

Halina Kudrewicz
Stanisław Przeździecki
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

DYFRAKCJA NA ASYMETRYCZNEJ PÓŁPŁASZCZYZNIE
IMPEDANCYJNEJ PROSTOPADŁEJ DO WYRÓŻNIONEJ
OSI OŚRODKA JEDNOOSIOWO ANIZOTROPOWEGO

Znaleziono ścisłe rozwiązanie dla następującego zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej: I. Ośrodek otaczający półpłaszczyznę jest jednoosiowo anizotropowy. II. Półpłaszczyzna jest asymetryczna, tzn. charakteryzuje się różnymi impedancjami po obu jej stronach. III. Umieszczona jest ona prostopadle do wyróżnionej osi ośrodka. IV. Elektromagnetyczna padająca fala płaska rozchodzi się w kierunku dowolnym /skośnym/ względem krawędzi półpłaszczyzny.

Zagadnienie to jest istotnie wektorowe, co oznacza, że wymaga rozwiązania sprzężonego zagadnienia brzegowego dla dwóch /niezwiązanych/ równań cząstkowych rzędu drugiego, opisujących tu skalarnie potencjały Hertza. Zagadnienie brzegowe dla potencjałów sformułowano w postaci macierzowego układu równań Wienera-Hopfa. Ponieważ układ ten nie daje się rozwiązać bezpośrednio metodą faktoryzacji macierzy, do rozwiązania zastosowano metodę Wienera-Hopfa-Hilberta sformułowaną w 1976 roku przez R.A. Hurda. Rozwiązanie trójwymiarowe zsyntezowano z odpowiednich rozwiązań skalarnego zagadnienia dyfrakcji na asymetrycznej półpłaszczyźnie impedancyjnej.

1. Wprowadzenie

W pracy tej przedstawimy konstrukcję ścisłego rozwiązania dla zagadnienia dyfrakcji elektromagnetycznej fali płaskiej na asymetrycznej półpłaszczyźnie impedancyjnej umieszczonej w ośrodku jednoosiowo anizotropowym prostopadle do wyróżnionej osi ośrodka. Kierunek rozchodzenia się fali padającej jest dowolny /skośny/ względem krawędzi półpłaszczyzny.

Przez asymetryczną półpłaszczyznę impedancyjną rozumieć będziemy półpłaszczyznę, na obu stronach której spełniony jest impedancyjny warunek brzegowy.

$$/1.1/ \quad \underline{n} \times \underline{E} - \zeta_j \underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{H}) = 0$$

przy czym parametry ζ_j , $j=1,2$, będące liczbami na ogół zespolonymi, przyjmują różne wartości dla obu stron półpłaszczyzny, \underline{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do półpłaszczyzny i skierowanym do obszaru, w którym rozpatrujemy pole. Parametry ζ_j nazywać będziemy impedancjami powierzchniowymi [1] [2].

Ośrodkiem jednoosiowo anizotropowym nazywamy ośrodek, który w odpowiednim układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z scharakteryzowany jest przez tensory przenikalności elektrycznej i magnetycznej o następującej postaci

/1.2a/

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$$

/1.2b/

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}$$

gdzie $\epsilon_0 \neq \epsilon$ oraz /albo/ $\mu_0 \neq \mu$. Oś z nazywana jest wyróżnioną osią ośrodka.

Dwa; rozwiązane wcześniej, przypadki szczególne przedstawionego zagadnienia stwarzają podstawy dla zamierzonej konstrukcji. Są to: 1^o/ dwuwymiarowe /kierunek padania prostopadły do krawędzi półpłaszczyzny, dyfrakcja na asymetrycz-

nej półpłaszczyźnie impedancyjnej w ośrodku izotropowym [3] [4] [5]. 2^o zagadnienie dyfrakcji na półpłaszczyźnie doskonale przewodzącej umieszczonej prostopadle do wyróżnionej osi ośrodka jednoosiowo anizotropowego /dowolny kierunek padania/ [6] [7].

Rola prec [6] [7] polega na wskazaniu metody syntezy rozwiązania wektorowego z rozwiązań pomocniczych zagadnień skalarnych, które sprowadzają się do zagadnień rozwiązanych w [3], [4] [5]. A zatem z analitycznego punktu widzenia istota trudności matematycznych sformułowanego zagadnienia pokonana została w [3] lub [4] [5]. Innymi słowy, konstrukcja obecnego rozwiązania uwarunkowana jest w sposób decydujący istnieniem rozwiązań [3] [4] [5].

Za podstawę naszych rozważań wybierzemy pracę [5] i w związku z tym przyjmiemy /tak jak w [5], że parametry ϵ_j są rzeczywiste, co eliminuje możliwość podtrzymywania fal powierzchniowych przez półpłaszczyznę impedancyjną. W ten sposób głównym celem pracy będzie przedstawienie metody syntezy rozwiązania.

W przypadku ośrodka izotropowego odpowiednik sformułowanego tutaj zagadnienia rozpatrywany był w pracy [8]. Podejście przyjęte w niniejszej pracy może być oczywiście zastosowane również dla ośrodka izotropowego. Sądzymy, że to podejście wyjaśnia dołątkowo strukturę rozwiązania uzyskanego w [8] i może być traktowane jako alternatywne wobec metody użytej w [8].

Zgodnie z pracami [6] [7] zagadnienie nasze formułujemy za pośrednictwem skalarnych potencjałów Hertza. Uzyskujemy w ten sposób zagadnienie brzegowe dla dwóch funkcji u , v spełniających dwa niezależne równania cząstkowe rzędu drugiego. Fakt, iż rozpatrywany problem nie sprowadza się do dwóch niezależnych zagadnień brzegowych jest rezultatem warunku brzegowego /1.1/, który sprzęga funkcje u i v . Sprzężenie to jest powodem, iż zagadnienie nasze jest zagadnieniem istotnie wektorowym /nieskalaryzowalnym/. Przypominamy, że problem elektromagnetyczny jest skalaryzowany, jeżeli sprowadza się do jednego zagadnienia dla funkcji spełniającej równanie rzędu drugiego

lub do kilku takich zagadnień niezależnych od siebie.

Podstawową cechą upraszczającą rozpatrywany problem jest fakt, iż występujące sprzężenie funkcji u , v ma bardzo prosty charakter, a mianowicie jest to wyłącznie sprzężenie dyfrakcyjne /krawędziowe/, nie występuje zaś sprzężenie odbiciowe, tzn. nie wystąpiłoby sprzężenie na pełnej płaszczyźnie.

Rozwiązania sformułowanego zagadnienia brzegowego dla potencjałów u , v poszukujemy w postaci odpowiednich transformat Fouriera. Wyznaczenie nieznanych amplitud występujących w tych transformatach prowadzi do układu dwóch sprzężonych równań Wienera-Hopfa. Układy takie uważane były do roku 1976 za nierozwiązywalne w kwadraturach, jednak R.A. Hurd [5] sprowadzając układ równań Wienera-Hopfa do równoważnego układu problemów Hilberta uzyskał dla niego rozwiązanie w takiej postaci. Metoda Hurda jest podstawą tej pracy.

Jeżeli idzie o analizę asymptotyczną skonstruowanego rozwiązania i interpretację wyników, to będzie to przedmiotem naszej następnej pracy. Tutaj chcemy jedynie wskazać na dość nieoczekiwany efekt dyfrakcyjny jakim jest wzbudzenie w pewnych sektorach kątowych niejednorodnych elektromagnetycznych fal płaskich typu TEM. Wyjaśnienie roli tych fal w konstrukcji rozwiązania jest jednym z celów tej pracy. Inne interesujące zjawiska dyfrakcyjne, nietrudno zrozumieć na podstawie przesłanek fizycznych, to pojawienie się dwóch eliptycznych stożków promieni dyfrakcyjnych oraz wyznaczenie granic cienia fali padającej i odbitej przez kierunki promieni /a nie wektorów fazowych/.

2. Skalarne potencjały Hertza

Dla ośrodka jednoosiowo anizotropowego podstawowe własności skalnych potencjałów Hertza mogą być zresumowane w formie następującego twierdzenia.

Pole elektromagnetyczne \underline{E} i \underline{H} utworzone w dowolnym obszarze D z dwóch funkcji skalnych u, v poprzez następującą zależność

$$/2.1a/ \quad \underline{E} = \epsilon \underline{\epsilon}^{-1} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times u \underline{z}_0 + i \omega \mu \underline{\nabla} \times v \underline{z}_0$$

$$/2.1b/ \quad \underline{H} = -i \omega \epsilon \underline{\nabla} \times u \underline{z}_0 + \mu \underline{\mu}^{-1} \cdot \underline{\nabla} \times v \underline{z}_0$$

spełnia w D -jednorodny układ równań Maxwella

$$/2.2a/ \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = -i \omega \epsilon \cdot \underline{E}$$

$$/2.2b/ \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = i \omega \mu \cdot \underline{H}$$

jeżeli funkcje u i v spełniają w D następujące równania

$$/2.3/ \quad \underline{\nabla}_t^2 u + \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_e^2 u = 0$$

$$/2.4/ \quad \underline{\nabla}_t^2 v + \frac{1}{\tau_m} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k_m^2 v = 0$$

Tensory $\underline{\epsilon}, \underline{\mu}$ we wzorach /2.1/ i /2.2/ określone są przez /1.2/, $\underline{\nabla}_t = \underline{\nabla} - \underline{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$, \underline{z}_0 jest wersorem wyróżnionej osi z , $k_e^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu$, $k_m^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0$, $\tau_e = \epsilon / \epsilon_0$, $\tau_m = \mu / \mu_0$.

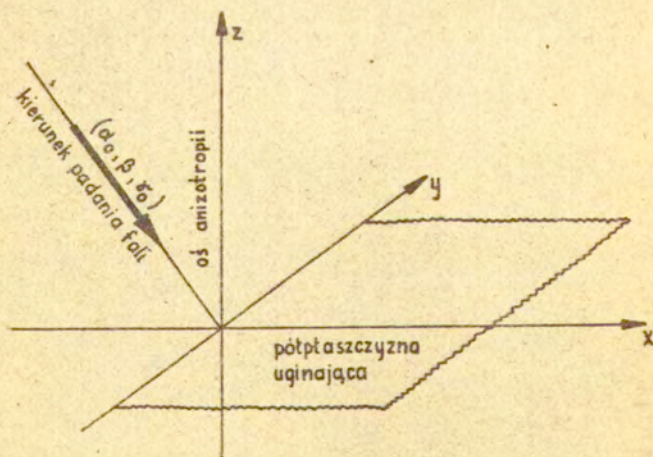
Funkcje u , v nazywać będziemy odpowiednio elektrycznym i magnetycznym skalarnym potencjałem Hertza. Dowód twierdzenia wynika z prostego podstawienia /2.1/ do /2.2/.

Jak łatwo spostrzec pole określone przez potencjał u jest polem typu TM względem \underline{z}_0 , tzn. $\underline{H} \cdot \underline{z}_0 = 0$ oraz spełnia układ /2.2/, natomiast pole odpowiadające potencjałowi v jest typu TE względem \underline{z}_0 , tzn. $\underline{E} \cdot \underline{z}_0 = 0$ i także spełnia układ /2.2/.

Kwestia jak ogólna jest klasa pól elektromagnetycznych utworzonych ze składowych potencjałów Hertza u, v dyskutowana jest dla ośrodka izotropowego w [1], str. 101. Rozważania te przenoszą się w sposób niemal dosłowny na przypadek ośrodka jednoosiowo anizotropowego /proszę porównać [6]/ i w rezultacie dochodzimy do wniosku, że w dostatecznie prostym obszarze dowolne pole elektromagnetyczne może być wyrażone przez dwie funkcje skalarne spełniające odpowiednio równanie /2.3/ i /2.4/. Uzyskany wynik nietrudno rozszerzyć tak, by obowiązywał dla obszaru interesującego nas w tej pracy. A zatem bez utraty ogólności możemy poszukiwać pola elektromagnetycznego będącego rozwiązaniem postawionego zagadnienia przyjmując, że wyraża się ono przez skalarnie potencjały Hertza.

3. Sformułowanie zagadnienia dyfrakcyjnego

Wybieramy prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich x, y, z , w którym tensory $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ określone są przez macierze /1. 2/, zaś położenie impedancyjnej półpłaszczyzny dyfrakcyjnej dane jest zależnościami $z = 0, x > 0, R_{y1}$.



Rys. 1 Układ współrzędnych i półpłaszczyzna uginająca

Impedancyjne warunki brzegowe określone są równaniem /1.1/. Jak już wspomnieliśmy przyjmować będziemy, że parametry ϵ_1, ϵ_2 są rzeczywiste. Założymy także, że w rozpatrywanym ośrodku może być osiągnięty stan ustalony dla rozpatrywanej częstości ω , tzn., że układ /2.2/ jest eliptyczny. Przyjmujemy także, że ośrodek jest bezstratny. W rezultacie dwóch ostatnich założeń parametry $\epsilon, \epsilon_0, \mu, \mu_0$ są rzeczywiste dodatnie. W niektórych rozważaniach /np. dla ustalenia odpowiednich konturów całkowania/ dopuścimy małe straty o takiej postaci, że τ_e, τ_m pozostaną rzeczywiste. Po ustaleniu odpowiednich wniosków wracamy jednak do przypadku bezstratnego.

W charakterze fali padającej E_i, H_i wybierzemy falę płaską typu TM określoną przez potencjał elektryczny Hertza

$$/3.1/ \quad u_{oi} = a_0 e^{i(d_0 x + \beta y + \alpha_0 z)}$$

gdzie β jest rzeczywiste oraz $\beta^2 < k_0^2$. Oznaczamy $\alpha_0^2 = k_0^2 - \beta^2$ wówczas z równania /2.3/ otrzymujemy następujące równanie dyspersyjne:

$$/3.2/ \quad d_0^2 + \frac{1}{\tau_e} \alpha_0^2 = \alpha_0^2$$

Przyjmujemy, iż $d_0^2 < \alpha_0^2$, co zapewnia, że fala płaska /3.1/ jest jednorodna. Pole E_i, H_i określone jest wzorami /2.1/.

Dla rozwiązania postawionego zagadnienia poszukiwać będziemy skalarnych potencjałów Hertza u, v odpowiadających polu rozproszonemu E_s, H_s . Pole całkowite dane jest wówczas przez $E_s + E_i, H_s + H_i$.

Potencjały u, v winny spełniać

I. równania: /2.3/ i /2.4/

II. warunki brzegowe:

$$/3.3a/ \quad z_0 \times \nabla_t \left[\frac{\partial}{\partial z} (u + u_{oi}) + i\omega \epsilon \zeta_1 (u + u_{oi}) \right] + \nabla_t (i\omega \mu v + \zeta_1 \frac{\partial v}{\partial z}) = 0$$

dla $z = 0_+$, $x > 0$

$$/3.3b/ \quad z_0 \times \nabla_t \left[-\frac{\partial}{\partial z} (u + u_{oi}) + i\omega \epsilon \zeta_2 (u + u_{oi}) \right] - \nabla_t (i\omega \mu v - \zeta_2 \frac{\partial v}{\partial z}) = 0$$

dla $z = 0_-$, $x > 0$

III. warunki na krawędzi półpłaszczyzny:

$$/3.4a/ \quad u = C_e + O(g^{1+d_1})$$

$$/3.4b/ \quad v = C_m + O(g^{1+d_2})$$

dla $g = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, C_e, C_m pewne stałe

IV. warunki wybiegania

dla $g \rightarrow \infty$ u, v winny zachowywać się jak fale wybiegające /patrz definicja na końcu tego rozdziału/.

Warunki brzegowe /3.3/ są prostą konsekwencją warunku /1.1/.
Warunki na krawędzi /3.4/ wynikają za pośrednictwem wzorów /2.1/ z warunków na ostrzu dla pola elektromagnetycznego

$$/3.5a/ \quad |E_s| = 0 \quad (g \rightarrow \infty) \quad \text{http://rcin.org.pl}$$

$$/3.5b/ \quad |H_s| = 0 (s^{-1} + d_2)$$

dla $g \rightarrow 0$

Należy podkreślić, iż warunki krawędziowe dla potencjałów są silniejsze /bardziej ograniczające/ niż warunki krawędziowe nakładane w pracach [3] [4] [5] na poszukiwane tam funkcje, które gwarantowały tam istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Przy nałożeniu warunków tak silnych jak /3.5/ w pracach tamtych rozwiązania nie istniałyby. Jednym z celów tej pracy jest przedstawienie w jaki sposób pozornie zbyt restryktywne warunki /3.5/ mogą jednak być spełnione.

Definicja. Falą wybiegającą u_{out}, v_{out} nazywać będziemy każde rozwiązanie równań /2.3/ i /2.4/, które spełnia warunki brzegowe /3.3/ dla α_0 takiego, że $\text{Im} \alpha_0 > 0$, może jednak nie spełniać warunków na ostrzu, oraz maleje wykładniczo dla

$g \rightarrow \infty$ przy uwzględnieniu małych strat. Każde rozwiązanie, które jest przedłużeniem analitycznym fali wybiegającej względem α_0 jest falą wybiegającą. Liniowe kombinacje fal wybiegających jest falą wybiegającą.

4. Rozprężone warunki brzegowe oraz potencjały pomocniczych fal padających typu TEM.

Pomnożmy warunki brzegowe /3.3/ wektorowo przez \underline{z}_0 i obliczmy ∇_t^* , otrzymamy

$$/4.1a/ \quad \nabla_t^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} (u + u_{01}) + i\omega \varepsilon \zeta_2 (u + u_{01}) \right] = 0$$

dla $z = 0_+$, $x > 0$ oraz

$$/4.1b/ \quad \nabla_t^2 \left[-\frac{\partial}{\partial z} (u + u_{01}) + i\omega \varepsilon \zeta_2 (u + u_{01}) \right] = 0$$

dla $z = 0_-$, $x > 0$ <http://rcin.org.pl>

Działając operatorem ∇_t na równania /3.3/ i uwzględniając zależności /4.1/ otrzymamy

$$/4.2a/ \quad \nabla_t^2 (i\omega\mu\sigma + \epsilon_1 \frac{\partial v}{\partial z}) = 0$$

dla $z = 0_+$, $x > 0$ oraz

$$/4.2b/ \quad \nabla_t^2 (i\omega\mu\sigma - \epsilon_2 \frac{\partial v}{\partial z}) = 0$$

Ponieważ funkcje u i v zależą od zmiennej y za pośrednictwem $\exp(i\beta y)$ zatem równania /4.1/ i /4.2/ redukują się do równań zwyczajnych, których rozwiązania ogólne mają postać

$$/4.3a/ \quad \frac{\partial}{\partial z} (u + u_{oi}) + i\omega\epsilon\epsilon_1 (u + u_{oi}) = a'_1 e^{-\beta x} + a'_3 e^{\beta x}$$

dla $z = 0_+$, $x > 0$

$$/4.3b/ \quad -\frac{\partial}{\partial z} (u + u_{oi}) + i\omega\epsilon\epsilon_2 (u + u_{oi}) = a'_2 e^{-\beta x} + a'_4 e^{\beta x}$$

dla $z = 0_-$, $x > 0$

$$/4.4a/ \quad i\omega\mu\sigma + \epsilon_1 \frac{\partial v}{\partial z} = b'_1 e^{-\beta x} + b'_3 e^{\beta x}$$

dla $z = 0_+$, $x > 0$

$$/4.4b/ \quad i\omega\mu v - \kappa_2 \frac{\partial v}{\partial z} = b_2' e^{-\beta x} + b_4' e^{\beta x}$$

gdzie a_n', b_n' $n = 1, 2, 3, 4$ są nieznanymi stałymi, które zostaną wyznaczone w trakcie konstrukcji rozwiązania.

Korzystając z warunków /3.3/ dostajemy następujące relacje zachodzące między stałymi a_n', b_n'

$$/4.5a/ \quad b_n' = -i a_n'$$

dla $n = 1, 4$

$$/4.5b/ \quad b_n' = i a_n'$$

dla $n = 2, 3$

Pozostają nam zatem do wyznaczenia cztery stałe, co zostanie dokonane w rozdz. 10. Zinterpretujmy otrzymane wyniki. Jak zauważamy w rozprzężonych warunkach brzegowych /4.3/ oraz /4.4/ poza wyrazem wymuszającym, określonym przez falę padającą u_{oi}, v_{oi} , pojawiły się nowe /niefizyczne/ wyrazy wymuszające o nieznenych amplitudach. Rola ich zostanie wyjaśniona w dalszym ciągu pracy. Wyrazy te można traktować jako wartości brzegowe następujących /fikcyjnych/ fal padających potencjałów

$$/4.6a/ \quad \begin{pmatrix} u_{1i} \\ v_{1i} \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\eta \end{pmatrix} e^{-\beta x + i\beta y + ikz}$$

$$/4.6b/ \quad \begin{pmatrix} u_{2i} \\ v_{2i} \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i\eta \end{pmatrix} e^{-\beta x + i\beta y - ikz}$$

$$/4.6c/ \quad \begin{pmatrix} u_{3i} \\ v_{3i} \end{pmatrix} = a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ i\eta \end{pmatrix} e^{\beta x + i\beta y + ikz}$$

$$/4.6d/ \quad \begin{pmatrix} u_{4i} \\ v_{4i} \end{pmatrix} = a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\eta \end{pmatrix} e^{\beta x + i\beta y - ikz}$$

gdzie $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$, $\eta = \sqrt{\epsilon/\mu}$

Przy tych oznaczeniach warunki brzegowe /4.3/ i /4.4/ można zapisać w postaci

$$/4.7a/ \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(u + \sum_{n=0}^4 u_{ni} \right) + i\omega\epsilon\zeta_1 \left(u + \sum_{n=0}^4 u_{ni} \right) = 0$$

dla $z=0_+$, $x > 0$

$$/4.7b/ \quad -\frac{\partial}{\partial z} \left(u + \sum_{n=0}^4 u_{ni} \right) + i\omega\epsilon\zeta_2 \left(u + \sum_{n=0}^4 u_{ni} \right) = 0$$

dla $z=0_-$, $x > 0$

oraz

$$/4.8a/ \quad i\omega\mu \left(v + \sum_{n=1}^4 v_{ni} \right) + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(v + \sum_{n=1}^4 v_{ni} \right) = 0$$

dla $z=0_+$, $x>0$

$$/4.8b/ \quad i\mu\omega\left(v + \sum_{n=1}^4 v_{nc}\right) - \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(v + \sum_{n=1}^4 v_{ni}\right) = 0$$

dla $z=0_-$, $x>0$

Ze wzorów /4.7/, /4.8/ oraz /4.3/, /4.4/ z uwzględnieniem /4.5/ i /4.6/ wynikają następujące relacje między stałymi a_n i a'_n :

$$/4.9a/ \quad -i(k + \omega\zeta_4)a_1 + i(k - \omega\zeta_4)a_2 = a'_4$$

$$/4.9b/ \quad i(k - \omega\zeta_2)a_1 - i(k + \omega\zeta_2)a_2 = a'_2$$

$$/4.9c/ \quad -i(k + \omega\zeta_2)a_3 + i(k - \omega\zeta_2)a_4 = a'_3$$

$$/4.9d/ \quad i(k - \omega\zeta_2)a_3 - i(k + \omega\zeta_2)a_4 = a'_4$$

Nietrudno zauważyć, że pola odpowiadające potencjałom u_{ni} , $n = 1, 2, 3, 4$ są polami typu TEM, tzn. $\underline{E} \cdot \underline{z}_0 = 0$ i $\underline{H} \cdot \underline{z}_0 = 0$, tego typu są pola odpowiadające potencjałom v_{ni} . Bardziej interesujący jest jednak fakt, że pola elektromagnetyczne odpowiadające każdej parze potencjałów u_{ni} , v_{ni} są tożsamościowo równe zeru. Jest raczej rzeczą zaskakującą, iż takie pary potencjałów odpowiadające polom zerowym grają kluczową rolę w konstrukcji rozwiązania.

W szczególności dzięki istnieniu tych par możliwe jest spełnienie silnych warunków krawędziowych /3.3/. Fizyczna rola takich potencjałów będzie wyjaśniona przez rozpatrzenie pewnych pól elektromagnetycznych osobliwych na krawędzi półpłaszczyzny. Jak się okaże polom takim mogą odpowiadać potencjały zawierające asymptotycznie wyrazy typu u_{ni} lub v_{ni} . Anizotropia ośrodka sprawia, iż asymptotycznie dla superpozycji takich pól istnieją sektory katowe, gdzie z pary u_{ni} , v_{ni} pozostaje tylko jedna z tych funkcji, co w rezultacie prowadzi do tego, iż w sektorze tym pola odpowiadające u_{ni} , v_{ni} nie znoszą się i wobec tego w sektorach takich istnieją niejednorodne fale płaskie typu TEM. Zagadnienie to będzie dyskutowane dokładniej w naszej następnej pracy, rola zaś potencjałów u_{ni} , v_{ni} w tworzeniu rozwiązania uwiidoczni się w dalszym ciągu pracy.

5. Równania Wienera-Hopfa

Funkcji u i v poszukiwać będziemy w postaci następujących superpozycji fal płaskich

$$/5.1a/ \quad u = e^{i\beta y} \int_{Q_e} A^+(a) e^{i(ax + \gamma_e z)} da$$

$$/5.2a/ \quad v = e^{i\beta y} \int_{Q_m} B^+(a) e^{i(ax + \gamma_m z)} da$$

dla $z \geq 0$ oraz

$$/5.1b/ \quad u = e^{i\beta y} \int_{Q_e} \tilde{A}(a) e^{i(ax - \gamma_e z)} da$$

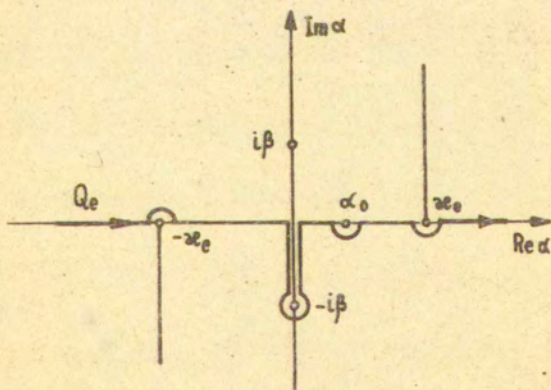
$$/5.2b/ \quad v = e^{i\beta y} \int_{Q_m} \bar{B}(\alpha) e^{i(\alpha x - \gamma_m z)} d\alpha$$

dla $z < 0$, gdzie

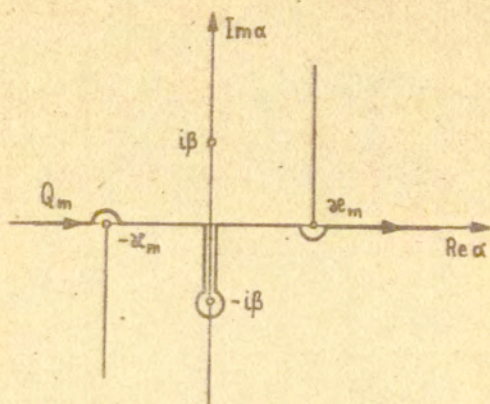
$$/5.3/ \quad \gamma_e(\alpha) = \gamma_e = \sqrt{\tau_e(\alpha_e^2 - \alpha^2)}$$

$$/5.4/ \quad \gamma_m(\alpha) = \gamma_m = \sqrt{\tau_m(\alpha_m^2 - \alpha^2)}$$

Pierwiastki w zależnościach /5.3/ i /5.4/ wybieramy tak, że $\tau_e(0) > 0$, $\tau_m(0) > 0$. Kontur całkowania Q_e przebiega wzdłuż osi rzeczywistej z wyjątkiem otoczenia punktów $\pm \alpha_e$, α_0 , $-i\beta$ gdzie jest odkształcony tak, by punkt $-\alpha_e$ leżał pod konturem, zaś punkty $+\alpha_e$, α_0 , $-i\beta$ nad konturem, rys. 2a. Podobnie określamy przebieg konturu Q_m , rys. 2b.



Rys. 2a Punkty osobliwe $\alpha_0, \pm i\beta, \pm \alpha_e$, cięcia dla pierwiastka τ_e i kontur całkowania Q_e



Rys. 2b Punkty osobliwe $\pm i\beta$, $\pm x_m$, cięcia dla pierwiastka x_m i kontur całkowania Q_m

Oznaczmy przez $\Omega_e(Q_m)$ obszar leżący powyżej konturu Q_e , (Q_m), zaś przez $\Omega_w(Q_m)$ obszar leżący poniżej $Q_e(Q_m)$. Poprawność reprezentacji rozwiązania u, v w postaci /5.1/ /5.2/ zależy od zbieżności występujących w tych wzorach całek. Zbieżność ta zostanie zweryfikowana po skonstruowaniu rozwiązania. Przy założeniu zbieżności całek /5.1/ /5.2/, warunek I, rozdz. 3 jest spełniony dla $z \neq 0$. Jak można się też przekonać, przez wprowadzenie małych strat, dokonany wybór przebiegu konturów Q_e i Q_m oraz gałęzi pierwiastków x_e i x_m zapewnia spełnienie warunku IV, rozdz. 3.

Celem naszym będzie obecnie określenie amplitud spektralnych $A^+(\alpha)$, $A^-(\alpha)$, $B^+(\alpha)$, $B^-(\alpha)$.

Rozpatrzymy w pierwszej kolejności wyrażenia /5.1/ dla potencjału u . Warunki brzegowe /4.3/ będą spełnione jeżeli zachodzić będzie następująca zależność

$$/5.5/ \quad \begin{pmatrix} \gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+(\alpha) \\ A^-(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_e'(\alpha) \\ U_e''(\alpha) \end{pmatrix} - \frac{\alpha_0}{2\pi i (\alpha - \alpha_0)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \gamma_0 + \omega \varepsilon \zeta_1 \\ -\gamma_0 + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i (\alpha - i\beta)} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i (\alpha + i\beta)} \begin{pmatrix} \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{pmatrix}$$

gdzie $U_e'(\alpha)$, $U_e''(\alpha)$ są funkcjami analitycznymi w $\Omega_e + Q_e$ i dążą dostatecznie szybko do zera dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w rozpatrywanym obszarze.

Zależność /5.5/ przepisujemy w następującej postaci

$$/5.6/ \quad F_e A = U_e - D + D' + D''$$

gdzie

$$F_e = F_e(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad U_e = U_e(\alpha) = \begin{pmatrix} U_e'(\alpha) \\ U_e''(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A = A(\alpha) = \begin{pmatrix} A^+(\alpha) \\ A^-(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = D(\alpha) = \frac{\alpha_0}{2\pi i (\alpha - \alpha_0)} \begin{pmatrix} \gamma_0 + \omega \varepsilon \zeta_1 \\ -\gamma_0 + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$D' = D'(d) = \frac{1}{2\pi i (d - i\beta)} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}, \quad D'' = D''(d) = \frac{1}{2\pi i (d + i\beta)} \begin{pmatrix} a_3' \\ a_4' \end{pmatrix}$$

Dla spełnienia równania /2.3/ w półpłaszczyźnie $z=0, x < 0$ funkcja u musi być ciągła wraz z pochodną $\partial u / \partial z$. Otrzymujemy stąd zależność

$$/5.7/ \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \bar{\tau}_e & \tau_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+(d) \\ A^-(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_e'(d) \\ L_e''(d) \end{pmatrix}$$

gdzie $L_e'(d)$, $L_e''(d)$ są funkcjami analitycznymi w $U_e + Q_e$ i malejącymi dostatecznie szybko dla $|d| \rightarrow \infty$ w tym obszarze.

Równanie /5.7/ przepiszemy w postaci

$$/5.8/ \quad C_e \cdot A = L_e$$

gdzie

$$C_e = C_e(d) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \bar{\tau}_e & \tau_e \end{pmatrix} \quad L_e = L_e(d) = \begin{pmatrix} L_e'(d) \\ L_e''(d) \end{pmatrix}$$

Eliminując A z /5.6/ i /5.8/ otrzymamy

/5.9/

$$V_e = G_e L_e$$

gdzie

$$V_e = V_e(\alpha) = U_e - D + D' + D''$$

$$G_e = G_e(\alpha) = F_e C_e^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_e + \omega \varepsilon \kappa_1 & \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \kappa_1}{\tau_e} \\ -(\gamma_e + \omega \varepsilon \kappa_2) & \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \kappa_2}{\tau_e} \end{pmatrix}$$

Układ /5.9/ należy rozwiązać przy warunku

$$/5.10/ \quad V_e(\alpha) = \begin{pmatrix} O(\alpha^{-1}) + O(\alpha^{-1/2}) \\ O(\alpha^{-1}) + O(\alpha^{-1/2}) \end{pmatrix}$$

dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w $\Omega_e + Q_e$

Warunek /5.10/ wynika z warunku /3.4a/ na krawędzi oraz z twierdzenia o zachowaniu asymptotycznym transformat Fouriera [9].

Dla potencjału ψ z warunków brzegowych /4.4/ otrzymujemy

/5.11/

$$F_m \cdot B = U_m + P' + P''$$

gdzie

$$F_m = F_m(d) = \begin{pmatrix} \omega\mu + \xi_2 x_m & 0 \\ 0 & \omega\mu + \xi_2 x_m \end{pmatrix}, \quad U_m = U_m(d) = \begin{pmatrix} U_m'(d) \\ U_m''(d) \end{pmatrix}$$

$$B = B(d) = \begin{pmatrix} B^+(d) \\ B^-(d) \end{pmatrix}, \quad P' = P'(d) = \frac{1}{2ni(\alpha - i\beta)} \begin{pmatrix} -i a_1' \\ i a_2' \end{pmatrix}$$

$$P'' = P''(d) = \frac{1}{2ni(\alpha + i\beta)} \begin{pmatrix} i a_3' \\ -i a_4' \end{pmatrix}$$

Funkcje $U_m'(d)$, $U_m''(d)$ są funkcjami analitycznymi w $\Omega_m + Q_m$ i dążą dostatecznie szybko do zera dla $|d| \rightarrow \infty$ w tym obszarze.

Z warunku ciągłości v i $\frac{\partial v}{\partial z}$ dla $z=0$, $x < 0$ otrzymujemy

/5.12/

$$G_m \cdot B = L_m$$

gdzie

$$G_m = G_m(d) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x_m & x_m \end{pmatrix}, \quad L_m = L_m(d) = \begin{pmatrix} L_m'(d) \\ L_m''(d) \end{pmatrix}$$

Funkcje $L_m'(d)$, $L_m''(d)$ są funkcjami analitycznymi w $\Omega_m + Q_m$ i maleją dostatecznie szybko dla $|d| \rightarrow \infty$ w tym obszarze.

Eliminując B z /5.11/ i /5.12/ otrzymujemy

/5.13/

$$V_m = G_m L_m$$

gdzie

$$V_m = V_m(\alpha) = U_m + p^1 + p^2$$

$$G_m = G_m(\alpha) = F_m C_m^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega\mu + \zeta_1 \bar{\tau}_m & \frac{\omega\mu + \zeta_1 \bar{\tau}_m}{\tau_m} \\ -(\omega\mu + \zeta_2 \bar{\tau}_m) & \frac{\omega\mu + \zeta_2 \bar{\tau}_m}{\tau_m} \end{pmatrix}$$

Układ /5.13/ należy rozwiązać przy warunku

$$/5.14/ \quad V_m(\alpha) = \begin{pmatrix} O(\alpha^{-4}) + O(\alpha^{-3/2}) \\ O(\alpha^{-4}) + O(\alpha^{-3/2}) \end{pmatrix}$$

Warunek /5.14/ jest konsekwencją warunku /3.4b/ na krawędzi i twierdzenia o zachowaniu asymptotycznym transformaty Fouriera [9].

6. Zagadnienia Hilberta

Rozważmy jednorodny układ równań Wienera-Hopfa odpowiadający układowi /5.9/, który piszemy w postaci

$$/6.1/ \quad f(\alpha) = G_\theta(\alpha) g(\alpha)$$

gdzie funkcje wektorowe

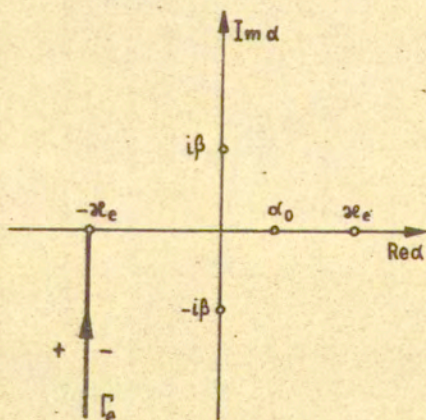
$$f = f(\alpha) = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\alpha) \end{pmatrix}$$

jest analityczna w obszarze $\Omega_\epsilon + Q_\epsilon$, zaś funkcja wektorowa

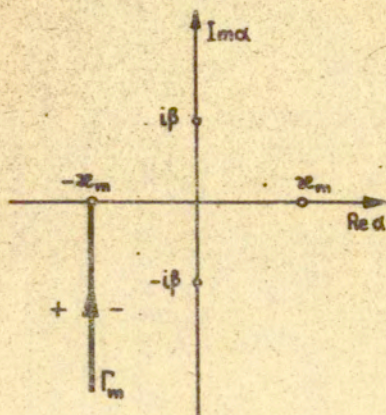
$$g = g(\alpha) = \begin{pmatrix} g_1(\alpha) \\ g_2(\alpha) \end{pmatrix}$$

jest analityczna w obszarze $\Omega_\epsilon + Q_\epsilon$. Macierz $G_\epsilon(\alpha) = G_\epsilon$ jest znana i opisana we wzorze /5.9/.

Jak pokazano w pracy [5] zasadniczy krok w metodzie Wienera-Hopfa-Hilberta polega na transformacji układu równań Wienera-Hopfa w układ odpowiednich zagadnień Hilberta. W rozważanym przypadku macierz G_ϵ spełnia warunki potrzebne do takiej transformacji. Jedynymi jej punktami osobliwymi są punkty rozgałęzienia $\pm \alpha_\epsilon$. Niech Γ_ϵ będzie cięciem wyprowadzonym z punktu $-\alpha_\epsilon$. Wybierzmy orientację cięcia i oznaczmy znakami /+/, /-/- jak pokazano na rys. 3a.



Rys. 3a Przekrój Γ_ϵ dla problemu Hilberta. Strzałka pokazuje kierunek całkowania, znaki /+/, /-/- odpowiednią stronę przekroju.



Rys. 3b Przekrój Γ_m dla problemu Hilberta. Strzałka pokazuje kierunek całkowania, znaki $/+/, /- /$ odpowiednią stronę przekroju.

Wartości graniczne rozpatrywanych funkcji na konturze Γ_0 będziemy oznaczali indeksami $/+/, /- /$. Z równania /6.1/ otrzymujemy wtedy na konturze Γ_0

$$/6.2a/ \quad f_+(a) = G_{0+}(a) g_+(a)$$

$$/6.2b/ \quad f_-(a) = G_{0-}(a) g_-(a)$$

Mamy jednak $g_+(a) = g_-(a)$, ponieważ funkcja wektorowa $g(a)$ jest analityczna w \mathfrak{D} . Zatem z /6.2a/ i /6.2b/ otrzymujemy

$$/6.3/ \quad f_+(a) = H_0(a) f_-(a)$$

gdzie

$$/6.4/ \quad H_e(\alpha) = H_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_1}{\gamma_e - \omega \varepsilon \zeta_2} \\ \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_2}{\gamma_e - \omega \varepsilon \zeta_1} & 0 \end{pmatrix}$$

gdź $H(\alpha) = G_{e+}(\alpha) G_e^{-1}(\alpha) = F_{e+}(\alpha) C_{e+}^{-1}(\alpha) C_{e-}(\alpha) F_e^{-1}(\alpha)$

Wprowadzając wzór /6.4/ skorzystaliśmy z zależności $\gamma_e = -\gamma_{e+}$ i opuściliśmy indeks /+/ przy γ_e . Równania /6.3/ stanowią poszukiwany układ zagadnień Hilberta.

W sposób analogiczny rozpatrujemy jednorodny układ równań Wienera-Hopfa odpowiadający układowi /5.13/, który zapisujemy w postaci

$$/6.5/ \quad \psi(\alpha) = G_m \psi(\alpha)$$

gdzie funkcja wektorowa

$$\psi(\alpha) = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\alpha) \\ \psi_2(\alpha) \end{pmatrix}$$

jest analityczna w $\Omega_m + Q_m$, zaś

$$\varphi(\alpha) = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) \end{pmatrix}$$

jest analityczna w $\bar{\Omega}_m + Q_m$

Rozpatrując analogicznie jak dla układu /6.1/ cięcie Γ_m wyprowadzone z punktu $-z_m$, jak na rys. 3b, otrzymamy na tym konturze następujący układ zagadnień Hilberta

$$/6.6/ \quad \psi_+(z) = H_m(z) \psi_-(z)$$

gdzie

$$/6.7/ \quad H_m(z) = H_m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi_2 r_m + \omega \mu}{\xi_2 r_m - \omega \mu} \\ \frac{\xi_2 r_m + \omega \mu}{\xi_1 r_m - \omega \mu} & 0 \end{pmatrix}$$

gdź

$$H_m(z) = G_{m+}(z) G_{m-}^{-1}(z) = F_{m+}(z) C_{m+}^{-1}(z) C_{m-}(z) F_{m-}^{-1}(z)$$

Ponieważ $r_{m-} = -r_{m+}$, we wzorze /6.7/ został pominięty indeks $+/+$ przy r_m . Równania /6.6/ stanowią układ Hilberta odpowiadający układowi równań Wienera-Hopfa /6.5/.

7. Rozwiązanie zagadnień Hilberta

Rozpiszmy układ równań Hilberta /6.3/ na składowe. Otrzymujemy

$$/7.1a/ \quad f_{1+} = \lambda_e f_{2-}$$

$$/7.1b/ \quad f_{2+} = \sigma_e f_{1-}$$

gdzie

$$\lambda_e = \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_1}{\gamma_e - \omega \varepsilon \zeta_2} \quad \zeta_e = \frac{\gamma_e + \omega \varepsilon \zeta_2}{\gamma_e - \omega \varepsilon \zeta_1}$$

Pomnóżmy odpowiadające sobie strony równań /7.1/. Otrzymamy

$$/7.2/ \quad (f_1 f_2)_+ = \lambda_e \zeta_e (f_1 f_2)_-$$

Równanie /7.2/ stanowi klasyczny problem Hilberta, którego rozwiązanie zgodnie z [5] ma postać

$$/7.3/ \quad f_1(\alpha) f_2(\alpha) = (\alpha_e + \alpha)^n e^{Q_e(\alpha)}$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, zaś $Q_e(\alpha)$ jest dane wzorem

$$/7.4/ \quad Q_e(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_e} \frac{\ln(\lambda_e \zeta_e)}{t - \alpha} dt$$

Funkcja $Q_e(\alpha)$ nie wyraża się przez funkcje elementarne, jednak Hurd zbadał, że może być ona wyrażona przez stabelaryzowane funkcje Clausena i zachowuje się w nieskończoności wg zależności $Q(\alpha) = O(\alpha^{-1})$ dla $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Dzieląc przez siebie stronami równania /7.1/ otrzymujemy

$$/7.5/ \quad \left(\frac{f_2}{f_1} \right)_+ = \frac{\lambda_e}{\zeta_e} \left(\frac{f_2}{f_1} \right)_-$$

Po zlogarytmowaniu /7.5/ otrzymujemy

$$/7.6/ \quad \left(\ln \frac{f_1}{f_2} \right)_+ + \left(\ln \frac{f_1}{f_2} \right)_- = \ln \left(\lambda_0 / \sigma_e \right)$$

Aby nadać równaniu /7.6/ postać standardową problemu Hilberta wprowadzimy funkcję pomocniczą

$$/7.7/ \quad N_e(\alpha) = (\alpha_e + \alpha)^{1/2+m} \ln \left(\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)} \right)$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą, wówczas

$$/7.8/ \quad N_{e+} - N_{e-} = (\alpha_e + \alpha)^{1/2+m} \ln \left(\lambda_0 / \sigma_e \right)$$

Rozwiązanie równania /7.8/ ma postać

$$/7.9/ \quad N_e(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_e} (\alpha_e + t)^{1/2+m} \ln \left(\lambda_0 / \sigma_e \right) \frac{dt}{t-\alpha}$$

Oznaczając

$$/7.10/ \quad R_e(\alpha) = (\alpha_e + \alpha)^{-1/2+m} N_e(\alpha)$$

otrzymamy z /7.7/

$$/7.11/ \quad \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)} = \pm e^{R_e(\alpha)}$$

Funkcję $R(\alpha)$ można wyznaczyć przez funkcje elementarne. Otrzymujemy

$$/7.12/ \quad R_e(\alpha) = \text{Ln} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha e (1 + \cos \Phi_e^{(1)})} + \sqrt{\alpha e + \alpha}}{\sqrt{\alpha e (1 + \cos \Phi_e^{(2)})} + \sqrt{\alpha e + \alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha e (1 - \cos \Phi_e^{(4)})} + \sqrt{\alpha e + \alpha}}{\sqrt{\alpha e (1 - \cos \Phi_e^{(2)})} + \sqrt{\alpha e + \alpha}} \right\}$$

gdzie

$$/7.13/ \quad \sin \Phi_e^{(1)} = \frac{\omega \varepsilon \zeta_1}{\alpha e}, \quad \sin \Phi_e^{(2)} = \frac{\omega \varepsilon \zeta_2}{\alpha e}$$

Funkcja $R_e(\alpha)$ jest analityczna wszędzie poza cięciem Γ_e , rys. 3a i zachowuje się jak $O(\alpha^{-4/2})$ gdy $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Poszukiwana funkcja wektorowa $f(\alpha)$ spełniająca układ równań /6.3/ ma postać

$$/7.14/ \quad f(\alpha) = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\alpha) \end{pmatrix} = (\alpha e + \alpha)^{n/2} \begin{pmatrix} e^{1/2 [Q_e(\alpha) + R_e(\alpha)]} \\ (-1)^n e^{1/2 [Q_e(\alpha) - R_e(\alpha)]} \end{pmatrix}$$

gdzie całkowita liczba n zostaje do wyznaczenia.

Analogicznie rozpatrujemy jednorodny układ równań Hilberta /6.6/. Otrzymujemy

$$/7.15/ \quad \Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\alpha) \\ \Psi_2(\alpha) \end{pmatrix} = (\alpha e_m + \alpha)^{n/2} \begin{pmatrix} e^{1/2 [Q_m(\alpha) + R_m(\alpha)]} \\ (-1)^n e^{1/2 [Q_m(\alpha) - R_m(\alpha)]} \end{pmatrix}$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą

$$/7.16/ \quad Q_m(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{\ln(\lambda_m \zeta_m)}{t - \alpha} dt$$

przy oznaczeniach

$$\lambda_m = \frac{\zeta_2 r_m + \omega \mu}{\zeta_2 r_m - \omega \mu}$$

/7.17/

$$\zeta_m = \frac{\zeta_2 r_m + \omega \mu}{\zeta_4 r_m - \omega \mu}$$

Podobnie jak $Q_e(\alpha)$ funkcja $Q_m(\alpha)$ zachowuje się asymptotycznie według zależności $Q_m(\alpha) = O(\alpha^{-4})$ dla $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Funkcja $R_m(\alpha)$ ma postać

$$/7.18/ \quad R_m(\alpha) = (\alpha e_m + \alpha)^{-1/2 - m} N_m(\alpha)$$

gdzie

$$/7.19/ \quad N_m(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\alpha \zeta_m + t)^{\frac{1}{2} + m} \operatorname{Ln} \left(\frac{\lambda_m}{\zeta_m} \right) \frac{dt}{t - \alpha}$$

Podobnie jak $R_e(\alpha)$ funkcję $R_m(\alpha)$ można wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych za pomocą wzoru

$$/7.20/ \quad R_m(\alpha) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha \zeta_m (1 + \cos \Phi_m^{(2)})} + \sqrt{\alpha \zeta_m + \alpha}}{\sqrt{\alpha \zeta_m (1 + \cos \Phi_m^{(1)})} + \sqrt{\alpha \zeta_m + \alpha}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{\alpha \zeta_m (1 - \cos \Phi_m^{(4)})} + \sqrt{\alpha \zeta_m + \alpha}}{\sqrt{\alpha \zeta_m (1 - \cos \Phi_m^{(3)})} + \sqrt{\alpha \zeta_m + \alpha}} \right\}$$

gdzie

$$/7.21/ \quad \sin \Phi_m^{(1)} = \frac{\omega \mu}{\alpha \zeta_m \zeta_{s1}}, \quad \sin \Phi_m^{(2)} = \frac{\omega \mu}{\alpha \zeta_m \zeta_{s2}}$$

Funkcja R_m jest analityczna wszędzie poza cięciem Γ_m , rys. 3b i zachowuje się jak $O(\alpha^{-1/2})$ gdy $|\alpha| \rightarrow \infty$

8. Rozwiązanie układów Wienera-Hopfa

Dla konstrukcji rozwiązań układów /5.9/ i /5.13/ posłużymy się wzorem /36 / pracy [5] . W tym celu należy najpierw skonstruować macierze rozwiązujące $X_e(\alpha)$ i $X_m(\alpha)$. Wyznamy więc wektory $f^{(n)}$ i $\psi^{(n)}$ tworzące kolumny tych macierzy, wybierając odpowiednio wskaźnik n we wzorach /7.14/, /7.15/. Okazuje się, że dla $n \leq -1$ wektory $f^{(n)}(\alpha)$, $\psi^{(n)}(\alpha)$ prowadziłyby do funkcji $L_e(\alpha)$, $L_m(\alpha)$ niesanalitycznych odpowiednio w punkcie $-\alpha e$, $-\alpha e m$, a więc nie należących do klasy funkcji poszukiwanych, stąd mamy ograniczenie: $n > -1$. Zachowanie funkcji $V_e(\alpha)$ i $V_m(\alpha)$ w nieskończoności określone warunkami /5.10/ i /5.14/ pozwala zauważyć, że szansę na konstrukcję rozwiązań V_e , V_m , o właściwym zachowaniu w nieskończoności stwarzają wyłącznie wektory $f^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ najwolniej rosnące w nieskończoności, czyli dla wskaźnika $n = 0$, $n = 1$. W rezultacie tych rozważań dochodzimy do wniosku, że jedynymi kandydatami na wektory występujące w macierzach $X_e(\alpha)$ i $X_m(\alpha)$ są odpowiednio $f^{(0)}$ i $f^{(1)}$ oraz $\psi^{(0)}$ i $\psi^{(1)}$.
Mamy zatem

$$/8.1/ \quad X_e(\alpha) = X_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [Q_e(\alpha) + R_e(\alpha)] & \frac{1}{2} [Q_e(\alpha) + R_e(\alpha)] \\ (\alpha e + \alpha) e & e \\ -(\alpha e + \alpha) e & \frac{1}{2} [Q_e(\alpha) - R_e(\alpha)] \\ & \frac{1}{2} [Q_e(\alpha) - R_e(\alpha)] \end{pmatrix}$$

oraz

$$/8.2/ \quad X_m(d) = X_m^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_m + d)^{1/2} e^{1/2 [Q_m(d) + R_m(d)]} & e^{1/2 [Q_m(d) + R_m(d)]} \\ -(\alpha_m + d)^{1/2} e^{1/2 [Q_m(d) - R_m(d)]} & e^{1/2 [Q_m(d) - R_m(d)]} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie dla V_e i V_m są określone wzorami

$$/8.3/ \quad V_e(d) = X_e(d) \left[-X_e^{-1}(d_0) D + X_e^{-1}(i\beta) D' + X_e^{-1}(-i\beta) D'' \right]$$

$$/8.4/ \quad V_m(d) = X_m(d) \left[X_m^{-1}(i\beta) P' + X_m^{-1}(-i\beta) P'' \right]$$

Korzystając z zależności /5.6/ i /8.1/, /8.2/ przepisujemy wzory /8.3/ i /8.4/ w następującej postaci

$$/8.5/ \quad V_e(d) = -\frac{a_0}{d - \alpha_0} X_e Z + \frac{a_1}{d - i\beta} X_e Z_1 + \frac{a_2'}{d - i\beta} X_e Z_2 + \frac{a_3'}{d + i\beta} X_e Z_3 + \\ + \frac{a_4'}{d + i\beta} X_e Z_4$$

$$/8.6/ \quad V_m(d) = \frac{a_1'}{d - i\beta} X_m Y_1 + \frac{a_2'}{d - i\beta} X_m Y_2 + \frac{a_3'}{d + i\beta} X_m Y_3 + \\ + \frac{a_4'}{d + i\beta} X_m Y_4$$

gdzie

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} X_e^{-1}(d) \begin{pmatrix} x_0 + \omega \varepsilon \zeta_1 \\ -x_0 + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{e^{-\frac{1}{2} Q_{e0}}}{4\pi i} \begin{pmatrix} (x_0 + d_0) \left[(x_0 + \omega \varepsilon \zeta_1) e^{-\frac{1}{2} R_{e0}} + (x_0 - \omega \varepsilon \zeta_2) e^{\frac{1}{2} R_{e0}} \right] \\ (x_0 + \omega \varepsilon \zeta_1) e^{-\frac{1}{2} R_{e0}} - (x_0 - \omega \varepsilon \zeta_2) e^{\frac{1}{2} R_{e0}} \end{pmatrix}$$

przy oznaczeniach $Q_{e0} = Q_e(d_0)$, $R_{e0} = R_e(d_0)$
oraz

$$Z_1 = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{pmatrix} = \frac{e^{-\frac{1}{2} (Q_{e1} + R_{e1})}}{4\pi i} \begin{pmatrix} (x_0 + i\beta)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{1}{2} (R_{e1} - Q_{e1})}}{4\pi i} \begin{pmatrix} -(x_0 + i\beta)^{\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} Z_{31} \\ Z_{32} \end{pmatrix} = \frac{e^{-1/2 (R_{e2} + Q_{e2})}}{4\pi i} \begin{pmatrix} (\alpha e - i\beta)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} Z_{41} \\ Z_{42} \end{pmatrix} = \frac{e^{1/2 (R_{e2} - Q_{e2})}}{4\pi i} \begin{pmatrix} -(\alpha e - i\beta)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

przy oznaczeniach

$$Q_{e1} = Q_e(i\beta), \quad R_{e1} = R_e(i\beta), \quad Q_{e2} = Q_e(-i\beta), \quad R_{e2} = R_e(-i\beta)$$

ponadto

$$Y_1 = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{pmatrix} = -\frac{e^{-1/2 (R_{m2} + Q_{m2})}}{4\pi} \begin{pmatrix} (\alpha m + i\beta)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{e^{1/2 (R_{m2} - Q_{m2})}}{4\pi} \begin{pmatrix} -(\alpha m + i\beta)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} Y_{31} \\ Y_{32} \end{pmatrix} = \frac{e^{-1/2 (Q_{m2} + R_{m2})}}{4\pi} \begin{pmatrix} (\alpha m - i\beta)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} Y_{41} \\ Y_{42} \end{pmatrix} = \frac{e^{1/2 (R_{m2} - Q_{m2})}}{4\pi} \begin{pmatrix} (\alpha_m - i\beta)^{-1/2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

przy oznaczeniach

$$Q_{m1} = Q_m(i\beta), \quad R_{m1} = R_m(i\beta), \quad Q_{m2} = Q_m(-i\beta), \quad R_{m2} = R_m(-i\beta)$$

Badając zachowanie asymptotyczne rozwiązań /8.5/, /8.6/ dla $\alpha \rightarrow \infty$ można stwierdzić, że przy dowolnych stałych a_n , $n = 1, 2, 3, 4$, rozwiązanie te nie spełniają warunków /5.10/, /5.14/, gdyż zawierają wyrazy $O(\alpha^{-1/2})$ dla $|\alpha| \rightarrow \infty$. Defekt ten usuniemy w następnym rozdziale.

9. Synteza rozwiązania problemu

Określmy zachowanie asymptotyczne macierzy $X_e(\alpha)$, wzór /8.1/ dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w obszarze $\Omega_e + Q_e$. Otrzymujemy

$$/9.1/ \quad X_e(\alpha) = \begin{pmatrix} S_{e1} \alpha^{1/2} + O(\alpha^{-1/2}) & O(1) \\ -S_{e2} \alpha^{1/2} + O(\alpha^{-1/2}) & O(1) \end{pmatrix}$$

Analogicznie dla $X_m(\alpha)$, wzór 8.2, dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w obszarze $\Omega_m + Q_m$ otrzymujemy

$$/9.2/ \quad X_m(d) = \begin{pmatrix} s_{m1} d^{1/2} + O(d^{-1/2}) & O(1) \\ -s_{m2} d^{1/2} + O(d^{-1/2}) & O(1) \end{pmatrix}$$

gdzie s_{e1} , s_{e2} , s_{m1} , s_{m2} są stałymi, których wartości nie będą potrzebne.

Korzystając z /9.1/ i /9.2/ we wzorach /8.5/ i /8.6/ otrzymujemy dla $|d| \rightarrow \infty$

$$/9.3a/ \quad V_e'(d) = s_{e1} \left(-a_0 Z_1 + a_1' Z_{11} + a_2' Z_{21} + a_3' Z_{31} + a_4' Z_{41} \right) \times \\ \times d^{-1/2} + O(d^{-1})$$

$$/9.3b/ \quad V_e''(d) = -s_{e2} \left(-a_0 Z_1 + a_1' Z_{11} + a_2' Z_{21} + a_3' Z_{31} + a_4' Z_{41} \right) \times \\ \times d^{-1/2} + O(d^{-1})$$

oraz

$$/9.4a/ \quad V_m'(d) = s_{m1} \left(a_1' Y_{11} + a_2' Y_{21} + a_3' Y_{31} + a_4' Y_{41} \right) d^{-1/2} + O(d^{-1})$$

$$/9.4b/ \quad V_m''(\alpha) = -s_{m2} (a_1' Y_{41} + a_2' Y_{24} + a_3' Y_{31} + a_4' Y_{41}) \alpha^{-4/2} + 0(\alpha^{-4})$$

Wobec warunków /5.10/ i /5.14/, wyrazy zachowujące się w nieskończoności jak $\alpha^{-4/2}$ muszą zniknąć. Stąd otrzymujemy następujące równania dla stałych a_n' , $n = 1, 2, 3, 4$.

$$/9.5a/ \quad a_1' Z_{41} + a_2' Z_{24} + a_3' Z_{31} + a_4' Z_{41} = a_0' Z_{01}$$

$$/9.5b/ \quad a_1' Y_{41} + a_2' Y_{21} + a_3' Y_{31} + a_4' Y_{41} = 0$$

Po wyznaczeniu stałych a_n' , $n = 1, 2, 3, 4$ rozwiązanie naszego problemu jest określone przez /8.3/ i /8.4/. Układ równań /9.5/ dla wyznaczenia stałych jest nieokreślony, co pozwala na uzupełnienie tego układu dwoma dodatkowymi równaniami, których wybór uzasadniony jest wyłącznie przesłankami dogodności.

10. Składowe zagadnienia dyfrakcyjne

Wyznaczywszy z układu /9.5/ stałe a_n' , $n = 1, 2, 3, 4$ możemy rozwiązać układ /4.9/ i wyznaczyć stałe a_n . Korzystając z niedookreśloności układu /9.5/ przyjmujemy $a_2 = a_4 = 0$.

Uzyskane wyniki można zinterpretować w następujący sposób. Oznaczmy

$$/10.1/ \quad V_e^{(n)}(\alpha) = \frac{a_n}{\alpha - \alpha_n} \chi_e Z^{(n)}$$

dla $n = 0, 1, 3$ gdzie

$$\alpha_1 = i\beta, \quad \alpha_3 = -i\beta, \quad Z^{(0)} = Z \quad \text{natomiast}$$

$$Z^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} X^{-1} e^{i\beta} \begin{pmatrix} k + \omega \varepsilon \zeta_1 \\ -k + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(3)} = \frac{1}{2\pi i} X^{-1} e^{-i\beta} \begin{pmatrix} k + \omega \varepsilon \zeta_1 \\ -k + \omega \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$/10.2/ \quad V_m^{(n)}(\alpha) = \frac{a_n}{\alpha - a_n} X_m Y^{(n)}$$

dla $n = 1, 3$ gdzie

$$Y^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} X_m^{-1} e^{i\beta} \begin{pmatrix} \omega \mu + \zeta_1 k \\ \omega \mu - \zeta_2 k \end{pmatrix}$$

$$Y^{(3)} = \frac{1}{2\pi} X_m^{-1} e^{-i\beta} \begin{pmatrix} \omega \mu + \zeta_1 k \\ \omega \mu - \zeta_2 k \end{pmatrix}$$

Przy tych oznaczeniach rozwiązanie /8.3/, /8.4/ można zapisać w postaci

$$/10.3/ \quad V_e(\alpha) = V_e^{(0)}(\alpha) + V_e^{(1)}(\alpha) + V_e^{(2)}(\alpha)$$

$$/10.4/ \quad V_m(\alpha) = V_m^{(1)}(\alpha) + V_m^{(2)}(\alpha)$$

Każde z rozwiązań składowych $V_e^{(n)}$, dla $n = 0, 1, 2$, $V_m^{(n)}(\alpha)$, dla $n = 1, 2$ może być interpretowane jako rozwiązanie odpowiadające zagadnieniu dyfrakcji u_n, v_n z falami padającymi $u_{0i}, u_{1i}, v_{1i}, u_{2i}, v_{2i}$. Każde z tych rozwiązań jest jednoznacznie określone przez słabsze warunki na krawędzi

$$u_n = C_{en} + O(\rho^{d_1}), \quad v_n = C_{mn} + O(\rho^{d_2})$$

dla $\rho \rightarrow 0$, gdzie $d_1 > 0, d_2 > 0, C_{en}, C_{mn}$ są pewnymi stałymi.

A zatem rozwiązanie u, v może być badane poprzez analizę rozwiązań składowych u_n, v_n , które są rozwiązaniami odpowiednich problemów dyfrakcyjnych.

11. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiliśmy konstrukcję rozwiązania sformułowanego zagadnienia. Analiza asymptotyczna oraz interpretacja tego rozwiązania będzie przedmiotem następnej pracy. Zśród zjawisk dyfrakcyjnych, które zostaną tam omówione wymienimy 1. występowanie dwóch eliptycznych stożków promieni. 2. wyznaczenie granic cienia przez kierunki promieni a nie wektorów fazowych. 3. występowanie sektorów kątowych, gdzie asymptotycznie wystąpią fale niejednorodnej postaci /4.6/.

LITERATURA

- [1] K. BOCHENEK, Metody analizy pól elektromagnetycznych, PWN Warszawa 1961.
- [2] L.A. WAINSTEIN, Fale elektromagnetyczne, PWN Warszawa 1963.
- [3] G.D. MALUZINIEC, Vozbuzdenie, otrazenie i izlucenie poverchnostnykh voln na kline s zadannymi impedanciami granej. Dokł. AN SSSR 3, str. 436 - 439 /1958/.
- [4] W.E. WILLIAMS, Propagation of elektromagnetic surface waves along wedge surfaces. Quart. J. Mech. Appl. Math. 13, str. 278 - 284 /1960/.
- [5] R.A. HURD, The Wiener-Hopf-Hilbert method for diffraction problems. Can. J. Phys. 54, str. 775 - 780 /1976/.
- [6] S. PRZEZDZIECKI, Diffraction by a half-plane perpendicular to the distinguished axis of a uniaxially anisotropic medium. J. Appl. Phys. 37, str. 2768 - 2775 /1966/.
- [7] W.E. WILLIAMS, Electromagnetic diffraction in an anisotropic medium. J. Inst. Math. Appl. 2, str. 186 /1966/.
- [8] O.M. BUCCI, G. FRANCESCHETTI, Electromagnetic scattering by a half-plane with two face impedances. Radio Sci. 11, str. 49 - 59 /1976/.
- [9] B. NOBLE, Methodes based on the Wiener-Hopf technique. Pergamon Press, London 1958.