В. П. ВЕТЧИНКИН и Ф. М. КОГАН

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННЫХ КВАДРАТУР

ОГИЗ
ГОСТЕХИЗДАТ
1949

В. П. ВЕТЧИНКИН и Ф. М. КОГАН

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННЫХ КВАДРАТУР

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

11-5-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *В. А. Калакуцкий*. Техн. ред. *М. Д. Суховцева*.

Подписано к печати 8/I 1949 г. 4,5 печ. л. 4,8 уч.-изд. л. 42 320 тип. зн. в печ. л. А01561. Тираж 10 000 экз. Цена книги 1 р. 75 к. Заказ № 8297.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги — предложить инженерам-расчётчикам и студентам формулы численных квадратур (для приближённого вычисления определённых интегралов и площадей), удобные для пользования и в то же время обладающие возможно большей точностью получаемого результата.

Формулы, предложенные Ньютоном и вычисленные его современником Котесом, являются наиболее простыми: они имеют равноотстоящие ординаты и достаточно простые множители при них, но дают ошибку, обычно в несколько десятков раз бóльшую, нежели наивыгоднейшие формулы Гаусса при таком же числе ординат. В свою очередь, формулы Гаусса неудобны для пользования из-за несоизмеримых абсцисс и таких же множителей при ординатах.

Промежуточное место занимают формулы Чебышева, которые имеют простые одинаковые коэффициенты при ординатах; но несоизмеримые значения абсцисс затрудняют пользование ими, особенно при вычислениях, требующих значительной точности.

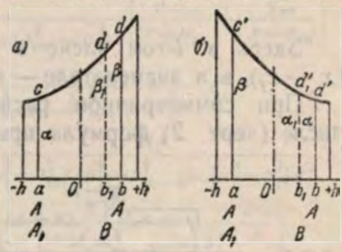
Возвращаясь к формулам Гаусса, дающим наибольшую возможную точность результата, приходится отметить, что вычисления по этим формулам весьма громоздки, и поэтому ими в практике пользуются сравнительно редко. Академик А. Н. Крылов об этих формулах говорит: «При одинаковом числе ординат формула Гаусса даёт вообще бóльшую точность, нежели другие формулы, но зато вычисление по ней сложнее; поэтому её выгодно применять в том случае, когда вычисление ординат затруднительно» *).

*) «Лекции о приближённых вычислениях», стр. 107, изд. 1933 г.

Мы поставили задачу — дать такие формулы квадратур, чтобы, не увеличивая трудоёмкости вычислений, получать результат возможно более точный. Чтобы достигнуть этого, мы берём абсциссы, близкие к гауссовым, но удобные при вычислениях, в сотых или девяностых долях интервала интегрирования. Такие абсциссы дают нам и коэффициенты при ординатах, выражаемые в виде простых дробей, которые в некоторых частных случаях можно значительно упростить, заменяя их приближённо близкими к ним дробями с малым числом знаков и учитывая, в случае надобности, весьма малые поправки к этим дробям.

§ 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Когда мы составляем интерполяционную формулу с целью получить из неё формулу квадратур, ординаты следует располагать симметрично относительно середины отрезка, для которого составляется интерполяционная формула; иначе площадь кривой и её зеркального отображения будет несколько различной, за исключением случаев, когда интерполируемая кривая есть полином не выше $(n-1)$ степени при n данных для формулы квадратур.



Черт. 1.

Замечание. Возьмём какие-либо две ординаты на кривой (черт. 1, a), расположенные по обе стороны от середины интервала интегрирования. Высоты ординат пусть будут α и β, абсциссы их — a и b. Если ординаты расположены симметрично относительно середины отрезка, то множители при них будут одинаковы; обозначим их через A. В выражение площади кривой они войдут в виде суммы произведений $(A\alpha + A\beta)$. В зеркальном отображении кривой (черт. 1, $б$) абсциссе a соответствует ордината β, абсциссе b — ордината α. В выражение площади они войдут в таком же виде: $(A\beta + A\alpha)$.

Если ординаты расположены несимметрично, то коэффициенты при ординатах будут различны. Пусть при ординате α, соответствующей абсциссе a, — коэффициент A_1*), при ординате β_1, соответствующей абсциссе b_1, — коэффициент B. В зеркальном отображении абсциссе a соответствует ордината β с коэффициентом A_1, абсциссе b_1 — ордината α_1 с коэффи-

*) A_1 отлично от A, так как смещение одной ординаты изменяет коэффициенты при всех ординатах.

циентом B. В выражение площади основной кривой эти новые ординаты войдут в виде $(A_1\alpha + B\beta_1)$, а в выражение площади её зеркального отображения в виде $(A_1\beta + B\alpha_1)$. Очевидно, что эти выражения могут оказаться равными только в очень редких случаях; вообще же площади кривой и её зеркального отображения будут различны.

Чтобы решить поставленную задачу, мы прежде всего напишем интерполяционную формулу Лагранжа в самом общем виде *):

$$y = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)} +$$

$$+ y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)} +$$

$$+ y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Здесь в i-том члене в числителе отсутствует множитель $(x-x_i)$, а в знаменателе — множитель $(x_i-x_i)=0$.

При симметричном расположении ординат и нечётном их числе (черт. 2) формула примет более простой вид:

$$y = y_{-m}\frac{\overline{(x+a_m)}\prod\limits_{i=1}^{m-1}(x+a_i)\cdot[x]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i)}{\overline{(x+a_m)}\prod\limits_{i=1}^{m-1}(-a_m+a_i)\cdot[-a_m]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m}(-a_m-a_i)} +$$

$$+ y_{-(m-1)}\frac{(x+a_m)\cdot\overline{(x+a_{m-1})}\cdot\prod\limits_{i=1}^{m-2}(x+a_i)\cdot[x]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i)}{(-a_{m-1}+a_m)\cdot\overline{(x+a_{m-1})}\cdot\prod\limits_{i=1}^{m-2}-a_{m-1}+a_i)\cdot[-a_{m-1}]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m}(-a_{m-1}-a_i)} +$$

$$+ \cdots + y_m\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(x+a_i)\cdot[x]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m-1}(x-a_i)\cdot\overline{(x-a_m)}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(a_m+a_i)\cdot[a_m]\cdot\prod\limits_{i=1}^{m-1}(a_m-a_i)\cdot\overline{(x-a_m)}}$$

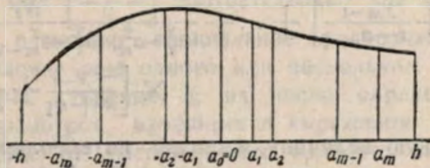
---

*) А. Н. Крылов «Лекции о приближённых вычислениях», стр. 81, изд. 1933 г.

Здесь числители всюду одинаковые:

$$(x^2 - a_m^2)(x^2 - a_{m-1}^2)\ldots(x^2 - a_1^2)[x] = N_1,$$

а знаменатели у коэффициентов при симметричных ординатах



Черт. 2.

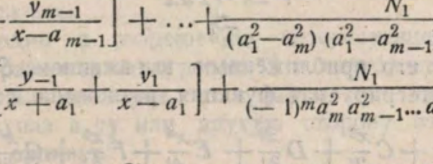
отличаются лишь одним множителем, и мы можем написать:

$$y = \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{N_1}{a_m^2(a_m^2 - a_{m-1}^2)(a_m^2 - a_{m-2}^2)\ldots(a_m^2 - a_1^2)}\left[\frac{y_{-m}}{x+a_m} + \frac{y_m}{x-a_m}\right] + \frac{N_1}{(a_{m-1}^2 - a_m^2)a_{m-1}^2(a_{m-1}^2 - a_{m-2}^2)\ldots(a_{m-1}^2 - a_1^2)} \times$$

$$\times\left[\frac{y_{-(m-1)}}{x+a_{m-1}} + \frac{y_{m-1}}{x-a_{m-1}}\right] + \ldots + \frac{N_1}{(a_1^2 - a_m^2)(a_1^2 - a_{m-1}^2)\ldots(a_1^2 - a_2^2)a_1^2} \times$$

$$\times\left[\frac{y_{-1}}{x+a_1} + \frac{v_1}{x-a_1}\right] + \frac{N_1}{(-1)^m a_m^2 a_{m-1}^2 \ldots a_2^2 a_1^2}\,\frac{2v_0}{x}\Bigg\}. \qquad \text{(I)}$$

Если n чётное (черт. 3), то в каждом члене с индексом i отсутствуют соответствующие средней ординате множители $[x]$



Черт. 3.

в числителе и $[a_i]$ в знаменателе. Числители будут опять всюду одинаковые:

$$(x^2 - a_m^2)(x^2 - a_{m-1}^2)\ldots(x^2 - a_1^2) = N_2,$$

и будем иметь:

$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{N_2}{a_m\,(a_m^2-a_{m-1}^2)\ldots(a_m^2-a_1^2)}\left[\frac{-y_{-m}}{x+a_m}+\frac{y_m}{x-a_m}\right]+\right.$$

$$+\frac{N_2}{(a_{m-1}^2-a_m^2)\,a_{m-1}(a_{m-1}^2-a_{m-2}^2)\ldots(a_{m-1}^2-a_1^2)}\times$$

$$\times\left[\frac{-y_{-(m-1)}}{x+a_{m-1}}+\frac{y_{m-1}}{x-a_{m-1}}\right]+\ldots+\frac{N_2}{(a_1^2-a_m^2)\,(a_1^2-a_{m-1}^2)\ldots(a_1^2-a_2^2)a_1}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{-y_{-1}}{x+a_1}+\frac{y_1}{x-a_1}\right]\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Приближённую величину площади интерполируемой кривой, даваемую интегралом интерполяционной формулы, обозначим через S. Её аналитическое выражение будет иметь такой вид:

$$S=A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+\ldots+A_ny_n, \qquad \text{(III)}$$

где все коэффициенты A_i зависят только от расположения ординат y_i, но не от их величин.

Чтобы иметь возможность оценить ошибку, происходящую от замены искомого интеграла

$$F=\int_{-h}^{+h}z\,dx$$

данной кривой его приближённым выражением S, мы предполагаем, что интегрируемая функция разложена в ряд Тейлора:

$$z=A+Bx+C\frac{x^2}{2!}+D\frac{x^3}{3!}+E\frac{x^4}{4!}+F\frac{x^5}{5!}+G\frac{x^6}{6!}+H\frac{x^7}{7!}+$$

$$+K\frac{x^8}{8!}+L\frac{x^9}{9!}+M\frac{x^{10}}{10!}+N\frac{x^{11}}{11!}+P\frac{x^{12}}{12!}+\ldots;$$

тогда её интеграл выражается рядом

$$\int_{-h}^{+h}z\,dx=F=2\left\{Ah+C\frac{h^3}{3!}+E\frac{h^5}{5!}+G\frac{h^7}{7!}+K\frac{h^9}{9!}+\right.$$

$$\left.+M\frac{h^{11}}{11!}+P\frac{h^{13}}{13!}+\ldots\right\}, \qquad (1)$$

где

$A=z_0$ (при $x=0$); $B=z_0'$; $C=z_0''$; $D=z_0'''$ и т. д.

Чтобы найти остаток R, определяемый как дополнение приближённого значения площади до точного

$$F=S+R,$$

разложим каждую из ординат y_i (формулы (III)) в ряд Тейлора и будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях h в выражениях для S и для F.

Вообще говоря, число совпадающих коэффициентов определяется числом ординат n и не зависит от их расположения; оно равно $\frac{n}{2}$ или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ соответственно для n чётного и нечётного. Но возможно специальное расположение ординат, дающее совпадение ещё одного или нескольких коэффициентов при одинаковых степенях h; их число определяется числом свободных параметров, входящих в выражения коэффициентов A_i и зависящих от расположения ординат; число их равно $\frac{n}{2}$ или $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ соответственно для n чётного и нечётного.

Наивыгоднейшее расположение ординат было найдено Гауссом, который потребовал, чтобы формула квадратур (III) была вполне верна для всякой целой функции степени не выше $2n-1$. При этом для кривых, разложимых в ряд Тейлора, автоматически удовлетворяется и другое условие, которое одно только нас и интересует: разность между площадями истинной кривой и её интерполяционного выражения (взятыми в пределах интервала интегрирования), т. е. $F-S$, получается наименьшей из всех возможных.

Мы подходим к разрешению интересующей нас задачи, рассматривая разности интегралов. Это позволяет нам не только отыскать условия минимума, но и найти, насколько мы от него отходим, отступая в ту или другую сторону от оптимального расположения ординат.

Интегрировать интерполяционную функцию и находить остаток $R=F-S$ мы будем не в общем виде, а для частных значений n, так как наибольшее интересующее нас число ординат равно семи.

Начнём с $n=2$.

§ 2. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ ДВУХ ОРДИНАТАХ

Пусть абсциссы наших ординат будут: $(-ah)$; $(+ah)$.

Формула Лагранжа для двух ординат даёт

$$y=\frac{1}{2ah}\left[y_2(x+ah)-y_1(x-ah)\right].$$

Интегрируем:

$$\int\limits_{-h}^{+h} y\,dx=S=h(y_1+y_2)=2h\frac{(y_1+y_2)}{2}. \qquad (2)$$

Чтобы найти остаток, выражаем ординаты $y_1 = z_1$ и $y_2 = z_2$ при помощи ряда Тейлора:

$$y_{1,2} = A \mp Bah + C\frac{a^2h^2}{2!} \mp D\frac{a^3h^3}{3!} + E\frac{a^4h^4}{4!} \mp D\frac{a^5h^5}{5!} + G\frac{a^6h^6}{6!} \mp \ldots$$

$$y_1 + y_2 = 2\left\{A + C\frac{a^2h^2}{2!} + E\frac{a^4h^4}{4!} + G\frac{a^6h^6}{6!} + \ldots\right\};$$

подставляем в выражение для S, имеем:

$$S = 2h\left\{A + C\frac{a^2h^2}{2!} + E\frac{a^4h^4}{4!} + G\frac{a^6h^6}{6!} + \ldots\right\} =$$

$$= 2\left\{Ah + C\frac{h^3}{3!}3a^2 + E\frac{h^5}{5!}5a^4 + G\frac{h^7}{7!}7a^6 + \ldots\right\}. \quad (2')$$

Вычитаем (2′) из интеграла функции y, также выраженной в виде ряда Тейлора (1), и получаем остаток

$$R = 2\left\{C\frac{h^3}{3!}(1 - 3a^2) + E\frac{h^5}{5!}(1 - 5a^4) + G\frac{h^7}{7!}(1 - 7a^6) + \ldots\right\}.$$

Здесь имеется один свободный параметр a. Можно его выбрать таким, чтобы коэффициент при первом члене остатка обратился в нуль; это даёт $1 - 3a^2 = 0$, откуда $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ — это наивыгоднейшее значение a, которое соответствует формуле Гаусса, и для случая двух ординат — также формуле Чебышева; её остаток начинается с члена, содержащего h^5:

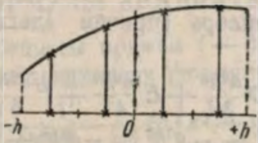
$$R = \frac{8}{9}E\frac{h^5}{5!} + \frac{40}{27}G\frac{h^7}{7!} + \ldots$$

Вместо несоизмеримого значения $a = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}57735\ldots$ мы можем взять близкие соизмеримые значения абсцисс: $a = \frac{52}{90} = 0{,}57777\ldots$; 0,58; 0,6 и др. При каждом значении a найдём коэффициенты при ординатах и остатки. Для сравнения точности получаемых каждый раз выражений площади мы выбранные нами абсциссы, получаемые при них коэффициенты при ординатах и остатки будем располагать в виде таблицы.

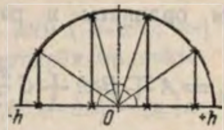
В случае двух ординат при любом выборе абсцисс коэффициенты при ординатах равны $\frac{1}{2}$, остатки же получаются различные (см. табл. 1).

Имея возможность легко находить остатки любой формулы квадратур, мы пользуемся этим и приводим в наших таблицах не только формулы Гаусса и соседние с ними (т. е. при ординатах, расположенных по соседству с наивыгоднейшими гауссовыми ординатами), но и все остальные формулы квадратур: Ньютона-Котеса, Чебышева, Понселе, Штаермана и др.

При этом формулами типа Маклорена будем называть формулы, в которых равноотстоящие ординаты взяты в середине интервалов вместо ординат на концах интервалов (черт. 4).



Черт. 4.

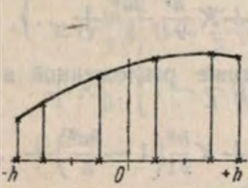


Черт. 5.

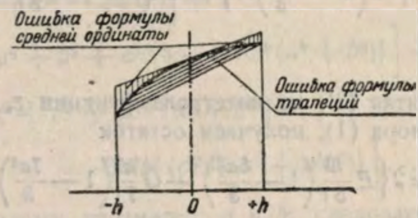
Круговыми называем такие формулы, где за абсциссы взяты проекции n точек деления полуокружности на равные части (черт. 5).

Формулами типа Понселе назовём соответствующие ординатам, построенным в серединах равных промежутков и, кроме того, в двух концевых точках (черт. 6).

Табл. 1 (см. в конце книги) показывает нам, что наиболее употребительная формула трапеций является наихудшей из всех



Черт. 6.



Черт. 7.

формул квадратур на 2 ординаты, не исключая даже случая слияния их в одну, расположенную в середине интервала интегрирования. Это видно из чертежа 7.

§ 3. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ ТРЁХ ОРДИНАТАХ

Ординаты возьмём в точках $(-ah)$; (0); $(+ah)$. Здесь также имеется один свободный параметр a.

По формуле Лагранжа

$$y = \frac{1}{2a^2h^2}\left[y_3 x(x+ah) + y_1 x(x-ah) - 2y_2(x^2 - a^2h^2)\right].$$

Интегрируем:

$$\int_{-h}^{+h} y\,dx = S = \frac{2h}{2a^2}\left\{\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3} + 2a^2 y_2\right\} =$$

$$= \frac{2h}{2a^2}\left\{\frac{1}{3}(y_1 + y_3) + 2\left(a^2 - \frac{1}{3}\right)y_2\right\}. \tag{3}$$

Разлагаем ординаты в ряды Тейлора (причём здесь и далее $y_i = z_i$):

$$y_{1,3} = A \mp Bah + C\frac{a^2h^2}{2!} \mp D\frac{a^3h^3}{3!} + E\frac{a^4h^4}{4!} \mp F\frac{a^5h^5}{5!} +$$
$$+ G\frac{a^6h^6}{6!} \mp H\frac{a^7h^7}{7!} + K\frac{a^8h^8}{8!} \mp \ldots,$$

$$y_2 = A,$$
$$y_1 + y_3 = 2\left\{A + C\frac{a^2h^2}{2!} + E\frac{a^4h^4}{4!} + G\frac{a^6h^6}{6!} + K\frac{a^8h^8}{8!} + \ldots\right\},$$
$$2y_2 = 2A.$$

Подставляя $(y_1 + y_3)$ и y_2 в выражение для S, имеем:

$$S = \frac{2h}{2a^2}\left\{\frac{2}{3}\left(A + C\frac{a^2h^2}{2!} + E\frac{a^4h^4}{4!} + G\frac{a^6h^6}{6!} + K\frac{a^8h^8}{8!} + \ldots\right) +\right.$$
$$\left. + 2\left(a^2 - \frac{1}{3}\right)A\right\} = 2\left\{Ah + C\frac{h^3}{3!} + E\frac{h^5}{5!}\frac{5a^2}{3} + G\frac{h^7}{7!}\frac{7a^4}{3} +\right.$$
$$\left. + K\frac{h^9}{9!}\frac{9a^6}{3} + \ldots\right\}. \tag{3'}$$

Вычитая (3′) из интеграла функции z, тоже разложенной в ряд Тейлора (1), получаем остаток

$$R = 2\left\{E\frac{h^5}{5!}\left(1 - \frac{5a^2}{3}\right) + G\frac{h^7}{7!}\left(1 - \frac{7a^4}{3}\right) + K\frac{h^9}{9!}\left(1 - \frac{9a^6}{3}\right) + \ldots\right\}.$$

Чтобы обратить в нуль коэффициент при первом члене остатка $1 - \frac{5a^2}{3}$, нужно положить $a = \sqrt{\frac{3}{5}}$; тогда получаем формулу Гаусса; её остаток

$$R = 0{,}32G\frac{h^7}{7!} + 0{,}704K\frac{h^9}{9!} + \ldots$$

Для формулы Чебышева должно выполняться равенство коэффициентов при ординатах $\frac{1}{3} = 2\left(a^2 - \frac{1}{3}\right)$, откуда $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Остальные формулы не требуют пояснений; относящиеся к ним коэффициенты приведены в табл. 2.

Наиболее близкие к гауссовым значения абсцисс $a = {}^{31}/_{40}$ дают наименьший остаток; но абсциссы ${}^{7}/_{9}$ выгоднее тем, что коэффициенты при ординатах в этом случае более простые, остаток же увеличивается незначительно.

Из табл. 2 мы снова видим, что из всех формул квадратур на три ординаты наиболее употребительная — Симпсона — по величине остатка является наименее точной.

§ 4. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ ЧЕТЫРЁХ ОРДИНАТАХ

За абсциссы примем $(-bh)$; $(-ah)$; $(+ah)$; $(+bh)$.

Интерполяционная формула для четырёх ординат:

$$y = \frac{1}{2abh^3(b^2-a^2)}\{a(x^2-a^2h^2)[y_4(x+bh)-y_1(x-bh)] - \\ -b(x^2-b^2h^2)[y_3(x+ah)-y_2(x-ah)]\}.$$

Интегрируем:

$$\int_{-h}^{+h} y\,dx = S =$$

$$= \frac{2h}{2(b^2-a^2)}\left\{\left(\frac{1}{3}-a^2\right)(y_1+y_4)+\left(b^2-\frac{1}{3}\right)(y_2+y_3)\right\}. \quad (4)$$

Поступая аналогично предыдущему, находим остаток:

$$R = 2\left\{E\frac{h^5}{5!}\left[1-\frac{5}{3}(a^2+b^2-3a^2b^2)\right]+\right. \\ +G\frac{h^7}{7!}\left[1-\frac{7}{3}\{(a^4+b^4+a^2b^2)-3a^2b^2(a^2+b^2)\}\right]+ \\ +K\frac{h^9}{9!}\left[1-\frac{9}{3}\{[a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)]-\right. \\ \left.\left.-3a^2b^2(a^4+b^4+a^2b^2)\}\right]\ldots\right\}.$$

Здесь имеем два свободных параметра: a и b; следовательно, можно избавиться от двух первых членов остатка. Чтобы обратить в нуль первый член, нужно выполнить условие

$$1-\frac{5}{3}(a^2+b^2-3a^2b^2)=0. \quad (5)$$

Отсюда находим соотношение между a и b:

$$a^2 = \frac{3-5b^2}{5-15b^2}; \quad (5')$$

$$b^2 = \frac{3-5a^2}{5-15b^2}. \quad (5'')$$

Чтобы уничтожить и второй член, потребуем, чтобы

$$1-\frac{7}{3}\{(a^4+b^4+a^2b^2)-3a^2b^2(a^2+b^2)\}=0. \quad (6)$$

Из (5′) и (6) получаем уравнение

$$5{,}6b^4 - 48b^2 + 0{,}48 = 0,$$

откуда находим: $a = 0{,}339981$; $b = 0{,}861136$ — это абсциссы формулы Гаусса.

Вместо несоизмеримых значений абсцисс Гаусса мы берём соизмеримые значения, представляющие или двузначную десятичную дробь или простую дробь с малым числом цифр в числителе и знаменателе. Дроби со знаменателем 90 особенно удобны для вычисления площадей функций, имеющих аргументом градусы окружности. Задавая значение одной из абсцисс, мы находим по формуле (5′) или (5″) наивыгоднейшее значение второй абсциссы несоизмеримым, после чего подыскиваем ближайшее к нему соизмеримое, на котором и останавливаемся.

Наиболее близкие к гауссовым значения абсцисс

$$a = 0{,}34; \quad b = 0{,}86;$$

или

$$a = \frac{61}{180} = 0{,}338888\ldots; \qquad b = \frac{155}{180} = 0{,}861111\ldots$$

Им соответствуют множители при ординатах:

$$\frac{3047}{9360} = 0{,}3255342 \text{ и } \frac{1633}{9360} = 0{,}1744658 \text{ в первом случае}$$

и

$$\frac{13\,225}{40\,608} = 0{,}325674 \text{ и } \frac{7079}{40\,608} = 0{,}174326 \text{ — во втором.}$$

В том и другом случаях множители при ординатах с очень малой неточностью можно заменить простыми дробями:

$$\frac{28}{86} = 0{,}3255814 \text{ и } \frac{15}{86} = 0{,}1744186,$$

а также ещё более простыми:

$$\frac{13}{40} = 0{,}325 \text{ и } \frac{7}{40} = 0{,}175.$$

Чтобы не вносить этим ошибки, можно к упрощённому множителю добавить малые поправки, данные в табл. 3. Формулы тогда примут вид:

$$S = 2h\left\{\frac{28}{86}(y_2 + y_3) + \frac{15}{86}(y_1 + y_4) - \right.$$
$$\left. - 0{,}0000933\left[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)\right]\right\},$$

$$S = 2h\left\{\frac{13}{40}(y_2 + y_3) + \frac{7}{40}(y_1 + y_4) + \right.$$
$$\left. + 0{,}0006747\left[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)\right]\right\}.$$

Малыми поправками можно пренебрегать, если это допускает желаемая точность результата.

Кроме упомянутых здесь наилучших приближений, мы даём в табл. 3 также более далёкие от наилучших, но проще выражаемые абсциссы и множители при ординатах.

Для формулы Чебышева должно быть

$$\left(\frac{1}{3}-a^2\right)=\left(b^2-\frac{1}{3}\right),$$

откуда

$$a^2+b^2=\frac{2}{3}.$$

Вторым соотношением берём (5), которое с предыдущим равенством даёт:

$$3-5\left[a^2+\left(\frac{2}{3}-a^2\right)-3a^2\left(\frac{2}{3}-a^2\right)\right]=0.$$

Получаем уравнение

$$45a^4-30a^2+1=0,$$

из которого находим

$$a=0{,}187592 \text{ и } b=0{,}794654,$$

т. е. приходим к абсциссам формулы Чебышева.

Вместо полученных несоизмеримых значений берём соизмеримые. Положив $b=0{,}80$, находим, что $a=0{,}16330$ (если одна из абсцисс удаляется вправо, то вторая уйдёт влево). Чтобы ещё более упростить формулы, мы можем взять для a значения 0,16 или $^1/_6$. Остатки, приведённые в табл. 3, показывают, насколько портится результат от таких упрощений.

Профессор И. Х. Штаерман сделал попытку приблизить формулы Чебышева к формулам Гаусса. Для этого он равные множители при ординатах Чебышева заменил однозначными множителями, близкими к таковым же (но несоизмеримым) в формулах Гаусса. Абсциссы при этом, как и в формулах Чебышева, получаются несоизмеримыми. Например, в случае 4 ординат Штаерман заменил множители $\frac{7}{40}$ и $\frac{13}{40}=\frac{7}{40}\times\frac{13}{7}$ множителями 1 и $2=\frac{14}{7}$. Тогда из общей формулы (4) находим

$$2\left(\frac{1}{3}-a^2\right)=\left(b^2-\frac{1}{3}\right),$$

откуда

$$b^2=1-2a^2,$$

или

$$2a^2+b^2=1.$$

Полагая здесь $a=0$ и замечая, что обе средние ординаты y_2 и y_3 сливаются в одну, приходим к формуле Симпсона.

Полагая $a^2=\frac{1}{2}$, найдём $b=0$ и, замечая, что обе ординаты с абсциссами $\pm b$ сливаются в одну, приходим к формуле Чебышева на 3 ординаты.

Полагая $a=b=\sqrt{\frac{1}{3}}$, приходим к формуле Чебышева на две ординаты.

Вообще, задавая для a любое значение $\leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}$, найдём отвечающее ему значение b и величину остатка. Чтобы найти наивыгоднейшее соотношение между a и b, обратимся к условию (5) и из него найдём:

$$3-5[a^2+1-2a^2-3a^2(1-2a^2)]=0.$$

Это даёт нам уравнение

$$15a^4-10a^2+1=0,$$

корни которого $a=0{,}350022$ и $b=0{,}868890$ совпадают с абсциссами формулы Штаермана. Но мы можем взять значение $a=0{,}35$, тогда b уйдёт вправо и будет равно $0{,}868907 \approx \approx 0{,}869 \approx 0{,}87$.

Рассмотрим случай, когда две ординаты построены в концевых точках интервала интегрирования; этому соответствует значение параметра b, равное единице. Имея теперь один свободный параметр a, мы можем его выбрать таким, чтобы коэффициент при первом члене остатка стал равен нулю. Подставив в (5) значение $b=1$, будем иметь

$$1-\frac{5}{3}(a^2+1-3a^2)=0$$

и находим, что $a=\sqrt{0{,}2}=0.447213$. Это даёт формулу, недавно предложенную Я. С. Безиковичем*), полученную им из совершенно других соображений.

Кроме этого наивыгоднейшего, но несоизмеримого значения, мы берём близкие к нему соизмеримые: $a=\frac{4}{9}$; $a=0{,}45$; $a=0{,}5$. Получающиеся множители при ординатах и остатки помещены в табл. 3.

---

*) Труды Ленинградского индустриального ин-та, № 4, 1937 г., вып. II, стр. 12.

§ 5. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ ПЯТИ ОРДИНАТАХ

Ординаты расположим в точках:

$$(-bh);\ (-ah);\ (0);\ (+ah);\ (+bh).$$

По интерполяционной формуле Лагранжа имеем:

$$y = \frac{1}{2h^6a^2b^2(b^2-a^2)}\Big\{a^2h^2x(x^2-a^2h^2)\Big[y_5(x+bh)+ \\ + y_1(x-bh)\Big] - b^2h^2x(x^2-b^2h^2)\Big[y_4(x+ah)+y_2(x-ah)\Big]+ \\ + 2h^2(b^2-a^2)\,y_3(x^2-a^2h^2)(x^2-b^2h^2)\Big\}.$$

Интегрируем:

$$\int\limits_{-h}^{+h} y\,dx = S = \frac{2h}{30a^2b^2(b^2-a^2)}\{a^2(3-5a^2)(y_1+y_5)+b^2(5b^2-3)\times \\ \times(y_2+y_4)+2(b^2-a^2)[3-5(a^2+b^2)+15a^2b^2]\,y_3\}. \qquad (7)$$

Как и в предыдущем, получаем остаток:

$$R = 2\Big\{G\frac{h^7}{7!}\Big[1-\frac{7}{15}\{3(a^2+b^2)-5a^2b^2\}\Big]+ \\ + K\frac{h^9}{9!}\Big[1-\frac{9}{15}\{3(a^4+b^4+a^2b^2)-5a^2b^2(a^2+b^2)\}\Big]+ \\ + M\frac{h^{11}}{11!}\Big[1-\frac{11}{15}\{3[a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)]- \\ - 5a^2b^2(a^4+b^4+a^2b^2)\}\Big]+\ldots\Big\}$$

Чтобы получить абсциссы Гаусса, коэффициенты двух первых членов остатка приравняем нулю:

$$1-\frac{7}{15}[3(a^2+b^2)-5a^2b^2]=0, \qquad (8)$$

$$1-\frac{9}{15}[3(a^4+b^4+a^2b^2)-5a^2b^2(a^2+b^2)]=0. \qquad (9)$$

Из (8) находим

$$a^2 = \frac{3(7b^2-5)}{7(5b-3)} \qquad (8')$$

или

$$b^2 = \frac{3(7a^2-5)}{7(5a^2-3)}. \qquad (8'')$$

Соединяя (8′) и (9), получаем уравнение $63b^4-70b^2+15=0$; его корни $b=0{,}906180$, $a=0{,}538469$ совпадают с абсциссами Гаусса. Вместо этих несоизмеримых значений абсцисс мы берём близкие к ним соизмеримые:

$$a=\frac{97}{180};\quad b=\frac{163}{180}\quad \text{или}\quad a=\frac{47}{90};\quad b=\frac{81}{90}$$

или $a=0{,}52$; $b=0{,}9$ и т. п.

Для формулы Чебышева должно выполняться равенство коэффициентов при ординатах:

$$a^2(3-5a^2)=b^2(5b^2-3)=2(b^2-a^2)[3-5(b^2+a^2)+15a^2b^2].$$

Эти равенства дают нам два уравнения для определения a и b:

$$a^2(3-5a^2)=b^2(5b^2-3), \tag{10}$$

$$b^2(5b^2-3)=2(b^2-a^2)[3-5(b^2+a^2)+15a^2b^2]. \tag{11}$$

Из (10)

$$a^2=\frac{3\pm\sqrt{9-100b^4+60b^2}}{10}; \tag{10'}$$

(10') и (11) сводятся к уравнению

$$72b^4-60b^2+7=0,$$

решая которое, находим:

$$b=0{,}8324975 \text{ и } a=0{,}374541$$

— абсциссы формулы Чебышева.

Пусть две ординаты построены в концевых точках, тогда $b=1$. Приравняв нулю коэффициент при первом члене остатка:

$$1-\frac{7}{15}[3(a^2+1)-5a^2]=0,$$

найдём наивыгоднейшее значение параметра a, равное $\sqrt{\frac{3}{7}}=$ $=0{,}654654$, что даёт вторую формулу Я. С. Безиковича *). Наиболее близкие к полученному соизмеримые значения $a=\frac{59}{90}$ или $a=0{,}65$ дают малую ошибку; но мы берём и близкие чётные значения $a=0{,}64$; $a=0{,}66$. Соответствующие множители при ординатах и остатки даны в табл. 4. И. Х. Штаерман для 5 ординат даёт формулу, где множителями при ординатах служат дроби:

$$\frac{2}{17};\quad \frac{4}{17};\quad \frac{5}{17};\quad \frac{4}{17};\quad \frac{2}{17},$$

и получает, что значения абсцисс должны быть $a=0{,}546377$; $b=0{,}905335$ (в значение крайних абсцисс у автора вкралась

*) Труды Ленинградского индустриального ин-та, № 4, 1937 г., вып. II, стр. 13.

ошибка; точное вычисление при так заданных множителях даёт $b=0{,}9053237$).

Мы предлагаем аналогичную формулу с множителями при ординатах:

$$\frac{3}{25};\ \frac{6}{25};\ \frac{7}{25};\ \frac{6}{25};\ \frac{3}{25}.$$

Ординаты при этом берутся в точках: $a=0{,}5337205$; $b=0{,}9050822$. Такая формула даёт лучший результат (мы далее приводим пример), а главное, удобнее оперировать с дробями в двадцать пятых долях.

§ 6. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ ШЕСТИ ОРДИНАТАХ

Пусть абсциссы будут:

$$(-ch);\ (-bh);\ (-ah);\ (+ah);\ (+bh);\ (+ch).$$

Интерполяционная формула для шести ординат:

$$y=\frac{1}{2h^6abc\,(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)\,(b^2-a^2)}\times$$
$$\times\{abh\,(b^2-a^2)\,(x^2-a^2h^2)\,(x^2-b^2h^2)\,[y_6(x+ch)-y_1(x-$$
$$-ch)]-ach\,(c^2-a^2)\,(x^2-a^2h^2)\,(x^2-c^2h^2)\,[y_5(x+bh)-$$
$$-y_2(x-bh)]+bch\,(c^2-b^2)\,(x^2-b^2h^2)\,(x^2-c^2h^2)\,[y_4(x+ah)-$$
$$-y_3\,(x-ah)]\}.$$

Интегрируем:

$$\int\limits_{-h}^{+h}y\,dx=S=\frac{h}{(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)\,(b^2-a^2)}\times$$
$$\times\left\{(b^2-a^2)\,(y_1+y_6)\left[\frac{1}{5}-\frac{a^2+b^2}{3}+a^2b^2\right]-\right.$$
$$-(c^2-a^2)\,(y_2+y_5)\left[\frac{1}{5}-\frac{a^2+c^2}{3}+a^2c^2\right]+$$
$$\left.+(c^2-b^2)\,(y_3+y_4)\left[\frac{1}{5}-\frac{b^2+c^2}{3}+b^2c^2\right]\right\}=$$
$$=\frac{2h}{30\,(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)\,(b^2-a^2)}\{(y_1+y_6)\,(b^2-a^2)[3-5\,(a^2+b^2)+$$
$$+15a^2b^2]-(y_2+y_5)\,(c^2-a^2)\,[3-5\,(a^2+c^2)+15a^2c^2]+$$
$$+(y_3+y_4)\,(c^2-b^2)\,[3-5\,(b^2+c^2)\,15b^2c^2]\}. \quad (12)$$

Поступая так же, как и ранее, получаем остаток:

$$R=2\Big\{G\frac{h^7}{7!}\Big[1-\frac{7}{15}\{3(a^2+b^2+c^2)-5(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+$$
$$+15a^2b^2c^2\}\Big]+$$
$$+K\frac{h^9}{9!}\Big[1-\frac{9}{15}\{3(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-$$
$$-5(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)+15a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\}\Big]+$$
$$+M\frac{h^{11}}{11!}\Big[1-\frac{11}{15}\{3[(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2c^2]-$$
$$-5[(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(a^4+b^4+c^4)+$$
$$+a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)]+15a^2b^2c^2(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+$$
$$+b^2c^2)\}\Big]+P\frac{h^{13}}{13!}\Big[1-\frac{13}{15}\{3[a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4+$$
$$+(a^2+b^2+c^2)(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2)]-$$
$$-5(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+$$
$$+15a^2b^2c^2[(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2c^2]\}\Big]+\ldots\Big\}.$$

Теперь у нас три свободных параметра: a, b и c, что позволяет избавиться от трёх первых членов остатка. Приравняв нулю коэффициенты при них, мы получим систему трёх уравнений, решение которой даст нам наивыгоднейшие значения a, b и c — абсциссы Гаусса. Но мы проделывать эти громоздкие для шести ординат (и аналогичные для семи ординат) выкладки не будем: нет смысла искать уже известные абсциссы, тем более, что у Гаусса это делается проще — им найдена общая формула, позволяющая найти абсциссы при любом числе ординат.

Это же можно сказать и о формуле Чебышева, абсциссы которой мы нашли бы, приравняв коэффициенты при ординатах.

Здесь мы ограничимся отысканием наивыгоднейших значений двух параметров, считая третий заданным.

Пусть $c=1$, т. е. две ординаты построены в концах отрезка. Тогда мы можем два первых члена остатка приравнять нулю:

$$1-\frac{7}{15}[3(a^2+b^2+c^2)-5(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+15a^2b^2c^2]=0, \quad (13)$$

$$1-\frac{9}{15}[3(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-$$
$$-5(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)+15a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)]=0. \quad (14)$$

Эти уравнения, после подстановки $c=1$ и исключения a, сводятся к бикубическому уравнению

$$105b^6-91b^4+15b^2-1=0, \tag{15}$$

которое заключает лишний корень, соответствующий случаю попарного совпадения ординат y_2 с y_3 и y_4 с y_5, что приводит нас к случаю четырёх ординат, из которых две расположены на концах отрезка. Мы уже видели, что средние абсциссы тогда равны $\pm\sqrt{0,2}$. Разделив уравнение (15) на $(b^2-0,2)$, получим биквадратное уравнение

$$105b^4-70b^2+5=0,$$

из которого находим

$$a=0,285232 \quad \text{и} \quad b=0,7650552.$$

Но мы округлим полученные числа до сотых долей и положим $a=0,28$; $b=0,76$. При этих более простых абсциссах первые два члена остатка не исчезают, но коэффициенты при них получаются малыми; вычисления же при таких абсциссах много проще.

Если мы зададим два параметра, то можем найти наивыгоднейшее значение третьего. Эти два параметра положим близкими к гауссовым значениям абсцисс — пусть

$$a=0,24; \quad b=0,66.$$

Имея теперь один свободный параметр, мы выбираем его таким, чтобы коэффициент первого члена остатка обратился в нуль. Из (13) получаем:

$$c^2=\frac{15-21\,(a^2+b^2)+35\,a^2b^2}{21-35\,(a^2+b^2)+105a^2b^2}.$$

Подставив сюда значения

$$a=0,24; \quad b=0,66,$$

найдём, что

$$c^2=0,866373005 \quad \text{и} \quad c=0,9307916.$$

Мы берём значение $c=0,93$ и, кроме того, чётные: $c=0,932$ и $c=0,94$. Соответствующие коэффициенты при ординатах и остатки помещены в табл. 5.

Формула Штаермана для 6 ординат имеет множители при ординатах:

$$\frac{1}{12};\ \frac{2}{12};\ \frac{3}{12};\ \frac{2}{12};\ \frac{1}{12},$$

а абсциссы расположены в точках:

$$a=0,159165; \ b=0,681582; \ c=0,512038.$$

§ 7. ФОРМУЛЫ КВАДРАТУР ПРИ СЕМИ ОРДИНАТАХ

Имеем семь ординат с абсциссами:

$$(-ch);\ (-bh);\ (-ah);\ (0);\ (+ah);\ (+bh);\ (+ch).$$

Интерполяционная формула:

$$y = \frac{1}{2h^6 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{b^2 - a^2}{c^2} x (x^2 - a^2h^2)(x^2 - b^2h^2) [y_7 (x + ch) + y_1 (x - ch)] - \right.$$

$$- \frac{c^2 - a^2}{b^2} x (x^2 - a^2h^2)(x^2 - c^2h^2) [y_6 (x + bh) + y_2 (x - bh)] +$$

$$+ \frac{c^2 - b^2}{a^2} x (x^2 - b^2h^2)(x^2 - c^2h^2) [y_5 (x + ah) + y_3 (x - ah)] -$$

$$\left. - 2\frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{a^2b^2c^2} y_4 (x^2 - a^2h^2)(x^2 - b^2h^2)(x^2 - a^2h^2) \right\}.$$

Интегрируем:

$$\int_{-h}^{+h} y\, dx = S = \left\{ \frac{b^2 - a^2}{c^2} \left(\frac{1}{7} - \frac{a^2 + b^2}{5} + \frac{a^2b^2}{3} \right) (y_1 + y_7) - \right.$$

$$- \frac{c^2 - a^2}{b^2} \left(\frac{1}{7} - \frac{a^2 + c^2}{5} + \frac{a^2c^2}{3} \right) (y_2 + y_6) +$$

$$+ \frac{c^2 - b^2}{a^2} \left(\frac{1}{7} - \frac{b^2 + c^2}{5} + \frac{b^2c^2}{3} \right) (y_3 + y_5) -$$

$$- \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{7} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{3} - a^2b^2c^2 \right) \cdot 2y_4 \right\} =$$

$$= \frac{2h}{210 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{c^2} [15 - 21 (a^2 + b^2) + \right.$$

$$+ 35a^2b^2](y_1 + y_7) - \frac{c^2 - a^2}{b^2} [15 - 21(a^2 + c^2) + 35a^2c^2](y_2 + y_6) +$$

$$+ \frac{c^2 - b^2}{a^2} [15 - 21 (b^2 + c^2) + 35b^2c^2] (y_3 + y_5) -$$

$$- \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{a^2b^2c^2} [15 - 21 (a^2 + b^2 + c^2) +$$

$$\left. + 35 (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 105a^2b^2c^2] \cdot 2y_4 \right\}. \quad (16)$$

Поступая аналогично предыдущему, получаем остаток:

$$R=2\Big\{K\frac{h^9}{9!}\Big[1-\frac{9}{105}\{15(a^2+b^2+c^2)-21(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+$$
$$+35a^2b^2c^2\}\Big]+M\frac{h^{11}}{11!}\Big[1-\frac{11}{105}\{15(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-$$
$$-21(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)+35a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\}\Big]+$$
$$+P\frac{h^{13}}{13!}\Big[1-\frac{13}{105}\{15[(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2c^2]-$$
$$-21[(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(a^4+b^4+c^4)+$$
$$+a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)]+35a^2b^2c^2[a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+$$
$$+b^2c^2]\}\Big]+R\frac{h^{15}}{15!}\Big[1-\frac{15}{105}\{15[(a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4)+$$
$$+(a^2+b^2+c^2)(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2)]-$$
$$-21[(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)]+$$
$$+35a^2b^2c^2[(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2c^2]\}\Big]+\ldots\Big\}$$

Приравняв нулю коэффициенты двух первых членов остатка, найдём уравнение для отыскания наивыгоднейших значений двух параметров из трёх:

$$1-\frac{9}{105}[15(a^2+b^2+c^2)-21(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+$$
$$+35a^2b^2c^2]=0. \quad (17)$$
$$1-\frac{11}{105}[15(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-$$
$$-21(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)+$$
$$+35a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)]=0. \quad (18)$$

Положив здесь $c=1$ и исключив a, получаем уравнение относительно b:

$$231b^6-309b^4+125b^2-15=0. \quad (19)$$

Это бикубическое уравнение, как и в предыдущем, содержит лишний корень, соответствующий случаю попарного совпадения ординат y_2 с y_3 и y_5 с y_6, что приводит нас к уже рассмотренному случаю пяти ординат с ординатами на концах, когда абсциссы ординат y_2 и y_4 есть $x=\sqrt{3/7}$. Разделив уравнение (19) на $(b^2-3/7)$, получим биквадратное уравнение

$$231b^4-210b^2+35=0,$$

из которого находим $b=0{,}83022$; $a=0{,}46885$.

Мы берём значения $c=1$; $b=0{,}83$; $a=0{,}47$ и

$$c=1;\ b={}^5/_6;\ a={}^7/_{15},$$

при которых вычисления проще и остатки достаточно малы.

Теперь зададим два параметра и из условия (17) найдём наивыгоднейшее значение третьего:

$$b^2=\frac{35-45(a^2+c^2)+63a^2c^2}{45-63(a^2+c^2)+105a^2c^2}.$$

Значения двух параметров возьмём близкими к гауссовым абсциссам, которые равны 0,40584516 и 0,94910792. Мы положим $a=0{,}4$; $c=0{,}94$ и $a=0{,}4$; $c=0{,}95$. В первом случае найдём, что $b=0{,}719475$, и возьмём $b=72$; во втором находим — $b=0{,}740502$ и, кроме $b=0{,}74$, берём $b=0{,}75$, чтобы иметь возможность делить интервал интеграции на двадцать равных частей. Соответствующие коэффициенты при ординатах и остатки см. в табл. 6.

§ 8. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ КВАДРАТУР

В качестве примера вычислим площадь полуокружности $f(x)=y=\sqrt{1-x^2}$ (см. черт. 12 на стр. 58), воспользовавшись формулой типа Гаусса на 5 ординат с абсциссами $a=0{,}52$; $b=0{,}9$ (формула 7, табл. 4)*).

Формула запишется:

$$S=2h[0{,}1256837\ (y_1+y_5)+0{,}2398774(y_2+y_4)+\\+0{,}2688777y_3],$$

причём в нашем случае $h=1$.

Кривая наша симметрична, что уменьшает вычисления, так как

$$y_1=y_5 \quad \text{и} \quad y_2=y_4,$$

$$y_1=y_5=f(0{,}9)=\sqrt{1-0{,}81}=\sqrt{0{,}19}=0{,}4358899,$$

$$y_2=y_4=f(0{,}52)=\sqrt{1-0{,}2704}=\sqrt{0{,}7296}=0{,}8541662,$$

$$y_3=f(0)=1.$$

Подставив полученные величины ординат и $h=1$ в формулу, имеем:

$$S=2(0{,}1256837\cdot 2\cdot 0{,}4358899+0{,}2398774\cdot 2\cdot 0{,}8541662+\\+0{,}2688777)=2\cdot 0{,}788237=1{,}576474.$$

---

*) Если бы надо было вычислить площадь какой-либо кривой, выражаемой тригонометрической функцией, то удобнее было бы воспользоваться формулой, где абсциссы даны соизмеримыми с градусным делением окружности, например формулой 8, табл. 4.

Точное вычисление интеграла $\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ даёт 1,57080, так что ошибка равна 0,00567.

Посмотрим, как изменится результат, если мы возьмём приближённые значения коэффициентов при ординатах (формула 7, табл. 4):

$$S = 2(0{,}125\cdot 2\cdot 0{,}43589 + 0{,}24\cdot 2\cdot 0{,}854166 + 0{,}27) =$$
$$= 2\cdot 0{,}788972 = 1{,}577944.$$

Ошибка теперь равна 0,00714, т. е. увеличилась в 1,3 раза.

Заметим, что так как расхождение точного результата и приближённого начинается уже в третьем знаке, то можно было брать ординаты с четырёхзначной точностью.

§ 9. СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМУЛ КВАДРАТУР

Оценка точности формул квадратур по остаткам является и затруднительной, так как требует знания производных высоких порядков от интегрируемой функции, и во многих случаях невозможной, когда эти производные принимают нулевые или бесконечные значения. Поэтому мы в дополнение к таблицам остатков проведём сравнение формул квадратур на ряде специально подобранных примеров.

Простая синусоида $y = \sin x$ не представляет никаких особенностей.

$y = \sin^2 x$ и $y = \sin^3 x$ *) имеют весьма малые ординаты у концов кривой и довольно крутые уклоны в промежуточных точках.

Полуокружность $y = \sqrt{1-x^2}$ имеет на концах вертикальные касательные и соответственно бесконечные значения производных.

Кривая $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет на концах ординаты, стремящиеся к бесконечности; интеграл этой кривой несобственный, но имеет конечное значение. Все формулы с ординатами на концах к вычислению этого интеграла непригодны, тогда как формулы типа Гаусса и Чебышева дают результаты хоть и заниженные, но довольно близкие к истинному.

$y = [x\sqrt{x(1-x)}]^3$ представляет несимметричную кривую, встречающуюся при вычислении моментов инерции самолётных стоек.

---

*) Аналогичные кривые встречаются при вычислении моментов инерции самолётных стоек и винтовых дужек.

Подинтегральные функции эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

при модуле k, близком к единице, являются образцом несимметричных кривых, имеющих весьма большую кривизну при x, близком к $\frac{\pi}{2}$.

Мы приводим также пример Штаермана, так как в нём произведены полные вычисления по формулам Гаусса и Чебышева, что мы в своих примерах делаем лишь в тех немногих случаях, где вычисления не являются громоздкими.

Формулы с неравноотстоящими ординатами весьма хороши при вычислениях определённых интегралов, но мало пригодны для вычисления интегралов неопределённых и, особенно, для численного интегрирования дифференциальных уравнений. В этих случаях формулы Ньютона-Котеса являются незаменимыми.

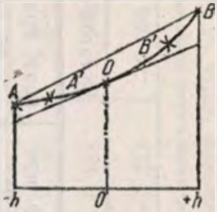
Для каждой из взятых нами кривых мы составляем таблицы площадей, вычисленных по различным формулам квадратур. Кроме того, для каждой кривой мы формулы располагаем в таблицы в порядке уменьшения даваемой ими ошибки. Мы видим, что такое расположение формул для каждой кривой своё; но почти всегда формулы типа Гаусса дают меньшую ошибку, чем другие формулы квадратур при том же и даже при большем числе ординат.

В отдельных случаях менее точная формула даёт лучший результат, чем более точная. Так, например, для эллиптического интеграла I рода формула Симпсона, повторённая два раза (5 ординат), дала лучший результат, чем более точная формула Гаусса на 6 ординат. Подобные результаты объясняются случайной компенсацией ошибок.

Иногда приближённая формула может дать точную площадь кривой. Для наглядности рассмотрим площадь кривой (черт. 8), вычисленную по формулам квадратур на 2 ординаты.

Формула трапеций даёт площадь кривой с избытком. Пусть точки A и B приближаются по кривой от её концов к середине — точке 0. Формула средней ординаты (двух слившихся) даёт площадь кривой с недостатком. По непрерывности на кривой найдутся такие точки A' и B', что, подставив их ординаты в формулу квадратур, мы получим точную площадь кривой. Но эти точки A' и B' будут совпадать с точками Гаусса только в том случае, если изображённая на чертеже кривая будет алгебраической не выше 3-й степени.

Заметим, что для уверенности и правильности полученной по формуле квадратур площади нужно знать, хотя бы примерно, ход кривой. Если ход кривой неизвестен, то для гарантии правильности полученного результата площадь нужно вычислять по нескольким различным формулам, так как при пользовании только одной формулой может оказаться, что входящие в неё ординаты не характерны для данной кривой. Так, академик Крылов строит кривую *), для которой формула Гаусса на 5 ординат даёт площадь, равную нулю, тогда как в действительности она положительна.



Черт. 8.

Заметим, далее, что при вычислении площадей несимметричных кривых, подобных кривой $y = [x\sqrt{x(1-x)}]^3$, можно интервал интегрирования разбивать на два и отдельно вычислять площадь каждой части; так, для указанной кривой вычислить площадь от нуля до 0,4 или 0,5 по формуле с малым числом ординат и остальную часть кривой по более точной формуле. Это значительно увеличило бы точность полученного результата.

Сравнительные результаты вычислений квадратур для указанных выше примеров функций сведены в табл. 7—15.

ТАБЛИЦЫ

Примечание к таблицам формул

Формулы квадратур расположены в таблицах по числу ординат. В таблицах даны положения ординат на отрезке $[-1; +1]$ и на отрезке $[0; 1]$ и соответствующие коэффициенты при ординатах; кроме того, в правых столбцах таблиц даны коэффициенты трёх первых членов остатка.

Коэффициенты при ординатах помещены под абсциссами на отрезке $[0; 1]$. Для удобства пользования коэффициенты иногда даются и в виде простой дроби и в виде десятичной; в этих случаях для краткости записи мы коэффициенты простыми дробями пишем у левых ординат, а равные коэффициенты при симметричных им правых ординатах записываем десятичной дробью. Когда мы даём и приближённые значения коэффициентов при ординатах, то располагаем их непосредственно следующей строкой под точными значениями этих коэффициентов, без повторения строки значений абсцисс.

*) «Лекции о приближённых вычислениях», стр. 119, изд. 1933 г.

Таблица 1

Две ординаты

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [−1; +1]	Абсциссы на отрезке [0; 1]		Остаток		
					коэф. при $C\frac{h^3}{3!}$	коэф. при $E\frac{h^5}{5!}$	коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$
0	Ф-ла одной ординаты (две слились)	0	0,5	0,5	2	2	2
1	Ф-лы типа Маклорена, Остроградского, круговая . . .	0,5	0,25	0,75	0,5	1,375	1,78
2	Ф-лы Гаусса, Чебышева . . .	$1/\sqrt{3}$	0,211325	0,788675	0	0,889	1,48
3	Ф-ла типа Гаусса . . .	$0{,}58 \approx \frac{52}{90}$	0,21	0,79	−0,0184	0,868	0,822
4	То же	0,6	0,2	0,8	−0,16	0,704	1,35
5	»	5/9	2/9	7/9	0,178	1,047	1,58
6	»	23/40	17/80	63/80	0,01625	0,907	1,49
7	»	26/45	19/90	71/90	−0,00296	0,906	1,48
8	Ф-ла трапеций	1	0	1	−4	−8	−12

Таблица 2

Три ординаты

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [−1; +1]	Абсциссы на отрезке [0; 1] и соответствующие коэффициенты при ординатах			Остаток: коэф. при $E\frac{h^5}{5!}$	Остаток: коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	Остаток: коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$
1	Ф-ла Маклорена	2/3	1/6 3/8	1/2 1/4	5/6 3/8	0,5185	1,03	1,47
2	Ф-лы Чебышева, круговая	$1/\sqrt{2} =$ $= \cos 45°$	0,146446 1/3	1/2 1/3	0,853553 1/3	0,333	0,833	1,25
3	Ф-ла Гаусса . .	$\sqrt{0,6} = 0,7746$	0,11270 5/18	0,5 8/18	0,88730 $\frac{5}{18} = \frac{4805}{18961}$	0	0,320	0,704
4	Ф-ла типа Гаусса	31/40 = = 0,775	9/80 800/3×961	1/2 $\frac{1283}{3\times961}$	71/80 $\frac{800}{2883} = \frac{4800}{18\times961}$	−0,00208	0,3165	0,700
5	То же	7/9 = = 0,778	1/9 27/93	1/2 44/93	8/9 27/93	−0,0165	0,292	0,672
5′	*) »		0,275 + + 0,000510	0,45 − − 0,001020	0,275 + + 0,000510	−0,00636	0,148	0,337
6	»	3/4	1/8 8/27	1/2 11/27	7/8 8/27	0,125	0,523	0,932
7	»	0,8	0,1 25/96	0,5 46/96	0,9 25/96	−0,133	0,0885	0,427
8	Ф-ла Симпсона .	1	0 1/6	1/2 4/6	1 1/6	−1,333	−2,666	−4

*) Если пренебрегать поправками к множителям при ординатах, то в остатках появляются члены, содержащие более низкие степени h, но с очень малыми коэффициентами. В остатке данной формулы появляется член $C\frac{h^3}{3!}$ с коэффициентом 0,00185.

Четыре

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1] a	b	Абсциссы на отрезке коэффициенты	
1	Ф-ла Чебышева	0,187592	0,794654	0,102673 1/4	0,406204 1/4
1′	Ф-ла типа Чебышева	0,16330	0,8	0,1 1/4	0,41835 1/4
1″	То же	49/300	0,8	0,1 1/4	251/600 1/4
1‴	*) »	1/6	0,8	0,1 1/4	5/12 1/4
1IV	*) »	0,16	0,8	0,1 1/4	0,42 1/4
2	Ф-ла типа Гаусса	0,2	0,8	0,1 22/90	0,4 23/90
3	То же	0,21	0,8	0,1 8677/35754	0,395 9200/35754
4	Ф-ла Гаусса	0,339981	0,8611363	0,0694318 0,173997	0,330009 0,326073
5 5′ 5″	Ф-ла типа Гаусса То же »	0,34	0,86	0,07 1633/9360= =15/86+ +0,0000472= =7/40— —0,000581395	0,33 3047/9360= =28/86— —0,0000472= =13/40+ +0,000581395
6 6′ 6″	» *) » *) »	61/180	155/180	25/360 7079/40608= =15/86— —0,0000933= =7/40— —1/1482	119/360 13225/40608= =28/86+ +0,0000933= =13/40+ +1/1482

*) См. сноску на стр. 34.

ординаты

[0; 1] и соответствующие при ординатах		Остаток коэф. при $E\frac{h^5}{5!}$	коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$
0,593796 1/4	0,897327 1/4	0	0,237	0,608
0,58165 1/4	0,9 1/4	0,0516	0,164	0,489
349/600 1/4	0,9 1/4	0,0516	0,164	0,489
7/12 1/4	0,9 1/4	—0,0259	0,0824	0,245
0,58 1/4	0,9 1/4	—0,0256	0,0825	0,245
0,6 0,25555	0,9 0,24444	—0,0107	0,205	0,524
0,605 0,257313866	0,9 0,242686133	0,00191	0,218	0,534
0,669991 0,326073	0,9305682 0,173927	0	0	0
0,67 0,325534189= =0,325581395— — 0,0000472= =0,325+ + 0,000581395	0,93 0,174465811= =0,174418605+ + 0,0000472= =0,175— — 0,000581395	0,00431 0,00241 —0,00695	0,00959 0,00506 0,00178	0,119 0,0595 —0,153
241/360 0,325674744= =28/86+ + 0,0000933— =0,325+ + 0,0006747	335/360 0,174325256= =15/86— — 0,0000933= =0,175— — 0,0006747	—0,00293 —0,00197 —0,00509	—0,00391 —0,00248 —0,00579	0,101 0,0498 0,0467

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1] a	b	Абсциссы на отрезке коэффициенты	
7	Ф-ла типа Гаусса	1/3	77/90	13/180 1800/10058	1/3 3229/10058
8	То же	1/3	78/90= =13/15	6/90=1/15 25/144	1/3 47/144
9	»	31/90	78/90	12/180 1739/10246	59/180 3384/10246
10	»	0,4	0,9	0,05 4/30	0,3 11/30
11	Ф-ла Штаермана	0,350022	0,868890	0,065555 1/6	0,324989 2/6
11′	*) Ф-ла типа Штаермана	0,35	0,87	0,065 1/6	0,325 2/6
11″	То же	48/137	119/137	18/274 1/6	89/274 2/6
12	Ф-ла Маклорена	0,25	0,75	1/8 13/48	3/8 11/48
13	Круговая	0,3090170= =cos 72°	0,8090170= =cos 36°	0,0954915 0,212732195	0,3454915 0,28767805
14	Ф-ла Котеса	1/3	1	0 1/8	1/3 3/8

*) См. сноску на стр. 34.

[0; 1] и соответствующие при ординатах		Остаток		
		коэф. при $E\frac{h^5}{5!}$	коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$
2/3 0,321037979	167/180 0,178962021	0,00302	0,0791	0,149
2/3 47/144	84/90=14/15 25/144	—0,0395	—0,0728	0,00893
121/180 0,330275229	168/180 0,169724771	—0,00804	—0,0292	0,00491
0,7 0,366667	0,95 0,133333	0,06266	—0,0261	—0,0749
0,675011 2/6	0,934445 1/6	0	—0,0253	0,0500
0,675 2/6	0,935 1/6	—0,00485	—0,0204	—0,0135
185/274 2/6	256/274 1/6	—	—	—
5/8 11/48	7/8 13/48	0,268	0,649	1,024
0,6545085 0,28767805	0,9045085 0,212732195	0,125	0,323	0,594
2/3 3/8	1 1/8	—0,593	—1,514	—2,502

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1] *a*	*b*	Абсциссы на отрезке коэффициенты	
15	Наивыгоднейшая при $b=1$	$\sqrt{0,2}=$ =0,44721360	1	0 1/12	0,2763932 5/12
16 16′	Близкая к наивыгоднейшей при $b=1$ *) То же	0,45	1	0 157/1914= =64/780— —0,0000241	0,275 800/1914= =326/780+ +0,0000241
17	»	4/9	1	0 11/130	5/18=0,2777 54/130
18	»	0,4	1	0 13/126	0,3 50/126
19	Ф-ла типа Понселе **), она же круговая при $b=1$	0,5	1	0 1/18	0,25 8/18

*) В остатках формул, отмеченных этой сноской (см. прим. к табл. 2),

у формулы	1‴	—0,00167
» »	1^{IV}	0,00160
» »	5′	0,000177
» »	5″	—0,00200
у формулы	6′	—0,000351
» »	6″	—0,00254
» »	11′	—0,00190
» »	16′	—0,00115

**) Получается из формулы Котеса на 5 ординат, если пропустить

[0; 1] и соответствующие при ординатах		Остаток		
		коэф. при $E\frac{h^5}{5!}$	коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$
0,7236068 325/780	1 65/780	0	—0,427	—1,024
0,725 0,4179728= =0,4179487+ +0,0000241	1 0,0820272= =0,0820513— —0,0000241	0,0167 0,00810	—0,394 —0,197	—0,978 —0,510
13/18=0,7222 324/780	1 66/780	—0,0165	0,459	1,069
0,7 0,396825	1 0,103175	—0,266	—0,934	—1,724
0,75 8/18	1 1/18	0,333	0,25	—0,0625

при $C\frac{h^3}{3!}$ будут следующие коэффициенты:

среднюю ординату.

Пять

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1]		Абсциссы на отрезке коэффициенты	
		a	*b*		
1	Ф-ла Чебышева	0,374541	0,832498	0,083751256 1/5	0,312730 1/5
2	Ф-ла Макларена	0,4	0,8	0,1 275/1152	0,3 100/1152
3	Круговая	0,5=cos 60°	$\sqrt{3/4}=$ =0,8660254= =cos 30°	0,0669873 14/90	0,25 18/90
4 4′	Ф-ла типа Гаусса *) То же	1/2	8/9	1/18 2187/16000= =96/700— —0,0004554	1/4 176/750= =164/700+ +0,0003810
5	»	0,5	0,89	0,055 7/51,5276892	0,25 3842/16263
6	»	0,5	0,9	0,05 125/972	0,25 1/4
7 7′	» *) »	0,52	0,9	0,05 0,125683710= =0,125+ +0,000683710	0,24 0,239877446= =0,24— —0,000122554
8	»	47/90= =0,5222	81/90=0,9	9/180 66275/528768	43/180 1148175/4806784

*) См. сноску на стр. 40.

ординат

Таблица 4

[0; 1] и соответствующие при ординатах			Остаток		
			коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$
0,5 1/5	0,687270 1/5	0,916248743 1/5	0,102	0,336	—0,00742
0,5 402/1152	0,7 100/1152	0,9 275/1152	0,145	0,572	0,864
0,5 26/90	0,75 18/90	0,9330127 14/90	0,0750	0,245	—0,569
1/2 247/960= =0,2572917= =180/700+ +0,0001488= =0,2571429+ +0,0001488	3/4 0,2346667= =0,2342857+ +0,0003810	17/18 0,1366875= =0,1371429— —0,0004554	0,00947 0,00167	0,0492 0,0214	0,138 0,0658
0,5 6079/23763= =0,255817868	0,75 0,236241775	0,945 0,135849290	—0,00624	0,0416	0,126
0,5 59/243= =236/972= =0,24279835	0,75 0,25	0,95 0,128600823	—0,0230	—0,0281	0,0163
0,5 0,268877688= =0,27— —0,001122312	0,76 0,239877446= =0,24— —0,000122554	0,95 0,125683710= =0,125+ +0,000683710	—0,00308 0,00355	0,00614 —0,00964	0,565 0,0335
1/2 145787/536787= =0,271591898	137/180 0,238865528	171/180 0,125338523	0,000738	0,0101	0,0512

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [−1; +1]		Абсциссы на отрезке коэффициенты	
		a	*b*		
9	Ф-ла Гаусса	0,538469	0,906180	0,046910 0,118463	0,2307655 0,239314
10	Ф-ла типа Гаусса	97/180 = = 0,53888	163/180 = = 0,90555	17/360 $\frac{451395}{3799367}$	183/360 $\frac{320805}{1345487}$
11	То же	6/11= =0,545454	10/11 = =0,9090909	1/22 7381/64006=	5/22 16577/69120=
11′	*) »			=0,115+ + 0,000328125	=0,24− − 0,000170718
12	»	0,55	0,91	0,0045 0,11391936=	0,225 0,23910756 =
12′	*) »			=0,114− −0,00008064	=0,239+ + 0,00010756
13	Ф-ла Штаермана	0,546377	0,9053237	0,04733815 2/17	0,2268115 4/17
13′	Видоизменение ф-лы Штаермана	0,5337205	0,9050822	0,0474589 3/25	0,23313975 6/25
14	Ф-ла Котеса	0,5	1	0 7/90	1/4 32/90
15	Наивыгоднейшая при b=1	$\sqrt{3/7}$= =0,654654	1	0 9/180	0,172673 49/180

*) См. сноску на стр. 40.

Продолжение

[0; 1] и соответствующие при ординатах			Остаток		
			коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$
0,5 0,284444	0,7692345 0,239314	0,953090 0,118463	0	0	0
1/2 $\frac{71377321}{249987721}=$ $=0,285523308$	177/360 0,238430397	343/360 0,118807949	0,00210	0,00490	0,0399
1/2 15643/54000= =0,289685185= =0,29— — 0,000314815	17/22 0,239829282= =0,24— —0,000170718	21/22 0,115328125= =0,115+ +0,000328125	0,000355 0,00271	—0,00450 0,000480	0,0190 0,0133
0,5 0,29394615= =0,294— — 0,00005385	0,775 0,23910756 = =0,239+ + 0,00010756	0,955 0,11391936= =0,114— — 0,00008064	0,00332 —0,0203	—0,006285 —0,00927	0,0214 0,0695
0,5 5/17= =0,294118	0,7731885 0,235294	0,95266185 0,117647	0,0110	0,0214	0,0608
0,5 7/25=0,28	0,76686025 0,24	0,9525411 0,12	—0,00116	—0,00110	0,0163
1/2 12/90	3/4 32/90	1 7/90	—0,333	—0,950	—1,44
0,5 64/180	0,827327 49/180	1 9/180	0	—0,131	—0,373

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1] *a*	*b*	Абциссы на отрезке	коэффициенты
16	Близкая к ней	59/90	1	0 1379/27714	31/180 $\frac{43740000}{16078739}$
17	То же	0,66	1	0 137/2822	0,17 1/3,6877896
18	»	0,64	1	0 119/2214	0,18 1/3,6274176
19	»	0,65	1	0 71/1386	0,175 32/117,117
20	Ф-ла типа Понселе **) (Ф-ла Харди)	2/3	1	0 14/300	1/6 81/300
21	Круговая при $b=1$	$1/\sqrt{2}$	1	0 0,5/15	0,1464466 4/15

*) У отмеченных этой сноской формул (см. прим. к табл. 2) в остат при них будут следующие:

у формулы 4′ при члене $C\frac{h^3}{3!}$ коэф. — 0,00159, а

» » 7′ » » $C\frac{h^3}{3!}$ » 0,00312,

» » 11′ » » $C\frac{h^3}{3!}$ » 0,00132,

» » 12′ » » $C\frac{h^3}{3!}$ » — 0,100,

) Получается из формулы Котеса на 7 ординат, если пропустить ординат **Окончание

[0; 1] и соответствующие при ординатах			Остаток		
			коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$
1/2 $\frac{3722}{10443}=$ =0,35641099	149/180 0,27203626	1 0,04975824	0,00221	—0,125	—0,365
0,5 1178/3267= =0,36057545	0,83 0,27116514	1 0,04854713	0,0131	—0,1992	—0,329
0,5 131/384= =0,34114583	0,82 0,27567821	1 0,05374887	—0,0354	—0,214	—0,505
0,5 178/507= =0,3512	0,825 0,2732	1 0,0512	—0,0733	—0,158	0,416
1/2 110/300	5/6 81/30	1 14/300	0,0296	—0,0593	—0,259
0,5 6/15=0,4	0,8535534 0,26666667	1 0,03333333	0,133	0,200	0,662

ках появляются два дополнительных члена. Коэффициенты

при члене $E\frac{h^5}{5!}$ коэф. — 0,00261

» » $E\frac{h^5}{5!}$ » 0,00440

» » $E\frac{h^5}{5!}$ » 0,00209

» » $E\frac{h^5}{5!}$ » —0,0612

две ближайшие к середине ординаты.

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [−1; +1] *a*	*b*	*c*	Абсциссы на отрезке [0; 1] коэффициенты		
1	Ф-ла Чебышева	0,266635	0,422519	0,866247	0,0668765 1/6	0,2887405 1/6	0,3666825 1/6
2	Ф-ла Маклорена	1/6	3/6	5/6	1/12 $\frac{139}{1280}$	1/4 $\frac{247}{1280}$	5/12 $\frac{254}{1280}$
3	Круговая . . .	$0{,}22252 = \cos\frac{360^\circ}{7}$	$0{,}62349 = \cos\frac{540^\circ}{7}$	$0{,}90097 = \cos\frac{180^\circ}{7}$	0,049515 0,11346	0,188255 0,16340	0,38874 0,22314
4	Ф-ла Гаусса .	0,238619	0,661209	0,932470	0,033765 0,085662	0,1693955 0,180381	0,3806905 0,233957
5	Ф-ла типа Гаусса	0,24	0,66	0,932	0,034 0,0864063	0,17 0,1793362	0,38 0,2342575
6	То же	0,24	0,66	0,93	0,035 0,0875579	0,17 0,1777280	0,38 0,2347141
7	»	0,24	0,66	0,94	0,03 0,08200363	0,17 0,18553350	0,38 0,23246287
7′	»				0,0820	0,1855	0,2325
8	Ф-ла Штаермана	0,259565	0,681582	0,932078	0,033961 1/12	0,159209 2/12	0,3702175 3/12

Таблица 5

ординат

и соответствующие при ординатах			Остаток		
			коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$
0,6333175 1/6	0,7112595 1/6	0,9331235 1/6	0	0,0452	0,127
7/12 0,19843750	3/4 0,19296875	11/12 0,10859375	0,143	0,369	0,757
0,61126 0,22314	0,811745 0,16340	0,950485 0,11346	0,0156	0,0461	0,0884
0,6193095 0,233957	0,8306045 0,180381	0,966235 0,085662	0	0	0
0,62 0,2342575	0,83 0,1793362	0,966 0,0864063	—0,00191	—0,00336	—0,00376
0,62 0,2347141	0,83 0,1777280	0,965 0,0875579	0,00125	0,00570	0,0128
0,62 0,23246287 0,2325	0,83 0,18553350 0,1855	0,97 0,08200363 0,0820	—0,0146	—0,0401	—0,0714
0,6297825 3/12	0,840791 2/12	0,966039 1/12	0	0,00567	0,0133

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [− 1; + 1] *a*	*b*	*c*	Абсциссы на отрезке [0; 1] коэффициенты		
9	Ф-ла Котеса .	0,2	0,6	1	0 19/288	0,2 75/288	0,4 50/288
10	Наивыгоднейшая при $c=1$	0,285232	0,7650552	1	0 0,0333335	0,1174724 0,1892371	0,357384 0,2774294
11	Близкая к наивыгоднейшей при $c=1$.	0,28	0,76	1	0 0,0341873	0,12 0,1922268	0,36 0,2735859
12	То же	0,285= =57/200	0,765= =153/200	1	0 0,033306	0,1175 0,189392	0,3575 0,277302
13	»	2/7	16/21	1	0 0,034623	5/42 0,188536	5/14 0,276841
14	Ф-ла типа Понселе . .	1/4	3/4	1	0 $\frac{103}{3150}$	1/8 $\frac{22}{105}$	3/8 $\frac{58}{225}$
15	Круговая при $c=1$	0,3090170= =cos 72°	0,8090170 = = cos 36°	1	0 0,0200000	0,0954965 0,1803715	0,3454965 0,2996285

и соответствующие при ординатах			Остаток		
			коэф. при $G\frac{h^7}{7!}$	коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$
0,6 50/288	0,8 75/288	1 19/288	—0,188	—0,520	—0,809
0,642616 0,2774294	0,8825276 0,1892371	1 0,0333335	0	0	0,0193
0,64 0,2735859	0,88 0,1922268	1 0,0341873	0,00188	—0,0136	—0,0480
0,6425 0,277302	0,8825 0,189392	1 0,033306	0,000121	0,000397	0,0188
9/14 0,276841	37/42 0,188536	1 0,034623	—0,00631	—0,0176	—0,0703
5/8 0,2577778	7/8 0,2095238	1 0,0326984	0,0385	0,0576	0,0422
0,6545035 0,2996285	0,9045035 0,1803715	1 0,0200000	0,00833	0,0438	0,0833

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [− 1; +1] a	b	c	Абсциссы на отрезке [0; 1] и коэффициенты		
1	Ф-ла Чебышева	0,323912	0,529657	0,883862	0,058069 1/7	0,2351715 1/7	0,338044 1/7
2	Круговая	0,3826834= =cos 22,5°	0,7071068= =cos 45°	0,9238795= =cos 67,5°	0,0390602 0,0889822	0,1464466 0,1238095	0,3086583 0,1967322
3	Ф-ла Гаусса . . .	0,405845	0,741531	0,949108	0,025446 0,064742	0,1292345 0,139853	0,2970775 0,190315
4	Ф-ла типа Гаусса	0,4	0,72	0,94	0,03 0,07457236	0,14 0,13807608	0,30 0,18247433
4′	*) То же				0,0745	0,1380	0,1825
4″	*) »				0,0746	0,1381	0,1825
5	»	0,4	0,75	0,95	0,025 0,06223145	0,125 0,13971192	0,3 0,1994668
6	»	0,4	0,74	0,95	0,025 0,06421	0,13 0,14277	0,3 0,19083
7	Ф-ла Штаермана	0,404482	0,747397	0,944446	0,027777 1/15	0,1263015 2/15	0,297759 3/15
8	Ф-ла Котеса . . .	1/3	2/3	1	0 41/840	1/6 9/35= =216/840	1/3 9/280= =27/840
8′	*)				1/20	1/4	1/30
9	Наивыгоднейшая при $c=1$	0,468850	0,830223	1	0 0,02381	0,0848885 0,13841	0,265575 0,21587
10	Близкая к наивыгоднейшей при $c=1$	0,47	0,83	1	0 0,02397731	0,085 0,13803316	0,265 0,21547446

*) См. сноску на стр. 48.

ординат

соответствующие при ординатах				Остаток		
				коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$	коэф. при $P\frac{h^{13}}{13!}$
0,5 1/7	0,661956 1/7	0,7648285 1/7	0,941931 1/7	0,0260	0,0800	0,154
0,5 0,1809522	0,6913417 0,1967322	0,8535534 0,1238095	0,96093975 0,0889822	0,00893	0,0277	0,0550
0,5 0,208280	0,7029225 0,190315	0,8707655 0,139853	0,974554 0,064742	0	0	0
0,5 0,20975446 0,2100 0,2098	0,70 0,18247433 0,1825 0,1825	0,86 0,13807608 0,1380 0,1381	0,97 0,07457236 0,0745 0,0746	0,000255 0,00102 −0,000207	0,00441 0,00312 0,00186	0,0150 0,00843 0,00714
0,5 0,19717789	0,7 0,19946768	0,875 0,13971192	0,975 0,06223245	0,000548	0,01345	0,0211
0,5 0,20438	0,7 0,19083	0,87 0,14277	0,975 0,06421	−0,000288	−0,0187	−0,00349
0,5 3/15	0,702241 3/15	0,8736985 2/15	0,972223 1/15	0,00412	0,0118	0,0216
1/2 34/105= =272/840 0,3=6/20	2/3 9/280 1/30	5/6 9/35 1/4	1 41/840 1/20	−0,0593 −0,0765	−0,172 −0,196	−0,321 −0,350
0,5 0,24382	0,734425 0,21587	0,9151115 0,13841	1 0,02381	0	0	−0,00560
0,5 0,24503013	0,735 0,21547446	0,915 0,13803316	1 0,02397731	−0,000866	−0,00235	−0,0154

№ п/п.		Абсциссы на отрезке [—1; +1] a	b	c	Абсциссы на отрезке [0; 1] коэффициенты		
11	Близкая к наивыгоднейшей при $c = 1$	7/15	5/6	1	0 $\frac{4603}{203280}$—	1/12 $\frac{191232}{1376375}$—	4/15 $\frac{1884375}{8639624}$—
11′	*) То же				=16/700— —0,00021350	=97/700+ +0,00036745	=153/700— —0,00029652
12	»	0,48	0,84	1	0 $\frac{13463}{619528}$	0,08 $\frac{867}{6478{,}0176384}$	0,26 $\frac{101}{460{,}7995392}$
12″	*) »				20/900	120/900	195/900
13	»	0,5	6/7	1	0 7/390	1/14 16807/133380	1/4 64/285
14	Ф-ла типа Понселе	0,4	0,8	1	0 223/7938	0,1 5875/36288	0,3 4625/21168
14′	*) То же				0,0281	0,1619	0,218
14″	*) »				0,028	0,162	0,218
15	Круговая при $c = 1$	0,5 = = cos 60°	0,8660254 = = cos 30°	1	0 0,0142857	0,6669875 0,1269841	0,25 0,2285714

*) При семи ординатах (см. прим. к табл. 2) в остатках формул, отменты при них будут соответственно следующие:

		$C\frac{h^3}{3!}$	$E\frac{h^5}{5!}$	$G\frac{h^7}{7!}$
У формулы	4′	0,000600	0,00176	0,000832
» »	4″	—0,000246	—0,000286	—0,000315
» »	8′	—0,189	—0,0350	—0,0137
» »	11′	—0,000125	—0,000309	—0,00130

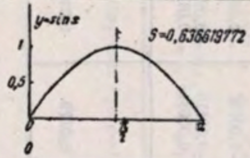
Продолжение

и соответствующие при ординатах				Остаток		
				коэф. при $K\frac{h^9}{9!}$	коэф. при $M\frac{h^{11}}{11!}$	коэф. при $P\frac{h^{13}}{13!}$
1/2 $\frac{30904}{128625}$ = =0,2402634= =168/700+ +0,0002634= =0,24+ +0,0002634	11/15 0,21828531= =0,21857183− −0,00029652	11/12 0,13893888= =0,13857143+ +0,00036745	1 0,02264364= =0,02285714− −0,00021350	0,00389 −0,000369	0,0116 0,00109	0,0110 0,00102
0,5 $\frac{27838}{111132}$ = =0,25049491 266/900= =0,25111111	0,74 0,21918425 0,21888889	0,92 0,13383724 0,13333333	1 0,02173105 0,02222222	0,00115 −0,00600	0,00761 −0,00462	0,00940 −0,00567
1/2 71/270= =0,26296293	3/4 0,22456140	13/14 0,12600841	1 0,01794872	0,000583	0,0138	0,0333
0,5 41/224= =0,18303572 0,183 0,184	0,7 0,21849017 0,218 0,218	0,9 0,16189925 0,1619 0,162	1 0,02809272 0,0281 0,028	0,00567 0,00268 0,00421	−0,00197 −0,00115 0,000815	−0,0395 −0,0200 −0,0175
0,5 0,2603175	0,75 0,2285714	0,9330127 0,1269841	1 0,0142857	0,00357	0,0179	0,0395

ченных этой сноской, появляются три дополнительных члена; коэффици-

		$C\frac{h^3}{3!}$	$E\frac{h^5}{5!}$	$G\frac{h^7}{7!}$
У формулы	12′	−0,000405	−0,00225	−0,00435
» »	14′	0,000424	0,0000496	−0,0000766
» »	14″	0,000640	0,000640	−0,00184

Таблица 7

Черт. 9.		S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
1 ордината	$a=0,0$	1	0,36338	—
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0	0,63661	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,6$	0,58779	—0,04883	1/13
	$a=0,58$	0,61291	—0,02371	—1/27
	$a=52/90$	0,61566	0,02096	1/30
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	2/3=0,66667	0,03008	1
	Ф-ла типа Гаусса			
	$a=7/9$	0,63744	0,00082	1/37
4 ординаты	Ф-ла Котеса	0,649519	0,012899	1
	Ф-ла Чебышева	0,636945	0,000325	1/40
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,34;\ b=0,86$	0,636519	—0,000101	—0,0078
	$a=4/9;\ b=1$	0,636406	—0,000214	—1/59
	$a=0,5;\ b=1$	0,628539	—0,008081	—1/1,6
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,6361647	—0,000455	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,52;\ b=0,90$	0,6366150	—0,0000047	1/100

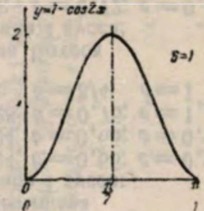
		S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
5 ординат	$a=0,5$ $b=0,9$	0,6366366	0,000018	—1/25
	$a=0,55$ $b=0,91$	0,6366247	0,000005	—1/90
	$a=0,65$; $b=1$	0,6366105	—0,0000093	1/48
	$a=2/3$; $b=1$	0,6366666	0,0000469	—1/10
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,6363661	—0,0002536	1
	Ф-ла Чебышева	0,6366153	—0,0000044	1/59
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$	0,6365999	—0,0000198	1/13
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$	0,6366214	0,0000017	—1/150
	$a=0,28$; $b=0,76$; $c=1$	0,63662255	0,00000278	1/92
	$a=1/4$; $b=3/4$; $c=1$	0,6366738	0,0000540	—1/4,7
7 ординат	Формула Котеса	0,6366253	0,0000056	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,4$; $b=0,72$; $c=0,94$	0,636619761	—0,000000011	—1/500
	$a=0,4$; $b=0,8$; $c=1$	0,63661948	0,0000003	1/18,3
	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$	0,6366195	0,0000002	1/28

Таблица 7а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y=\sin x$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» одной ординаты	$a=0,0$
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,6$ (2 ординаты)
» Симпсона (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,58$ (2 ординаты)
» » » » »	$a=52/90$ (2 ординаты)
» Котеса (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,5$; $b=1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=7/9$ (3 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» Чебышева (4 ординаты)	
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=4/9$; $b=1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=0,34$; $b=0,86$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=1/4$; $b=3/4$; $c=1$ (6 ординат)
» » » » »	$a=2/3$; $b=1$ (5 ординат)
» » » » »	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$ (6 ординат)
» » » » »	$a=0,5$; $b=0,9$ (5 ординат)
» » » » »	$a=0,65$; $b=1$ (5 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» Типа Гаусса с абсциссами	$a=0,55$; $b=0,91$ (5 ординат)
» » » » »	$a=0,52$; $b=0,9$ (5 ординат)
» Чебышева (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,28$; $b=0,76$; $c=1$ (6 ординат)
» » » » »	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$ (6 ординат)
» » » » »	$a=0,4$; $b=0,8$; $c=1$ (7 ординат)
» » » » »	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$ (7 ординат)
» » » » »	$a=0,4$; $b=0,72$; $c=0,94$ (7 ординат)

Таблица 8

	 Черт. 10.	S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
1 ордината	$a=0{,}0$	2	1	
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0	—1	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0{,}6$	0,69098	—0,30902	1/3
	$a=0{,}58$	0.75131	—0,24869	1/4
	$a=52/90$	0,75808	—0,24192	1/4,1
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	4/3	1/3 = 0,3333	1
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	1,02687	0,02687	1/12,5
4 ординаты	Ф-ла Котеса	1,125	0,125	1
	Ф-ла Чебышева	1,01614	0,01614	1/7,6
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0{,}34;\ b=0{,}86$	0,99793	—0,00207	—1/62
	$a=4/9;\ b=1$	0,97503	—0,02497	—1/5
	$a=0{,}5;\ b=1$	0,88889	—0,11111	—1/1,2

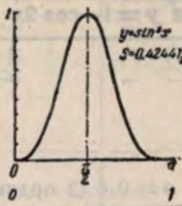
Продолжение

		S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,97778	—0,02222	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,52$; $b=0,90$	0,99969	—0,00031	1/72
	$a=0,5$ $b=0,9$	0,99830	—0,00170	1/13
	$a=0,55$; $b=0,91$	1,000441	0,000441	1/50
	$a=0,65$; $b=1$	1,000543	0,000543	1/41
	$a=2/3$; $b=1$	1,003333	0,003333	1/6,7
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,988018	—1,011982	1
	Ф-ла Чебышева	0,999071	—0,000929	1/13
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$	0,996820	—0,003180	1/3,8
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$	0,997806	—0,002194	1/5,4
	$a=0,28$; $b=0,76$; $c=1$	1,009506	0,009506	1/1,25
	$a=1/4$; $b=3/4$; $c=1$	1,002846	0,002846	—1/4,2
7 ординат	Формула Котеса	1,00119	0,00119	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,4$; $b=0,72$; $c=0,94$	1,00000082	0,00000082	1/1450
	$a=0,4$; $b=0,8$; $c=1$	0,9999260	—0,000074	—1/16
	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$	0,9999617	—0,0000383	—1/31

Таблица 8а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y = 1 - \cos 2x$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» одной ординаты $a = 0{,}0$	
» Симпсона (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}6$ (2 ординаты)
» » » » »	$a = 0{,}58$ (2 ординаты)
» » » » »	$a = 52/90$ (2 ординаты)
» Котеса (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}5$; $b = 1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 7/9$ (3 ординаты)
» » » » »	$a = 4/9$; $b = 1$ (4 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» Чебышева (4 ординаты)	
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}28$; $b = 0{,}76$; $c = 1$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 2/3$; $b = 1$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}24$; $b = 0{,}66$; $c = 0{,}94$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 1/4$; $b = 3/4$; $c = 1$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}24$; $b = 0{,}66$; $c = 0{,}93$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}34$; $b = 0{,}86$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 0{,}5$; $b = 0{,}9$ (5 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» Чебышева (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}65$; $b = 1$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}55$; $b = 0{,}91$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}52$; $b = 0{,}9$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}4$; $b = 0{,}8$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 7/15$; $b = 5/6$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}4$; $b = 0{,}72$; $c = 0{,}94$ (7 ординат)



Черт. 11.

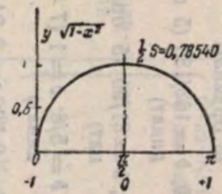
		S	Ошибка
1 ордината	$a=0,0$	1	0,576
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0	—0,424
	Ф-ла типа Гаусса $a=52/90$	0,23336	—0,191
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	0,66667	0,242
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	0,430203	0,00579
4 ординаты	Ф-ла Котеса	0,48714	0,0627
	Ф-ла типа Чебышева $a=0,16$; $b=0,8$	0,43781	0,0134
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=31/90$; $b=78/90$	0,41906	—0,00535
	$a=61/180$; $b=155/180$	0,42019	0,00422
	$a=1/3$; $b=78/90$	0,42711	0,00270
	$a=45$; $b=1$	0,36755	—0,0569
	$a=4/9$; $b=1$	0,37346	—0,0510
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,38475	—0,0397
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=47/90$; $b=81/90$	0,42409	0,000319
	$a=97/180$; $b=163/180$	0,425025	0,000612
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,40446	—0,0199
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$	0,422778	0,00164
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$	0,4244329	0,000019
7 ординат	Ф-ла Котеса	0,429850	0,00544
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0,4$; $b=0,72$; $c=0,94$	0,424438	0,000025
	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$	0,424255	0,000158

Таблица 9а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y = \sin^3 x$

Ф-ла одной ординаты	$a = 0,0$
» трапеций (2 ординаты)	
» Симпсона (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 52/90$ (2 ординаты)
» Котеса (4 ординаты)	
» Котеса (5 ординат)	
» Котеса (6 ординат)	
» типа Чебышева с абсциссами	$a = 0,16$; $b = 0,8$ (4 ординаты)
» » Гаусса с абсциссами	$a = 0,45$; $b = 1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 4/9$; $b = 1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 7/9$; (3 ординаты)
» Котеса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 31/90$; $b = 78/90$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 61/180$; $b = 155/180$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 1/3$; $b = 78/90$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 0,24$; $b = 0,66$; $c = 0,94$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 97/180$; $b = 163/180$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 47/90$; $b = 81/90$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 7/15$; $b = 5/6$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0,4$; $b = 0,72$; $c = 0,94$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0,24$; $b = 0,66$; $c = 0,93$ (6 ординат)

Таблица 10



Черт. 12

		S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
1 ордината	$a=0,0$	1	0,21460	
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0	—0,78540	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,6$	0,8	0,01460	—1/52
	$a=0,58$	0,81462	0,02922	—1/27
	$a=52/90$	0,81619	0,03079	—1/26
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	2/3 = 0,66667	—0,11873	1
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	0,79532	0,00992	—1/12
4 ординаты	Ф-ла Котеса	0,70711	—0,07829	1
	Ф-ла Чебышева	0,79465	0,00925	—1/8,3
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,34;\ b=0,86$	0,79034	0,00494	—1/16
	$a=4/9;\ b=1$	0,74421	—0,04119	1/1,9
	$a=0,5;\ b=1$	0,76980	—0,01560	1/5
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,74917	—0,03623	1
	Ф-ла Чебышева	0,77349	—0,01191	1/3

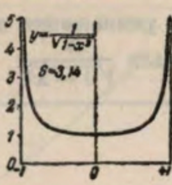
Продолжение

		S	Ошибка	Относит. ошибка сравнительно с формулой Котеса
5 ординат	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,52;\ b=0,90$	0,78824	0,00284	—1/13
	$a=0,5;\ b=0,9$	0,78796	0,00256	—1/14
	$a=0,55;\ b=0,91$	0,78780	0,00240	—1/15
	$a=0,65;\ b=1$	0,76636	—0,01904	1/1,9
	$a=2/3;\ b=1$	0,76916	—0,01624	1/2,2
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,75687	—0,02853	1
	Ф-ла Чебышева	0,78992	0,00452	—1/6,3
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,24;\ b=0,66;\ c=0,94$	0,78606	0,00066	—1/43
	$a=0,24;\ b=0,66;\ c=0,93$	0,78712	0,00172	—1/17
	$a=0,28;\ b=0,76;\ c=1$	0,77515	—0,01025	1/2,8
	$a=1/4;\ b=3/4;\ c=1$	0,77636	0,00904	—1/3,1
7 ординат	Формула Котеса	0,76774	—0,01766	1
	Ф-лы типа Гаусса:			
	$a=0,4;\ b=0,72;\ c=0,94$	0,78676	0,00133	—1/13,3
	$a=0,4;\ b=0,8;\ c=1$	0,777815	—0,00759	1/2,3
	$a=7/15;\ b=5/6;\ c=1$	0,77998	—0,00542	1/3,2

Таблица 10а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y = \sqrt{1 - x^2}$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» одной ординаты	$a = 0{,}0$
» Симпсона (3 ординаты)	
» Котеса (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 4/9$; $b = 1$ (4 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 52/90$ (2 ординаты)
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}65$; $b = 1$ (5 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 2/3$; $b = 1$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}5$ $b = 1$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 0{,}6$ (2 ординаты)
» Чебышева (5 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}28$; $b = 0{,}76$; $c = 1$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 7/9$ (3 ординаты)
» Чебышева (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 1/4$; $b = 3/4$; $c = 1$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}4$; $b = 0{,}8$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 7/15$; $b = 5/6$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}34$; $b = 0{,}86$ (4 ординаты)
» Чебышева (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0{,}52$; $b = 0{,}9$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}5$; $b = 0{,}9$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}55$; $b = 0{,}91$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}24$; $b = 0{,}66$; $c = 0{,}93$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}4$; $b = 0{,}72$; $c = 0{,}94$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0{,}24$; $b = 0{,}66$; $c = 0{,}94$ (6 ординат)



Черт. 13.

		S	Ошибка
1 ордината	$a=0,0$	2	—1,14
2 ординаты	Ф-ла трапеций	∞	∞
	Ф-ла Гаусса, Чебышева	2,45	—0,69
	Ф-ла типа Гаусса $a=0,6$	2,5	—0,64
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	∞	∞
	Ф-ла Чебышева	2,552	—0,59
	Ф-ла Гаусса	2,641	—0,50
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	2,656	—0,484
4 ординаты	Ф-ла Котеса	∞	∞
	Ф-ла Чебышева	2.665	—0,477
	Ф-ла Гаусса	2,754	—0,388
	Ф-ла типа Гаусса $a=0,34;\ b=0,86$	2,752	—0,390
5 ординат	Ф-ла Котеса	∞	∞
	Ф-ла Чебышева	2,705	—0,437
	Ф-ла Гаусса	2,825	—0,317
	Ф-ла типа Гаусса $a=0,52;\ b=0,9$	2,815	—0,327
6 ординат	Ф-ла Котеса	∞	∞
	Ф-ла Чебышева	2,76	—0,38
	Ф-ла Гаусса	2,882	—0,26
	Ф-ла типа Гаусса $\left.\begin{matrix}a=0,24\\b=0,66\\c=0,94\end{matrix}\right\}$	2,91	—0,23
7 ординат	Ф-ла Котеса	∞	∞
	Ф-ла Гаусса	2,91	—0,23
	Ф-ла типа Гаусса $\left.\begin{matrix}a=0,4\\b=0,72\\c=0,95\end{matrix}\right\}$	2,89	—0,25

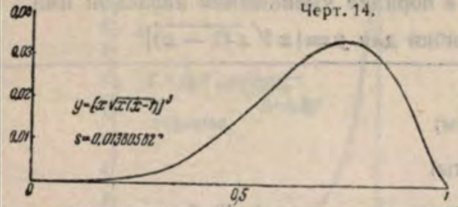
Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ф-ла трапеций	
» Симпсона	
» Котеса	
» одной ординаты	$a=0,0$
» Гаусса (2 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,6$ (2 ординаты)
» Чебышева (3 ординаты)	
» Гаусса (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=7/9$ (3 ординаты)
» Чебышева (4 ординаты)	
» Чебышева (5 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,34$; $b=0,86$ (4 ординаты)
» Гаусса (4 ординаты)	
» Чебышева (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,52$; $b=0,9$ (5 ординат)
» Гаусса (5 ординат)	
» Гаусса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,24$; $b=0,74$; $c=0,95$ (7 ординат)
» Гаусса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$ (6 ординат) *)

*) Этот результат, будучи лучшим, чем даёт точная формула Гаусса на 7 ординат, является случайным для данного частного примера.

Таблица 12

Черт. 14.



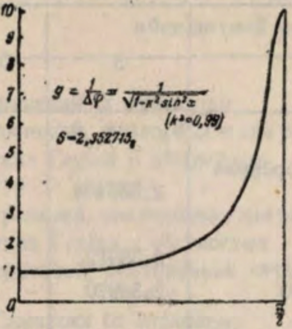
		S	Ошибка
1 ордината	$a=0{,}0$	0,015625	0,001819
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0	—0,138
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}6$	0,016640	0,00283
	$a=0{,}58$	0,016971	0,00317
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	0,0104167	—0,00339
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	0,013033	—0,000773
4 ординаты	Ф-ла Котеса	0,013095	—0,000771
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}34;\ b=0{,}86$	0,013485	—0,000321
	$a=0{,}45;\ b=1$	0,01495	0,00115
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,014713	0,000907
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}52\quad b=0{,}9$	0,0137796	—0,0000262
	$a=0{,}5\quad b=0{,}9$	0,01381698	0,00001115
	$a=59/90;\ b=1$	0,013949	0,000144
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,0143815	0,000576
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}24,\ b=0{,}66,\ c=0{,}93$	0,013790697	—0,00001513
	$a=0{,}24,\ b=0{,}66,\ c=0{,}94$	0,0138369	0,0000311
7 ординат	Ф-ла Котеса	0,013946	0,000140
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}4,\ b=0{,}72,\ c=0{,}94$	0,01379745	—0,0000838
	$a=7/15,\ b=5/6,\ c=1$	0,0138177	0,0000119

Таблица 12а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y = [x\sqrt{x(1-x)}]^3$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» Симпсона (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0,58$ (2 ординаты)
» » » » »	$a = 0,6$ (2 ординаты)
» одной ординаты	$a = 0,0$
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0,45$; $b = 1$ (4 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 7/9$ (3 ординаты)
» Котеса (4 ординаты)	
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0,34$; $b = 0,86$ (4 ординаты)
» » » » »	$a = 59/90$; $b = 1$ (5 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a = 0,24$; $b = 0,66$; $c = 0,94$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 0,52$; $b = 0,9$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0,24$; $b = 0,65$; $c = 0,93$ (6 ординат)
» » » » »	$a = 7/15$; $b = 5/6$; $c = 1$ (7 ординат)
» » » » »	$a = 0,5$; $b = 0,9$ (5 ординат)
» » » » »	$a = 0,4$; $b = 0,72$; $c = 0,94$ (7 ординат)

Таблица 13

Черт. 15 		S	Ошибка
1 ордината	$a=0,0$	1,407195	—0,946
2 ординаты	Ф-ла трапеций	5,5	3,147
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0,6$	3,0929	0,740
	$a=0,58$	2,0099	—0,343
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	2,6048	0,252
	Ф-ла трапеций, повторённая два раза	3,4536	1,101
	Ф-ла типа Гаусса		
	$a=7/9$	2,2912	—0,0615
4 ординаты	Ф-ла Котеса	2,5407	0,188
	Ф-ла трапеций, повторённая три раза	2,86948	0,517
	Ф-ла Чебышева	2,31425	—0,0385
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=61/180$; $b=155/180$	2,33797	—0,0147
	$a=1/3$; $b=78/90=13/15$	2,39232	0,0396
	$a=4/9$; $b=1$	2,34963	—0,00308
5 ординат	Ф-ла Котеса	2,33086	—0,0219
	Ф-ла трапеций, повторённая четыре раза	2,6322	0,280

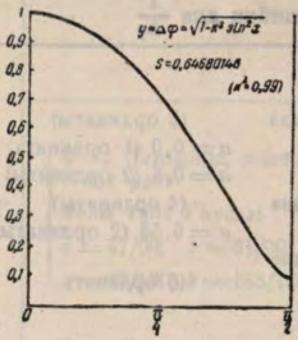
		S	Ошибка
5 ординат	Ф-ла Симпсона, повторённая два раза	2,358404	0,00569
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=47/90$; $b=81/90$	2,38412	0,0314
	$a=97/180$; $b=163/180$	2,36970	0,0170
6 ординат	Ф-ла Котеса	2,311443	—0,0413
	Ф-ла трапеций, повторённая пять раз	2,492406	0,1397
	Ф-ла Гаусса	2,3679295	0,0152
	Ф-лы типа Гаусса		
	$\left.\begin{matrix} a=0,24 \\ b=0,66 \\ c=0,94 \end{matrix}\right\}$	2,41284	0,0601
	$\left.\begin{matrix} a=0,24 \\ b=0,66 \\ c=0,93 \end{matrix}\right\}$	2,276406	—0,0763
7 ординат	Ф-ла Котеса	2,289401	—0,0633
	Ф-ла трапеций, повторённая шесть раз	2,44506	—0,0924
	Ф-ла Симпсона, повторённая три раза	2,30804	—0,0447
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$\left.\begin{matrix} a=0,4 \\ b=0,72 \\ c=0,94 \end{matrix}\right\}$	2,363216	0,0105
	$\left.\begin{matrix} a=7/15 \\ b=5/6 \\ c=1 \end{matrix}\right\}$	2,33729	—0,0155

Таблица 13а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $\frac{1}{\Delta\varphi}$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» трапеций, повторённая два раза	(3 ординаты)
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,0$ (1 ордината)
» » » » »	$a=0,6$ (2 ординаты)
» трапеций, повторённая три раза	(4 ординаты)
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,58$ (2 ординаты)
» трапеций, повторённая четыре раза	(5 ординат)
» Симпсона (3 ординаты)	
» Котеса (4 ординаты)	
» трапеций, повторённая пять раз	(6 ординат)
» трапеций, повторённая шесть раз	(7 ординат)
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$ (6 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=7/9$ (3 ординаты)
» » » » »	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$ (6 ординат)
» Симпсона, повторённая три раза	(7 ординат)
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=1/3$; $b=78/90$ (4 ординаты)
» Чебышева (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=47/90$; $b=81/90$ (5 ординат)
» » » » »	$a=4/9$; $b=1$ (4 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=97/180$; $b=163/180$ (5 ординат)
» » » » »	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$ (7 ординат)
» Гаусса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=61/180$; $b=155/180$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$ (7 ординат)
» Симпсона, повторённая два раза *)	(5 ординат)

*) Этот результат является случайным для данного частного случая.



Черт. 16.

		S	Ошибка
1 ордината	$a=0{,}0$	0,710634	0,0638
2 ординаты	Ф-ла трапеций	0,55	—0,0968
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0{,}6$	0,63744	—0,00936
	$a=0{,}58$	0,64204	—0,00476
3 ординаты	Ф-ла Симпсона	0,657089	0,0103
	Ф-ла трапеций, повторённая 2 раза	0,630317	—0,0165
	Ф-ла типа Гаусса $a=7/9$	0,645424	—0,00138
4 ординаты	Ф-ла Котеса	0,65385	0,00705
	Ф-ла трапеций, повторённая 3 раза	0,64231	0,00449
	Ф-ла Чебышева	0,64561	—0,00119
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=61/180$; $b=155/180$	0,646330	—0,000471
	$a=1/3$; $b=78/90=13/15$	0,647342	0,000541
	$a=4/9$; $b=1$	0,649492	0,00269
5 ординат	Ф-ла Котеса	0,649053	0,00225
	Ф-ла трапеций, повторённая четыре раза	0,64474	—0,00206

		S	Ошибка
5 ординат	Ф-ла Симпсона, повторённая два раза	0,649555	0,00275
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=47/90$; $b=81/90$	0,646588	—0,000213
	$a=97/180$; $b=163/180$	0,646640	—0,000161
6 ординат	Ф-ла Котеса	0,6484018	0,00160
	Ф-ла трапеций, повторённая пять раз	0,64587	—0,00093
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$	0,646899	0,000098
	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$	0,646757	—0,000044
7 ординат	Ф-ла Котеса	0,647566	0,000755
	Ф-ла трапеций, повторённая шесть раз	0,646681	0,000120
	Ф-ла Симпсона, повторённая три раза	0,648139	0,00133
	Ф-лы типа Гаусса:		
	$a=0,4$; $b=0,72$; $c=0,94$	0,6467849	—0,0000166
	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$	0,6467906	—0,0000109

Таблица 14а

Расположение формул в порядке уменьшения даваемой ими абсолютной ошибки для $y=\Delta_{\varphi}$

Ф-ла трапеций (2 ординаты)	
» одной ординаты	$a=0,0$ (1 ордината)
» трапеций, повторённая два раза	(3 ординаты)
» Симпсона (3 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,6$ (2 ординаты)
» Котеса (4 ординаты)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,58$ (2 ординаты)
» трапеций, повторённая три раза	(4 ординаты)
» Симпсона, повторённая два раза	(5 ординат)
» типа Гаусса с абсциссами	$a=4/9$; $b=1$ (4 ординаты)
» Котеса (5 ординат)	
» трапеций, повторённая четыре раза	(5 ординат)
» Котеса (6 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=7/9$ (3 ординаты)
» Симпсона, повторённая 3 раза	(7 ординат)
» Чебышева (4 ординаты)	
» трапеций, повторённая пять раз	(6 ординат)
» Котеса (7 ординат)	
» типа Гаусса с абсциссами	$a=1/3$; $b=78/90$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=61/180$; $b=155/180$ (4 ординаты)
» » » » »	$a=47/90$; $b=81/90$ (5 ординат)
» » » » »	$a=97/180$; $b=163/180$ (5 ординат)
» трапеций, повторённая шесть раз	(7 ординат)
» типа Гаусса с абсциссами	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,94$ (6 ординат)
» » » » »	$a=0,24$; $b=0,66$; $c=0,93$ (6 ординат)
» » » » »	$a=0,4$; $b=0.72$; $c=0,94$ (7 ординат)
» » » » »	$a=7/15$; $b=5/6$; $c=1$ (7 ординат)

Таблица 15

Пример Штаермана $S_{2p} = \int\limits_{-1}^{+1} x^{2p}\,dx = \frac{2}{2p+1}$.

$2p$	Точное значение S_{2p}	$n=5$ ординат S_{2p}, вычисленная по формулам: Гаусса	Ветчинкина (типа Гаусса) с абсциссами: $a=0,52$; $b=0,90$	Штаермана	Взамен Штаермана с коэф. при ординатах: 3/25; 6/25; 7/25	Чебышева	$n=7$ ординат S_{2p}, вычисленная по формулам: Гаусса	Ветчинкина (типа Гаусса) с абсциссами: $a=0,4$; $b=0,72$ $c=0,94$	Штаермана	Чебышева
6	0,28571	0,28571	0,28614	0,28414	0,28605	0,26852	0,28571	0,28571	0,28571	0,28571
	ошибка =	0%	0,15%	0,54%	0,12%	6%	0%	0%	0%	0%
8	0,22222	0,22222	0,22154	0,21983	0,22247	0,18488	0,22222	0,22219	0,22131	0,21644
	ошибка =	0%	0,3%	1,08%	0,11%	16,8%	0%	0,013%	0,4%	2,6%
10	0,18182	0,17889	0,17668	0.17628	0,17886	0,12796	0,18182	0,18142	0,17967	0,16727
	ошибка =	1,6%	2,8%	3%	1,6%	29,6%	0%	0,22%	1,2%	8%
12	0,15385	0,14585	0,14236	0,14332	0,14556	0,08866	0,15385	0,15269	0,15053	0,13017
	ошибка =	5,2%	7,5%	6,8%	5,4%	42,4%	0%	0,75%	2,1%	15,3%
14	0,13333	0,11947	0,11511	0,11712	0,11896	0,06144	0,13275	0,13099	0,12885	0,10147
	ошибка =	10,5%	13,7%	12,1%	10,7%	53,9%	0,4%	1,75%	3,3%	23,9%
16	0,11765	0,09801	0,09343	0,09589	0,09737	0,04258	0,11696	0,11372	0,11191	0,17929
	ошибка =	16,5%	20,6%	18,4%	17,2%	63,9%	0,5%	3,3%	4,8%	32,6%
18	0,10526	0,08045	0,07547	0,07856	0,07974	0,02951	0,10371	0,09943	0,09814	0,06193
	ошибка =	23,8%	28,3%	25,4%	24,2%	72.0%	1,5%	3,6%	6,8%	41,7%
20	0,09524	0,06606	0,06112	0,06438	0,06532	0,02045	0,09252	0,08433	0,08654	0,04838
	ошибка =	30,5%	34%	32,4%	31,4%	78,5%	2,8%	8,85%	9,1%	49,2%

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. Н. Крылов, «Лекции о приближённых вычислениях».

А. Марков, «Исчисление конечных разностей».

Труды Ленинградского индустриального института, № 4, 1937 г., вып. 2.

П. Рощин, «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. II, Изд. Ак. Наук, 1912 г.

Скарборо, «Численные методы математического анализа». ГТТИ, 1934 г.

Стефенсен, «Теория интерполяции».

Уиттекер и Робинзон, «Обработка наблюдений».

C. Runge und H. König, «Numerisches rechnen».

Цена 1 р. 75 к.