnen z. B. *M* steht, gleiche Ergebnisse darbieten. Dies wäre in der That das Geringste, was man zu der Erklärung, dass ein Paar Grössen g l e i c h g r o s s sind, zu fordern berechtigt ist. Aber leisten denn M und $M \pm m$ auch nur so viel? Stehet die eine derselben, z. B. *M*, in einem irrationalen Verhältnisse zum Maasse *N*, so kann es sich allerdings treffen, dass wir bei der gewöhnlichsten Weise des Messens, welche zu jeder beliebigen auch noch so grossen Zahl *q* eine andere *p* von der Beschaffenheit sucht, dass

$$\frac{M}{N} > \frac{p}{q} < \frac{p+1}{p}$$

sei; und es kann sich fügen, dass auch $\frac{M \pm m}{N}$ fortwährend in denselben Gränzen verbleibt, dass sich auch

$$\frac{M \pm m}{N} > \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q}$$

findet. Ist aber das Verhältniss $\frac{M}{N}$ rational: so gibt es ein *q*, für welches

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q}$$

und dagegen $\frac{M \pm m}{N}$ entweder $>$ oder $< \frac{p}{q}$ ist; wo also ein

Unterschied zwischen diesen Grössen selbst im Vergleiche zu blossen Zahlen (endlichen Grössen) sich kund gibt. Wie also dürften wir sie einander gleich nennen?

§. 36.

Um solche Widersprüche zu vermeiden, nahmen nach Eulers Vorgange mehrere Mathematiker ihre Zuflucht zu der Erklärung, dass die unendlich kleinen Grössen in der That blosse Nullen, die unendlich grossen Grössen aber die Quotienten wären, welche aus einer endlichen Grösse durch die Division mit einer blossen Null hervorgehen. Durch diese Feststellung hatte man das Verschwinden oder Wegwerfen einer unendlich kleinen Grösse in ihrer Verbindung durch Addition zu einer endlichen mehr als gerechtfertigt; desto schwieriger aber war es, das Dasein der unendlich grossen Grössen, ingleichen die Möglichkeit des Hervorgehens einer endlichen Grösse durch die Division zweier unendlich kleiner oder auch grosser Grössen und das Vorhandensein unendlich kleiner und grosser Grössen höherer Ordnungen begreiflich zu machen. Denn die unendlich grosse Grösse kam auf diese Art durch eine Division mit Null oder einem der Null gleichgeltenden Grössenausdrucke (der eigentlich eine gegenstandlose Vorstellung ist), also auf eine durch die Gesetze des Rechnens verbotene Weise zum Vorschein; an allen jenen endlichen oder auch unendlichen Grössen aber, die man durch Division einer unendlichen in eine andere unendliche Grösse hervorgehen liess, haftete die Makel der illegitimen Geburt vervielfacht.

Was noch am meisten für die Richtigkeit dieser Rechnung mit Nullen zu sprechen scheint, ist wohl die Art, wie man den Werth einer von der veränderlichen x abhängigen Grösse y, der durch die Gleichung

$$y = \frac{Fx}{\Phi x}$$

bestimmt werden soll, in dem besonderen Falle berechnet, wenn ein gewisser Werth von $x=a$ entweder den Nenner dieses Bruches allein, oder den Nenner und den Zähler zugleich zu Null macht. In dem ersten Falle, wenn $\Phi a = 0$ wird, Fa aber eine endliche Grösse verbleibt, schliesst man, dass y unendlich gross geworden sei. In dem zweiten Falle dagegen', wenn sowohl Φa als $Fa = 0$ sind', schliesst man, dass die beiden Ausdrücke Φx und Fx den Factor von der Form $(x - a)$ ein- oder etlichemal enthalten und somit von der Form

$$\Phi x = (x - a)^m . \varphi x; \ Fx = (x - a)^n . fx$$

sein müssen: wo allenfalls φx oder fx auch Constante vorstellen können. Ist nun $m > n$, so schliesst man, dass, auch nach einer den Werth des Bruches $\frac{Fx}{\Phi x}$ nicht ändernden Aufhebung der gemeinschaftlichen Factoren im Nenner und im Zähler, der erstere für $x=a$ immer noch zu Null werde, und bleibt somit bei der Behauptung, dass der Werth $x=a$ ein unendlich grosses y gebe. Ist aber $m=n$, so sieht man, da $\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{fx}{\varphi x}$ sein muss, die endliche Grösse, die $\frac{fa}{\varphi a}$ ausdrückt, als den richtigen Werth von y an. Und ist endlich $m < n$, so schliesst man, weil jetzt

$$\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{(x - a)^{n-m} . fx}{\varphi x}$$

für $x=a$ zu Null wird, dass der Werth $x=a$ die Grösse y zu Null mache.

Ueber dies Verfahren denke ich so. Wenn der zu $x=a$ gehörige Werth von y in den angegebenen Fällen für ∞ gross erklärt wird: so kann das offenbar nur dann und dann nur zufällig wahr sein, wenn die Grösse y zu der Art derer gehört, die auch unendlich gross werden können; allein es bleibt dabei, dass dieses Ergebniss aus dem gegebenen Ausdrucke, der hier eine Division durch Null verlangt, nicht hervorgeht. Bloss aus dem Umstande, dass gesagt wird, der Werth von y sei immer der nämliche, den der gegebene Ausdruck $\frac{Fx}{\Phi x}$ angibt, lässt sich nur schliessen auf die Beschaffenheit der Grösse y für alle jene Werthe von x, die eine wirkliche Grösse vorstellen, nicht aber für solche, bei denen dieser Ausdruck gegenstandlos wird; wie dies der Fall ist, wenn sein Nenner oder auch nur sein Zähler oder gar beide zugleich Null werden. Wohl lässt sich sagen, dass die Grösse y in dem zuerst erwähnten Falle, wo nur $\Phi x = 0$ ist, grösser, und in dem zweiten Falle, wo nur $Fx = 0$ ist, kleiner als jede gegebene werde, endlich im dritten Falle, wo $\frac{Fx}{\Phi x}$ eine gleiche Anzahl von Factoren von der Form $(x - a)$ im Nenner und Zähler enthält, dem Werthe $\frac{fa}{\varphi a}$ so nahe komme, als man will, indem man x dem Werthe a so nahe rückt, als man will: allein aus allem diesem folgt nichts für die Beschaffenheit dieses Werthes dort, wo der Ausdruck $\frac{Fx}{\Phi x}$ gegenstandlos ist, d. h. gar keinen Werth darstellt, weil er entweder die Form 0 selbst oder die Form $\frac{c}{0}$ oder gar die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Denn der Satz von der Gleichheit des Werthes zweier Brüche, deren der eine sich von dem anderen nur durch die Aufhebung eines gemeinschaftlichen Factors im Nenner und Zähler unterscheidet, gilt wohl in allen Fällen, nur in dem Falle nicht, wo dieser Factor eine Null ist; weil sonst mit eben dem Rechte, mit dem wir behaupten wollten, dass $\frac{2\,.\,0}{3\,.\,0} = \frac{2}{3}$ ist, auch behauptet werden dürfte, dass jede beliebige Grösse, z. B. $1000 = \frac{2}{3}$ sei. Denn sicher ist doch sowohl $3000\,.\,0 = 0$, als auch $2\,.\,0 = 0$. Wenn also $\frac{2\,.\,0}{3\,.\,0} = \frac{2}{3}$

gesetzt werden darf, so darf auch $\frac{2 \times (3000 \, . \, 0)}{3 \times (2 \, . \, 0)} = \frac{(2 \, . \, 3000) \, . \, 0}{(3 \, . \, 2) \, . \, 0}$ $= \frac{2 \, . \, 3000}{3 \, . \, 2} = 1000$ gesetzt werden.

Der Fehlschluss, der hier in die Augen springt, fällt oben nur desshalb minder auf, dass man die Division mit dem einer Null gleichgeltenden Factor $(x - a)$ in einer Form vornimmt, die diesen Nullwerth verhüllt. Und weil die Fortschaffung desselben in jedem anderen Falle erlaubt ist, so nimmt man um so zuversichtlicher an, sie auch in diesem Falle sich erlauben zu dürfen, weil der für y sich herausstellende Werth gerade so ausfällt, wie man ihn zu erwarten berechtigt zu sein glaubt; nämlich wenn er ein endlicher ist, genau wie das Gesetz der Stetigkeit ihn fordert, Null, wenn die nächststehenden bis auf Null abnehmen, und unendlich gross, wenn die nächststehenden in das Unendliche zunehmen. Allein hierbei vergisst man, dass das Gesetz der Stetigkeit keineswegs von allen veränderlichen Grössen beobachtet werde, ingleichen dass eine Grösse, welche so klein wird, als man nur will, indem man x dem Werthe a so nahe bringt, als man will, darum noch eben nicht für $x = a$ zu Null werden müsse; unb dass sie eben so wenig, wenn sie in das Unendliche wächst, während sich x dem Werthe a nähert, für $x = a$ in Wahrheit unendlich werde. Es gibt ja namentlich in der Geometrie unzählig viele Grössen, die kein Gesetz der Stetigkeit kennen, z. B. die Grössen der Linien und Winkel, die zur Bestimmung der Umfangslinien und Oberflächen der Polygone und Polyeder dienen u. m. A.

§. 37.

Obgleich wir der bisherigen Darstellungsweise der Lehre von dem Unendlichen so viele wichtige Mängel, wie ich glaube, nicht mit Unrecht vorwerfen mögen: so ist es doch bekannt, dass man meistens ganz richtige Ergebnisse erhält, wenn man die Regeln, die in der Rechnung mit dem Unendlichen allgemein eingeführt sind, mit der gehörigen Vorsicht befolgt. Solche Ergebnisse hätten sich nimmer darbieten können, wenn es nicht eine Weise der Auffassung und Handhabung dieser Rechnungsmethode gäbe, die wirklich untadelhaft ist; und gerne will ich glauben, dass es im Grunde nur diese gewesen sein dürfte, die den scharfsinnigen Erfindern jener Methode im Geiste vorgeschwebt, ob sie auch nicht sogleich im Stande waren, ihre Gedanken hierüber mit aller Deutlichkeit auseinander zu setzen; eine Sache, die in schwereren Fällen insgemein erst nach wiederholten Versuchen gelingt.

Sei es mir denn verstattet, hier nur in wenigen Umrissen anzudeuten, wie ich diese Methode des Rechnens glaube auffassen zu müssen, damit sie vollkommen zu rechtfertigen wäre. Es wird genügen, von dem Verfahren zu sprechen, das bei dem sogenannten Differential- und Integralcalcül zu beobachten ist, denn die Methode des Rechnens mit dem unendlich Grossen ergibt sich dann schon durch den blossen Gegensatz leicht, zumal nach Allem, was Cauchy hierüber schon geleistet.

Ich also bedarf hier schlechterdings nicht der so beengenden Voraussetzung, die man wohl sonst für nöthig erachtete, dass die in Rechnung zu nehmenden Grössen unendlich klein werden können; eine Beschränkung, wodurch alle begränzte Zeit- und Raumgrössen, auch alle Kräfte begränzter Substanzen, also im Grunde alle Grössen, an deren Bestimmung uns gerade am meisten liegt, aus dem Bereiche dieser Rechnungsmethode im Vornhinein ausgeschieden werden. Ich begehre nichts Anderes, als dass diese Grössen, falls sie veränderlich und doch nicht frei veränderlich, sondern von einer oder mehreren anderen Grössen abhängig sind, ihre Abgeleitete (*une fonction derivée* nach der Lagrange'schen Erklärung) haben; wenn nicht für alle Werthe ihrer Bestimmenden, wenigstens für alle diejenigen, auf welche die Rechnung als giltig angewandt werden soll. Mit anderen

Worten, wenn x eine der frei veränderlichen Grössen und $y = fx$ eine von ihr abhängige bezeichnet: so muss, wenn unsere Rechnung für alle innerhalb $x = a$ und $x = b$ liegende Werthe von x ein richtiges Resultat geben soll, y in einer solchen Art von x abhängen, dass für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe von x der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$$

welcher zum Vorschein kommt, indem wir den Zuwachs von y durch den ihm zugehörigen von x dividiren, einer entweder constanten oder doch nur von x allein abhängigen Grösse $f'x$ so nahe kommt, als man will, wenn man nur Δx klein genug nimmt, und dann noch immer so nahe bleibt oder noch näher rückt, wenn Δx noch kleiner gemacht wird *).

Ist eine Gleichung zwischen x und y gegeben: so ist es insgemein eine sehr leichte und bekannte Sache, diese abgeleitete von y zu finden. Wäre z. B.

$$(1) \qquad y^3 = ax^2 + a^3$$

so hätte man hier für jedes Δx, das nur nicht Null ist,

$$(2) \qquad (y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3$$

woraus sich nach bekannten Regeln

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}$$

$$= \frac{2ax}{3y^2} + \frac{3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2}{9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\Delta y^2}$$

ergibt. Und die gesuchte abgeleitete Function der y oder (nach Lagrange'scher Bezeichnung) y' wäre

---

*) Es lässt sich zeigen, dass alle abhängig veränderlichen Grössen, wenn sie nur überhaupt bestimmbar sind, an dies Gesetz gebunden sein müssen in der Art, dass Ausnahmen davon, wenn auch in einer unendlichen Menge, stets nur für isolirtstehende Werthe ihrer frei Veränderlichen eintreten dürfen.

$$\frac{2ax}{3y^2}$$

eine Function, die aus dem Ausdrucke von

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

hervorgeht, wenn wir nach der gehörigen Entwicklung desselben, nämlich nach einer solchen, dabei im Zähler und Nenner die in Δx oder in Δy multiplizirten Glieder von den übrigen trennen, also in dem Ausdrucke

$$\frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}$$

Beides, Δx sowohl als $\Delta y = 0$ setzen.

Von welchem vielfältigen Nutzen die Findung dieser Abgeleiteten sei; auf welche Weise jeder einem endlichen Zuwachse von x entsprechende endliche Zuwachs der y vermittelst solcher Abgeleiteten sich berechnen lasse; und wie, wenn umgekehrt nur die abgeleitete $f'x$ gegeben ist, auch die ursprüngliche Function fx bis auf Eine Constante bestimmt werden kann — brauche ich nicht zu sagen.

Weil wir aber, wie nur eben angemerkt wurde, die abgeleitete Function einer abhängigen Grösse y in Bezug auf ihre Veränderliche x erhalten, sobald wir in dem Ausdrucke

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

falls er erst so entwickelt wurde, dass weder Δx noch Δy irgendwo als Divisoren erscheinen, das Δx sowohl als auch das $\Delta y = 0$ setzen: so dürfte es wohl nicht so unschicklich sein, die abgeleitete durch eine Zeichnung wie etwa folgende

$$\frac{dy}{dx}$$

darzustellen, wenn wir hierbei erklären, einerseits, dass alle in der Entwicklung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vorkommenden Δx, Δy oder die allenfalls statt ihrer angeschriebenen dx, dy als blosse

Nullen angesehen und behandelt werden sollen; — anderseits aber, dass man die Zeichnung $\frac{dy}{dx}$ nicht etwa als einen Quotienten von dx in dy, sondern nur eben für ein Symbol der abgeleiteten von y nach x anzusehen habe.

Dass einem solchen Verfahren noch keineswegs der Vorwurf gemacht werden könnte, es nehme Verhältnisse zwischen Grössen an, die gar nicht vorhanden sind (Null zu Null), ist klar; denn man will jene Zeichnung ja eben für nichts Anderes als für ein blosses Zeichen angesehen wissen.

Eben so untadelhaft wird es ferner auch sein, wenn man die zweite abgeleitete Function von y nach x, d. h. diejenige bloss von x abhängige (oder vielleicht auch ganz constante) Grösse, welcher der Quotient

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

so nahe kommt, als man will, sobald man nur auch Δx so klein, als man will, nehmen darf, durch

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

bezeichnet und dies so auslegt, dass man die in der Entwicklung von $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ vorkommenden Grössen Δx, $\Delta^2 y$ als blosse Nullen betrachten und behandeln, in der Zeichnung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aber nicht eine Division von Null in Null, sondern nur das Symbol der Function erblicken müsse, in welche die Entwicklung von $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ nach der so eben verlangten Veränderung übergeht.

Diese Bedeutungen der Zeichen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots\ldots$ einmal vorausgesetzt, können wir strenge darthun, dass eine jede von einer anderen frei Veränderlichen x auf eine bestimmbare Art abhängige veränderliche Grösse

$$y = fx$$

höchstens mit Ausnahme gewisser isolirt stehender Werthe von x und Δx an die Gleichung

$$f(x + \Delta x) = fx + \Delta x \cdot \frac{dfx}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 fx}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^n f(x + \mu \Delta x)}{dx^n}$$

worin $\mu < 1$ ist, gebunden sei*).

Wie viele wichtige Wahrheiten der allgemeinen Grössenlehre (besonders der sogenannten höheren Analysis) durch diese einzige Gleichung begründet werden können, ist Niemandem unbekannt. Aber auch in der angewandten Grössenlehre, in der Raumlehre (Geometrie) und in der Kräftenlehre (Statik, Mechanik u. s. w.) bahnt diese Gleichung den Weg zur Lösung der schwierigsten Probleme, z. B. von der Rectification der Linien, der Complanation der Flächen, der Cubirung der Körper, ohne irgend einer hier widersprechenden Voraussetzung eines unendlich Kleinen, noch sonst eines anderen angeblichen Grundsatzes zu bedürfen, dergleichen der bekannte Archimedische u. m. a. sind.

Ist es aber erlaubt, Gleichungen von der Art, wie z. B. die Formel für die Rectification der Curven bei einem rechtwinkligen Coordinaten-Systeme

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

in der vorhin erklärten Bedeutung aufzustellen: so wird es auch, ohne Gefahr zu irren, möglich sein, Gleichungen von der Art, wie etwa folgende niederzuschreiben:

---

*) Der Beweis dieses Satzes für jede, gleichviel ob uns bekannte und durch die bisherigen Zeichen darstellbare oder nicht darstellbare Art der Abhängigkeit der y von x, lange schon vom Verfasser niedergeschrieben, wird vielleicht ehestens veröffentlicht werden. H.

$d(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx + 2\,cxdx + dx^2dx + \ldots;$
$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$
oder wenn r den Halbmesser des Krümmungskreises bei einer Linie von einfacher Krümmung bezeichnet,

$$r = -\frac{ds^3}{d^2y \,.\, dx}; \text{ u. a. m.}$$

worin wir die Zeichen dx, dy, dz, ds, d^2y u. s. w. fortwährend nicht als Zeichen wirklicher Grössen, sondern sie vielmehr als der Null gleichgeltend betrachten, und in der ganzen Gleichung nichts Anderes sehen, als einen Zeichencomplex, der so geartet ist, dass sich, wenn wir mit demselben nur lauter Veränderungen vornehmen, welche die Algebra mit allen Zeichen wirklicher Grössen erlaubt (hier also auch ein Dividiren mit dx u. dergl.) — nie ein unrichtiges Ergebniss herausstellt, wenn es zuletzt gelingt, die Zeichen dx, dy u. s. w. auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden zu sehen.

Dass dieses so sei und sein müsse, ist leicht zu begreifen. Denn wenn z. B. die Gleichung:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

untadelig ist: wie sollte nicht auch die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

untadelig sein; da sich nach der so eben erwähnten Verfahrungsart aus dieser sofort auch jene ableiten lässt?

Endlich ist leicht zu erachten, dass es auch keine Irrung herbeiführen könne, wenn wir in irgend einer Gleichung, welche die Zeichen dx, dy ..... enthält, zur Abkürzung alle diejenigen Addenden, von welchen wir mit Bestimmtheit vorauswissen, dass sie am Schlusse der Rechnung, als der Null gleichgeltend wegfallen werden, gleich anfangs weglassen. So können wir es, z. B. wenn wir durch irgend eine Rechnung erst auf die (aus 1 und 2 sich ergebende) Gleichung

$$3y^2 . \Delta y + 3y \Delta y^2 + \Delta y^3 = 2ax \Delta x + a \Delta x^2$$

gerathen sind, die bei dem Uebergange zu den der Null gleichgeltenden Zeichen die Gestalt

$$3y^2 . dy + 3y . dy^2 + dy^3 = 2axdx + a . dx^2$$

annimmt, sogleich ersehen, dass die Addendi, welche die höheren Potenzen dy^2, dy^3, dx^2 enthalten, zuletzt jedenfalls wegfallen werden und somit alsbald nur

$$3y^2 dy = 2axdx$$

ansetzen; woraus sich dann die gesuchte Abgeleitete von y in Bezug auf x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{3y^2}$$

alsbald ergibt.

Dies ganze Verfahren, dass wir es schliesslich noch mit Einem Worte sagen, beruht auf ganz ähnlichen Grundsätzen, auf welchen die Rechnung mit den sogenannten imaginären Grössen (welche ja eben so wie unsere dx, dy ... blosse Zeichnungen sind) oder auch die in der neueren Zeit erfundene abgekürzte Divisionsmethode und andere ähnliche Rechnungsabkürzungen beruhen. Hier nämlich eben so wie dort genügt es, zur Rechtfertigung des Verfahrens nachzuweisen, dass wir den eingeführten Zeichen ($dx, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^3, \frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}$ u. s. w.) nur eine solche Bedeutung geben, und uns mit ihnen nur solche Veränderungen erlauben, dass zuletzt jedesmal, wenn endlich statt der gegenstandlosen Zeichen solche zum Vorschein kommen, die wirkliche Grössen bedeuten, beide Glieder der Gleichung einander in Wahrheit gleichgelten.

§. 38.

Wenden wir uns zu dem angewandten Theile der Grössenlehre, so begegnen uns die ersten Paradoxien auf dem Gebiete der Zeitlehre in dem Begriffe der Zeit selbst, zumal inwiefern sie eine stetige Ausdehnung sein soll. Es lasten aber die schon von Alters her so berühmten scheinbaren Widersprüche, die man in dem Begriffe einer stetigen Ausdehnung eines Continuums zu finden glaubte, in gleicher Weise wie auf der zeitlichen auch auf der räumlichen, ja auch der materiellen; daher wir sie gleich in Vereinigung betrachten wollen.

Sehr wohl erkannte man, dass alles Ausgedehnte seinem Begriffe nach aus Theilen zusammengesetzt sein müsse; erkannte ferner, dass sich das Dasein des Ausgedehnten nicht ohne einen Zirkel aus der Zusammensetzung solcher Theile, die schon selbst ausgedehnt sind, erklären lasse; wollte jedoch nichts desto weniger auch einen Widerspruch in der Voraussetzung finden, dass es aus Theilen, die keine Ausdehnung haben, sondern schlechterdings einfach sind (Puncten in Zeit Raum, Atomen, d. i. einfachen Substanzen im Weltall auf dem Gebiete der Wirklichkeit), entstehe.

Wurde gefragt, was man an dieser letzteren Erklärung anstössig finde: so hiess es bald, dass eine Eigenschaft, die allen Theilen mangelt, auch nicht dem Ganzen zukommen könne; bald, dass doch je zwei Puncte wie in der Zeit so auch im Raume, und eben so auch je zwei Substanzen noch immer eine Entfernung von einander haben, somit nie ein Continuum bilden.

Es bedarf aber wahrlich nicht vieler Ueberlegung, um das Ungereimte in diesen Einwürfen zu erkennen. Eine Beschaffenheit, die allen Theilen mangelt, soll auch dem Ganzen nicht zukommen dürfen? Gerade umgekehrt! Jedes Ganze hat und muss gar manche Eigenschaften haben, welche den Theilen mangeln. Ein Automat hat die Beschaffenheit, gewisse Bewegungen eines lebenden Menschen fast täuschend nachzuahmen, die einzelnen Theile aber, die Federn, Räderchen u. s. w. entbehren dieser Eigenschaft. — Dass je zwei Zeitpuncte noch durch eine unendliche Menge dazwischenliegender Zeitpuncte getrennt sind; dass es eben so zwischen je zwei Puncten im Raume eine unendliche Menge dazwischenliegender gibt, ja dass es selbst im Reiche der Wirklichkeit zwischen je zwei Substanzen noch eine unendliche Menge anderer gebe — ist allerdings zuzugestehen: aber was folgt hieraus, das einen Widerspruch enthielte? Nur so viel folgt, dass durch zwei Puncte allein, ja auch durch drei, vier und jede bloss e n d l i c h e Menge derselben noch kein Ausgedehntes erzeugt wird. Dies Alles gestehen wir selbt, ja wir gestehen, dass auch eine unendliche Menge von Puncten nicht immer zur Erzeugung eines Continuums, z. B. einer auch noch so kurzen Linie, hinreicht, wenn diese Puncte nicht zugleich die gehörige A n o r d n u n g haben. Versuchen wir nämlich, uns den Begriff, den wir mit den Benennungen „eine s t e t i g e A u s d e h n u n g oder ein C o n t i n u u m“ bezeichnen, zu einem deutlichen Bewusstsein zu bringen: so können wir nicht umhin zu erklären, dort, aber auch nur dort sei ein Continuum vorhanden, wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen (von Puncten in der Zeit oder im Raume oder auch von Substanzen) befindet, die so gelegen sind, dass jeder einzelne derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens Einen Nachbar in diesem Inbegriffe habe. Wenn dieses nicht der Fall ist, wenn sich z. B. unter einem gegebenen Inbegriffe von Puncten im Raume auch nur ein einziger befindet, der nicht so dicht umgeben ist von Nachbarn, dass sich für jede — nur klein genug genommene Entfernung ein Nachbar für ihn nachweisen lässt: so sagen wir, dass dieser Punct v e r e i n z e l t (isolirt) dastehe, und dass jener Inbegriff eben desshalb kein vollkommenes Continuum darbiete. Gibt es dagegen nicht einen einzigen in diesem Sinne isolirt stehenden Punct in einem vorliegenden Inbegriffe von Puncten, hat also jeder derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbar: so erübrigt nichts mehr, was uns berechtigen könnte, diesem Inbegriffe die Benennung eines Continuums abzusprechen. Denn was noch sonst wollten wir verlangen? —

„Dieses," erwidert man, „dass jeder Punct Einen „habe, den er unmittelbar berührt!" — Allein hier fordert man etwas, das eine offenbare Unmöglichkeit ist, einen Widerspruch in sich schliesst. Denn, wann doch wollt Ihr sagen, dass ein Paar Puncte einander berühren? Vielleicht wenn die Gränze des Einen (etwa die rechte Seite desselben) mit der Gränze des anderen (etwa der linken Seite desselben) zusammenfällt? Aber Puncte sind ja einfache Theile des Raumes, sie haben somit keine Begränzungen, keine rechte und linke Seite. Hätte der Eine nur Einen Theil gemein mit dem anderen, so wäre er schon durchaus derselbe mit ihm; und soll er etwas von ihm Verschiedenes haben, so müssen Beide ganz auseinander liegen, und es muss somit Raum da sein, noch für einen zwischen ihnen liegenden Punct; ja, weil von diesem mittleren im Vergleiche zu jenen beiden das Nämliche gilt, für eine unendliche Menge von Puncten.

„Aber das Alles ist," wie man sagt, „nicht zu begreifen!" Allerdings lässt es sich nicht mit den Fingern begreifen, allerdings auch nicht mit den Augen wahrnehmen; wohl aber wird es erkannt durch den Verstand und erkannt als etwas, das nothwendig so und nicht anders sein kann, so dass ein Widerspruch nur erst dann angenommen wird, wenn man es anders, wenn man es sich unrichtig vorstellt.

Doch man fährt fort: „Wie unbegreiflich ist es, sich in „der kleinsten Linie noch eine Anhäufung von unendlich vielen „Puncten, ja eine unendliche Menge solcher Anhäufungen von „Puncten vorzustellen, wie man dies Alles nach der gewöhn- „lichen Lehre thun muss! Denn selbst die kleinste Linie soll „man ja noch in eine unendliche Menge anderer Linien zer- „legen können, indem man sie erst in zwei Hälften, dann „diese abermals in Hälften und so ohne Ende fort zerlegt!" —

Ich finde in dieser ganzen Gedankenverbindung nichts Irriges und nichts Befremdendes, bis auf den einzigen Ausdruck einer kleinsten Linie, den Manche sich wohl nur aus Mangel an Aufmerksamkeit entschlüpfen liessen, weil es doch eine solche nicht gibt und geben kann, und von derjenigen, die man hier eben betrachtet, geradezu erklärt wird, dass sie in kleinere zerlegt werden könne. Jede unendliche Menge, nicht die der Puncte in einer Linie allein, lässt sich in Theile zerlegen, die selbst noch unendliche Mengen enthalten, ja in unendlich viele solche Theile. Denn bedeutet ∞ eine unendliche Menge, so sind auch $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8}$ .... unendliche Mengen. So liegt es in dem Begriffe des Unendlichen.

„Wie aber" (dürfte man, falls die bisherigen Erläuterungen nach einer längeren Erwägung sich vielleicht doch als befriedigend herausgestellt hätten, zuletzt sagen), „wie sollen wir die „Behauptung derjenigen Mathematiker deuten, die selbst erklären, dass das Ausgedehnte durch keine, auch noch so grosse „Aneinanderhäufung von Puncten erzeugt und durch Zerlegung „in eine auch noch so grosse Menge von Theilen auch nie in „einfache Puncte aufgelöst werden könne?" — Strenge zu reden, sollte man einerseits freilich lehren, dass nie eine endliche, eine unendliche Menge von Puncten aber nur dann allein, dann aber auch immer ein Ausgedehntes liefere, wenn die schon mehrmal erwähnte Bedingung erfüllt wird, dass nämlich jeder Punct für jede hinreichend kleine Entfernung gewisse Nachbarn erhält; dabei aber sollte man andrerseits zugestehen, dass auch nicht jede Zerlegung eines gegebenen Raumdinges in Theile, namentlich keine Zerlegung in solche Theile, deren Menge nur eine endliche ist, ja auch nicht jede solche, die ins Unendliche geht (z. B. durch fortgesetzte Halbirungen), wie wir nur vorhin sahen, bis an die einfachen Theile gelange. Nichts desto weniger muss man darauf beharren, dass jedes Continuum zuletzt doch aus nichts Anderem als aus Puncten und wieder nur Puncten hervorgehen könne. Und Beides verträgt sich, nur recht verstanden, sehr wohl.

§. 39.

Dass man an den Beschaffenheiten jener besonderen stetigen Ausdehnung, welche die Zeit ist, auch noch besondere Anstösse nehmen werde, liess sich im Voraus erwarten. Zumal denjenigen Philosophen, die wie die Skeptiker es eigends darauf anlegten, die menschlichen Begriffe statt zu verdeutlichen, nur zu verwirren und allenthalben scheinbare Widersprüche zu finden, musste die Lehre von der Zeit willkommenen Stoff darbieten. Wir werden jedoch hier nur das Wichtigste erwähnen, zumal nicht Alles, was hier vorgebracht würde, den Begriff des Unendlichen berührte.

Man warf die Frage auf, ob die Zeit etwas Wirkliches sei, und wenn dieses, ob Substanz oder Adhärenz, und im ersten Falle, ob erschaffen oder unerschaffen? „Wenn Jenes," meinte man, „müsse sie einen Anfang genommen haben, auch „wohl einst wieder ein Ende nehmen, mithin sich ändern, „demnach selbst wieder einer anderen Zeit bedürfen, in der „sie sich ändert. Noch ungereimter sei es, sie für Gott „selbst, oder für eine an ihm befindliche Adhärenz zu „erklären. Gewiss sei es auch, dass man die Zeit der „Ewigkeit entgegensetze; was nun sei diese? Wie sei es „möglich, dass eine unendliche Menge nicht nur von Augen„blicken, sondern von ganzen Zeitlängen enthalten sei „in einem einzigen auch noch so kurzen Weilchen, z. B. „in einem einzigen Blick mit dem Auge, von dem jeder ein„fache Zeittheil eben den Namen Augenblick hat? Doch „es ist in der That (sagte man zuletzt) gar keine Zeit „vorhanden! Denn die vergangene Zeit ist eben, weil ver„gangen, offenbar nicht mehr da; die zukünftige aber ist, „weil erst künftig, jetzt noch nicht da: was endlich gegen„wärtig ist, das ist nichts Anderes als ein blosser Augen-

„blick in des Wortes strengsten Sinne, der keine Dauer, „somit auch keine Ansprüche auf den Namen einer Zeit hat."

Meinen Begriffen zufolge ist die Zeit allerdings nichts Wirkliches im eigentlichen Sinne des Wortes, wo wir nur den Substanzen und ihren Kräften Wirklichkeit beilegen. Ich halte sie also auch weder für Gott selbst noch für eine geschaffene Substanz, noch auch nur für eine Adhärenz weder an Gott, noch an irgend einer geschaffenen Substanz, oder an einem Inbegriffe mehrerer. Sie ist auch eben darum gar nichts Veränderliches, sondern vielmehr dasjenige, worin alle Veränderung vorgeht. Wenn man das Gegentheil sagt, wie in dem Sprichworte: die Zeiten ändern sich; so wurde längst schon erinnert, dass man hier unter der Zeit nur die in ihr befindlichen Dinge und deren Zustände verstehe. Die Zeit selbst ist, um es nun näher anzugeben, diejenige an einer jeden (veränderlichen oder was eben so viel ist) abhängigen Substanz befindliche Bestimmung, deren Vorstellung wir zu der Vorstellung dieser Substanz hinzufügen müssen, um von je zwei einander widersprechenden Beschaffenheiten b und Nicht-b ihr die Eine in Wahrheit beizulegen, die andere absprechen zu können. Genauer ist die hier erwähnte Bestimmung ein einziger einfacher Theil der Zeit, ein Zeitpunct oder Augenblick, in welchem wir uns die Substanz x, der wir von je zwei widersprechenden Beschaffenheiten, b und Nicht-b, Eine mit Sicherheit beilegen wollen, vorstellen müssen; dergestalt, dass also unser Ausspruch eigentlich lauten muss: x in dem Zeitpuncte t hat entweder die Beschaffenheit b oder Nicht-b. Gesteht man mir diese Erklärung des Begriffes eines Augenblickes erst als richtig zu, dann kann ich auch deutlich angeben, was die Zeit selbst und zwar die ganze Zeit oder die Ewigkeit sei, nämlich dasjenige Ganze, dem alle Augenblicke als Theile zugehören. Und jede endliche Zeit, d. h. jede innerhalb zweier gegebener Augenblicke enthaltene Zeitdauer oder Zeitlänge erkläre ich als den Inbegriff aller der Augenblicke, die zwischen jenen zwei Gränzaugenblicken liegen. Diesen Erklärungen zufolge ist also kein Unterschied zwischen der Zeit und der Ewigkeit, wenn man unter jener nicht (wie es oft geschieht) eine beschränkte, endliche, sondern die ganze (nach beiden Richtungen hin endlose) Zeit versteht. Wohl aber besteht ein grosser Unterschied in der Art, wie Gott und wie die veränderlichen oder geschaffenen Wesen in dieser Zeit sich befinden. Diese nämlich sind in der Zeit, indem sie sich in ihr verändern, Gott aber ist zu aller Zeit ganz unveränderlich derselbe. Dies hat Veranlassung gegeben, ihn allein ewig, die übrigen Wesen aber, seine Geschöpfe, zeitliche Wesen zu nennen. — Dass jedes auch noch so kurze Weilchen, wie ein Blick mit den Augen, schon eine unendliche Menge ganzer Zeitlängen enthalte: dies sich in einem sinnlichen Bilde auszumalen, mag eine schwere Aufgabe für unsere Phantasie sein; genug, dass der Verstand es begreift und als etwas erkennt, das gar nicht anders sein kann. Aus dem Begriffe der Zeit, den wir hier andeuteten, lässt sich auch selbst der objective Grund hievon erkennen; doch würde die Auseinandersetzung desselben hierorts zu weitläufig sein. Ungereimt wäre nur, wenn wir behaupteten, dass in der kurzen Zeit die gleiche Menge von Augenblicken wie in der längeren stecke, oder dass die unendlich vielen Zeitlängen, in welche sich jene zerlegen lässt, von einer gleichen Länge, wie bei irgend einer längeren Zeit wären.

Der Trugschluss endlich, der die Realität des Begriffes der Zeit gänzlich vernichten will, liegt so am Tage, dass es kaum eines Wortes zu seiner Widerlegung bedarf. Wir gestehen ja, dass die Zeit überhaupt nichts Existirendes sei, und so hat freilich weder die vergangene, noch die zukünftige Zeit Existenz; denn selbst die gegenwärtige hat keine: aber wie soll hieraus folgen, dass die Zeit Nichts sei? Sind denn nicht auch Sätze und Wahrheiten an sich — Etwas, obgleich sich Niemand einfallen lässt, zu behaupten, dass sie — wenn man mit ihnen nicht ihre Auffassung in das Bewusstsein eines denkenden Wesens, also nicht wirkliche Gedanken oder Urtheile verwechselt — etwas Existirendes wären?

§. 40.

Hinsichtlich der Paradoxien in der Lehre vom Raume ist es bekannt, dass man auch diesen nicht zu erklären gewusst; dass man auch ihn häufig für etwas Existirendes gehalten, bald mit den Substanzen, die sich in ihm befinden, verwechselt, bald ihn sogar für Gott selbst, wenigstens für ein Attribut der Gottheit gehalten; dass selbst der grosse Newton auf den Gedanken verfiel, den Raum für das Sensorium der Gottheit zu erklären; dass man nicht nur die im Raume befindlichen Substanzen sich oft bewegen, sondern ihn selbst d. h. die Orte ihre Orte verändern liess; dass man (seit Des Cartes) entdeckt zu haben glaubte, nicht alle, sondern nur die sogenannten materiellen Substanzen befänden sich im Raume: bis endlich Kant sogar auf den unglücklichen, von Vielen noch jetzt ihm nachgesprochenen Einfall gerieth, den Raum sowohl als die Zeit gar nicht als etwas Objectives, sondern als eine blosse (subjective) Form unserer Anschauung zu betrachten; dass man seitdem die Frage aufgeworfen, ob andere Wesen nicht einen anderen Raum, z. B. mit zwei oder vier Dimensionen, haben; dass endlich Herbart uns vollends mit einem doppelten, einem starren und stetigen Raum, und einer eben solchen doppelten Zeit hat beschenken wollen. Ueber dies Alles habe ich mich schon an anderen Orten erklärt.

Mir ist nämlich der Raum, ähnlicher Weise wie die Zeit, keine Beschaffenheit der Substanzen, sondern nur eine Bestimmung an denselben, so zwar, dass ich diejenigen Bestimmungen an den geschaffenen Substanzen, welche den Grund angeben, warum sie bei dem Besitze ihrer Beschaffenheiten in einer gewissen Zeit gerade diese Veränderungen in einander hervorbringen, die Orte, an welchen sie sich befinden, den Inbegriff aller Orte aber den Raum, den ganzen Raum nenne. Diese Erklärung setzte mich in den Stand, die Lehren der Raumwissenschaft aus jenen der Zeitlehre objectiv abzuleiten, also z. B. zu zeigen, dass und warum der Raum drei Ausdehnungen habe u. m. A.

Die Paradoxien also, die man schon in dem Begriffe des Raumes, in jener Gegenständlichkeit, die ihm trotz dem, dass er nichts Wirkliches sei, zukommen soll, in der unendlichen Menge seiner Theile und in dem stetigen Ganzen gefunden, welches sie unter einander bilden, trotz dem, dass auch nicht zwei dieser einfachen Theile (Puncte) einander unmittelbar berühren, diese Scheinwidersprüche glaube ich nicht ferner besprechen zu sollen, sondern als abgethan betrachten zu dürfen.

Das Erste, was eine nähere Beleuchtung noch erheischt, möchte wohl der Begriff der Grösse einer räumlichen Ausdehnung sein. Dass aller Ausdehnung Grösse zukomme, darüber ist kein Streit; auch darüber ist man einig, dass sich, wie bei der Einen zeitlichen, so auch bei den drei räumlichen Ausdehnungen die vorkommenden Grössen nur durch ihr Verhältniss zu Einer, die man willkürlich als Maasseinheit angenommen hat, bestimmen lassen; ingleichen, dass diese zur Einheit angenommene Ausdehnung von eben derselben Art, wie die durch sie zu messenden, also für Linien eine Linie, für Flächen eine Fläche, für Körper ein Körper*) sein müsse. Fragen wir aber jetzt, worin das

*) Vielleicht ist es Manchem nicht unlieb, hier gelegenheitlich die Erklärung dieser drei Arten räumlicher Ausdehnung zu lesen. Gesteht man die §. 38 gegebene Erklärung einer Ausdehnung überhaupt als richtig zu (und sie hat das Verdienst, dass sie mit einer leicht anzubringenden Erweiterung auch auf diejenigen Grössen der allgemeinen Grössenlehre, welche man stetig veränderliche nennt, sich ausdehnen lässt): so sage ich, ein räumlich Ausgedehntes sei einfach ausgedehnt, oder eine Linie, wenn jeder

eigentlich bestehe, was wir die Grösse einer räumlichen Ausdehnung nennen, so möchte man wohl, zumal da eine solche Ausdehnung doch aus nichts Anderem als aus Puncten, welche nach einer gewissen Regel geordnet sind, bestehet, bei einer Grösse aber nie auf die Ordnung, sondern nur auf die Menge der Theile gesehen werden soll, — sehr geneigt sein, zu schliessen, nur eben diese Menge der Puncte sei es, was wir uns unter der Grösse eines jeden Raumdinges denken; wie dieses auch der Name selbst zu bestätigen scheint, wenn wir die Grösse einer Fläche oder eines Körpers geradezu den Inhalt dieser Raumdinge nennen. Dennoch zeigt eine nähere Betrachtung, dies sei nicht so. Oder wie könnten wir sonst annehmen, was wir doch allgemein und unbedenklich thun, dass sich die Grösse eines Raumdinges, z. B. eines Würfels, nicht im Geringsten ändert, ob wir die Umgränzung desselben, hier also die Oberfläche des Würfels (die doch selbst schon eine Grösse hat) mit zu dem Inhalte desselben rechnen, oder nicht? Und so verfahren wir unstreitig, wenn wir z. B. die Grösse eines Würfels von der Seite 2 achtmal so gross finden, als einen Würfel, dessen Seite $= 1$ ist, ohngeachtet der erste 12 quadratische Seitenflächen von der Grösse $= 1$ weniger hat, als die letzteren, indem durch ihre Zusammenstellung in einem einzigen Würfel von 24 solchen Quadraten, die in das Innere des grösseren Würfels kommen, die Hälfte wegfällt. Hieraus geht denn hervor, dass wir uns unter der Grösse einer räumlichen Ausdeh-

---

Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung einen oder mehrere, keinesfalls aber so viele Nachbarn hat, dass deren Inbegriff für sich allein schon ein Ausgedehntes wäre; ich sage ferner, ein räumlich Ausgedehntes sei doppelt ausgedehnt oder eine Fläche, wenn jeder Punct für jede hinlängllch kleine Entfernung eine ganze Linie von Puncten zu seinen Nachbarn hat; ich sage endlich, ein räumlich Ausgedehntes sei dreifach ausgedehnt oder ein Körper, wenn jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Fläche voll Puncte zu seinen Nachbarn hat.

nung, sei es Linie, Fläche oder Körper, eigentlich doch nichts Anderes denken, als eine Grösse, welche aus einer zur Einheit angenommenen Ausdehnung von derselben Art mit der zu messenden nach einem solchen Gesetze abgeleitet wird, dass, wenn wir, nach eben diesem Gesetze verfahrend, aus dem Stücke *M* die Grösse *m* und aus dem Stücke *N* die Grösse *n* ahleiten, wir nach demselben Gesetze verfahrend, aus dem durch die Verbindung der Stücke *M* und *N* erzeugten Ausgedehnten, die Grösse $m + n$ erhalten, gleichviel ob wir die Gränzen, die *M* und *N* und das aus beiden entstehende Ganze $M + N$ haben, mit in Betracht ziehen oder nicht. Dass sich aus diesem Begriffe die allgemeinsten Formeln, welche die Raumwissenschaft für die Rectification, die Complanation und die Cubirung aufzuweisen hat, in der That ableiten lassen, ohne dass es sonst einer anderen Voraussetzung, namentlich auch nicht der fälschlich so genannten Grundsätze des Archimedes bedürfte, ist in der schon §. 37 erwähnten Schrift gezeigt.

§. 41.

Auf die seither gegebenen Erklärungen uns stützend, dürfen wir nun ohne Besorgniss, man werde uns eines Widerspruches beschuldigen können, Sätze, wie folgende, aufstellen, so paradox auch einige für die gewöhnliche Vorstellungsweise erscheinen mögen.

1. Der Inbegriff aller Puncte, die zwischen den beiden *a* und *b* liegen, stellt eine Ausdehnung von einfacher Art oder Linie dar; sowohl wenn wir die Puncte *a* und *b* mit dazurechnen, wo sie dann eine begränzte Gerade ist, als auch wenn wir den einen oder den anderen oder auch beide Gränzpuncte nicht dazurechnen, wo sie also unbegränzt, in jedem Falle aber stets von derselben Länge ist, wie vorher. Jede lergleichen unbegränzte Gerade hat an der Seite, wo ihr der Gränzpunct fehlt, eben desshalb keinen äussersten (ent-

ferntesten) Punct, sondern hinter jedem steht noch ein fernerer, obgleich ihre Entfernung stets eine endliche verbleibt.

2. Die Umfangslinie eines Dreieckes *abc* lässt sich zusammensetzen 1) aus der auf beiden Seiten begränzten Geraden *ab*, 2) der nur auf einer Seite, bei *c*, begranzten *ac*, und 3) der beiderseits Unbegränzten *bc*; ihre Länge aber ist gleich der Summe der drei Längen von *ab*, *bc* und *ca*.

3. Wenn wir uns vorstellen, dass die Gerade *az* durch den Punct *b* halbirt, das Stück *bz* abermals durch den Punct *c* halbirt, das *cz* wieder durch den Punct *d* halbirt und so ohne Ende fortgefahren werde; und wenn wir annehmen, dass diese unendlich vielen Halbirungspuncte *b*, *c*, *d*, ... und der Punct *z* aus dem Inbegriffe der Puncte, die zwischen *a* und *z* liegen, hinweggedacht werden sollen: so wird der Inbegriff der übrigen noch immer den Namen einer Linie verdienen, und ihre Grösse wird noch dieselbe wie vorhin sein. Rechnen wir aber *z* mit zu dem Inbegriffe: so ist das Ganze kein stetig Ausgedehntes mehr zu nennen; denn der Punct *z* steht vereinzelt, weil es für ihn keine auch noch so kleine Entfernung gibt, von der gesagt werden könnte, dass er für diese und für jede kleinere einen Nachbar in diesem Puncteninbegriffe habe. Nämlich für alle Entfernungen, welche der Form $\frac{az}{2^n}$ unterstehen, fehlt es an einem Nachbar für *z*.

4. Wenn die Entfernung der Puncte *a* und *b* der Entfernung der Puncte α und β gleicht: so muss auch die Menge der Puncte zwischen *a* und b der Menge der Puncte zwischen α und β gleich angenommen werden.

5. Ausdehnungen, die eine gleiche Menge von Puncten haben, sind auch von gleicher Grösse, nicht aber umgekehrt müssen zwei Ausdehnungen, welche von gleicher Grösse sind, auch gleichviel Puncte haben.

6. Bei einem Paar Raumdingen, welche einander vollkommen ähnlich sind, müssen sich auch die Mengen ihrer Puncte genau wie ihre Grössen verhalten.

7. Ist also das Grössenverhältniss zwischen zwei einander vollkommen ähnlichen Raumdingen ein irrationales: ist auch das Verhältniss zwischen den Mengen ihrer Puncte irrational. Es gibt also Mengen (nämlich unendliche nur), deren Verhältniss in jeder beliebigen Art irrational ist.

§. 42.

Unter diesen Sätzen, deren Anzahl (wie man sieht) leicht vermehrt werden könnte, hat meines Wissens der sechste allein in den Schriften der Mathematiker schon bisher eine Beachtung gefunden; jedoch nur in der Art, dass man im Widerstreite mit ihm den Satz aufstellte, ähnliche Linien müssten, wie verschieden sie auch in ihrer Grösse wären, doch eine gleiche Menge von Puncten besitzen. Solches behauptete Dr. J. K. Fischer (Grundriss der gesammten höheren Mathematik. Leipzig, 1809. Bd. II. §. 51. Anm.) namentlich von ähnlichen und concentrischen Kreisbögen, aus dem beigefügten Grunde, weil sich durch jeden Punct des Einen ein Halbmesser ziehen liesse, der Einem Puncte des anderen begegnet. Bekanntlich aber hat schon Aristoteles sich mit dieser Paradoxie beschäftigt. Fischers Schlussweise verräth offenbar die Meinung, dass ein Paar Mengen, wenn sie auch unendlich sind, einander gleich sein müssten, sobald nur jeder Theil der Einen mit Einem der anderen zu Einem Paare verknüpft werden kann. Nach Aufdeckung dieses Irrthums bedarf es keiner weiteren Widerlegung jener Lehre, von der sich überdies gar nicht einsehen liesse, warum wir, sofern sie richtig wäre, diese Behauptung der gleichen Punctenmenge nur eben auf Kreisbögen und auf concentrisch liegende und ähnliche beschränken müssten, da sich der gleiche Grund auch für alle gerade Linien und für die verschiedenartigsten, nichts weniger als einander ähnlichen Curven anführen liesse.

§. 43.

Kaum gegen eine in die Raumlehre gehörige Wahrheit dürften sich die Lehrer dieser Wissenschaft öfter versündiget haben, als gegen die, dass jede zwischen zwei Puncten im Raume liegende Entfernung, somit auch jede auf beiden Seiten begränzte Gerade nur eine endliche sei, d. h. mit jeder anderen in einem durch blosse Begriffe genau bestimmbaren Verhältnisse stehe. Denn es wird kaum Einen Geometer geben, der nicht zuweilen von unendlich grossen Entfernungen gesprochen und eine Gerade, die doch nach beiden Seiten hin ihre Gränzpuncte haben sollte, unter gewissen Umständen nicht hätte unendlich gross werden lassen. Als Beispiel genüge uns hier die Hinweisung auf jenes bekannte Linienpaar, welches die, im geometrischen Sinne des Wortes zu verstehende, Tangente und Secante eines Winkels oder Bogens genannt wird. Diese sollen nach der ausdrücklichen Erklärung ein Paar gerade Linien sein, welche nach beiden Seiten hin begränzt sind: und doch wie Wenige gibt es, die ein Bedenken tragen zu lehren, dass für den rechten Winkel Tangente sowohl als Secante unendlich gross würden. Dennoch wird man für diese irrige Lehre gleich auf der Stelle bestraft durch die Verlegenheit, in die man hierbei geräth, sobald man angeben soll, ob diese zwei unendlich grossen Grössen als positiv oder als negativ anzusehen seien? Denn offenbar spricht derselbe Grund, der für das Eine angeführt werden könnte, auch für das Andere; weil ja bekanntlich eine durch den Mittelpunct des Kreises gleichlaufend zu einer Berührungslinie desselben gezogene Gerade zu beiden Seiten dieser Berührenden ein völlig gleiches Verhältniss hat, daher so wenig auf der einen als auf der anderen Seite mit ihr zusammenstösst. Auch in dem Grössenausdrucke für diese beiden Linien $= \frac{1}{0}$ liegt, da Null weder als positiv noch als negativ angesehen werden kann, nicht der geringste

Grund, diese vermeintlich unendliche Grösse eher für positiv oder für negativ zu erklären. Es ist also nicht bloss paradox, sondern ganz falsch, das Vorhandensein einer unendlich grossen Tangente des rechten Winkels, so wie sämmtlicher Winkel von der Form

$$\pm n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

anzunehmen.

Dass es, strenge gesprochen, auch für den Winkel $= 0$ oder für den $= \pm n \,.\, \pi$ weder Sinus noch Tangente gebe, sei bloss gelegenheitlich erinnert. Der Unterschied in diesen beiden Annahmen ist bloss, dass sich bei letzterer kein falsches Ergebniss herausstellt, wenn man in Fällen, wo diese Grössenausdrücke als Factoren erscheinen, die Producte wie gar nicht vorhanden betrachtet, dort aber, wo sie als Divisoren auftreten, schliesst, dass die Rechnung etwas Ungesetzliches verlange.

§. 44.

Ein eben so unberechtigtes Verfahren, welches jedoch glücklicher Weise wenig Nachahmer fand, war es, wenn Joh. Schulz die Grösse des ganzen unendlichen Raumes berechnen wollte, indem er aus dem Umstande, dass sich aus jedem gegebenen Puncte *a* nach allen Seiten hin, d. h. in jeder Richtung, die es nur immer gibt, gerade Linien in das Unendliche hinaus gezogen denken lassen, und aus dem ferneren Umstande, dass jeder nur immer gedenkbare Punct *m* des ganzen Weltraumes in Einer und nur in Einer dieser Linien liegen müsse, sich zu dem Schlusse berechtiget hielt, dass man den ganzen unendlichen Raum als eine Kugel ansehen dürfe, die aus dem willkürlich gewählten Puncte *a* mit einem Halbmesser von der Grösse $= \infty$ beschrieben wäre; woraus sich ihm denn sofort ergab, dass der ganze unendliche Raum genau nur die Grösse $\frac{4}{3}\pi\infty^3$ habe.

Es wäre ohne Zweifel einer der wichtigsten Lehrsätze der Raumwissenschaft, wenn dies als wahr gerechtfertiget werden könnte. Und gegen die beiden Vordersätze (die ich jedoch hier eben nicht genau nach Schulzens, mir nicht vor Augen liegenden Vortrage darstellte) dürfte sich kaum etwas Gegründetes einwenden lassen. Denn wollte Jemand sagen, der zweite Vordersatz müsse schon darum irrig sein, weil aus ihm eine sehr ungleiche Vertheilung der Puncte im Weltraume nämlich eine viel dichtere Anhäufung um den doch willkürlich zu wählenden Mittelpunct a herum folgen würde: so gäbe er nur zu erkennen, das §. 21 f. von uns bekämpfte Vorurtheil noch nicht überwunden zu haben. Gefehlt und ganz offenbar gefehlt hat Schulz nur darin, dass er die Geraden, die aus dem Puncte a nach allen Richtungen ins Unbegränzte hinaus gezogen sein müssen, wenn jeder Punct des Raumes in irgend einer derselben gelegen sein soll, dennoch als Halbmesser, somit als beiderseits begränzte Linien annahm. Denn nur aus dieser Voraussetzung ist ja die Kugelgestalt des unendlichen Raumes und die Berechnung seiner Grösse $= \frac{3}{4} \pi \infty^3$ gefolgert. Aus diesem Irrthume fliesst aber auch die Ungereimtheit, dass — weil es zu jeder Kugel doch auch einen sie umschliessenden Cylinder oder auch einen dergleichen Würfel, ja noch gar viele andere Raumdinge z. B. unendlich viele sie umgebende andere Kugeln von gleichem Durchmesser geben muss — der angeblich ganze Raum nicht der ganze, sondern ein blosser Theil ist, der noch unendlich viele andere Räume ausser sich hat.

Die einzige Bemerkung, dass eine, auch nur nach Einer Seite hin in das Unendliche hinaus gezogene Linie eben desshalb keine nach dieser Seite hin begränzte Linie sei, dass also auch von einem Gränzpuncte derselben so wenig gesprochen werden könne, wie etwa von der Spitze einer Kugel oder der Krümmung einer Geraden oder eines einzelnen Punctes, oder dem Puncte des Zusammenstosses zweier Gleichlaufenden,

— diese einzige Bemerkung, sage ich, reicht hin, um die meisten Paradoxien (*mysteria infiniti*), die Boscowich in s. *Diss. de transformatione locorum geometricorum* (angehängt s. *Elem. univ. Matheseos T. III. Romae* 1754) vorgebracht hat, in ihrer Nichtigkeit zu zeigen.

§. 45.

Nicht viel seltener als unendlich grosse hat man auch unendlich kleine Entfernungen und Linien im Raume angenommen, besonders wenn es ein scheinbares Bedürfniss wurde, Linien oder Flächen, deren kein Theil (der noch selbst ausgedehnt ist) gerad oder eben ist, gleichwohl als solche, die gerad oder eben sind, zu behandeln, z. B. um ihre Länge oder die Grösse ihrer Krümmung oder auch wohl gewisse für die Mechanik merkwürdige Beschaffenheiten derselben leichter bestimmen zu können. Ja man erlaubte sichs in solchen Fällen sogar, Entfernungen zu erdichten, die durch unendlich kleine Grössen der zweiten, dritten u. a. höherer Ordnungen gemessen werden sollten.

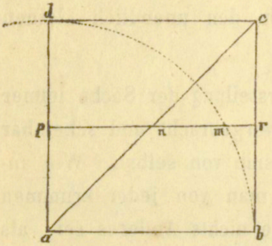
Dass man bei diesem Verfahren, besonders in der Geometrie, nur selten auf ein falsches Resultat gerieth, hatte man bloss dem schon §. 37 erwähnten Umstande zu danken, dass die veränderlichen Grössen, die sich auf räumliche Ausdehnungen, welche bestimmbar sein sollen, beziehen, von einer solchen Beschaffenheit sein müssen, dass sie, höchstens mit Ausnahme einzelner isolirt stehender Werthe, eine erste, zweite und jede folgende abgeleitete Function haben. Denn wo dergleichen bestehen, da gilt dasjenige, was von den sogenannten unendlich kleinen Linien, Flächen und Körpern behauptet wird, insgemein schon von allen Linien, Flächen und Körpern, die — ob sie gleich stets endlich verbleiben — doch so klein, als man nur will, genommen werden, d. h. (wie man sich ausdrückt) in das Unendliche abnehmen können. Solche veränderliche Grössen also waren es eigentlich, von denen galt, was man nur fälschlicher Weise von den unendlich kleinen Entfernungen aussagte.

Dass aber bei einer solchen Darstellung der Sache immer doch viel Paradoxes, ja ganz Irriges vorgebracht und scheinbar erwiesen werden musste, begreift sich von selbst. Wie anstössig klang es z. B. schon, wenn man von jeder krummen Linie und Fläche behauptete, dass sie nichts Anderes sei, als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen geraden Linien und ebenen Flächen, die nur unendlich klein vorausgesetzt werden müssten; besonders wenn daneben wieder unendlich kleine Linien und Flächen, die gleichwohl krumm seien, zugestanden wurden. Wie sonderbar war es, wenn man von Linien, welche in einem ihrer Puncte gar keine Krümmung, sondern z. B. einen Wendepunct haben, behauptete, dass ihre Krümmung in diesem Puncte unendlich klein, ihr Krümmungshalbmesser also unendlich gross wäre; oder von Linien, die in einem ihrer Puncte in eine Spitze auslaufen, dass ihre Krümmung hier unendlich gross, ihr Krümmungshalbmesser unendlich klein wäre, u. dergl. m.

§. 46.

Als ein recht auffallendes und zugleich sehr einfaches Beispiel, zu welchen Ungereimtheiten die Annahme solcher unendlich kleinen Entfernungen Stoff und Veranlassung darbot, erlaube ich mir hier nur die Anführung eines Satzes, den nach Kästners Berichte (Anfangsgründe der höh. Analysis, Bd. II. Vorr.) schon Galilei in s. *Discorsi e dimostrazioni matematiche* etc., wohl nur in der Absicht, um das Nachdenken zu wecken, aufgestellt hatte, nämlich, dass der Umfang eines Kreises so gross als dessen Mittelpunct wäre.

Um eine Vorstellung von der Art, wie man dies darzuthun suchte, zu erhalten, denke der Leser sich ein Quadrat *abcd*, darin



aus *a* als dem Mittelpuncte mit dem Halbmesser $ab = a$ der Quadrant bd beschrieben, dann die Gerade pr parallel zu ab gezogen ist, und die beiden Seiten des Quadrats ad und bc in p und r, die Diagonale ac in n, und den Quadranten in m schneidet; kurz die bekannte Figur, durch die man darzuthun pflegt, dass ein Kreis mit dem Halbmesser pn gleich sei dem Ringe, der durch Abzug des Kreises mit pm von dem mit pr zurückbleibt; oder dass

$$\pi \,.\, \mathrm{pn}^2 = \pi \,.\, \mathrm{pr}^2 - \pi \,.\, \mathrm{pm}^2$$

sei. Wenn pr stets näher zu ab heranrückt, wird offenbar der Kreis mit pn stets kleiner und der Ring zwischen den Kreisen mit pm und pr immer schmäler. Geometer also, die keinen Anstoss an unendlich kleinen Entfernungen nahmen, dehnten dieses Verhältniss auch auf den Fall aus, wenn pr unendlich nahe an ab heranrückt, also z. B. der Abstand $ap = dx$ wird, wo dann die Gleichung

$$\pi \,.\, \mathrm{dx}^2 = \pi \,.\, \mathrm{a}^2 - \pi \,(\mathrm{a}^2 - \mathrm{dx}^2)$$

eintreten sollte, die sich auch in der That als eine bloss identische rechtfertigt. In diesem Falle aber war ihrer Vorstellung nach der Kreis mit pn ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung geworden; der Ring dagegen, der nach dem Abzuge des Kreises mit pm von dem mit pr übrig bleibt, hatte jetzt nur die Breite

$$-\,\mathrm{mr} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{dx}^2}{\mathrm{a}} - \frac{1}{2\,.\,4}\,.\,\frac{\mathrm{dx}^4}{\mathrm{a}^3} - \ldots,$$

die selbst schon ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung war, erhalten. Wurde nun vollends angenommen, dass pr gänzlich in ab übergehe, so zog sich der unendlich kleine Kreis mit pn in den einzigen Punct *a* zusammen, und der unendlich schmale Ring von der Breite *mr* verwandelte sich in die blosse Umfangslinie des Kreises mit dem Halbmesser *ab*. Daher man berechtigt zu sein schien zu dem Schlusse, dass der blosse Mittelpunct *a* jedes beliebigen Kreises mit *ab* so gross als die ganze Umfangslinie desselben wäre.

Das Täuschende in diesem Schlusse wurde vornehmlich durch die Einmengung des unendlich Kleinen erzeugt. Durch dieses nämlich wurde der Leser auf eine Gedankenreihe geleitet, die ihn viel leichter übersehen lässt, wie vieles Ungereimte in den Behauptungen liegt, dass von dem Kreise mit *pn*, wenn statt des Punctes *p* zuletzt der Punct *a* zu betrachten kommt und gar kein Halbmesser wie *pn* mehr vorhanden ist, doch noch der Mittelpunct *a* bleibe, d. h. dass eben so der durch den Abzug des Kreises mit dem kleineren Halbmesser *pm* von dem Kreise mit dem grösseren Halbmesser *pr* entstehende Ring zuletzt, wenn beide Halbmesser und somit auch Kreise einander gleich werden, zur Umfangslinie des vorhin grösseren werde. Denn freilich bei den unendlich kleinen Grössen ist man gewohnt, dieselben Grössen bald als einander gleich, bald wieder die Eine als um ein unendlich Kleines einer höheren Ordnung grösser oder kleiner als die anderen, bald auch als völlig gleich der Null zu betrachten. Wollen wir schlussgerecht verfahren, so dürfen wir aus der richtig angesetzten Gleichung

$$\pi \, . \, \mathrm{pn}^2 = \pi \, . \, \mathrm{pr}^2 - \pi \, . \, \mathrm{pm}^2$$

welche die blossen Grössen (Flächeninhalte) der in Rede stehenden Kreise vergleicht, nichts Anderes schliessen, als dass für den Fall, wo *pr* und *pm* einander gleich werden, der Kreis mit *pn* gar keine Grösse habe, demnach gar nicht vorhanden sei.

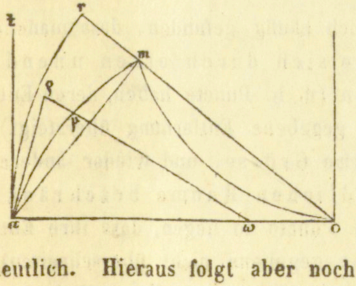
Wahr ist es freilich (und ich habe die zu dieser Wahrheit führenden Prämissen §. 41 selbst aufgestellt), dass es auch Kreise mit und ohne Umfangslinie gebe, und dass dies an der Grösse derselben, die lediglich von der Grösse ihres Halbmessers abhängt, nichts ändere. Und daraus könnte wohl Jemand noch einen neuen Scheinbeweis für den Satz Galilei's hernehmen wollen, indem er von der allerdings erlaubten Forderung ausginge, dass man den Kreis mit pm sich ohne Umfangslinie, den Kreis mit pr aber sammt seiner Umfangslinie denken solle. Dann nämlich würde nach Hinwegnahme des Kreises mit pm von dem mit pr, wenn wir von pr zu ab übergehen, in der That nur die Umfangslinie des Kreises mit ab übrig bleiben. Aber auch jetzt noch liesse sich von keinem Kreise um a, der sich in einen einzigen Punct zusammengezogen habe, sprechen, und noch viel weniger wäre es erlaubt, sich auf die obige Gleichung berufen zu wollen, um aus ihr zu folgern, dass der Punct a und jene Umfangslinie einander gleich gross wären, da die besagte Gleichung nur von den Grössen der drei Kreise, sie mögen mit oder ohne Umfangslinien betrachtet werden, handelt.

§. 47.

Das eben besprochene Beispiel wurde, wie schon erwähnt, von seinem Erfinder selbst nicht aufgestellt, um als Wahrheit angestaunt zu werden. Als ernste Wahrheit aber lehrt man von der gemeinen Cykloide, sie habe in dem Puncte, wo sie auf ihre Grundlinie trifft, eine unendlich grosse Krümmung oder (was eben so viel heisst) einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser und stehe hier in senkrechter Richtung auf. Es hat dies auch seine völlige Richtigkeit, versteht man es so, dass der Krümmungshalbmesser in das Unendliche abnimmt, während der Cykloidalbogen sich der Grundlinie in das Unendliche nähert; wie auch, dass seine Richtung in dem Puncte des Eintrittes selbst eine senkrechte ist. Nur was von dem unendlich kleinen oder zu Null gewordenen Krümmungshalbmesser gesagt wird, bestehet (richtiger ausgedrückt) bloss darin, dass (weil die Curve bekanntlich über ihrer Grundlinie nach beiden Seiten hin in das Unendliche fortgeht und somit *keine Gränzpuncte* hat) auch in diesem Puncte zwei Bogenstücke zusammentreffen und zwar in der Art, dass sie, weil beide senkrecht auf der Grundlinie stehen, hier mit einander eine *Spitze* bilden, und zwar eine solche, wo beide nur Eine und dieselbe Richtung haben, oder (wie man schon minder richtig sagt) mit ihren Richtungen hier den *Winkel* Null einschliessen.

Allein man kann durch Rechnung überzeugt sein, dass sich dies Alles in der That so verhalte, und doch nicht begreifen, wie es so komme, ja auch nur möglich sei. Um auch dies einleuchtend zu machen, wodurch das Paradoxon erst gelöst wird, müssen wir zuvor begreifen, warum die Richtung, in welcher die gemeine Cykloide über ihre Grundlinie emporsteigt, eine senkrechte sei.

Aus der Art, wie die gemeine Cykloide construirt werden kann, nämlich, dass man aus jedem Puncte *o* der Basis einen diese berührenden Kreisbogen mit dem Halbmesser des erzeugenden Kreises beschreibt und, von demselben ein Stück *om* von gleicher Länge mit der Entfernung des Punctes *o* vom Anfangspuncte *a* abschneidend, *m* als einen Punct der Cykloide betrachtet, — ergibt sich sofort, dass der Winkel *mao* einem rechten immer näher tritt, je näher man mit dem Puncte *o* zu *a* rückt, indem der Winkel *moa*, dessen Maass der halbe Bogen *om* ist, immer kleiner und das Verhältniss der beiden Seiten *oa* und *om* im Dreiecke *moa* sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit nähert; daher die Winkel an der dritten Seite *am* sich immer weniger vom rechten unterscheiden. Die wirkliche Berechnung zeigt dies ganz deutlich.



Hieraus folgt aber noch überdies, dass der Cykloidalbogen *am* ganz auf derselben Seite der Chorde *am*, namentlich zwischen ihr und dem aus a errichteten Lothe at liege; somit, dass dieses die Richtung der Curve im Puncte a bezeichne. Beschreiben wir ferner aus o als Mittelpunct einen von a ausgehenden Kreisbogen mit oa; so ist offenbar, dass dieser die Chorde om erst in einem Puncte r ihrer Verlängerung schneide, weil $or = oa > om$ sein muss. Ist nun μ irgend ein noch näher an a liegender Punct der Curve, so gibt es für ihn ein noch näher an a liegendes ω in der ao von der Art, dass von der Chorde $\omega\mu$ dasselbe gilt, was so eben von der om behauptet wurde, nämlich, dass ein aus ω als Mittelpunct mit dem Halbmesser ωa beschriebener Kreisbogen in die Verlängerung $\omega\mu$ über μ irgendwo in ϱ eintrifft. Wegen $\omega a < oa$ liegt aber der Kreisbogen $a\varrho$ innerhalb des Kreisbogens ar, also zwischen dem Cykloidalbogen $a\mu$ und dem Kreisbogen ar. Wir sehen demnach, dass es zu jedem, mit noch so kleinem Halbmesser oa beschriebenen Kreisbogen ar, den die Cykloide am in a berührt, einen anderen $a\varrho$ gibt, der ihr noch näher kommt in dieser Gegend; mit anderen Worten, dass es keinen auch noch so kleinen Kreis gibt, der sich als Maass der in a stattfindenden Krümmung, falls es hier eine gibt, ansehen liesse. Es gibt also hier in Wahrheit keine Krümmung, sondern die Curve, die in diesem Puncte nicht endet, hat hier, wie wir schon wissen, eine Spitze.

§. 48.

Paradox hat man es auch häufig gefunden, dass manche räumliche Ausdehnungen, die sich durch einen unendlichen Raum verbreiten (d. h. Puncte haben, deren Entfernung von einander jede gegebene Entfernung übersteigt), gleichwohl nur eine endliche Grösse, und wieder andere, die in einem ganz endlichen Raume beschränkt sind (d. h. deren sämmtliche Puncte so liegen, dass ihre Entfernungen von einander eine gegebene nicht überschreiten), doch eine unendliche Grösse besitzen; oder endlich dass manche räumliche Ausdehnung eine endliche Grösse behält, ob sie gleich unendlich viele Umgänge um einen Punct herum macht.

1. Wir müssen hier vor Allem unterscheiden, ob unter der räumlichen Ausdehnung, von welcher hier gesprochen wird, ein aus mehreren von einander getrennten Theilen bestehendes Ganze (dergleichen z. B. die mit vier Zweigen versehene Hyperbel ist), oder nur ein durchaus zusammenhängendes Ganze, d. h. nur eine solche Ausdehnung verstanden werden soll, die keinen einzigen, selbst noch eine Ausdehnung darstellenden Theil hat, an dem nicht wenigstens Ein Punct vorhanden wäre, der, zu den übrigen Theilen gerechnet, mit ihnen abermals ein Ausgedehntes bildet.

Dass eine Ausdehnung, die aus getrennten Theilen besteht, durch einen unendlichen Raum sich ausbreiten könne, ohne darum schon unendlich gross zu sein, wird Niemand anstössig finden, der daran denkt, dass auch eine unendliche Reihe von Grössen, wenn sie im geometrischen Verhältnisse abnehmen, eine bloss endliche Summe darbeut. In diesem Sinne also kann allerdings auch eine Linie sich ins Unendliche verbreiten, und doch nur endlich sein, wie gleich diejenige, welche zum Vorschein kommt, wenn wir aus einem gegebenen Puncte *a* in gegebener Richtung *aR* eine begränzte Gerade *ab* auftragen, dann aber in einem sich immer gleichbleibenden Abstande eine Gerade *cd*, welche nur halb so gross als die vorige ist, auftragen, und nach demselben Gesetze in das Unendliche fortfahren.

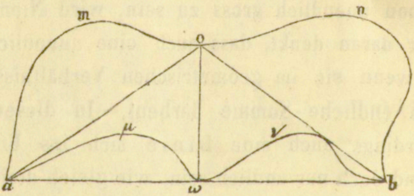
Sprechen wir aber — und das soll in dem nun Folgenden immer geschehen — nur von solchen räumlichen Ausdehnungen, die ein zusammenhängendes Ganzes gewähren: so ist wohl einleuchtend, dass unter den Ausdehnungen der niedrigsten Art, d. h. den Linien, keine zu finden sein könne, die sich in das Unendliche erstreckt, ohne zugleich eine unendliche Grösse (Länge) zu haben. Denn so ergibt es sich ja schon mit Nothwendigkeit aus der bekannten

Wahrheit, dass die kürzeste durchaus zusammenhängende Linie, die zwei gegebene Puncte mit einander verbinden soll, nur die Gerade zwischen denselben ist*).

Anders als bei den Linien ist es bei den Flächen, die bei derselben Länge bloss durch Verminderung ihrer Breite, und bei den Körpern, die bei derselben Länge und Breite bloss durch Verminderung ihrer Höhe so klein, als man nur will, gemacht werden können. Daraus begreift sich denn, warum auch Flächen, die eine unendliche Länge, und Körper,

---

*) Weil der Beweis dieser Wahrheit so kurz ist, erlaube ich mir, ihn dieser Note einzuverleiben. Ist die Linie $amonb$ nicht gerade, so muss es irgend einen Punct o in ihr geben, der ausserhalb der Geraden ab liegt und es sind, wenn wir aus o das Loth

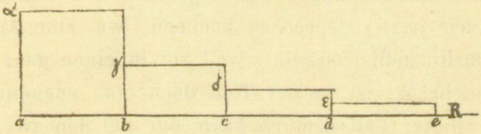


$o\omega$ auf ab fällen, die Entfernungen

$$a\omega < ao, \quad b\omega < bo.$$

Da aber alle Systeme zweier Puncte einander ähnlich sind, so gibt es zwischen den Puncten a und ω eine Linie $a\mu\omega$, ähnlich dem zwischen den Puncten a und o liegenden Stücke amo der gegebenen $amonb$, und zwischen den Puncten b und ω ebenfalls eine Linie $b\nu\omega$, ähnlich dem zwischen den Puncten b und o liegenden Stücke bno der gegebenen $bnoma$. Diese Aehnlichkeit aber fordert auch, dass sich die Länge der Geraden $a\omega$ zur Länge der $a\mu\omega$ verhalte wie die Länge der Geraden ao zur Länge des Stückes amo und die Länge der Geraden $b\omega$ zur Länge $b\nu\omega$ wie die Länge der Geraden bo zur Länge des Stückes bno. Weil nun $a\omega < ao$, so muss auch $a\mu\omega < amo$ und weil $b\mu < bo$, so muss auch $b\nu\omega < bno$ sein. Folglich ist auch das Ganze $a\mu\omega\nu b$ < das Ganze $amonb$. Die krumme Linie $amonb$ ist also nicht die kürzeste zwischen a und b, sondern die $a\mu\omega\nu b$ ist kürzer.

die neben einer unendlichen Länge auch eine unendliche Breite haben, zuweilen doch nur eine endliche Grösse behaupten. Ein Beispiel, das auch der Unkundigste begreiflich finden wird, geben wir ihm, wenn wir verlangen, dass er sich auf der in das Unendliche fortlaufenden Geraden aR die gleichen Stücke $ab = 1 = bc = cd =$ u. s. w, in das Un-



endliche aufgetragen denken, sodann über dem ersten Stücke ab das Quadrat $b\alpha$, über dem zweiten bc das Rechteck $c\gamma$, das nur die halbe Höhe bc hat, und so über jedem folgenden ein Rechteck, halb so hoch als das nächstvorhergehende vorstellen wolle, wo er gewiss sehr bald erkennen wird, dass die zusammenhängende Fläche, die ihm hier vorschwebt, in das Unendliche reicht und doch nicht grösser als 2 ist. Nicht schwieriger wird es ihm sein, sich einen Würfel zu denken, dessen Seite $= 1$ ist, und diesem in Gedanken einen zweiten Körper unterzustellen, dessen Grundfläche ein Quadrat von der Seite 2, also viermal so gross, als die Grundfläche des vorigen Würfels, die Höhe aber nur $\frac{1}{8}$ beträgt; diesem hierauf einen dritten unterzusetzen, dessen Grundfläche abermals ein Quadrat viermal so gross als des nächstvorhergehenden, die Höhe aber $\frac{1}{8}$ von der Höhe des vorigen Körpers beträgt, — und sich vorzustellen, dass nach demselben Gesetze in das Unendliche fortgefahren würde. Er wird begreifen, dass die Länge und Breite der Körper, die hier im Verfolge untersetzt werden, in das Unendliche wachsen, obgleich ihr körperlicher Inhalt nur immer kleiner wird, so zwar, dass jeder folgende die Hälfte von dem nächstvorhergehenden beträgt; dass also die Grösse des pyramidalischen Ganzen, das so zum Vorschein kommt, trotz seiner unendlichen Basis doch nie den körperlichen Inhalt $= 2$ übersteige.

2. Wie der bisher betrachtete Fall, wo eine Ausdehnung, die etwas Unendliches (eine unendliche Länge oder auch Breite) an sich hat, und gleichwohl von einer nur endlichen Grösse befunden wird, nur bei den zwei höheren Arten der Ausdehnung, den Flächen und Körpern, nicht aber bei Linien eintreten kann: so findet das Gegentheil bei dem Falle statt, auf den wir jetzt zu sprechen kommen, wo eine Ausdehnung, die desshalb endlich scheint, weil sie in einen ganz endlichen Raum beschränkt ist, in der That doch eine unendliche Grösse besitzt. Dieser Fall nämlich kann nur bei den zwei niederen Arten der Ausdehnung, den Linien und Flächen, keineswegs aber bei Körpern Platz greifen. Ein Körper, in dem es keine Puncte gibt, deren Entfernungen von einander jede gegebene Grösse überschreiten, kann sicher nicht unendlich gross sein. So ergibt es sich unmittelbar aus der bekannten Wahrheit, dass unter allen Körpern, deren Puncte eine gegebene Entfernung ε, der eine von dem andern nicht überschreiten sollen, der grösste eine Kugel vom Durchmesser ε sei. Denn diese enthält jene Puncte allzumal, und ihre Grösse ist nur $\frac{\pi}{6}.\varepsilon^3$; jeder andere diesen Raum nicht überschreitende Körper muss also nothwendig kleiner als $\frac{\pi}{6}.\varepsilon^3$ sein. Der Linien dagegen, die sich in den Raum einer einzigen, auch noch so kleinen Fläche, z. B. eines Quadratschuhes, einzeichnen lassen, gibt es unendlich viele, und jeder aus ihnen können wir eine wenigstens endliche Grösse, z. B. die Länge eines Quadratschuhes, ertheilen, auch durch Hinzufügung einer oder auch unendlich vieler Verbindungslinien sie alle zu einer einzigen durchaus zusammenhängenden Linie vereinen, deren Länge dann gewiss eine unendliche sein muss. Und völlig eben so gibt es der Flächen, die sich in den Raum eines einzigen, auch noch so kleinen Körpers, z. B. eines Cubikschuhes.

einzeichnen lassen, unendlich viele, deren jeder wir eine Grösse, z. B. die eines Quadratschuhes, ertheilen können, und durch Hinzufügung einer oder auch unendlich vieler Verbindungsflächen können wir alle diese Flächen zu einer einzigen vereinen, deren Grösse dann unstreitig eine unendlich grosse sein wird. Dieses Alles kann auch Niemand Wunder nehmen, der nicht vergisst, dass es nicht etwa dieselbe Einheit sei, mit der wir Linien, Flächen und Körper messen, und dass, obgleich die Menge der Puncte schon in jeder auch noch so kleinen Linie eine unendliche ist, in einer Fläche diese Menge jedenfalls noch unendlichemal grösser als in der Linie, in einem Körper endlich mit eben solcher Gewissheit unendlichemal grösser als in der Fläche vorausgesetzt werden muss.

3. Das dritte, im Anfange dieses §. erwähnte Paradoxon lautete, dass es auch Ausdehnungen gebe, die eine unendliche Menge von Umläufen um einen gewissen Punct herum machen, und dabei gleichwohl eine endliche Grösse behalten. Soll eine solche Ausdehnung *lineär* sein, so kann dies, wie wir so eben in No. 1 sahen, nur dann erfolgen, wenn sich die ganze Linie in einem endlichen Raume befindet. Unter dieser Bedingung aber liegt durchaus nichts Unbegreifliches in der Erscheinung, dass sie eine endliche Länge behalte, obgleich sie der Umläufe um einen gegebenen Punct unendlich viele vollbringt; wird nur die fernere Bedingung noch erfüllt, dass diese Umläufe von einer endlichen Grösse beginnend, in der gehörigen Weise bis ins Unendliche abnehmen, eine Forderung, die wieder durch den Umstand ermöglicht wird, dass es ein *blosser Punct* ist, um welchen jene Umläufe erfolgen sollen. Denn dies erlaubt, dass die Entfernungen, welche die einzelnen Puncte eines solchen Umlaufes von diesem Mittelpuncte und somit auch untereinander selbst haben, in das Unendliche abnehmen können; wo dann die Kreislinie selbst uns lehrt, dass auch die Länge dieses Umlaufes in das Unendliche vermindert werden könne. Die *logarithmische Spirale*, wenn bloss dasjenige Stück derselben ins Auge gefasst werden soll,

das, anzufangen von einem gegebenen Puncte dem Centro stets sich annähert, ohne doch je in dasselbe einzufallen, wird sich unseren Lesern als Beispiel einer Linie, wie die hier besprochene, von selbst schon aufgedrungen haben.

Soll aber die räumliche Ausdehnung, welche der Umläufe um einen gegebenen Punct unendlich viele macht, eine Fläche oder ein Körper sein: so bedarf es nicht einmal der beschränkenden Bedingung, dass sich das Raumding mit keinem seiner Puncte über eine bestimmte Weite von seinem Mittelpuncte entferne. Denn um mich auf die kürzeste Weise verständlich zu machen, denke sich der Leser die nur erwähnte Spirale als eine Art Abscissenlinie, aus deren jedem Puncte Ordinaten senkrecht auf sie und ihre Ebene hervorgehen. Der Inbegriff all dieser Ordinaten bildet dann offenbar eine Fläche (von der Art der cylindrischen), die nach der einen Seite hin sich in unendlich vielen Windungen dem Mittelpuncte nahet, ohne ihn je zu erreichen, nach der anderen aber sich ins Unendliche entfernt. Wie gross diese Fläche sei, wird von dem Gesetze abhangen, nach dem wir die Ordinaten zu- oder abnehmen lassen. Der, dem Mittelpuncte zueilende Theil aber wird jederzeit endlich verbleiben, so lange wir die Ordinaten nach dieser Seite (d. h. über dem nur endlichen Abscissenzweige) hin nicht ins Unendliche zunehmen lassen, weil jede Fläche, in der weder Abscisse noch Ordinate ins Unendliche wachsen, endlich ist. Doch auch der Theil der Fläche, der über dem anderen sich ins Unendliche entfernenden Spiralzweige steht, wird endlich bleiben, so oft die Ordinaten in einem schnelleren Verhältnisse abnehmen als die Abscissen (d. h. die Bogenlänge der Spirale) zunehmen. Wählen wir also zur Abscissenlinie die natürliche Spirale, wo der von dem Radius $= 1$ dem Mittelpuncte zueilende Zweig die Länge $\sqrt{2}$ hat, und nehmen zur Begränzung der Fläche den Bogen einer Hyperbel höherer Art, für den die Gleichung $yx^2 = a^3$: so hat derjenige Theil dieser Fläche, der von $x = a$ zu allen höheren Werthen von x gehört, doch nur die Grösse a^2, während der andere, zu allen kleineren Werthen von x gehörige Theil in das Unendliche wächst. Nehmen wir aber $a > \sqrt{2}$ und verlegen den Endpunct der Abscisse $x = a$ auf den Punct der Spirale, der den Radius 1 hat, so fällt ihr Mittelpunct mit dem Endpuncte der Abscisse $x = a - \sqrt{2}$ zusammen, hat also noch eine endliche Ordinate, und der Theil derselben, der über diesem Zweige der Spirale liegt, ist nicht grösser als

$$a^3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) = a^2 - \frac{a^3}{a - \sqrt{2}} = -\left(\frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2\right);$$

die ganze nach beiden Seiten hin die Spirale bedeckende Fläche (die zu erhalten wir ihre beiden Grössen nach ihrem positiven Werthe addiren müssen) ist also $= a^2 + \left(\frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2\right)$ $= \frac{a^3}{a - \sqrt{2}}$. Also z. B. für $a = 2$ beträgt die ganze Fläche nur $4\ (2 + \sqrt{2})$.

Eine sehr ähnliche Bewandtniss hat es auch mit den körperlichen Ausdehnungen. Nur ist zu bemerken, dass hier der gegen den Mittelpunct zueilende Theil des Körpers, wollte man seine Ausdehnung in die Breite und Dicke zunehmen lassen, in den Raum seiner eigenen nächst angränzenden Umläufe (rechts und links) eingreifen würde. Wollte man dieses vermeiden, und einen Körper haben, dessen sämmtliche Theile ausser einander liegen, so käme man unter Anderm auch schon dadurch zum Ziele, dass man einer Fläche von der Art, wie die nur eben betrachtete war, die bei ihrer Annäherung an den Mittelpunct an Breite immer zunahm, noch eine dritte Dimension, eine Dicke beilegte, die jedoch gegen den Mittelpunct zu in einem solchen Verhältnisse sich verminderte, dass sie stets weniger als die Hälfte des zwischen zwei nächsten Spiralwindungen liegenden Abstandes beträgt.

§. 49.

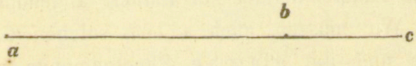
Räumliche Ausdehnungen, die eine unendliche Grösse besitzen, stehen eben in Hinsicht auf diese Grösse selbst in so verschiedenartigen und oft so paradoxen Verhältnissen, dass wir wenigstens einige derselben noch in besondere Betrachtung ziehen müssen.

Dass auch ein Raumding, das eine unendliche Menge von Puncten enthält, darum noch keine stetige Ausdehnung sein müsse; wie auch, dass es bei einer stetigen Ausdehnung nicht eben die Menge der Puncte sei, die wir durch ihre Grösse bestimmen; dass von zwei Ausdehnungen, die wir als gleichgross ansehen, die eine noch um eine unendliche Menge von Puncten mehr oder weniger enthalten könne denn die andere; ja dass eine Fläche unendlich viele Linien, ein Körper unendlich viele Flächen mehr oder weniger als ein gleichgross erachtetes Ausgedehnte derselben Art enthalten könne. das Alles können wir schon als hinreichend aufgeklärt aus dem bisher Gesagten betrachten.

1. Das Erste, worauf wir die Aufmerksamkeit des Lesers richten wollen, ist, dass die Menge der Puncte, die eine einzige, auch noch so kurze Gerade *az* enthält, eine Menge sei, die als u n e n d l i c h g r ö s s e r betrachtet werden müsse, denn die unendliche Menge derjenigen, die wir aus ersterer ausheben, wenn wir, anzufangen von einem ihrer Gränzpuncte *a*, in einer angemessenen Entfernung einen zweiten *b*, nach diesem in einer kleineren Entfernung einen dritten *c* herausheben und so ohne Ende fortfahren, jene Entfernungen nach einem Gesetze vermindernd, dabei die unendliche Menge derselben in ihrer Summe gleich oder kleiner als die Entfernung *az* ist. Denn da auch die unendlich vielen Stücke *ab*, *bc*, *cd* ...., in welche *az* zerfällt, insgesammt wieder endliche Linien sind: so kann mit jeder vorgenommen werden, was wir so eben von *az* verlangt, d. h. in jeder lässt sich abermals eine solche unendliche Menge von Puncten wie in der *az* nachweisen, die zugleich in der *az* stecken. Mithin muss in der ganzen *az*

eine solche unendliche Menge von Puncten unendlichemal enthalten sein.

2. Jeder Geraden, ja jeder räumlichen Ausdehnung überhaupt, die einer anderen nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich ist (d. h. in allen durch die Vergleichung mit einer gegebenen Entfernung begrifflich darstellbaren Merkmalen mit ihr übereinstimmt), muss auch die gleiche Menge von Puncten zugestanden werden, sofern wir nur auch die Art der Begränzung in beiden gleich annehmen, z. B. in beiden Linien die Gränzpuncte mitrechnen oder nicht mitrechnen. Denn das Gegentheil könnte nur statt haben, wenn es Entfernungen gäbe, die, obwohl gleich, doch eine ungleiche Menge von Puncten zwischen den beiden Puncten, deren Entfernungen sie sind, zulassen. Das aber widerspricht dem Begriffe, den wir mit dem Wort geometrisch gleich verbinden; denn eben dann nur nennen wir eine Entfernung ac



ungleich mit einer anderen ab, und zwar grösser als diese, wenn in dem Falle, dass b und c beide in einerlei Richtung liegen, der Punct b zwischen a und c kommt, und somit alle Puncte zwischen a und b wohl auch zwischen a und c, aber nicht umgekehrt alle zwischen a und c auch zwischen a und b liegen.

3. Bezeichnen wir die Menge der Puncte, die zwischen a und b liegen, sammt a und b durch E, und erheben die Gerade ab zur Einheit aller Längen, so wird die Menge der Puncte in der Geraden ac, welche die Länge n hat (worunter wir jetzt nur eine ganze Zahl verstehen), wenn ihre Gränzpuncte a und c mit eingerechnet werden sollen, $= nE - (n-1)$ sein.

4. Die Menge der Puncte in einer Quadratfläche, deren Seite $=1$ ist (dem gewöhnlichen Maasse für Flächen), wird, wenn wir den Umfang mit dazurechnen, $= E^2$ sein.

5. Die Menge der Puncte in jedem Rechtecke, dessen

eine Seite die Länge m, die andere die Länge n hat, wird mit Einberechnung des Umfanges sein $= m\,n\,E^2 - [n\,(m-1) + m\,(n-1)]\,E + (m-1)\,(n-1)$.

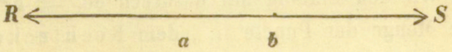
6. Die Menge der Puncte in einem W ü r f e l, dessen Seite $= 1$ (dem gewöhnlichen Maasse für Körper), wird, wenn wir die Puncte der Oberfläche mit einrechnen, $= E^3$ sein.

7. Die Menge der Puncte in einem P a r a l l e l e p i p e d o n, dessen Seiten die Längen m, n, r haben, wird mit Einbezug der Oberfläche sein:

$$m\,n\,r\,.\,E^3 - [n\,r\,(m-1) + m\,r\,(n-1) + m\,n\,(r-1)]\,E^2 + [m\,(n-1)\,(r-1) + n\,(m-1)\,(r-1) + r\,(m-1)\,(n-1)]\,E - (m-1)\,(n-1)\,(r-1).$$

8. Einer Geraden, die beiderseits in das Unendliche reicht, müssen wir eine unendliche Länge und eine Menge von Puncten zuschreiben, welche unendlichemal so gross ist, als die Menge der Puncte in der zur Einheit angenommenen Geraden $= E$. Wir müssen auch a l l e n solchen Geraden die gleiche Länge und die g l e i c h e Punctenmenge zugestehen; weil die bestimmenden Stücke, durch die sich für ein Paar solcher Geraden zwei Puncte bestimmen lassen, durch welche sie gehen, wenn wir den Abstand zwischen diesen Puncten gleich gross annehmen, einander nicht nur ähnlich, sondern auch (geometrisch) gleich sind.

9. Die Lage eines in einer solchen Geraden beliebig angenommenen Punctes ist nach beiden Seiten der Geraden ganz ähnlich, bietet auch nur lauter solche begrifflich erfassbaren Merkmale dar, wie sie die Lage jedes anderen Punctes der Art hat. Gleichwohl lässt sich nicht sagen, dass solch ein Punct die Linie in zwei g l e i c h l a n g e Theile zerlege; denn dürften wir das von Einem Puncte a sagen, so müssten wir es auch von jedem andern b aus gleichem Grunde behaupten, was sich doch widerspricht, indem, wenn $aR = aS$ wäre, nicht auch $bR = (ba + aR) = bS = (aS - ab)$



sein könnte. Wir müssen also vielmehr behaupten, dass eine beiderseits unbegränzte Gerade gar keinen Mittelpunct, d. h. gar keinen Punct habe, der durch sein blosses begrifflich auffassbares Verhältniss zu dieser Linie bestimmt werden könne.

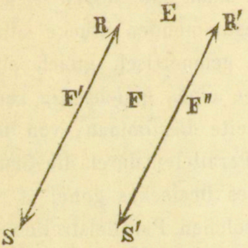
10. Der ebenen Fläche, die zwei einander gleichlaufende, nach beiden Seiten unbegränzte Gerade zwischen sich einschliessen (d. h. dem Inbegriffe aller derjenigen Puncte, welche die Perpendikel aus jedem Puncte der einen dieser Parallelen auf die andere enthalten), müssen wir einen unendlich grossen Flächenraum und eine Menge von Puncten zugestehen, der unendlichemal so gross ist, als die Menge in dem zur Flächeneinheit angenommenen Quadrate $= E^2$. Wir müssen auch allen solchen Parallelstreifen, wenn sie die gleiche Breite (Länge des Perpendikels) besitzen, eine gleiche Grösse und Punctenmenge beilegen. Denn auch sie lassen sich in einer Weise bestimmen, dass die bestimmenden Stücke einander nicht nur ähnlich, sondern auch geometrisch gleich sind; z. B. wenn wir sie durch die Angabe eines gleichseitig rechtwinkligen Dreieckes von gleicher Seite bestimmen, von dem wir festsetzen, dass die eine dieser Parallelen durch die Grundlinie, die andere durch die Spitze des Dreieckes gehe.

11. Die Lage eines in einem solchen Parallelstreifen beliebig angenommenen Perpendikels ist zu beiden Seiten der Fläche die ähnliche, bietet auch keine anderen begrifflich erfassbaren Merkmale dar, wie sie die Lage jedes anderen dergleichen Perpendikels darbeut. Gleichwohl lässt sich nicht sagen, dass ein solches Perpendikel die Fläche in zwei einander geometrisch gleiche Theile zerlege. Denn diese Annahme würde uns alsbald in einen ganz ähnlichen Widerspruch wie No. 9 verwickeln, und beweist dadurch ihre Falschheit.

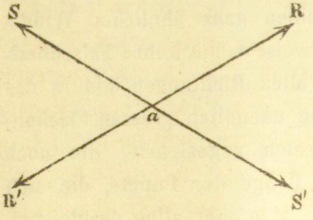
12. Einer Ebene, die nach allen Richtungen hin in das Unendliche gehet, müssen wir einen unendlich grossen Flächenraum und eine Menge von Puncten zugestehen, die noch unendlichemal grösser ist, als die Menge der Puncte, die sich in einem Parallelstreifen befinden. Wie aber allen dergleichen

Parallelstreifen von gleicher Breite unter einander, so müssen wir auch allen dergleichen gränzlosen Ebenen die gleiche unendliche Menge von Puncten untereinander zugestehen. Denn auch von ihnen gilt, dass sie bestimmt werden können auf eine nicht bloss ähnliche, sondern auch (geometrisch) gleiche Weise; wie z. B. wenn wir sie jede durch drei in ihr liegende Puncte, welche ein ähnliches und gleiches Dreieck bilden, bestimmen.

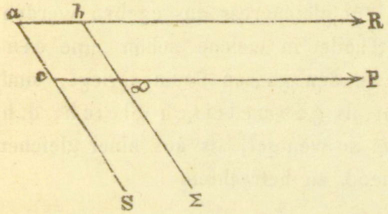
13. Die Lage einer in einer solchen gränzlosen Ebene beliebig angenommenen unbegränzten Geraden ist nach beiden Seiten der Ebene ganz ähnlich; sie bietet überdies dieselben begrifflich darstellbaren Merkmale dar, wie die Lage jeder anderen Geraden der Art. Dennoch ist nicht zu sagen, dass eine solche Gerade die Ebene in zwei geometrisch gleichgrosse Theile zerlege. Denn dürften wir das von Einer Geraden RS behaupten, so müssten wir es von jeder anderen $R'S'$ auch zugeben, was doch auf einen offenbaren Widerspruch führt, sobald wir diese Geraden einander gleichlaufend nehmen.



14. Zwei unbegränzte Gerade, die in derselben Ebene liegend einander nicht gleichlaufen, somit sich irgendwo schneiden und vier (paarweise gleiche) Winkel bilden, theilen den ganzen Flächenraum der unbegränzten Ebene in vier Theile, davon je zwei von den gleichen (ähnlichen) Winkeln $RaS = R'aS'$, $RaS' = R'aS$ umspannte einander ähnlich sind. Jeder dieser vier Winkelräume enthält eine unendliche Menge nach einer Seite hin sich ins Unendliche erstreckender Parallelstreifen, dergleichen wir in No. 11



betrachteten, von jeder beliebigen Breite; und nach jeder endlichen Menge derselben, welche wir in Gedanken wegnehmen, erübrigt noch ein Winkelraum, umspannt von einem gleichen Winkel wie anfangs. Allein so wenig wir nach No. 9 und 11 berechtigt sind, die Schenkel dieser Winkel, oder auch die Parallelstreifen, die wir als Theile ihres Flächenraumes nachweisen können, einander gleich zu nennen: so wenig sind wir auch, und zwar aus ähnlichen Gründen wie dort, berechtigt, diese unendlichen Winkelräume auch selbst bei gleichen (ähnlichen) Winkeln einander gleich d h. gleichgross zu nennen. So ist es von den zwei Winkelflächen RaS und $Pa\Sigma$ offenbar, dass die erste grösser ist als die zweite, obgleich die Winkel selbst einander gleich sind, wenn $b\Sigma \# aS$, $cP \# aR$.



15. Den Körperraum, den zwei einander gleichlaufende gränzlose Ebenen zwischen sich einschliessen (d. h. den Inbegriff aller derjenigen Puncte, welche die sämmtlichen aus einem jeden Puncte der einen auf die andere Ebene gefällten Perpendikel enthalten), diese (wie man sie nennen könnte) gränzlose Körperschicht müssen wir jedenfallls für unendlich gross erklären, wie auch die Breite derselben (die Länge eines solchen Perpendikels) sein mag. Bei gleicher Breite aber dürfen wir diese Grösse, ja auch die Menge der Puncte in zwei solchen Körperschichten für gleich erklären; immer nach demselben Schlusse, den wir schon mehrmal (No. 8, 10, 12) angewandt haben.

16. Die Lage, die ein in einer unbegränzten Körperschicht beliebig angenommener auf ihre Ebenen senkrechter Parallelstreif nach seinen beiden Seiten hin zu jener Körperschicht hat, ist sich ganz ähnlich, und auch die Lage, die ein anderer Parallelstreif dieser Art zu derselben oder auch zu jeder beliebigen anderen gränzlosen Körperschicht hat

ist ähnlich. Dennoch lässt sich nicht sagen, dass jene beiden Theile, in welche die Körperschicht durch einen solchen Parallelstreif zerlegt wird, von gleicher Grösse sein müssten.

17. Zwei unbegränzte Ebenen, welche einander durchschneiden, zerlegen den ganzen unendlichen Raum in vier grosse Theile, deren je zwei gegenüberstehende einander unstreitig ähnlich sind, nicht aber sofort für gleichgross gelten dürfen.

18. Eben so wenig dürfen die Körperräume, die zwei einander ähnliche oder (wie man zu sagen pflegt) gleiche Körperecken zwischen ihren in das Unendliche verlängerten Seitenflächen einschliessen, für gleichgross ausgegeben werden.

19. Auch die zwei Theile, in welche schon eine einzige unendliche Ebene den ganzen Raum zerlegt, sind, obwohl ähnlich, doch nicht als geometrisch gleich, d. h. als von gleicher Grösse, um so weniger, als aus einer gleichen Menge von Puncten bestehend, zu betrachten.

§. 50.

Es erübrigt uns jetzt noch eine kurze Besprechung derjenigen Paradoxien, die uns auf dem Gebiete der Metaphysik und Physik begegnen.

In diesen Wissenschaften stelle ich die Sätze auf: „es gebe nicht zwei einander durchaus gleiche Dinge, somit auch nicht zwei einander durchaus gleiche Atome oder einfache Substanzen im Weltall; nothwendig aber müsse man dergleichen einfache Substanzen voraussetzen, sobald man zusammengesetzte Körper in der Welt annimmt; man müsse endlich auch voraussetzen, dass alle diese einfachen Substanzen veränderlich sind und sich fortwährend verändern.“ Ich behaupte dies Alles, weil es mir däucht, es seien Wahrheiten, die sich so strenge und einleuchtend darthun lassen, als irgend ein Lehrsatz der Mathematik. Gleichwohl muss ich befürchten, dass die meisten Physiker diese Sätze nur kopfschüttelnd anhören werden. Sie nämlich rühmen sich, nur Wahrheiten aufzustellen, welche Erfahrung sie lehrt; Erfahrung aber weise gar keinen Unterschied nach zwischen den kleinsten Theilen der Körper, besonders von einerlei Art, z. B. zwischen den kleinsten Theilen bei einem Golde, das wir aus dieser oder aus jener Mine gewonnen haben; Erfahrung lehre ferner wohl allerdings, dass jeder Körper zusammengesetzt sei, Atome aber, die durchaus einfach und sonach auch ohne alle Ausdehnung wären, habe noch Niemand wahrgenommen; Erfahrung zeige endlich, dass die verschiedenen Stoffe z. B. Sauerstoff, Wasserstoff u. s. w. bald diese bald jene Verbindungen untereinander eingehen und hiernächst bald diese bald jene Wirkungen äussern, — dass aber sie selbst in ihrem Inneren dadurch verändert würden und dass z. B. der Sauerstoff nach und nach zu einem anderen Stoff sich umwandle, das werde bloss erdichtet.

1. Meines Erachtens ist es ein Irrthum, dass die Erfahrung lehre, was hier behauptet wird. Erfahrung, blosse, unmittelbare Erfahrung oder Wahrnehmung ohne Verbindung mit gewissen reinen Begriffswahrheiten lehrt uns nichts Anderes, als dass wir diese und jene Anschauungen oder Vorstellungen überhaupt haben. Woher uns diese Vorstellungen kommen, ob durch die Einwirkung irgend eines von uns verschiedenen Gegenstandes, ja ob sie überhaupt nur einer Ursache bedürfen, welche Beschaffenheiten diese habe: darüber lehrt uns die unmittelbare Wahrnehmung gar nichts, sondern das schliessen wir nur aus gewissen reinen Begriffswahrheiten, die wir durch die Vernunft hinzudenken müssen, und schliessen es meistens nur nach einer blossen Regel der Wahrscheinlichkeit, z. B. dass dieses Roth, das wir so eben sehen, durch einen krankhaften Zustand unseres Auges, jener Wohlgeruch aber durch die Nähe einer Blume hervorgebracht werde. Dagegen, um einzusehen, dass zwischen je zwei Dingen irgend ein Unterschied obwalten müsse, bedarf es gar keiner aus der Erfahrung abgezogenen Schlüsse der blossen Wahrscheinlichkeit; sondern das können wir durch ein geringes Nachdenken mit aller

Sicherheit erkennen. Sollen *A* und *B* zwei Dinge sein, so muss eben desshalb die Wahrheit bestehen, dass das Ding *A* nicht das Ding *B* sei, eine Wahrheit, welche voraussetzt, dass es zwei Vorstellungen *A* und *B* gibt, deren die eine nur das Ding *A*, nicht aber *B*, die andere nur das Ding *B*, nicht aber *A* vorstellt. Und schon in diesem Umstande liegt ja ein Unterschied (und zwar ein innerer), welchen die Dinge *A* und *B* von einander haben. Sehen wir auf diese Art, dass je zwei Dinge mit Nothwendigkeit gewisse Unterschiede haben, wie können wir uns berechtigt glauben, an einem solchen Unterschiede zu zweifeln, bloss weil wir ihn hie und da nicht wahrnehmen? da doch zu dieser Wahrnehmung eine besondere Schärfe der Sinne und noch viel andere Umstände gehören.

2. Dass erst Erfahrung uns lehre, es gebe der Dinge, die auf uns einwirken, mehrere, und namentlich alle diejenigen, die Anschauungen in uns vermitteln, seien zusammengesetzt, hat seine Richtigkeit. Doch lehrt die Erfahrung dieses nur unter Voraussetzung gewisser reiner Begriffswahrheiten: wie dass verschiedene Wirkungen nur durch verschiedene Ursachen hervorgebracht werden können u. s. w. Aber nicht minder gewiss sind die Begriffswahrheiten, dass jede Ursache irgend ein Wirkliches sein müsse, alles Wirkliche aber entweder eine Substanz oder ein Inbegriff mehrerer Substanzen oder Beschaffenheiten an einer oder mehreren Substanzen sei; ingleichen, dass Beschaffenheiten, die etwas Wirkliches sind, nicht sein können, ohne das Dasein einer Substanz, an der sie sich befinden und Inbegriffe von Substanzen nicht ohne einfache, welche die Theile dieser Inbegriffe bilden. Daraus folgt aber das Dasein einfacher Substanzen mit strenger Nothwendigkeit, und es wird lächerlich, letztere nicht annehmen zu wollen, weil man sie nicht — sieht; und um so ungereimter, wenn ferneres Nachdenken lehrt, dass jeder Körper, der noch für unsere Sinne wahrnehmbar sein soll, zusammengesetzt, ja aus einer unendlichen Menge einfacher Theile zusammengesetzt sein müsse.

3. Ein ähnlicher Trugschluss von dem Nichtwahrnehmen auf das Nichtvorhandensein ist es, wenn man nicht zugeben will, dass alle endliche Substanzen einer nie aufhörenden Veränderung unterliegen. An unserer eigenen Seele kennen wir die Veränderlichkeit ihrer Zustände, Vorstellungen, Beschaffenheiten und Kräfte doch zur Genüge; auf ein Aehnliches auch bei den Seelen der Thiere und bei den Pflanzen zu schliessen, werden wir schon durch die blosse Analogie veranlasst. Dass aber alle, auch diejenigen Substanzen, welche durch einen Zeitraum von Jahrhunderten keine uns merkbare Veränderung beweisen, doch in der That sich ändern, werden wir erst durch Gründe der Vernunft berechtigt anzunehmen. Wer dies bestreiten, wenigstens in Bezug auf die sogenannte leblose Materie und hinsichtlich ihrer einfachen Theile oder Atome in Abrede stellen will, sieht sich genöthigt zu der Behauptung, dass alle Veränderungen, die uns in diesem Theile der Schöpfung erscheinen, wenn z. B. ein Stück Eis, das vor einer Weile noch fest war, jetzt schon geschmolzen ist und in der nächsten Stunde sich in Dampfform verflüchtigt, — dass (sage ich) alle diese Veränderungen nichts als blosse Aenderungen in den örtlichen Verhältnissen der kleineren oder grösseren Theilchen dieser Körper sind, dabei sich in dem Inneren jener Theilchen selbst nichts ändert. Aber wie mochte man nicht bemerken, dass man bei dieser Erklärung in einen Widerspruch verfalle? Denn könnte sich in den einfachen Substanzen selbst (in ihrem Inneren) nichts ändern: wodurch nur könnten Veränderungen in ihren örtlichen Verhältnissen unter einander bewirkt werden, und welche Folgen sollten diese bloss äusseren Veränderungen haben, zu welchen Zwecken sollten sie dienen, und woran sollten sie auch nur erkannt werden können? Auf alle diese Fragen lässt sich nur vernünftig antworten, wenn wir den einfachen Substanzen — nämlich denjenigen, welche nicht allvollkommen sind, also der Kräfte mehrere, als sie schon haben, annehmen können — eben desshalb die Fähigkeit einer Veränderung durch gegenseitiges Einwirken aufeinan-

der zugestehen, und ihre Orte als diejenigen Bestimmungen an denselben betrachten, welche den Grund enthalten, warum sie bei dem Besitze gerade dieses Maasses von Kräften in einem gegebenen Zeitraume gerade diese und nicht eine grössere oder geringere Veränderung die eine in der anderen bewirken. Nur unter dieser, auch dem gemeinen Menschenverstande so einleuchtenden Voraussetzung verschwindet jeder Widerspruch in der Lehre vom Weltall, und es bedarf nur, uns über einige, fast schon veraltete Schulmeinungen zu erheben, um Alles im Einklang zu finden.

§. 51.

1. Die erste dieser Schulmeinungen, die wir aufgeben müssen, ist die von den älteren Physikern erdachte todte oder bloss träge Materie, deren einfache Theile, wenn sie ja solche hat, einander alle gleich und ewig unveränderlich, gar keine eigenen Kräfte, es wäre denn die sogenannte Kraft der Trägheit allein, besitzen sollen. Was immer wirklich ist, das muss ja auch wirken, und somit Kräfte zum Wirken haben. Eine beschränkte Substanz aber, die eben desshalb auch veränderlich ist, kann allerdings keine Kraft, die ihrer Natur nach keine Veränderung in ihrem Wirken zuliesse, also insonderheit keine Kraft des Schaffens, sondern sie muss blosse Veränderungskräfte besitzen, die übrigens entweder immanent, wie die Kraft des Empfindens, oder transient, wie die Bewegkraft, sein können.

Immerhin mag es uns, nach wie vor, verstattet bleiben, um den Erfolg, welcher aus einer gewissen Verbindung mehrerer Körper hervorgehen werde, allmählig mit hinreichender Genauigkeit beurtheilen zu lernen, uns den Fall anfangs weit einfacher vorzustellen und statt der unendlichen Menge von Kräften, die in Wahrheit hier zusammenwirken, nur das Vorhandensein einiger wenigen anzunehmen, ja überhaupt uns

Körper und Beschaffenheiten derselben zu denken, die in der Wirklichkeit gar nicht vorhanden sind, um zu bestimmen, was diese hervorbringen würden. Nur dürfen wir nicht, ohne die Sache erst eigends erwogen zu haben, voraussetzen, dass der Erfolg, der sich in diesem erdichteten Falle einstellen müsste, auch mit demjenigen, der in der Wirklichkeit eintreten wird, bis auf einen gewissen Grad übereinstimmen werde. Die Ausserachtsetzung dieser Vorsicht hat manches berühmte Paradoxon verschuldet, wie wir noch sehen werden.

§. 52.

2. Ein anderes Vorurtheil der Schule ist es, dass jede Annahme einer unmittelbaren Einwirkung einer Substanz auf eine andere in der Wissenschaft unerlaubt sei. Wahr ist nur, dass wir nie, ohne es erst erwiesen zu haben, voraussetzen dürfen, eine gewisse Einwirkung erfolge unmittelbar; wahr ist es, dass alles wissenschaftliche Studium aufhören würde, wollten wir jede uns vorkommende Erscheinung damit erklären, dass wir nur sprächen, sie werde unmittelbar erzeugt. Allein wir gehen offenbar zu weit und verfallen in einen neuen, gleichfalls sehr nachtheiligen Irrthum, wenn wir jede Einwirkung, die eine Substanz auf eine andere ausüben soll, für eine bloss mittelbare erklären, somit gar kein unmittelbares Wirken irgendwo zulassen wollen. Denn wie nur könnte ein mittelbares Wirken zu Stande kommen, wenn es kein unmittelbares gäbe? Da dies einleuchtend genug ist, so wollen wir uns hierbei nicht länger aufhalten, sondern uns nur begnügen, zu sagen, wie merkwürdig es sei, dass ein so grosser und so umsichtiger Denker wie Leibniz nur eben aus diesem Anlasse, weil ihm kein Mittel bekannt war, wodurch Substanzen, die einfach sind, auf einander sollten einwirken können, auf jene unglückliche Hypothese der prästabilirten Harmonie verfiel, welche sein ganzes sonst so schönes System der Kosmologie verunstaltet.

§. 53.

3. Mit diesem Vorurtheile innigst zusammenhängend und damit schon von selbst widerlegt, ist jenes noch viel ältere, es sei keine (nämlich keine unmittelbare) Einwirkung einer Substanz auf eine andere, in der Ferne von ihr befindliche möglich. Im schroffesten Widerspruche mit dieser Vorstellung behaupte ich vielmehr, dass jede Einwirkung einer (im Raume befindlichen, also beschränkten) Substanz auf eine andere eine *actio in distans* sei; aus dem ganz einfachen Grunde, weil je zwei verschiedene Substanzen in jedem Augenblicke auch zwei verschiedene einfache Orte einnehmen, also eine Entfernung zwischen sich haben müssen. Den scheinbaren Widerspruch, der zwischen dieser und einer anderen unserer Behauptungen liegt, dass der Raum stetig erfüllt sein soll, habe ich schon oben besprochen.

§. 54.

4. Hiermit verstossen wir aber freilich auch gegen ein anderes Vorurtheil der Schulen neuerer Zeit, die ein Durchdringen der Substanzen, namentlich in jeder chemischen Verbindung erblicken wollen. Jede Möglichkeit eines solchen Durchdringens läugne ich unbedingt; weil es, so viel ich einsehe, schon in dem Begriffe eines einfachen Ortes (oder Punctes) liegt, dass er ein Ort sei, der nur eine einzige (einfache) Substanz beherbergen kann. Wo zwei Atome sind, sind auch zwei Orte. Aus unserer schon mehrmal wiederholten Erklärung vom Raume ergibt es sich gleichfalls unmittelbar, dass nur die Grösse, welche die Entfernung zweier aufeinander wirkender Atome hat, die Grösse der Veränderung bestimme, welche sie innerhalb einer gegebenen Zeitdauer in einander bewirken. Könnten zwei oder mehrere Substanzen durch eine, auch noch so kurze Zeit in einem und demselben Orte sein, so wäre die Grösse ihres gegenseitigen

Einwirkens in dieser Zeit absolut unbestimmbar; und wäre es auch nur ein einziger Augenblick, so wäre ihr Zustand in demselben nicht zu bestimmen.

§. 55.

5. Doch seit Des Cartes erhob sich noch ein neues Vorurtheil in den Schulen. Indem er (wohl aus sehr löblicher Absicht) den Unterschied zwischen denkenden und nichtdenkenden Substanzen (Geist und Materie, wie er sie nannte) nicht hoch genug glaubte ansetzen zu können, verfiel er auf jene dem gemeinen Menschenverstande so auffallende, ja fast undenkbare Behauptung, dass ein geistiges Wesen nicht nur nicht als ein ausgedehntes, d. h. aus Theilen bestehendes, sondern nicht einmal als irgend ein im Raume befindliches, also auch nur einen einzigen Punct im Raume durch seine Gegenwart erfüllendes Wesen angesehen werden dürfe. Da nun in späterer Zeit Kant gar so weit ging, den Raum (nicht minder wie die Zeit) für ein Paar blosse Formen unserer Sinnlichkeit zu erklären, denen kein Gegenstand an sich entspreche; da er zwei Welten, eine intelligible der Geister- und eine Sinnenwelt, einander geradezu entgegensetzte: so ist es nicht zu bewundern, wenn sich das Vorurtheil von der Unräumlichkeit der geistigen Wesen in Deutschland wenigstens so tief festsetzte, dass es bis auf den heutigen Tag in unsern Schulen noch bestehet. Hinsichtlich der Gründe, durch die ich dieses Vorurtheil bekämpft zu haben glaube, muss ich auf andere Schriften, vornehmlich auf die Wissenschaftslehre und Athanasia verweisen. So viel wird Jeder zugestehen müssen, dass die von mir aufgestellte Ansicht, zufolge der sich alle geschaffenen Substanzen aus einem gemeinschaftlichen Grunde wie in der Zeit so auch im Raume befinden müssen, und aller Unterschied in ihren Kräften ein blosser Gradunterschied ist, sich schon durch ihre Einfachheit vor jeder anderen, die man bis jetzt gekannt, empfehle.

§. 56.

6. Bei dieser Ansicht fällt auch das grosse Paradoxon hinweg, das man bisher noch immer in der Verbindung zwischen den geistigen und materiellen Substanzen gefunden. Wie die Materie auf den Geist und hinwieder dieser auf jene einwirken könne, wenn beide so ungleichartig wären, hat man für ein uns Menschen unerforschliches Geheimniss erklärt. Aus den obigen Ansichten aber ergibt sich, dass diese gegenseitige Einwirkung, theilweise wenigstens, eine unmittelbare sein müsse, insofern also gewiss nichts uns Geheimes und Verborgenes an sich haben könne; womit wir jedoch allerdings nicht gesagt haben wollen, dass es nicht sehr viel Wissens- und Forschenswürdiges in demjenigen Theile dieser Einwirkungen gebe, welche auf irgend eine Weise, besonders durch Organismen vermittelt werden.

§. 57.

7. Ersann man sich vor Alters Substanzen ohne Kräfte, so wollte die neuere Zeit umgekehrt aus blossen Kräften ohne Substanzen das Weltall construiren. Der Umstand, dass jede Substanz ihr Dasein uns nicht anders kundgebe, als durch ihre Wirkungen, somit durch die Kräfte, war es ohne Zweifel, der die irrige Erklärung des Begriffes einer Substanz, dass sie ein Inbegriff von blossen Kräften wäre, veranlasst hatte. Und das grobsinnliche Bild, auf welches die Etymologie der Worte: Substanz, Substrat, Subject, Träger u. dergl. hinweisen, schien einen klaren Beweis zu liefern, dass die allgemein herrschende Lehre, zum Dasein einer Substanz bedürfe es doch eines eigenen Etwas, dem jene Kräfte als Beschaffenheiten desselben angehören, eine blosse Täuschung der Sinnlichkeit sei; denn eines Trägers, einer Unterlage in des Wortes eigentlichem Sinne bedarf es hier ganz gewiss nicht. Aber müssen wir denn bei dieser

sinnlichen Auslegung bleiben? Jedes beliebige Etwas, selbst den blossen Begriff des Nichts müssen wir doch als einen Gegenstand betrachten, dem nicht bloss Eine, sondern ein ganzer Inbegriff unendlich vieler Beschaffenheiten zukömmt. Denken wir desshalb wohl jedes beliebige Etwas als einen Träger im eigentlichen Sinne? Sicherlich nicht! Wenn wir uns aber ein Etwas mit der Bestimmung denken, dass es ein Wirkliches und ein solches Wirkliches sei, das keine Beschaffenheit von einem anderen Wirklichen ist, dann fassen wir es unter dem Begriffe einer Substanz nach der rechten Erklärung des Wortes auf. Und solcher Substanzen gibt es, ausser der Einen unerschaffenen, eine unendliche Menge geschaffener. Kräfte nennen wir dem herrschenden Sprachgebrauche zufolge alle diejenigen Beschaffenheiten dieser Substanzen, die wir als nächsten (d. h. unmittelbaren) Grund irgend eines Anderen in oder ausserhalb der es bewirkenden Substanz voraussetzen müssen. Eine Kraft, die sich an keiner Substanz als Beschaffenheit derselben befände, wäre eben desshalb, weil sie als Ursache doch etwas Wirkliches, sonach ein Wirkliches sein müsste, das sich an keinem anderen Wirklichen befindet, nicht eine blosse Kraft, sondern schon eine für sich selbst bestehende Substanz zu nennen.

§. 58.

Dass keine Stufe des Daseins die höchste, keine die niedrigste in Gottes Schöpfung sei; dass es ferner auf jeder, auch noch so hohen Stufe, zu jeder auch noch so frühen Zeit Geschöpfe gegeben habe, die durch ihr schnelles Fortschreiten bereits auf diese Stufe sich emporgeschwungen haben; dass es aber auch auf jeder, noch so niedrigen Stufe und zu jeder noch so späten Zeit Geschöpfe geben werde, die sich trotz ihrem steten Fortschreiten jetzt erst auf dieser Stufe befinden, — diese Paradoxa bedürfen nach Allem, was wir über ähnliche Verhältnisse (§. 38 f.) bei Zeit und Raum erwähnt, keiner weiteren Rechtfertigung.

§. 59.

Viel anstössiger lautet jedoch das Paradoxon: „es könne „trotz dem, dass der gesammte unendliche Raum des „Weltalls überall und zu allen Zeiten in der Art erfüllt ist mit „Substanzen, dass auch kein einziger Punct nur einen Augen„blick ohne eine ihm inwohnende Substanz ist, und auch kein „einziger Punct zwei oder mehrere beherbergt, — doch eine „unendliche Menge verschiedener Grade der Dichtigkeit „geben, mit welcher verschiedene Theile des Raumes zu ver„schiedenen Zeiten erfüllt sind, dergestalt, dass dieselbe Menge „von Substanzen, welche in diesem Augenblicke z. B. diesen „Kubikschuh ausfüllt, zu einer anderen Zeit durch einen millio„nenmal grösseren Raum verbreitet sein mochte, und wieder „zu einer anderen in einen tausendmal kleineren zusammen„gedrängt sein werde, ohne dass bei der Ausbreitung irgend „ein Punct in dem grösseren Raume leer stand, noch bei der „Verdichtung irgend ein Punct in dem kleineren Raume zwei „oder mehr Atome aufzunehmen brauche."

Dass ich hiermit etwas behaupte, das in den Augen der meisten Physiker bis jetzt als eine Ungereimtheit erscheint, weiss ich recht wohl. Denn eben nur, weil sie vermeinen, dass sich das Factum der ungleichen Dichtigkeit der Körper mit der Voraussetzung eines stetig erfüllten Raumes nicht vereinigen lasse, nehmen sie eine Art Porosität als allgemeine Eigenschaft aller Körper, auch selbst derjenigen an, bei denen (wie bei den Gasen und dem Aether) nicht die geringste Beobachtung dafür spricht, und in diesen Poren, deren grössere insgemein mit Gasen erfüllt sein sollen, also eigentlich nur in den nie gesehenen Poren der Flüssigkeiten nehmen die Physiker auch noch bis jetzt ihr sogenanntes *vacuum dispertitum*, d. i. gewisse leere Räume in solcher Menge und Ausdehnung an, dass kaum der billionste Theil eines mit blossem Aether erfüllten Raumes wahre Materie enthält. Gleichwohl hoffe ich, dass es allen denjenigen, welche das in den

§§. 20 ff. Gesagte gehörig in Erwägung zogen, klar genug sein werde, wienach es so ganz und gar nichts Unmögliches enthalte, dass sich dieselbe (unendliche) Menge von Atomen bald durch einen grösseren Raum verbreite, bald wieder in einen kleineren zusammenziehe, ohne dass in dem ersten Falle auch nur ein einziger Punct in jenem Raume verlassen dastehe, im zweiten auch nur ein einziger Punct zwei Atomen aufnehmen müsste.

§. 60.

Und nun dürfte man kaum viel Anstoss nehmen an einer Behauptung (die ohnehin auch in der älteren Metaphysik, in der Lehre *de nexu cosmico,* schon aufgestellt wurde), dass jede Substanz in der Welt mit jeder anderen in stetem Wechselverkehr stehe, doch so, dass die Veränderung, welche die eine in der anderen bewirkt, um so geringer wird, je grösser der zwischen ihnen liegende Abstand; und dass das Gesammtergebniss des Einflusses aller auf jede einzelne eine Veränderung ist, die — abgesehen von dem Falle, wo ein unmittelbares Einwirken Gottes statt hat — nach dem bekannten Gesetze der Stetigkeit vorgeht; weil eine Abweichung von diesem letzteren eine Kraft fordert, die im Vergleiche mit einer stetigen unendlich gross sein müsste.

§. 61.

So leicht auch die schon in der ersten Ausgabe der Athanasia (1829) aufgestellte Lehre von den herrschenden Substanzen aus blossen Begriffen sich ableiten lässt, so wird man doch auch in ihr Paradoxien erblicken, wesshalb es nöthig ist, ihrer mit einigen Worten hier zu erwähnen.

Ich gehe nämlich (a. a. O.) von dem Gedanken aus, dass es, weil doch bekanntlich zwischen je zwei Substanzen im Weltall zu jeder Zeit irgend ein Unterschied von endlicher

Grösse stattfinden muss, zu jeder Zeit auch Substanzen gebe, die in ihren Kräften bereits so herangewachsen sind, dass sie eine Art von Uebermacht über alle in einem, sei es auch noch so kleinen Umfange, um sie herum liegenden Substanzen ausüben. — Es wäre ein Irrthum, der diese Annahme sogleich in den Verdacht eines inneren Widerspruches brächte, wollte sich Jemand vorstellen, dass solch eine herrschende Substanz Kräfte besitzen müsse, welche die der beherrschten um ein Unendliches übertreffen. Aber so ist es keineswegs. Denn setzen wir, in einem Raume von endlicher Grösse, z. B. in dem einer Kugel, befinde sich (etwa im Mittelpuncte derselben) eine Substanz, die in ihren Kräften jede der übrigen in einem endlichen Verhältnisse überragt, wie es z. B. wäre, wenn jede der letzteren etwa nur halb so stark wäre, als sie. Obgleich nun gar nicht bezweifelt werden kann, dass die Gesammtwirkung dieser unendlich vielen schwächeren Substanzen dort, wo sie zufällig sich in ihrer Thätigkeit vereinen (wie z. B. nach dem, was wir bald hören werden, bei ihrem Bestreben zur Annäherung an einen Centralkörper zu geschehen pflegt), die Wirksamkeit der einen stärkeren unendlichemal überwiegt: so kann und muss es doch andere Fälle geben, wo jene Kräfte nicht eben nach demselben Ziele streben, namentlich muss, wenn wir bloss jene Einwirkung jetzt ins Auge fassen wollen, die eine jede der in dem Raume befindlichen Substanzen für sich allein auf eine jede andere ausübt und von ihr gegenseitig erfährt — in der Regel gesagt werden können, dass dieses gegenseitige Einwirken auf Seite der stärkeren Substanz in demselben Verhältnisse mit ihrer Stärke das stärkere sei. In diesem Beispiele also wird die Substanz, die wir als wenigstens doppelt so stark denn jede ihrer benachbarten annehmen, auf jede derselben wenigstens doppelt so stark einwirken, als diese auf sie rückwirken. Und das nur ist es, was wir uns denken, wenn wir sagen, dass sie die anderen beherrsche.

§. 62.

Allein, sagt vielleicht Jemand, wenn sich die Sache nur so verhält, dann muss man nicht bloss in einigen, sondern in jedem, auch noch so kleinen Raume, ja in jedem beliebigen Inbegriffe von Atomen einen herrschenden antreffen; denn einen stärksten muss es wohl eben so, wie einen schwächsten Atom in jedem Inbegriffe mehrer geben. Ich hoffe jedoch, dass keiner meiner Leser der Belehrung bedürfe, dass dieses höchstens von endlichen Mengen gelte, dass aber dort, wo eine unendliche Menge sich befindet, jedes Glied noch ein grösseres über (oder ein kleineres unter) sich haben könne, ohne dass gleichwohl irgend eines derselben eine gegebene endliche Grösse überschreitet (oder auch unter sie herabsinkt).

§. 63.

Diese herrchenden Substanzen, die also schon ihrem Begriffe nach in jedem endlichen Raume nur in endlicher Menge, aber jede umgeben mit einer bald grösseren bald kleineren Hülle bloss dienender Substanzen auftreten, sind es nun, welche vereiniget in Haufen von endlicher Grösse das bilden, was wir die mannigfaltigen in der Welt vorkommenden Körper (gasförmigen sowohl als tropfbar flüssigen, festen, organischen u. s. w.) nennen. Im Gegensatze mit ihnen nenne ich den ganzen noch übrigen Weltstoff, der, ohne ausgezeichnete Atome zu besitzen, alle noch sonst wo vorhandenen Räume erfüllt und somit alle Körper der Welt verbindet, den Aether. Es ist hier nicht der Ort auseinander zu setzen, wie manche bisher nur unvollkommen oder noch gar nicht erklärte Erscheinung sich aus der bisherigen Annahme (wenn man sie ja nur als Annahme zulassen will) mit grosser Leichtigkeit erkläre. Nur ein paar Andeutungen, durch welche scheinbare Widersprüche aufgestellt werden, muss ich mir gemäss dem Zwecke dieser Schrift erlauben.

Unterscheiden sich alle geschaffenen Substanzen untereinander nur durch den Grad ihrer Kräfte, muss also jeder irgend ein, sei es auch noch so geringer Grad der Empfindung eingeräumt werden, und wirken alle auf alle: so ist nichts begreiflicher, als dass für jede zwei, wie immer geartete, um so gewisser für je zwei ausgezeichnete Substanzen nicht eine jede Entfernung als ihnen gleichgenehm (gleichwohlthuend für sie) erscheine; weil von der Grösse der Entfernung die Grösse der Einwirkungen, die sie ausüben sowohl als auch erleiden, abhangt. Ist die Entfernung, in der sie sich eben befinden, grösser als es der Einen genehm ist: so wird sich bei ihr ein Bestreben, diese Entfernung zu kürzen, also ein sogenanntes Anziehen, im entgegengesetzten Falle aber Abstossen einstellen. Weder jenes noch dieses müssen wir uns immer beiderseitig, um so weniger immer von dem Erfolge einer wirklichen Ortsveränderung begleitet denken: wohl aber dürfen wir als sicher annehmen, dass es für je zwei Substanzen im Weltall eine Entfernung gebe, gross genug, dass für diese und alle grösseren ein beiderseitiges Anziehen, und eben so auch eine Entfernung klein genug, dass für sie und alle kleineren ein beiderseitiges Abstossen statt hat. Wie sehr sich aber auch die Grösse der hier besprochenen zwei Entfernungen, welche die Gränzen des Anziehens und Abstossens für zwei gegebene Substanzen sind, mit der Zeit nicht nur nach der Beschaffenheit dieser Substanzen selbst, sondern auch nach der Beschaffenheit der in ihrer ganzen Umgegend liegenden Nachbarsubstanzen ändern mag: so ist doch unstreitig, dass aller Einfluss, den zwei Substanzen unter übrigens ähnlichen Umständen auf einander ausüben, mit der Zunahme ihrer Entfernung von einander sich vermindern müsse; schon aus dem Grunde, weil auch die Menge derer, welche in gleicher Entfernung Platz greifen könnten und einen Anspruch auf dieselbe Einwirkung hätten, wie das Quadrat jener Entfernung zunimmt. Da ferner das Uebergewicht, das jede ausgezeichnete Substanz über eine bloss dienende hat, stets nur eine endliche Grösse ersteigt, wogegen die Menge der letzteren in jedem Raume jene der ersteren unendlichemal übertrifft: so begreift sich, dass die Grösse der Anziehung, welche die sämmtlichen, in einem gegebenen Raume befindlichen Substanzen auf einen, ausserhalb gelegenen Atom ausüben, wenn die Entfernung desselben eine hinlängliche Grösse erreicht hat, nahezu eben die nämliche ist, welche auch dann stattfände, wenn jener Raum gar keine ausgezeichneten Substanzen, sondern nur eine gleichgrosse Menge gemeiner Atome enthielte. Dies mit dem Früheren verbunden, führt zu dem wichtigen Schlusssatze, dass zwischen allen Körpern, wenn ihre Entfernung von einander erst eine hinreichende Grösse besitzt, eine Kraft der Anziehung bestehe, die sich gerade wie die Summe ihrer Massen (d. h. die Menge ihrer Atome), und umgekehrt wie das Quadrat ihrer Entfernung verhält. Dass dieses Gesetz im Weltall beobachtet werde, läugnet kein Physiker noch Astronom in unseren Tagen; wie schwer es sich aber mit der gewöhnlichen Ansicht von der Beschaffenheit der Elementartheile der verschiedenen Körper vertrage, scheint man noch selten bedacht zu haben. Verhielte es sich nämlich wirklich nur so, wie man die Sache bisher gemeiniglich darstellt, dass jene *SS* und mehr einfache Stoffe, die unsere Chemiker auf Erden kennen gelernt haben, die Masse der sämmtlichen hier anzutreffenden Körper in der Art bildeten, dass jeder eigentlich nichts Anderes als ein blosser Inbegriff von Atomen des einen oder des anderen oder etlicher dieser Stoffe zusammen wäre, so dass z. B. das Gold ein blosser Inbegriff von lauter Goldatomen, der Schwefel ein Inbegriff von lauter Schwefelatomen wäre u. s. w.: dann erkläre mir, wer es vermag, woher es komme, dass Stoffe, die so verschieden in ihren Kräften, namentlich in dem Grade ihrer gegenseitigen Anziehungen sich verhalten, in ihrem Gewichte gleichwohl einander durchgängig gleichen, d. h. dass ihre Gewichte sich wie ihre Massen verhalten. Denn dass dieses stattfinde, beweiset unmittelbar die bekannte Erfahrung, dass Kugeln von jedem beliebigen Stoffe, wenn sie von gleichem Gewichte sind, beim Anstosse gegeneinander sich genau so verhalten, wie Körper von gleicher Masse es thun müssen, also z. B. bei gleicher Geschwindigkeit (wiefern die Einwirkung der Elasticität beseitigt oder Rechnung von ihr getragen wird) einander zur Ruhe bringen. Nehmen wir aber an, dass alle Körper eigentlich aus nichts Anderem als aus einer unendlichen Menge von Aether bestehen, in welchem eine gegen diese Menge ganz verschwindende Anzahl von ausgezeichneten Atomen sich befindet, deren Kräfte die eines Aetheratoms nur endlichemal überragen: so begreift man, dass die Kraft der Anziehung, die diese Körper von Seite des ganzen Erdballs erfahren, durch die geringe Zahl jener ausgezeichneten Atome in keinem Falle merklich erhöht werden könne, dass ihr Gewicht somit nur ihrer ganzen Masse proportional sein müsse. Doch es fehlt auch schon jetzt nicht an Physikern, welche den Wärmestoff (also im Grunde den nämlichen Stoff, den ich selbst mit dem Aether identificire) als eine Flüssigkeit betrachten, die sich in allen Körpern befinde und nie ganz aus denselben sich austreiben lasse. Hätten sie also nicht unglücklicher Weise die Vorstellung aufgefasst, dass dieser Wärmestoff imponderabel wäre, und hätten sie sich erhoben zu der Ansicht, dass die Menge der Atome, die jedem besonderen Körper noch nebst dem Wärmestoffe beiwohnt, gegen diesen eine verschwindende sei (und wie nahe waren sie auch nicht hieran, wenn sie zuweilen verlangten, dass man die ersteren sich getrennt von einander durch Entfernungen zu denken habe, die im Vergleiche zu ihren Durchmessern unendlich gross sind): so wäre ihnen wohl bald völlig klar geworden, dass nur eben dieser ihr Wärmestoff es sei, der das Gewicht aller Körper bestimmt.

§. 64.

Leicht zu erachten ist, dass jene Herrschaft, die eine ausgezeichnete Substanz über ihre nächste Umgebung ausübt, wenn in nichts Anderem, wenigstens in einer gewissen stärkeren Anziehung ihrer Nachbaratome besteht, in Folge dessen sich diese dichter, als es sonst wäre, um sie herum und an einander gedrängt finden, und eben desshalb ein Bestreben haben, sich bei gegebener Gelegenheit wieder von diesem Anziehungspuncte sowohl als unter einander etwas weiter zu entfernen, also einander abstossen; eine Sache, auf die so viele Erfahrungen deuten, zu deren Erklärung man aber ganz unnöthiger Weise eine ursprüngliche Abstossungskraft zwischen den Theilchen des Aethers annahm.

§. 65.

Aus diesem Umstande ergibt sich ein leichter Beweis des Satzes, den ich schon in der Athanasia aufstellte, dass keine ausgezeichnete Substanz in ihrer Hülle eine solche Veränderung erfährt, dass sie nicht einen gewissen (sei es auch noch so kleinen) Theil ihrer nächsten Umgebung behielte. Gewiss wird Niemand besorgen, dass eine ausgezeichnete Substanz *a* ihrer sie zunächst umstehenden Aetheratome beraubt werden sollte, wenn unter den gesammten ihr ringsumher nächstliegenden Nachbarn von ausgezeichnetem Range *b, c, d, e* ... keiner seine Entfernung von *a* verändert; sondern nur dann liesse sich etwas der Art besorgen, wenn einige derselben oder auch alle sich entfernen. Doch auch wenn dies geschieht, kann nur ein Theil der *a* umgebenden Aethertheile den fliehenden Substanzen *b*, *c, d, e* .... nachfolgen, ein Theil aber und zwar von denen, welche die nächsten an *a* stehen, muss stets zurückbleiben; obgleich wir nicht nur zugestehen, sondern sogar als nothwendig behaupten, dass er in einen weiteren Raum sich ausdehnen werde. Ja nach

Befund der Umstände könnten sogar aus gewissen entfernten Gegenden Aetheratome herzuströmen und sich in jene Räume drängen, welche wegen der allzu weiten Entfernungen, in welche die Substanzen *a, b, c, d, e* ... so eben sich zerstreuten, mit einem vergleichungsweise viel lockererem Aether gefüllt sind. Dass aber dieser von Ferne kommende Aether den die Substanz *a* zunächst umgebenden insgesammt wegstossen und seine Stelle erbeuten sollte, dazu ist kein Grund vorhanden. Statt den die Substanz *a* umgebenden Aether noch vollends wegzutreiben, muss der herbeiströmende vielmehr nur seine weitere Ausbreitung hindern und ihn so enge zusammendrängen, bis seine Dichtigkeit den Anziehungskräften aller Atome das Gleichgewicht hält.

§. 66.

Hiernächst beantwortet sich manche Frage in einer Weise, welche man paradox finden könnte, wenn das Vorhergehende nicht darüber Aufschluss gewährte. Von der Art ist die Frage über die Gränzen der Körper: wo eigentlich ein Körper aufhöre und ein anderer anfange? Ich verstehe aber unter der Gränze eines Körpers den Inbegriff jener äussersten Aetheratome, die noch zu ihm gehören, d. h. die von den ausgezeichneten Atomen desselben stärker angezogen werden, als es von anderen, in der Nachbarschaft befindlichen Herrscheratomen geschieht; dergestalt, dass sie, sofern der Körper seine Stellung zu seiner Nachbarschaft verändert (z. B. sich von ihr entfernt), mit ihm fortziehen werden, wenn vielleicht nicht mit derselben Geschwindigkeit, doch so, dass keine Trennung und kein Dazwischentritt fremder Atome statt hat. Diesen Begriff einer Gränze vorausgesetzt, zeigt es sich alsbald, dass die Begränzung eines Körpers etwas sehr Wandelbares sei, ja sich beinahe fortwährend ändere, so wie nur irgend eine Veränderung theils in ihm selbst, theils in den nachbarlichen Körpern vorgeht, weil alle dergleichen Veränderungen begreiflich auch gar manche Aenderung wie in der Grösse, so auch in der Richtung der Anziehung bewirken können, den die Atome eines Körpers, nicht nur die dienenden, sondern selbst seine herrschenden erfahren. So werden z. B. gewiss mehrere Theilchen von diesem Kiele, welche noch kurz zuvor von dessen übriger Masse stärker als von der umgebenden Luft angezogen wurden, also zu ihm noch gehörten, jetzt von meinen Fingern stärker als von der Masse des Kieles angezogen und sind demselben somit entrissen. — Genauer erwogen, zeigt sich, dass mancher Körper an gewissen Stellen auch gar keine Gränzatome, d. h. gar keine Atome aufweisen könne, welche die äussersten sind unter denjenigen, die ihm noch zugehören und noch mit ihm zögen, wenn seine Stellung sich verändern würde. Denn in der That, so oft der eine von zwei nachbarlichen Körpern einen äussersten, mit ihm fortziehenden Atom an einer Stelle besitzt, kann eben desshalb der andere keinen dergleichen äussersten haben, weil alle hinter jenem befindlichen Aetheratome schon diesem zugehören.

§. 67.

Hiermit beantwortet sich auch noch die Frage, ob und wann Körper in einer unmittelbaren Berührung mit einander stehen oder durch einen Zwischenraum getrennt sind? Erlaube ich mir nämlich (wie mir das Zweckmässigste däucht) die Erklärung, dass ein Paar Körper einander berühren, wo immer die äussersten Atome, die nach der Erklärung des vorigen §. dem einen zugehören, mit gewissen Atomen des anderen eine stetige Ausdehnung bilden: so wird sich gewiss nicht abläugnen lassen, dass es gar viele Körper gebe, welche sich gegenseitig berühren; nicht nur, wenn einer oder gar beide flüssig, sondern auch, wenn sie fest sind, sofern nur erst die im gewöhnlichen Zustande auf Erden ihnen anhängende Luft durch starkes Andrücken oder auf sonst eine Weise zwischen ihnen fortgeschafft ist. Wenn ein Paar Körper einander nicht berühren: so muss, weil es doch keinen ganz leeren Raum gibt, der Zwischenraum durch irgend einen anderen Körper, oder wenigstens durch blossen Aether ausgefüllt werden. Somit lässt sich behaupten, dass eigentlich jeder Körper nach allen Seiten mit irgend einigen anderen Körpern, oder in Ermangelung derselben mit blossem Aether in Berührung stehe.

§. 68.

In Betreff der verschiedenen Arten der im Weltall stattfindenden Bewegungen könnte man glauben, es sei bei dem Umstande, dass (unserer Ansicht nach) kein Theil des Raumes leer ist, nie eine andere Bewegung möglich, als eine, dabei die ganze gleichzeitig bewegte Masse eine einzige, in sich zurückkehrende Ausdehnung bildet, wo jeder Theil der Masse immer nur Orte einnimmt, die unmittelbar vorher ein anderer Theil der Masse eingenommen. Wer aber im Sinne behielt, was §. 59 von den verschiedenen Graden der Dichtigkeit, mit denen der Raum erfüllt werden kann, gesagt wurde, der wird begreifen, dass noch viel andere Bewegungen stattfinden können und müssen. Besonders Eine Bewegung, die schwingende, muss nicht nur bei allen Aetheratomen, sondern auch bei fast allen ausgezeichneten Atomen beinahe unaufhörlich angetroffen werden aus einem Grunde, der so einleuchtend ist, dass ich ihn nicht erst anzuführen brauche. Dieser zunächst muss auch, zumal bei festen Körpern, die drehende Bewegung sehr gemein sein. Wie man sich diese zu denken habe, wie zu erklären es sei, dass, wenn die Drehungsaxe (was unseren Ansichten zufolge jedesmal sein muss) eine materielle Linie ist, dieselben Atome, die jetzt auf dieser Seite derselben sich befinden, nach einer halben Umdrehung auf die entgegengesetzte gelangen, ohne sich loszureissen: das kann wohl nur denjenigen beirren, der es vergisst, dass auch in einem Continuo eben so gut, wie ausserhalb desselben, jeder Atom in einer gewissen Entfernung von jedem anderen stehe und somit diesen umkreisen könne, ohne sich losreissen oder ihn gar mit sich herumdrehen zu müssen; welches Letztere, das Drehen um sich selbst, bei einem einfachen Raumdinge etwas sich selbst Widersprechendes wäre.

§. 69.

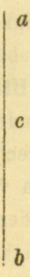
Ohne behaupten zu wollen, dass auch nur ein einziger herrschender oder gemeiner Atom im Weltall zu irgend einer Zeit eine vollkommen gerade oder vollkommen kreisförmige Bahn beschreibe (was vielmehr bei der unendlichen Menge von Störungen, die jeder Atom durch die Einwirkung aller übrigen erleidet, eine unendlich grosse Unwahrscheinlichkeit hätte): dürfen wir dergleichen Bewegungen doch nicht für Etwas, das an sich selbst unmöglich wäre, erklären. Wohl aber dürfen wir behaupten, dass die Beschreibung einer gebrochenen Linie z. B. nur dann zu Stande kommen könne, wenn die Geschwindigkeit des Atoms gegen das Ende des Stückes *ab* allmählich so abnimmt, dass sie im Puncte *b* zu Null wird; worauf denn, wenn die Bewegung nicht durch eine endliche Zeit der Ruhe unterbrochen werden soll, in jedem der auf die Ankunft in *b* folgenden Augenblicke abermals eine (von Null an wachsende) Geschwindigkeit sich einfinden muss.

Nicht also ist es mit gewissen anderen Linien, wie namentlich mit der logarithmischen Spirale. Es ist, selbst abgesehen von allen Störungen von Aussen, etwas sich Widersprechendes, dass auch nur derjenige Zweig dieser Linie, der, anzufangen von irgend einem ihrer Puncte, gegen den Mittelpunct zu liegt, durch die Bewegung eines Atoms in einer endlichen Zeit zurückgelegt werde; und noch ungereimter, zu fordern, dass der beschreibende Atom zuletzt in den Mittelpunct der Spirale eintreffe. Um dies nur für den Fall zu beweisen, wo der Atom in seiner Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet: denken wir uns zuerst, dass er allein sich bewege. Dann zeigt sich bald, dass sein Fortschreiten in der Spirale betrachtet werden könne, als ob es aus zwei Bewegungen zusammengesetzt wäre: einer gleichförmigen in der Leitlinie gegen den Mittelpunct zu, und einer Winkeldrehung um diesen Mittelpunct, deren Geschwindigkeit, gleichförmig wachsend, grösser als eine jede endliche Grösse werden muss, sofern der Atom zum Mittelpuncte so nahe, als man nur will, gelangen soll. Sicher gibt es also keine Kraft in der Natur, welche ihm diese Geschwindigkeit zu ertheilen vermag; um so weniger eine Kraft, die einer ganzen, durch drei Dimensionen verbreiteten Masse von Atomen eine solche Geschwindigkeit mittheilen könnte, als erforderlich ist, wenn jener Atom in ihr die sämmtlichen unendlich vielen Windungen der Spirale bis an den Mittelpunct hin in einer endlichen Zeit durchwandern soll. Aber auch wenn er dies hätte, könnte man wohl von ihm sagen, dass er im Mittelpuncte angelangt sei? Ich wenigstens halte es nicht dafür. Denn obwohl man sagen mag, dass dieser Mittelpunct mit den Puncten der Spirale (die ihr ganz unläugbar zugehören) ein Continuum bilde, weil sich für jede auch noch so kleine Entfernung ein Nachbar unter ihnen findet: so fehlt dieser linearen Ausdehnung doch noch eine zweite Beschaffenheit, die jede haben muss, soll sie durch die Bewegung eines Atoms beschrieben werden können, die nämlich, dass sie in jedem ihrer Puncte eine oder etliche bestimmte Richtungen habe. Dies ist im Mittelpuncte bekanntlich nicht.

Hieher gehört endlich auch noch die neckende Frage, ob bei unseren Ansichten von der Unendlichkeit des Weltalls wohl auch ein Fortrücken des ganzen Alls nach irgend einer gegebenen Richtung, oder auch eine drehende Bewegung desselben um eine gegebene Weltaxe oder einen Weltmittelpunct stattfinden könne? Wir entgegnen, dass man weder die eine noch die andere Bewegung desshalb für unmöglich zu erklären habe, weil nicht für jeden Atom Orte, in die er eintreten könnte, zu finden wären; wohl aber muss man sie für unmöglich erklären, weil es an Ursachen (Kräften), die eine solche Bewegung hervorbringen sollten, gebreche. Denn weder ein physischer Grund oder eine Einrichtung, die schlechthin nothwendig ist (d. h. die eine blosse Folge rein theoretischer Begriffswahrheiten ist), noch ein moralischer Grund oder eine Einrichtung, die nur bedingt nothwendig ist (d. h. die wir nur darum in der Welt antreffen, weil Gott jedes dem Wohle seiner Geschöpfe zuträgliche Ereigniss herbeiführt) — lässt sich erdenken, aus welchem eine Bewegung dieser Art in der Welt anzutreffen sein sollte.

§. 70.

Beschliessen wir diese Betrachtungen mit zwei besonders durch Euler berühmt gewordenen Paradoxien. Schon Boscowich machte auf den Umstand aufmerksam, dass man auf eine und dieselbe Frage, nämlich wie sich ein Atom *a* bewege, wenn er von einer in *c* befindlichen Kraft im verkehrten Verhältnisse mit dem Quadrate der Entfernung angezogen wird, eine verschiedene Antwort erhalte; jenachdem man den Fall als einen solchen betrachtet, in welchen die elliptische Bewegung allmählich übergeht, wenn ihre Wurfsgeschwindigkeit bis auf Null abnimmt, oder wenn man die Sache, ganz abgesehen von dieser Fiction, bloss an sich selbst beurtheilt. Hätte der Atom *a* durch einen Wurf (oder auf sonst eine andere Weise) beim Anfange seiner Bewegung eine auf *ac* senkrechte Seitengeschwindigkeit erhalten: so müsste er (abgesehen von jedem Widerstande im Mittel) eine Ellipse beschreiben, deren Ein Brennpunct in *c* ist. Nimmt diese Seitengeschwindigkeit in das Unendliche ab, so nimmt auch die kleinere Axe dieser Ellipse in das Unendliche ab; wesshalb denn Euler schloss, dass in dem Falle, wo der Atom im Puncte *a* gar keine Geschwindigkeit hat, ein Oscilliren desselben zwischen den Puncten *a* und *c* eintreten müsse; diese Bewegung nur sei es, in welche jene elliptische ohne Verletzung des Gesetzes der Stetigkeit übergehe. — Andere, wie vornehmlich Busse, fanden es dagegen ungereimt, dass der Atom, dessen Geschwindigkeit in der Richtung ac bei der Annäherung an den Punct c in das Unendliche zunehmen sollte, hier ohne allen angeblichen Grund (denn die Anwesenheit eines den Durchgang durch diesen Ort verhindernden, wie etwa eines hier fixen und undurchdringlichen Atoms, wurde gar nicht vorausgesetzt) in seinem Laufe gehemmt und in entgegengesetzter Richtung zurückgetrieben werden sollte. Sie behaupteten also, er müsse vielmehr seine Bewegung in der Richtung ac über c hinaus, doch jetzt mit abnehmender Geschwindigkeit fortsetzen, bis er das Ende der $cb = ca$ erreicht, und dann in ähnlicher Weise von b nach a wieder zurückkehren, und so ohne Ende. — Meiner Ansicht nach konnte durch Eulers Berufung auf das Gesetz der Stetigkeit hierorts gar nichts entschieden werden. Denn gegen jene Art von Stetigkeit, welche in den Veränderungen des Weltalls (im Wachsthume oder in der Abnahme der Kräfte einzelner Substanzen) erweislicher Weise in der That herrscht, verstösst die hier in Streit liegende Erscheinung eben so wenig, wenn man die Oscillation des Atoms innerhalb der Schranken a und b, als wenn man



sie innerhalb a und c vorgehen lässt. Wohl aber verstösst man gegen dies Gesetz in einer Art, die schlechterdings nicht zu rechtfertigen ist, schon dadurch, dass man hier Kräfte, nämlich eine Anziehungskraft, die ins Unendliche wächst, voraussetzt; und schon darum darf man sich nicht wundern, wenn sich aus widersprechenden Vordersätzen auch widersprechende Schlusssätze ableiten lassen. — Hieraus ersieht man jedoch, dass nicht nur Euler's, sondern auch Busse's Beantwortung der Frage unrichtig ist; weil sie etwas schon an sich selbst Unmögliches voraussetzt, nämlich die unendlich grosse Geschwindigkeit im Puncte c. Wird dieser Fehler verbessert, wird also angenommen, dass die Geschwindigkeit, mit der der Atom fortrückt, nach einem solchen Gesetze sich ändert, dabei sie stets endlich verbleibt; wird endlich auch bedacht, dass man nie von der Bewegung eines einzigen Atoms sprechen könne, ohne ein Mittel, in dem er sich bewegt, und eine grössere oder geringere Menge mit ihm zugleich bewegter Atome vorauszusetzen: so stellt sich ein ganz anderes Ergebniss heraus, mit dessen näherer Beschreibung wir uns hier nicht zu befassen brauchen.

Das zweite Paradoxon, das wir mit wenigen Worten noch anführen wollen, betrifft die Pendelbewegung und besteht darin, dass man die halbe Schwingungszeit eines einfachen Pendels, dessen Länge $= r$, durch einen unendlich kleinen Bogen bekanntlich $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ berechnet; während die Fallzeit über die Chorde dieses Bogens, die man gewöhnlich doch als von gleicher Länge mit ihm betrachtet, sich als $= \sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{r}{g}}$ ergibt. Dass Euler hierin ein Paradoxon sah, beruhet wohl lediglich auf seiner unrichtigen Vorstellung von dem unendlich Kleinen, welches er sich als gleichgeltend mit Null dachte. In der That aber gibt es unendlich kleine Bögen so wenig als Chorden; dasjenige aber, was die Mathematiker von ihren sogenannten unendlich kleinen Bögen und Chorden behaupten, wurde von ihnen eigentlich nur erwiesen von Bögen und Sehnen, welche so klein genommen werden können, als man nur immer will; und die obigen zwei Gleichungen, richtig verstanden, können keinen anderen Sinn haben, als: die halbe Schwingungszeit eines Pendels nahet sich der Grösse $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ so sehr als man nur will, wenn man den Bogen, durch den man es schwingen lässt, so klein nimmt, als man will; die Fallzeit auf der Chorde dieses Bogens aber nahet sich unter denselben Umständen so genau, als man will, der Grösse $\sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{r}{g}}$. Dass nun diese zwei Grössen verschieden sind, dass also der Bogen und seine Sehne in Hinsicht auf die erwähnte Fallzeit sich unterscheiden, so klein man sie auch nehme: ist etwas eben so wenig Befremdendes, wie gar manche andere Unterschiede zwischen ihnen, deren Verschwinden, so lange beide nur sind, Niemand erwartet, wie z. B. der, dass der Bogen stets eine Krümmung und zwar diejenige behalte, deren Grösse wir durch $\frac{1}{r}$ messen könnten, während die Chorde stets gerade bleibt, d. h. gar keine Krümmung hat.

Anastatischer Druck von A. Dannenberg, Berlin, N.