GEOMETRYA WYKREŚLNA

TADEUSZ J. ŁAZOWSKI.

# GEOMETRYA
# WYKREŚLNA

PODRĘCZNIK DLA KLAS WYŻSZYCH
SZKÓŁ ŚREDNICH

Z ĆWICZENIAMI i 200 RYSUNKAMI.

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — LUBLIN — ŁÓDŹ
KRAKÓW — G. GEBETHNER I SPÓŁKA
POZNAŃ — KSIĘGARNIA M. NIEMIERKIEWICZA

Szanownemu Panu Kat.
Profesorowi S. Dicksteinowi

TADEUSZ J. ŁAZOWSKI.

Od autora
T. Łazowskiego.

19 5/IX 17

# GEOMETRYA WYKREŚLNA

PODRĘCZNIK DLA KLAS WYŻSZYCH
SZKÓŁ ŚREDNICH

Z ĆWICZENIAMI i 200 RYSUNKAMI.



NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — LUBLIN — ŁÓDŹ
KRAKÓW — G. GEBETHNER I SPÓŁKA
POZNAŃ -- KSIĘGARNIA M. NIEMIERKIEWICZA

„Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben",
Warschau den. 18. 7. 1917. T. № 6412. Dr. № 342.



Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

# PRZEDMOWA.

Nie usprawiedliwiając tutaj doboru treści tej książki oraz użytego w niej sposobu wykładu, co uczynię, być może, w odpowiedniem czasopiśmie, zaznaczam tylko, że w rozdziałach początkowych starałem się o jak największe zainteresowanie ucznia i zachęcenie go do danego działu nauki, w dalszych — o pogłębienie jak najistotniejsze pojęć i konstrukcyi zasadniczych, których narzucanie zbyt pośpieszne umysłowi wyrządza wielkie szkody, wreszcie w ostatnich — o przejrzystość w wykładzie metod ogólnych, wyzyskanie pożytecznych analogii i uwzględnienie zastosowań teoryi do życia praktycznego.

Podręcznik niniejszy został napisany odpowiednio do tego założenia, że ma zawierać mniej więcej kurs dwuletni; linię podziału najlepiej chyba przeciągnąć między rozdziałem V a VI, przy większej liczbie godzin wykładu w pierwszym roku, niż w drugim — po rozdziale VI. Zresztą, zapomocą odrzucenia ustępów, odbitych drobnym drukiem, oraz niektórych innych, można wykroić, jak sądzę, z całości dość zwarty i jednolity kurs jednoroczny.

Oprócz podręczników geometryi elementarnej (E. Enriquesa i U. Amaldiego, A Łomnickiego i J. Zydlera), geometryi analitycznej (A. Łomnickiego i J. Zydlera) oraz geometryi wykreślnej (M. Łazarskiego), używanych w naszych szkołach, korzystałem jeszcze ze źródeł następujących:

K. Bartel. Geometrya wykreślna, kurs litografowany.

K. Bartel. Geometrya rzutów cechowanych.

M. Feldblum. Geometrya wykreślna.

E. Wawrykiewicz. Nauka rysunków.

G. Delabar. Anleitung zum Linearzeichnen. IV.
W. Fiedler. Die darstellende Geometrie.
G. Holzmüller. Einführung in das stereometrische Zeichnen.
E. Müller. Lehrbuch der darstellenden Geometrie.
X. Antomari. Traité de Géométrie descriptive.
Ch. Brisse. Cours de Géométrie descriptive.
E. Desportes. Éléments de Géométrie descriptive.
A. Gouilly. Géométrie descriptive.
A. Faifofer. Elementi di geometria.
International library of technology. — Practical projection.

Z rysunków jeden, mianowicie 181-szy, został zapożyczony, z pewnemi zmianami, z „International library of technology". Rysunki 180 i 189 były mi dane przez p. J. Nowaka, asystenta Politechniki Warszawskiej, któremu składam w tem miejscu podziękowanie zarówno za to ułatwienie, jakoteż za koleżeńską gotowość do rad i roztrząsań, które dotyczyły przeważnie ostatniego rozdziału. Oprócz tego w wykonaniu rysunków był mi pomocny słuchacz Politechniki, p. I. Rządkowski, w sposób nieraz samodzielny (rysunki: 185, 196, 197, 198 i kilka drobniejszych), a zawsze staranny.

*Uwaga praktyczna.* Przy wykładzie początków geometryi wykreślnej bywa bardzo przydatny, oprócz innych środków pomocniczych, model o konstrukcyi mniej więcej następującej: Do deski pionowej w rodzaju niewielkiej tablicy szkolnej, osadzonej nieruchomo w podstawce, są przytwierdzone zapomocą zawias dwie deski ruchome, w ten sposób, iż mogą przybierać albo położenie poziome, albo też takie położenie pionowe, w którem jedna przystaje do części górnej, druga—do części dolnej deski pionowej. Po wskazaniu położenia różnych punktów, prostych i płaszczyzn w przestrzeni zapomocą drutów, kawałków kartonu i t. p. i wyznaczeniu na obu płaszczyznach, t. j. pionowej, nieruchomej i poziomej, utworzonej przez powierzchnie dwu desek ruchomych w ich pierwszem położeniu, odpowiednich rzutów i śladów, możemy nadawać deskom ruchomym ich położenie pionowe i w ten sposób przechodzić do rysunków, które mogą być bezpośrednio przeniesione na zwykłą tablicę szkolną lub arkusz papieru.

# SPIS RZECZY.

# SPROSTOWANIA.

| *Str.* | *Wiersz* | *Zamiast:* | *Winno być:* |
|---|---|---|---|
| 30 | 6 od góry | *I. Metoda rzutów cechowanych* | *Metoda rzutów cechowanych* |
| 32 | 1 i 2 od dołu | „sferoidu“ ziemskiego | „sferoidy“ ziemskiej |
| 44 | 4 od dołu | $A'A_0$ | $[A'A_0]$ |
| 54 | 2 od dołu | $a'' \subset A''$, | $a'' \supset A''$, |
| 55 | 13 od dołu | $\Pi_4$, np. $AA''$ ($AA'' \parallel \Pi_1$, gdyż $AA''$ | $\Pi_2$, np. $[AA'']$ ($[AA''] \parallel \Pi_1$, gdyż $[AA'']$ |
| 61 | 12 od dołu | $V_a \equiv [a\Pi]$ | $V_a \equiv [a\Pi_2]$ |
| 62 | 8 od dołu | $b \parallel \Pi_2$, | $b \parallel \Pi_1$, |
| 62 | 7 od dołu | $d \perp \Pi_1$, | $d \perp \Pi_2$, |
| 63 | 9 od góry | $V_a'' \equiv V_a'$; | $V_a'' \equiv V_a$; |
| 99 | 6 od dołu | $b = [\beta_\gamma]$). | $b \equiv [\beta_\gamma]$). |

Na rys. 16 a) (strona 25) zamiast $X$ winno być $X'$; literę $+ Y'$ należy zupełnie usunąć z rys. 16 b).

# WSTĘP.

Przedmioty, widziane dokoła siebie w przestrzeni, człowiek, stara się wyobrazić na jakiejś powierzchni, zwykle na płaszczyźnie. Środki, używane do tego, bywają nader rozmaite: chodzi przy tem o osiągnięcie również rozmaitych korzyści. Szkic ołówkowy czy węglowy, a w większym jeszcze stopniu obraz barwny, wykonywany w pracowni artystycznej, ma na celu przedewszystkiem wywołanie w widzu wrażenia wzrokowego, możliwie zbliżonego do tego, jakie wywiera sam przedmiot, wraz z odpowiedniemi poruszeniami duchowemi i uczuciami. Zupełnie inny charakter posiada mapa geograficzna, plan domu, rysunek techniczny, służący do wyjaśnienia budowy jakiejś maszyny. W tych wszystkich wypadkach wywołanie czegoś podobnego do *wrażenia ogólnego*, jakie sprawia na widzu sam przedmiot (lub grupa przedmiotów), staje się rzeczą podrzędną albo też zgoła nie bierze się w rachubę — chodzi natomiast o danie zapomocą rysunku *dokładnych* wskazówek co do *wielkości*, *kształtu* i *położenia wzajemnego* wyobrażonych przedmiotów. Wyjaśnienie i rozwinięcie różnych sposobów osiągnięcia tego celu stanowi treść nauki, zwanej *geometryą wykreślną;* wspólną podstawą zaś tych wszystkich sposobów jest tak zwana *metoda rzutów*.

Zanim przejdziemy do rozważania tej metody, musimy jeszcze w kilku zasadniczych rysach umówić się z góry co do *znakowania*. Właściwe i stałe użycie odpowiednich znaków stanowi w danym dziale nauki warunek niezbędny bodaj jakiej takiej przejrzystości i jasności; sprzyja osiągnięciu jak największej ścisłości; umożliwia i znakomicie ułatwia zrozumienie najbardziej złożonych rysunków.

Oznaczać będziemy:

punkty—przez wielkie litery łacińskie: $A, B, C, \ldots$;

linie proste i krzywe — przez małe litery łacińskie, nachylone: $a, b, c, \ldots$;

płaszczyzny i wogóle powierzchnie — przez małe litery greckie: $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, czasem przez wielkie, np.: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$;

liczby (bezwzględne lub względne), wyrażające długość odcinków—przez małe litery łacińskie, stojące i odbite tłustym drukiem: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$;

kąty—o ile chodzi o ich wielkość—równie jak powierzchnie, zapomocą małych liter greckich: $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Gdy mowa o położeniu lub powstaniu jakiegoś kąta, mogą być użyte sposoby oznaczania, znane z geometryi zwyczajnej ($\sphericalangle A$, $\sphericalangle BAC$) lub symbole w rodzaju $\sphericalangle[ab]$ to jest: kąt, utworzony przez proste $a$ i $b$, $\sphericalangle[\alpha\beta]$ — kąt, utworzony przez płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$, $\sphericalangle[a\beta]$ — kąt nachylenia prostej $a$ do płaszczyzny $\beta$ i t. p.

Przynależność jakiegoś utworu geometrycznego do innego utworu będziemy oznaczali zapomocą symbolów: $\subset$ i $\supset$ (podobnych do znaków nierówności): więc $A \subset b$ oznacza, że punkt $A$ należy do prostej $b$ (czyli „jest położony na prostej $b$"); to samo wyraża wzór: $b \supset A$ (czytaj: prosta $b$ zawiera punkt $A$). Znak: $\perp$ ma wyrażać, stosownie do potrzeby: „prostopadły do" lub: „*jest* prostopadły do"; podobnież $\|$ („równoległy do" i „jest równoległy do").

Wreszcie należy się przyzwyczaić do wzorów złożonych, wyrażających wynik *łączenia* dwu lub kilku utworów albo też ich „przecięcie". Tak np.:

$[AB]$ ma oznaczać prostą, przechodzącą przez punkty $A$ i $B$ ($AB$ bez nawiasów—odcinek, ograniczony przez $A$ i $B$);

$[ABC]$—płaszczyznę, przeciągniętą przez punkty $A$, $B$ i $C$;

$[ab]$ — punkt przecięcia prostych $a$ i $b$; pł. $[ab]$—płaszczyznę, wyznaczoną przez proste $a$ i $b$;

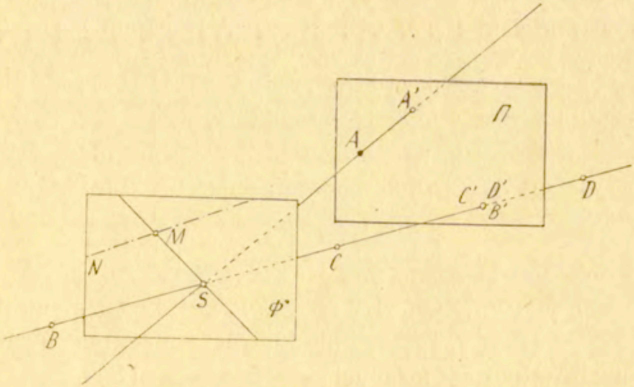
$[a\beta]$—punkt przebicia płaszczyzny $\beta$ przez prostą $a$ i t. p.

Inne znaki lub nowe połączenia znanych znaków będziemy wprowadzali w miarę potrzeby.

## ROZDZIAŁ I.

# Wiadomości początkowe o rzutach środkowych i równoległych.

§ 1. **Rzut środkowy.** Aby wyznaczyć „rzut środkowy“ jakiegoś punktu, należy obrać sobie z góry dwa elementy *stałe:* punkt, zwany *środkiem rzutu* (lub *środkiem rzutów*) i płaszczyznę, nie zawierającą tego punktu, zwaną *płaszczyzną rzutu* (lub *pl. rzutów*). Środek rzutu oznaczmy przez $S$, płaszczyznę rzutu przez $\Pi$. Prosta $[SA]$, przechodząca przez $S$ i przez jakikolwiek punkt $A$, nazywa się prostą, rzutującą[1]) punkt $A$ ze środka $S$ na płaszczyznę $\Pi$ lub krótko: prostą *rzutującą* (odpowiadającą punktowi $A$). Punkt przecięcia tej prostej z płaszczyzną $\Pi$ stanowi właśnie *rzut* punktu $A$ w danym układzie (t. j. przy danym środku rzutów i danej płaszczyźnie rzutów). Rzuty punktów będziemy oznaczali zawsze zapomocą tych samych liter, co odpowiednie punkty, z dodatkiem jednej lub więcej kresek *u góry;* w danym wypadku tedy napiszemy: $A'$.




Rys. 1.

[1]) Od czasownika: *rzutować* (fran. projeter).

Powyższe wyjaśnienie sposobu wyznaczenia rzutu punktu $A$ da się zastąpić wzorami:

$$a \equiv [SA]$$
$$A' \equiv [a\Pi]$$

($a$—prosta rzutująca)

lub jednym tylko wzorem:

$$A' \equiv \big[[SA]\,\Pi\big]$$

(który przeczytamy[1]) jak następuje: $A'$ jest to punkt przebicia płaszczyzny $\Pi$ przez prostą, wyznaczoną zapomocą punktów $A$ i $B$).

Z określenia rzutu środkowego wynikają bezpośrednio twierdzenia następujące:

1. *Każdy punkt przestrzeni*, z wyjątkiem niektórych punktów szczególnych, *posiada w danym układzie jeden określony rzut*. Istotnie: 1) przez punkty $S$ i $A$ można zawsze przeciągnąć prostą i przytem, o ile te punkty nie nakrywają się, istnieje tylko jedna taka prosta; 2) płaszczyzna rzutu $\Pi$ i prosta rzutująca $[SA]$ posiadają ogólnie pewien określony punkt wspólny i przytem tylko jeden. c. b. d. o.

Wyjątki nadarzają się wtedy, gdy jedna z dwuch przesłanek dowodu przestaje być słuszną, a więc: 1) gdy szukamy rzutu samego punktu $S$, to jest gdy punkt $A$ utożsamia się ze środkiem rzutu $S: A \equiv S$, ponieważ prosta rzutująca $[AS] \equiv [SS]$ przestaje być w takim razie określoną; 2) gdy chodzi o punkt, położony w płaszczyźnie $\Phi$, przeciągniętej przez środek rzutu i równoległej do płaszczyzny rzutów $\Pi$, np. o punkt $M$; prosta rzutująca $[SM]$ jest wtedy równoległa do $\Pi$, a więc nie może być mowy o wyznaczeniu punktu przebicia płaszczyzny $\Pi$ przez prostą $[SM]$—przynajmniej w zwykłem, elementarnem znaczeniu tych wyrazów. Jedynie gdy wprowadzamy tak zwane „punkty w nieskończoności", wypadek ten może nie być uważanym za wyjątkowy—pojęcie to jednak wygodniej będzie omówić w innem miejscu (§ 3). Płaszczyzna $\Phi$ nosi nazwę *płaszczyzny zniknienia*.

*Uwaga*. Rzecz jasna, że gdy punkt leży na płaszczyźnie rzutów, to jego rzut leży w tem samem miejscu; istotnie:

$$A' \equiv \big[[SA]\,\Pi\big] \equiv A.$$

2. *Punkty, położone na tej samej prostej, przechodzącej przez środek rzutu, posiadają ten sam rzut*, i nawzajem, dowolny punkt, położony w płaszczyźnie rzutów, może być uważany za rzut różnych punktów, leżących na prostej, przeciągniętej przez

[1]) $\equiv$ jest to znak *tożsamości*.

ten punkt i przez środek rzutu. Jest to zupełnie oczywiste: takim punktom, jak np. $B$, $C$, $D$ odpowiada wspólna prosta rzutująca $[SB]=[SC]=[SD]$, a przeto i ten sam punkt wspólny tej prostej i $\Pi$, który można nazwać równie dobrze $B'$, jak $C'$ lub $D'$.

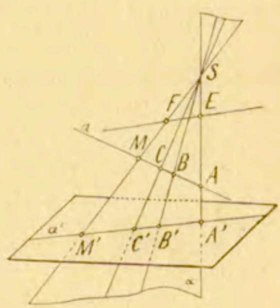
Przejdźmy teraz do utworów nieco bardziej złożonych. *Rzutem linii prostej lub krzywej nazywamy miejsce geometryczne rzutów wszystkich jej punktów.* Z tego określenia wynika

Twierdzenie 3. Rzutem środkowym prostej jest w ogólności również pewna określona *prosta*.

Istotnie, jeżeli prosta $a$ nie przechodzi przez środek rzutu ani też nie leży w płaszczyźnie $\Phi$ (zawierającej $S$ i równoległej do $\Pi$, co można oznaczyć krotko: $\Phi=$pł.$[\supset S \parallel \Pi]$), to $a$ wraz z $S$ wyznaczają pewną określoną płaszczyznę $\alpha=[aS]$, która musi przeciąć $\Pi$ wzdłuż pewnej prostej (rys. 2). Proste, rzutujące punkty $A$, $B$, $C$... prostej $a$, leżą w płaszczyźnie $\alpha$, a więc ich punkty przecięcia z $\Pi$ czyli rzuty $A'$, $B'$, $C'$... muszą leżeć na prostej przecięcia $[\Pi\alpha]$[1]. Nawzajem dowolny punkt $M'$ tej prostej może być uważany za rzut odpowiedniego punktu $M$ prostej $a$, który da się wyznaczyć podług wzoru: $M=\big[[SM']a\big]$ (t. j. $M$ jest to punkt przecięcia $SM'$ z prostą $a$, położoną w tej samej płaszczyźnie $\alpha$). Rzut $a'$ prostej $a$ nie jest to zatem nic innego, jak właśnie prosta $[\Pi\alpha]$: $a'=[\Pi\alpha]$.

c. b. d. o.

Płaszczyzna $\alpha$, przeciągnięta przez prostą $a$ i środek rzutu $S$, nazywa się płaszczyzną, rzutującą prostą $a$, lub krótko: *płaszczyzną rzutującą*. Z powyższego dowodu wynika, że w ogólności pojęcie *rzutu prostej* może być określone jeszcze w sposób następujący: *jest to prosta przecięcia płaszczyzny rzutów z odpowiednią płaszczyzną rzutującą.*



Rys. 2.

Zwróćmy uwagę na to, że jakkolwiekbyśmy wyznaczali w poszcze-

---

[1]) *Uwaga dla nauczyciela.* Omówienia co do punktów w nieskończoności prostej i jej rzutu uważam tu za zbyteczne—w razie zwrócenia przez ucznia bardziej krytycznego uwagi np. na możliwą równoległość $[SM']$ i $a$ i t. p. łatwo uzupełnić wykład w tym kierunku.

gólnych wypadkach rzuty prostych lub krzywych, zawsze, zgodnie z pierwszem określeniem (rzut linii jest to miejsce geometryczne rzutów jej punktów), zachodzi związek, dający się wyrazić w twierdzeniu:

Jeżeli punkt leży na prostej (lub krzywej), to rzut punktu leży na rzucie tej prostej (lub krzywej). Symbolicznie:

jeżeli $A \subset a$,

to $A' \subset a'$

ale bynajmniej nie nawzajem, ogólnie biorąc!

To samo się stosuje do rzutu dowolnego utworu geometrycznego (p. koniec tego §).

Jeżeli prosta leży w płaszczyźnie zniknienia $\Phi$ (zawierającej $S$ i równoległej do $\Pi$), jak np. prosta $[MN]$ na rysunku 1, to o każdym jej punkcie da się powiedzieć to samo, cośmy już omówili w uzupełnieniu twierdzenia 1-go— i cała prosta nie posiada rzutu „w odległości skończonej".

Jeżeli prosta nie jest równoległa do $\Pi$, ale przechodzi przez $S$, jak np. prosta $[SA]$ (rys. 2), to wszystkie jej punkty (tw. 2) posiadają ten sam rzut $A'$ — jedynie punkt $S$ nie posiada żadnego określonego rzutu. W tym jedynym wypadku możnaby uważać za rzut prostej jeden *punkt* $A$. *W ogólności*, rzutem prostej jest również prosta i należy pamiętać o tem dobrze, zwłaszcza gdy będziemy wprowadzali inne dane, wyznaczające prostą (t. zw. ślady).

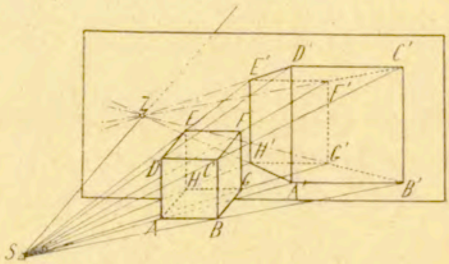
*Twierdzenie 4. Proste, położone w tej samej płaszczyźnie, przechodzącej przez środek rzutu (ale same nie przechodzące przezeń), posiadają ten sam rzut*, ponieważ mają wspólną płaszczyznę rzutującą (np. prostym $[AM]$, $[EF]$ na rys. 2 odpowiada ta sama płaszczyzna rzutująca $\alpha$ i ten sam rzut $[A'M']$ czyli $a'$).

*Uwaga.* Rzutem linii krzywej jest w ogólności również krzywa; jeżeli jednak dana krzywa czy dowolny zbiór punktów leży w płaszczyźnie $\alpha$, zawierającej środek rzutu, to rzutem rozważanego utworu geometrycznego jest cała linia przecięcia $[\alpha\, \Pi]$ lub odpowiedni zbiór punktów, do niej należących, np. jakiś jej odcinek. Jakie zastrzeżenia poczynić należy, gdy krzywa $k \supset S$?

Przypuśćmy, że mamy dwie figury płaskie np. dwa wielokąty $A_1B_1C_1\ldots$ i $A_2B_2C_2\ldots$, położone odpowiednio w płaszczyznach $\Pi_1$ i $\Pi_2$ w ten sposób, że $A_2B_2C_2\ldots$ stanowi rzut wielokąta $A_1B_1C_1\ldots$ na płaszczyznę $\Pi_2$ z jakiegoś środka $S$ — w takim razie, jak łatwo sobie uprzytomnić, figura $A_1B_1C_1\ldots$ będzie nawzajem rzutem fig. $A_2B_2C_2$ na płaszczyznę $\Pi_1$. Dwie figury płaskie, położone w ten sposób w przestrzeni, nazywają się *perspektywicznemi*, a związek wzajemny, jaki zachodzi pomiędzy nimi, nosi nazwę *perspektywiczności* lub *kolineacyi w położeniu perspektywicznem;* punkt $S$ nazywa się środkiem kolineacyi. Jeżeli $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, to figury, między któremi zachodzi taki związek, są podobne (ćw. 5).

Rzut dowolnej figury geometrycznej określimy tak samo jak rzut prostej: *rzut figury jest to miejsce geometryczne wszystkich punktów tej figury.* Jeżeli chodzi o *bryłę*, to odróżniamy w szczególności: *kontur* (czyli linię graniczną rzutu) oraz rzuty ważniejszych prostych lub krzywych, położonych na powierzchni bryły, np. krawędzi, gdy mowa o wielościanie.

Na rys. 3-im mamy rzut sześcianu, którego dwie ściany przeciwległe: *ABCD* i *EFGH* są równoległe do płaszczyzny rzutów. Stosunki, zachodzące tutaj (znaczenie punktu, w którym przecinają się rzuty [$D'E'$], [$C'F'$], [$B'G'$], [$A'H'$] i d. d.) wyjaśnimy dokładnie gdy będziemy mówili szczegółowo o rzutach prostych równoległych (§ 5 oraz ćwicz. 3).



Rys. 3.

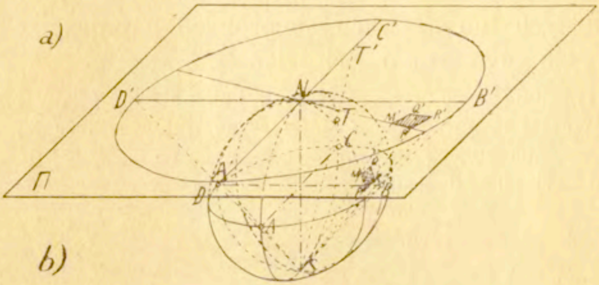
## § 2. Zastosowania teoryi rzutu środkowego.

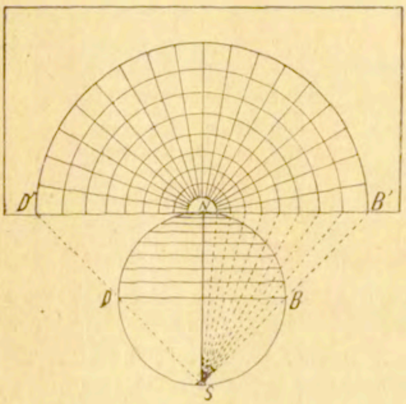
Środek rzutu nazywamy nieraz *punktem widzenia* lub *punktem ocznym,* płaszczyznę rzutu *płaszczyzną obrazu* lub *tłem,* sam rzut — *obrazem* lub *perspektywą.* Pochodzenie tych nazw jest zupełnie zrozumiałe. Wyobraźmy sobie np., że jakiś przedmiot (jak np. sześcian na rys. 3-im) jest położony pomiędzy środkiem a płaszczyzną rzutu, i umieśćmy w środku rzutu oko, patrzące na ten przedmiot. Światło, idące od rzutu w kierunku oka (ale nie dosięgające go), porusza się po tych samych prostych, a mianowicie prostych rzutujących, co i światło, dążące ku oku od samego przedmiotu. Przypuśćmy teraz, że, utrwaliwszy bodaj zapomocą głównych zarysów (p. koniec poprzedniego §) rzut na jego płaszczyźnie, usuwamy zupełnie przedmiot. Snop światła, które oko otrzymuje wtedy od rysunku, nie różni się zupełnie, jak zaznaczyliśmy, co do kierunku promieni, od snopu światła, wysyłanego poprzednio przez przedmiot; stąd wynika, że rysunek ten, jeżeli nie pod względem barwy, oświetlenia i t. d., to przynajmniej pod względem *czysto geometrycznym, przestrzennym,* może zastępować dla oka sam przedmiot, oddziaływając na *te same*[1]) miejsca siatkówki, chociażby w sposób odmienny.

Nauka o rzucie środkowym, rozważana z tego punktu widzenia, nosi nazwę teoryi perspektywy liniowej. Jest to jedna z najniezbędniejszych i najistotniejszych podstaw sztuki malarskiej.

[1]) Pomijam sprawę przystosowania oka do innej odległości.

Często potrzeba wyobrazić na płaszczyźnie nie bryłę geometryczną, lecz figurę, położoną na jakiejś *powierzchni* krzywej. Przypuśćmy np., że chodzi o takie przedstawienie czyli „odwzorowanie" na płaszczyźnie punktów, położonych na powierzchni kuli. W tym przypadku wygodnie wziąć za płaszczyznę rzutów dowolną płaszczyznę styczną do kuli, a za środek — koniec przeciwległy średnicy prostopadłej do tej płaszczyzny. W ten sposób otrzymu-




Rys. 4.

jemy tak zwany *rzut stereograficzny*. Można dowieść, iż jeżeli bierzemy ograniczoną dowolnie część powierzchni kulistej, stosunkowo *dość małą* (a więc taką, że można ją bez wielkiego błędu uważać za płaską), to rzut stereograficzny tej części posiada w przybliżeniu *taki sam* kształt — i podobieństwo jest tem dokładniejsze, im dana część jest mniejsza. Jest to własność nader ważna. Łatwo się domyśleć, że rzut stereograficzny, łącznie z odpowiedniem zmniejszeniem, używa się w geografii przy wykreślaniu map. Jeżeli np. chcemy otrzymać mapę półkuli północnej, to za środek rzutu bierzemy biegun południowy, za płaszczyznę rzutu — płaszczyznę styczną do powierzchni kuli ziemskiej w biegunie północnym. Ogólne zarysy wielkich lądów, oceanów ulegają przytem oczywiście zniekształceniu — ale poszczególne, niewielkie półwyspy, zatoki, małe kraje i t. p. mają na mapie, w ten sposób wykonanej, kształt niemal taki sam, jak w rzeczywistości. Jak nietrudno okazać, rzuty równoleżników są okręgami, rzuty południków—prostemi.

Z innych sposobów odtwarzania powierzchni kulistej wspomnę jeszcze o rzucie t. zw. gnomonicznym, otrzymywanym przy założeniu, że środkiem rzutu jest środek kuli (a płaszczyzną rzutów, jak poprzednio, płaszczyzna styczna).

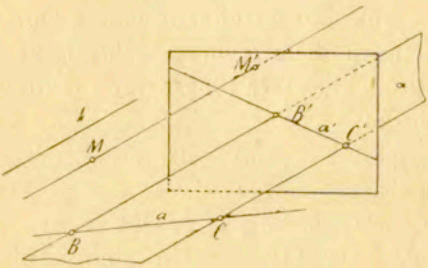
Na rys. 4 b) został pokazany sposób kreślenia siatki równoleżników i południków, zgodnie z zasadą rzutu stereograficznego.

§ 3. **Rzut równoległy**. Przypuśćmy, że środek rzutu oddala się od płaszczyzny rzutów $\Pi$ stale w tym samym kierunku — oczywiście nie równoległym do $\Pi$. W tych warunkach proste, rzutujące jakąś stałą grupę punktów, tworzą ze sobą kąty coraz mniejsze i przy dostatecznem oddaleniu środka rzutu $S$ nie będą się w jakiś uchwytny sposób różniły od prostych równoległych, posiadających dany kierunek. Jeżeli założymy, przechodząc, jak nieraz w matematyce, *do granicy*, że stają się one wreszcie istotnie i dokładnie równoległemi, posiadającemi ten kierunek, to otrzymamy tak zwany rzut *równoległy: ukośny*, jeżeli kierunek wspólny prostych rzutujących nie jest prostopadły do płaszczyzny rzutów — lub *prostokątny*, jeżeli te proste są do niej prostopadłe. Można się wyrazić, że środek rzutów „usunął się w nieskończoność“, że stanowi punkt „w nieskończoności“, punkt „idealny“, w którym się „przecinają“ wszystkie proste rzutujące, równoległe do siebie. Każdemu kierunkowi w przestrzeni odpowiada taki „punkt idealny“, stanowiący „przecięcie“ wszystkich prostych o tym kierunku. Taki sposób wyrażania się pozwala na uważanie rzutu równoległego za szczególną odmianę rzutu środkowego — będziemy jednak, dbając o jak największą jasność wyobrażeń, używali go wogóle z wielką ostrożnością. Tak np., poprzestając co do związku rzutu środkowego z równoległym na powyższem wyjaśnieniu, możemy dać określenia następujące:

Przy rzutowaniu równoległem występują dwa elementy stałe:

płaszczyzna rzutów $\Pi$ i *kierunek rzutu*, który może być dany zapomocą jakiejkolwiek prostej $k$ (nie równoległej do $\Pi$). Prosta, rzutująca punkt $M$, jest to prosta, przechodząca przez $M$ i równoległa do $k: m \equiv [\supset M \parallel k]$, rzut punktu $M$ jest to punkt przebicia płaszczyzny rzutów przez prostą rzutującą: $M' \equiv [m\Pi]$. Krócej $M' \equiv [[\supset M \parallel k]\,\Pi]$.

Jeżeli będziemy mówili jedynie o punktach i prostych zwyczajnych, właściwych (a nie o utworach w nieskończoności), to 4 twierdzenia, uzasadnione poprzednio dla rzutów środkowych, dadzą się w stosunku do rzutów równoległych sformułować w sposób jeszcze bardziej stanowczy. A mianowicie:



Rys. 5.

1. *Każdy punkt przestrzeni posiada w danym układzie jeden określony rzut.*

2. *Wszystkie punkty, położone na tej samej prostej, posiadającej kierunek, dany jako kierunek rzutu, mają ten sam rzut*—i nawzajem każdy punkt $M'$ płaszczyzny $\Pi$ może być uważany za rzut dowolnego punktu prostej $m \equiv [\supset M' \parallel k]$.

3. *Rzutem równoległym prostej jest również prosta; jedynie gdy prosta posiada kierunek, obrany za kierunek rzutu, rzut jej, zgodnie z tw. 2, jest punktem.*

4. *Wszystkie proste, położone w tej samej płaszczyźnie, równoległej do kierunku rzutu, ale same doń nie równoległe, posiadają ten sam rzut — i nawzajem rzut ten nie może odpowiadać żadnej innej prostej, t. j. żadnej prostej, nie położonej w tej płaszczyźnie.*

Dowód tw. 1-go polega jedynie na uwadze, że obie konstrukcye, zapomocą których wyznaczamy rzut ($a \equiv [\supset A \parallel k]$, $A' \equiv [a\Pi]$), posiadają w danych warunkach *zawsze* pewien wynik, ale tylko *jeden*, czyli, jak się mówi, wyznaczają go *jednoznacznie*. Dowód twierdzenia 2-go byłby niemal powtórzeniem dowodu analogicznego twierdzenia w § 1. Co do twierdzenia 3-go, należy uprzytomnić sobie, że płaszczyznę rzutującą $\alpha$ można w tym wypadku określić, jako płaszczyznę, która zawiera daną prostą i jest równoległa do kierunku rzutów; da się tedy wyznaczyć zapomocą danej prostej $a$ i prostej $[BB']$, rzutującej jakiś punkt $B$ tej prostej, ponieważ z $[BB'] \parallel k$ wynika $pl.\,[a[BB']] \parallel k$. Prosta, rzutująca *jakikolwiek* inny punkt $C$ prostej $a$, jako równoległa do $[BB']$, musi z tą prostą leżeć w jednej płaszczyźnie, a więc w płaszczyźnie $[[BB']\,C] \equiv pl.\,[[BB']\,a] \equiv \alpha$. Stąd wynika, że $C'$ musi leżeć na prostej $[\alpha\,\Pi]$, i to samo stosuje się do wszelkiego innego punktu prostej $a$ i jego rzutu. Nawzajem, podobnie jak poprzednio (§ 1, tw. 3) okażemy, że *każdy* punkt prostej $[\alpha\Pi]$ stanowi rzut jakiegoś punktu prostej $a$. Ostatecznie: $a' \equiv [\alpha\Pi]$, t. j. *rzut prostej, czyli miejsce geometryczne rzutów różnych punktów tej prostej* ($a$) *jest to prosta, utworzona jako przecięcie płaszczyzny rzutów i odpowiedniej płaszczyzny rzutującej* ($[\alpha\Pi]$). Ten sposób wyznaczenia rzutu prostej zapomocą płaszczyzny rzutującej i $\Pi$ można również uważać za samo jego *określenie* i używać go — z wyjątkiem wypadku, gdy prosta ma kierunek, obrany za kierunek rzutu — z równem prawem, jak równoważne mu określenie początkowe (rzut prostej jest to miejsce geometryczne i t. d.).

Tw. 4 nie wymaga niemal zupełnie osobnego dowodu — co do drugiej części tego twierdzenia można zauważyć tylko, że wszelka inna prosta posiada *inną* płaszczyznę rzutującą, a więc i inny rzut.

Do tw. 4-go można dołączyć uwagę co do rzutu linii krzywej i t. p., analogiczną do uwagi przy tw. 4-em w § 1. Wysłowić tę uwagę!

Rzut środkowy, z powodów wyjaśnionych powyżej (§ 2), posiada rozległe zastosowanie w sztuce malarskiej, służąc w ten sposób celom artystycznym; natomiast rzuty równoległe nadają się z wielu względów bardziej, niż tamten rodzaj rzutu, do celów naukowych. Rysunki, wyobrażające bryły lub wogóle stosunki przestrzenne w podręcznikach geometryi, stanowią przeważnie rzuty *równoległe ukośne;* to samo się stosuje do wielu illustracyi (oczywiście nie wykonanych przy pomocy fotografii!), przedstawiających przyrządy fizyczne i t. p. Zasady i metody, które rozwiniemy w dalszym ciągu, mówiąc specjalnie o rzutach równol. *prostokątnych*, stanowią podstawy rysownictwa technicznego i architektonicznego. Aczkolwiek ścisłe uzasadnienie tego faktu później nastąpi (§ 5), to jednak wspomnimy na tym miejscu, że jedną z wielkich dogodności rzutu równoległego jest okoliczność, że *rzuty* prostych *równoległych* są również *równoległe*. To znacznie ułatwia właściwe zrozumienie rysunku.

## ĆWICZENIA.

1. Prosta $a$ nie przechodzi przez środek rzutu $S$ i nie jest równoległa do płaszczyzny rzutów $\Pi$. Jaki punkt prostej $a$ nie posiada rzutu w odległości skończonej? jaki punkt rzutu $a'$ nie jest rzutem żadnego punktu właściwego (t. j. również w odległości skończonej) prostej $a$? jaki punkt prostej $a$ zbiega się ze swym własnym rzutem?

2. Dowieść, że rzut prostej $a$, równoległej do $\Pi$ i nie przechodzącej przez środek rzutu, jest równoległy do $a$. Czy istnieją wtedy punkty szczególne, omawiane w poprzedniem ćwiczeniu?

3. Dowieść, że rzuty wszystkich prostych, prostopadłych do $\Pi$, przecinają się w jednym punkcie $Z$, czyli *zbiegu* tych prostych.

*Wskazówka.* Jest to punkt przebicia płaszczyzny $\Pi$ przez prostą $m$, przechodzącą przez środek rzutu $S$ i prostopadłą do $\Pi$: $m \equiv [\supset S \perp \Pi]$.

4. Punkty $A_1$ i $A_2$ dwu figur perspektywicznych, z których każdy może być uważany za rzut środkowy drugiego, nazywamy odpowiednimi. Z dwu szeregów punktów odpowiednich składają się proste odpowiednie, z których każda może być uważana za rzut drugiej. Dowieść, że *wszystkie pary* prostych odpowiednich przecinają się na linii przecięcia płaszczyzn $\Pi_1$ i $\Pi_2$, w których są położone figury kolineacyjne, t. j. że $[[A_1B_1]\,[A_2B_2]] \subset [\Pi_1\Pi_2]$, $[[B_1C_1]\,[B_2C_2]] \subset [\Pi_1\Pi_2]$ i t. d. Prosta $[\Pi_1\Pi_2]$ nazywa się *osią kolineacyi*.

5. Dowieść, że dwie figury perspektywiczne, położone w płaszczyznach równoległych, są podobne.

*Wskazówka.* Proporcyonalność odcinków odpowiednich wynika z tego, że trójkąt $SA_1B_1$ jest podobny do trójkąta $SA_2B_2$. $\triangle SB_1C_1 \backsim \triangle SB_2C_2$ t. d. [p. ćw. 2; $S$—środek kolineacyi].

6. Jeżeli płaszczyzna obrazu ma położenie pionowe, zresztą dowolne, to jakie proste, równoległe w przestrzeni, muszą również być równoległemi na obrazie? [Odpowiedź: proste pionowe oraz takie proste poziome lub nachylone do poziomu, które są położone w płaszczyznach równoległych do pł. rzutów].

7. Dowieść, że rzutami stereograficznymi południków na płaszczyznę styczną do kuli w jednym z biegunów są proste, a równoleżników — okręgi spółśrodkowe. Jakie wogóle krzywe na powierzchni kulistej mają za rzuty linie proste?

8. Jaką część płaszczyzny rzutów, stycznej do kuli w biegunie *północnym*, zajmuje rzut stereograficzny półkuli *południowej?*

9. Przy tych samych założeniach co do środka rzutu (biegun południowy) i płaszczyzny rzutu wykreślić rzuty: a) strefy zwrotnikowej; b) strefy umiarkowanej; c) pasa kulistego, ograniczonego przez dwa dowolne równoleżniki; d) figury, ograniczonej przez dwa równoleżniki i dwa południki. (Z samą tylko siatką równoleżników i południków).

10. Narysować mapę jakiegoś kraju, np. ziem polskich, podług jakiejkolwiek mapy szczegółowej na odpowiedniej siatce równoleżników i południków, wykreślonej w tym celu zgodnie z zasadą rzutu stereograficznego.

11. Dowieść, że rzuty gnomoniczne kół wielkich są to zawsze linie proste.

12. Jaki obszar zajmuje rzut gnomoniczny dowolnej półkuli na płaszczyznę styczną w biegunie tej półkuli?

13. Wykreślić (z uwzględnieniem tylko siatki południków i równoleżników) rzuty gnomoniczne na płaszczyznę styczną do kuli w biegunie północnym: a) strefy biegunowej północnej lub południowej; b) strefy umiarkowanej półn. lub połudn.; c) pasa kulistego, ograniczonego przez dwa równoleżniki; d) dowolnego dwukąta lub trójkąta kulistego (t. j. figury, ograniczonej przez 2 lub 3 łuki kół wielkich). Zauważyć, jakie części powierzchni kulistej posiadają te same rzuty — czy podobne nakrywanie się rzutów zachodzi, gdy mamy do czynienia z rzutem stereograficznym?

14 Ćw. 10 z zamianą rzutu stereograficznego na gnomoniczny.

15. Obliczyć stosunek (zależny od szerokości geograficznej) promienia rzutu stereograficznego dowolnego równoleżnika na płaszczyznę styczną w którymś z biegunów do promienia samego równoleżnika.

16. To samo dla rzutu gnomonicznego.

17. Co się dzieje z rzutem pojedyńczego punktu lub jakiejkolwiek stałej figury, gdy środek rzutu oddala się nieograniczenie w kierunku *równoległym* do płaszczyzny rzutów?

18. Mając w dwu stałych płaszczyznach figury perspektywiczne, z których jedną uważamy za stałą, a drugą za zależną od niej, oddalamy nieograniczenie środek kolineacyi, w kierunku, nie równoległym do płaszczyzny żadnej z obu figur; jak można określić związek, pochodzący pomiędzy figurą stałą a figurą zmienną w *jej położeniu granicznem?* Czy twierdzenia, podane w ćw. 4 i 5, nie ulegają w stosunku do takiej pary figur żadnej zmianie lub uzupełnieniu?

19. Na danym rysunku odróżnić rzut środkowy jakiejś znanej bryły geometrycznej lub przyrządu od rzutu równoległego ukośnego tegoż przedmiotu.

## ROZDZIAŁ II.

# Własności rzutów prostokątnych.

§ 4. **Rzut prostokątny.** Wszystko, cośmy mówili w § 3 o rzucie równoległym wogóle, stosuje się oczywiście do rzutu prostokątnego, jako jednej z jego odmian. W tym szczególnym wypadku należy obrać sobie z góry tylko *jeden* element stały: płaszczyznę rzutów $\Pi$; kierunek rzutu, prostopadły do niej, jest już przez to samo najzupełniej wyznaczony—nie może być dowolnym. Zgodnie z określeniami ogólnemi, prostą, rzutującą jakiś punkt $A$, jest w tym razie prostopadła do płaszczyzny rzutów, przeciągnięta przez ten punkt, i możemy się wyrazić, jak się to czyni zwykle w podręcznikach elementarnych, w sposób następujący: *rzut prostokątny punktu na płaszczyznę jest to spodek prostopadłej do tej płaszczyzny, opuszczonej z tego punktu*

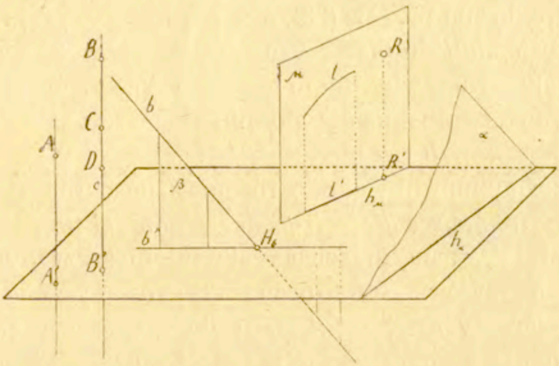
$$A' \equiv [\supset A \perp \Pi].$$

Wprowadźmy jeszcze nowe pojęcia, określając tak zwany ślad prostej i ślad płaszczyzny. *Ślad prostej* na jakiejś płaszczyźnie jest to *punkt* przebicia tej płaszczyzny przez prostą; o ile będziemy używali słowa „ślad“ bez żadnych omówień, będziemy przez to rozumieli ślad na *płaszczyźnie rzutów*. Podobnież *śladem płaszczyzny* na innej płaszczyźnie nazywamy linię przecięcia tych płaszczyzn; w szczególności może chodzić o prostą przecięcia się danej płaszczyzny $\alpha$ z płaszczyzną rzutów, i w takim razie możemy używać słów: ślad płaszczyzny bez bliższych omówień. Jeżeli oznaczymy ślad prostej $b$ (na pł. $\Pi$) przez $H_b$, a ślad płaszczyzny $\alpha$ przez $h_\alpha$, to można napisać:

$$H_b \equiv [b\Pi]; \qquad h_\alpha \equiv [\alpha\,\Pi].$$

Oczywiście: $H_b \equiv H_b'$.

Cztery twierdzenia zasadnicze, podane w § 3, możemy sformułować teraz w zastosowaniu do rzutów prostokątnych w sposób następujący (zawsze z tem zastrzeżeniem, że mówimy jedynie o punktach i prostych w odległości skończonej, „właściwych").




Rys. 6.

1. *Każdy punkt przestrzeni posiada na danej płaszczyźnie jeden ściśle określony rzut prostokątny.*

2. *Wszystkie punkty, położone na tej samej prostej, prostopadłej do płaszczyzny rzutów, mają za rzut ślad tej prostej (na pł. rzutów).* Np. rzuty wszystkich punktów prostej $c$ (rys. 6) nakrywają się w punkcie $B' \equiv [c\,\Pi]$.

Nawzajem każdy punkt $B'$ płaszczyzny $\Pi$ może być uważany za rzut dowolnego punktu prostej $c\,|||\,[\supset B' \perp \Pi]$.

3. *Rzutem prostokątnym prostej jest również prosta;* jedynie gdy prosta jest prostopadła do płaszczyzny rzutów, rzut jej jest punktem; rzut i ślad prostej stanowią wtedy to samo. Np. rzut prostej $c : c' \equiv B'$.

4. *Wszystkie proste, położone w tej samej płaszczyźnie* $\mu$, *prostopadłej do płaszczyzny rzutów, ale same do niej nie prostopadłe, mają za rzut ślad tej płaszczyzny* $\mu$ *na płaszczyźnie — i nawzajem rzut ten nie może odpowiadać żadnej innej prostej.*

Ogólniej:

4 a. *Rzuty wszystkich punktów, prostych i krzywych, położonych w tej samej płaszczyźnie* $\mu$, *prostopadłej do płaszczyzny rzutów, należą do śladu* $h_\mu$ *płaszczyzny* $\mu$, *jakoto np. rzut* $l'$ *krzywej* $l$, *rzut* $R'$ *punktu* $R$ *i t. d.*

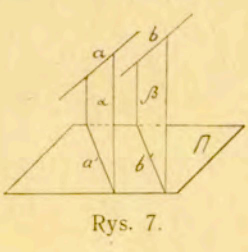
Nawzajem: każdy punkt położony na $h_\mu \equiv [\mu \Pi]$, może być uważany za rzut jedynie takiego punktu, który należy do $\mu$. Udowodnić!

Co do twierdzenia 3-go, przypomnimy, że płaszczyzną, rzutującą jakąś prostą $b$, jest płaszczyzna $\beta$, przeciągnięta przez tę prostą i którąkolwiek z prostych rzutujących, odpowiadających jej punktom (p. dowód tw. 3 w § 3), a więc płaszczyzna, przeciągnięta przez $b$ *prostopadle* do płaszczyzny rzutów (przy tem wnioskowaniu opieramy się na twierdzeniu geometrycznem: płaszczyzna, zawierająca prostą, prostopadłą do innej płaszczyzny, jest do niej prostopadła): $\beta \equiv [\supset b \perp \Pi]$.

To, cośmy mówili w § 3 o równoważności określeń: 1) *rzut prostej jest to miejsce geometryczne rzutów jej punktów;* 2) rzut prostej jest to prosta przecięcia się jej płaszczyzny rzutującej z płaszczyzną rzutów — lub krócej: *rzut prostej jest to ślad odpowiedniej płaszczyzny rzutującej* (o ile ta płaszczyzna jest określona!)—nie ulega tutaj oczywiście żadnej zmianie. W związku z temi określeniami pozostają orzeczenia: A) *Rzut punktu, położonego na prostej, należy do rzutu prostej* (p. § 2 po tw. 3): z $A \subset a$ wynika $A' \subset a'$. B) *Rzutem odcinka prostej jest również odcinek, ograniczony przez rzuty końców danego odcinka: $(AB)' \equiv A'B'$.*

*Twierdzenie 5. Rzut prostej równoległej do płaszczyzny rzutów jest równoległy do samej prostej* — jest słuszne zarówno w zastosowaniu do rzutu prostokątnego, jak i do innych rodzajów rzutu (p. wyżej ćw. 2). Dowód ogólny polega tylko na zastosowaniu znanego twierdzenia stereometrycznego, orzekającego, że płaszczyzna (w danym razie płaszczyzna rzutująca $\alpha$), zawierająca prostą ($a$) równoległą do innej płaszczyzny (pł. rzutów $\Pi$), przecina ją podług prostej, równoległej do tamtej prostej: $[\alpha \Pi] \parallel a$, a że $[\alpha \Pi] \equiv a'$, a więc $a' \parallel a$. c. b. d. a.

§ 5. **Rzuty dwu prostych w różnych położeniach wzajemnych.** *Twierdzenie 1. Proste równoległe posiadają rzuty równoległe.* Istotnie, płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$, rzutujące obie proste, są równoległe, jako wyznaczone przez pary prostych odpowiednio równoległych: $a$ i $[AA']$ ($[AA']$—prosta, rzutująca dowolny punkt $A$ prostej $a$) oraz $b$ i $[BB']$ ($\equiv [\subset B \perp \Pi]$; $B$ — dowolny punkt prostej $b$) — z $a \parallel b$ i $[AA'] \parallel [BB']$ wynika pł. $[a[AA']] \parallel$ pł. $[b[BB']]$, czyli $\alpha \parallel \beta$. W ta-



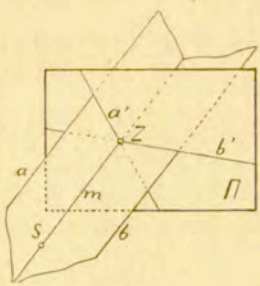
Rys. 7.

kim razie linie przecięcia tych płaszczyzn z płaszczyzną $\Pi$ czyli rzuty $a' = [\alpha\Pi]$ i $b' = [\beta\Pi]$. muszą być również równoległe. (Pomijamy wypadek, w którym nie można wyznaczyć płaszczyzn rzutujących, co zachodzi gdy $a \perp \Pi$, $b \perp \Pi$; w takim razie $a'$ i $b'$ są to punkty, i o równoległości lub nierównoległości rzutów wogóle nie może być nawet mowy).

Twierdzenie powyższe jest słuszne również w zastosowaniu do rzutów równoległych ukośnych: dowód będzie zupełnie taki sam, z tą różnicą, że $[AA']$ i $[BB']$ nie są w tym wypadku prostopadłe do $\Pi$, co w dowodzie nie odgrywa żadnej roli. Natomiast rzuty środkowe dwu prostych równoległych przeważnie nie są równoległe — równoległość zachodzi wtedy, gdy obie proste $a$ i $b$ są równoległe do płaszczyzny rzutów. Wtedy podług tw. 5 z poprzedniego §-fu $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, a że mamy $a \parallel b$, więc i $a' \parallel b'$. Co do innych wypadków można wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Rzuty dwu prostych, równoległych względem siebie, ale nie równoległych do płaszczyzny rzutów, przecinają się w punkcie, stanowiącym ślad prostej o tym samym kierunku, przechodzącej przez środek rzutu $S$.

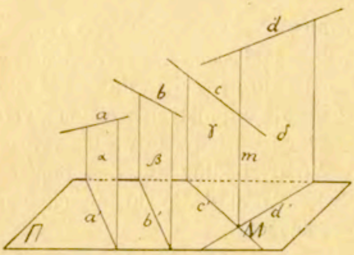
Istotnie, weźmy $a \parallel b$ i oznaczmy przez $m$ prostą, zawierającą $S$ $(m \supset S)$ i równoległą do $a$: $\parallel a \parallel b$. Rzecz jasna, że płaszczyzna rzutująca $\alpha \equiv [aS]$ zawiera prostą $m$, gdyż inaczej przez punkt $S$ możnaby było przesunąć w pł. $\alpha$ inną równoległą do $a$; podobnież $\beta \equiv [bS]$ zawiera prostą $m$. Stąd: $m$ należy do $\alpha$ i $\beta$ czyli $m \equiv [\alpha\beta]$, i ślad $Z$ prostej $m$ na płaszczyźnie rzutów $\Pi$ należy do $\alpha$, $\beta$ i $\Pi$. Z tego, że ~~$m$~~ $Z$ należy jednocześnie do $\alpha$ i $\Pi$, wynika, że ~~$m$~~ $Z$ należy do $a' \equiv [\alpha\Pi]$; podobnież ~~$m$~~ $Z$ należy do $b' \equiv [\beta\Pi]$. A więc $[a'b'] \equiv Z$, a że punkt $Z$ istnieje w odległości skończonej, zgodnie z założeniem, że kierunek prostych $a$, $b$ i $m$ nie jest równoległy do $\Pi$, przeto twierdzenie jest dowiedzione. Punkt $Z$ jest tak zwanym ***śladem zbiegu*** lub po prostu: ***zbiegiem*** wszystkich prostych, posiadających w przestrzeni ten sam kierunek, co np. prosta $a$. Każdemu kierunkowi, nie równoległemu do $\Pi$, w przestrzeni odpowiada w ten sposób określony punkt płaszczyzny $\Pi$. Zgodnie z tem, rzuty wszystkich krawędzi sześcianu ($DE$, $CF$, $BG$, $AH$), prostopadłych do płaszczyzny rzutów (rys. 3), muszą się przecinać w punkcie $Z$, w którym płaszczyznę $\Pi$ przebija prosta o tym samym kierunku, t. j. prostopadła do $\Pi$, przeciągnięta przez punkt $S$ (ten przypadek szczególny został podany osobno do rozważenia w ćw. 3 rozdz. I). Pojęcie zbiegu prostych o tym samym kierunku posiada ważne znaczenie w perspektywie malarskiej.



Rys. 8.

Twierdzenie o równoległości rzutów prostokątnych prostych równoległych można odwrócić w taki sposób: Jeżeli rzuty dwu prostych są równoległe, to te proste posiadają równoległe płaszczyzny rzutujące (ale same niekoniecznie są równoległe!) Zgodnie z tem odwróceniem możemy wypowiedzieć:

*Twierdzenie 2. Dwie proste skośne mogą posiadać: a) rzuty równoległe, jeżeli ich płaszczyzny rzutujące są równoległe;*



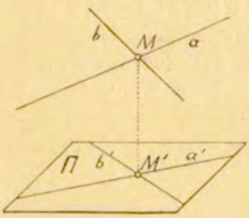

Rys. 9.

(z $\alpha \parallel \beta$ wynika, że $[\alpha\Pi] \parallel [\beta\Pi]$ czyli $a' \parallel b'$, choćby same proste $a$ i $b$ nie były równoległe).

*b) rzuty przecinające się, jeżeli płaszczyzny rzutujące nie są równoległe.*

Istotnie, w takim razie istnieje prosta $m \equiv [\gamma\delta]$ t. j. linia przecięcia tych płaszczyzn, i punkt $M \equiv [m\Pi]$ należy do $\gamma$ i do $\delta$, a że należy również do $\Pi$, więc należy do $c' \equiv [\gamma\Pi]$ i do $d' \equiv [\delta\Pi]$; $c'$ i $d'$ przecinają się w $M$ (p. rysunek 9).

*Twierdzenie 3. Rzuty dwu prostych przecinających się przecinają się w punkcie, stanowiącym rzut punktu przecięcia samych prostych.*




Rys. 10.

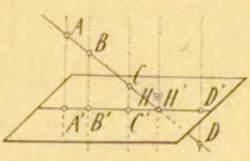
Oznaczmy proste, jak poprzednio, przez $a$ i $b$, ich punkt przecięcia — przez $M$: $[ab] \equiv M$; zgodnie z określeniem rzutu prostej ze związku $M \subset a$ (t. j. punkt $M$ należy do prostej $A$) wynika:

$$M' \subset a'$$

podobnież $\quad M \subset b,$

więc $\quad M' \subset b'.$

Ostatecznie: $\quad M' \equiv [a'b'].$ c. b. d. o.




Rys. 11.

§ 6. **Związki miarowe**. *I. Odcinki.* Weźmy na jakiejś prostej dowolny szereg punktów: $A$, $B$, $C$, $H$, $D$ i t. d. i zestawmy go z szeregiem odpowiednich rzutów $A'$, $B'$, $C'$, $H'$, $D'$ i t. d. Podług znanego twierdzenia planimetrycznego o dwu prostych, przeciętych szeregiem równoległych, mamy:

(3) $\quad AB : BC : CH : HD : \ldots . = A'B' : B'C' : C'H' : H'D' \ldots .;$

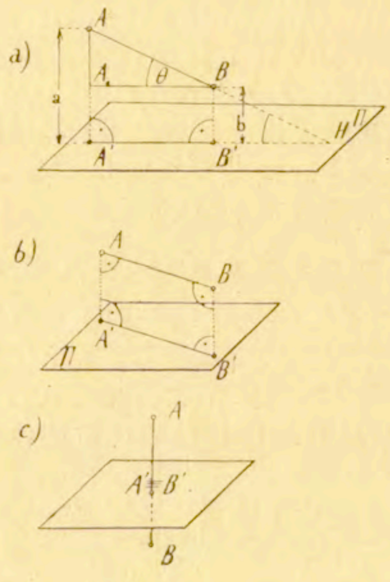
czyli: *rzuty punktów, położonych na jakimś odcinku (np. AD), dzielą rzut tego odcinka (A'D') w takim samym stosunku, w jakim* *same punkty dzielą odcinek* (w szczególności rzuty części równych są równe i t. d.).

Ten sam związek możemy wyrazić w inny sposób, pisząc:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'H'}{CH} = \frac{H'D'}{HD} = \ldots . \tag{2}$$

Widzimy stąd, że stosunek rzutu dowolnego odcinka jakiejś prostej do samego odcinka jest wielkością *stałą* dla tej prostej.

*Uwaga.* Mając szereg punktów [1]) i szereg ich rzutów, możemy, jak się mówi, „podporządkować je sobie“, uważając za punkty, odpowiadające sobie wzajemnie w tem podporządkowaniu, każdy punkt i jego rzut, a więc tak, aby punkt $A$ tworzył parę punktów odpowiednich z punktem $A'$, punkt $B$ z $B'$ i t. d. Jeżeli odległości punktów odpowiednich dwu podporządkowanych sobie szeregów są proporcyonalne, to szeregi te nazywamy *podobnymi* — przeto szereg punktów jakiejś prostej i szereg odpowiednich rzutów, jako spełniające ten warunek, wyrażony właśnie przez wzór (2), są podobne. Łatwo zdać sobie sprawę, że to samo stosuje się wogóle do rzutów *równoległych* — natomiast szereg punktów prostej i szereg odpowiadających im rzutów *środkowych nie są* w ogólności *podobne*—chyba że prosta jest równoległa do płaszczyzny rzutów. Dlatego np. na obrazie artystycznym stosunek dwu odcinków tej samej prostej nie jest ogólnie taki sam, jak w rzeczywistości: odcinek, więcej oddalony od oka, „wydaje się“ mniejszym, niż taki sam odcinek, położony bliżej i t. d. Związek, ogólniejszy niż podobieństwo, który istnieje pomiędzy szeregiem punktów z szeregiem ich rzutów środkowych lub równoległych, nazywa się *jednokreślnością*, a szeregi takie — *szeregami jednokreślnymi*.




Rys. 12.

---

[1]) Nazwa „szereg punktów“ oznacza w geometryi rzutowej zbiór *wszystkich* punktów, położonych na jednej prostej — na początku tego § użyliśmy tego terminu w znaczeniu mniej ścisłem, mówiąc o kilku tylko, zresztą dowolnych, punktach prostej.

Wykładnik stałego stosunku rzutu odcinka prostej do samego odcinka nazwiemy *spółczynnikiem skrócenia* tej prostej.

Przypuśćmy, że odcinek $AB$ (rys. 12 a) nie jest równoległy do płaszczyzny rzutów $\Pi$. Ponieważ $[AA'] \perp \Pi$ i $[BB'] \perp \Pi$, więc $[AA'] \perp [A'B']$, $[BB'] \perp [A'B']$ i punkty $A$, $A'$, $B'$, $B$ stanowią wierzchołki trapezu prostokątnego (w którym wyróżniliśmy na rysunku kąty proste zapomocą znaku $\urcorner$), wprowadzonego w tym celu). Kreśląc $[A_0B] \parallel [A'B']$, dzielimy ten trapez na prostokąt $A_0A'B'B$, w którym $A_0B = A'B'$, i na trójkąt prostokątny $A_0BA$. Stąd wynika, że odcinek $A_0B$ (przyprostokątna) jest mniejszy niż $AB$ (przeciwprostokątna), a więc również $A'B' < AB$, i spółczynnik skrócenia $\frac{A'B'}{AB} < 1$. Oznaczmy $\sphericalangle ABA_0$ przez $\theta$; z powodu równoległości $B'A'$ i $A_0B$ $\sphericalangle BHB' = \sphericalangle ABA_0 = \theta$, a więc $\theta$ stanowi kąt (ostry) pomiędzy prostą $[AB]$ a jej rzutem czyli tak zwany *kąt nachylenia prostej do płaszczyzny $\Pi$*. Gdy zmieniamy kąt $\theta$, t. j. nachylenie prostej $[AB]$ do płaszczyzny rzutów, pozostawiając bez zmiany długość odcinka $AB$, to przyprostokątna $A_0B$ musi się również zmieniać, a wraz z nią stosunek $\frac{A_0B}{AB} = \frac{A'B'}{AB}$; gdy poruszamy prostą $[AB]$ w taki sposób, by kąt $\theta$ nie uległ zmianie, $\triangle A_0BA$ nie ulega również żadnej zmianie, a więc i stosunek $\frac{A'B'}{AB}$ zachowuje stałą wielkość. Przeto ów stosunek, równy podług wzoru (2) stosunkowi rzutu wszelkiego innego odcinka tej samej prostej do długości odcinka, i wyrażający spółczynnik skrócenia, zależy jedynie od kąta nachylenia prostej do płaszczyzny rzutów, jest funkcyą jednej zmiennej $\theta$. Funkcya taka (określana zwykle jako „stosunek przyprostokątnej, do której przylega kąt ostry $\theta$, do przeciwprostokątnej“) nosi w trygonometryi nazwę *dostawy* czyli *cosinusa*; oznaczamy ją przez cos:

$$\frac{A'B'}{AB} = \cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Gdy $[AB] \parallel \Pi$, to musi być również $[AB] \parallel [A'B']$, i trapez $AA'B'B$ przechodzi w prostokąt: $A'B' = AB$, więc spółczynnik skrócenia $\frac{A'B'}{AB} = 1$ [1]).

---

[1]) To samo się stosuje do rzutów równoległych, z tą jedynie różnicą, że $AA'B'B$ jest wtedy równoległobokiem ukośnym.

Pozostaje jeszcze przypadek, gdy $[AC] \perp \Pi$ (rys. 12c). Jak wiemy (§ 4, tw. 3), w takim razie $A' \equiv B' \equiv \ldots$, i $A'B' = 0$, więc: $\frac{A'B'}{AB} = 0$.

Wzór:

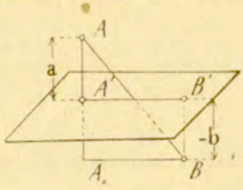
*Spółczynnik skrócenia prostej = dostawie kąta nachylenia tej prostej do $\Pi$*

czyli:
$$\frac{A'B'}{AB} = \cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

może być stosowany do wszystkich trzech przypadków, ponieważ funkcyi $\cos\theta$, zgodnie z jej pochodzeniem, przypisujemy wartość, równą 0, gdy $\theta = 90^0$ (trzeci przypadek), a równą 1, gdy $\theta = 0$ (drugi przypadek).

*Uwaga:* Stosunek rzutu ukośnego lub środkowego odcinka do samego odcinka może być zarówno mniejszym od jedności, jak równym lub większym (Jeżeli $\frac{A'B'}{AB} > 1$, to nazwiemy ten stosunek *spółczynnikiem wydłużenia*).

Wróćmy jeszcze do rys. 12a. Widzimy, że odcinek $AB$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego jedną przyprostokątną jest odcinek $A_0B$, równy rzutowi $A'B'$ danego odcinka, a drugą $A_0A = A'A - A'A_0 = A'A - B'B$, t. j. różnica odległości końców odcinka od płaszczyzny rzutów. Uważajmy odległości punktów przestrzeni od płaszczyzny rzutów za dodatnie, gdy badane punkty leżą z jednej strony płaszczyzny, np. z góry, a za ujemne, gdy leżą z drugiej strony, np. z dołu, i przypuśćmy, że mamy do czynienia z odcinkiem $AB$, przebijającym płaszczyznę rzutów (rys. 13). W takim razie odległość $\mathsf{a}$ punktu $A$ od $\Pi$ jest dodatnia, $= A'A$, a odległość $\mathsf{b}$ punktu $B$ od $\Pi$ jest ujemna: $\mathsf{b} = -BB'$. $AB$ jest przyprostokątną trójkąta $AA_0B$, którego jedna przyprostokątna $A_0B$ równa się $A'B'$, a druga



Rys. 13.

$$A_0A = A_0A' + A'A = A'A + BB' =$$
$$= \mathsf{a} + (-\mathsf{b}) = \mathsf{a} - \mathsf{b}.$$

Ostatecznie mamy zawsze, niezależnie od znaków odległości $\mathsf{a}$ i $\mathsf{b}$:

$$AB = \sqrt{A'B'^2 + (\mathsf{a} - \mathsf{b})^2} \qquad (4)$$

czyli inaczej:

[A] *Odcinek w jego rzeczywistej długości możemy otrzymać jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna równa się rzutowi odcinka, a druga ma za miarę wartość bezwzględną różnicy liczb dodatnich lub ujemnych, wyrażających odległości końców odcinka od płaszczyzny rzutów.*

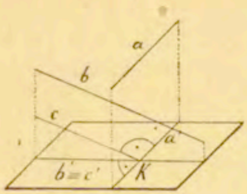
Gdy pr. $[AB]$ staje się równoległą lub prostopadłą do $\Pi$, omawiany trójkąt, we właściwem znaczeniu tego słowa, przestaje istnieć. Wzór (4) jest jednak i wówczas słuszny. Roztrząsnąć samodzielnie te przypadki!

*II. Kąty.* Związek pomiędzy wielkością kąta a wielkością *rzutu* tegoż kąta jest bardziej złożony, niż zależność rzutu odcinka od samego odcinka. Ten sam kąt może być w rzucie prostokątnym, zależnie od położenia jego ramion, zmniejszony, powiększony lub pozostać bez zmiany.

Nie rozważając tego zagadnienia w ogólnej postaci, zwrócimy uwagę np. na wypadek, gdy kąt jest położony w płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny rzutów. W takim razie (§ 4 tw. 4 a) rzuty obu ramion kąta należą do śladu tej płaszczyzny i stosownie do tego, czy posiadają ten sam kierunek czy też kierunki przeciwne, tworzą ze sobą kąt, równy zeru lub kąt półpełny. Występuje tu tedy albo „nieskończone zmniejszenie“ albo pewne powiększenie (o ile dany kąt jest ostry lub rozwarty).

Wielką wagę, że względu na zastosowania, posiada twierdzenie następujące, orzekające, kiedy rzut kąta prostego musi być również kątem prostym:

*Jeżeli dwie proste (przecinające się lub skośne) posiadają kierunki prostopadłe i jedna z nich jest równoległa do płaszczyzny rzutów (lub leży w niej), to rzuty ich przecinają się pod kątem prostym.*




Rys. 14.

Istotnie, weźmy dwie proste $a$ ($\parallel \Pi$) i $b$ o kierunkach prostopadłych (rys. 15) i przeciągnijmy jeszcze przez $K \equiv [a'b']$ prostą pomocniczą $c \parallel b$. W takim razie $c' \equiv b'$, ponieważ te dwie proste są równoległe, jako rzuty prostych równoległych (§ 5), i przechodzą przez ten sam punkt $K$, z drugiej strony prosta $a'$, jako linia przecięcia płaszczyzny rzutującej $\alpha$, która zawiera $a \parallel \Pi$, z płaszczyzną $\Pi$, jest równoległa do $a$ (lub $\equiv a$, o ile $a \subset \Pi$). Założenie, że kierunki prostych $a$ i $b$ są do siebie prostopadłe, oznacza właśnie, że wszelkie dwie proste, takie np. jak $a'$ i $c$, przecinające się w jakimś punkcie i odpowiednio równoległe do $a$

i $b$, tworzą kąty proste. Z prostopadłości pochyłej $c$ do prostej $a'$, położonej w płaszczyźnie $\Pi$, wynika, na mocy t. zw. twierdzenia o trzech prostopadłych, że prosta $a'$ jest również prostopadła do rzutu pochyłej $c' \equiv b'$. Więc ostatecznie $a' \perp b'$.

Używając twierdzenia odwrotnego względem „twierdzenia o trzech prostopadłych", dowieść możemy nawzajem, że *jeżeli rzuty dwu prostych są do siebie prostopadłe, a przytem jedna z nich jest równoległa do płaszczyzny rzutów (lub w szczególności leży w niej), to te proste posiadają kierunki prostopadłe*.

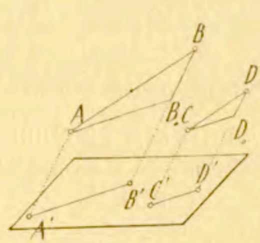
W ćwiczeniach 12-m i 13-m w końcu tego rozdziału zostały jeszcze podane przykłady powiększenia się lub zmniejszenia kąta w rzucie prostokątnym, związane poniekąd z powyższem twierdzeniem.

*III.* W jednym przypadku możemy być zawsze pewni, że wielkość odcinków i kątów nie ulega w rzucie żadnej zmianie: mianowicie wtedy, gdy mamy do czynienia z figurą, położoną w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów.

*Rzut prostokątny (i wogóle równoległy) figury, położonej w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, równa się samej figurze.*

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że odcinek, łączący dwa *dowolne* punkty $A$ i $B$, należące do figury, równa się w tym przypadku swemu rzutowi, jako równoległy do płaszczyzny rzutów (§ 6, przyp. 2) — a więc o jakąkolwiekby figurę i jej rzut chodziło, mamy zawsze do rozporządzenia dostateczną liczbę warunków równości. W szczególności każdy *kąt* równa się swemu rzutowi, ponieważ można uważać te kąty za należące odpowiednio do trójkątów równych.

§ 7. **Pojęcie o metodzie aksonometrycznej**. Jak już zaznaczaliśmy parokrotnie (§ 3, § 5), rzuty równoległe, prostokątne czy ukośne, dwu prostych równoległych, są równoległe. Łatwo również uzasadnić wyraźnie, że przy danym kierunku rzutu *skrócenie lub wydłużenie odcinka w rzucie zależy tylko od jego kierunku*, tak samo, jak w tym szczególnym przypadku, gdy mamy do czynienia z rzutem prostokątnym. Istotnie, jeżeli $[AB] \parallel [CD]$ lub $[AB] \equiv [CD]$, to z podobieństwa trójkątów $AB_0B$ i $CD_0D$, w których $[AB_0] \parallel [A'B']$, $[CD_0] \parallel [C'D']$), mamy zawsze




Rys. 15.

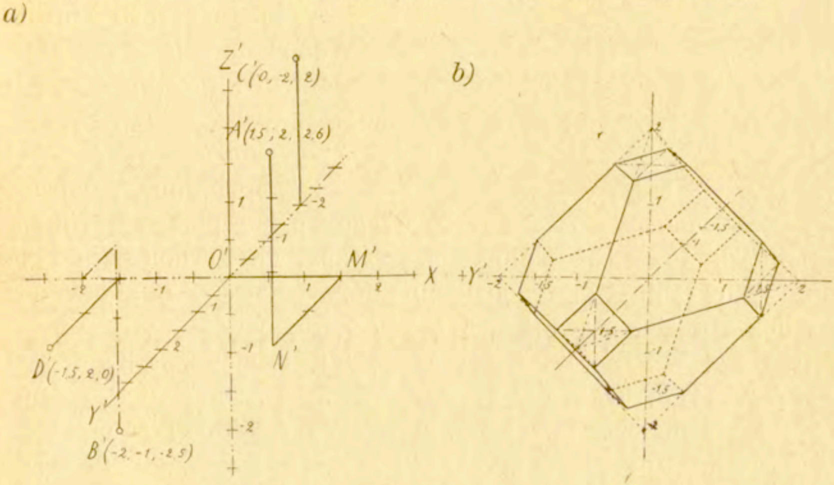
$$\frac{AB_0}{AB} = \frac{CD_0}{CD} \quad \text{czyli} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}.$$

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy w przestrzeni trzy proste [$OX$], [$OY$], [$OZ$], prostopadłe do siebie wzajemnie, na których odróżniamy „zwroty“ czyli kierunki przebiegu *dodatnie*, np. od $O$ ku $X$, od $O$ ku $Y$, od $O$ ku $Z$ i przeciwne, *ujemne*. Wszelki punkt $A$ przestrzeni, nie leżący w żadnej z płaszczyzn [$XOY$], [$YOZ$], [$ZOX$], może być uważany za koniec linii łamanej $OMNA$, której *pierwszy* bok wychodzi z punktu $O$ i przystaje do [$OX$], *drugi*, $MN$, jest równoległy do [$OY$], a *trzeci* $NA$ jest || [$OZ$]. Mierząc odcinki $OM$, $MN$, $NA$ i zaopatrując otrzymane liczby w znak + lub —, zależnie od tego, czy punkt, przesuwający się po łamanej $OMNA$ od $O$ ku $A$, przebiega odpowiedni odcinek w zwrocie dodatnim czy ujemnym, otrzymujemy t. zw. „spółrzędne x, y, z punktu $A$ w układzie prostokątnym osi [$OX$], [$OY$], $OZ$]“. Rzecz się jeszcze upraszcza, gdy punkt $A$ należy do którejś z płaszczyzn rzutów: w takim razie jeden z odcinków łamanej, o wskazanym typie, łączącej go z „początkiem układu“ $O$, staje się punktem, odpowiednia spółrzędna staje się zerem. Gdy punkt leży na którejś z „osi spółrzędnych“, [$OX$], [$OY$] lub [$OZ$], łamana przechodzi w jeden odcinek, przystający do tej osi, więc dwie ze spółrzędnych stają się równe zeru. Punkt wyznacza w zupełności swe trzy spółrzędne i nawzajem jest przez nie wyznaczony. Przypuśćmy teraz, że wykreślamy rzut równoległy ukośny układu [$OXYZ$] na płaszczyznę $\Pi$, równoległą do płaszczyzny [$OXZ$]. Z powodu, że [$OX$] || $\Pi$ i [$OZ$] || $\Pi$, rzut [$O'X'$] $\perp$ [$O'Z'$], i wszelki odcinek, posiadający kierunek [$OX$] lub [$OZ$], nie ulega żadnemu skróceniu ani powiększeniu. Prosta [$OY$] może otrzymać w rzucie *dowolny* kierunek, a wszelki odcinek tej prostej może uledz dowolnemu zmniejszeniu lub powiększeniu; do każdego kierunku [$O'Y'$] i każdego spółczynnika skrócenia lub wydłużenia da się dobrać określony *kierunek rzutu*, od którego zależą tamte czynniki. W tym podręczniku nadajemy spółczynnikowi skrócenia odcinków o kierunku [$OY$] wartość $\frac{2}{3}$[1], a kątowi pomiędzy kierunkiem dodatnim [$O'Y'$] a kierunkami dodatnimi [$O'X'$] i [$O'Z'$] wartość $= 135°$. Jednostce, zapomocą której mierzymy proste w przestrzeni i odcinki osi [$O'X'$], [$O'Z'$], odpowiada na rzucie [$O'Y'$] inna jednostka, równa $\frac{2}{3}$ tamtej jednostki. Zwrotom dodatnim i ujemnym każdej osi w przestrzeni odpowiadają zwroty dodatnie i ujemne rzutów

[1]) Lub, w pewnych przypadkach, $\frac{1}{2}$.

$[O'X']$, $[O'Y']$, $[O'Z']$. Aby wyznaczyć położenie rzutu $A'$ punktu $A$ o wiadomych spółrzędnych, należy wykreślić rzut $O'M'N'A'$ odpowiedniej linii łamanej $OMNA$, o bokach odpowiednio: przystającym do $[O'X']$, równoległych lub przystających do $[O'Y']$, $[O'Z']$, posiadających odpowiednie zwroty i zawierających tyleż *odpowiednich* jednostek miary, co boki linii łamanej w przestrzeni — a więc o bokach, wyrażonych co do wielkości i znaku przez spółrzędne. Szczegółowe rozwinięcie takiego sposobu kreślenia rzutów w związku z rzutami układu prostokątnego trzech osi stanowi treść części geometryi wykreślnej, zwanej *aksonometryą*. Używamy tej metody np. w krystalografii: zresztą zasadnicza jej myśl bywa stosowana nieraz bez wymieniania odpowiednich terminów specyalnych.

Na rys. 16a zostały wyznaczone rzuty: punktu $A$ (*1,5*; *2*; *2,6*), t. j. o spółrzędnych: *1,5 cm.*, *2 cm.*, *2,6 cm.*, punktu $B$ (*− 2*; *−1*; *−2,5*) i t. d. Na rys. 16 b wyobraziliśmy ośmiościan foremny, ścięty płaszczyznami, odległemi o *0,5 cm.* od wierzchołków; osiom ośmiościanu nadaliśmy wartość *4 cm.*



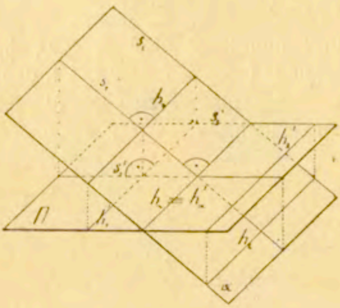

Rys. 16.

§ 8. **Płaszczyzna**. *I. Linie charakterystyczne płaszczyzny*. Jeżeli mamy do czynienia z kawałkiem płaszczyzny, ograniczonym w jakikolwiek sposób, np. trójkątnym lub wielokątnym, to miejscem geometrycznem rzutów wszystkich punktów tego utworu jest część płaszczyzny rzutów, ograniczona przez rzut obwodu. W szczególnym przypadku, może to być *odcinek* prostej —

wtedy mianowicie, gdy płaszczyzna ma kierunek prostopadły do płaszczyzny rzutów (p. § 4, twierdz. 4). O ile natomiast chodzi o płaszczyznę *nieograniczoną*, to rzuty jej punktów *wypełniają całą płaszczyznę rzutów*.

Wyjątek stanowi znów ten wypadek, gdy rozważana płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny rzutów. Jedynie wówczas możnaby prostą nieograniczoną $[\alpha\Pi]$ t. j. ślad płaszczyzny $\alpha$ na $\Pi$ nazwać również rzutem płaszczyzny $\alpha$.

Warunek istnienia (w odległości skończonej) *śladu* $h_\alpha = [\alpha\Pi]$ płaszczyzny $\alpha$ na płaszczyźnie rzutów $\Pi$ polega na tem tylko, aby te dwie płaszczyzny nie były równoległe. Z innych prostych położonych na płaszczyźnie, spełniającej ten warunek, zasługują na uwagę: 1) proste, równoległe do śladu, a więc i do płaszczyzny rzutów: $h_1$, $h_2$,....; jeżeli płaszczyzna rzutów jest pozioma, nazywamy je *liniami poziomu*, lub *warstwicami;* 2) proste, prostopadłe do śladu (ale w ogólności, o ile $\alpha$ nie jest prostopadła do $\Pi$, nie prostopadłe do $\Pi$!): $s_1$, $s_2$...., zwane, w wymienionym przypadku szczególnym, liniami największego spadku lub krócej: *liniami spadku.*



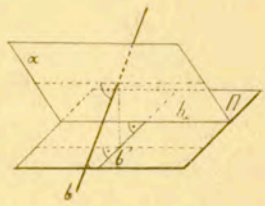
Rys. 17.

Przez każdy punkt płaszczyzny, nie równoległej do płaszczyzny rzutów, przechodzi jedna prosta, należąca do pierwszego zbioru prostych i jedna, należąca do drugiego. Weźmy dowolną prostą $h_1$, należącą do pierwszego zbioru. Ponieważ $h_1 \parallel h_\alpha$, przeto (§ 5, tw. 1) $h_1' \parallel h_\alpha'$, a że $h_\alpha' = h_\alpha$, więc $h_1' \parallel h_\alpha$, to jest: Rzuty prostych, równoległych do śladu płaszczyzny, w której są położone, są również równoległe do tego śladu — lub krócej: gdy mamy do czynienia z płaszczyzną rzutów poziomą: *Rzuty linii poziomu jakiejś płaszczyzny są równoległe do jej śladu.*

Zestawmy teraz ze sobą dowolną prostą $h_1$ jednego rodzaju i dowolną prostą $s_1$ drugiego rodzaju. Ponieważ $s_1 \perp h_1$, a $h_1 \parallel \Pi$, przeto (p. twierdz. z § 6, II) $s_1' \perp h_1'$. Rzuty prostych obu rodzajów tworzą tedy tak samo *sieć prostokątną*, jak same proste na swej płaszczyźnie. W szczególności, $s_1' \perp h_\alpha$: *rzuty prostych, położonych w płaszczyźnie i prostopadłych do jej śladu (linii spadku), są prostopadłe do tegoż śladu.*

Proste pierwszego rodzaju ($\| h_\alpha$), jako równoległe do płaszczyzny rzutów, nie ulegają w rzucie żadnemu skróceniu; wszystkie inne proste, położone w płaszczyźnie, ulegają tem znaczniejszemu skróceniu, im większy kąt ostry tworzą ze śladem czyli, co na jedno wychodzi, z prostemi równoległemi doń; najbardziej się zmniejszają w rzucie odcinki prostych, prostopadłych do śladu. Pomijając łatwe dowody tych twierdzeń, zauważmy, że z powodu prostopadłości $s_1$ i $s_1'$ do $h_\alpha$, $\sphericalangle[s_1 s_1']$, stanowiący kąt nachylenia prostej do płaszczyzny rzutów, jest to kąt liniowy $\theta$ kąta pomiędzy płaszczyzną $\alpha$ a płaszczyzną rzutów, więc spółczynnik skrócenia prostych, prostopadłych do śladu, równy $\cos\theta$, zależy jedynie od nachylenia płaszczyzny $\alpha$ do płaszczyzny rzutów $\Pi$.

*II. Prosta, prostopadła do płaszczyzny.—Rzut prostej, prostopadłej do płaszczyzny, jest prostopadły do jej śladu.* Załóżmy, że $b \perp \alpha$. W takim razie kierunek $b$ jest prostopadły do kierunku wszelkiej prostej, położonej w płaszczyźnie $\alpha$, w szczególności zaś do kierunku śladu $h_\alpha$. Przeto (p. twierdzenie z § 6, II) $b' \perp h_\alpha'$ czyli $b' \perp h_\alpha$ i wogóle $b' \perp h'$, jeżeli $h$ oznacza dowolną prostą, należącą do $\alpha$ i $\| h_\alpha$. c. b. d. o.



Rys. 18.

## ĆWICZENIA.

1. Uzasadnić twierdzenia 1, 2, 3, 4 § 4-go zupełnie niezależnie od § 3, przy pomocy twierdzeń o płaszczyznach i prostych prostopadłych.

2. Obrawszy za płaszczyznę obrazu jakąś płaszczyznę pionową, narysować prostopadłościan o jednej ścianie równoległej do tej płaszczyzny w następujących przypadkach: a) gdy patrzymy wprost z przodu, t. j. gdy oko znajduje się na prostej prostopadłej do płaszczyzny rzutu, przesuniętej przez środek bryły; b) gdy patrzymy z przodu i z lewej strony i t. p. [*A. Łomnicki, Geometrya* cz. II].

3. To samo, przy założeniu, że oko znajduje się jednocześnie z przodu, z lewej strony i powyżej środka prostopadłościanu. Inne podobne przypadki *[j. w.]*.

4. Przy pomocy gotowego obrazu prostopadłościanu w któremś z tych położeń narysować ośmiościan, opierający się wierzchołkami o środki jego ścian.

5. Uzasadnić twierdzenie: Jeżeli rzuty prostokątne czy też wogóle równoległe dwu prostych na jakąś płaszczyznę $\Pi$ są równoległe, to te proste posiadają równoległe płaszczyzny rzutujące.

6. Wyjaśnić, jakie znaczenie posiada punkt przecięcia rzutów dwu prostych skośnych, t. j. czemu ten punkt odpowiada w przestrzeni. (*Odp*. Jest to rzut wspólny tych dwu punktów prostych skośnych, które leżą na tej samej prostej rzutującej).

7. Dowieść, że podobieństwo szeregu punktów prostej i szeregu ich rzutów *środkowych* pociąga za sobą równoległość prostej do płaszczyzny rzutu.

8. Obliczyć bez pomocy tablic trygonometrycznych spółczynniki skrócenia prostych, nachylonych do płaszczyzny rzutów pod kątem: a) $90^\circ$; b) $60^\circ$; c) $45^\circ$; d) $30^\circ$; e) $22^\circ\ 30'$: f) $15^\circ$. Odnaleźć graficznie zapomocą przenośnika i podziałki spółczynniki skrócenia prostych, nachylonych do płaszczyzny rzutów pod kątem: a) $78^\circ\ 30'$; b) $93^\circ$; c) $5^\circ$. Sprawdzić podług tablic trygonometrycznych.

9. Jak winien być położony w przestrzeni kąt ostry, rozwarty lub prosty, aby rzut jego: 1) równał się zeru? 2) stanowił kąt półpełny?

10. Jeżeli jedno ramię kąta jest prostopadłe do płaszczyzny rzutów, rzutowi jego nie można przypisać żadnej określonej wartości. Dlaczego?

11. Udowodnić twierdzenie z § 6, II o rzucie kąta prostego na mocy uwagi, że jedno z ramion kąta musi być w rozważanym wypadku prostopadłe do płaszczyzny, rzutującej drugie ramię.

12. Dowieść, że kąt ostry, którego jedno ramię $a$ jest równoległe do płaszczyzny rzutów, ulega w rzucie prostokątnym zmniejszeniu.

*Wskazówka*. Wykreśliwszy z dowolnego punktu drugiego ramienia prostopadłą do $a$, porównać otrzymany trójkąt prostokątny z jego rzutem. Oczywiście, twierdzenie nie stosuje się do przypadku, gdy *oba* ramiona kąta są równoległe do $\Pi$.

13. Dowieść, że kąt ostry, którego jedno ramię jest prostopadłe do śladu jego płaszczyzny, ulega w rzucie powiększeniu.

14. Jakiej zmianie ulega w rzucie kąt rozwarty o jednem ramieniu równoległem lub prostopadłem do śladu jego płaszczyzny?

15. W związku z trzema poprzedniemi zadaniami, wyszukać warunki ogólniejsze, wystarczające do orzeczenia, że rzut kąta jest napewno odeń mniejszy—lub większy.

16—22. Mamy dane rzuty trzech osi, prostopadłych do siebie, wraz z odpowiedniemi skalami (p. § 7); wykreślić rzuty *(aksonometryczne)*:

16. Trójkąta o wierzchołkach $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ -1)$; $O(0;\ 1{,}5;\ 2{,}5)$. (Liczby w nawiasach oznaczają spółrzędne — za jednostkę miary bierzemy centymetr).

17. Równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołki $A$, $B$, $C$ posiadają spółrzędne, podane w ćw. 17.

18. Linii łamanej o wierzchołkach $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(-1,\ 0,\ 0)$, $D(-1;\ -2;\ 0{,}5)$, $E(-2;\ -1;\ -1)$.

19. Figury, złożonej z koła o środku $Q(1;\ 2;\ 2)$ i promieniu $r=15$ *cm*., leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do osi $[OY]$, i prostej, przebijającej tę płaszczyznę w punkcie $Q$ i prostopadłej do niej.

20. Sześcianu, którego trzema krawędziami są odcinki 3-centymetrowe, odmierzone od początku układu wzdłuż $[OX]$, $[OY]$, $[OZ]$ w kierunkach dodatnich.

21. Sześcianu o takiej samej wielkości i w takiem samem położeniu, o wierzchołkach ściętych zapomocą płaszczyzn, odcinających $\frac{1}{3}$ każdej krawędzi.

22. Bryły, utworzonej z sześcianu w takiem samem położeniu o krawędziach *4*-centymetrowych i z ostrosłupów foremnych o wysokości $= 1$ *cm.*, mających za podstawy ściany sześcianu.

23. Dowieść: a) że ze wszystkich prostych, położonych na płaszczyźnie, tworzą największy kąt z płaszczyzną rzutów proste, prostopadłe do śladu płaszczyzny; b) żę z dwóch prostych o innym kierunku ta tworzy większy kąt z płaszczyzną, która jest nachylona pod większym kątem do śladu. Wnioski co do spółczynnika skrócenia.

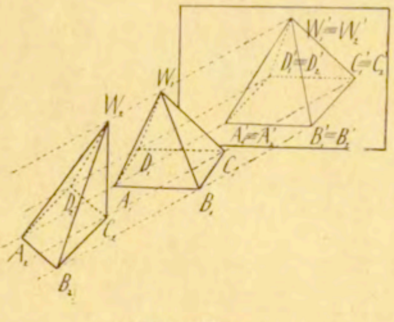
*Wskazówka.* Z punktu przecięcia się dwu prostych, których nachylenie do $\Pi$ chcemy porównać ze sobą, opuszczamy prostopadłą do $\Pi$ i porównywamy trójkąty prostokątne, z których każdy jest utworzony przez tę prostopadłą, jedną z rozważanych prostych i jej rzut.

24. Wskazać rzuty linii spadku i linii poziomu płaszczyzny, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów.

ROZDZIAŁ III.

# Rzuty cechowane. Umowy co do dwu płaszczyzn rzutu. Rzuty punktów, posiadających rozmaite położenia.

§ 9. **Wyznaczanie punktów podług ich rzutów.** *I. Metoda rzutów cechowanych.* W ogólności każdy punkt w przestrzeni wyznacza dokładnie swój rzut środkowy lub równoległy (tw. 1 z §§ 1, 3 i 4); nawzajem rzut sam przez się bynajmniej nie wystarcza do wyznaczenia punktu w przestrzeni, o którym przy danym rzucie wiadomo tylko tyle, że musi leżeć na odpowiedniej prostej rzutującej (tw. 2 z §§ 1, 3, 4). Wskutek tego sam rzut jakiegoś przedmiotu, nie zaopatrzony w dodatkowe wyjaśnienia lub znaki, nie daje o nim bynajmniej dokładnego pojęcia. Wszelki zbiór punktów, wszelka figura na płaszczyźnie rzutów, może odpowiadać jako rzut nieskończenie wielu rozmaitym figurom.

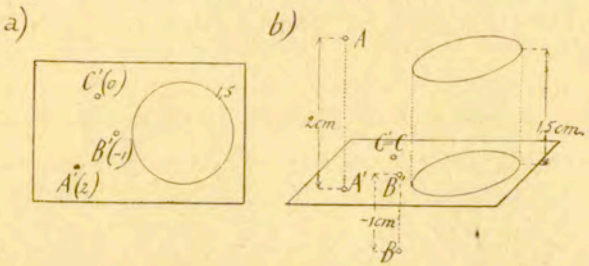



Rys. 19.

Pomijając przykłady bardziej złożone, rozpatrzymy np. rzuty wielościanów. Umówmy się, że kreślimy tylko rzuty ich krawędzi (p. § 1), że następnie odróżniamy zapomocą linii przerywanych lub ciągłych krawędzie „niewidzialne“ lub „widzialne“. Wszelki rysunek, który zgodnie z temi założeniami można uważać za rzut wielościanu wypukłego, stanowi rzut nieskończenie wielu takich wielościanów, o wierzchołkach, położonych odpowiednio na tych samych prostych rzutujących, jak np. ostrosłupy $W_1A_1B_1C_1D_1$ i $W_2A_2B_2C_2D_2$ na rys. 19-ym.

W celu usunięcia takiej *wieloznaczności* rysunku i uczynienia go *istotnem i dokładnem odbiciem stosunków*, zachodzących w przestrzeni, można: 1) stosować t. zw. *metodę rzutów cechowanych;* 2) używać jednocześnie *dwu płaszczyzn rzutów.*

Zasada pierwszego sposobu, stosowanego zwykle do rzutów prostokątnych, polega na tem, że aby wyznaczyć, przy danym rzucie, położenie punktu w przestrzeni, wystarczy znać jeszcze oprócz tego odległość punktu od płaszczyzny rzutów, liczoną podług prostej rzutującej, czyli inaczej: odległość punktu od jego rzutu. Umawiamy się przytem, że odległości punktów, położonych




Rys. 20.

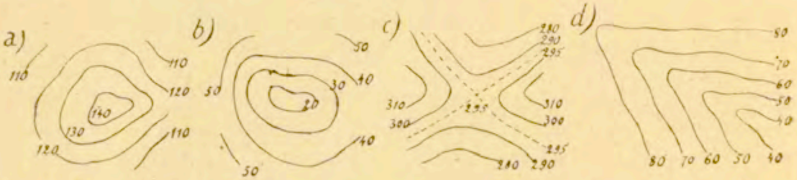
z jednej strony płaszczyzny rzutów, uważamy za dodatnie, a punktów, położonych z drugiej strony, za ujemne; w ten sposób zostaje usunięty wszelki powód do nieporozumień. Otóż liczby ujemne lub dodatnie, wyrażające w zależności od określonych jednostek odległości punktów od ich rzutów, nazywamy *cechami* rzutów i piszemy je w nawiasach obok odpowiednich punktów rysunku i oznaczających je liter, w taki np. sposób: $A'$ (*3*), $B'$ (*—2*), $C'$ (*0*) i t. d.

Metoda rzutów cechowanych stosuje się przy wykreślaniu planów miejscowości czyli t. zw. *rzutów topograficznych* powierzchni ziemi; odległości liczymy od powierzchni morza [1]),

---

[1]) Powierzchnia morza może być uważaną (w przybliżeniu) za płaską, i używana jako płaszczyzna rzutów prostokątnych jedynie wtedy, gdy mamy do czynienia z dość małym obszarem; gdy zmuszeni jesteśmy używać np. rzutu

w górę lub w dół, i w pierwszym przypadku uważamy je za dodatnie (wysokości), w drugim za ujemne (głębokości). Oprócz ważniejszych punktów bywają zwykle przytem wprowadzane całe linie, t. zw. *warstwice*, złożone z punktów o jednakowym poziomie. Z takiemi liniami zapoznaliśmy się już przy rozważaniu stosunku jakiejś płaszczyzny $\alpha$ do płaszczyzny rzutów: prosta, położona w $\alpha$ i równoległa do śladu czyli *linia poziomu* lub *warstwica płaszczyzny* jest równoległa do płaszczyzny rzutów, a więc wszystkie jej punkty leżą w jednakowej odległości od tej płaszczyzny. Warstwice płaszczyzny $\alpha$ lub powierzchni krzywej $\mu$ można jeszcze określić jako przekroje, wyznaczone przez płaszczyzny $\rho_1$, $\rho_2 \ldots$, równoległe do płaszczyzny rzutów; np. warstwicom $h_1$, $h_2 \ldots$ powierzchni $\mu$ odpowiadają wzory: $h_1 \equiv [\mu \rho_1]$, $h_2 \equiv [\mu \rho_2]$ i t. d. Bierzemy zwykle płaszczyzny przekroju, położone kolejno jedna nad drugą w tej samej odległości; w ten sposób np. jedna warstwica



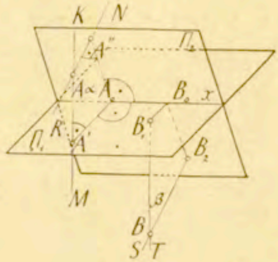

Rys. 21.

będzie się składała z punktów, położonych na poziomie morza, druga—z punktów, wzniesionych o *10 m.* nad poziom morza, trzecia — z punktów, wzniesionych o *20 m.* nad poziom morza i t. d. Koło rzutu każdej warstwicy (który również nosi nazwę warstwicy— na rysunku) piszemy wspólną cechę wszystkich punktów, tworzących ten rzut. Plan miejscowości, rysowany z uwzględnieniem warstwic, daje mniej lub więcej dokładne pojęcie o postaci, jaką posiada powierzchnia danego obszaru. Jeżeli się ma trochę wprawy, łatwej do nabycia, to się odróżnia na nim odrazu, podług kształtu i układu warstwic, wzgórza, kotliny, przełęcze i t. d. Nie

stereograficznego, zasada rzutów cechowanych zostaje nieco zmieniona, ponieważ oznaczamy na rysunku nie odległości od płaszczyzny rzutów, lecz odległości od powierzchni (przedłużonej) oceanu, liczone wzdłuż promieni „sferoidu" ziemskiego.

wdając się w bliższe wyjaśnienia, podajemy kilka odpowiednich przykładów na rys. 21-ym [a) — szczyt, b) — kotlina, c) — przełęcz czyli siodło, d) — dolina].

§ 10. **Druga metoda: użycie dwu płaszczyzn rzutów.** Weźmy w przestrzeni punkt $A$ oraz dwie nierównoległe do siebie płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$: rzut prostokątny $A'$ punktu $A$ na płaszczyznę $\Pi_1$ jest to, jak wiemy, punkt przecięcia tej płaszczyzny z prostą rzutującą $[KM] \equiv [\supset A \perp \Pi_1]$; podobnież jeżeli $[RN]$ oznacza prostą rzutującą $[\supset A \perp \Pi_2]$, to rzut $A''$ na płaszczyznę $\Pi_2 \equiv \big[[RN]\Pi_2\big]$. Uważajmy teraz rzuty $A'$ i $A''$ za dane, a sam punkt $A$ w przestrzeni — za punkt nieznany; rzecz jasna, że punktu tego należy szukać z jednej strony na prostej rzutującej $[KM]$, którą wyznaczamy w takim razie, jako prostopadłą do $\Pi_1$, wystawioną z punktu $A'$: $[\supset A' \perp \Pi_1]$, z drugiej zaś — na prostej rzutującej $[RN] \equiv [\supset A'' \perp \Pi_2]$. Ostatecznie punkt $A$ musi być punktem przecięcia tych dwu prostych: $A \equiv \big[[RN]\,[KM]\big]$, a że dwie proste mogą się przecinać tylko w jednym punkcie, więc jest wyznaczony „jednoznacznie“ czyli w sposób, usuwający możliwość jakiegokolwiek innego rozwiązania. Możemy tedy wypowiedzieć:

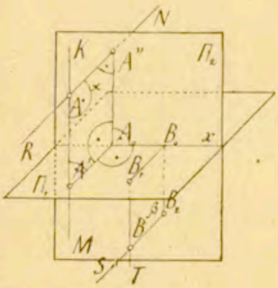


Rys. 22.

*Twierdzenie 1. Rzuty prostokątne punktu na dwie nierównoległe płaszczyzny wyznaczają w zupełności i jednoznacznie położenie tego punktu w przestrzeni.*

W celu osiągnięcia większej zwięzłości, będziemy w dalszym ciągu mówili zamiast „rzut prostokątny“ poprostu „rzut“, co nie będzie mogło się stać powodem żadnych nieporozumień, póki będziemy mieli do czynienia wyłącznie z tym jednym rodzajem rzutów. Rozważmy teraz pytanie, czy można uważać dwa *dowolne* punkty, położone odpowiednio na dwu płaszczyznach rzutu, za rzuty jakiegoś punktu w przestrzeni — i jeżeli nie, to jakiemu warunkowi szczególnemu winny czynić zadość w tym celu?

Weźmy znów jakiś punkt $A$ w przestrzeni (rys. 22 lub 23; na rys. 22 $\Pi_2$ nie jest $\perp$ do $\Pi_1$, na rys. 23 $\Pi_2 \perp \Pi_1$) i wyznaczmy jego rzuty $A'$ i $A''$; przez proste rzutujące $[AA']$ i $[AA'']$ przesuńmy płaszczyznę $\alpha$; ponieważ $[AA']$ jest prostopadła do $\Pi_1$, więc płaszczyzna $\alpha$, jako zawierająca $[AA']$, jest prostopadła do $\Pi_1$; podobnież $\alpha \perp \Pi_2$, gdyż $\alpha \supset [AA'']$, $[AA''] \perp \Pi_2$. Z tego, że $\alpha \perp \Pi_1$ i $\alpha \perp \Pi_2$ wynika, że płaszczyzna $\alpha$ jest prostopadła do prostej przecięcia tych płaszczyzn, czyli t. zw. *osi rzutów* $x \equiv [\Pi_1 \Pi_2]$, i nawzajem $x$ jest prostopadła do wszelkich prostych, położonych na $\alpha$ i przechodzących przez punkt $A_0 \equiv [\alpha x]$. W szczególności, prosta $x$ jest tedy prostopadła do prostych $[A_0A'] \equiv [\alpha \Pi_1]$ i $[A^0A'] \equiv \alpha \Pi_2]$.



Rys. 23.

Ponieważ w punkcie $A'$ można wykreślić tylko jedną prostopadłą do prostej $x$, więc tą jedyną prostopadłą musi być właśnie $[A_0A']$, i podobnie $[A_0A'']$ jest jedyną prostopadłą, wychodzącą z $A''$; widzimy, że te dwie prostopadłe posiadają wspólny punkt $A_0$, należący do $x$. Ostatecznie: *Prostopadłe, opuszczone z rzutów jakiegoś punktu na oś rzutów, spotykają się na osi.* Jest to warunek niezbędny—łatwo się przekonać, ze jest on również dostateczny. Istotnie, weźmy dwa punkty $B_1$ i $B_2$, które mu czynią zadość. Proste $[B_1B_0] \perp x$ i $[B_2B_0] \perp x$, jako przecinające się, wyznaczają pewną płaszczyznę $\beta$, która, zawierając dwie proste, prostopadłe do osi $x$, musi być również prostopadła do $x$. Stąd wynika, na zasadzie znanego twierdzenia stereometrycznego („płaszczyzna (np. $\Pi_1$), zawierająca prostą ($x$), prostopadłą do drugiej płaszczyzny ($\beta$), jest prostopadła do tej drugiej płaszczyzny"), że $\beta \perp \Pi_1$ i $\beta \perp \Pi_2$ — a stąd znów, że w takim razie $\alpha$ zawiera proste: $[B_1T]$ prostopadłą do $\Pi_1$ oraz $[B_2S] \perp \Pi_2$. Owe dwie proste, jako leżące w tej samej płaszczyźnie i nie równoległe (bo prostopadłe do dwu przecinających się płaszczyzn) muszą się przeciąć w pewnym punkcie $B$ — i rzecz jasna, że jest to właśnie punkt, którego rzutami są $B_2$ i $B_2$. Ostatecznie otrzymujemy:

*Twierdzenie 2. Warunek niezbędny i wystarczający do tego, aby dwa punkty, położone odpowiednio na dwu płaszczyznach rzutu, stanowiły rzuty jakiegoś punktu w przestrzeni, polega na tem, iżby prostopadłe do osi rzutów, przeciągnięte przez te punkty, przecinały się na osi rzutów.*

Przypuśćmy teraz, że *płaszczyzny rzutów są do siebie prostopadłe*: $\Pi_2 \perp \Pi_1$ (rys. 23); w takim razie punkt $A$, jego rzuty $A'$

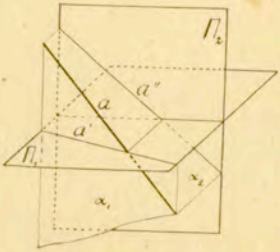
i $A''$ oraz wspólny spodek $A_0$ prostopadłych, opuszczonych na oś rzutów z punktów $A'$ i $A''$, tworzą czworokąt $AA'A_0A''$, który posiada trzy kąty proste: $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle A''$ i $\sphericalangle A_0$. $\sphericalangle A'$ i $\sphericalangle A''$ są proste z powodu że $[AA'] \perp \Pi_1$, $[AA''] \perp \Pi_2$, a więc $[AA'] \perp [A'A_0]$, $[AA''] \perp [A''A_0]$; $\sphericalangle A_0$ — jako kąt liniowy kąta dwuściennego, utworzonego przez płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$, prostopadłe do siebie (gdyby więc te płaszczyzny nie przecinały się pod kątem prostym, dalsze wnioskowanie byłoby mylne). Czworokąt $AA'A_0A''$ jest tedy prostokątem i mamy:

$$A'A = A_0A''$$
$$A''A = A_0A'.$$

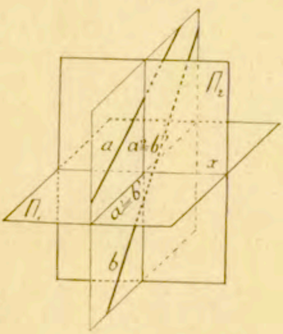
Odcinki $A'A$ i $A_0A''$ stanowią odległości punktów $A$ i $A''$ od płaszczyzny $\Pi_1$, liczone w tym samym kierunku; jeżeli ten kierunek uważamy za dodatni, to kierunek przeciwny (na rysunku: w dół od płaszczyzny $\Pi_1$) należy uważać za ujemny. Zauważmy jeszcze, że odcinek $A_0A''$ może być określony, jako odległość rzutu $A''$ od *osi rzutów*, w danym wypadku, zgodnie z zawartą umową — dodatnia. Przeto odległość punktu od płaszczyzny $\Pi_1$ równa się, co do wielkości i znaku, odległości rzutu na $\Pi_2$ od osi $x$. Obierając również zwrot dodatni i ujemny na prostych, prostopadłych do $\Pi_2$ i tłumacząc, zgodnie z tem, równość $A''A = A_0A'$, dochodzimy ostatecznie do ważnego twierdzenia:

3. *Odległość punktu od jednej z dwu prostopadłych płaszczyzn rzutów równa się co do wielkości i znaku odległości jego rzutu na drugą płaszczyznę od osi rzutów.*

§ 11. **Dalszy ciąg: wyznaczanie prostej.** Rzuty $A'A''$, $B'B''$ dwu punktów na dwie płaszczyzny przecinające się $\Pi_1$ i $\Pi_2$ wyznaczają, jak widzieliśmy, w zupełności same punkty $A$ i $B$ w przestrzeni, a więc i prostą $[AB]$. Możemy tedy *zawsze* wyznaczyć położenie prostej w przestrzeni zapomocą rzutów dwu jej punktów. Zachodzi jednak pytanie, czy można wyznaczyć prostą nieograniczoną podług jej rzutów, uważanych również za proste nieograniczone, bez wyróżnienia żadnych punktów tych prostych? Owóż, mając jakąś prostą $a$ w przestrzeni, możemy znaleźć jej rzuty na dwie dane płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$ zapomocą płaszczyzn rzutujących (§ 4 ustęp po tw. 4a) $\alpha_1$ i $\alpha_2$, t. j. płaszczyzn, przesuniętych przez $a$ i prostopadłych odpowiednio do $\Pi_1$ i $\Pi_2$ (p. rys. 24) $a' \equiv [\alpha_1 \Pi_1]$, $a'' \equiv [\alpha_2 \Pi_2]$. Nawzajem, gdy uważamy rzuty $a'$ i $a''$ za dane, a samą prostą $a$ za niewiadomą, to musimy jej szukać jednocześnie na płaszczyznie rzutującej $\alpha_1$, wyznaczonej jako płaszczyzna, zawierająca $a'$ i $\perp \Pi_1 \equiv$ pł. $[\supset a' \perp \Pi_1]$, oraz na płaszczyźnie rzutującej $\alpha_2 \equiv$ pł. $[\supset a'' \perp \Pi_2]$. Ostatecznie odnajdziemy $a$ jako przecięcie płaszczyzn $\alpha_1$ i $\alpha_2 : a \equiv [\alpha_1 \alpha_2]$. Ogólnie tedy $a$ da się wyznaczyć i to w pewien jedyny sposób—wyjątek zachodzi w tym wypadku, gdy płaszczyzny $\alpha_1$ i $\alpha_2$ nie są odmienne, lecz stanowią tę samą płaszczyznę. Zdarza się to mianowicie wtedy, gdy prosta $a$ leży w płaszczyźnie $\beta$, prostopadłej do osi rzutów — w takim razie pł. $\beta$ jest również prostopadła do $\Pi_1$ i do $\Pi_2$ czyli stanowi jednocześnie płaszczyznę rzutującą na $\Pi_1$ i płaszczyznę rzutującą na $\Pi_2$: $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \beta$. Rzuty $a'$ i $a''$ przecinają się w takim razie na osi rzutów i jako położone na $\beta$ są do niej prostopadłe: $a' \perp x$, $a'' \perp x$ (rys. 25). Nawzajem, jeżeli mamy dane rzuty, położone w ten sposób, to płaszczyzny $\alpha_1$ i $\alpha_2$ łączą się w jedną płaszczyznę




Rys. 24.




Rys. 25.

$$\beta \equiv \text{pł.}\, [a'a''],$$

(która z powodu że $a' \perp x$ i $a'' \perp x$, jest również prostopadła do $x$, a przeto do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, więc istotnie może być uważana zarówno za $\alpha_1 \equiv$ pł. $[\supset a' \perp \Pi_1]$ jak za $\alpha_2 \equiv$ pł. $[\supset a'' \perp \Pi_2]$) i nie może być mowy o wyznaczeniu określonej linii przecięcia. *Wszystkie* proste jak np. $b$ (rys. 25) położone w $\beta$ (z wyjątkiem prostych, prostopadłych do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$—dlaczego?) posiadają tę samą parę rzutów $a'$ i $a''$. Możemy ostatecznie sformułować twierdzenie:

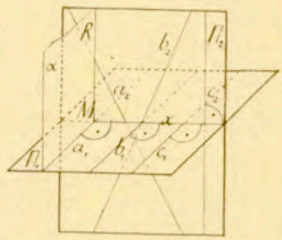
1. *Rzuty prostej nieograniczonej na dwie płaszczyzny wyznaczają samą prostą, o ile nie są oba prostopadłe do osi rzutów w tym samym jej punkcie.*

Należy sobie jeszcze postawić pytanie, czy *wszelką* parę prostych, wziętych na dwu płaszczyznach rzutów, można uważać za rzuty jakiejś prostej w przestrzeni?

Rozpatrzmy 3 przypadki:

1) Dane proste $a_1$ i $a_2$ przecinają się na osi rzutów i są do niej prostopadłe — powtarzając użyte przed chwilą rozumowanie, stwierdzamy, że można je uważać za rzuty *dowolnej* prostej, położonej w płaszczyźnie $\beta =$ pł. $[a_1 a_2]$, prostopadłej do osi rzutów.

2) Jedna z dwu danych prostych np. $a_1$ jest prostopadła do osi rzutów, a druga leży w sposób dowolny. W takim razie prostej $a$, której rzutem na $\Pi_1$ ma być $a_1$, należy szukać w płaszczyźnie $\alpha =$ pł. $[\supset a_1 \perp \Pi_1]$, t. j. przesuniętej przez $a_1$ prostopadle do $\Pi_1$. Otóż taka płaszczyzna musi zawierać oprócz prostej $a_1 \perp x$, jeszcze np. prostą $MR$, prostopadłą do $\Pi_1$ a więc i do osi $x$ (rys. 26), i przeto jest prostopadła do osi $x$. Wobec tego *drugi rzut poszukiwanej prostej musi być prostą, prostopadłą do osi rzutów i przecinającą ją w punkcie* $[xa_1]$ lub, w szczególnym przypadku, jednym z punktów takiej prostej. Stąd wynika, że para prostych, położonych odpowiednio na $\Pi_1$ i $\Pi_2$ w ten sposób, że jedna z tych prostych jest prostopadła do $x$, a druga nie jest $\perp x$, lub też, choćby będąc prostopadłą, przecina $x$ w innym punkcie, nie może być uważana za parę rzutów jakiejś prostej w przestrzeni. Tak np. pary prostych $a_1$, $a_2$; $b_1$, $b_2$ i $c_1$, $c_2$ na rys. 26 nie odpowiadają, jako rzuty, żadnym prostym w przestrzeni.



Rys. 26.

3) Jeżeli dane proste $a_1$ i $a_2$ mają takie położenie, jak np. $a'$ i $a''$ na rys. 24-ym, t. j. *żadna z nich nie jest prostopadła do osi*, to płaszczyzny $\alpha_1$ i $\alpha_2$, przesunięte odpowiednio przez $a_1$ i $a_2$ prostopadle do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, nie mogą być równoległe, gdyż w takim razie musiałyby być obie prostopadłemi jednocześnie do $\Pi_1$ i do $\Pi_2$ więc i do osi $x$—i rzuty byłyby również prostopadłe do $x$. Zatem $\alpha_1$ i $\alpha_2$ przecinają się, i ta linia przecięcia jest właśnie szukaną prostą $a$ o rzutach $a_1$ i $a_2$, *dokładnie przez te rzuty wyznaczoną*.

§ 12. **Wybór płaszczyzn rzutów**. Płaszczyzny rzutów w zasadzie mogą być dowolne, byleby się przecinały; większość podanych dowodów i twierdzeń nie zależy nawet od tego, cz są prostopadłe do siebie cz nie (wyjątek: tw. 3 z § 10).

W zastosowaniach praktycznych chodzi najczęściej o to, by rzuty były same możliwie najmniej złożone oraz pozwalały na możliwie największe uproszczenia w konstrukcyach, potrzebnych do rozstrzygnięcia nasuwających się zagadnień; rzadziej i w charakterze raczej pomocniczym występuje dążenie do osiągnięcia poglądowości, chęć upodobnienia rzutu do wyglądu przedmiotu, widzianego z najzwyklejszych stanowisk. W każdym razie musimy się liczyć z czynnikami, posiadającymi w mechanice znaczenie pierwszorzędne: kierunkiem prostej pionowej i „oryentacyą" płaszczyzny poziomej. Nazwę „oryentacya płaszczyzny" należy rozumieć w ten sposób, że przypisujemy tę samą oryentacyę płaszczyznom, równoległym do siebie, a różne oryentacye—płaszczyznom przecinającym się. Oryentacya płaszczyzny poziomej, pojmowana w ten sposób, jest czemś równie stałem -- w danej niezbyt rozciągłej miejscowości—jak kierunek prostej pionowej; z drugiej strony rozróżniamy nieskończenie wiele kierunków prostych poziomych t. j. położonych w płaszczyznach poziomych, i nieskończenie wiele oryentacyi płaszczyzn pionowych, t. j. zawierających proste pionowe. Te elementarne zresztą fakty winny być bardzo wyraźnie zapamiętane.

W praktyce używamy najczęściej jako płaszczyzn rzutu: 1) płaszczyzny poziomej i płaszczyzny pionowej o kierunku dobranym stosownie do położenia przedmiotu i założeń rysownika, albo też: 2) dwu płaszczyzn pionowych, odpowiednio dobranych i prostopadłych do siebie. W danej chwili zapoznamy się z określeniami i umowami, związanemi z układem pierwszego rodzaju.

Mamy tu: płaszczyznę poziomą rzutów, którą oznaczymy przez $\Pi_1$, i płaszczyznę pionową rzutów $\Pi_2$; linia ich przecięcia $x$ stanowi *oś rzutów*; rzuty na płaszczyznę poziomą nazywamy krótko *rzutami poziomymi*, rzuty na płaszczyznę pionową — *rzutami pionowymi*. Płaszczyzna pozioma może być widziana z góry lub z dołu, i jeżeli ją uważamy za nieograniczoną, to dzieli przestrzeń na dwie części: górną i dolną. W szczególności płaszczyzna pionowa zostaje zapomocą płaszczyzny poziomej podzielona na część górną, położoną ponad osią rzutów i część dolną — pod osią. Odległości od płaszczyzny poziomej wszystkich punktów, położonych ponad nią, czyli w części górnej przestrzeni, uważamy za *dodatnie*; odległości punktów, położonych w części dolnej przestrzeni—za *ujemne*. Wogóle zaś będziemy nieraz zastępowali słowa: górny i dolny przez: dodatni i ujemny (w stosunku do płaszczyzny poziomej); tak np. część *górną* płaszczyzny pionowej nazwiemy inaczej *dodatnią* i oznaczymy przez $+\Pi_2$; część *dolną* oznaczymy przez $-\Pi_2$. Co do płaszczyzny pionowej, uważamy, że jest zwrócona do widza i odróżniamy jej stronę *przednią* i *tylną* oraz przednią i tylną część przestrzeni. Odległości od płaszczyzny pionowej punktów, położonych przed nią, t. j. w przedniej części przestrzeni, uważamy za dodatnie; punktów, położonych z tyłu — za ujemne. Zgodnie z tem możemy stronę przednią płaszczyzny pionowej nazywać również dodatnią, a stronę tylną — ujemną; dalej z dwu części, na które płaszczyzna pionowa dzieli płaszczyznę poziomą, część *przednią* będziemy nazywali również *dodatnią* (w stosunku do płaszczyzny pionowej) i oznaczali przez $+\Pi_1$; część *tylną*, *ujemną* oznaczymy przez $-\Pi_1$ i t. d. W ten sposób, uwzględniając np., że odległości punktów, położonych w przedniej części płaszczyzny poziomej, od osi rzutów i jednocześnie od płaszczyzny pionowej należy uważać za dodatnie i t. d., osiągamy dokładną podstawę do stosowania tw. 3-go z § 10, które można jeszcze sformułować w sposób bardziej szczegółowy, jak następuje:

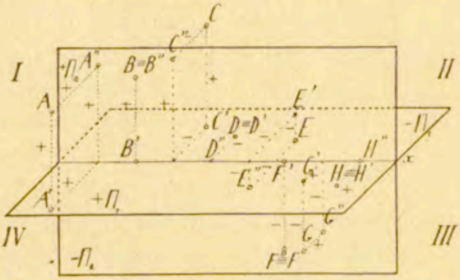
[A] *Odległość punktu od płaszczyzny poziomej równa się do wielkości i znaku odległości jego rzutu pionowego od osi rzutów, odległość punktu od płaszczyzny pionowej równa się co do wielkości i znaku odległości jego rzutu poziomego od osi rzutów.*

Biorąc pod uwagę jednocześnie obie płaszczyzny rzutów, widzimy, że dzielą one przestrzeń na cztery części, zwane *ćwiartkami*, które będziemy oznaczali cyframi: I, II, III, IV. Podług zwykłej umowy, ćwiartki następują po sobie kolejno w takim porządku: ćwiartka I jest ograniczona przez część górną płaszczyzny pionowej rzutów i część przednią płaszczyzny poziomej; ćwiartka II — przez część górną pł. pionowej i część tylną pł. poziomej; ćw. III — przez część dolną pł. pionowej i część tylną pł. poziomej; ćw. IV — przez część dolną płaszczyzny pionowej i część przednią płaszczyzny poziomej. Jak łatwo sobie uprzytomnić, odległości punktów, położonych w różnych ćwiartkach przestrzeni, posiadają znaki, wskazane w następującej tablicy:

| Punkty położone: | Odległość od pł. poziomej rz. | Odległość od pł. pionowej rz |
|---|---|---|
| w I ćw. | + | + |
| na $+\Pi_2$ | + | =0 |
| w II ćw. | + | — |
| na $\Pi_1$ | =0 | — |
| w III ćw. | — | — |
| na $-\Pi_2$ | — | =0 |
| w IV ćw. | — | + |
| na $+\Pi_1$ | =0 | + |

Rzut poziomy punktu lub prostej będziemy oznaczali zawsze zapomocą tej samej litery *z jedną kreską u góry*; rzut pionowy — *z dwiema kreskami*. Punktowi $A$ odpowiadają tedy rzuty $A'$ i $A''$; prostej $l$ — rzuty $l'$ i $l''$ i t. d.

*Uwaga*. Rysunki, wyobrażające dwie płaszczyzny rzutu, punkty w przestrzeni i t. d. winny być wykonywane podług zasad podanych w §§ 3-im, 6-ym i 7-ym, jako rzuty *równoległe ukośne* odpowiednich utworów przestrzennych. W szczególności: proste, równoległe do płaszczyzny pionowej rzutów, nie ulegają żadnemu skróceniu ani wydłużeniu; rzuty ich tworzą takie sa-



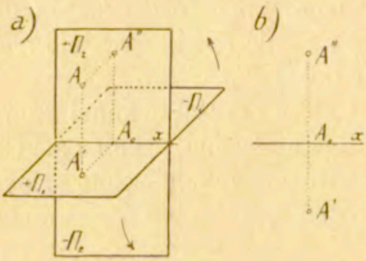
Rys. 27.

me kąty, jak same proste w przestrzeni; odcinki, prostopadłe do płaszczyzny pionowej: $A''A \parallel B''B$ i t. d. ulegają skróceniu, wyrażonemu przez stały spółczynnik, równy w tym podręczniku $^2/_3$.

§ 13. **Sprowadzenie rysunku do jednej płaszczyzny**. Możnaby rysować rzut poziomy i pionowy na dwu różnych arkuszach, do których zestawienia służyłoby wykreślenie na każdym osi rzutów oraz oznaczenie, którą część każdej płaszczyzny należy uważać za dodatnią. W ten sposób jednak mijalibyśmy się z celem, polegającym na tym, by wszystkie konstrukcye, dotyczące figury przestrzennej, były wykonywane zapomocą zwykłych narzędzi rysunkowych w *jednej płaszczyźnie* (por. Wstęp). Aby cel ten osiągnąć, umieszczamy rzuty pionowe i poziome na tym samym rysunku, łącząc je w jeden (podwójny) obraz figury przestrzennej. Najdogodniej przytem wyobrazić sobie, że jedna z płaszczyzn rzutów pozostaje nieruchoma, druga zaś obraca się dokoła osi rzutów, dopóki nie przystanie do pierwszej wraz ze wszystkimi wyznaczonymi na niej punktami, prostemi i t. d., które w ten sposób zostają przeniesione na pierwszą płaszczyznę rzutów. Będziemy zakładali mianowicie, że pozostaje *nieruchomą* płaszczyzna *pionowa $\Pi_2$*, płaszczyzna pozioma zaś $\Pi_1$ obraca się dokoła osi rzutów $x$ dopóty, dopóki jej *część przednia* $+\Pi_1$, nie przystanie *do części dolnej płaszczyzny pionowej* — $\Pi_2$; część *tylna płaszczyzny poziomej* — $\Pi_1$ musi w takim razie przystać *do części górnej pł. pionowej* $+\Pi_2$. Podwójny rysunek, wykonany podług tej zasady, może zarówno zachowywać położenie pionowe (rysunek na tablicy szkolnej) jak przybierać wszelkie inne; osi rzutów nadajemy zwykle kierunek, równoległy do jednego z brzegów arkusza („dolnego“); uważając płaszczyzny rzutów za nieograniczone, nie rysujemy żadnych ich brzegów. Należy położyć nacisk na to, że część dodatnia każdej z płaszczyzn przystaje do części ujemnej drugiej płaszczyzny: zgodnie z zawartemi już umowami, wynika stąd, że odległości rzutów *poziomych* od osi, równe odległościom samych punktów od płaszczyzny pionowej, muszą być uważane za *dodatnie*, gdy te *rzuty są położone pod osią*, a za *ujemne*, gdy leżą *nad* osią; co do rzutów pionowych, rzecz się ma odwrotnie: gdy rzut pionowy leży *nad* osią, odległość jego od osi uważamy za *dodatnią*; gdy leży *pod* osią — za *ujemną*. Na zasadzie tych umów i twierdzeń z § 10-go, możnaby wyznaczyć położenie rzutów rozmaitych punktów na wspólnej płaszczyźnie rysunku jedynie zapomocą logicznego wnioskowania z tablicy, podanej w § 12. Rozważymy jednak to zagadnienie obszerniej i z pomocą wyobrażeń bardziej poglądowych. Przedewszystkiem zauważymy, że proste $[A_0A']$ i $[A_0A'']$, wykreślone z dwu rzutów jakiegoś punktu prostopadle do osi, jako przecinające się na tej osi (§ 9, tw. 2), tworzą po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny rysunku *tę samą prostą*: $[A_0A'']$ wogóle nie zmienia położenia, $[A_0A']$ nie przestaje przy obrocie być prostopadłą do osi $x$ — ostatecznie tedy $[A_0A']$ i $[A_0A'']$, jako dwie prostopadłe do trzeciej prostej tej samej płaszczyzny, spotykające ją w tym samym punkcie, muszą stanowić jedną prostą. Nawzajem, jeżeli na płaszczyźnie rysunku $A'A'' \perp x$ i $\big[[A'A'']x\big] = A_0$, to po przywróceniu płaszczyznom $\Pi_1$ i $\Pi_2$ ich pierwotnego położenia prostopadłego, prostopadłe $[\supset A' \perp x] = [A_0A']$ i $[\supset A'' \perp x] = [A_0A'']$ przecinają oś $x$ w tym samym punkcie $A_0$. Punkty $A'$ i $A''$ mogą być tedy uważane za rzuty pewnego punktu $A$ w przestrzeni, i to tylko jednego (§ 10, tw. 1 i 2)—przeto możemy wypowiedzieć:

*Twierdzenie 1. Warunek niezbędny i wystarczający do tego, iżby dwa punkty, położone na płaszczyźnie rysunku, stanowiły rzuty jakiegoś punktu w przestrzeni, polega na tem, iżby te* *punkty leżały na jednej prostopadłej do osi rzutów. Punkty, spełniające ten warunek, wyznaczają w zupełności punkt przestrzeni, któremu odpowiadają jako rzuty.*

Dla krótkości możemy nadać wzmiankowanej prostej, przechodzącej przez rzuty punktu, nazwę *linii rzutów.*




Rys. 28.

Odległości punktów $A'$ i $A''$ od osi spełniają, jak wiemy (p. § 12 twierdzenie [A]) ten warunek, że równają się odpowiednio co do wielkości i znaku odległościom samego punktu $A$ od $\Pi_2$ i $\Pi_1$: $A_0A' = A''A$, $A_0A'' = A'A$.

*Twierdzenie 2 a.* Każdy punkt, położony na płaszczyźnie poziomej, posiada rzut poziomy w tem samem miejscu: $H \equiv H'$ (rys. 25) a rzut pionowy na osi: $H'' \subset x$, podobnież gdy punkt (np. $B$) leży na płaszczyźnie pionowej, to utożsamia się ze swym rzutem pionowym, a rzut poziomy leży na osi: $B \equiv B''$, $B' \subset x$.

To, że np. $H \equiv H'$, gdy $H \subset \Pi_1$, nie wymaga w tej chwili żadnego dowodu; przynależność $H''$ do osi rzutów wynika stąd, że prosta rzutująca $[HH'']$, jako prostopadła do $\Pi_2$ i posiadająca punkt wspólny $H$ z $\Pi_1$, musi leżeć całkowicie w $\Pi_1$: $[HH''] \subset \Pi_1$ i stąd $H''$ jako $\equiv \big[[HH'']\,\Pi_2\big]$ musi należeć do $x \equiv [\Pi_1 \Pi_2]$ i t. d.

C. b. d. o.

Łatwo uzasadnić twierdzenie wzajemne:

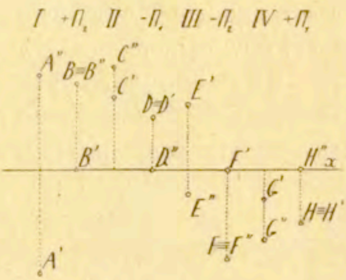
*Twierdzenie 2 b.* Jeżeli rzut *poziomy* leży na osi, sam punkt należy do płaszczyzny *pionowej*; jeżeli rzut *pionowy* leży na osi, punkt jest położony w płaszczyźnie *poziomej.*

Rzecz oczywista, że te wypadki szczególne podlegają najzupełniej ogólnemu prawu, zawartemu w twierdzeniu 1-szem — można się o tem przekonać bezpośrednio, zresztą dowody twierdzeń 1-go i 2-go w § 10 nie tracą tu bynajmniej wartości, ulegając tylko zmianom w znakowaniu.

Po tych omówieniach przejdziemy już bezpośrednio do zagadnienia, jak mają być wyobrażone na jednej płaszczyźnie rysunku różne położenia punktu w przestrzeni. Przypuśćmy, że punkt $A$ (rys. 27 lub 28) leży w pierwszej ćwiartce przestrzeni; widzimy bezpośrednio, że $A''$ leży i pozostaje ponad osią rzutów, rzut $A'$

zaś, jako należący do przedniej części płaszczyzny poziomej, przechodzi na dolną część płaszczyzny pionowej, więc musi leżeć pod osią (rys. 29). Położenie rzutów $B''$ i $B'$ punktu $B$, należącego do $+\Pi_2$, nie wymaga po uzasadnieniu twierdzenia 2a żadnych wyjaśnień.

Punkt $C$, położony w drugiej ćwiartce przestrzeni (rys. 27), posiada rzut pionowy ponad osią, rzut poziomy, jako leżący w tylnej części płaszczyzny poziomej, przechodzi na górną część płaszczyzny poziomej czyli również ponad oś (rys. 27). To samo się stosuje do rzutu poziomego $D' \equiv D$ punktu $D$, leżącego w tylnej części płaszczyzny poziomej: $D \subset -\Pi_1$; ale rzut pionowy musi w tym wypadku (tw. 2a) znaleźć się na osi rzutów. Z tego samego powodu będzie również położony ponad osią rzut poziomy $E'$ punktu $E$, umieszczonego w trzeciej ćwiartce; rzut pionowy $E''$, zgodnie z określeniem tej ćwiartki, musi leżeć w dolnej części płaszczyzny pionowej, więc pod osią. Podobnież łatwo stwierdzić, że rzuty poziome punktów: $G$, leżącego w IV ćwiartce i $H$, położonego w przedniej części płaszczyzny poziomej, jako leżące w przedniej części tej płaszczyzny, przechodzą na dolną część płaszczyzny pionowej, więc ostatecznie leżą pod osią i t. d. (Przy badaniu tych różnych położeń porównywać rys. 29 z rys. 27-ym).



Rys. 29.

Możemy sformułować te wszystkie wyniki w sposób następujący:

*Jeżeli punkt leży w I ćwiartce, to jego rzut poziomy leży pod osią, rzut pionowy nad osią; jeżeli punkt jest położony w II ćwiartce, to oba rzuty leżą nad osią. III i IV ćwiartka różnią się odpowiednio od I i II tem, że te rzuty, które były w tamtych wypadkach nad osią, leżą pod osią i nawzajem; rzut poziomy punktu, umieszczonego w trzeciej ćwiartce, leży nad osią, pionowy pod osią; oba rzuty punktu, zawartego w IV ćwiartce, leżą pod osią.—Jeżeli punkt leży w płaszczyźnie pionowej, to rzut poziomy należy do osi, a rzut pionowy jest położony ponad osią lub pod osią, stosownie do tego czy punkt leży na* $+\Pi_2$ *czy na* $-\Pi_2$.

*Jeżeli punkt leży w płaszczyźnie poziomej, to rzut pionowy należy do osi, a rzut poziomy jest położony nad osią lub pod osią, stosownie do tego, czy dany punkt leży w $-\Pi_1$ (w tylnej części) czy w $+\Pi_1$.*

Rzecz jasna, że wszystkie twierdzenia, zawarte w powyższym ustępie, są odwracalne, a więc: Jeżeli *rzut* poziomy punktu leży *pod* osią, a *rzut* pionowy *nad* osią, to *punkt* leży w *I ćwiartce* i t d. Uzasadniając te związki, używamy pomocy modelu, opisanego w przedmowie, lub rysunku w rodzaju rys. 27 — w dalszym ciągu należy położenia rzutów punktu w różnych przypadkach po prostu pamiętać, a w razie wątpliwości dopomagać sobie co najwyżej odwołaniem się do wyobraźni.

§ 14. **Niektóre typowe zadania i przypadki szczególne.** *Zad. 1. Podług rzutu poziomego punktu i jego odległości od płaszczyzny poziomej wyznaczyć rzut pionowy* (lub w postaci ogólniejszej: Podług rzutu punktu na jedną z płaszczyzn rzutów i jego odległości od tej płaszczyzny wyznaczyć rzut tegoż punktu na drugą płaszczyznę — wszystko, co następuje, nie ulega żadnej istotnej zmianie, jeżeli zamiast $A'$ i $A'A = +\mathrm{m}$ lub $-\mathrm{m}$ uważamy za dane: $A''$ i $A''A$).

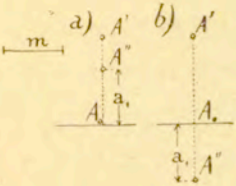
Mamy dane: oś rzutów, rzut $A'$, oraz odcinek, którego długość $= \mathrm{m}$ ma się równać wartości bezwzględnej odległości $\mathrm{a}_1 = \pm \mathrm{m}$ szukanego punktu $A$ do $\Pi_1$; umawiamy się również z góry, czy ta odległość ma być dodatnia czy ujemna, t. j. zakładamy wyraźnie, że $\mathrm{a}_1 = \mathrm{m}$ lub $\mathrm{a}_2 = -\mathrm{m}$. Rzecz jasna, że zamiast odcinka wraz z tą umową dodatkową może być również dana liczba względna, np. $+3$ *cm*, $-4$ *cm*, wyrażająca odległość $A$ od $\Pi_1$ w jakichś znanych jednostkach długości. Przypuśćmy, że ta odległość jest dodatnia, $= \mathrm{m}$.

Przedewszystkiem, rzut $A''$ winien leżeć na prostopadłej do osi $x$, przeciągniętej przez $A'$ (§ 13, tw. 1); oznaczmy punkt przecięcia tej prostopadłej z osią przez $A_0$. Następnie (§ 12, tw. [A]) odległość szukanego rzutu $A''$ od osi rzutów czyli $A_0A''$ musi się równać co do wielkości i znaku odległości $A$ do $\Pi_1$ czyli $A'A$, a więc $\mathrm{m}$: $A_0A'' = \mathrm{m}$. Ostatecznie punkt $A''$ leży na prostej $A'A_0 \perp x$, *ponad osią* (p. umowa co do znaków w § 12 i 13), w odległości $\mathrm{m}$ od osi. Gdybyśmy się umówili, że odległość $\mathrm{a}_1$ punktu $A$ od $\Pi_1$ ma być ujemna, to punkt $A''$ leżałby pod osią. W pierwszym przypadku szukany punkt leży sam ponad płaszczyzną poziomą, w drugim — pod tą płaszczyzną, np. jak na rysunku 30-ym, w ćwiartce II-ej (rys. 30 a) lub III-ej (rys. 30 b).

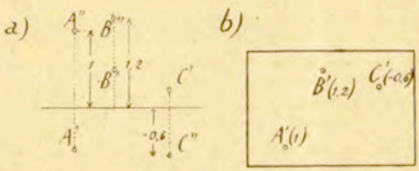
Zadanie to, nader elementarne, posiada jednak znaczenie zazadnicze. Możnaby je sformułować w taki sposób: Mamy rzut cechowany $A'$ (m) lub $A'$ (—m) jakiegoś punktu $A$ na pewną płaszczyznę $\Pi_1$ oraz linię przecięcia $x$ tej płaszczyzny z inną płaszczyzną $\Pi_2$. Widzimy teraz wyraźnie, że chodzi tu o przejście od jednej metody do drugiej: *od rzutów cechowanych (§ 9) do rzutów na dwie płaszczyzny (§ 10). Łatwo też rozwiązać zadanie odwrotne*:

*Zad. 2. Mamy rzuty poziome i pionowe punktu lub dowolnego układu punktów; zaopatrzyć rzuty poziome w odpowiednie cechy (czyli znaleźć odległości badanych punktów od $\Pi_1$).*

Rzecz jasna, wystarczy przy każdym rzucie *poziomym* napisać liczbę względną dodatnią lub ujemną, wyrażającą odległość od



Rys. 30.



Rys. 31.

osi odpowiedniego rzutu *pionowego*, liczoną zawsze ku górze, gdy jest dodatnia, w dół, gdy ujemna. Odrzucając następnie rzuty pionowe i oś rzutów, otrzymujemy rysunek, wyznaczający badany układ punktów według metody, wyłożonej w § 9. To samo możnaby uczynić w stosunku do rzutów pionowych, a odrzucić rzuty poziome.

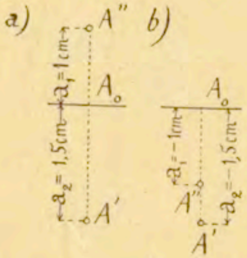
Po wyjaśnieniach poprzednich nie powinno nasuwać żadnych trudności:

*Zad. 3.* Mamy dane: linię rzutów, t. j. prostą $l$, na której mają leżeć rzuty punktu, prostopadłą do osi $x$, oraz odległości tego punktu od obu płaszczyzn rzutów: $a_1$ i $a_2$. Wyznaczyć oba rzuty.

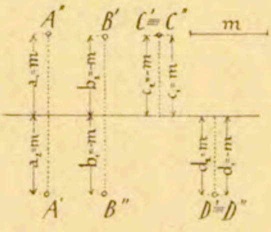
Wystarczy odmierzyć wzdłuż prostej $l$ od punktu $A_0 \equiv [lx]$ odległości: $A_0A''$, równą co do wielkości i znaku danej odległości $a_1$ omawianego punktu od $\Pi_1$ (jeżeli $+$, to w górę, jeżeli —, to w dół), oraz $A_0A'$, równą co do wielkości i znaku danej odległości $a_2$ od $\Pi_2$ (jeżeli $+$, to w dół, jeżeli —, to w górę). Na rys. 32 mamy kombinacye: a) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, czyli krócej: $(+, +)$, oraz b) $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ czyli $(-, +)$.

Gdybyśmy nie czynili żadnej umowy co do znaku danych odległości i rozważali jedynie ich wartości bezwzględne, to otrzymalibyśmy w ogólności 4 różne rozwiązania, odpowiadające kombinacyom: $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$. Podobnież zadanie 1-sze posiadałoby w takich warunkach dwa rozwiązania. Widzimy tutaj, jak umowa co do znaków powoduje *jednoznaczność* konstrukcyi, usuwając wszelkie wątpliwości.

Jeżeli punkt jest jednakowo oddalony od obu płaszczyzn rzutów, to zgodnie z twierdzeniem [$A$] z § 12, na którem się wciąż opieramy, rzuty jego leżą w jednakowej odległości od osi. Zależnie od tego, czy odległości punktu od $\Pi_1$ i $\Pi_2$ posiadają: 1) ten sam znak czy też 2) różne znaki, rzut poziomy i pionowy leżą



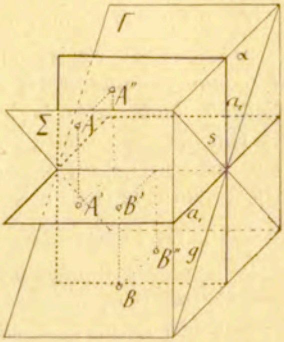

Rys. 32.




Rys. 33.

1) symetrycznie względem osi rzutów, 2) nakrywają się. Na rys. 33 mamy rzuty punktów, położonych w ćwiartkach I i III i odpowiadających dwu kombinacyom pierwszego rodzaju: $(+m, +m)$ i $(-m, -m)$, oraz rzuty punktów, położonych w ćwiartce II, w odległości $+m$ od $\Pi_1$ i $-m$ od $\Pi_2$, i w ćwiartce IV, w odległości $-m$ od $\Pi_1$ i $+m$ od $\Pi_2$. Nawzajem, jeżeli rzuty punktów są symetryczne względem osi $x$ lub nakrywają się, to punkt ten leży w jednakowej odległości od obu płaszczyzn rzutów, w ćwiartce, którą łatwo wyznaczamy na zasadzie twierdzeń z poprzedniego paragrafu. Owóż, miejsce geometryczne punktów, jednakowo oddalonych od dwu przecinających się płaszczyzn $\Pi_1$ i $\Pi_2$, składa się z dwu płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych, utworzonych przez te płaszczyzny.

Dowód tego twierdzenia, niemal oczywistego zresztą, daje się oprzeć bez trudności na twierdzeniu planimetrycznem o dwusiecznych kątów, utworzonych przez dwie proste. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$ zostały przecięte wzdłuż prostych $a_1$ i $a_2$ przez płaszczyznę $\alpha$, prostopadłą do $x\equiv[\Pi_1\Pi_2]$. Dwusieczne $s$ i $g$ kątów, utworzonych przez $a_1$ i $a_2$, stanowią miejsce geometryczne punktów płaszczyzny $\alpha$, jednakowo oddalonych od $a_1$ i $a_2$, a przez to samo, stosownie do znanych twierdzeń o płaszczyznach prostopadłych, miejsce geom. *punktów płaszczyzny* $\alpha$, jednakowo oddalonych od $\Pi_1$ i $\Pi_2$. Nadając płaszczyźnie $\alpha$ wszelkie możliwe położenia, w których jest $\perp x$, nie pominiemy żadnego punktu przestrzeni (każdy musi przystać do $\alpha$ w pewnem położeniu tej płaszczyzny), a więc możemy orzec z całą pewnością, że zbiór punktów, należących do prostych $s$ i $g$ we wszystkich ich możliwych położeniach, stanowi właśnie miejsce geometryczne punktów *przestrzeni trójwymiarowej*, jednakowo oddalonych od $\Pi_1$ i $\Pi_2$. Owóż, jak wynika niemal bezpośrednio z określeń, dotyczących kątów dwuściennych, proste $s$ i $g$ zakreślają płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych, utworzonych przez $\Pi_1$ i $\Pi$. Przeto twierdzenie możemy już uważać za uzasadnione



Rys. 34.

Z uwag powyższych wynika:

*Twierdzenie o płaszczyznach dwusiecznych. Jeżeli rzuty punktu są położone symetrycznie względem osi rzutów, to sam punkt leży na płaszczyźnie dwusiecznej, należącej do I i III ćwiartki — i nawzajem, każdy punkt, leżący w tej płaszczyźnie, posiada rzuty symetryczne względem osi rzutów. Jeżeli rzuty punktu nakrywają się, to punkt jest położony w płaszczyźnie dwusiecznej, należącej do ćwiartek II-ej i IV-ej i nawzajem.*

Druga z tych płaszczyzn będzie odgrywała dość ważną rolę w niektórych konstrukcyach — będziemy ją nazywali stale *płaszczyzną spółrzutową*. Pierwszej może być nadana nazwa *płaszczyzny symetryczno-rzutowej*



## ĆWICZENIA.

1. Wymienić kilka brył lub wogóle figur, które posiadają ten sam rzut prostokątny w postaci kwadratu.

2. To samo, gdy rzut ma być: a) równoległy ukośny; b) środkowy.

3. Rozważyć te same zagadnienia, jeżeli rzut składa się z dowolnej krzywej zamkniętej i ograniczonego przez nią pola.

4, 5, 6, 7. Są dane rzuty dwu punktów na pewną płaszczyznę poziomą $\Pi$, wraz z ich cechami: $A'$ (*2,4*) i $B'$ (*0,6*). Długość $A'B'$, mierzona tą samą jednostką, $=4$

4. Obliczyć wysokość ponad $\Pi$ (lub głębokość) punktu $C$ prostej $[AB]$ o rzucie $C$, położonym między $A'$ i $B'$, tak że $A'B'=0{,}8$. Innemi słowy: zaopatrzyć $C'$ w odpowiednią cechę.

5. Znaleźć rzuty punktów $D$ i $E$ prostej $[AB]$, gdy znamy ich cechy: $1{,}5$ i $-0{,}3$.

6. *Zestopniować* prostą $[AB]$, to jest wyznaczyć na $[A'B']$ (w obrębie, uwzględnionym na rysunku) rzuty punktów $[AB]$, posiadające cechy całkowite.

7. Wyznaczyć rzuty punktów, dzielących $AB$ na 4 równe części.

*Wskazówka.* Należy opierać się na *proporcyonalności pomiędzy rzutami różnych odcinków tej samej prostej a różnicami cech ich punktów końcowych,* którą łatwo uzasadnić zapomocą podobieństwa trójkątów. Zgodnie z tem prawem, dzieląc np. odcinek $AB$ na 3 równe części, otrzymujemy rzuty o cechach: $1{,}4$; $0{,}4$, aby otrzymać rzut $X'$, posiadający cechę, równą zeru, należy podzielić $A'B'$ w stosunku $A'X' : X'B' = 2{,}4 : 0{,}6$ i t. p.

9, 10, 11, 12. Przy tych samych danych:

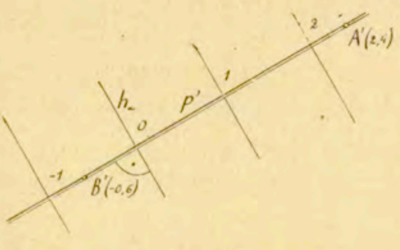
9. Obliczyć *spadek* prostej $[AB]$, t. j. stosunek różnicy odległości dwu jej punktów od $\Pi$ do odległości rzutów tych punktów, wyrażający *tangens* kąta nachylenia prostej $p\equiv[AB]$ do $\Pi$.

10. Obliczyć kąt nachylenia $p$ do $\Pi$.

11. Znaleźć długość odcinka $AB$ (§ 6, 1).

12. Wyznaczyć spółczynnik skrócenia dowolnego odcinka prostej $p$ (§ 6).

13, 14. Płaszczyzna jest najzupełniej wyznaczona, jeżeli mamy rzut jej dowolnej linii spadku, stopniowany lub przynajmniej zaopatrzony w cechy, odpowiadające jakimś dwu punktom. Rzut taki rysuje się zwykle jako kresa podwójna. Uważajmy prostą $p$ z poprzednich zadań za linię spadku pewnej płaszczyzny $\alpha$.



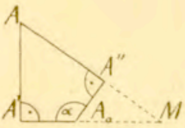

Rys. 35.

13. Wyznaczyć ślad tej płaszczyzny oraz jej warstwic o cechach: $\pm 1$, $\pm 2$.

14. Znaleźć rzut linii przecięcia $\alpha$ z płaszczyzną $\beta$, daną również zapomocą rzutu cechowanego jednej z jej linii spadku. (Jest to miejsce geometryczne punktów przecięcia par warstwic dwu płaszczyzn, posiadających te same cechy, co pozwala na natychmiastowe zestopniowanie tego rzutu).

15. Odległości rzutów punktu $A$ na dwie płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$, nie prostopadłe do siebie, od osi rzutów, są dane co do wartości bezwzględnej, z pominięciem rozróżnień co do znaków: $A_0A' = \mathbf{a}$, $A_0A'' = \mathbf{b}$. Wyznaczyć — również tylko co do wartości bezwzględnej — odległości punktu $A$ od płaszczyzn rzutów, t. j. odcinki $A'A$ i $A''A$, jeżeli

$\sphericalangle A'A_0A''$ jest równy: a) $30^0$; b) $45^0$; c) $60^0$; d) $120^0$ lub wogóle dowolny ($\alpha$).




Rys. 36.

*Wskazówka.* Należy zużytkować podobieństwo trójkątów, jak np.:

$$\triangle MA'A \text{ i } \triangle MA''A_0.$$

Gdy $180^0 > \alpha > 90^0$, otrzymujemy bez roztrząsań szczegółowych: $A'A = \dfrac{b - a\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $A''A = \dfrac{a - b\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Gdy $\alpha < 90^0$, należy rozróżnić trzy przypadki, w zależności od związków pomiędzy stosunkiem $\frac{a}{b}$ a $\cos\alpha$. W każdym razie zawsze:

$$A'A = \left|\frac{b - a\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|, \quad A''A = \left|\frac{a - b\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|.$$

16 Uzasadnić niemożliwość istnienia prostej, której rzuty posiadałyby jedno z położeń, omawianych w § 11, 2), zapomocą pierwszego określenia rzutu prostej, jako miejsca geometrycznego rzutów jej punktów. [Wskazujemy, że do jakiegoś punktu jednego „rzutu“ prostej, uważanego za takiż rzut jakiegoś punktu w przestrzeni, nie można dobrać drugiego rzutu tak, aby był położony na odpowiednim „rzucie“ prostej].

17. Wyznaczyć na jednej płaszczyźnie rysunku położenie rzutów, odpowiadające różnym położeniom samego punktu w przestrzeni, zapomocą twierdzenia [A] z § 12 i tablicy, podanej w tym paragrafie, bez odwoływania się do modelu lub wyobraźni. (*Przypomnienie*: $A_0A'$—dodatnie, gdy $A'$ pod osią, ujemne, gdy $A'$ nad osią; $A_0A''$—przeciwnie!).

18. Dowieść którego kolwiek z twierdzeń odwrotnych względem twierdzeń, podanych w § 13. (Otrzymujemy w ten sposób tyle ćwiczeń, ile możliwych twierdzeń odwrotnych).

19. Co się zmieni w układzie rzutów, jeżeli będziemy przykładali do części górnej płaszczyzny pionowej, uważanej zawsze za dodatnią, $+\Pi_2$, nie część tylną, lecz część przednią, dodatnią, płaszczyzny poziomej? Wyznaczyć przy tem założeniu różne położenia rzutów, odpowiadające danym położeniom punktu w przestrzeni.

20. Mamy dane na płaszczyźnie rysunku, przy użyciu zwykłej umowy co do nakrywania się $\Pi_1$ i $\Pi_2$, rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$. Wyznaczyć: rzuty punktów $B$, symetrycznego z $A$ względem $\Pi_1$, $C$, symetrycznego z $A$ względem $\Pi_2$, i $D$, sym. z $A$ względem osi rzutów $x$. Wypadki szczególne: a) $A \subset \Pi_1$, b) $A \subset \Pi_2$, c) $A \subset x$.

21. To samo w stosunku do odcinka $AB$. Rozróżnić przypadki: a) gdy $A$ i $B$ leżą w tej samej ćwiartce; b) gdy $A$ i $B$ leżą w różnych ćwiartkach; c) gdy $B \subset x$.

22. Jest dany rzut $A'$, położony pod osią. Znaleźć $A''$, jeżeli odległość punktu $A$ od płaszczyzny poziomej rzutów $A'A =$ a) *2,5 cm*, b) *—2 cm*

23. Są dane: rzut $A''$, położony nad osią, oraz odległość $A$ od $\Pi_2$, $A''A =$ a) *3 cm*. b) *—2,4 cm*. Znaleźć $A'$. To samo, gdy $A''$ leży pod osią rzutów.

24. Wyznaczyć rzuty punktów, których odległości od $\Pi_1$ i $\Pi_2$ równają się odpowiednio: a) *—1,5 cm, —2,5 cm*; b) *+4 cm, +2 cm*; c) *—3 cm, +2 cm*; d) *+2 cm, —3,2 cm*. Linie rzutów (nieograniczone) uważamy za dane

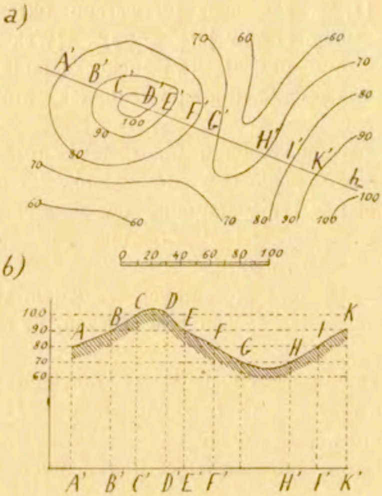
*Uwaga.* Przy rozwiązywaniu, zgodnie ze znaną umową co do znaków takich zagadnień jak 22, 23, 24 należy uprzytamniać sobie położenie samego, punktu w przestrzeni.

25. Jest dany jeden z rzutów jakiejkolwiek krzywej, leżącej w płaszczyźnie symetryczno-rzutowej. Wyznaczyć drugi rzut.

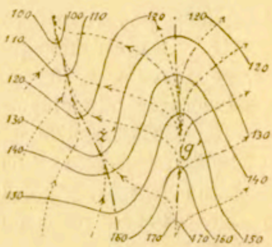
To samo, gdy krzywa leży w płaszczyźnie spółrzutowej.

26. Wyznaczyć wskazany przekrój pionowy miejscowości podług jego planu warstwicowego.

Dane: 1) szereg warstwic z ich cechami; 2) ślad (i jednocześnie rzut) płaszczyzny przekroju; np. $h_\alpha$ na rys. 33, podanym dla przykładu; a) plan warstwicowy; b) przekrój pionowy: odcinki $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ i t. d. przeniesione bez zmiany.




Rys. 37.



Rys. 38.

27. Wyznaczyć rzuty punktów przebicia powierzchni topograficznej przez prostą, daną przez rzut stopniowany. *Wskazówka*: Wyznaczyć przekrój powierzchni płaszczyzną, rzutującą daną prostą, i od punktów przecięcia się z tym przekrojem odtworzonej jednocześnie prostej przejść do ich rzutów poziomych na rzucie prostej.

28. Znaleźć rzut linii przekroju powierzchni topograficznej, danej zapomocą planu warstwicowego, płaszczyzną, wyobrażoną zapomocą układu warstwic. *Wskazówka*: Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia warstwic o tych samych cechach, jak w ćw. 14.

29. Ćwiczenia w rozpoznawaniu rodzaju miejscowości podług jej rzutu warstwicowego. Wyznaczanie rzutów linii spadku, jako krzywych, przecinających rzuty warstwic pod kątem prostym. Zastosowania praktyczne: wyznaczanie rzutów: *linii żłobowych* czyli *linii spływu wód* (np. $\acute{z}'$ na rys. 38) i *linii grzbietowych* czyli *linii rozdziału wód* (np. $g'$ na tym samym rysunku); wybór dróg oraz punktów, nadających się do tych lub innych celów praktycznych.

*Uwaga.* Rzuty linii spływu wód i linii rozdziału wód wyglądają zupełnie podobnie; odróżniamy je podług tego, że w pierwszym przypadku cechy wzrastają w kierunku, wskazanym przez stronę *wypukłą* warstwic; w drugim — w kierunku przeciwnym, t. j. wskazanym przez stronę wklęsłą. Łatwo to sprawdzimy, badając kierunek, w którym się zniżają linie spadku, spadające ku linii żłobowej, a podnoszące się ku linii grzbietowej. Na rys. 38-ym oznaczyliśmy ten kierunek na samych liniach spadku, złożonych z kresek (warstwice — linie nie przerywane).

## ROZDZIAŁ IV.

# Punkt (ciąg dalszy) i prosta.

§ 15. **I. Parę uwag ogólnych.** W geometryi wogóle, a geometryi wykreślnej w szczególności, należy odróżnić dwie różne klasy zagadnień i zależności. Z jedną z nich mamy do czynienia, gdy mówimy o *długości* odcinków, *wielkości* kątów, powierzchni i t. d., gdy wyrażamy te wielkości zapomocą liczb i czynimy nad nimi obliczenia lub też wyznaczamy je konstrukcyjnie — są to zagadnienia i zależności *miarowe*. Do zależności tych należą: równość, proporcyonalność, prostopadłość prostych i t. d. Możemy jednak w wielu wypadkach zupełnie pominąć wszelkie pojęcia miarowe i uwzględniać jedynie takie związki, jak *przynależność* jednego utworu do drugiego (np. punktu do prostej, prostej do płaszczyzny i t. d.), *porządek*, w którym następują po sobie punkty prostej, proste pęku i t. d., *podział* płaszczyzny na części przez prostą lub krzywą zamkniętą — dalej takie zadania, w których chodzi o wyznaczenie jakiegoś utworu, bądźto jako należącego jednocześnie do paru lub kilku innych (np. punktu jako punktu przecięcia dwu prostych, prostej, jako linii przecięcia dwu płaszczyzn) bądź też, jako stanowiącego wspólne podłoże innych utworów, zawierającego te utwory (wyznaczanie prostej przez dwa punkty, płaszczyzny przez trzy punkty lub dwie proste, przecinające się i t. d.). Tego rodzaju zależności i zagadnienia, w których uwydatnia się — w najbardziej ograniczonem znaczeniu tego słowa — jedynie *położenie* wzajemne badanych utworów, bywają nazywane *graficznemi* czyli *wykreślnemi*. W przyszłości, równie jak dotychczas, będziemy się spotykali z obu tymi typami zagadnień.

Przy rozważaniu wszelkich zagadnień geometryi wykreślnej należy zawsze uprzytamniać sobie dokładnie ten fakt, wynikający z samej istoty użytej metody, że podstawę wszystkich konstrukcyi stanowi rysunek, położony wprawdzie w *jednej płaszczyźnie*, ale składający się z *z dwu części*, odpowiadających sobie wzajemnie. Gdy mówimy, że jest dany punkt lub prosta, to znaczy, że są dane *dwa* rzuty tego punktu lub prostej; wyznaczyć punkt lub prostą, to znaczy znaleźć *oba* rzuty i t. d. Podobne uwagi można uczynić co do sposobów oznaczania płaszczyzny, o czem pomówimy dokładnie nieco dalej. Ową zwykłą *dwoistość* obrazu należy odróżniać od rzeczywistej dwoistości lub wielorakości samych punktów, prostych i t. d. w przestrzeni.

II. **Położenie wzajemne dwu punktów.** Dwa punkty w przestrzeni mogą albo różnić się od siebie, albo też nakrywać się wzajemnie, t. j. stanowić ten sam punkt. Z twierdzeń: 1-go z § 4-go oraz 1-go z § 10-go („Każdy punkt przestrzeni posiada na danej płaszczyźnie jeden ściśle określony rzut prostokątny" i „Rzuty prostokątne punktu na dwie nierównoległe płaszczyzny określają w zupełności i jednoznacznie położenie tego punktu w przestrzeni") wynika bezpośrednio twierdzenie:

*Warunek niezbędny i wystarczający do tego, by dwa punkty w przestrzeni nakrywały się wzajemnie, stanowi jednoczesne nakrywanie się ich rzutów poziomych i rzutów pionowych*; do tego, aby $A \equiv B$, potrzeba i wystarcza, iżby $A' \equiv B'$, $A'' \equiv B''$; czyli inaczej: 1) z warunku $A \equiv B$ wynikają związki $A' \equiv B'$, $A'' \equiv B''$ (tw. 1 z § 4); 2) nawzajem z warunków $A' \equiv B'$, $A'' \equiv B''$, razem wziętych, wynika $A \equiv B$ (tw. 1 z § 10).

Ze zbiegu jednej pary rzutów można wnioskować bezpośrednio lub zapomocą odwrócenia twierdz. 2 z § 4-go tyle tylko, że punkty, którym odpowiadają te rzuty, leżą na jednej prostej, prostopadłej do odpowiedniej płaszczyzny rzutu; t. np. z $A' \equiv B' \equiv M$ wynika, przy oznaczeniu przez $k$ prostej $[\supset M \perp \Pi_1]$, że $A \subset k$ i $B \subset k$.

§ 16. **Położenie wzajemne punktu i prostej. Odcinek, promień, prosta nieograniczona.** Z samego określenia pojęcia rzutu prostej wynika odrazu, zgodnie z tem, cośmy już zaznaczyli w § 4 [tw. (A)].

*Twierdzenie 1. Jeżeli punkt leży na prostej, to oba jego rzuty leżą na odpowiednich rzutach prostej.* Jeżeli $A \subset a$, to $A' \subset a'$, $A'' \subset a''$. Twierdzenie (B) z tegoż § 4-go, przy uwzględnieniu twierdzenia 1-go z § 13, przybiera w zastosowaniu do dwu połączonych rzutów postać:

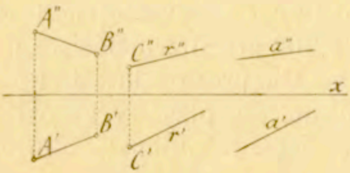
*Twierdzenia* (*A*): Rzutami odcinka są w ogólności[1]) dwa odcinki, położone w ten sposób, iż każdy koniec jednego z nich leży

---

[1]) „W ogólności" lub „naogół" oznacza zwykle w matematyce: z wyjątkiem pewnych stosunkowo rzadkich wypadków szczególnych.

na tej samej prostopadłej do osi rzutów z którymś końcem drugiego [np. $A'B'$ i $A''B''$ na rys. 39]. Można również uzasadnić:

*Twierdzenie* (*B*). Rzutami promienia (t. j. prostej ograniczonej z jednej strony) są naogół promienie, wychodzące z punktów, położonych na jednej prostopadłej do osi rzutów i leżące z tej samej strony tej prostopadłej (np. $r'$ i $r''$ na rys. 39); promień o początku $C$, przechodzący przez punkt $D$, będziemy również oznaczali niekiedy przez $CD$], stosownie do obranej zasady znakowania).




Rys. 39.

*Twierdzenie* (*C*). Rzutami prostej nieograniczonej są naogół również proste nieograniczone (np. $a'$ i $a''$). Twierdzenia (*A*), (*B*) i (*C*) nie dadzą się zastosować, jeżeli odcinek, promień lub prosta nieograniczona posiada kierunek prostopadły do jednej z płaszczyzn rzutów, ponieważ odpowiedni rzut staje się w takim razie punktem, zgodnie z tw. 2-em i uwagą do tw. 3 w § 4-ym.

Uczący się może wprowadzić odpowiednie omówienia po przejściu następnego paragrafu.

Nawzajem:

*Twierdzenie 2 (odwrotne): Jeżeli oba rzuty punktu leżą na odpowiednich rzutach prostej, to sam punkt w przestrzeni leży na prostej.*

Istotnie, jeżeli $A' \subset a'$, to znaczy, że punkt $A$ musi leżeć w płaszczyźnie $\alpha_1$, rzutującej prostą $a$ na płaszczyznę $\Pi_1$, a to zgodnie z odwróceniem twierdzenia 4a z § 4; na tej samej zasadzie z warunku $A'' \subset a''$ wynika, że $A \subset \alpha_2$. Ostatecznie $A$, należąc jednocześnie do $\alpha_1$ i do $\alpha_2$, należy do prostej $[\alpha_1 \alpha_2]$ czyli do prostej $a$. C. b. d. o.

Twierdzenie 2 nie jest słuszne, jeżeli płaszczyzny $\alpha_1$ i $\alpha_2$ nie są różne od siebie, lecz stanowią tę samą płaszczyznę, t. j. jeżeli prosta $a$ leży w płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutów (p. § 10). Łatwo zdać sobie sprawę, dlaczego podany dowód traci wtedy swą wartość. Gdy jeden z rzutów prostej jest punktem np. $a' \equiv A'$, $a'' \subset A''$, twierdzenie pozostaje słusznem, a dowód jest jeszcze prostszy.

Twierdzeniu 2-mu można nadać jeszcze, zgodnie z twierdzeniem 1-em z § 13, postać następującą:

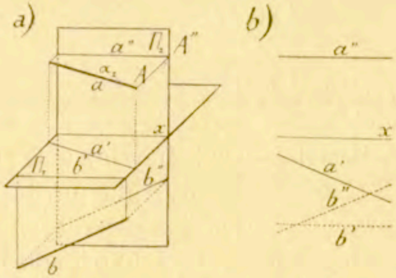
*Twierdzenie 2 a. Dwa punkty, położone na tej samej prostopadłej do osi rzutów i należące odpowiednio do rzutów jakiejś prostej, stanowią rzuty punktu, należącego do tej prostej.*

Twierdzeniom (A), (B) i (C) odpowiadają twierdzenia odwrotne. Więc, np.: Dwie proste nieograniczone, wykreślone na płaszczyźnie rysunku, mogą być uważane za rzuty prostej nieograniczonej, z wyjątkiem pewnych przypadków szczególnych, co do których wystarczy powołać się na § 11. Czy odwrócenie twierdzeń (A) i (B) wymaga podobnych zastrzeżeń?

*Uwaga.* Prosta, położona w płaszczyźnie prostopadłej do osi rzutów, jest, równie jak wszelka inna, najzupełniej wyznaczona, gdy są dane rzuty $A'$, $A''$ i $B'$, $B''$ dwu jej punktów $A$ i $B$. Jakiś trzeci punkt $C$, położony na tej prostej, posiada oczywiście rzuty na $[A'B'] \equiv [A''B'']$ i musi oprócz tego spełniać warunki: $A'C' : C'B' = AC : CB$, $A''C'' : C''B'' = AC : CB$ (§ 6, I), więc: $A'C' : C'B' = A''C'' : C''B''$. Nawzajem łatwo dowieść, że jeżeli ten warunek jest spełniony, punkt $C$ musi należeć do $[AB]$. Możemy na tej zasadzie orzekać o przynależności punktu do prostej o kierunku prostopadłym do osi rzutów, której dwa punkty są dane zapomocą rzutów, wyznaczać rzut pionowy punktu, który ma należeć do takiej prostej, gdy jest dany rzut poziomy i t. p.

§ 17. **Różne kierunki prostej względem płaszczyzn rzutów.** *I. 1. Prosta, równoległa do płaszczyzny poziomej* (ale nie prostopadła do pionowej) *posiada rzut pionowy równoległy do osi.*

Istotnie: płaszczyzna $\alpha_2$, rzutująca na płaszczyznę pionową, musi być równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów $\Pi_1$, ponieważ zawiera napewno dwie proste o różnych kierunkach, równoległe do $\Pi_1$: samą omawianą prostą $a$ oraz dowolną z prostych rzutujących na $\Pi_4$, np. $AA''$ ($AA'' \parallel \Pi_1$, gdyż $AA'' \perp \Pi_2$). Zatem linie przecięcia $\Pi_2$ z płaszczyznami $\Pi_1$ i $\alpha_2$ są równoległe: $[\Pi_2\alpha_2] \parallel [\Pi_2\Pi_1]$ czyli $a'' \parallel x$. C. b. d. o.



Rys. 40.

Warto zauważyć, że przed obrotem płaszczyzny poziomej $a' \parallel a$ (§ 4, tw. 5).

Podobnież dowodzimy, że:

*2. Prosta, równoległa do płaszczyzny pionowej* (ale nie $\perp$ do poziomej) *po-*

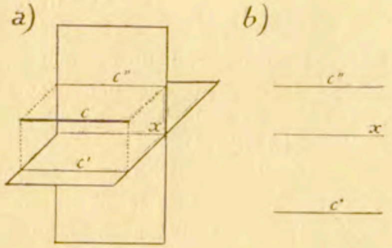
*siada rzut poziomy równoległy do osi rzutów*: jeżeli $b \parallel \Pi_2$, to $b' \parallel x$ (a $b'' \parallel b$, przed obrotem płaszczyzny poziomej).

Z tych dwu twierdzeń wynika następujące:

3. *Oba rzuty prostej, równoległej do osi rzutów, są równoległe do osi rzutów.*

Istotnie, jeżeli prosta $c \parallel x$, to $c \parallel \Pi_1$ i $c \parallel \Pi_2$; z tego, że $c \parallel \Pi_1$, wynika, że $c'' \parallel x$ (tw. 1); z tego, że $c \parallel \Pi_2$, wynika $c' \parallel x$.

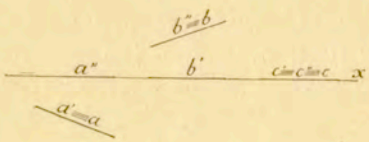
C. b. d. o.




Rys. 41.

Jeżeli prosta, równoległa do płaszczyzny poziomej, zbliża się do niej coraz bardziej, to zbliża się jednocześnie do swego rzutu poziomego, a rzut pionowy zbliża się do osi. Ostatecznie, znalazłszy się w płaszczyźnie poziomej, prosta przystaje do swego rzutu poziomego; rzut pionowy zaś przystaje wtedy do osi rzutów, ponieważ płaszczyzną rzutującą pionowo [$\supset a \perp \Pi_2$] staje się sama płaszczyzna pozioma. Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenia:

1 a. Prosta, położona w płaszczyźnie poziomej, posiada rzut pionowy na osi rzutów (prosta $a$ na rys. 42).




Rys. 42.

Podobnież:

2 a. Prosta, położona w płaszczyźnie pionowej rzutów, posiada rzut poziomy, przystający do osi (np. prosta $b$).

Wreszcie, rzecz oczywista, że

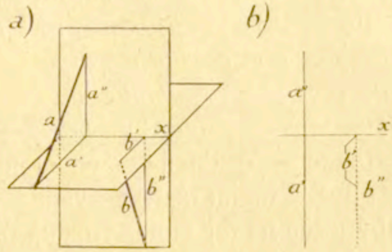
3 a. Oba rzuty prostej (ograniczonej lub nieograniczonej), przystającej do osi, przystają do siebie, do samej prostej i do osi rzutów.

II. Jak dowiedliśmy już w § 11-ym:

4. *Rzuty prostej*, nie prostopadłej do żadnej z płaszczyzn rzutów, ale *położonej w płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutów*, są również prostopadłe do osi rzutów, którą przecinają w tym samym punkcie, a więc, po sprowadzeniu obu obrazów do jednej płaszczyzny, *nakrywają tę samą prostą prostopadłą do osi rzutów* (p. rys. 25 i 43).

Na rys. 43-im wykreśliliśmy tylko te części rzutów prostej $a$, które odpowiadają odcinkowi tej prostej, zawartemu w I ćwiartce, oraz te części rzutów prostej $b$, które odpowiadają jej części, zawartej w IV ćwiartce. Gdyby chodziło o całą prostą $a$ lub $b$, oba rzuty musiałyby w każdym wypadku być nieograniczone i w zupełności przystawać do siebie.

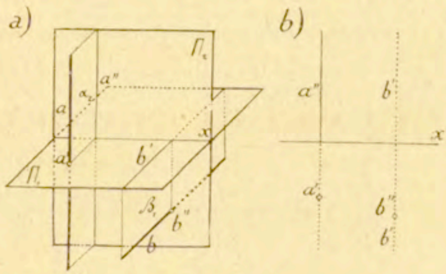
W dalszym ciągu, mówiąc bez bliższych zastrzeżeń o położeniu rzutów, będziemy mieli na myśli położenie ich na jednej wspólnej płaszczyźnie rysunku (*po* sprowadzeniu i t. d.). W przeciwnym wypadku będziemy dodawali wyraźne omówienia.



Rys. 43.

5. *Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny poziomej, to jej rzut pionowy jest prostą prostopadłą do osi rzutów, a rzut poziomy—punktem, należącym do tej prostej.*

Istotnie, przed sprowadzeniem obrazów do jednej płaszczyzny płaszczyzna rzutująca pionowo prostą, $\alpha_2 \equiv [\supset a \perp \Pi_2]$, jest w tym przypadku prostopadła do $\Pi_1$ z powodu że $a \perp \Pi_1$, a więc również prostopadła do osi $x$. Stąd wynika, że $a'' \equiv [\alpha_2 \Pi_2]$ musi być pro-



Rys. 44.

stopadłe do $x$, oraz że punkt (p. § 4, tw. 2) $a'$ leży na proste $[\alpha_2 \Pi_1]$, również prostopadłej do $x$, która po sprowadzeniu obrazów do jednej płaszczyzny, tworzy jedno z $a''$.

Podobnież:

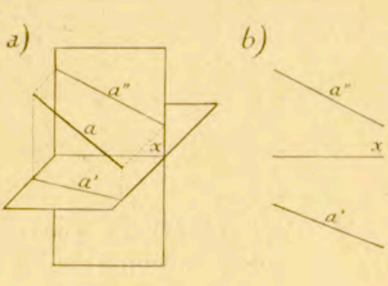
6. *Jeżeli prosta* (np. $b$ na rys. 44) *jest prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów, to jej rzut poziomy jest prostą, prosto-*

*padłą do osi rzutów, a rzut pionowy — punktem, należącym do tej prostej.*

Jeżeli prosta nietylko jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, ale jeszcze położona w drugiej, to ten z jej rzutów, który jest punktem, leży na osi rzutów, zgodnie z tw. 1a, 2a.

III. 7. *Jeżeli prosta w przestrzeni nie jest ani równoległa, ani prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów, ani też nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi rzutów, to jej rzuty stanowią proste, nie równoległe i nie prostopadłe do osi rzutów.*

Przedewszystkiem, żaden z rzutów prostej nie może być *punktem*, gdyż w takim razie wszystkie punkty prostej (§ 4, tw. 2) musiałyby leżeć na tej samej prostej, prostopadłej do danej płaszczyzny rzutów—wbrew założeniu, że omawiana prosta nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów. Prostopadłość któregokolwiek z rzutów do osi rzutów jest niemożliwa, gdyż w takim razie (§ 11) drugi rzut musiałby być albo punktem, cośmy już usunęli z rozważań, albo też prostą, prostopadłą do osi rzutów i przecinającą ją w tym samym punkcie, a więc prosta (§ 11) musiałaby leżeć w płaszczyźnie, prostopadłej do osi $x$. Wreszcie, gdyby np. rzut poziomy $a'$ był równoległy do osi $x$, a więc, po odwróceniu płaszczyzn rzutów do pierwotnego położenia w przestrzeni, i do płaszczyzny $\Pi_2$, to płaszczyzna, rzutująca $a$ na $\Pi_1$, musiałaby, zawierając $a \parallel \Pi_2$ i jakąkolwiek prostą, prostopadłą do $\Pi_1$ więc $\parallel \Pi_2$, być równoległą do $\Pi_2$. Stąd wynikłoby: $a \parallel \Pi_2$, wbrew założeniu. Tak samo usuwamy przypuszczenie: $a'' \parallel x$. Ostatecznie oba rzuty muszą być nachylone do osi rzutów. c. b. d. o.

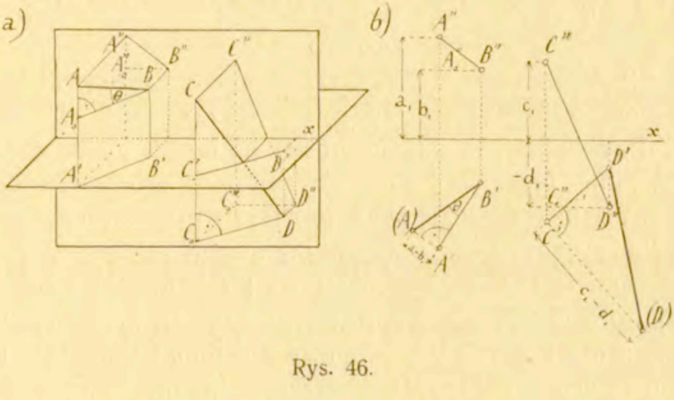



Rys. 45.

Podanym 10-ciu twierdzeniom odpowiada tyleż twierdzeń odwrotnych, np.: Jeżeli rzut *poziomy* jest równoległy do osi, to prosta jest równoległa do płaszczyzny *pionowej* i t. d. Możemy je uzasadnić albo bezpośrednio, jak to już uczyniliśmy np. w dowodzie tw. 7-go w stosunku do tw. 2, albo też zapomocą metody sprowadzenia do niedorzeczności.

Zauważmy, że warunek twierdzenia odwrotnego względem tw. 5-go i 6-go polega istotnie *tylko* na tem, że jeden z rzutów jest punktem: zarówno położenie prostej w przestrzeni, jak położenie drugiego rzutu są już przez to najzupełniej wyznaczone. Do przypadków „niemożliwych“, podanych w § 11, możemy tedy dołączyć kombinacye punktu z prostą, nie prostopadłą do osi rzutów, lub też prostopadłą do osi, ale nie przechodzącą przez ten punkt (na wspólnej płaszczyźnie rysunku).

§ 18. **Wyznaczenie rzeczywistej wielkości odcinka.** Po tych roztrząsaniach możemy się zastanowić jeszcze nad tem, jak wyznaczyć rzeczywistą wielkość odcinka o danych rzutach. Wystarczy przytem odróżnić 2 przypadki: 1) odcinek jest równoległy do jednej z płaszczyzn rzutów—w takim razie równa się swemu rzutowi na tę płaszczyznę (§ 6, I, wyp. 2); 2) odcinek nie jest równoległy do żadnej z płaszczyzn rzutu—stosujemy wtedy twierdzenie (A) z § 6, uwzględniając ten fakt, że odległości punktów od płaszczyzny *poziomej* są równe odległościom ich rzutów pionowych od osi, i nawzajem, odległości od $\Pi_2$ i t. d. Należy tedy zbudować trójkąt prostokątny, którego jedną przyprostokątną jest jeden z rzutów odcinka (np. poziomy), a drugą—różnica algebraiczna odległości rzutów jego końców na drugą płaszczyznę rzutów (np. na $\Pi_2$) czyli inaczej: różnica poziomów tych rzutów, równa odległości jednego od prostej, równoległej do osi $x$, przeciągniętej przez drugi. Podajemy przykłady takich konstrukcyi na rys. 46 b,

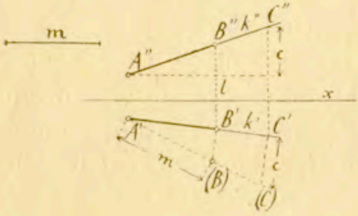


Rys. 46.

dołączając w celu lepszego uprzytomnienia tych związków rys. 46 a. Rozwiążmy jeszcze zadanie następujące:

Odmierzyć na danej prostej od danego jej punktu w określonym zwrocie daną odległość, t. j. mając rzuty prostej (np. $k$ na rys. 47) i punktu $A$ na niej, wyznaczyć rzuty punktu $B$, położonego na niej w danej odległości od tego punktu, na prawo lub na lewo. W tym celu wystarczy, jak poprzednio, wyznaczyć długość $A'(C)$ dowolnego odcinka prostej np. $AC$, odmierzonego od danego punktu w żądanym kierunku, i następnie po odmierzeniu

$A'(B) = \mathsf{m}$, znaleźć zapomocą $[(B)B'] \parallel [(C)(C')]$ punkt $B'$, spełniający warunek: $A'B' : A'C' = \mathsf{m} : A'(C)$. Ponieważ odcinki tej samej prostej są proporcyonalne do swych rzutów (§ 6), przeto $A'B'$ jest poszukiwanym rzutem poziomym; wyznaczenie $A''B''$ nie nastręcza już żadnych trudności: $(l \equiv [\supset B' \perp x]$, $B'' \equiv [lk''])$.



Rys. 47.

Zauważmy jeszcze, że stosując do *dowolnego* odcinka jakiejś prostej nieograniczonej konstrukcyę, użytą powyżej w celu wyznaczenia jego długości, osiągnąć możemy również inny cel a mianowicie: *wyznaczenie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny*. Tak np. $\sphericalangle A'B'(A)$ na rys. 46 b równa się kątowi $A_0BA$ z rys. 46 a, a to z powodu równości trójkątów $A'B'(A)$ i $A_0BA$, posiadających przyprostokątne równe. Otóż kąt $A_0BA$ równa się kątowi ostremu, utworzonemu przez prostą $[AB]$ i jej rzut poziomy, t. j. właśnie *kątowi nachylenia* $\theta$ *prostej* $[AB]$ *do* $\Pi_1$. Więc:

$$\sphericalangle A'B'(A) = \theta.$$

§ 19. **Ślady prostej. Podział prostej nieograniczonej na części, położone w różnych ćwiartkach.** I. Jak już określiliśmy w § 4-ym, śladem prostej na jakiejś płaszczyźnie nazywamy punkt przebicia tej płaszczyzny przez prostą. Szczególnie ważne znaczenie posiadają ślady prostej na płaszczyznach rzutów, zwane śladem poziomym i śladem pionowym. Będziemy je oznaczali literami $H$ (franc. „horizontal“) i $V$ („vertical“) z dodatkiem literki u dołu, oznaczającej prostą: więc np. $H_a$ ma znaczyć: ślad poziomy prostej $a$, $V_b$—ślad pionowy prostej $b$ i t. p. Gdy będzie chodziło o ślady na innych płaszczyznach, będziemy to zawsze wyraźnie omawiali.

Ślad poziomy $H_a \equiv [a\Pi_1]$ prostej $a$:

1) należy do prostej $a$:

$H_a \subset a$; stąd wynika (§ 16), że: $\quad H_a'' \subset a'', \quad\quad H_a' \subset a'$

2) należy do płaszczyzny poziomej rzutów $\Pi_1$:

$H_a \subset \Pi_1$; stąd wynika (§ 13), że: $\quad H_a'' \subset x, \quad\quad H_a' \equiv H_a$

Uwzględniając jeszcze ten fakt (§ 13, tw. 1), że $[H_a'H_a''] \perp x$, możemy z tych przesłanek wyciągnąć wnioski: $\quad H_a'' \equiv [a''x] \quad\quad H_a' \equiv H_a$

daje się wyznaczyć jako punkt przecięcia prostej $l$, wystawionej z $H_a''$ prostopadle do $x (l \equiv [\supset H_a'' \perp x])$ z prostą $a'$: $H_a' \equiv H_a \equiv [la']$.

Nawzajem, łatwo dowieść, że punkty $H_a'$ i $H_a''$, spełniające warunki: $H_a'' \equiv [a''x]$, $H_a' \equiv [la']$, przy oznaczeniu $l \equiv [\supset H_a'' \perp x]$, są rzutami śladu $[a\Pi_1]$. Istotnie: prosta $[H_a'H_a''] \equiv l$ jest prostopadła do $x$, więc $H_a'$ i $H_a''$ są to rzuty jakiegoś punktu $H_a$.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ponieważ} & H_a' \subset a',\ H_a'' \subset a'', & \text{więc} & H_a \subset a \\ \text{ponieważ} & H_a'' \subset x, & \text{więc} & H_a \subset \Pi_1 \end{array}\right\} \text{stąd: } H_a \equiv [a\Pi_1].$$

c. b. d. o.

Geometryczną treść tych rozumowań można sobie jeszcze uprzytomnić zapomocą modelu lub rysunku w rodzaju rys. 48a; nie wpłynie to jednak bynajmniej na osiągniętą już ścisłość dowodu.

Uzasadniliśmy tedy:

*Twierdzenie 1. Rzut pionowy śladu poziomego prostej a jest to punkt przecięcia rzutu poziomego a'' z osią a; rzut poziomy jest to punkt przecięcia prostopadłej do osi, wystawionej z rzutu pionowego, z rzutem poziomym a'' prostej.*

Podobnież:

*Twierdzenie 2. Rzut poziomy śladu pionowego prostej a jest to punkt przecięcia rzutu poziomego a' prostej z osią x; rzut pionowy jest to punkt przecięcia prostopadłej do osi, wystawionej z rzutu poziomego, z rzutem pionowym a'' prostej.*

Istotnie:

$$\begin{array}{lllll|l} V_a \equiv [a\Pi] \text{ czyli} & V_a \subset a, & \text{stąd} & V_a' \subset a', & & V_a'' \subset a'' \\ & V_a \subset \Pi_2 & \text{"} & V_a' \subset x, & & V_a'' \equiv V_a \\ & V_a'V_a'' \perp x & & & & \\ \hline \text{więc:} & & & V_a' \equiv [a'x'] & & V_a'' \equiv V_a \equiv [ka''], \end{array}$$

jeżeli $k$ oznacza prostą $[\supset V_a' \perp x]$.

c. b. d. o.

Najczęściej, gdy chodzi o ślady, mamy do czynienia z takiem zadaniem:

[Zad. 1]. Dane: rzuty prostej $a'$, $a''$;
znaleźć: rzuty śladów: $V_a$ i $H_a$.

Zgodnie z twierdzeniem 1-em i 2-em, konstrukcya winna mieć przebieg następujący:

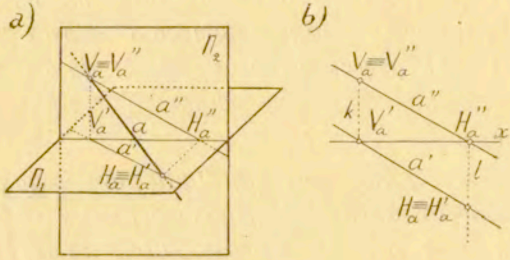
$$H_a'' \equiv [a''x],\quad l \equiv [\supset H_a \perp x],\quad H_a' \equiv H_a \equiv [la']$$
$$V_a' \equiv [a'x],\quad k \equiv [\supset V_a' \perp x],\quad V_a'' \equiv V_a \equiv [ka''].$$

Należy zauważyć wzajemność, polegającą na tem, że przy konstrukcyi śladu *poziomego* wyznaczamy z początku jego rzut *pionowy*; przy konstrukcyi śladu *pionowego*—z początku jego rzut *poziomy*.

Należy zwrócić uwagę na następujące przypadki szczególne:

1) Prosta leży w płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutów: $a' \perp x$, $a'' \perp x$. W takim rzuty $a'$ i $a''$ nie wyznaczają ani prostej ani jej śladów — konstrukcya ogólna daje $H_a''$ i $V_a'$ w tym samym punkcie, ale nie może wyznaczyć $H_a'$ ani $V_a''$ (dlaczego?)

2) Jeden z rzutów jest równoległy do osi, np. $a'$. W takim razie punkt $V_a' \equiv [a'x]$, który odsuwa się coraz dalej, gdy $a'$, obracając się dokoła któregoś ze swych punktów, zbliża się do owego położenia równoległego do $x$, wogóle nie istnieje w odległości skończonej — ucieka, jak się mówi, w nieskończoność [1]). Podobnież nie istnieje w odległości skończonej $V_a \equiv V_a''$, ponieważ prosta $k \equiv [\supset V_a' \perp x]$ oddala się wraz z $V_a'$ w nieskończoność. Można




Rys. 48.

było z góry przewidzieć ten wynik, ponieważ z $a' \parallel x$ wynika, że $a \parallel \Pi_2$, więc $a$ nie przebija płaszczyzny $\Pi_2$ (w odległości skończonej). $H_a''$ i $H_a'$ dadzą się wyznaczyć jak zwykle (p. rys. 49).

Podobnież gdy $b'' \parallel x$, więc $b \parallel \Pi_2$, nie istnieją w odległości skończonej punkty $H_b \equiv H_b'$ i $H_b''$. Wypadkom szczególnym: $c \perp \Pi_1$ i $d \perp \Pi_1$, należącym do tego samego działu, odpowiadają, prócz braku jednego ze śladów, związki: $H_c \equiv H_c' \equiv c'$, $V_d \equiv V_d'' \equiv d''$ i t. d. (rys. 50). Jeżeli $e' \parallel x$ i $e'' \parallel x$, to prosta $e'$ nie posiada (w odległości skończonej) żadnego ze śladów; dlaczego?

*Zadanie 2-gie.* Są dane ślady prostej; wyznaczyć jej rzuty.

Jeżeli mamy dane odrazu oba rzuty każdego ze śladów: $H'$ i $H''$ oraz $V'$ i $V''$, to jest to tylko odmiana szczególna zadania

---

[1]) Uczniowi bardziej krytycznemu, który nie da się zadowolnić pewną w tym względzie dowolnością oznaczeń (np. na rys. 49), należy wytłumaczyć, iż punktu w nieskończoności można szukać równie dobrze „na lewo" jak „na prawo" — że wprowadzenie tego pojęcia wymaga uważania prostej za linię zamkniętą i t. d. (p. uwaga w § 1-ym i początek § 3-go).

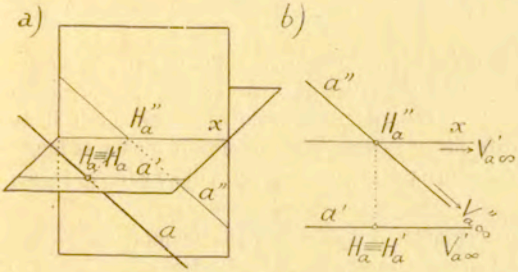
ogólnego: Wyznaczyć rzuty prostej, przechodzącej przez dwa punkty, których rzuty są dane. Na zasadzie § 16 wystarczy wykreślić prostą przez oba rzuty poziome, oraz drugą prostą przez rzuty pionowe. Jeżeli ślady są dane same przez się, jako dwa punkty $H_a$ i $V_a$, położone w jakikolwiek sposób na płaszczyźnie rysunku, to wyznaczamy z początku ich rzuty, a potem czynimy to samo. Konstrukcya: $H_a' \equiv H_a$; z $H_a'$ wykreślamy prostopadłą $l$ do osi $x$: $l \equiv [\supset H_a' \perp x]$; $H_a'' \equiv [lx]$.

$V_a'' \equiv V_a'$; wykreślamy $k \equiv [\supset V_a'' \perp x]$, $V_a' \equiv [kx]$.

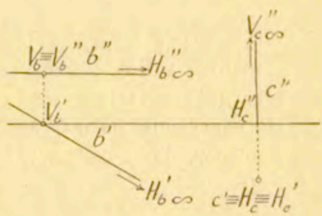
Przeciągamy proste: $a' \equiv [H_a' \, V_a']$,

$a'' \equiv [H_a'' V_a'']$.

są to właśnie szukane rzuty (ob. np. rys. 48).



Rys. 49.

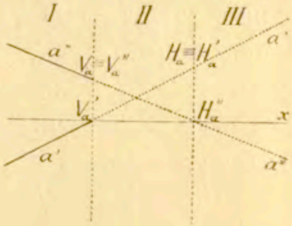


Rys. 50.

Początkujący często łączą wprost punkty $H$ i $V$, uważając, że w ten sposób wykreślają samą prostą $a$, której odpowiadają te ślady. Niewłaściwość tej konstrukcyi łatwo zrozumieć, gdy uprzytomnimy sobie, że na płaszczyźnie rysunku mogą się znaleźć *jedynie* te punkty i proste, które należały pierwotnie do jednej z płaszczyzn rzutów lub zostały do niej w jakiś sposób przeniesione (p. niżej: Kłady). Punkty $H$ i $V$ leżą odpowiednio w $\Pi_1$ i $\Pi_2$, przytem $V$ *pozostaje na miejscu* przy sprowadzeniu obu rzutów do jednej płaszczyzny, $H$ zmienia miejsce, a mianowicie bierze udział w obrocie $\Pi_1$; oba te punkty można tedy oznaczyć na rysunku. Natomiast prosta, przeciągnięta w przestrzeni przez $V$ i $H$ (w położeniu pierwotnem!) nie należy w ogólnośc ani do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$, więc nie może być wykreślona na rysunku; aby ją wyznaczyć pośrednio, należy wyznaczyć jej rzuty. Dodajmy jeszcze, że otrzymana w ów błędny sposób długość odcinka $HV$ bynajmniej nie byłaby równa istotnej długości tego odcinka w przestrzeni i t. d.

II. Ślady prostej odgraniczają jej części, położone w różnych ćwiartkach. Różnym częściom prostej $a$ odpowiadają części rzutów, położone: 1) pomiędzy prostemi $[H_a'H_a'']$ i $[V_a'V_a'']$ 2) i 3) w dwu pozostałych częściach rysunku.

Tak np. na rys. 51-ym części obu rzutów $a'$ i $a''$, położone na lewo od $[V_a'V_a'']$, odpowiadają części prostej $a$, leżącej w I ćwiartce; odcinkom rzutów $a'$ i $a''$, zawartym pomiędzy $[V_a'V_a'']$ i $[H_a'H_a'']$, odpowiada odcinek $V_aH_a$ prostej $a$, zawarty w II ćwiartce; częściom rzutów, położonym na prawo od $[H_a'H_a'']$, odpowiada część prostej, położona w III ćwiartce.



Rys. 51.

Po podziale rzutów prostej zapomocą prostych $[H_a'H_a'']$ i $[V_a'V_a'']$, rozpoznawanie, jakiej ćwiartce odpowiada każda para części rzutów, można oprzeć na takiej samej zasadzie, jak w stosunku do punktów (§ 13).

Jeżeli istnieje tylko jeden ślad (w odległości skończonej), to każdy z rzutów, a więc i sama prosta, dzieli się tylko na dwie części, przeto prosta przechodzi w takim razie przez dwie ćwiartki. To samo zachodzi, jeżeli ślady się nakrywają na osi, ale prosta nie przystaje do osi. Jeżeli niema żadnego śladu (w odl. skończ.), t. j. jeżeli prosta jest $\parallel x$, to leży całkowicie w jednej ćwiartce.

Na zasadzie tych uwag, zadania o typie następującym: *Wyznaczyć rzuty prostej, która przechodzi przez dane ćwiartki przestrzeni (3, 2 lub 1)* dadzą się sprowadzić do zad. 2-go: należy tylko dobrać w odpowiedni sposób położenie śladów. Np. jeżeli prosta ma przechodzić przez II, III i IV ćwiartki, to ślad poziomy może być wzięty gdziekolwiek ponad osią, ślad pionowy — gdziekolwiek pod osią (dlaczego?); jeżeli prosta ma przechodzić przez III i IV ćwiartkę, to ślad pionowy winien być wzięty pod osią, a przechodzący przezeń rzut pionowy musi być $\parallel x$ i t. d.

**§ 20. Rozróżnianie utworów widzialnych i niewidzialnych. Umowy co do sposobu wykonania rysunków.** Z teoryą śladów wiąże się poniekąd sprawa widzialności lub niewidzialności utworów geometrycznych. Owóż, jak wiemy, rzut środkowy jakiegoś przedmiotu jest to, innemi słowy, obraz tegoż przedmiotu, widzianego przez oko, umieszczone w środku rzutu, na płaszczyźnie rzutów. Gdy oko oddala się coraz bardziej w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutu, obraz ten zbliża się coraz bardziej do tego, co nazywamy rzutem prostokątnym. Fakt ten wyrazimy inaczej nieco, a w sposób krótszy, mówiąc, że rzut prostokątny jest to obraz, otrzymany w tym wypadku, gdy oko jest położone na jakiejś[1]) prostej, prostopadłej do płaszczyzny rzutu, w odległości nieskończonej. Gdy chodzi o zwykłe dwie płaszczyzny rzutu, umawiamy się zwykle, zgodnie z tem pojmowaniem istoty rzutu, że oko widza, patrzącego na płaszczyznę poziomą, leży w odległości nieskończonej, liczonej w kierunku prostopadłym do $\Pi_1$, *ponad* $\Pi_1$, oko zaś widza, patrzącego na płaszczyznę pionową, jest położone *przed* tą płaszczyzną $\Pi_2$, w odległości nieskończonej, liczonej w kierunku prostopadłym do $\Pi_2$. Jeżeli tedy chcemy wogóle odróżniać punkty widzialne od niewidzialnych, to obowiązuje zasada następująca, nie wymagająca osobnego dowodu:

W rzucie poziomym z kilku punktów, położonych na tym samym promieniu wzrokowym, t. j. na tej samej prostej, prostopadłej do $\Pi_1$, należy uważać za widzialny ten, który jest położony *najwyżej*; w rzucie pionowym z punktów, położonych na tym samym promieniu wzrokowym, prostopadłym do $\Pi_2$, należy uważać za widzialny ten, który jest najbardziej *wysunięty naprzód.*

Zastosowaniem bezpośredniem tej zasady jest następująca wskazówka praktyczna:

O ile chodzi o rzuty poziome, z punktów, posiadających ten sam rzut poziomy, jest widzialny ten, którego rzut *pionowy* (przy założeniu zwykłem, że wspólna płaszczyzna obrazu ma położenie pionowe) jest położony *najwyżej* — o ile chodzi o rzuty pionowe, z punktów, posiadających ten sam rzut pionowy, jest widzialny ten, którego rzut poziomy leży *najniżej*.

Możemy przytem albo zupełnie nie uwzględniać płaszczyzn rzutu, t. j. uważać je za przezroczyste, albo też włączać w każdym wypadku punkty, położone na tych płaszczyznach, do punktów, wymienionych w poprzednich zdaniach. Przy drugiem założeniu można uważać za widzialne w rzucie poziomym utwory, nie zakryte przez inne i położone w I i II ćwiartce; w rzucie pionowym — tylko utwory, położone w I i IV ćwiartce. Możemy jednak również, zakładając, że oko, zanim się oddaliło nieskończenie, było położone początkowo w I ćwiartce i że zawsze obie płaszczyzny rzutów *jednocześnie* są uważane za nieprzezroczyste, uważać za niewidzialne wszystko to, co leży w II, III i IV ćwiartce. Postępowaliśmy

[1]) Wszystko jedno na której, ponieważ wszystkie przechodzą przez ten sam „punkt w nieskończoności".

tak np., rozróżniając na rys. 40, 43, 44, 51 części widzialne i niewidzialne zapomocą linii pełnych i linii kropkowanych. Stosowanie różnych wskazanych założeń może być bardzo dobrem ćwiczeniem — w dalszym ciągu jednak przeważnie nie będziemy liczyli się w tym względzie z płaszczyznami rzutu, uważając je za przezroczyste[1]), a wogóle rozróżniania części widzialnych i zakrytych przez inne zaczniemy przestrzegać bardziej systematycznie dopiero po przejściu do badania rzutów wielościanów.

W tem miejscu ustalmy wyraźnie umowy, do których będziemy się stosowali w dalszym ciągu, co do sposobu wykonania wykresów. Otóż, linie dane i wyniki należy wykreślać rysem *pełnym*—będziemy przytem naogół nadawali większą grubość liniom, stanowiącym *wyniki*. Jeżeli jakaś część takiej linii jest niewidzialna, to, jak wyżej zaznaczaliśmy, kreślimy tę część rysem *kropkowanym*, t. j. w postaci kropek kwadratowych lub okrągłych („kłując“ grafionem papier). Linie konstrukcyjne, pomocnicze, winny być cienkie, *kreskowane*—to znaczy składać się z kresek równych i położonych w równych odstępach.

Linie rzutów, t. j. proste prostopadłe do osi $x$, łączące pary rzutów, odróżnialiśmy przytem zapomocą kresek stosunkowo krótkich i gęstych, przechodzących nawet w kropki, kreśląc je zawsze możliwie cienko — nie jest to jednak bynajmniej ogólnie przyjęte ani konieczne, i uczący się, zgodnie z wielu wzorami, mogą zupełnie nie wyróżniać przy kreśleniu tych linii z pośród innych linii konstrukcyjnych. Linie pomocnicze szczególnie ważne bywają kreślone t. zw. rysem *mieszanym*, t. j. zapomocą następujących po sobie kolejno kresek i kropek. Oś rzutu oznaczamy zapomocą linii pełnej, cienkiej — wreszcie niektóre linie, a mianowicie osie (obrotu i in.) będziemy wykreślali „rysem mieszanym podwójnym“ (1 kreska 2 kropki, 1 kreska 2 kropki...). Przy użyciu tuszów kolorowych możemy zastąpić linie kreskowane (pomocnicze) cienkiemi i pełnemi czerwonemi; linie mieszane — liniami niebieskiemi, pełnemi.

§ 21. **Ślady prostej na płaszczyźnie spółrzutowej i symetrycznorzutowej.** Zdobyte już wiadomości pozwalają nam także na wyznaczenie śladu dowolnej prostej na płaszczyźnie spółrzutowej $\Gamma$ i płaszczyźnie symetrycznorzutowej $\Sigma$ (p. § 14).

[1]) Rysunki, wykonane zgodnie z tą umową, że są uważane za widoczne tylko utwory, położone w I ćwiartce i nie zakryte przez inne, będziemy odróżniali w dalszym ciągu zapomocą znaku (w. I.).

Zwłaszcza ważne znaczenie posiada ślad na płaszczyźnie $\Gamma$. Oznaczmy przez $a$ prostą w przestrzeni, więc przez $a'$ i $a''$ — jej rzuty. Rzuty śladu $G_a \equiv [a\,\Gamma]$ łatwo wyznaczyć na zasadzie następujących rozważań: ponieważ $G_a \subset a$, więc $G_a' \subset a'$, $G_a'' \subset a''$; ponieważ $G_a \subset \Gamma$, więc (twierdzenie z § 14): $G_a' \equiv G_a''$. Ostatecznie:

$$G_a' \equiv G_a'' \equiv [a'a''].$$

[Nawzajem: jeżeli $G_a' \equiv G_a'' \equiv [a'a'']$, to $G_a \subset \Gamma$, gdyż $G_a' \equiv G_a''$ (§ 14) i $G_a \subset a$, gdyż $G_a' \subset a'$, $G_a'' \subset a''$].

*Twierdzenie 1. Ślad prostej na płaszczyźnie spółrzutowej posiada oba rzuty w punkcie przecięcia rzutów prostej.*

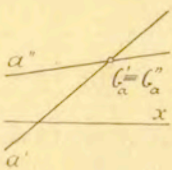
Z twierdzenia tego łatwo wysnuć wnioski: A) prosta (lub krzywa), której rzuty przystają do siebie[1]), leży całkowicie w płaszczyźnie spółrzutowej i nawzajem; B) prosta o rzutach równoległych jest równoległa do płaszczyzny spółrzutowej, ponieważ nie przebija jej w żadnym punkcie (w odległości skończonej) i nawzajem.

Punkt $S_a \equiv [a\Sigma]$ spełnia warunki:

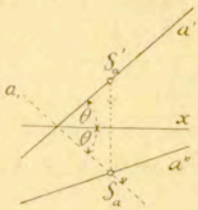
$$S_a \subset a, \quad \text{więc} \quad S_a' \subset a', \; S_a'' \subset a''$$

$S_a \subset \Sigma$, więc $S_a'$ jest symetryczne z $S_a''$ względem osi $x$ (§ 14). Stąd wynika, gdy $a'$ i $a''$ są dane, konstrukcya następująca: kreślimy prostą pomocniczą $a_1$, symetryczną z $a'$ względem $x$:

$$S_a'' \equiv [a''\, a_1];$$




Rys. 52.




Rys. 53.

jeżeli oznaczymy przez $l$ prostopadłą z $S_a''$ do $x$: $l \equiv [\supset S_a'' \perp x]$, to $S_a' \equiv [la']$. Do tego samego wyniku prowadzi konstrukcya:

$a_2$ sym. z $a''$ wzgl. $x$, $S_a' \equiv [a_2 a']$, $l \equiv [\supset S_a' \perp x]$, $S_a'' \equiv [la'']$.

Mamy tedy:

*Twierdzenie 2.* Rzuty śladu prostej na płaszczyźnie symetrycznorzutowej są to takie punkty jej rzutów, które posiadają

---

[1]) O ile rzuty są prostopadłe do osi $x$, to ponadto rzut poziomy każdego punktu prostej musi przystawać do odpowiedniego rzutu pionowego — warunek, który przy nachyleniu rzutów jest zachowany sam przez się. Taka sama uwaga w stosunku do wniosku A) z twierdzenia 2-go.

położenie symetryczne względem osi rzutów. Wnioski: A) prosta lub krzywa, której rzuty leżą symetrycznie względem osi $x$, należy do płaszczyzny symetrycznorzutowej;—i nawzajem B) prosta o rzutach nachylonych pod tym samym kątem ostrym do osi, ale nie równoległych, jest równoległa do płaszczyzny symetrycznorzutowej i nawzajem.

§ 22. **Położenie wzajemne dwóch prostych**. Twierdzeniom, uzasadnionym już w § 5-ym, możemy w tej chwili, w zastosowaniu do dwu płaszczyzn rzutu, nadać postać następującą:

*Twierdzenie 1. Jeżeli proste są równoległe, to obie pary rzutów są równoległe* [1]), *t. j. rzut poziomy jednej prostej jest równoległy do rzutu poziomego drugiej, a rzut pionowy—do rzutu pionowego.* Nawzajem: *Twierdzenie 1a. Jeżeli obie pary rzutów dwu prostych są odpowiednio do siebie równoległe, to same proste są równoległe*: z warunków: $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$ wynika naogół, że $a \parallel b$. Istotnie, weźmy na prostej $a$ dowolny punkt $A$, na $b$— punkt $B$. Płaszczyzna $\alpha_1$, rzutująca na płaszczyznę poziomą prostą $a$, może być wyznaczona przez $a'$ i $[A'A]$: $\alpha_1 = [a'[A'A]]$; podobnież $\beta_1 = [b'[B'B]]$. Ponieważ $a' \parallel b'$, $[A'A] \parallel [B'B]$, przeto $\alpha_1 \parallel \beta_1$. Tak samo dowodzimy, że $\alpha_2 \parallel \beta_2$, t. j. że są równoległe płaszczyzny, rzutujące $a$ i $b$ na $\Pi_2$. Stąd wynika: $[\alpha_1\alpha_2] \parallel [\beta_1\beta_2]$ czyli: $a \parallel b$, ponieważ $a = [\alpha_1\alpha_2]$, $b = [\beta_1\beta_2]$. *Dowód zawodzi*, gdy $\alpha_1 = \alpha_2$, ponieważ w takim razie prosta $a$ nie może być wyznaczona, jako przecięcie $\alpha_1$ i $\alpha_2$. Inaczej: twierdzenie odwrotne nie daje się zastosować, gdy jedna z prostych, a zatem, jak łatwo się przekonać, i druga, leży w płaszczyźnie, prostopadłej do osi (p. § 11).

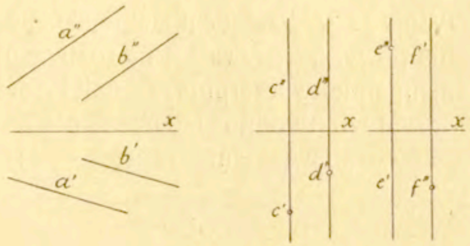
Gdy rzuty poziome dwu prostych są punktami, to obie proste są prostopadłe do płaszczyzny poziomej, a więc równoległe. Podobnież wnioskujemy, gdy rzuty pionowe stają się jednocześnie punktami (p. rys. 54, pary prostych: $c \parallel d$, $e \parallel f$).

*Twierdzenie 2. Jeżeli dwie proste przecinają się w jakimś punkcie $M$, to pary ich rzutów poziomych i rzutów pionowych posiadają odpowiednio punkty wspólne*, stanowiące rzuty punktu przecięcia $M$, a więc *położone na prostej, prostopadłej do osi rzutów*. Jeżeli $M = [ab]$ czyli $M \subset a$, $M \subset b$, to: $M' \subset a'$, $M' \subset b'$; $M'' \subset a''$,

---

[1]) Wypadek szczególny: jeżeli obie proste są prostopadłe do $\Pi_1$ (lub obie $\perp \Pi_2$) to rzuty pionowe (względnie: poziome) są równoległe, rzuty poziome (wzgl.: pionowe) są to punkty. Twierdzenie nie daje się tedy zastosować w dosłownem znaczeniu.

$M'' \subset b''$ (§ 5 tw. 3) i $[M'M''] \perp x$ (§ 13 tw. 1). Najczęściej mamy do czynienia z wypadkiem, gdy rzuty dwu prostych (np. $a$ i $b$ na rys. 55) stanowią cztery różne proste, nie prostopadłe do osi rzutów; w takim razie muszą się one *przecinać odpowiednio* (t. j. rzut poziomy z poziomym, pionowy z pionowym) *w punktach*, stanowiących rzuty punktu $M$, a więc *położonych na prostej, prostopadłej do osi rzutów:* jeżeli $M \equiv [ab]$, to $M' \equiv [a'b']$, $M'' \equiv [a''b'']$, $[M'M''] \perp x$.

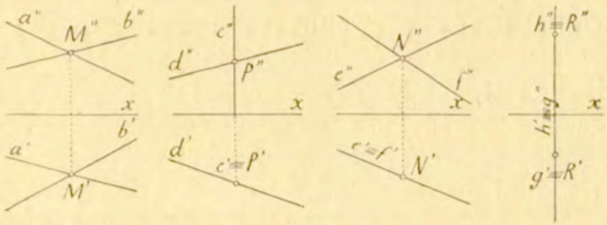



Rys. 54.

Nawzajem:

*Twierdzenie 2a. Jeżeli punkty przecięcia odpowiednich rzutów dwu prostych leżą na jednej prostopadłej do osi rzutów, to te proste przecinają się w przestrzeni.* Uzasadnić!

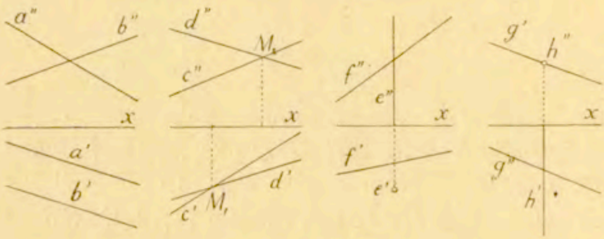
Jeżeli jeden z rzutów jednej prostej jest punktem, to jak łatwo sobie zdać sprawę: a) proste przecinają się w przestrzeni, gdy odpowiedni rzut drugiej prostej jest prostą, zawierającą ten punkt;




Rys. 55.

b) gdy odpowiedni rzut drugiej prostej jest punktem, nakrywającym pierwszy, proste również całkowicie do siebie przystają. Jeżeli $e' \equiv f'$, $e''$ i $f''$ przecinają się (rys. 55) w punkcie $N''$, to proste $e$ i $f$ (położone w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do $\Pi_1$, zgodnie z twierdzeniem odwrotnem względem tw. 4a w § 4-ym) przecinają się w punkcie $N$ o rzutach $N''$ i $N' \equiv [le'] \equiv [lf']$, przyczem $l$ oznacza prostopadłą do osi rzutów, wykreśloną przez $N''$: $l \equiv [\supset N'' \perp x]$. (Na rys. 55-ym zostały podane różne przykłady prostych przecinających się). Wreszcie twierdzenie 2a nie daje się zastosować w jego właściwem znaczeniu, gdy wszystkie 4 proste: $a'$, $a''$, $b'$, $b''$ stanowią jedną prostą, prostopadłą do osi. W takim razie poznajemy odrazu, że $a$ i $b$ leżą w tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do osi.

Pozostaje jeszcze trzecia możliwość: dwie proste nie leżą w jednej płaszczyźnie — są względem siebie skośne czyli wichrowate. Twierdzenia powyższe pozwalają na roztrząśnięcie tego wypadku ściśle i najzupełniej wyczerpujące—należy przytem uwzględnić warunki, którym winny odpowiadać wogóle dwie proste (lub prosta i punkt), aby stanowić rzuty prostej (§ 11, koniec § 17).




Rys. 56.

Przekonywamy się mianowicie, stosując dowód niewprost (i usuwając na chwilę przypadek, w którym jedna z prostych—lub obie—leżałaby w płaszczyźnie, prostopadłej do osi, nie będąc jednak prostopadłą do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$), że: Jeżeli dwie proste są skośne względem siebie, to 1) jedna para rzutów odpowiednich jest równoległa a druga przecina się, np. $a' \parallel b'$, $[a''b''] \equiv M_2$ — albo też 2) obie pary rzutów odpowiednich przecinają się, ale w punktach, nie należących do jednej prostopadłej do osi rzutów: $[c'd'] \equiv M_1$, $[c''d''] \equiv M_2$, $[M_1M_2]$ nie jest $\perp x$ — albo jeszcze: 3) jeden z rzutów jednej prostej jest *punktem*, a odpowiedni rzut drugiej prostej — *prostą*, nie przechodzącą przez ten punkt (rys. 56). Nawzajem: jeżeli 1) tylko jedna para rzutów i t. d.

Jeżeli uwzględnimy przypadek, pominięty przed chwilą, to dwie proste skośne względem siebie $a$ i $b$ mogą również posiadać: 1) rzuty $a' \perp x$, $a'' \perp x$; $b' \perp x$; $b'' \perp x$; więc $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$ — co zachodzi *jedynie wtedy*, gdy $a$ i $b$ leżą w płaszczyznach, prostopadłych do osi; 2) rzuty $a' \perp x$, $a'' \perp x$; $b'$ i $b''$

—położone dowolnie. Odwrócić atoli tego twierdzenia nie możemy: jeżeli rzuty posiadają położenie 1), to proste $a$ i $b$ mogą być zarówno skośne jak równoległe; jeżeli posiadają położenie 2), to proste mogą być skośne lub przecinać się.

## ĆWICZENIA.

1. Wymienić kilka twierdzeń lub zadań z rozpatrzonego zakresu, dotyczących tylko położenia, oraz kilka innych o charakterze wyraźnie miarowym.

2. Ilu *różnych* punktów potrzeba do wyznaczenia na wspólnej płaszczyźnie rysunku dwu punktów *dowolnie* położonych w przestrzeni? dwu punktów, położonych na tej samej prostej, prostopadłej do płaszczyzny poziomej lub pionowej? czterech punktów, z których 3 pierwsze $A, B, C$ są położone na jednej prostej, prostopadłej do płaszczyzny poziomej, a 2 ostatnie $C, D$ — na prostej, prostopadłej do płaszczyzny pionowej? W każdym wypadku obok każdego punktu pisać *wszystkie* litery i znaki, które się doń stosują.

3. Płaszczyzny rzutów, wraz z płaszczyzną spółrzutową i symetrycznorzutową, dzielą przestrzeń na 8 części (można je np. nazwać: część górna i część dolna ćwiartki I, II, III, IV-ej). Jak rozpoznać po rzutach, w której z tych części punkt jest położony?

*Wskazówka.* Oprócz twierdzeń z § 13 należy jeszcze wyciągać wnioski z tego, czy bardziej zbliżony do osi rzutów jest rzut poziomy, czy pionowy?

4. Wprawiać się w szybkie wyznaczanie rzutów punktu, gdy jest dane (bez wymienienia odległości) jego położenie w przestrzeni względem płaszczyzn rzutów oraz, nawzajem, w rozpoznawaniu położenia punktu podług danych rzutów.

5. Jest dany rzut $A'$ punktu $A$, oddalonego o $+5$ *cm.* od $\Pi_1$. Wyznaczyć rzuty punktów $B, C, D, E$, rozłożonych poniżej $A$ na tej samej prostopadłej do płaszczyzny poziomej, w równych od siebie dwucentymetrowych odległościach ($AB = BC = CD = DE = -2$ *cm.*).

6. [Część 2-ga ćwiczenia 4-go z uwzględnieniem stosunków miarowych oraz umowy co do znaków (§ 12)]. Określić, jakie posiadają położenie względem płaszczyzn rzutów i w jakich znajdują się od nich odległościach punkty $A, B, C, D, E, F, G, H$, których rzuty spełniają warunki:

1) $A_0A' = +3$ *cm.*, $A_0A'' = -2$ *cm.*, ($A_0$—oznacza punkt $[[A'A'']\,x]$, $B_0$—punkt $[[B'B'']\,x]$ i t. d. 2) $B_0B' = 0$, $B_0B'' = -2{,}5$ *cm.*; 3) $C_0C' = 0$; $C_0C'' = +6$ *cm.*; 4) $D_0D' = +4$ *cm.*, $D_0D'' = +3$ *cm.*; 5) $E_0E' = -3$ *cm.*, $E_0E'' = -3$ *cm.*; 6) $F_0F' = +2$ *cm.*, $F_0F'' = 0$; 7) $G_0G' = -4$ *cm.*, $G_0G'' = +5$ *cm*; 8) $H_0H' = -3$ *cm.*, $H_0H'' = 0$.

7. $A_0A' = +4$ *cm.*, $A_0A'' = -3$ *cm.*, $A'' \equiv B'' \equiv B' \equiv C'$; $C_0C'' = -5$ *cm.* Określić dokładnie położenie wzajemne punktów $A$, $B$ i $C$ oraz położenie każdego z nich względem płaszczyzn rzutów.

8. To samo pytanie w stosunku do punktów $A, B, C, D$, jeżeli: $A'' \equiv A_0 \equiv C' \equiv B_0$ (t. j. punkt $A'' \equiv C'$ leży na osi rzutów), $A' \equiv B'$, $B'' \equiv C'' \equiv D' \equiv D''$; $B_0B' = +4$ *cm.*, $B_0B'' = +4$ *cm.*

9. Dlaczego z warunków: $A' \subset a'$, $A'' \subset a''$ nie wynika: punkt $A$ należy do prostej $a$, gdy $a' \perp x$, $a'' \perp x$? O czem tylko świadczą w takim razie te warunki? Dlaczego dowód ogólny twierdzenia 2-go z § 16 traci wtedy swą wartość?

10. Dowieść bezpośrednio, że z warunku: $a' \equiv A'$ (t. j. rzut poziomy prostej $a$ jest punktem, który nakrywa rzut poziomy punktu $A$) wynika: $A \subset a$, niezależnie od tego, co wiemy o $a''$ i $A''$. To samo w stosunku do rzutów pionowych: z $a'' \equiv A''$ wynika $A \subset a$.

11. Wykreślić rzuty dowolnej linii łamanej, otwartej lub zamkniętej; w szczególności wykreślić rzuty trójkąta.

12. Są dane rzuty poziome i pionowe trzech punktów; sprawdzić, czy te punkty leżą na jednej prostej.

13. Podobnież, gdy są dane rzuty jakiejkolwiek liczby punktów, stwierdzić, które trzy, cztery lub więcej z nich leżą, bodaj w przybliżeniu, na jednej prostej.

14. Są dane rzuty $A'$ i $A''$, $B'$ i $B''$ dwu punktów położonych w tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do osi, oraz rzuty $C'$ i $C''$ punktu $C$, położone na $[A'B'] \equiv [A''B'']$. Stwierdzić, czy punkt $C$ należy do prostej $[AB]$ [1]).

15. Są dane punkty $A'$ i $A''$, $B'$ i $B''$, położone jak w poprzedniem zadaniu oraz punkt $C'$, należący do $[A'B']$. Wyznaczyć punkt $C''$ w ten sposób, aby $C'$ i $C''$ stanowiły rzuty punktu $C$, należącego do prostej $[AB]$. To samo, gdy $C''$ wiadome, $C'$ niewiadome.

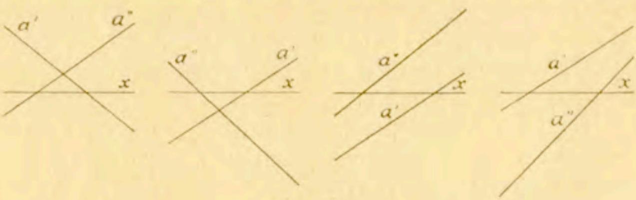
16. Są dane rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$; wykreślić rzuty prostej $m$, przechodzącej w przestrzeni przez $A$ i spełniającej jeden z warunków następujących: 1) $m \parallel \Pi_2$; 2) $m \parallel \Pi_1$; 3) $m \parallel x$; 4) $m \perp \Pi_2$; 5) $m \perp \Pi_1$; 6) $m$ leży w płaszczyźnie $\alpha \perp$ osi $x$; 7) $m$ tworzy z $\Pi_1$ i $\Pi_2$ kąty, nie równe prostemu i nie jest $\parallel$ do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$. Które z tych zadań szczególnych posiadają jedno tylko rozwiązanie, a które są nieoznaczone?

17. Mając rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$, położonego na $\Pi_1$, wykreślić rzuty prostej $m$, zawierającej $A$ i leżącej całkowicie w $\Pi_1$. To samo, gdy $A$ i $m$ mają należeć do $\Pi_2$ — lub gdy $A$ należy do $x$, a $m$ ma spełniać warunek $m \equiv x$.

18. Wprawiać się w szybkie orzekanie o położeniu względem $\Pi_1$ i $\Pi_2$ prostych w przestrzeni podług ich rzutów.

19. 1) $a' \parallel x$, $a'' \parallel x$; $b' \parallel x$, $b'' \parallel x$. 2) $c' \perp x$, $c'' \perp x$; $d' \parallel x$, $d'' \parallel x$. 3) $e' \equiv f'$; 4) $g' \parallel x$, $h' \parallel x$, $g'' \equiv h''$. Co można powiedzieć o położeniu *wzajemnem* prostych: 1) $a$, $b$; 2) $c$, $d$; 3) $e$, $f$; 4) $g$, $h$? (bez pomocy § 22, na mocy jedynie rozważań z § 17 i poprzednich).

20. Mamy kolejno dane rzuty $a'$ i $a''$ w czterech położeniach, wskazanych na rys. 57; wyznaczyć w każdym wypadku ślady $H_a$ i $V_a$ prostej $a$.




Rys. 57.

[1]) Roztrząsnąć przytem ściśle użyty sposób sprawdzenia, wskazany zwięźle w uwadze do § 16.

21. Wyznaczyć ślady prostych: $a \parallel \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$, $c \perp \Pi_1$, $d \perp \Pi_2$, których rzuty są dane.

22. Są dane ślady $V_a$ i $H_a$ prostej $a$, dowolnie położone; wyznaczyć rzuty tej prostej.

23. Wykreślić rzuty prostej, która przechodzi przez ćwiartki: a) I, II, III; b) II, III, IV; c) III, IV, I; d) IV, I, II.

24. Wykreślić rzuty prostej, przechodzącej przez dwie ćwiartki, a mianowicie: a) I, II; b) II, III; c) III, IV; d) IV, I; e) I, III; f) II, IV.

25. Wykreślić rzuty prostych, położonych całkowicie tylko w jednej ćwiartce: a) I, b) II, c) III, d) IV.

*Uwaga.* Przy wykonywaniu rysunków do trzech ostatnich zadań uważać za widzialne tylko utwory, położone w I ćwiartce — lub, dla odmiany, utwory, położone w I i II ćwiartkach, gdy chodzi o rzuty poziome, w I i IV, gdy chodzi o rzuty pionowe (§ 20).

26. Są dane rzuty prostej $a$, położone w ten sposób, że żaden z nich nie jest prostopadły ani równoległy do osi rzutów, i że kąty ostre, utworzone przez nie z osią, nie są równe, a punkty przecięcia z osią nie nakrywają się. Wyznaczyć rzuty śladów $H_a$, $V_a$ oraz śladów $G_a$ i $S_a$ (na płaszczyźnie spółrzutowej $\Gamma$ i symetrycznorzutowej $\Sigma$) i orzec, do których z 8 części przestrzeni (p. ćwicz. 3) należy 5 części, na które podzielą daną prostą owe 4 punkty.

27. Te same pytania, przy założeniu, że jeden z rzutów jest równoległy do osi lub staje się punktem. (W tym wypadku prosta dzieli się nie na 5 części, lecz na . . . ?).

28. Te same pytania przy założeniu, że rzuty prostej są równoległe, albo też, nie będąc równoległemi, przecinają oś rzutów pod tym samym kątem ostrym.

29. Wyznaczyć cztery ślady prostej, której rzuty przecinają oś w tym samym punkcie.

*Uwaga.* Zastanowić się nad przypadkami szczególnymi, gdy prosta leży w jednej z płaszczyzn: $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Gamma$, $\Sigma$. *Każdy* z punktów prostej może być w takim razie uważany za odpowiedni ślad. W jakim wypadku wszystkie cztery ślady są nieokreślone?

30. Wyznaczyć rzuty prostej $a$, gdy są dane: 1) $G_a'$, $S_a''$; 2) $G_a'$, $V_a$; 3) $S_a'$, $H_a$ (lub 2 a) $G_a'$, $H_a$; 3 a) $S_a'$, $V_a$.

31. Udowodnić twierdzenie 2 a z § 22.

32. Mamy dane: rzuty punktu $M$ i prostej $a$. Wyznaczyć rzuty prostej $b$, przechodzącej przez $M$ i równoległej do $a$. Uwzględnić różne możliwe położenia prostej $a$ względem $\Pi_1$ i $\Pi_2$.

33. Przy tych samych danych wykreślić rzuty prostej, przechodzącej przez $M$ i przecinającej $a$. Czy to zadanie jest wogóle oznaczone? W jakim przypadku przynajmniej jeden z rzutów jest określony jednoznacznie?

34. Jest dany jakikolwiek układ rzutów poziomych i pionowych kilku (np. 4, 5) prostych; rozróżnić wśród nich pary prostych przecinających się lub równoległych i pary prostych skośnych.

35. Udowodnić ściśle twierdzenia co do prostych skośnych, podane na końcu § 22.

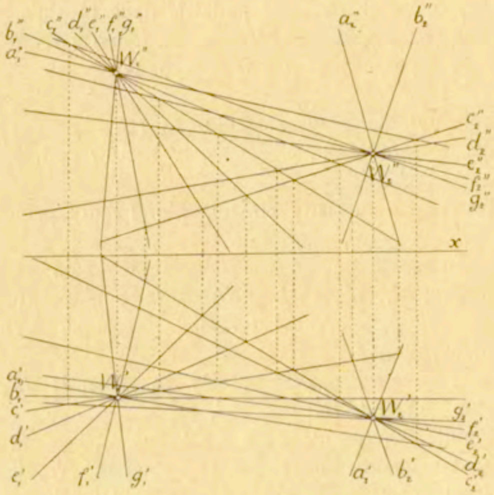
36. Wykreślić rzuty figury, składającej się z prostej i kilku innych prostych, przecinających pierwszą, położonych w tej samej płaszczyźnie i prze-

chodzących przez ten sam punkt $W$ lub równoległych do siebie — t. j. rzuty „pęku" prostych wraz z linią poprzeczną czyli sieczną.

37. Jeżeli dwie proste $m$ i $p$ są przecięte przez proste $a, b, c, \ldots$, należące do tego samego pęku, w punktach: $A_1 \equiv [am]$, $A_2 \equiv [ap]$, $B_1 \equiv [bm]$, $B_2 \equiv [bp]$; $C_1 \equiv [cm]$, $C_2 \equiv [cp]$ i t. d., to punkty: $A_1$, $B_1$, $C_1 \ldots$ z jednej strony, a $A_2$, $B_2$, $C_2 \ldots$ z drugiej, tworzą t. zw. *szeregi jednokreślne w położeniu perspektywicznem* lub krócej szeregi perspektywiczne (por. koniec § 1-go). Wykreślić rzuty: $A_1'$, $B_1'$, $C_1' \ldots$; $A_1''$, $B_1''$, $C_1'' \ldots$, oraz $A_2'$, $B_2'$, $C_2' \ldots$ i $A_2''$, $B_2''$, $C_2'' \ldots$ dwu szeregów perspektywicznych względem siebie.

*Wskazówka.* Do rysunku, otrzymanego w poprzedniem ćwiczeniu, dodać tylko rzuty drugiej siecznej.

38. Wykreślić rzuty dwu *pęków jednokreślnych w położeniu perspektywicznem* (perspektywicznych), t. j. takich, że pary promieni odpowiednich przecinają się w punktach: $A \equiv [a_1 a_2]$, $B \equiv [b_1 b_2]$, $C \equiv [c_1 c_2]$, ..., *położonych na jednej prostej m.* Rozróżnić dwa przypadki: 1) pęki leżą w różnych płaszczyznach; 2) oba pęki są położone w tej samej płaszczyźnie (w takim razie można znowuż zacząć od rysunku do ćwicz. 36, sieczną utożsamić z prostą $m$, a wyznaczanie rzutów prostych $a_2$, $b_2$, $c_2 \ldots$, należących do drugiego

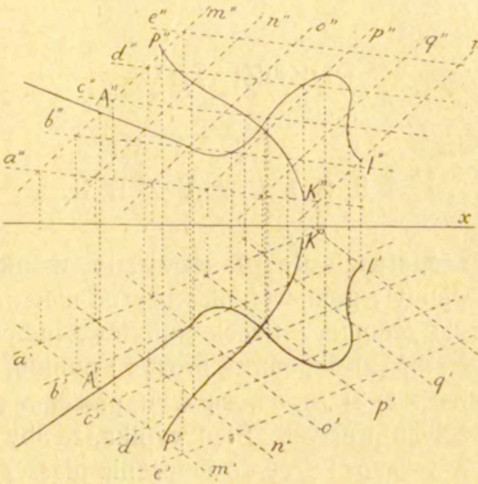



Rys. 58.

pęku, rozpocząć od rzutów jednej z nich np. $a_2$, dobranych w ten sposób, iżby prosta $a_2$ przecinała się z odpowiednią prostą $a_1$ wyznaczonego już pęku na prostej $m$ i oprócz tego *przecinała* jakąś inną (a więc i wszystkie inne) proste tego pęku.

39. Wykreślić rzuty dwu pęków, położonych *w tej samej płaszczyźnie*, ale *nie* perspektywicznych względem siebie (p. rys. 58 — uzupełnić tem rysunek zapomocą oznaczenia literami rzutów punktów, użytych do konstrukcyi).

40. Rozwiązując zadania takie jak 36, 37, 38 2) i 39, otrzymujemy siatki rzutów poziomych i pionowych, odpowiadające sieciom punktów, położonych, w pewnej płaszczyźnie. Mając takie siatki, możemy wykreślać zupełnie dokładnie lub z przybliżeniem rzuty figur, położonych w tej samej płaszczyźnie, bez odwoływania się do nowych linii pomocniczych, prócz prostych prostopadłych do osi. Przykład takiej konstrukcyi podajemy na rys. 59 — za dane



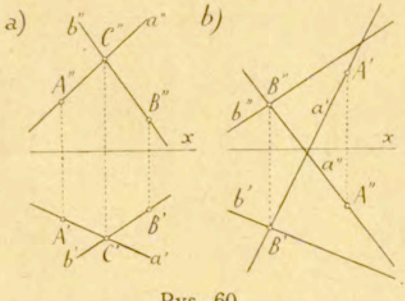
Rys. 59.

uważamy: siatki rzutów, odpowiadające jakiejś płaszczyźnie $\alpha$, oraz rzut pionowy figury *AIKP*, która leży w tej samej płaszczyźnie — wyznaczyć jej rzut poziomy (lub przeciwnie podług poziomego rzutu wyznaczyć pionowy).

ROZDZIAŁ V.

# Płaszczyzna.

§ 23. **Przedstawianie płaszczyzny w układzie dwu rzutów.** Jak wiemy z gometryi, płaszczyzna nieograniczona daje się wyznaczyć: 1) zapomocą trzech punktów, nie położonych na jednej prostej — albo 2) zapomocą prostej i punktu, nie należącego do niej — albo też 3) zapomocą dwu przecinających się lub 4) dwu równoległych prostych. Stąd wynika, że aby otrzymać zupełnie dokładną wskazówkę co do położenia płaszczyzny, wystarczy mieć *rzuty* poziome i pionowe *trzech* punktów tej płaszczyzny, nie należących do jednej prostej lub *rzuty dwu* przecinających się prostych, położonych w tej płaszczyźnie i t. d. Będziemy używali przedewszystkiem rzutów dwu przecinających się prostych, wyznaczając np. $\alpha \equiv$ pł. $[ab]$ zapomocą rzutów $a'$, $a''$, $b'$, $b''$, przecinających się odpowiednio w punktach $M' \equiv [a'b']$ i $M'' \equiv [a''b'']$ $([M'M''] \perp x)$. Przejście od tego typowego sposobu zobrazowania płaszczyzny do innych sposobów i wogóle od jednego sposobu do innego nie powinno obecnie nasuwać żadnych trudności.



Rys. 60.

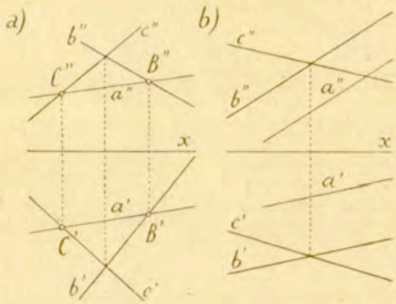
Przypuśćmy np., że mamy dane trzy punkty $A$, $B$ i $C$, (t. j. trzy pary $A'$, $A''$; $B'$, $B''$; $C'$, $C''$ ich rzutów) i chcemy je zastąpić przez dwie przecinające się proste. Wystarczy np. wykreślić proste: $a' \equiv [A'C']$, $a'' \equiv [A''C'']$, $b' \equiv [B'C']$, $b'' \equiv [B''C'']$, stanowiące rzuty prostych $a$ i $b$, należących do płaszczyzny $[ABC]$, aby zadanie zostało w zupełności rozwiązane (rys. 60 a). Gdy mamy rzuty: $A'$ i $A''$, odpowiadające punktowi $A$, oraz $b'$ i $b''$, odpowiadające prostej $b$, nie zawierającej tego punktu, to wystarczy obrać dowolnie na $b'$ i $b''$ rzuty $B'$ i $B''$ punktu $B$ (więc $[B'B''] \perp x$) i wykreślić proste $a' \equiv [A'B']$ i $a'' \equiv [A''B'']$. Płaszczyzna $[Ab] \equiv$ pł. $[ab]$ (p. rys. 60 b).

Do tego samego typu należy zadanie:

(A) Rozpoznać, czy prosta, której rzuty są dane, leży w płaszczyźnie, wyznaczonej zapomocą rzutów dwu innych przecinających się prostych.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z prostą $a$ i płaszczyzną $\alpha \equiv$ pł. $[bc]$. Otrzymamy odpowiedź twierdzącą, jeżeli prosta $a$ przecina każdą z prostych $b$ i $c$ lub też przecina jedną z nich a jest równoległa do drugiej; przeczącą, jeżeli prosta $a$ jest skośna względem *jednej* z prostych $b$ i $c$. Wszystkie te przypadki rozpoznamy łatwo, stosując § 22.

Tak np na rys. 61 a) rzuty $a'$ i $a''$ wyobrażają prostą, należącą do pł. $[bc]$, a prosta $a$, wyobrażona na rys. 61 b), na którym $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, nie należy do pł. $[bc]$. Dlaczego?



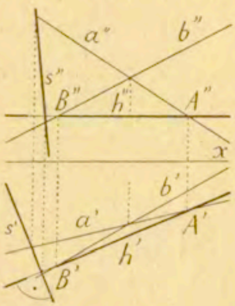
Rys. 61.

Możemy postawić zagadnienie inaczej, żądając z góry wykreślenia rzutów prostej, którąby *należała* do danej płaszczyny. Sieć takich prostych można dowolnie zgęścić, t. j. wyznaczyć dowolnie wielką ich liczbę (p. ćw. 36, 37, 38 przyp. 2), 39 z poprzedniego rozdziału). Dobrze sobie uświadomić, że przy tego rodzaju konstrukcyach opieramy się na twierdzeniach z § 16-go oraz na związku elementarnym, zawartym w samem określeniu płaszczyzny, a polegającym na tem, że prosta, która ma dwa punkty wspólne z płaszczyzną, należy do niej całkowicie. Związek ten zastępujemy niekiedy innym: prosta należy do płaszczyzny, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny i jest równoległa do jakiejś prostej, położonej w tej płaszczyźnie. Dlaczego to zdanie jest słuszne?

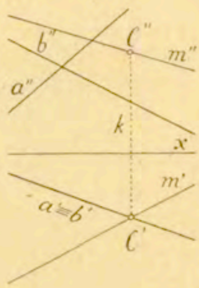
Dla przykładu rozwiążmy następujące zadanie (nieoznaczone):

Wykreślić rzuty dowolnej linii poziomu $h$ i linii spadku $s$ pł. $[ab]$, danej przez rzuty $a'$, $a''$, $b'$, $b''$. Wystarczy w tym celu, ponieważ $h$ ma być $\parallel \Pi_1$, wykreślić $h'' \parallel x$ (§ 17), a następnie wyznaczyć $h'$ w ten sposób, by prosta $h$ przecinała $a$ i $b$, t. j. by punkty $A'' \equiv [h''a'']$ i $A' \equiv [h'a']$ leżały na prostej prostopadłej do $x$, równie jak punkty $B'' \equiv [h''b'']$ i $B' \equiv [h'b']$. Prosta $s$ ma rzut $s' \perp h'$ (p. § 6—twierdzenie o rzucie kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutu); $s''$ wyznaczamy podług $s'$, jak poprzednio $h'$ podług $h''$ (rys. 62).

Przy rozwiązywaniu zagadnień co do płaszczyzn, zasługuje na szczególną uwagę ten przypadek, gdy płaszczyzna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów; w takim razie odpowiednie rzuty wszystkich punktów, prostych i t. d., należących do niej, nakrywają się wzajemnie wzdłuż odpowiedniego jej śladu. Nawzajem, jeśli mamy dane takie dwie proste $a$ i $b$, że $a' \equiv b'$, to płaszczyzna $[ab] \perp \Pi_1$ stanowi dla obu prostych płaszczyznę, rzutującą na płaszczyznę poziomą. Jeżeli $a'' \equiv b''$, to pł. $[ab] \perp \Pi_2$.




Rys. 62.



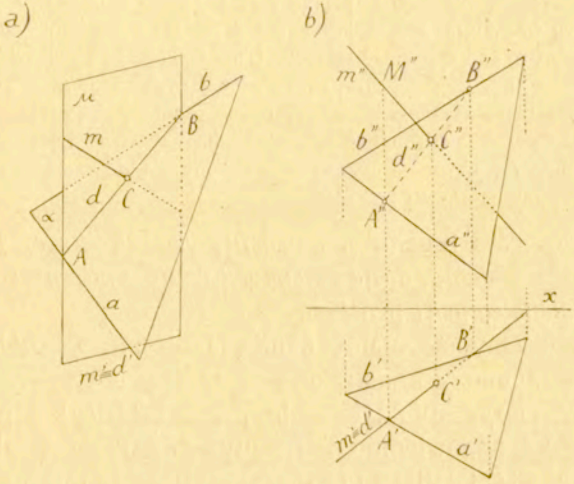

Rys. 63.

§ 24. **Zadania podstawowe**. Po tych uwagach możemy rozwiązać dwa następujące podstawowe zadania co do położenia.

*Zadanie 1.* Są dane (zapomocą rzutów $a'$, $a''$, $b'$, $b''$, $m'$, $m''$) płaszczyzna $[ab] \equiv \alpha$ oraz prosta $m$. *Wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny przez prostą*, $C \equiv [\alpha m]$.

a) Zacznijmy od tego przypadku szczególnego, gdy $\alpha \perp \Pi_1$ lub $\alpha \perp \Pi_2$. Weźmy np. $\alpha \perp \Pi_1$. W takim razie $a' \equiv b'$ lub też jeden z rzutów poziomych jest punktem, należącym do drugiego rzutu (albo oba rzuty są punktami, jeżeli proste $a$ i $b$ są *równoległe* względem siebie a prostopadłe do $\Pi_1$—w takim razie wystarczyłoby połączyć te punkty, by otrzymać miejsce geometryczne rzutów poziomych wszystkich punktów płaszczyzny $\alpha$ czyli jej ślad poziomy). Przypuśćmy, że $a'$ nie jest punktem — więc $a'$ stanowi ślad poziomy płaszczyzny $\alpha$, na którym, jak zaznaczyliśmy, muszą być położone rzuty wszystkich punktów, należących do $\alpha$, w szczególności szukanego punktu $C\equiv[m\alpha]$. Z drugiej strony, ponieważ $C\subset m$, przeto $C'\subset m'$; ostatecznie $C'\equiv[a'm']$. $C''$ musi należeć do $m''$ oraz do prostopadłej $k\equiv[\supset C'\perp x]$, więc $C''\equiv[m''k]$. Przebieg konstrukcyi jest zupełnie jasny po tej analizie (p. rys. 63).

b) Proste przecinające się $a$ i $b$ nie wyznaczają płaszczyzny, prostopadłej do którejś z płaszczyzn rzutów. Główna myśl konstrukcyi, która doprowadza w tym razie do celu, polega na przeciągnięciu *przez prostą m* płaszczyzny pomocniczej $\mu$, wyznaczeniu *linii przecięcia d* płaszczyzny $\mu$ z pł. $[ab]\equiv\alpha$, a następnie *punktu przecięcia* prostych $d$ i $m$, $C\equiv[md]$, który, należąc do




Rys. 64.

$d\equiv[\mu\alpha]$, spełnia oczywiście żądane warunki ($C\subset m$ i $C\subset d$, otóż $d\subset\alpha$, więc i $C\subset\alpha$; ostatecznie $C\equiv[m\alpha]$). Płaszczyźnie pomocniczej $\mu$ nadajemy przytem kierunek prostopadły do $\Pi_1$ (lub do $\Pi_2$)— będzie to tedy płaszczyzna, rzutująca poziomo (pionowo) prostą $m$. Powtarzając konstrukcye, podane w przypadku a), wyznaczamy rzuty $A'$, $A''$ i $B'$, $B''$ punktów $A\equiv[\mu a]$, $B\equiv[\mu b]$. Oczywiście prosta $[AB]$, jako mająca dwa punkty wspólne ($A$ i $B$) zarówno z płaszczyzną $\mu$, jak płaszczyzną $\alpha\equiv[ab]$, stanowi linię przecięcia tych płaszczyzn: $d\equiv[AB]\equiv[\alpha\mu]$. Punkt $C$, wyznaczony jako punkt przecięcia $d$ i $m$, $C\equiv[dm]$, jak już wyjaśniliśmy, spełnia warunki zadania.

Dokładny przebieg konstrukcyi (p. rys. 64): Dane: $a'$, $b'$, $m'$; $a''$, $b''$, $m''$. Wyznaczenie punktów $A\equiv[\mu a]$, $B\equiv[\mu b]$: $A'\equiv[a'm']$, $k\equiv[\supset A'\perp x]$, $A''\equiv[ka'']$; $B'\equiv[b'm']$, $l\equiv[\supset B'\perp x]$, $B''\equiv[lb'']$.

Wyznaczenie prostej $d\equiv[AB]\equiv[\mu\alpha]$:

$$d'\equiv m';\quad d''\equiv[A''B''].$$

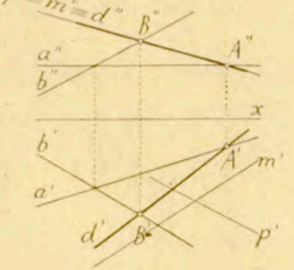
Wyznaczenie punktu $C\equiv[dm]\equiv[\alpha m]$:

$$C''\equiv[m''d''],\ i\equiv[\supset C''\perp x],\ C'\equiv[im'].$$

*Uwaga.* Prosta $c$ nie odgrywa żadnej roli w konstrukcyi; wprowadziliśmy ją w celu ograniczenia ze wszystkich stron kawałka płaszczyzny, co nadaje rysunkowi charakter bardziej poglądowy. Do tego samego zmierza wykreślenie rysem kropkowanym rzutu poziomego tej części prostej $m$, która jest zakryta przez płaszczyznę $\alpha$, gdy patrzymy z góry i t. d. oraz rzutu pionowego tej części $m$, która jest zakryta przez $\alpha$, gdy patrzymy z przodu i t. d. (p. § 20). Łatwo zoryentować się w tym względzie, stwierdzając np., że z punktów $A$ na $a$ i $M$ na $m$, posiadających ten sam rzut poziomy $A'\equiv M'\equiv[a'm']$, punkt $M$, o *wyższym* rzucie pionowym, jest położony *wyżej*, a więc i cały odcinek $CM$ wystaje ponad płaszczyznę $\alpha$ i jest widzialny dla oka, patrzącego na $\Pi_1$. Podobnież wnioskujemy co do rzutu pionowego, zapomocą np. punktu $[b''m'']$ i t. p.

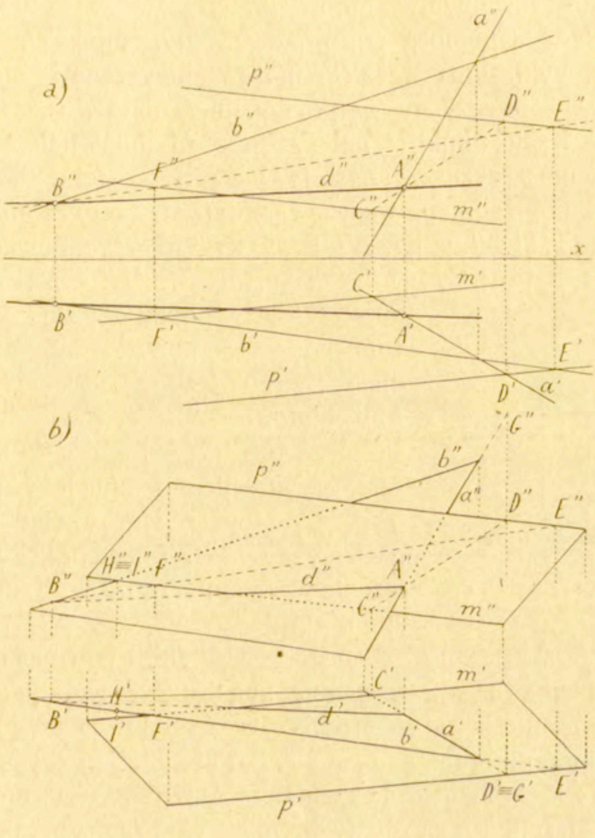
*Zadanie 2. Wyznaczyć prostą, wzdłuż której przecinają się dwie płaszczyzny, dane zapomocą rzutów par przecinających się (lub równoległych) prostych.*

Przypuśćmy, że mamy dane płaszczyzny $\alpha\equiv[ab]$, $\mu\equiv[mp]$. Wystarczy zapomocą konstrukcyi, wskazanych w poprzedniem zadaniu, wyznaczyć punkty: $A\equiv[a\mu]$ oraz $B\equiv[b\mu]$ i połączyć je (t. j. połączyć odpowiednio ich rzuty). Zarówno $A$ jak $B$ należą do $\alpha$ i do $\mu$, więc $[AB]\subset\alpha$ i $[AB]\subset\mu$, czyli $d\equiv[AB]\equiv[\mu\alpha]$. (Można zamiast punktów $A$ i $B$ wyznaczyć punkty $M\equiv[m\alpha]$ i $P\equiv[p\alpha]$; $d\equiv[MP]\equiv[\alpha\mu]\equiv[AB]$). Jeżeli jedna z danych płaszczyzn jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, to rozwiązanie ogromnie się upraszcza; np. gdy $\mu\perp\Pi_1$, to konstrukcya punktów $A$ i $B$ odbywa się jak w zadaniu 1-em, przypadku a) — właściwie rozwiązaliśmy już takie zadanie przed chwilą przy wyjaśnieniu konstrukcyi, których wymaga zadanie 1-sze w przypadku b). Przykład, gdy $\mu\perp\Pi_2$ — na rys. 65-ym. Zauważmy, że rzuty $m'$, $p'$ nie grają żadnej roli w kon-




Rys. 65.

strukcyach i mogłyby być położone dowolnie. Na rys. 66-ym została podana konstrukcya ogólna, przytem płaszczyzna $\mu$ jest wyznaczona przez dwie proste równoległe, a nie przecinające się, co nie zmienia bynajmniej sposobu rozwiązania.



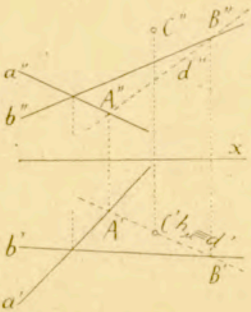

Rys. 66.

Rys. 66 b) różni się od 66 a) tem, że płaszczyzny zostały na nim ograniczone i że odróżniliśmy ich części widzialne i niewidzialne, zapomocą par punktów o wspólnym rzucie poziomym lub pionowym. Tak np. stwierdzamy, że punkt $D$ (który $\subset p$, a więc $\subset \mu$), leży poniżej punktu $G$ (należącego do prostej $a$, a więc i do $\alpha$); stąd łatwo wnioskować, że część płaszczyzny $\alpha$ aż do $d$, zawierająca wierzchołek $[ab]$, leży *ponad* $\mu$, co rozstrzyga o wykonaniu całego rzutu poziomego. Co do rzutu pionowego, wystarczy przekonać się, że $I$ ($\subset m$ więc $\subset \mu$) leży *przed* $H$ ($\subset b$ więc $\subset \alpha$). Na rys. 66 b) nie wykreśliliśmy osi rzutów (por. uwagę w końcu tego paragrafu).

W związku z temi dwoma zadaniami zasadniczemi (1-em i 2-em) można jeszcze rozpatrzeć następne, podobne do zadania (A) z paragrafu poprzedniego.

*Zadanie (B).* Rozpoznać, czy punkt, którego rzuty są dane, należy do płaszczyzny, danej zapomocą rzutów dwu przecinających się (lub równoległych) prostych.

Są dane zapomocą rzutów: $\alpha =$ pł. $[ab]$, punkt $C$. Dowolna prosta $h_\mu$, wykreślona przez $C'$, może być uważana za ślad poziomy pewnej płaszczyzny $\mu$, prostopadłej do $\Pi_1$ i zawierającej punkt $C$. Jeżeli punkt $C$ należy do $\alpha$, to musi należeć do linii przecięcia płaszczyzn $\alpha$ i $\mu$: $d = [\alpha \mu]$. Rzuty prostej $d$ wyznaczamy zgodnie z poprzedniemi wskazówkami (zad. 2-gie) zapomocą rzutów $A' = [a'h_\mu]$ i $A''$ na $a''$, $B' = [b'h_\mu]$ i $B''$ na $b''$, odpowiadających punktom $A = [\mu a]$, $B = [\mu b]$; $d' = h_\mu$, $d'' = [A''B'']$. Na rys. 67-ym punkt $C''$ leży ponad $d''$; stąd łatwo wywnioskować, że punkt $C$, *nie* należąc do płaszczyzny $\alpha$, leży *ponad* tą płaszczyzną. Aby się dowiedzieć, czy punkt $C$ znajduje się *przed* płaszczyzną $\alpha$ czy *za* nią, należałoby wykreślić dowolnie jakąś prostą $v_\rho$, przez $C''$, uważać ją za ślad pionowy płaszczyzny $\rho \perp \Pi_2$ i następnie zbadać położenie wzajemne rzutu $C'$ i rzutu $e'$ prostej $e = [\rho \alpha]$.



Rys. 67.

*Uwaga.* Czytelnik łatwo zauważy, że wszystkie konstrukcye tego paragrafu są zupełnie niezależne od położenia wyższego lub niższego osi rzutów, byleby jej kierunek, a wraz z nim kierunek prostych, prostopadłych do niej, pozostał bez zmiany. Możnaby tedy, umówiwszy się co do kierunku tych prostych, nie wykreślać zupełnie osi rzutów, która atoli jest niezbędna przy konstrukcyach, dotyczących śladów prostych i płaszczyzn (§ 19, paragrafy następne).

§ 25. **Metoda śladów. Różne oryentacye płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów.** Metodą klasyczną przedstawiania płaszczyzny stała się t. zw. metoda śladów. Pierwsze wskazówki co do tej metody podaliśmy w § 8-ym, mówiąc na razie tylko o jednej płaszczyźnie rzutu. Gdy mamy do czynienia z dwiema płaszczyznami rzutu, dobranemi jak zwykle, to występują dwa ślady: poziomy, stanowiący linię przecięcia rozważanej płaszczyzny z płaszczyzną poziomą rzutów $\Pi_1$ i pionowy, stanowiący jej przecięcie z płaszczyzną pionową $\Pi_2$. Podobnie jak ślady prostej oznaczyliśmy wielkiemi literami $H$ i $V$ („horizontal“ i „vertical“), tak ślady płaszczyzny oznaczymy przez małe litery $h$ i $v$, z dodatkiem nazwy płaszczyzny u dołu. Śladami płaszczyzny $\alpha$ będą tedy: $h_\alpha \equiv [\alpha \Pi_1]$, $v_\alpha \equiv [\alpha \Pi_2]$. Z samego określenia śladów wynika w tej chwili (§ 17, tw. 1 a i 2 a), iż: $h_\alpha' \equiv h_\alpha$, $h_\alpha'' \equiv x$ (lub: $h_\alpha'' \subset x$, o ile $h_\alpha''$ jest punktem); i podobnież: $v_\alpha' \equiv x$ (lub $v_\alpha' \subset x$, gdy $v_\alpha'$ jest punktem), $v_\alpha'' \equiv v_\alpha$. Ponieważ ślady *stanowią w ogólności dwie proste przecinające się (lub równoległe)*, które wyznaczają ją w zupełności równie jak wszelka inna para takich prostych, przeto, znając położenie ich rzutów, możemy zastosować do nasuwających się zagadnień metody ogólne, wyłożone w § 23-im i 24-ym. Dogodniej jednak rozwinąć w tym celu nowy układ rozumowań, przytem wystarczy oznaczać na rysunku jedynie same ślady $h_\alpha$, $v_\alpha$, bez pisania nazw: $h_\alpha'$, $h_\alpha''$; $v_\alpha'$, $v_\alpha''$.

Przedewszystkiem jest niemal oczywistem:

*Twierdzenie (A).* Jeżeli jeden ze śladów płaszczyzny przecina w jakimś punkcie oś rzutów, to drugi ślad istnieje (w odległości skończonej) i przecina oś rzutów w tym samym punkcie. Istotnie, jeżeli np. $h_\alpha$ przecina oś w punkcie $O$, to ten punkt należy jednocześnie do płaszczyzny $\alpha$ i do płaszczyzny pionowej rzutów $\Pi_2$, a przeto te dwie płaszczyzny, jako posiadające punkt wspólny, muszą się przecinać wzdłuż prostej, zawierającej ten punkt, t. j. $v_\alpha \supset O$. Z twierdzenia (A) wynika, że jeżeli jeden ze śladów jest równoległy do osi rzutów, to drugi albo nie istnieje albo jest również równoległy do osi rzutów i t. p.

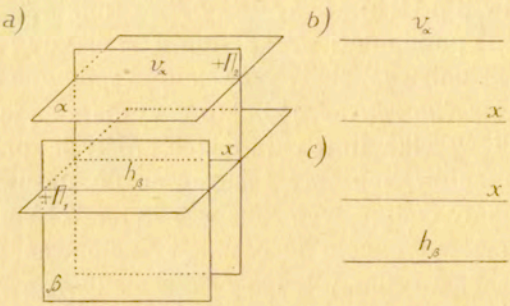
Pomiędzy położeniem płaszczyzny w przestrzeni względem płaszczyzn rzutów a postacią jej śladów istnieją związki, które możemy ująć w następujących twierdzeniach:

*I. 1. Płaszczyzna, równoległa do płaszczyzny poziomej, nie posiada śladu poziomego (w odległości skończonej), a jej ślad pionowy jest równoległy do osi rzutów.*

Istotnie, jeżeli $\alpha \parallel \Pi_1$, to z powodu że $x \equiv [\Pi_1 \Pi_2]$, $v_\alpha \equiv [\alpha \Pi_2]$ musi zachodzić związek: $v_\alpha \parallel x$. (Dwie płaszczyzny równoległe przecinają się z trzecią płaszczyzną wzdłuż prostych równoległych). Podobnież:

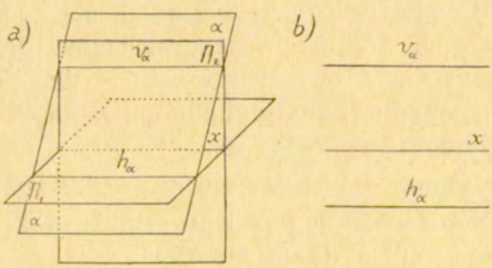
*2. Ślad poziomy płaszczyzny równoległej do płaszczyzny pionowej jest równoległy do osi rzutów; śladu pionowego niema.* Gdy $\beta \parallel \Pi_2$, to $h_\beta \parallel x$ (p. rys. 68).

*3. Oba ślady płaszczyzny, równoległej do osi rzutów, są do niej równoległe.* Gdy (rys. 69) $\alpha \parallel x$, to $h_\alpha \parallel x$, $v_\alpha \parallel x$. Twier-




Rys. 68.

dzenie to wynika bezpośrednio z zastosowania znanego twierdzenia geometrycznego: Jeżeli prosta (oś $x$) jest równoległa do płaszczyzny (pł. $\alpha$ na rys. 69), to wszelka płaszczyzna, przesunięta przez tę prostą (np. $\Pi_1$ i $\Pi_2$), przecina pierwszą płaszczy-




Rys. 69.

znę ($\alpha$) podług prostych ($h_\alpha$ i $v_\alpha$) równoległych do pierwszej prostej ($x$). Oczywiście:

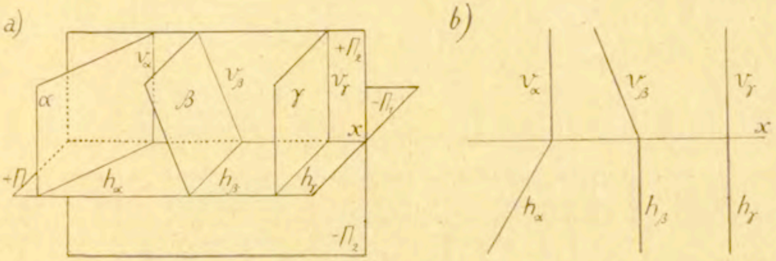
*3 a. Oba ślady płaszczyzny, przechodzącej przez oś rzutów, nakrywają się wzajemnie i nakrywają oś rzutów.* Rzecz jasna, iż w tym przypadku płaszczyzna nie jest bynajmniej wyznaczona przez ślady.

*II. 4. Płaszczyzna, prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, ale nie równoległa do pionowej, posiada ślad pionowy prostopadły do osi.* Jeżeli $\alpha \perp \Pi_1$, to $v_\alpha \perp x$.

Istotnie, z tego, że $\alpha \perp \Pi_1$ i $\Pi_2 \perp \Pi_1$ (rys. 70) wynika, że $[\alpha \Pi_2] \perp \Pi_1$ czyli $v_\alpha \perp \Pi_1$, a więc $v_\alpha \perp x$. Zauważmy jeszcze, że kąt, utworzony przez $h_\alpha$ i $x$, odpowiada, jako kąt liniowy, kątowi dwuściennemu $\sphericalangle[\alpha \Pi_2]$. Podobnież:

*5. Jeżeli płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny pionowej ale nie równoległa do poziomej, to ślad poziomy jest prostopadły do osi, a ślad pionowy nachylony do niej.*

Gdy $\beta \perp \Pi_2$, to $h_\beta \perp x$. Dowód stanowiłby niemal powtórzenie poprzedniego.




Rys. 70.

Wreszcie jeżeli (rys. 70) płaszczyzna $\gamma \perp x$, to wszelka prosta, leżąca w tej płaszczyźnie, a więc w szczególności ślady $h_\gamma$ i $v_\gamma$, jest prostopadła do osi, co oczywiście nie ulega zmianie przy sprowadzeniu obu obrazów do jednej płaszczyzny. Więc:

*6. Jeżeli płaszczyzna jest prostopadła do osi, to oba jej ślady są do niej prostopadłe.*

Przy rozważaniu rzutów utworów, leżących w płaszczyznach, posiadających położenie 1, 2, 4, 5 lub 6, należy pamiętać o twierdzeniach 4 i 4 a z § 4-go, których treść przypomnieliśmy również w § 23-im, mówiąc o szczególnie dogodnych położeniach płaszczyzny.

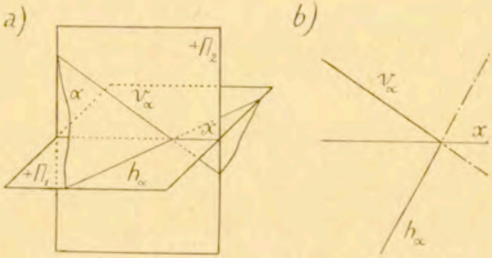
Równie łatwo uzasadnić bezpośrednio 6 twierdzeń wzajemnych, które można zresztą, podobnie jak poprzednio, sformułować w postaci jednego twierdzenia:

*Jeżeli ślad płaszczyzny na jednej z płaszczyzn rzutów jest równoległy do osi, to płaszczyzna jest równoległa do osi rzutów, lub też, o ile* *drugi ślad nie istnieje — zarazem do drugiej płaszczyzny rzutów; jeżeli jeden ze śladów jest prostopadły do osi rzutów, to płaszczyzna jest prostopadła do drugiej płaszczyzny rzutów.*

III. Uzasadniwszy te wszystkie twierdzenia (wraz z odwrotnemi), otrzymujemy zapomocą dowodu niewprost (sprowadzenia do niedorzeczności) twierdzenie:

7. *Jeżeli płaszczyzna nie jest równoległa ani prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów, to oba jej ślady są nachylone do osi rzutów* — i nawzajem (rys. 71).

W celu szybszego oryentowania się, będziemy najczęściej wykreślali jako linie pełne te części śladów, które leżą w przedniej części płaszczyzny poziomej rzutów i w górnej części płaszczyzny pionowej, a więc część śladu poziomego, położoną pod osią oraz



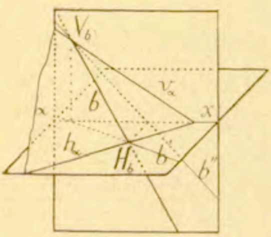

Rys. 71.

część śladu poziomego, położoną pod osią. Pozostałe części mogą być w takim razie albo zupełnie nie wykreślane, albo oznaczane, o ile to jest zgodne z przebiegiem rozwiązania, jako linie konstrukcyjne.

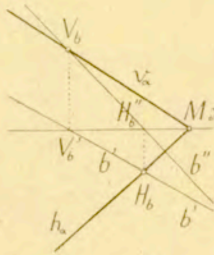
§ 26. (**Metoda śladów**). **Płaszczyzna i prosta.** *I. Prosta, leżąca w płaszczyźnie.* Przypuśćmy, że dana płaszczyzna posiada (w odległości skończonej) oba ślady: poziomy i pionowy. W takim razie prosta, należąca do płaszczyzny (por. § 23), musi albo przecinać oba ślady, albo być równoległą do jednego z nich, a przecinać drugi, albo wreszcie być równoległą do obu. Nawzajem, każdy z tych warunków, z wyjątkiem trzeciego (spełniającego się wogóle, gdy prosta i płaszczyzna są || $x$), wystarcza do orzeczenia, że prosta należy do płaszczyzny. Otóż punkty, w których prosta przecina ślady płaszczyzny, są zarazem punktami, w których przebija odpowiednie płaszczyzny rzutów, czyli *śladami* prostej; uwzględniając przeto pierwszą możliwość, najczęściej spotykaną, możemy sformułować następujący, *najczęściej stosowany sprawdzian przynależności prostej do płaszczyzny*:

*(Twierdzenie 1). Na to, aby prosta należała do płaszczyzny, wystarcza, iżby jej oba ślady należały odpowiednio do śladów płaszczyzny, t. j. iżby ślad poziomy prostej należał do śladu poziomego płaszczyzny, ślad pionowy — do śladu pionowego*: jeżeli $H_b \subset h_\alpha$, $V_b \subset v_\alpha$, to $b \subset \alpha$. Nawzajem: *jeżeli prosta posiada oba ślady* (w odległości skończonej), to ślady płaszczyzny, która zawiera tę prostą, muszą zawierać odpowiednio ślady prostej: jeżeli $b \subset \alpha$, to $H_b \subset h_\alpha$, $V_b \subset v_\alpha$. Szczegóły konstrukcyjne dadzą się najlepiej wyjaśnić przy rozwiązaniu dwu następujących zadań:

*Zadanie 1.* Mamy prostą $b$, nie równoległą do żadnej z płaszczyzn rzutów, daną zapomocą rzutów; dany jest również punkt $M$



Rys. 72.



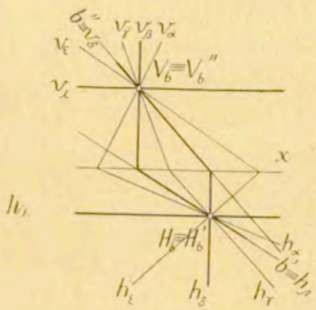
Rys. 73.

na osi. Wykreślić ślady płaszczyzny $\alpha$, wyznaczonej przez tę prostą i przez ten punkt: $\alpha \equiv [bM]$.

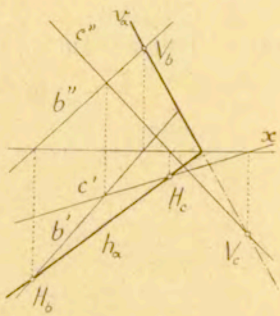
Zgodnie z tem, cośmy zaznaczyli przed chwilą i co się uwydatnia jak najoczywiściej na rysunku 72, wystarczy wyznaczyć, podług § 19, ślady $H_b$ i $V_b$, a następnie wykreślić proste $h_\alpha \equiv [MH_b]$ i $v_\alpha \equiv [MV_b]$. Gdyby punkt $M$ nie był dany, zadanie byłoby nieoznaczone: istotnie przez prostą w przestrzeni można przesunąć nieskończenie wiele płaszczyzn, tworzących *pęk płaszczyzn*, któremu odpowiadają na płaszczyźnie rysunku dwa pęki prostych: pęk śladów poziomych i pęk śladów pionowych, perspektywiczne względem siebie. (Co do perspektywiczności p. ćwicz. 38 z poprzedniego rozdziału). W pęku tym zasługuje na uwagę płaszczyzna $\lambda$, równoległa do osi, której ślady są przeto również do osi równoległe (rys. 74) oraz płaszczyzny $\beta$ i $\delta$, *rzutujące prostą poziomo i pionowo.* $h_\beta \equiv b'$ (p. § 4 tw. 4), $v_\beta \perp x$ (§ 25); $h_\delta \perp x$, $v_\delta \equiv b''$.

*Zadanie 2.* Są dane zapomocą rzutów dwie proste przecinające się lub równoległe, z których żadna nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn rzutów; wyznaczyć ślady płaszczyzny, wyznaczonej przez te proste.

Oznaczmy dane proste przez $b$ i $c$; zgodnie z twierdzeniem zasadniczem, warunek by prosta $b$ należała do płaszczyzny $\alpha$, której śladów szukamy, pociąga za sobą: $h_\alpha \supset H_b$, $v_\alpha \supset V_b$; podobnież przynależność $c$ do $\alpha$ t. j. warunek $c \subset \alpha$ wymaga by: $h_\alpha \supset H_c$, $v_\alpha \supset V_c$. Ostatecznie: $h_\alpha \equiv [H_b H_c]$; $v_\alpha \equiv [V_b V_c]$. Rozwiązanie polega tedy na odnalezieniu, jak wyżej, śladów obu prostych i połączeniu



Rys. 74.

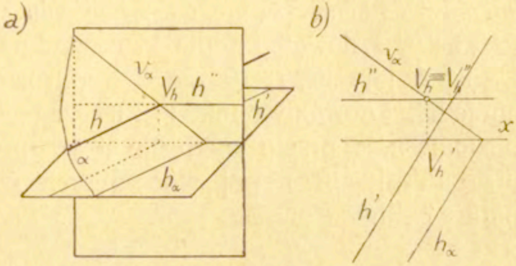


Rys. 75.

ze sobą odpowiednio śladów poziomych i śladów pionowych (rys. 75). Proste $[H_b H_c]$ i $[V_b V_c]$, jako ślady pł. $[bc]$, muszą przecinać się na osi rzutów lub być jednocześnie do niej równoległe — uwaga ta może być zużytkowana w celu uproszczenia konstrukcyi (przez pominięcie jednego z 4-ch śladów) lub sprawdzenia jej dokładności. Gdyby proste $b$ i $c$ były skośne, proste $[H_b H_c]$ i $V_b V_c]$ nie spełniałyby żadnego z tych warunków (porównać z końcem § 22).

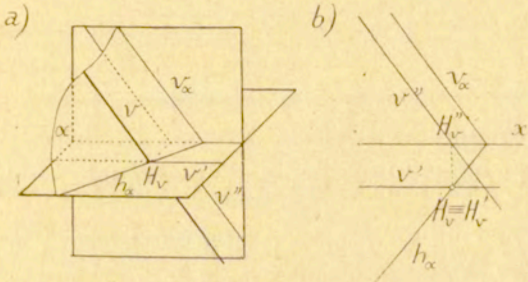
Przypuśćmy teraz, że ślady płaszczyzny $\alpha$ przecinają się na osi i że mamy do czynienia z prostą $h$, równoległą np. do śladu poziomego, a przecinającą ślad pionowy, czyli z tak zwaną *linią poziomu* płaszczyzny (§ 8). Jakeśmy dowiedli już powyżej (§ 8), *rzut poziomy linii poziomu jest równoległy do śladu płaszczyzny:* $h' \parallel h_\alpha$, *rzut pionowy* zaś, z powodu równoległości $h$ do $\Pi_1$, *jest równoległy do osi* (§ 17, 1): $h'' \parallel x$. Oczywiście *ślad*

$V_h \equiv [h\Pi_2] \equiv V_h''$ *musi należeć do* $v_\alpha \equiv [\alpha\Pi_2]$, $V_h \subset v_\alpha$. Nawzajem, łatwo dowieść, iż jeżeli rzuty jakiejś prostej $h$ spełniają warunki: 1) $h' \parallel h_\alpha$, 2) $h'' \parallel x$ i 3) prosta, łącząca punkty $V_h' \equiv [h'x]$ i $[h''v_\alpha]$ jest prostopadła do osi — to ta prosta $h$ należy do płaszczyzny $\alpha$




Rys. 76.

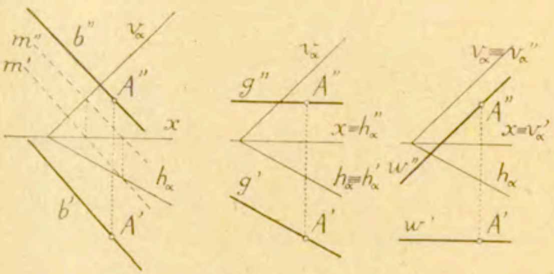
i jest jej linią poziomu (rys. 76). Podobnież o prostych, równoległych do śladu pionowego płaszczyzny, czyli t. zw. *liniach frontu*, można orzec, co następuje: *Rzuty poziome* linii frontu są *równoległe do osi rzutów*, a *rzuty pionowe—do śladu pionowego płaszczyzny*; ślad poziomy linii trontu należy do śladu poziomego płaszczyzny (rys. 77). Nawzajem: jeżeli $v' \parallel x$, $v'' \parallel v_\alpha$ i $[[v'h_\alpha]\,[v''x]] \perp x$, to i t. d.




Rys. 77.

Po tych wyjaśnieniach, pozostawiamy uczącemu się rozwiązanie zadań 1 i 2, gdy występują w nich proste, $\parallel \Pi_1$ lub $\parallel \Pi_2$. Zaznaczymy jeszcze tutaj, że, jak również dowiedliśmy w § 8-ym 1) rzut poziomy linii spadku płaszczyzny jest prostopadły do jej śladu poziomego; 2) rzut pionowy prostej, położonej w płaszczyźnie i prostopadłej do jej śladu pionowego, jest prostopadły do śladu pionowego.

Nieraz przy wykonywaniu konstrukcyi bardziej złożonych potrzeba rozwiązywać następujące zadanie nieoznaczone: (3) *Wykreślić rzuty jakiejś prostej, położonej w płaszczyźnie, danej zapomocą śladów.* Rzecz jasna, że można w tym celu: 1) obrać dowolny punkt $H_b$ na $h_\alpha$ i dowolny punkt $V_b$ na $v_\alpha$ i uważając je za ślady prostej, znaleźć jej rzuty (§ 19, zad. 2 — p. również rys. 73); albo też 2) obrać na $v_\alpha$ dowolny punkt $V_h$ i uważać go za ślad pionowy linii poziomu $h$, a przeto wykreślić $h'' \parallel x$ przez $V_h'' \equiv V_h$ oraz $h' \parallel h_\alpha$ przez $V_h' \equiv [[\supset V_h'' \perp x]\, x]$; albo wreszcie 3) wyznaczyć rzuty linii frontu $v$ podług $H_v$ na $h_\alpha$ i t. p.



Rys. 78.

*II. Prosta, równoległa do płaszczyzny.* Do tego, aby prosta była równoległa do płaszczyzny, wystarcza, iżby była równoległa do jakiejś prostej, położonej w tej płaszczyźnie. Zadanie nieoznaczone:

4. *Przez punkt dany przeciągnąć prostą, równoległą do danej płaszczyzny* — sprowadza się tedy do zadania 3 z tegoż paragrafu. Mając dane rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$ oraz ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny $\alpha$, wykreślamy z początku rzuty $m'$ i $m''$ jakiejś prostej $m$, leżącej w płaszczyźnie $\alpha$, a następnie wykreślamy przez $A'$ prostą $b' \parallel m'$, a przez $A''$ prostą $b'' \parallel m''$; w takim razie $b \parallel m$, więc $b \parallel \alpha$ (rys. 78). Konstrukcya się upraszcza, a jednocześnie zadanie staje się zupełnie oznaczonem, jeżeli chcemy przeciągnąć przez punkt $A$ prostą, równoległą do któregoś ze śladów (czyli posiadającą kierunek linii poziomu lub linii frontu). Aby np. otrzymać rzuty prostej $g$, zawierającej $A$ i równoległej do $h_\alpha$, wystarczy wykreślić przez $A'$ prostą $g' \parallel h_\alpha$, (gdyż $h_\alpha' \equiv h_\alpha$) i przez $A''$ prostą

$g'' \parallel x$ (gdyż $h_\alpha'' \equiv x$). Sposób sprawdzenia, czy prosta $b$, dana zapomocą rzutów i płaszczyzna $\alpha$, dana zapomocą śladów, są równoległe względem siebie, wskażemy w § 28.

*III. Prosta, przebijająca płaszczyznę; w szczególności: prostopadła do płaszczyzny.* Wszelka prosta, nie położona w płaszczyźnie i nie równoległa do niej, musi ją przebijać. Odsuwając na później zagadnienie co do wyznaczenia punktu przebicia (§ 28), rozpatrzmy niezależnie od tego zagadnienia przypadek szczególny, gdy prosta jest do płaszczyzny prostopadła. Zgodnie z tem, czegośmy już dowiedli w § 8, II (p. rys. 18):

*(Twierdzenie 2). Rzuty prostej, prostopadłej do płaszczyzny, są odpowiednio prostopadłe do jej śladów (o ile te ślady istnieją w odległości skończonej*: jeżeli $p \perp \alpha$, to $p' \perp h_\alpha$, $p'' \perp v_\alpha$. Nawzajem, jeżeli $p' \perp h_\alpha$ i $p'' \perp v_\alpha$, to $p \perp \alpha$. Istotnie, ponieważ $h_\alpha \subset \Pi$, przeto (§ 6, II, twierdzenie odwrotne): z warunku: $p' \perp h_\alpha$ (czyli $p' \perp h_\alpha'$) wynika, że kierunki prostych $p$ i $h_\alpha$ są prostopadłe, krócej: $p \perp h_\alpha$; ponieważ $v_\alpha \subset \Pi_2$, przeto z $p'' \perp v_\alpha$ wynika: $p \perp v_\alpha$. Skoro zaś kierunek prostej $p$ jest prostopadły do dwu kierunków w płaszczyźnie $\alpha$, to ta prosta jest prostopadła do płaszczyzny[1]): $p \perp \alpha$. Dowód traci wartość jedynie wtedy, gdy kierunki śladów $h_\alpha$ i $v_\alpha$ nie są odmienne, t. j. gdy $h_\alpha \parallel v_\alpha \parallel x$; z wyjątkiem tego przypadku, możemy tedy stosować twierdzenie wzajemne:

*Jeżeli rzuty prostej są odpowiednio prostopadłe do śladów płaszczyzny, to sama prosta jest prostopadła do płaszczyzny.*

Jeżeli płaszczyzna nie posiada jednego z dwu śladów, to oba twierdzenia tracą właściwą treść; łatwo jednak zdać sobie sprawę z tego, iż jeżeli np. $\alpha \parallel \Pi_1$ i $p \perp \alpha$, to $p \perp \Pi_1$, więc $p'$ jest punktem, $p'' \perp x$ - i nawzajem...

Możemy tedy w ogólności (z wyjątkiem przypadku, gdy $h_\alpha \parallel v_\alpha \parallel x$) rozwiązać zadanie zasadnicze:

5. *Z danego punktu opuścić prostopadłą na daną* (zapomocą śladów) *płaszczyznę.*

Dane: $A'$, $A''$; $h_\alpha$, $v_\alpha$.

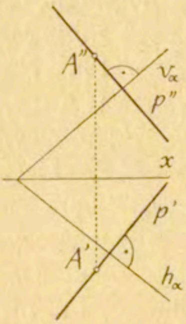
Wykreślamy: $p' \equiv [\supset A' \perp h_\alpha]$,
$p'' \equiv [\supset A'' \perp v_\alpha]$.

[1]) Zdanie to stanowi postać ogólniejszą znanego twierdzenia: Jeżeli prosta $p$ jest prostopadła do dwu prostych, wykreślonych na płaszczyźnie $\alpha$ przez punkt przebicia $[p\alpha]$, to jest prostopadła również do wszelkiej innej prostej, przeciągniętej na płaszczyźnie przez ten punkt.

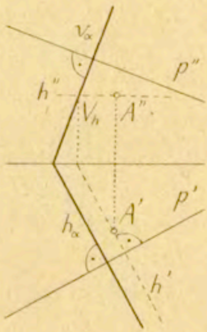
Zgodnie z twierdzeniem odwrotnem, $p'$ i $p''$ stanowią rzuty prostej $p$, prostopadłej do $\alpha$; $p \supset A$, gdyż $p' \supset A'$, $p'' \supset A''$. Co należy uczynić w tym przypadku szczególnym, gdy $\alpha \parallel \Pi_1$ lub $\alpha \parallel \Pi_2$?

*Uwaga.* Początkujący wpadają łatwo w błąd, kojarząc punkty $[p'h_\alpha]$ i $[p''v_\alpha]$ z punktem przebicia $[p\alpha]$, jako np. jego rzuty — chwila zastanowienia wykazuje zupełną bezzasadność takich przypuszczeń.

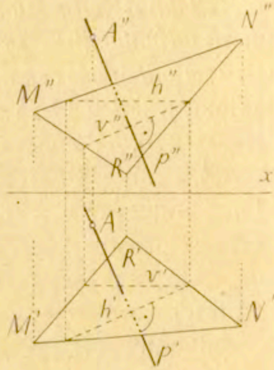
Zauważmy, że ten sam dowód, który zastosowaliśmy przed chwilą w stosunku do śladów, prowadzi do twierdzeń ogólniejszych (por. § 8, II):




Rys. 79.




Rys. 80.




Rys. 81.

*(Twierdzenie 2a). Rzut poziomy prostej, prostopadłej do płaszczyzny, jest prostopadły do rzutu poziomego dowolnej linii poziomu tej płaszczyzny, a rzut pionowy — do rzutu pionowego dowolnej linii frontu — i nawzajem:* Jeżeli rzut poziomy jakiej prostej spełnia te warunki, to prosta jest $\perp$ do płaszczyzny. (Zastrzeżenia jak wyżej). Zastosujemy te związki w zadaniu następującem:

*Zadanie 6.* Wyznaczyć płaszczyznę, zawierającą dany punkt i prostopadłą do danej prostej: Dane: $A'$, $A''$; $p'$, $p''$.

Wykreślamy rzuty tej linii poziomu szukanej płaszczyzny, która przechodzi przez $A$:

$$h' \equiv [\supset A' \perp p'],\ h'' \equiv [\supset A'' \parallel x],$$

a następnie przez ślad $V_h \equiv V_h''$ ślad pionowy tej płaszczyzny $v_\alpha \perp p''$, a dalej z punktu $[v_\alpha x]$ ślad poziomy $h_\alpha \perp p'$. Podobnież można użyć prostej $v \equiv [\supset A \parallel v_\alpha]$.

IV. Po wszystkich poprzednich wyjaśnieniach łatwo już rozwiązać zadania z działów II i III tego paragrafu, gdy płaszczyzna jest lub ma być wyznaczona nie zapomocą śladów, lecz zapomocą dwu przecinających się (lub równoległych) prostych. W szczególności należy pamiętać o związku pomiędzy rzutami dwu danych prostych a rzutami linii poziomu i linii frontu, wskazanym w końcu § 23-go oraz o własnościach tych linii, wyrażonych w twierdzeniu 2 a i odpowiadającem mu odwrotnem.

Na rys. 81 rozwiązaliśmy zadanie 5 przy założeniu, że płaszczyzna $\alpha$ jest dana w postaci płata trójkątnego $MNR$. Konstrukcye, wiodące do wyznaczenia punktu przebicia $B$ pł. $\alpha$ przez znalezioną prostopadłą i t. d. zostały opuszczone—uwzględniono na rysunku jedynie ich wyniki.

§ 27. **(Metoda śladów). Stosunek wzajemny dwu płaszczyzn.** *I. Płaszczyzny równoległe.* Dwie płaszczyzny równoległe przecinają trzecią płaszczyznę wzdłuż prostych równoległych — więc jeżeli $\alpha \parallel \beta$, to $[\alpha\Pi_1] \parallel [\beta\Pi_1]$ czyli $h_\alpha \parallel h_\beta$ i $[\alpha\Pi_2] \parallel$ $\parallel [\beta\Pi_2]$ czyli $v_\alpha \parallel v_\beta$:

*Płaszczyzny równoległe posiadają ślady odpowiednio równoległe.*

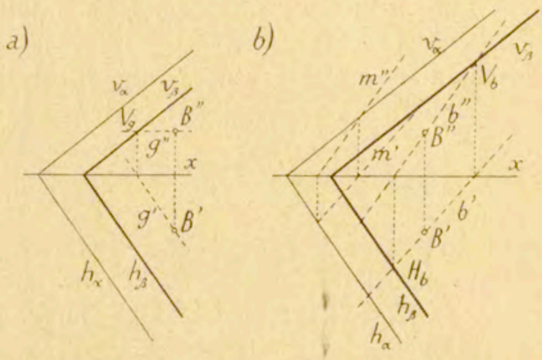
Twierdzenie to daje się odwrócić, o ile ślady każdej płaszczyzny przecinają się na osi (a nie są $\parallel$ do osi); w takim razie z warunków: $h_\alpha \parallel h_\beta$, $v_\alpha \parallel v_\beta$ wynika równoległość samych plaszczyzn $\alpha$ i $\beta$, jako zawierających po parze przecinających się prostych, odpowiednio równoległych do siebie.

Jeżeli obie pary śladów są równoległe do osi, należy, w celu stwierdzenia, czy płaszczyzny są równoległe, wyznaczyć ślady na trzeciej płaszczyźnie rzutów, lub wykonać pomiary odległości danych śladów od osi, które winny tworzyć pewną proporcyę, łatwą do sformułowania.

Mając ślady płaszczyzny i rzuty punktu, nie należącego do niej, możemy wykreślić rzuty dowolnej liczby prostych, przechodzących przez ten punkt i równoległych do płaszczyzny (§ 26, zad. 4). Ponieważ, jak wiemy z geometryi zwyczajnej, te wszystkie proste leżą w jednej płaszczyźnie, równoległej do danej płaszczyzny, przeto ich ślady poziome muszą leżeć na jednej prostej—śladzie poziomym tej nowej płaszczyzny, a ślady pionowe — na śladzie pionowym tejże płaszczyzny. Jeżeli jednak chodzi o sposób najprostszy, to:

*Zadanie 1. Przez dany punkt przesunąć płaszczyznę, równoległą do danej płaszczyzny*—wymaga tylko jednej prostej pomocniczej. Istotnie, jeżeli przeciągniemy przez punkt $B$ prostą $g$, równoległą np. do śladu poziomego płaszczyzny $\alpha$, to poszukiwana płaszczyzna $\beta$ jest najzupełniej wyznaczona przez to, że jej ślad pionowy $v_\beta \supset V_g$ ($\equiv V_g''$), i jest $\|$ $v_\alpha$, a ślad poziomy $h_\beta$ musi przejść przez punkt $[xv_\beta]$ równolegle do $h_\alpha$ (rys. 82 a). Można zresztą również użyć jakiejkolwiek innej prostej, przeciągniętej przez $B$ i równoległej do płaszczyzny $\alpha$ (rys. 82 b).

*II. Płaszczyzny przecinające się.* Jeżeli ślady poziome i ślady pionowe dwu płaszczyzn nie są jednocześnie równoległe do siebie, to płaszczyzny te, zgodnie z powyższemi rozważaniami, nie są równoległe, a więc muszą się przecinać wzdłuż pewnej prostej. Nasuwa się tedy zadanie:




Rys. 82.

*2. Wyznaczyć linię przecięcia dwu danych płaszczyzn.*

a) Przypuśćmy, że zarówno ślady poziome dwu płaszczyzn, jak ich ślady pionowe przecinają się punktach, położonych w obrębie rysunku: $H_d \equiv [h_\alpha h_\beta]$, $V_d \equiv [v_\alpha v_\beta]$. Prosta $d$, dla której $H_d$ jest śladem poziomym, a $V_d$ — śladem pionowym, należy jednocześnie do obu płaszczyzn, ponieważ jej ślady są położone na ich odpowiednich śladach. Podług śladów potrafimy wyznaczyć rzuty (§ 19, zad. 2).

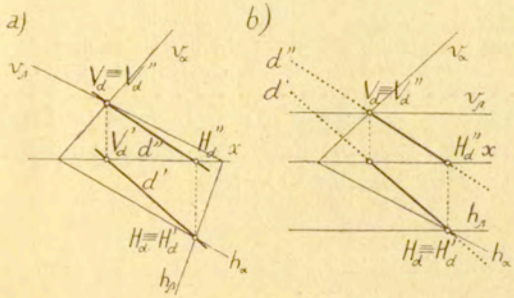
Przebieg tej ważnej konstrukcyi (rys. 83 a lub b):

*Dane*: $h_\alpha$, $v_\alpha$; $h_\beta$, $v_\beta$.

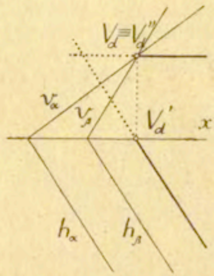
*Rozwiązanie*: $H_d \equiv H_d' \equiv [h_\alpha h_\beta]$, $V_d \equiv V_d'' \equiv [v_\alpha v_\beta]$; $l_1 \equiv [\supset H_d' \perp x]$, $H_d'' \equiv [l_1 x]$; $l_2 \equiv [\supset V_d'' \perp x]$, $V_d' \equiv [l_2 x]$; $d' \equiv [H_d' V_d']$, $d'' \equiv [H_d'' V_d'']$.

b) Przypuśćmy teraz, że np. ślady poziome $h_\alpha$ i $h_\beta$ są równoległe, a ślady pionowe przecinają się. Łatwo uzasadnić twierdzenie pomocnicze: Jeżeli dwie płaszczyzny zawierają odpowiednio proste równoległe, to płaszczyzny te (o ile nie są równoległe) przecinają się podług prostej o tym samym kierunku.

Skrót dowodu: z warunków $\alpha \supset a$, $a \parallel b$ wynika, że $b \parallel \alpha$; a że $\beta \supset b$, więc $[\alpha\beta] \parallel b$.

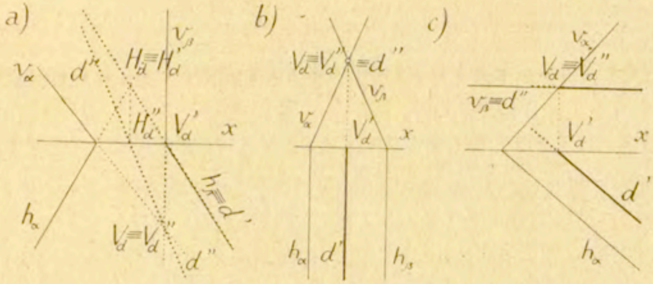


Rys. 83. [b)– w. I].



Rys. 84. (w. I).

Zatem w rozważanym przypadku, z powodu równoległości $h_\alpha$ i $h_\beta$, musi być: $d \equiv [\alpha\beta] \parallel h_\alpha \parallel h_\beta$. Prosta $d$ jest tedy wspólną linią poziomu płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$; jej ślad pionowy $V_d$ musi leżeć jednocześnie na $v_\alpha$ i $v_\beta$, $V_d \equiv [v_\alpha v_\beta]$. Stąd wynika konstrukcya następująca (rys. 84):



Rys. 85. (w. I).

Dane: $h_\alpha$, $v_\alpha$; $h_\beta$, $v_\beta$; $h_\alpha \parallel h_\beta$.

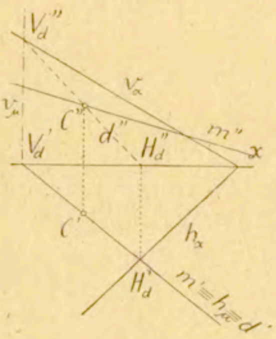
Rozwiązanie: $V_d \equiv V_d'' \equiv [v_\alpha\, v_\beta]$; $l \equiv [\supset V_d'' \perp x]$; $V_d' \equiv [lx]$; $d' \equiv [\supset V_d' \parallel h_\alpha] \equiv [\supset V_d' \parallel h_\beta]$; $d'' \equiv [\supset V_d'' \parallel x]$.

*Uwaga.* Można uzasadnić również tę samą konstrukcyę, przypuszczając, że ślady poziome $h_\alpha$ i $h_\beta$, przecinające się z początku, rozsuwają się, zbliżając się do położenia równoległego — w takim razie $H_d' \equiv H_d \equiv [h_\alpha h_\beta]$

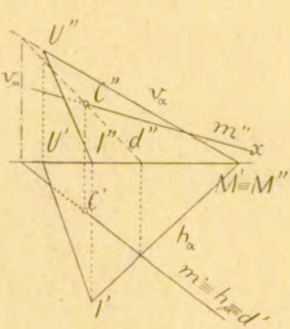
oddala się nieograniczenie wzdłuż tych obu śladów, a rzut $Hd''$ — wzdłuż osi rzutów. Wskutek tego rzut $d' \equiv [Vd'Hd']$ zbliża się coraz bardziej do położenia, równoległego do śladów $h_\alpha$ i $h_\beta$ i t. d.

W wypadku a), gdy jedna z danych płaszczyzn jest $\perp$ do jednej z płaszczyzn rzutów, a druga do niej nie $\perp$, konstrukcya ogólna upraszcza się sama przez się (p. rys. 85 a) — dlaczego? Jeżeli jedna z płaszczyzn przecinających się jest $\parallel \Pi_1$ lub $\parallel \Pi_2$, to linia przecięcia musi być linią poziomu lub linią frontu drugiej płaszczyzny (rys. 85 c). Jeżeli obie płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$ są prostopadłe do tej samej płaszczyzny rzutów, to linia ich przecięcia musi być również do niej prostopadła (np. na rys. 85 b: $d'' \equiv Vd'' \equiv [v_\alpha v_\beta]$, $d' \equiv [\supset Vd'' \perp x]$.

§ 28. **Zastosowania i uzupełnienia.** *I. Konstrukcya punktu przebicia płaszczyzny przez prostą. Są dane:* $h_\alpha$, $v_\alpha$ *oraz* $m'$, $m''$. *Wyznaczyć rzuty* $C'$ i $C''$ *punktu* $C \equiv [m\alpha]$.



Rys. 86.



Rys. 87.

a) Płaszczyzna $\alpha$ jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, np. do płaszczyzny poziomej (więc $v_\alpha \perp x$). W takim razie, z powodu że $C \subset \alpha$, $C'$ musi należeć do $h_\alpha$: $C' \subset h_\alpha$ (§ 4 tw. 4 a); z tego że $C \subset m$ wynika, że $C' \subset m'$, $C'' \subset m''$, więc $C' \equiv [h_\alpha m']$ i dalej $C'' \equiv [km'']$, gdzie $k \equiv [\supset C' \perp x]$ (por. § 24, zad. 2 a).

b) Płaszczyzna $\alpha$ jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów. Stosujemy tę samą myśl zasadniczą, która była już wyjaśniona w § 24-ym. [Zad. 1, b)]. Wprowadzamy mianowicie płaszczyznę pomocniczą $\mu$, zawierającą $m$ i prostopadłą do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, wyznaczamy prostą $d \equiv [\mu\alpha]$, a potem szukany punkt $C$, jako punkt przecięcia $[md]$ (por. rys. 64 a). Załączamy poniżej dokładny przebieg konstrukcyi (p. rys. 86).

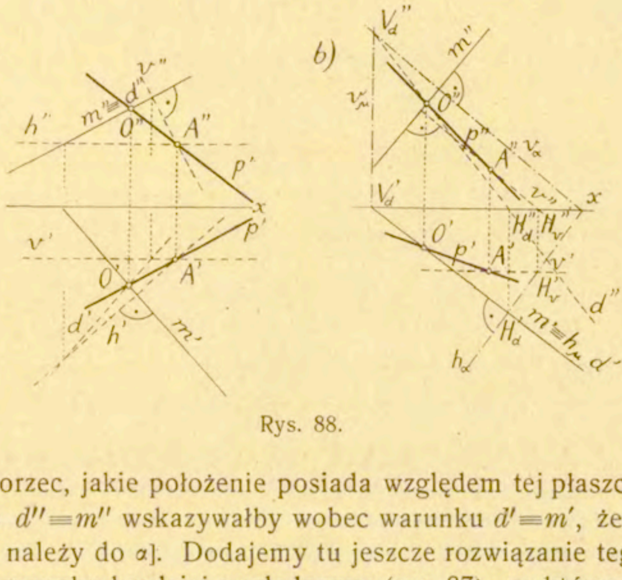
*Dane:* $h_\alpha$, $v_\alpha$; $m'$, $m''$.

*Rozwiązanie.* 1) Konstrukcya płaszczyzny pomocniczej $\mu$: $h_\mu \equiv m'$, $v_\mu \perp x$ (§ 26 zad. 1).

2) Wyznaczenie prostej $d \equiv [\mu\alpha]$: $d' \equiv h_\mu \equiv m'$; $H_d' \equiv H_d \equiv [h_\mu h_\alpha]$, $l_1 \equiv [H_d' \perp x]$, $H_d'' \equiv [lx]$, $V_d'' \equiv V_d \equiv [v_\alpha v_\mu]$, $d'' \equiv [H_d'' V_d'']$.

3) Wyznaczenie punktu $C \equiv [md] \equiv [m\alpha]$: $C'' \equiv [m''d'']$, $l_2 \equiv [\supset C'' \perp x]$, $C' \equiv [l_2 m'] \equiv [l_2 d']$.

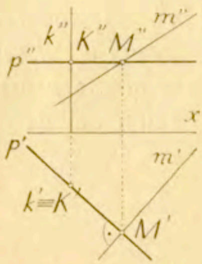
Rzecz jasna, że gdyby się okazało, że $d'' \parallel m''$, to prosta $m$ byłaby równoległa do prostej $d$, a więc i do płaszczyzny $\alpha$. W ten sposób tedy (por. § 26, II) możemy się przekonać, czy prosta, której rzuty są dane, jest równoległa do płaszczyzny o danych śladach,




Rys. 88.

i wogóle orzec, jakie położenie posiada względem tej płaszczyzny. [Związek: $d'' \equiv m''$ wskazywałby wobec warunku $d' \equiv m'$, że $d \equiv m$, a więc $m$ należy do $\alpha$]. Dodajemy tu jeszcze rozwiązanie tegoż zadania na rysunku bardziej poglądowym (rys. 87), na którym ograniczyliśmy płaszczyznę zapomocą śladów i odcinka *UI*.

*II. Przeciągnięcie z danego punktu prostopadłej do danej prostej.* Są dane: $m'$, $m''$; $A'$, $A''$. Rozróżnijmy dwa przypadki: a) Prosta $m$ jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutu, np. do $\Pi_1$. W takim razie rzut kąta prostego $\sphericalangle[pm]$ ($p$ — szukana prosta) na tę płaszczyznę jest również kątem prostym (§ 6) i wystarczy wykreślić $p' \equiv [\supset A' \perp m']$, podług $O' \equiv [p'm']$ wyznaczyć $O''$ na $m''$ i wykreślić $p'' \equiv [O''A'']$. b) $m$ nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn rzutu. W tym przypadku dojdziemy do celu, wyznaczając płaszczyznę $\alpha \equiv$ pł. $[\supset A \perp m]$ (p. zad. 6 z § 26), a następnie punkt $O \equiv [m\alpha]$ i prostą $p \equiv [OA]$. Płaszczyznę $\alpha$ można wyznaczyć zapomocą śladów i następnie zastosować do znalezienia punktu $O$ konstrukcyę z ustępu I niniejszego paragrafu (rys. 88 b) — lepiej jednak poprzestać na wyznaczeniu $\alpha$ zapomocą rzutów linii poziomu $h$ i linii frontu $v$, a następnie użyć metody z § 24 (rys. 88 a).



Rys. 89.

W związku z poprzedniem zadaniem rozwiążmy jeszcze zadanie:

*Wyznaczyć wspólną prostopadłą do dwu danych prostych skośnych* w tym przypadku szczególnym, gdy jedna z nich jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów. Weźmy np. $k \perp \Pi_1$. Dane: $k'$, $k''$; $m'$, $m''$. Ponieważ poszukiwana prosta $p \perp \Pi_1$, więc (§ 6. II) $p' \perp m'$ i $p' \equiv [\supset k' \perp m']$. $M' \equiv [m'p']$, stąd rzut $M''$ tegoż punktu $M \equiv [mp]$ na $m''$, $p'' \equiv [\supset M'' \parallel x]$. Dla punktu $K \equiv [pk]$ mamy $K' \equiv k'$, $K'' \equiv [p''k'']$. Wyjaśnić tę konstrukcyę szczegółowiej!

*III. Wyznaczenie punktu, wspólnego trzem płaszczyznom.* Przy rozwiązaniu tego zadania należy rozważyć różne położenia, jakie mogą przybierać względem siebie trzy płaszczyzny.

III. a) Wszystkie trzy płaszczyzny $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ są równoległe lub b) dwie z nich są równoległe, a trzecia przecina je obie. W tych wypadkach nie istnieje żaden punkt (w odległości skończonej), należący jednocześnie do wszystkich trzech płaszczyzn. c) i d). Płaszczyzny $\alpha, \beta, \gamma$ przecinają się parami wzdłuż prostych $a \equiv [\beta\gamma]$, $b \equiv [\gamma\alpha]$, $c \equiv [\alpha\beta]$ Weźmy jakiekolwiek dwie z nich np. $a$ i $b$. Pozostawiamy uczącemu się dowiedzenie, iż jeżeli c) $a \equiv b$ to i $c \equiv a \equiv b$, jeżeli zaś d) $a \parallel b$ to i $c \parallel a \parallel b$. W przypadku c) płaszczyzny $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ przecinają się wzdłuż pewnej prostej $m$ czyli należą do *pęku* o krawędzi $m \equiv a \equiv b \equiv c$. W tym przypadku możemy orzec, iż zadanie jest *nieoznaczone*: wszystkie punkty prostej $m$ czynią zadość postawionemu warunkowi; istnieje nie punkt, lecz prosta wspólna. W przypadku d) nie istnieje *żaden* punkt w odległości skończonej, wspólny trzem płaszczyznom $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$. e) Wreszcie, jeżeli $a$ nie $\parallel b$, to proste $a$ i $b$ muszą się przecinać, jako położone w tej samej płaszczyźnie $\gamma$; punkt przecięcia $[ab] \equiv M$ stanowi, zgodnie z powyższem rozważaniem, określone i jedyne rozwiązanie zadania.

Przypadki (a), (b), (c) możemy rozpoznać odrazu podług układu danych śladów trzech płaszczyzn; odróżnienie przypadków (d) i (e) wymaga wykonania ogólnej konstrukcyi, którą możemy streścić w sposób następujący [p. rys. 90, odpowiadający przypadkowi (e)]:

*Dane:* $h_\alpha$, $v_\alpha$; $h_\beta$ $v_\beta$; $h_\gamma$, $v_\gamma$.

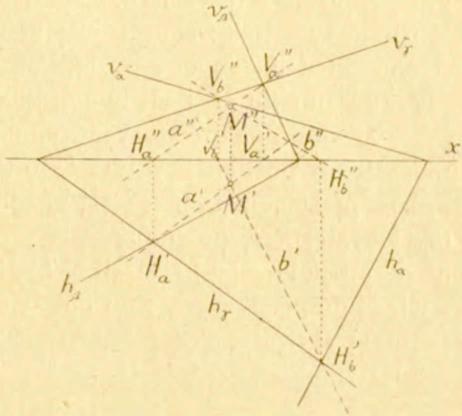
*Rozwiązanie.*

| Wyznaczenie prostej $a \equiv [\beta\gamma]$: | Wyznaczenie prostej $b \equiv [\gamma\alpha]$: |
|---|---|
| $H_a' \equiv H_a \equiv [h_\beta h_\gamma]$, stąd $H_a''$ na $x$; | $H_b' \equiv H_b \equiv [h_\gamma h_\alpha]$, stąd $H_b''$ na $x$; |
| $V_a'' \equiv V_a \equiv [v_\beta v_\gamma]$, stąd $V_a'$ na $x$; | $V_b'' \equiv V_b \equiv [v_\gamma v_\alpha]$, stąd $V_b'$ na $x$; |
| $a' \equiv [H_a' V_a']$, $a'' \equiv [H_a'' V_a'']$ | $b' \equiv [H_b' V_b']$, $b'' \equiv [H_b'' V_b'']$ |

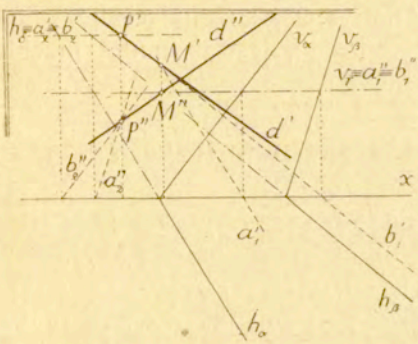
Wyznaczenie punktu $M \equiv [ab] \equiv [\alpha\beta\gamma]$: $M' \equiv [a'b']$, $M'' \equiv [a''b'']$.

Wskazać różne próby dokładności rysunku!

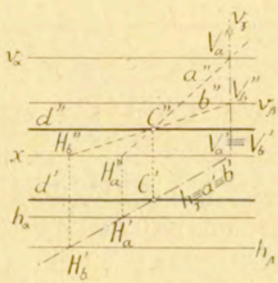
*IV. Wyznaczenie linii przecięcia dwu płaszczyzn w tym wypadku, gdy jedna para lub obie pary śladów odpowiednich nie przecinają się w obrębie rysunku.* 1. Przypuśćmy, że $h_\alpha$ nie jest $\| h_\beta$, $v_\alpha$ nie jest $\| v_\beta$, i że $[h_\alpha h_\beta]$ i $[v_\alpha v_\beta]$ leżą poza granicami rysunku (rys. 91). Wprowadzamy płaszczyzny pomocnicze $\gamma$ i $\delta$ (na rys. 91 $\gamma \| \Pi_1$, $\delta \| \Pi_2$ — wogóle najwygodniej brać płaszczyzny $\perp$ do pł. rzutu) i wyznaczamy punkty $M \equiv [\alpha\beta\gamma]$ i $P \equiv [\alpha\beta\delta]$. Oczywiście $M \subset [\alpha\beta]$ i $P \subset [\alpha\beta]$, więc prosta $[\alpha\beta] \equiv d \equiv [MP]$ ($a_1$ i $b_1$ oznaczają na rys. 91-ym proste $[\alpha\gamma]$ i $[\beta\gamma]$; $b_2 \equiv [\alpha\delta]$, $a_2 \equiv [\beta\delta]$; rzecz jasna, że $M \equiv [a_1 b_1]$, $P \equiv [a_2 b_2]$. 2. Weźmy: $\alpha \| x$, $\beta \| x$, więc $h_\alpha \| h_\beta \| v_\alpha \| v_\beta \| x$ (rys. 92). W tym przypadku wystarczy [podobnie jak w § 27, zad. 2 b)] wyznaczyć tylko jeden punkt szukanej prostej $d$, gdyż kierunek jej jest z góry wiadomy: $d \| x$. Wprowadzamy przeto np. płaszczyznę $\gamma \perp \Pi_1$ i wyznaczamy punkt $C \equiv [\alpha\beta\gamma]$. $d \equiv [\supset C \| x]$, więc $d' \equiv [\supset C' \| x]$, $d'' \equiv [\supset C'' \| x]$. (Uw.: $a \equiv [\alpha\gamma]$, $b = [\beta\gamma]$).



Rys. 90.

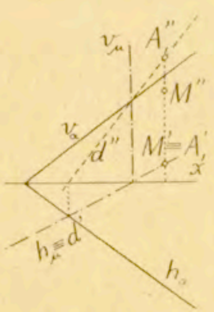


Rys. 91.



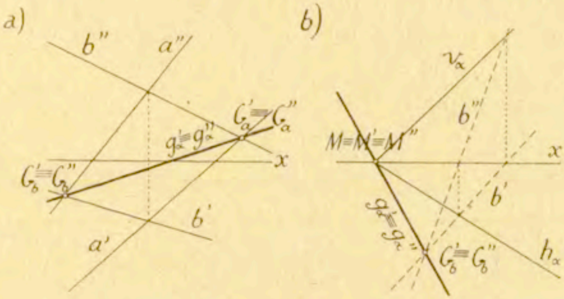
Rys. 92.

§ 29. (**Metoda śladów**). **Położenie wzajemne punktu i płaszczyzny.** Mając rzuty punktu i ślady płaszczyzny, nie możemy orzec bezpośrednio, czy sam punkt w przestrzeni należy do płaszczyzny czy też leży poza nią. Jedynie w tym przypadku, gdy płaszczyzna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, mamy oznakę bezpośrednią, polegającą na przynależności odpowiedniego rzutu punktu do śladu płaszczyzny (§ 4 tw. 4 a): jeżeli $\alpha \perp \Pi_1$ i $M \subset \alpha$, to $M' \subset h_\alpha$, i nawzajem jeżeli $\alpha \perp \Pi_1$ i $M' \subset h_\alpha$, to $M \subset \alpha$. Można tedy — jak wskazaliśmy już w § 24-ym [zadanie (B)] przy innym układzie danych—postąpić w sposób następujący, gdy mamy rzuty punktu $M$ i ślady *dowolnej* płaszczyzny $\alpha$: Przesuwamy przez $M$ dowolną płaszczyznę pomocniczą $\mu$, prostopadłą np. do płaszczyzny poziomej; w tym celu wystarczy uważać jakąkolwiek prostą, przeciągniętą przez $M'$ za ślad poziomy $h_\mu$ oraz z punktu $[h_\mu x]$ wykreślić $v_\mu$ prostopadle do $x$. Wyznaczamy następnie rzuty $d'$, $d''$ prostej $d \equiv [\alpha\mu]$. Jeżeli $M''$ należy do $d''$, to $M$ należy do $d$ a więc i do płaszczyzny $\alpha$—i nawzajem. Jeżeli $M''$ leży *ponad* $d''$, to punkt $M$ jest położony ponad $d$ i *ponad płaszczyzną* $\alpha$; jeżeli $M''$ leży pod $d''$, to $M$ leży pod płaszczyzną $\alpha$. Aby zbadać, czy punkt leży (1) *przed* płaszczyzną $\alpha$ czy (2) z tyłu *poza* nią, należy wyznaczyć rzut $e'$ prostej $e$, wzdłuż której $\alpha$ przecina się z płaszczyzną pomocniczą $\rho$, przesuniętą przez $M$ prostopadle do $\Pi_2$ i stwierdzić, czy rzut $M'$ leży *pod* (1) rzutem $e'$ czy też *nad* (2) $e'$. — Zauważmy jeszcze, że punkt $A_1$ o rzutach $A_1'$ i $A_1''$ na rys. 93, spełniających warunki: $A_1' \equiv M'$, $A_1'' \subset d''$, jest to punkt przebicia płaszczyzny $\alpha$ przez prostą $p_1 \equiv [\supset M \perp \Pi_1]$, i że podobnież przy drugiej konstrukcyi wyznaczamy punkt $A_2 \equiv [p_2 \alpha]$, jeżeli $p_2$ oznacza prostą $[\supset M \perp \Pi_2]$.



Rys. 93.

§ 30. **Użycie śladu na płaszczyźnie spółrzutowej. Konstrukcya rzutów figur płaskich zapomocą kolineacyi.** Oznaczmy przez $g_\alpha$ linię przecięcia jakiejś płaszczyzny $\alpha$ z płaszczyzną spółrzutową $\Gamma$ (§ 14) czyli ślad $\alpha$ na płaszczyźnie spółrzutowej. Rzecz oczywista, iż jest to *miejsce geometryczne* śladów na tej samej płaszczyźnie prostych, należących do $\alpha$: każdy punkt prostej $g_\alpha$ stanowi ślad wielu takich prostych i każda z nich może posiadać odpowiedni ślad $G$ jedynie na $g_\alpha$. Aby tedy wyznaczyć rzuty $g_\alpha'$ i $g_\alpha''$ śladu $g_\alpha$, wystarczy znaleźć rzuty śladów $G_a$ i $G_b$ dwu jakichkolwiek prostych $a$ i $b$, należących do płaszczyzny $\alpha$. Ponieważ $G_a' \equiv G_a'' \equiv [a'a'']$ i $G_b' \equiv G_b \equiv [b'b'']$ (§ 21), przeto również $g_\alpha' \equiv g_\alpha''$. Na rys. 94 ym a) została wykonana ta konstrukcya w przypadku, gdy płaszczyzna $\alpha$ jest dana właśnie zapomocą rzutów dwu przecinających się prostych. Jeżeli płaszczyzna jest dana przez ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$, to punkt ich przecięcia $M \equiv [h_\alpha v_\alpha] \equiv M' \equiv M''$ stanowi ślad spółrzutowy zarówno prostej $h_\alpha$, jak prostej $v_\alpha$. Wystarczy tedy wyznaczyć rzuty jeszcze jednej prostej $b$, należącej do płaszczyzny, np. w szczególności linii poziomu lub linii frontu, i połączyć wspólny rzut poziomy i pionowy $G_b' \equiv G_b''$ jej śladu spółrzutowego z punktem $M$. Z konstrukcyi rzutów śladu spółrzutowego prostej oraz z tego, że ślad spółrzutowy płaszczyzny stanowi miejsce geometryczne śladów spółrzutowych prostych tej płaszczyzny, wynika, że prosta, stanowiąca jednocześnie rzut po-




Rys. 94.

ziomy i rzut pionowy śladu spółrzutowego płaszczyzny, którą nazwiemy krócej *prostą spółrzutową*, odpowiadającą danej płaszczyźnie, posiada taką własność, że na niej przecinają się rzuty: poziomy i pionowy wszelkiej prostej, należącej do płaszczyzny (i nie równoległej do $g_\alpha$—w takim razie zresztą można powiedzieć, że rzuty prostej, równoległe do $g_\alpha' \equiv g_\alpha''$, przecinają tę prostą w jej punkcie „nieskończenie odległym").

Po tych uwagach możemy przejść do dokładnego rozważenia stosunku, jaki istnieje pomiędzy dwoma rzutami jakiejkolwiek figury *płaskiej*. Przedewszystkiem rzutowi poziomemu każdego punktu takiej figury *odpowiada* czyli, podług utartego wyrażenia, jest *podporządkowany* rzut pionowy tegoż punktu i nawzajem. Otóż taki stosunek pomiędzy dwiema figurami, który polega na podporządkowaniu wzajemnem w jakiś sposób *punktów* tych dwu figur, nosi nazwę *pokrewieństwa punktowego*, a przejście od jednej figury do drugiej — *przekształcenia punktowego*. W ogólności—a mianowicie, o ile płaszczyzna figury, której rzuty rozważamy, nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów—*każdemu* punktowi płaszczyzny rysunkowej, uważanemu za rzut poziomy punktu figury lub wogóle punktu, należącego do jej płaszczyzny, odpowiada *tylko jeden określony* punkt płaszczyzny rysunkowej, stanowiący rzut pionowy tegoż punktu w przestrzeni — i nawzajem. Tego rodzaju odpowiedniość, przy której *każdemu* punktowi [1]) jednej figury lub, jak się nieraz mówi, *jednego układu* punktów odpowiada *tylko jeden* punkt drugiego układu i nawzajem, nazywa się *odpowiedniością jednoznacznie — jednoznaczną* lub *doskonałą* albo też *podporządkowaniem jednoznacznie — jednoznacznem* czyli *doskonałem* tych układów. Rzuty: poziomy i pionowy figury płaskiej lub wogóle układu wszystkich punktów płaszczyzny są tedy w ogólności podporządkowane sobie wzajemnie w sposób „doskonały". Dalej—przy tem samem zastrzeżeniu—każdej *prostej* płaszczyzny rysunkowej, uważanej za rzut poziomej prostej, należącej do pewnej płaszczyzny, odpowiada również *prosta*, stanowiąca rzut pionowy tej prostej w przestrzeni i nawzajem; każdemu odcinkowi odpowiada również odcinek. Pokrewieństwo punktowe doskonałe, przy którem proste odpowiadają prostym, nazywa się *homograficznem* czyli *jednokreślnem;* pokrewieństwo jednokreślne i przekształcenie jednokreślne noszą także nazwę *kolineacyi* (por. § 1, § 6). Stosunek atoli pomiędzy rzutami układu płaskiego posiada jeszcze inne własności. Po 1-sze) rzut poziomy i rzut pionowy każdego *punktu* leżą na prostej, prostopadłej do osi rzutów (§ 13, tw. 1); po 2-gie), jak zaznaczyliśmy powyżej, rzut poziomy i pionowy każdej *prostej* przecinają się na tej samej prostej, mianowicie na prostej spółrzutowej. Pokrewieństwo jednokreślne dwu układów płaskich, posiadające takie cechy, t. j. spełniające warunki: *1) proste, łączące pary punktów odpowiednich przecinają się wszystkie w tym samym punkcie lub są do siebie równoległe*; *2) pary prostych odpowiednich, t. j. złożonych z odpowiednich punktów, przecinają się w punktach, położonych na tej samej prostej* — nazywa się *kolineacyą w położeniu perspektywicznem*. Punkt, wzmiankowany w warunku 1-ym, stanowi tak zwany *środek kolineacyi*, prosta z warunku 2-go — *oś kolineacyi*.

---

[1]) Lub wogóle każdemu „elementowi" jednego zbioru przedmiotów odpowiada tylko jeden element drugiego i t. d.

Pokrewieństwo tego rodzaju może istnieć zarówno pomiędzy dwoma układami, należącemi do różnych płaszczyzn (§ 1), jak pomiędzy układami, umieszczonymi w tej samej płaszczyźnie — w pierwszym przypadku łatwo odrazu uzasadnić, że warunek 2-gi wynika z 1-go i że osią kolineacyi jest linia przecięcia tych płaszczyzn (p. Rozdział I, ćwicz. 4). Kolineacyę w położeniu perspektywicznem, posiadającą środek w odległości skończonej, będziemy nazywali krótko *kolineacyą środkową;* kolineacyę perspektywiczną, przy której proste, łączące pary punktów odpowiednich, są równoległe, nazwiemy *kolineacyą równoległą* lub *powinowactwem*. Jeżeli oznaczymy środek kolineacyi przez $S$, oś kolineacyi przez $o$, punkty jednego układu przez $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ i t. d., punkty drugiego przez $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, . . . ., to warunki kolineacyi środkowej można wyrazić w sposób następujący:

$$1\,a)\ [A_1A_2] \supset S,\ [B_1B_2] \supset S,\ [C_1C_2] \supset S, \ldots .$$

$$2)\ \big[[A_1B_1]\,[A_2B_2]\big] \subset o,\quad \big[[A_1C_1]\,[A_2C_2]\big] \subset o, \ldots ,$$

$$\big[[B_1C_1]\,[B_2C_2]\big] \subset o,\quad \big[[B_1D_1]\,[B_2D_2]\big] \subset o, \ldots ,$$

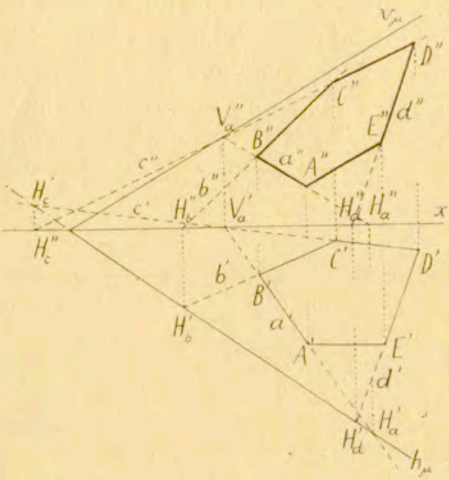
Przy kolineacyi równoległej drugi warunek pozostaje bez zmiany, pierwszy przybiera postać:

$$1\,b)\ [A_1A_2] \parallel [B_1B_2] \parallel [C_1C_2] \parallel [D_1D_2] \parallel \ldots .$$

Elementami zasadniczymi kolineacyi środkowej są: oś kolineacyi i środek kolineacyi; elementami kolineacyi równoległej: oś kolineacyi i kierunek kolineacyi, t. j. wspólny kierunek prostych $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ i t. d. Proste $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ i t. d., łączące pary punktów odpowiednich, nazywamy w obu przypadkach *promieniami kolineacyi*.

Osią kolineacyi równoległej, wiążącej samą figurę płaską z jej rzutem poziomym, jest ślad poziomy jej płaszczyzny, osią kolineacyi, wiążącej figurę z rzutem pionowym — ślad pionowy; wreszcie oś kolineacyi dwu rzutów, po sprowadzeniu ich do jednej płaszczyzny, stanowi prosta spółrzutowa. Kierunkiem kolineacyi w każdym z dwu pierwszych przypadków jest kierunek odpowiednich prostych rzutujących; w trzecim przypadku — kierunek w płaszczyźnie rysunkowej, prostopadły do osi rzutów.

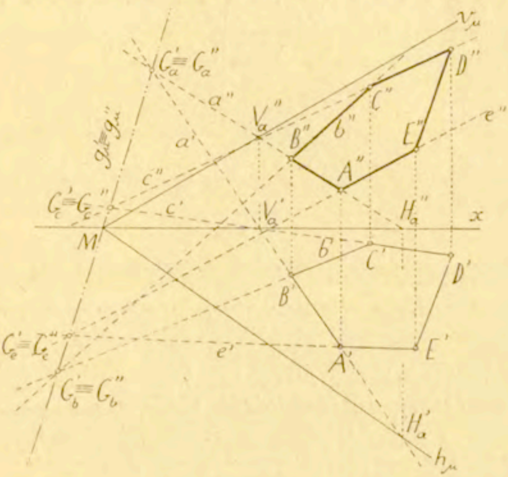
Konstrukcye, wynikające z powinowactwa czyli kolineacyi równoległej rzutów, dadzą się z wielką korzyścią zastosować przy rozwiązaniu ogólnem zadania: *Wyznaczyć jeden z rzutów figury płaskiej, gdy mamy dane: drugi rzut oraz (zapomocą śladów lub* *rzutów dwu prostych) płaszczyznę tej figury.* Przypuśćmy np., że są dane: ślady $h_\mu$ i $v_\mu$ oraz rzut poziomy $A'B'C'D'E'$ pięciokąta $ABCDE$, położonego w płaszczyźnie $\mu$; należy wyznaczyć rzut $A''B''C''D''E''$. Jeżeli nie stosujemy kolineacyi, to możemy postępować w sposób następujący (rys. 95): wyznaczamy rzut pionowy $a''$ prostej, do której należy jeden z boków, np. prostej $a \equiv [AB]$; znajdujemy w tym celu $H_a' \equiv [a'h_\mu]$ i $V_a' \equiv [a'x]$ ($H_a \equiv H_a'$ należy do $h_\mu$, gdyż $a \subset \mu$ i t. d.), a stąd zapomocą prostopadłych do $x$ $H_a''$ na $x$ i $V_a \equiv V_a''$ na $v_\mu$. $a'' \equiv [H_a''V_a'']$. Rzuty $A''$ i $B''$ odnajdujemy na $a''$ zapomocą prostopadłych do osi $x$, wykreślonych przez $A'$ i $B'$. Następnie możemy podług śladu $H_b \equiv H_b' \equiv [b'h_\mu]$ prostej $b \equiv [BC]$ ($b \subset \mu$, więc $H_b \subset h_\mu$) wyznaczyć $H_b''$ na osi $x$; $b'' \equiv [H_b''B'']$; $C''$ wyznaczymy na $b''$ zapomocą prostopadłej z $C'$ do osi $x$ i t. d. (rys. 95) z każdym bokiem po kolei. (Ostatni, $EA$, może służyć do sprawdzenia dokładności rysunku). Na rysunku 96-ym pokazujemy użycie w tem samem zadaniu kolineacyi. Rzut $A''B''$ jednego z boków wyznaczamy, jak poprzednio, punkty $G_a' \equiv G_a'' \equiv \equiv [a'a'']$ i $M \equiv [h_\mu v_\mu]$ wyznaczają prostą spółrzutową $g_\mu' \equiv g_\mu''$, a więc oś kolineacyi. Na tej prostej winny być położone punkty przecięcia par prostych odpowiednich — w danym przypadku rzutów tej samej prostej: $[b'b'']$, $[c'c'']$ i t. d. Stąd wynika, że aby wyznaczyć np. $b''$, należy wyznaczyć punkt $G_b' \equiv G_b'' \equiv [b'g_\mu'']$ i przesunąć prostą przez ten punkt i punkt $B''$: $b'' \equiv [G_b''B'']$. $C''$ odnajdujemy na $b''$ (jak poprzednio) zapomocą promienia kolineacyi, t. j. prostopadłej do $x$, wykreślonej przez $C'$. To samo czynimy z innymi bokami, wyznaczając rzut pionowy każdego z nich w zależności od rzutu boku sąsiedniego. Konstrukcya ta różni się od konstrukcyi poprzedniej tem, że przechodzimy przy niej odrazu od rzutu poziomego każdej prostej do jej rzutu pionowego, gdy tym-



Rys. 95.

czasem poprzednio każde takie przejście wymagało nowej prostej pomocniczej, jakoto: $[H_b'H_b'']$, $[H_c'H_c'']$ i t. d.

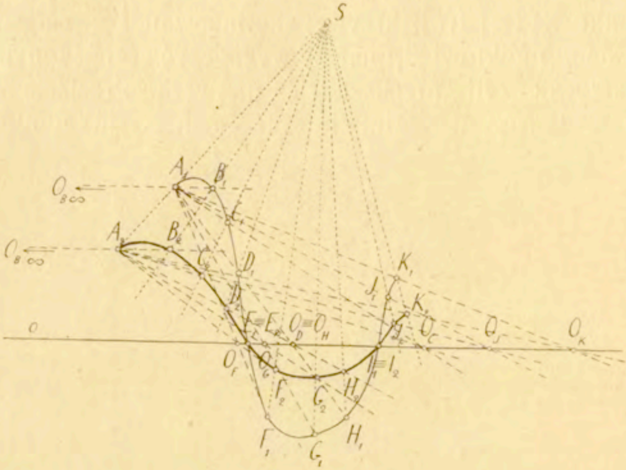
Na rys. 97-ym podajemy przykład kolineacyi środkowej. Dane: środek kolineacyi $S$, oś kolineacyi $o$, krzywa $A_1B_1C_1 \ldots .$ oraz punkt $A_2$ $(\subset [A_1S])$ krzywej skolineowanej z pierwszą, który odpowiada punktowi $A_1$: należy wyznaczyć szereg innych punktów tej krzywej czyli „przekształcić" pierwszą. Przejście od jakiegokolwiek, danego pierwotnie lub otrzymanego już punktu $A_2$ do



Rys. 96.

nowego punktu $C_2$ polega na działaniach następujących: ponieważ punkt $\big[[A_1C_1]\,[A_2C_2]\big]$ ma należeć do osi $o$ (warunek 2-gi), przeto wyznaczamy prostą nieograniczoną $[A_2C_2]$, łącząc punkty: $O_c = \big[o[A_1C_1]\big]$ i $A_2$; ponieważ punkt $C_2$ musi należeć do $[A_2C_2] = [O_cA_2]$ a $S$ musi leżeć na $[C_1C_2]$ (warunek 1 a), przeto $C_2 = \big[[O_cA_2]\,[SC_1]\big]$. Na rys. 97-ym każdy nowy punkt został związany z tym samym punktem $A_2$, pierwotnie danym. Można oczywiście przechodzić od punktu do punktu w innym, dowolnym porządku—wyniki muszą być te same.

*Uwaga.* Przypuśćmy, że oś kolineacyi środkowej oddala się nieskończenie — proste odpowiednie stają się wtedy w położeniu granicznem równoległe: $[A_1B_1] \parallel [A_2B_2]$, $[A_1C_1] \parallel [A_2C_2] \ldots\ldots$, $[B_1C_1] \parallel [B_2C_2] \ldots .$ i t. d. Związek pomiędzy dwiema figurami, podporządkowanemi sobie w ten sposób, jest to *podobieństwo w położeniu perspektywicznem* czyli *jednokładność*. Jeżeli zarówno oś jak środek kolineacyi oddalają się nieskończenie, figury



Rys. 97.

stają się w położeniu granicznem *równemi* i przekształcenie otrzymuje nazwę *przesunięcia równoległego*.

## ĆWICZENIA.

### DZIAŁ I. (Do §§ 23 i 24).

Zadania z tego działu winny być rozwiązywane bez użycia metody śladów.

1. Od wyobrażenia płaszczyzny zapomocą rzutów dwu przecinających się prostych przejść do jej wyobrażenia zapomocą prostych równoległych i nawzajem. Ogólniej: gdy są dane rzuty dwu prostych, położonych w jednej płaszczyźnie, wyznaczyć rzuty dwu innych prostych, należących do tej samej płaszczyzny (por. ćw. 36, 38 2), 39 z poprzedniego rozdziału).

2. Są dane rzuty trzech punktów $A$, $B$, $C$; wyznaczyć rzuty trzech innych punktów, położonych w tej samej płaszczyźnie $[ABC]$.

3. Wykreślić rzuty kawałka płaszczyzny o postaci: a) trójkąta; b) równoległoboku; c) trapezu; d) trapezu z dodatkiem trójkąta, którego podstawa nakrywa jeden z boków równoległych.

4. Nadając rzutom $c'$ i $c''$ różne możliwe położenia względem rzutów $a'$, $a''$, $b'$, $b''$ dwu przecinających się prostych, rozpoznać, kiedy $c$ należy do płaszczyzny $[ab]$.

Przykłady: 1) $c' \parallel a'$, $c'' \parallel a''$; punkty $B_1 \equiv [c'b']$ i $B_2 \equiv [c''b'']$ wyznaczają prostą $[B_1 B_2] \perp x$. 2) $A_1 \equiv [c'a']$, $A_2 \equiv [c''a'']$, $B_1 \equiv [c'b']$, $B_2 \equiv [c''b'']$, $[A_1 B_2] \perp x$, $[A_2 B_1] \perp x$. 3) $c' \supset [a'b']$, $c'' \supset [a''b'']$.

5. To samo, gdy $a \parallel b$. Rozważyć w szczególności przypadek, gdy $c' \parallel a' \parallel b'$, $c'' \parallel a'' \parallel b''$.

6. Są dane: płaszczyzna $\alpha$, wyobrażona zapomocą rzutów dwu przecinających się prostych lub trzech punktów i t. p., oraz rzut poziomy $c'$ prostej $c$, należącej do tej płaszczyzny. Wyznaczyć rzut pionowy $c''$. To samo: gdy jest dany rzut pionowy $c''$, a należy wyznaczyć $c'$.

7. Płaszczyzna $\alpha$ jest dana zapomocą rzutów: a) dwu prostych równoległych, b) prostej i punktu, c) trzech punktów, albo też w postaci płata trójkątnego lub równoległobocznego. Wyznaczyć rzuty linii poziomu i linii frontu pł. $\alpha$, przechodzących przez jeden z danych jej punktów.

7. To samo w stosunku do linii spadku oraz prostej, prostopadłej do linii frontu (i położonej w płaszczyźnie).

8. Rozwiązać oba poprzednie zadania w tych przypadkach szczególnych, gdy pł. $\alpha$ jest prostopadła a) do $\Pi_1$; b) do $\Pi_2$.

9. Jest dana płaszczyzna $\alpha$, równoległa a) do płaszczyzny poziomej lub b) do płaszczyzny pionowej rzutów—oraz dowolna prosta $m$. Wyznaczyć punkt przebicia $[m\alpha]$.

10. Wyznaczyć punkt przebicia $[m\alpha]$, gdy płaszczyzna $\alpha$ jest dana przez rzuty a) trzech punktów, b) prostej i punktu.

11. Wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny $\alpha$, danej w jakikolwiek sposób, przez prostą $m$, prostopadłą: a) do $\Pi_1$; b) do $\Pi_2$.

12. Mamy rzuty równoległoboku lub trapezu oraz rzuty jakiejś prostej $m$. Wyznaczyć punkt, w którym ta prosta przebija płaszczyznę czworokąta i odróżnić jej części widzialne i niewidzialne, przy założeniu, że ograniczony w ten sposób płat płaszczyzny jest nieprzezroczysty.

13. Są dane: rzuty dwu prostych $a$ i $b$, wyznaczających płaszczyznę oraz rzuty punktu $C$. Określić położenie punktu względem płaszczyzny dwu prostych. Przypadki szczególne: a) $C' \subset a'$, $C''$—ponad $a''$; b) $C'' \subset a''$, $C'$—powyżej $a'$ i t. p. To samo, gdy płaszczyzna jest dana w inny sposób.

14. Płaszczyzna $\alpha \equiv$ pł. $[ab]$ jest równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów, płaszczyzna $\beta \equiv$ pł. $[cd]$—dowolna. Wyznaczyć linię przecięcia $[\alpha\beta]$.

15. Wyznaczyć linię przecięcia dwu płaszczyzn, danych w rozmaity sposób. Poprzestać przytem tylko na liniach, potrzebnych dla konstrukcyi, bez ograniczania płaszczyzn.

16. Mając dane ograniczone kawałki dwu płaszczyzn, wyznaczyć ich linię przecięcia i odróżnić na każdym rzucie części widzialne i niewidzialne płaszczyzn, jak to zostało uczynione na rys. 66-ym.

## DZIAŁ II. (§ 25 i nast.).

W poniższych zadaniach płaszczyzny nie mają być wyobrażane zapomocą śladów jedynie wtedy, gdy to jest wyraźnie zastrzeżone — w innych przypadkach zawsze ma się na myśli metodę śladów.

17. Zastosować metody rozwiązania zadań zasadniczych, podane w § 23-im i 24-ym, do przypadku, gdy prostemi, wyznaczającemi płaszczyznę, są jej ślady, a mianowicie rozwiązać przy tych warunkach zadania (A), (B), 1 i 2, sformułowane w paragrafie 23-im i 24-ym.

18. Przy tych samych założeniach rozwiązać zadanie 13.

19. Ćwiczyć się w kreśleniu śladów, odpowiadających płaszczyznom o rozmaitem położeniu względem płaszczyzn rzutów i w rozpoznawaniu nawzajem podług śladów położenia płaszczyzny.

20. Uzasadnić twierdzenie wzajemne z § 25, II.

21. Dowieść twierdzenia 7 z tegoż paragrafu.

22. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, zawierającej daną prostą (o rzutach $a'$, $a''$) i jednocześnie: a) prostopadłej do płaszczyzny poziomej lub b) prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów lub wreszcie c) równoległej do osi.

23. Sprawdzić zapomocą konstrukcyi śladów, czy dwie dane proste $a$ i $b$ o dowolnych rzutach, leżą w tej samej płaszczyźnie. W szczególności zbadać wypadki: a) $a \perp \Pi_1$; b) $a \perp \Pi_2$; c) $a' \equiv b'$ lub $a'' \equiv b''$.

24. Wykreślić rzuty dowolnej linii poziomu i dowolnej linii frontu we wszystkich przypadkach, rozpatrzonych w § 25-ym. Kiedy jedna z tych linii staje się punktem? Wykreślić w tych samych przypadkach rzuty dowolnej prostej, położonej w płaszczyźnie.

25. Wykreślić rzuty linii poziomu danej płaszczyzny, gdy jest dany ślad poziomy tej prostej; linii frontu, gdy mamy dany jej ślad pionowy.

26. Mamy rzuty dwu prostych: $a \parallel \Pi_1$ i $b \parallel \Pi_2$. Wyznaczyć ślady płaszczyzny $[ab]$.

27. Nadając prostym $a$ i $b$, przecinającym się lub równoległym, inne możliwe położenia, wyznaczyć w każdym przypadku ślady płaszczyzny $[ab]$.

28. Zbadać, czy łamana o danych rzutach jest płaska czy skośna.

29. Mając jeden rzut prostej, należącej do płaszczyzny o danych śladach, wyznaczyć jej drugi rzut.

30. Dowieść, iż prosta, której rzuty spełniają warunki: 1) $h' \parallel h_\alpha$, 2) $h'' \parallel x$ i 3) prosta $[V_h' [h'' v_\alpha]]$ jest $\perp x$ ($V_h'$ oznacza punkt $[h'x]$) — stanowi linię poziomu płaszczyzny $\alpha$.

31. Wykreślić rzuty linii spadku danej płaszczyzny $\alpha$, gdy jest dany: a) ślad poziomy tej linii (na $h_\alpha$) lub b) jej ślad pionowy (na $v_\alpha$).

32. To samo w stosunku do prostej, położonej w płaszczyźnie i prostopadłej do jej śladu pionowego.

33. Linia spadku wyznacza w zupełności płaszczyznę (z wyjątkiem jakich przypadków?) Przypuśćmy, że mamy dane rzuty dowolnej prostej; wyznaczyć ślady płaszczyzny: a) dla której ta prosta jest linią spadku, lub b) która zawiera tę prostą i posiada ślad pionowy, prostopadły do niej.

34. Nadając płaszczyźnie $\alpha$ rozmaite położenia, wyznaczyć rzuty pęku prostych, przechodzących przez dany punkt i równoległych do $\alpha$. W szczególności wyznaczyć rzuty prostych: 1) równoległej do linii poziomu płaszczyzny $\alpha$; 2) równoległej do linii frontu; 3) równoległej do linii spadku.

35. To samo, gdy płaszczyzna jest dana nie przez ślady, lecz zapomocą rzutów dwu prostych przecinających się lub równoległych.

36. Rozwiązać zadanie 5 z § 26, gdy dana płaszczyzna jest a) $\parallel \Pi_1$, b) $\parallel \Pi_2$.

37. Jakim punktom prostej $p$ odpowiadają, jako rzuty (każdy na inną płaszczyznę) punkty $[p'h_\alpha]$ i $[p''v_\alpha]$? $\alpha$—dowolna płaszczyzna.

38. Rozwiązać zadanie 5 z § 26, gdy płaszczyzna jest wyznaczona przez dwie proste przecinające się równoległe, 3 punkty i t. d. (§ 23).

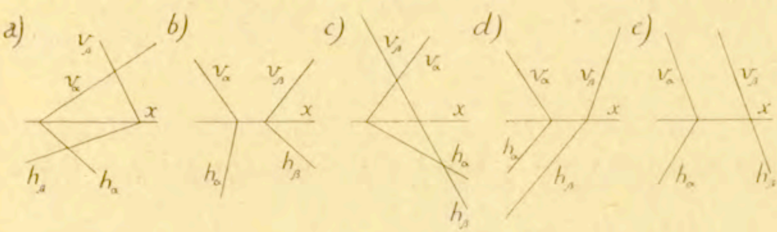
39. Wyznaczyć rzuty równoległobocznego kawałka płaszczyzny, zawierającej dany punkt $A$ i prostopadłej do danej prostej $p$, przy założeniu, że czworokąt ten jest ograniczony przez odcinki dwu dowolnych linii poziomu i dwu dowolnych linii spadku. Odróżnić części niewidzialne prostej $p$. Nadać płatowi takiej płaszczyzny jakikolwiek inny kształt.

40. Płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$ są równoległe do osi rzutów. Jaką proporcyę tworzą odległości ich śladów od osi rzutów, jeżeli same płaszczyzny są równoległe?

41. Rozwiązać zadanie 1 z § 27-go przy rozmaitych położeniach szczególnych danej płaszczyzny.

42. Rozwiązać to samo zadanie, to jest wyznaczyć pł. $[\supset B \parallel \alpha]$, gdy płaszczyzna $\alpha$ jest wyznaczona którymkolwiek ze sposobów, omówionych w § 23. Płaszczyzna szukana może być przytem wyznaczona a) w ten sam sposób, b) zapomocą śladów. W szczególności, przedstawić płaszczyznę daną i szukaną w postaci dwu trójkątów lub czworokątów (np. równoległoboków) o bokach odpowiednio równych i równoległych. Odróżnić części niewidzialne.

43. Wyznaczyć linię przecięcia płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$, przy różnych układach ich śladów, wskazanych na rys. 98-ym.




Rys. 98.

44. Wyznaczyć linię przecięcia płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$, gdy mamy: a) $\alpha$—nachylone do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, $\beta \perp \Pi_1$; b) $\alpha$—nachylone do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, $\beta \perp \Pi_2$; c) $\alpha \perp \Pi_1$, $\beta \perp \Pi_2$; d) $\alpha \perp \Pi_1$, $\beta \perp \Pi_1$; e) $\alpha \perp \Pi_2$, $\beta \perp \Pi_2$; f) $\alpha$ — nach. do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, $\beta \parallel \Pi_1$; g) $\alpha$—nach. do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, $\beta \parallel \Pi_2$ (p. rys. 85).

45. Wyznaczyć $p \equiv [\alpha\beta]$, jeżeli a) $\alpha \parallel x$; b) $\alpha \parallel \Pi_1$; c) $\alpha \parallel \Pi_2$, $\beta \perp \Pi_1$ lub $\perp \Pi_2$.

46. Wyznaczyć $p \equiv [\alpha\beta]$, jeżeli a) $\alpha \parallel \Pi_1$, $\beta \parallel \Pi_2$; b) $h_\alpha \equiv v_\alpha$, $\beta \parallel \Pi_1$; c) $h_\alpha \equiv v_\alpha$, $\beta \parallel \Pi_2$.

47. Wyznaczyć linię przecięcia dwu kawałków płaszczyzn o kształcie równoległobocznym, ograniczonych odpowiednio przez odcinki śladów, linii poziomu i linii frontu; odróżnić części widzialne i niewidzialne.

48. Zastosować do ćwicz. 15 i 16 rozwiązanie przy pomocy śladów, umyślnie w tym celu wyznaczonych w przebiegu konstrukcyi.

49. Wyznaczyć punkt, w którym dowolna prosta przebija płaszczyznę: a) $\| \Pi_1$; b) $\| \Pi_2$; c) $\| x$ (por. ćw. 9).

50. Wyznaczyć punkt przebicia $[m\alpha]$, gdy pł. $\alpha$ ma położenie dowolne, a prosta $m$ a) $\perp \Pi_1$, b) $\perp \Pi_2$.

51. Wyliczyć różne przypadki, w których można orzec o równoległości prostej do płaszczyzny bez wyznaczania punktu przebicia.

52. Wyznaczyć linię przecięcia dwu płaszczyzn, z których jedna $\alpha$ jest dana zapomocą śladów, a druga $\beta$ zapomocą rzutów dwu innych przecinających się prostych.

53. Wyznaczyć wspólną prostopadłą do dwu prostych skośnych, z których jedna jest $\perp \Pi_2$.

54. Wykonać wykresy, odpowiadające wszystkim 5 przypadkom, rozważonym w § 28, III, a zachodzącym przy poszukiwaniu punktu, wspólnego trzem danym płaszczyznom.

55. Wyznaczyć linię przecięcia dwu płaszczyzn, których ślady a) poziome lub b) pionowe nie przecinają się w obrębie rysunku.

56. Wyznaczyć linię przecięcia płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$, gdy punkty $[h_\alpha h_\beta]$ i $[v_\alpha v_\beta]$ leżą poza obrębem rysunku i a) $v_\alpha$ nakrywa $h_\alpha$; b) $v_\alpha$ nakrywa $h_\alpha$ i $v_\beta$ nakrywa $h_\beta$.

57. Wyznaczyć linię przecięcia płaszczyzn: $\alpha \| x$, $\beta \| \Pi_1$ (lub $\| \Pi_2$).

58. Określić położenie punktu o danych rzutach $M'$, $M''$ względem płaszczyzny $\alpha$—a) prostopadłej do $\Pi_1$, b) $\perp \Pi_2$, której ślady są dane.

59. To samo przy innych położeniach $\alpha$.

60. Są dane: ślady płaszczyzny $\alpha$ i jeden z rzutów punktu $A$, położonego w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć drugi rzut.

DZIAŁ III. Umowa co do użycia śladów — jak w dziale II-im.

61, 62, 63. Wyznaczyć rzuty $B'$ i $B''$ spodka prostopadłej $p$, opuszczonej z danego punktu $A$ na płaszczyznę $\alpha$, t. j. punktu $B \equiv [p\alpha]$, stanowiącego rzut prostokątny punktu $A$ na płaszczyznę $\alpha$. Rozpatrzeć po kolei przypadki następujące:

61. a) $\alpha \| \Pi_1$, b) $\alpha \| \Pi_2$.

62. a) $\alpha \perp \Pi_1$ (nie $\| \Pi_2$); b) $\alpha \perp \Pi_2$ (nie $\| \Pi_1$).

63. $\alpha$ nie jest $\perp$ do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$.

64. Rozwiązać zadanie 63, gdy pł. $\alpha$ jest dana nie zapomocą śladów, lecz w którykolwiek ze sposobów, wskazanych w § 23.

65. Mamy dany rzut ograniczonego kawałka płaszczyzny $\alpha$. Wyznaczyć rzuty rzutu $A_\alpha B_\alpha C_\alpha \ldots$ na płaszczyznę $\alpha$ dowolnej figury $ABC\ldots$, danej przez rzuty $A'B'C'\ldots$ i $A''B''C''\ldots$

66. Są dane ślady płaszczyzny $\alpha \perp \Pi_1$ lub $\perp \Pi_2$ i rzuty punktu $A$. Wyznaczyć rzuty punktu $A_1$, *symetrycznego* z punktem $A$ względem płaszczyzny $\alpha$.

67. Wyznaczyć rzuty punktu $A_1$, symetrycznego z punktem $A$ względem płaszczyzny $\alpha$ o położeniu dowolnem, danej a) przez ślady, b) przez rzuty dwu innych prostych lub c) w postaci ograniczonego kawałka. Zbadać przy tem sprawę widzialności punktów $A$ i $A_1$ przy założeniu, że pł. $\alpha$—ograniczona lub nieograniczona—jest nieprzezroczysta.

68. Wyznaczyć rzuty trójkąta, symetrycznego z danym względem danej płaszczyzny $\alpha$—to samo w stosunku do dowolnej figury $ABCD$....

69. Wyznaczyć punkt $A_1$, symetryczny z danym punktem $A$ względem danej prostej $m$. Zbadać przypadki szczególne, gdy a) $m \parallel \Pi_1$; b) $m \parallel \Pi_2$; c) $m \perp \Pi_1$; d) $m \perp \Pi_2$. *Uwaga*: Punkt $A_1$ spełnia ten warunek, że leży na przedłużeniu prostopadłej $p$ z $A$ do $m$, w tej samej odległości od punktu $[pm]$, co $A$.

70. To samo w stosunku do dowolnej figury.

71. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przechodzącej przez daną prostą $a$ i równoległą do drugiej danej prostej $b$.

72. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, zawierającej dany punkt $M$ i równoległej do dwu danych prostych $a$ i $b$. Roztrząsnąć dokładnie wszystkie możliwości!

73. Wyznaczyć ślady płaszczyzny $\beta$, zawierającej daną prostą $a$ i prostopadłej do danej płaszczyzny $\alpha$.

74. Wyznaczyć ślady pł. $\beta$, prostopadłej do danej pł. $\alpha$ i spełniającej jeden z warunków: a) $\alpha \parallel x$; b) $\alpha \perp \Pi_1$; c) $\alpha \perp \Pi_2$.

75. Wyznaczyć rzuty prostej $d$, zawierającej dany punkt $D$ i przecinającej dwie dane proste skośne $a$ i $b$. Wskazówka: $d \equiv [\text{pł.} [aD]\ \text{pł.} [bD]]$.

76. Wyznaczyć rzuty prostej $d$, przecinającej dwie dane proste skośne $a$ i $b$ i równoległej do trzeciej danej prostej $m$.

77. Wyznaczyć rzuty wspólnej prostopadłej do dwu danych prostych skośnych $a$ i $b$.

*Wskazówka*. Należy wykonać na płaszczyźnie dwu rzutów konstrukcye, odpowiadające konstrukcyom, wskazywanym zwykle przy rozważaniu tego zagadnienia w podręcznikach geometryi zwyczajnej. Można ująć w krótkości przebieg tych działań w sposób następujący:

1) Przez $a$ przeciągnąć płaszczyznę $\alpha \parallel b$.

2) Przez $b$ przeciągnąć płaszczyznę $\beta \perp$ pł. $\alpha$.

3) Wyznaczyć punkt $A \equiv [a\beta]$.

4) Z punktu $A$ wystawić prostopadłą $p$ do płaszczyzny $\alpha$. Prosta $p$ musi przeciąć $b$ w jakimś punkcie $B$ i spełnia warunki zadania.

78. Mamy dane rzuty kawałków trójkątnych, równoległobocznych lub dowolnych, ograniczonych, trzech płaszczyzn $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$. Wyznaczyć wszystkie linie przecięcia, odróżnić części widzialne i niewidzialne.

## DZIAŁ IV. (Kolineacya).

79. Wyznaczyć ślad spółrzutowy płaszczyzny: a) $\perp \Pi_1$; b) $\perp \Pi_2$; c) $\parallel x$.

80. Przy danym śladzie spółrzutowym i śladzie poziomym wyznaczyć ślad pionowy płaszczyzny. Podobnież, gdy mamy ślady spółrzutowy i pionowy, wyznaczyć ślad poziomy.

81. Wyznaczyć $v_\alpha$, gdy są dane: a) $g_\alpha' \equiv h_\alpha'$; b) $g_\alpha' \parallel h_\alpha' \parallel x$. Wyznaczyć $h_\alpha$, gdy są dane: a) $g_\alpha'' \equiv v_\alpha''$; b) $g_\alpha'' \parallel v_\alpha'' \parallel x$.

82. Kiedy podporządkowanie wzajemne punktów prostej i ich rzutów na jakąś płaszczyznę przestaje być jednoznacznie — jednoznacznem? Kiedy przestaje być jednoznacznie—jednoznacznem podporządkowanie dwu rzutów prostej?

83. Przypuśćmy, że mamy część płaszczyzny, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, ale nie $\perp \Pi_2$, zawartą w jednej z ćwiartek przestrzeni, ale pozatem nieograniczoną. Opisać związek pomiędzy układem rzutów poziomych punktów tego obszaru i układem ich rzutów pionowych. Dlaczego podporządkowanie wzajemne tych dwu układów nie jest doskonałe?

84. Są dane: jeden z rzutów wielokąta płaskiego i rzuty na drugą płaszczyznę *trzech* jego wierzchołków. Wyznaczyć w całości rzut wielokąta na tę drugą płaszczyznę.

85. Są dane: jeden z rzutów pęku płaskiego (złożonego np. z 5 lub 6 prostych) oraz rzuty na drugą płaszczyznę dwu prostych tego pęku. Wyznaczyć zapomocą kolineacyi rzuty na tę płaszczyznę pozostałych prostych.

86. Wyznaczyć rzuty na jedną z płaszczyzn rzutów a) trójkąta, b) sześciokąta, których rzuty na drugą płaszczyznę są dane, jeżeli płaszczyzna omawianej figury jest dana przez rzuty $a'$, $b'$, $a''$, $b''$ dwu przecinających się prostych lub rzuty trzech punktów, nie należących do wierzchołków trójkąta lub sześciokąta.

87. Są dane: ślady płaszczyzny i jeden z rzutów: a) trójkąta, b) sześciokąta, położonego w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć drugi rzut.

88. Są dane: ślady płaszczyzny i jeden z rzutów położonego w niej pęku. Wyznaczyć drugi rzut.

89. Są dane: ślady płaszczyzny i koło, stanowiące rzut poziomy krzywej (elipsy lub okręgu), położonej w tej płaszczyźnie. Wyznaczyć rzut pionowy (przy pomocy szeregu punktów, dość blizko położonych, jak na rys. 97-ym).

90. Są dane: środek $S$, oś $o$ oraz para punktów odpowiednich $A_1$, $A_2$ ($A_2 \subset [SA_1]$), wyznaczające pewną kolineacyę środkową. Przekształcić przy tych danych: a) trójkąt; b) jakikolwiek inny wielokąt. Punkt $A_1$ bierzemy gdziekolwiek na obwodzie figury.

91. Przy tych samych danych (środek kolineacyi $S$, oś kolineacyi $o$, punkt $A_1$ na obwodzie i odpowiadający mu punkt $A_2$ na $[SA]$) przekształcić jednokreślnie koło.

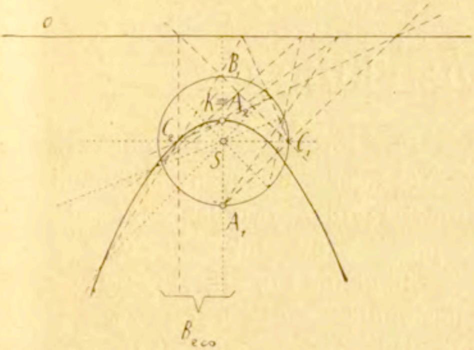
92. Przekształcić jednokreślnie koło, jeżeli środek kolineacyi $S$ nakrywa środek koła, a oś kolineacyi $o$ leży poza kołem; punkt $A_1$ bierzemy na końcu średnicy, prostopadłej do osi $o$, z drugiej strony środka $S$. Oznaczmy jeszcze przez $K$ punkt, położony na $[A_2S]$, w *jednakowej odległości* od $A_1$ i osi kolineacyi $o$. Stosownie do tego, czy punkt $A_2$, podporządkowany punktowi $A_1$, 1) leży na $[SA_1]$ z tej samej strony punktu $K$, co i punkt $A_1$, ale nie nakrywa ani $A_1$ ani $S$, 2) nakrywa $K: A_2 \equiv K$, czy też 3) leży z drugiej strony $K$ (ale nie na $o$), otrzymujemy jako wynik przekształcenia: 1) krzywą zamkniętą, nie rozciągającą się w nieskończoność, zwaną *elipsą*; 2) krzywą, rozciągającą się w nieskończoność w kierunku prostej $[SA_1] \equiv [SB_{2\infty}]$, zwaną *parabolą* (p. rys. 99); 3) krzywą, złożoną z dwu gałęzi, rozciągającą się w nieskończoność w dwu kierunkach odmiennych; jest to t. zw. *hiperbola*.

93. Zastanowić się, co się dzieje z konstrukcyami i wynikiem, gdy punkt $A_2$ oddalamy nieograniczenie. Wykonać konstrukcyę dla punktu $A_2$ „w nieskończoności“ zapomocą prostych, przechodzących przez $A_{2\infty}$, t. j. || $[SA_1]$. Roztrząsnąć również przypadki pominięte: $A_2 \equiv A_1$, $A_2 \equiv S$, $A_2 \subset o$.

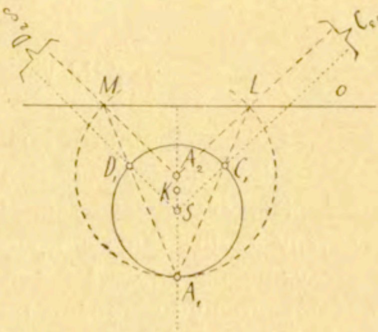
94. Rozwiązać zadanie 92 w tym przypadku, gdy oś kolineacyi przecina okrąg.

95. To samo, gdy oś kolineacyi jest styczna do koła.

96. Wyznaczyć w którymś z przypadków, rozważonych w ćw. 92, 94, 95 punkty koła, którym nie odpowiadają punkty krzywej przekształconej, położone w odległości skończonej. *Wskazówka:* kreślimy łuk koła o promieniu $A_2A_1$ i środku $A_2$ i łączymy punkty $M$ i $L$, w których przecina $o$, z $A_1$.




Rys. 99.




Rys. 100.

Punkty $C_1$ i $D_1$, w których $[A_1L]$ i $[A_1M]$ przecinają dany okrąg (rys. 100] są to punkty szukane. Uzasadnić tę konstrukcyę. Kierunki prostych $[A_2L]$ i $[A_2M]$ nazywamy kierunkami *asymptotycznymi* dla wyznaczanej krzywej.

*Uwaga.* Polecamy usilnie uczącemu się zbadanie jak najbardziej samodzielne i wyczerpujące przekształceń, opisanych w czterech ostatnich ćwiczeniach, jako przygotowanie do nauki o krzywych drugiego rzędu.

97. Rozwiązać zadania 90 i 91, jeżeli środek kolineacyi jest położony *na* osi kolineacyi.

98. Mamy dane: środek podobieństwa $S$, jakąś figurę $A_1B_1C_1$..., oraz punkt $A_2$ (należący do $[A_1S]$), odpowiadający punktowi $A_1$. Wykreślić całą figurę $A_2B_2C_2$..., jednokładną z $A_1B_1C_1$...

99. Kiedy jednokładność dwu figur płaskich staje się symetryą względem punktu?

100. Mamy dane rzuty dowolnej figury $A_1B_1C_1$... oraz dowolnego punktu $S$. Wykreślić rzuty figury, symetrycznej z daną względem punktu $S$.

---

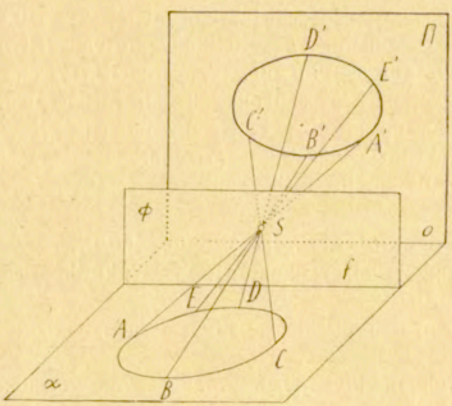
ROZDZIAŁ VI.

# Rzuty koła. Elipsa.

§ 31. **Rzut środkowy koła.** Postać rzutu środkowego koła zależy od jego położenia względem płaszczyzny zniknienia, t. j. płaszczyzny, zawierającej środek rzutu i równoległej do płaszczyzny rzutu. Linię przecięcia płaszczyzny zniknienia $\Phi$ i płaszczyzny koła $\alpha$ nazwiemy prostą zniknienia i oznaczymy przez $f$.

Możemy tu odróżnić trzy następujące możliwości:

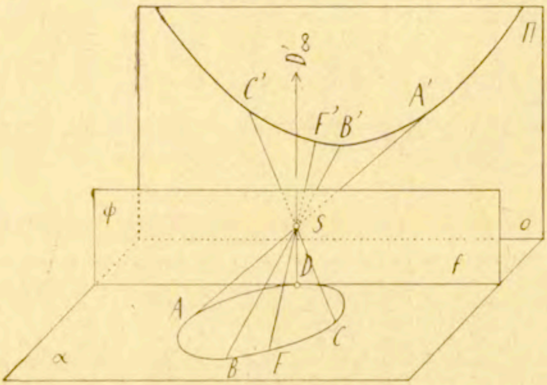
1. Obwód koła nie przecina płaszczyzny zniknienia $\Phi$. W takim razie *każdy punkt okręgu posiada rzut w odległości skończonej* (p. § 1) i rzut całego okręgu stanowi w ogólności *krzywa zamknięta*, zwana *elipsą* (rys. 101, na którym $ABCDE$ jest kołem, wyobrażonem jak zwykle w postaci rzutu równoległego ukośnego). Jeżeli w dodatku płaszczyzna koła $\alpha$ zawiera środek rzutu czyli jest „płaszczyzną rzutującą", to elipsa przechodzi w odcinek i przebiegowi punktu wzdłuż okręgu odpowiada przesunięcie się jego rzutu tam i napowrót wzdłuż tego odcinka. Jeżeli płaszczyzna koła jest równoległa do płaszczyzny rzutów, to elipsa traci



Rys. 101.

postać wydłużoną i przechodzi w okrąg koła, większy lub mniejszy od danego.

2. Obwód koła dotyka płaszczyzny zniknienia. Wszystkie punkty okręgu, oprócz punktu styczności $D$ z prostą zniknienia, posiadają rzuty w odległości skończonej. Punkty, coraz bardziej zbliżone do punktu styczności, posiadają rzuty coraz bardziej oddalone, i rzut okręgu otrzymuje postać *krzywej*, *rozciągającej się w nieskończoność w jednym kierunku*, mianowicie wskazanym przez prostą $[SD]$. Jest to t. zw. *parabola* (rys. 102).




Rys. 102

3. Obwód koła przecina w dwu punktach $G$ i $H$ płaszczyznę zniknienia. Rzut okręgu przybiera postać *krzywej*, *złożonej z dwu osobnych gałęzi*, *rozciągających się w nieskończoność w dwu kierunkach*, wskazanych przez proste $[SG]$ i $[SH]$. Krzywą tego gatunku nazywamy *hiperbolą*. Każda z dwu gałęzi hiperboli odpowiada innej z dwu części, na które okrąg jest podzielony przez prostą $f$ (rys. 103).

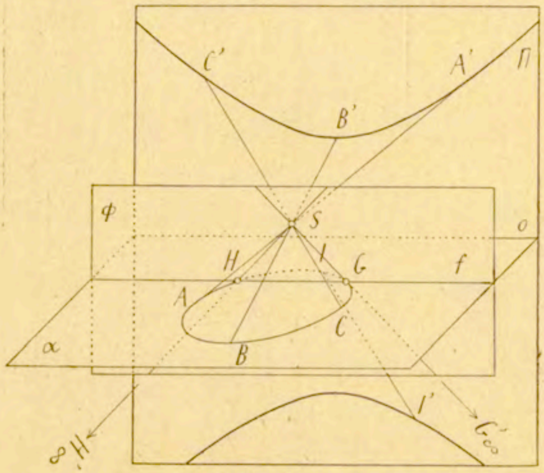
W obu ostatnich przypadkach może się zdarzyć w szczególności, jak w pierwszym, iż płaszczyzna koła $\alpha$ zawiera środek rzutu. Zbadanie tych przypadków, równie jak innych „zwyrodnień“ krzywych typowych, opisanych przed chwilą, pozostawiamy uczącemu się (ćw. 1, 2).

Krzywe te, perspektywiczne z okręgiem koła, posiadają nazwę ogólną *przecięć stożkowych* lub wprost *stożkowych*, ponieważ są to przekroje powierzchni, rzutującej okrąg koła, czyli *po-*

*wierzchni stożkowej* kołowej (por. rozdział o powierzchniach krzywych). Nazywamy je także krzywemi drugiego rzędu.

Powstawanie różnych gatunków rzutu koła możemy sobie uprzytomnić doświadczalnie, obserwując np. cienie, rzucane przez dolny (lub górny) brzeg klosza lampy na ściany i podłogę (lub sufit). Płomień lampy stanowi środek rzutu, płaszczyzna, na którą pada cień—płaszczyznę rzutu.

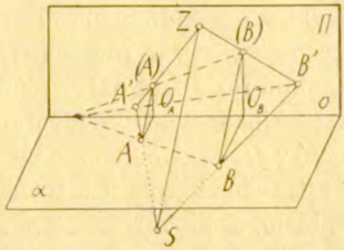
Przypuśćmy, że obracamy płaszczyznę koła $\alpha$ dokoła jej śladu $o=[\alpha\Pi]$ na płaszczyźnie $\Pi$ dopóty, dopóki nie przystanie do $\Pi$.




Rys. 103.

Otrzymamy wtedy t. zw. kład koła na pł. $\Pi$; otóż dowieść można, że kład koła i jego rzut są ze sobą skolineowane w ten sposób, że osią kolineacyi jest ślad $o$, a środkiem zbieg $Z$ prostych równoległych $[A(A)]$, $[B(B)]$ i t. d., łączących punkty $A, B, \ldots$ z ich nowemi położeniami czyli kładami $(A)$, $(B) \ldots$, t. j. ślad na płaszczyźnie $\Pi$ prostej o tym samym kierunku, przeciągniętej przez środek rzutu $S$ (p. § 5).

Że przy podporządkowaniu każdemu kładowi $(A)$, $(B)$ odpowiedniego rzutu $A'$, $B'$, . . . proste, odpowiadające sobie wzajemnie, $[(A)(B)]$ i $[A'B']$ i t. d. przecinają się parami na osi $o$ (war. 2 kolineacyi), to jest niemal oczywiste: punkty przecięcia są to właśnie punkty przecięcia się danych prostych $[AB]$ i t. d. z osią $o$. Równoległość „cięciw obrotu“ $A(A)$, $B(B) \ldots$ wynika z tego, że stanowią one boki trójkątów $AO_A(A)$, $BO_B(B) \ldots$ podobnych i o dwu innych bokach odpowiednio równoległych. Wobec tego rzuty prostych $[A(A)]$, $[B(B)]$,... t. j. $[A'(A)]$, $[B'(B)]$ i t. d. muszą się przecinać w swym „zbiegu" $Z$.



Rys. 104.

Nawzajem — czego już tu zupełnie nie możemy uzasadniać — wszelka krzywa, stanowiąca wynik przekształcenia przez kolineacyę środkową koła, położonego w tej samej płaszczyźnie, przy dowolnym środku i osi kolineacyi, należy do kategoryi przecięć stożkowych (por. ćw. 92, 94, 95, 97 z poprzedniego rozdziału).

*Uwaga.* Ten sam sposób, polegający na rozważaniu punktów przecięcia z płaszczyzną zniknienia, da się zastosować do badania rzutu środkowego jakiejkolwiek krzywej o znanej postaci, w szczególności samych stożkowych, których rzutami, jak się dowodzi, są znów stożkowe.

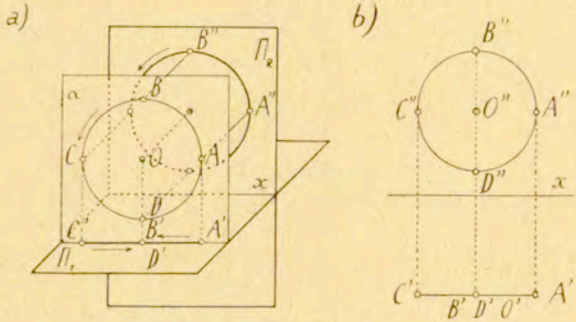
§ 32. **Rzut równoległy koła.** I. Gdy środek rzutu oddala się nieograniczenie, to oddala się również nieskończenie płaszczyzna zniknienia $\Phi$ i w położeniu granicznem nie może być mowy o przecinaniu jej przez jakiekolwiek określone koło, położone w odległości skończonej, ani o styczności z takiem kołem. Stąd wynika, że przy badaniu rzutu równoległego koła mogą zachodzić jedynie przypadki analogiczne do rozważonych w dziale 1-ym poprzedniego paragrafu. W tym wykładzie przyjmiemy bez dowodu, że użycie tej samej nazwy: elipsa, jest zupełnie uprawnione, i że własności elipsy, które znajdziemy, badając ją, jako rzut równoległy, w szczególności prostokątny, okręgu koła, są własnościami ogólnemi tej krzywej, niezależnemi od sposobu jej powstania w jakimś danym przypadku. Zanim jednak przejdziemy do tych rozważań, zastanowimy się z początku nad położeniami bardziej szczególnemi.

1. Płaszczyzna koła $\alpha$ jest równoległa do płaszczyzny rzutów $\Pi$. W takim razie, zgodnie z § 6, III, rzut koła jest równem mu kołem, stanowiącem jedynie wynik przesunięcia równoległego danego koła w kierunku rzutów.

2. Jeżeli płaszczyzna koła $\alpha$ zawiera kierunek rzutu, to wszystkie proste rzutujące, odpowiadające punktom okręgu, należą do $\alpha$, i rzuty tych punktów są położone na śladzie $[\alpha\Pi]$ pła-

szczyzny $\alpha$. Otrzymujemy to samo, co przy rzucie środkowym: rzutem okręgu jest odcinek, przebiegany dwukrotnie.

W szczególności, przejdźmy do rzutów prostokątnych i do zwykłego układu dwu płaszczyzn rzutu. Przypuśćmy, że płaszczyzna koła jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów — w takim razie rzut okręgu koła na płaszczyznę poziomą rzutów $\Pi_1$ jest takim samym okręgiem (przyp. 1); rzut na płaszczyznę pionową rzutów $\Pi_2$—odcinkiem, dwukrotnie przebieganym (przyp. 2). Gdy płaszczyzna $\alpha$ koła jest równoległa do $\Pi_2$, to rzut poziomy jest odcinkiem, a pionowy — kołem (rys. 105). Są to położenia bardzo ważne w teoryi obrotów, z którą się zapoznamy nieco później.




Rys. 105.

*II. Rzut prostokątny koła w położeniu ogólnem. Własności elementarne elipsy.* Przypuśćmy, że płaszczyzna danego koła, którą oznaczymy przez $\alpha$, tworzy z płaszczyzną rzutów $\Pi$ kąt ostry $\theta$. Wszystkie średnice koła, z wyjątkiem średnicy $MN$, równoległej do śladu $o=[\Pi\alpha]$ ulegną w rzucie pewnemu skróceniu, tem znaczniejszemu, im większy kąt tworzą z $MN$ — średnica $AB$, prostopadła do $MN$ (stanowiąca, co do kierunku, linię spadku płaszczyzny $\alpha$ względem $\Pi$) ulegnie największemu skróceniu, określonemu przez spółczynnik $\cos\theta$ (§ 6, I). Już na zasadzie tej pierwszej uwagi można sobie wytworzyć pewne pojęcie o postaci ogólnej rzutu — aby osiągnąć wynik dokładniejszy i podstawę do konstrukcyi, rozpatrzmy układ, utworzony ze średnicy $MN \parallel o$ i cięciw, prostopadłych do niej np. $AB$, $CD$ i t. d. Rzuty tych cięciw muszą tworzyć z rzutem $M'N'$ średnicy $MN$ również kąty proste (§ 6, II) oraz dzielić się w punktach przecięcia z $M'N'$ na połowy, ponieważ $MN$ dzieli na połowy cięciwy $AB$, $CD$ i t. d. (§ 6, I). Dalej, wszystkie te cięciwy ulegają w rzucie temu samemu skróceniu

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = \ldots\ldots = \cos\theta.$$

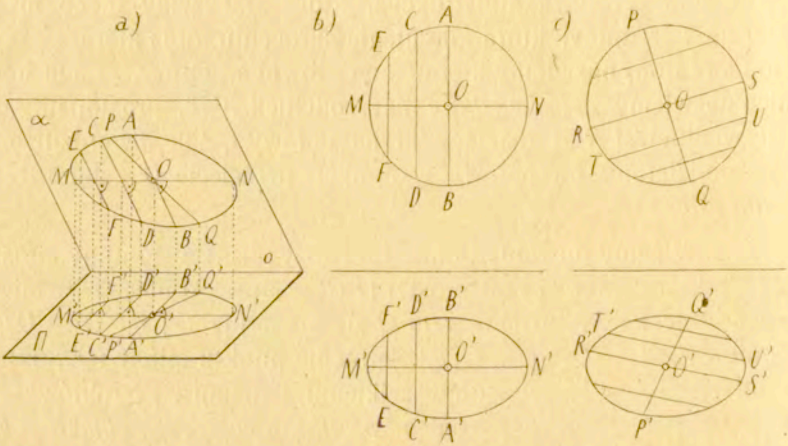
1. Można tedy powiedzieć, iż *elipsa da się otrzymać z okręgu przez zachowanie bez zmiany jednej z jego średnic i skrócenie w pewnym określonym stosunku wszystkich cięciw prostopadłych do niej (tak przytem, iż pozostają podzielone przez nią na połowy).* Stąd wypływa konstrukcya, którą wskażemy nieco niżej. Kierunek średnicy, która nie uległa skróceniu oraz kierunek prostopadły doń, nazwiemy kierunkami głównymi elipsy. Samą średnicę nazwiemy *osią wielką* elipsy, odcinek $A'B'$, prostopadły do osi wielkiej $M'N'$ i dzielący ją na połowy i, jak stwierdziliśmy, sam podzielony na połowy w punkcie przecięcia $O'$, stanowi *oś małą* elipsy.

2. Weźmy dowolny punkt $P'$ elipsy i przeciągnijmy prostą $[P'O']$, która stanowi rzut prostej $[PO]$ — drugi koniec $Q$ średnicy, wychodzącej z $P$, posiada rzut $Q$ na prostej $[P'O']$ i $P'O' = O'Q'$, ponieważ $PO = OQ$ [§ 6, I, (1)]. Istnienie punktu elipsy ($Q'$), odpowiadającego w ten sposób wszelkiemu danemu jej punktowi ($P'$) świadczy, iż *elipsa jest krzywą, posiadającą środek symetryi* $O'$, przez który przechodzą rzuty wszystkich średnic koła, które przeto, mimo różnej wielkości, mogą być również nazwane średnicami—średnice o głównych kierunkach, nazwaliśmy już przed chwilą osią wielką i małą.

3. Weźmy cięciwy koła, prostopadłe do średnicy dowolnej $PQ$ — rzuty ich nie będą w ogólności prostopadłe do rzutu $P'Q'$, będą jednak zawsze równoległe i podzielone na połowy przez $P'Q'$. Nawzajem, rzut średnicy, prostopadłej do $P'Q'$, dzieli na połowy rzut $P'Q'$ i rzuty wszystkich cięciw, równoległych do $PQ$. Takie dwie średnice elipsy, stanowiące rzuty dwu prostopadłych średnic koła, nazywają się jej *średnicami sprzężonemi*, a ich kierunki — *kierunkami sprzężonymi*. Znaczenie kierunków sprzężonych polega tedy na tem, że *średnica, posiadająca jeden z tych kierunków, dzieli na połowy cięciwy o drugim kierunku — i nawzajem.* W szczególności, kierunki główne stanowią również parę kierunków sprzężonych; jak łatwo dowieść, jest to jedyna

para kierunków, jednocześnie sprzężonych i prostopadłych. Stąd wynika, że *oś wielka i mała stanowią osie symetryi elipsy* w zwykłem znaczeniu tego słowa t. j. *osie symetryi prostokątnej*. Każda inna średnica, jako dzieląca na połowy cięciwy o *określonym* kierunku, nie prostopadłym do niej, jest osią t. zw. symetryi ukośnej.

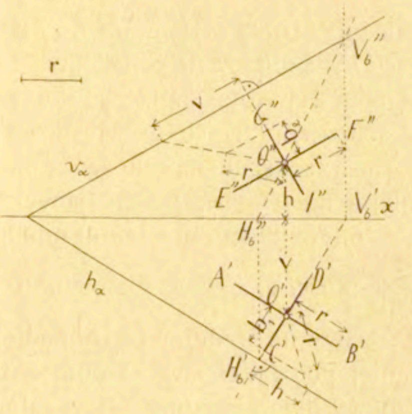
*Uwaga.* Własność 2-gą oraz istnienie kierunków sprzężonych uzasadnilibyśmy zupełnie tak samo, uważając elipsę nie za rzut prostokątny, lecz wogóle za rzut równoległy okręgu koła.



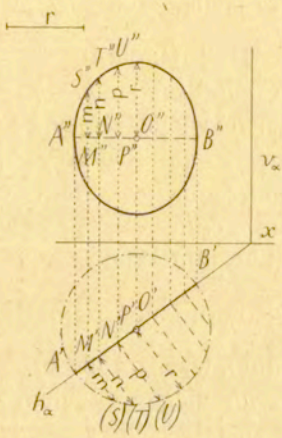
Rys. 106.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z układem dwu płaszczyzn rzutów i że chcemy otrzymać rzuty koła o danym środku i promieniu, położonego w danej płaszczyźnie. W zasadzie możnaby w tym celu wykreślić rzuty pewnej liczby promieni, jako odcinków, położonych w danej płaszczyźnie, wychodzących z danego punktu i posiadających daną długość (§ 18), i końce tych rzutów — z osobna poziomych, a z osobna pionowych — połączyć odpowiednio zapomocą dwu krzywych ciągłych i zamkniętych. Wygodniej jednak postąpić inaczej. Wystarczy mianowicie wyznaczyć rzuty na płaszczyznę, o którą chodzi w danej chwili, dwu tylko średnic: 1) równoległej do tej płaszczyzny (t. j. o kierunku linii poziomu lub linii frontu) i 2) prostopadłej do pierwszej. Długość pierwszej średnicy nie ulega zmianie i rzut jej stanowi, jak widzieliśmy, *oś wielką* elipsy, rzut drugiej średnicy musi mieć kierunek prostopadły do kierunku tamtego rzutu i da się wyznaczyć, co do długości, zapomocą konstrukcyi z § 18, po uprzedniem wyznaczeniu (§ 26) rzutu tejże średnicy na drugą z płaszczyzn rzutów. Dokonawszy tych konstrukcyi, otrzymujemy *oś małą elipsy* — a więc można zastosować sposób wykreślania elipsy podług danych osi, wskazany w następnym paragrafie.

Tak np. na rys. 107-ym, mając dane: $h_\alpha$, $O'$ i $O''$ i promień r, odmierzamy na prostej $[\supset O' \parallel h_\alpha]$ odcinki $O'A'=O'B'=$r, wykreślamy prostą $b' \equiv [\supset O' \perp h_\alpha] \equiv$ $\equiv [O'H_b']$, znajdujemy $b'' \equiv [O''H_b'']$ i $V_b''$, a stąd $v_\alpha$; wyznaczamy długość $O'(H_b)$ odcinka $OH_b$ i odmierzając na $O'(H_b)$ długość r, znajdujemy rzut $O'C'$ odcinka o długości=r. Odkładając $O'D'=O'C'$, otrzymujemy ostatecznie oś wiel-




Rys. 107. $(H_b)$




Rys. 108.

ką $A'B'$ i małą $C'D'$ elipsy, stanowiącej rzut poziomy okręgu To samo wykonywamy w stosunku do rzutu pionowego, którego osiami będą $E''F''$ i $G''I''$. W celu sprawdzenia lub ułatwienia dalszych konstrukcyi możemy wyznaczyć rzuty: 1) $A''$, $B''$, $C''$, $D''$; 2) $E'$, $F'$, $G'$, $I'$ oraz uwzględnić ten fakt, którego tu nie uzasadniamy dla krótkości, że obie elipsy winny się zawierać pomiędzy dwiema prostemi, prostopadłemi do osi $x$, dotykającemi każdej z nich w jednym punkcie.

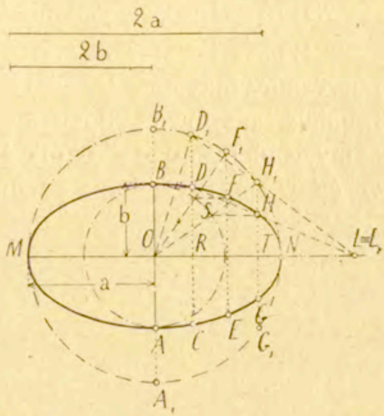
Zadanie zostaje w znacznym stopniu ułatwione, jeżeli płaszczyzna koła jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów. Odpowiedni rzut jest, jak wiemy, odcinkiem o długości średnicy, dwukrotnie przebieganym — osie elipsy, stanowiącej drugi rzut, mają kierunki: równoległy (oś mała) i prostopadły (oś wielka) do osi rzutów. Można do wykreślenia tej elipsy zastosować konstrukcyę specyalną. Przypuśćmy mianowicie, że koło, położone np. w płaszczyźnie $\alpha \perp \Pi_1$, zostało przeniesione na płaszczyznę $\Pi_1$ w ten sposób, iż średnica $AB \parallel \Pi_1$ przystaje do swego rzutu $A'B'$. W takim razie połowy $MS$, $NT$, . . . cięciw, prostopadłych w położeniu pierwotnem do $\Pi_1$, a więc $\parallel \Pi_2$, otrzymujemy w naturalnej wielkości, jako odcinki $M'(S) = \mathsf{m}$, $N'(T) = \mathsf{n}$, . . . i w celu otrzymania rzutu pionowego okręgu, (zawsze w jego położeniu pierwotnem w przestrzeni!) wystarczy tylko odmierzyć odpowiednio te odcinki w dół i w górę wzdłuż prostych, prostopadłych do $x$, od rzutów pionowych $M''$, $N''$, . . . Istotnie, z góry wiemy, że z powodu równoległości $[MS]$, $[NT]$,... do $\Pi_2$, $M''S'' = MS$, $N''T'' = NT$,..., a z powodu prostopadłości do $\Pi_1$ $[M''S''] \perp x$, $[N''T''] \perp x$ i t. d. Rzecz jasna, że $M' \equiv S'$, $N' \equiv T'$ i t. d.

§ 33. **Sposoby wykreślania elipsy. Styczna do elipsy.** *I. Konstrukcya podług osi wielkiej i małej.* Przypuśćmy, że są dane: oś wielka elipsy $2\mathsf{a}$ i oś mała $2\mathsf{b}$. Aby wyznaczyć dostateczną liczbę punktów krzywej, wystarczy oprzeć się na własności 1-ej z poprzedniego paragrafu i utworzyć szukaną elipsę z okręgu ȯ promieniu $\mathsf{r} = \mathsf{a}$ przez zmniejszenie cięciw, posiadających pewien wspólny kierunek, w określonym stosunku—takim mianowicie, iżby promień $\mathsf{r}$ zmalał do wielkości $\mathsf{b}$, a więc w stosunku $\frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$. Odcinki, wyznaczone przez te cięciwy na średnicy prostopadłej do nich, nie ulegają przytem zmianie; podział cięciw na połowy również zostaje zachowany. Na typowy przebieg konstrukcyi składają się: wykreślenie dwu okręgów spółśrodkowych o promieniach $\mathsf{a}$ i $\mathsf{b}$, średnicy $MN$ większego koła i szeregu cięciw tegoż koła, prostopadłych do niej, następnie wykreślenie promieni, wychodzących z końców z tych cięciw oraz prostych, równoległych do średnicy $MN$ i przeciągniętych przez punkty przecięcia wzmiankowanych promieni z obwodem mniejszego koła; punkty przecięcia każdej z tych prostych z odpowiednią cięciwą stanowią właśnie punkty szukanej elipsy. Istotnie, weźmy dowolny punkt $H$, znaleziony w ten sposób; z podobieństwa trójkątów $SH_1H$ i $OH_1T$ wynika: $\frac{TH}{TH_1} = \frac{OS}{OH_1} = \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$; $TH = TH_1 \cdot \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$ i podobnież $GH = 2\,TH = G_1H_1 \cdot \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{a}}$.

c. b. d. o.

Wystarczy wykreślić w ten sposób jedną tylko z ćwierci elipsy; drugą można wyznaczyć, jako symetryczną z pierwszą względem osi $[MN]$ $[GT = TH$ i t. d.]; dalej można stosować symetryę względem $[AB]$, symetryę względem środka i t. p.

Przypuśćmy, że podporządkowujemy sobie wzajemnie punkty okręgu i elipsy w ten sposób, iż każdemu punktowi okręgu odpowiada punkt elipsy, położony na tej samej prostopadłej do $[MN]$ i z tej samej strony $[MN]$—i nawzajem, jak wskazują litery na rysunku: punkt $A$ elipsy odpowiada punktowi $A_1$ okręgu, punkt $B$ punktowi $B_1$ i t. d. $(M_1 \equiv M,\ N_1 \equiv N)$. Jeżeli połączymy prostemi pary punktów odpowiednich, to te proste winny się przeciąć na prostej $[MN]$.




Rys. 109.

Weźmy np. punkty $D$ i $H$ oraz $D_1$ i $H_1$ i oznaczmy przez $L$ punkt $[[DH]\ [MN]]$ i przez $L_1$ punkt $[[D_1H_1]\ [MN]]$. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów wynika:

$$\frac{RL}{TL} = \frac{RD}{TH}; \qquad \frac{RL_1}{TL_1} = \frac{RD_1}{TH_1}.$$

Otóż:

$$\frac{RD}{RD_1} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{TH}{TH_1}, \quad \text{więc} \quad \frac{RD}{TH} = \frac{RD_1}{TH_1}, \quad \text{i przeto} \quad \frac{RL_1}{TL_1} = \frac{RL}{TL}.$$

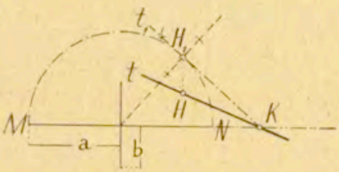
Ostatnia proporcya wymaga niezbędnie, iżby $L_1 \equiv L$. c. b. d. o.

Ponieważ ponadto proste $[BB_1]$, $[DD_1]$ i t. d. posiadają ten sam kierunek, przeto oba warunki kolineacyi równoległej czyli powinowactwa, w danym razie prostokątnego, są spełnione w stosunku do okręgu i elipsy, jako jego „przekształconej". Osią kolineacyi jest prosta $[MN]$, kierunek kolineacyi jest do niej prostopadły.

II. Jeżeli będziemy zbliżali coraz bardziej punkt $D_1$ do punktu $H_1$, to odpowiedni punkt $D$ elipsy będzie również zbliżał się do $H$, a punkt $[[DH]\ [D_1H_1]]$ będzie pozostawał wciąż na $[MN]$. Stąd wynika, iż w położeniu granicznem, t. j. gdy sieczna $[D_1H_1]$

przechodzi w styczną do koła w punkcie $[H_1]$, sieczna $[DH]$ przestaje być sieczną i staje się tem, co nazywamy (p. § 35) styczną elipsy w punkcie odpowiednim $H$, i że te dwie styczne muszą się również przeciąć na $[MN]$, stanowiąc w ten sposób proste, odpowiadające sobie w kolineacyi. Możemy tedy zapomocą kolineacyi rozwiązać z łatwością zadanie:

*Wykreślić styczną do elipsy w danym jej punkcie.* Przypuszczamy przytem, że znamy położenie i wielkość osi wielkiej i małej; sam obwód elipsy może przytem zupełnie nie być zakreślony, bylebyśmy tylko mieli punkt styczności, położony oczywiście w sposób zgodny z jedną ze wskazanych konstrukcyi. Stosownie do tego, cośmy przed chwilą zaznaczyli, wystarczy wykreślić okrąg o promieniu, równym połowie osi wielkiej i styczną $t_1$ do tego okręgu w punkcie $H_1$, odpowiadającym punktowi $H$ ($[HH_1] \perp [MN]$) a następnie połączyć prostą punkt



Rys. 110.

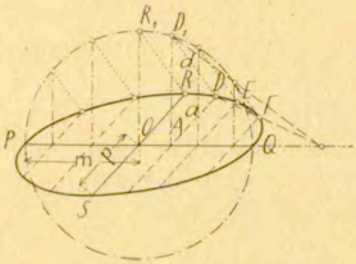
$$K \equiv [t_1 \, [MN]]$$

z punktem $H$; szukaną styczną jest właśnie prosta $t \equiv [KH]$.

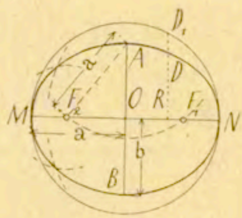
Jeżeli wyobrazimy sobie, że elipsa, wykreślana zapomocą wskazanego sposobu, stanowi rzut prostokątny pewnego koła w przestrzeni, którego kładem jest większe koło na rysunku, to kolineacya, wykryta powyżej, stanie się dla nas oczywistym wynikiem rozważań z końca § 31, i wystarczy tylko założyć, że środek rzutu $S$ oddala się nieograniczenie (wtedy środek kolineacyi $Z$ oddala się również nieograniczenie), by kolineacya stała się równoległą, w szczególności — powinowactwem prostokątnem, jak w rozważonym przypadku. Ostatecznie (por. koniec § 31 i początek § 32):

Do kreślenia elipsy możemy stosować nietylko powinowactwo prostokątne, lecz wogóle równoległe z kołem, przy rozmaitych położeniach osi. Możemy być przytem pewni, że przy żadnym doborze położenia osi i kierunku powinowactwa nie otrzymamy paraboli ani hiperboli — dlaczego?

III. Jednem z zastosowań kolineacyi do wykreślania elipsy jest jej konstrukcya podług dwu średnic sprzężonych. Przypuśćmy, że mamy dane dwa odcinki $PQ = 2\mathbf{m}$ i $RS = 2\mathbf{p}$, przecinające się pod jakimś kątem $\varphi \neq 90^0$ i dzielące się w punkcie przecięcia na połowy, i że te proste mają stanowić parę średnic sprzężonych. Zakreślmy koło o promieniu $\mathbf{m}$ lub $\mathbf{p}$, np. $\mathbf{m}$, dokoła punktu $O \equiv [[PQ] \, [RS]]$. Uważajmy teraz $[PQ]$ za oś powinowactwa, za kierunek powinowactwa kierunek prostej $[RR_1]$, łączącej $R$ z końcem $R_1$ średnicy koła $PR_1Q$, prostopadłej do $[PQ]$, punkt $R$—za podporządkowany przy przekształceniu punktowi $R_1$ koła. Możemy w tych warunkach zapomocą konstrukcyi z § 30, wyznaczyć rzuty dowolnej liczby punktów $D$, $E$, $F$..., odpowiadających punktom okręgu—ich miejscem geometrycznem, czego tu nie uzasadniamy, będzie szukana elipsa. Konstrukcye z § 30 dogodnie zastąpić nieco innemi, zupełnie równoważnemi, jak łatwo dowieść. Tak np. wyznaczenie punktu $D$ może polegać na wykreśleniu z $D_1$ prostej $[D_1A] \perp [PQ]$ oraz prostej $d \parallel [R_1R]$ i z punktu $A$ prostej, równoległej do $[OR]$: $a \equiv [\supset A \parallel [OR]]$; punkt przecięcia drugiej i trzeciej prostej jest właśnie punktem szukanym: $D \equiv [ad]$. To samo stosujemy do innych punktów okręgu. *Otrzymana elipsa może być uważana za rzut równoległy koła o promieniu* **m**, *którego płaszczyzna przecina płaszczyznę rzutu wzdłuż [PQ], tak że PQ jest jedną ze średnic koła, a RS—rzutem średnicy, prostopadłej do PQ.* Rozwinąć to wyjaśnienie!



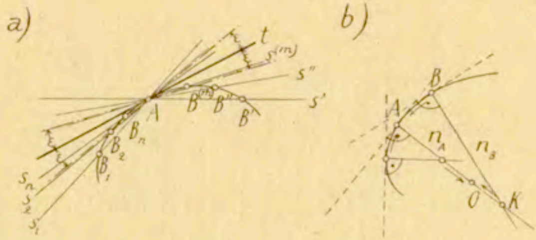
Rys. 111.



Rys. 112.

§ 34. **Uzupełnienia.** Elipsa jest krzywą, której można nadawać nader rozmaite określenia i która posiada liczne własności szczególne. Nie mogąc w tem miejscu roztrząsać tych zagadnień dokładnie, poprzestaniemy na paru jeszcze uwagach. Zatoczmy (rys. 112) dokoła jednego z końców małej osi, np. $A$, łuk o promieniu **a**; punkty $F_1$ i $F_2$, w których ten łuk przecina oś wielką, są to tak zwane *ogniska* elipsy. Łatwo dowieść, *iż suma odległości dowolnego punktu D elipsy od ognisk jest stała,* $= 2$ **a**. Wystarczy w tym celu obliczyć te odległości w zależności od $OR$, przyczem należy uwzględnić, że $RD = RD_1 \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ (ćw. 22). Podobny rachunek doprowadza do równania elipsy w układzie osi spółrzędnych, nakrywających jej osie główne. Wymieniona własność elipsy może być zastosowana do konstrukcyi elipsy podług dwu osi, albo też osi wielkiej i oznaczonego na niej jednego z ognisk i t. p. Gdy np. są dane, jak poprzednio, osie elipsy $MN$ i $AB$, wystarczy wyznaczyć $F_1$ i $F_2$ i następnie znaleźć dowolną liczbę punktów, z których każdy stanowi punkt przecięcia łuków, zakreślonych dokoła $F_1$ i $F_2$ promieniami, których suma $= 2$ **a**, np. promieniami $MR$ i $RN$, otrzymywanymi przy przesuwaniu punktu $R$ wzdłuż osi $MN$. Znany, acz niezbyt dokładny sposób kreślenia elipsy polega na umocowaniu końców nitki o długości 2 **a** w $F_1$ i $F_2$ i posuwanie ostrza ołówka, utrzymującego stale nitkę w stanie napięcia („sposób ogrodowy") W ćw. 19-em podajemy inną konstrukcyę praktyczną „zapomocą skrawka papieru". W geometryi analitycznej uzasadnia się, często jako wniosek z omawianej poprzednio własności, inną własność elipsy, polegającą na tem, że stosunek odległości punktów krzywej od jednego z jej ognisk do odległości od odpowiedniej prostej stałej, zwanej kierownicą, jest stały i mniejszy od jedności. Wogóle zaś wszystkie przecięcia stożkowe, jak można udowodnić, mogą być uważane za miejsca geometryczne punktów, których odległości: 1) od pewnego punktu stałego i 2) od pewnej prostej stałej zachowują stały stosunek. Gdy wykładnik tego stosunku $< 1$, mamy elipsę, gdy $= 1$ — parabolę, gdy $> 1$ — hiperbolę. Łatwo zastosować to określenie do konstrukcyi stożkowych. Ponad to podamy jeszcze w ćwiczeniach niektóre inne wskazówki praktyczne, dotyczące hiperboli (ćw. 23, 24, 25). W dalszym ciągu spotkamy się jeszcze z krzywemi drugiego rzędu czyli stożkowemi przy wyznaczaniu zapomocą rzutów przekrojów płaskich brył obrotowych, w szczególności stożka i walca obrotowego.

§ 35. **Uwagi ogólne o krzywych.** Linie krzywe dzielimy na 1) krzywe płaskie i 2) krzywe skośne czyli przestrzenne. Krzywą płaską nazywamy taką krzywą, której wszystkie punkty leżą w jednej płaszczyźnie; jeżeli ten warunek nie jest spełniony, krzywa posiada nazwę skośnej. Przykłady krzy-




Rys. 113.

wych płaskich stanowią: okrąg, elipsa, hiperbola, parabola [1]). Z pojęciem krzywej są związane dwa pojęcia, oznaczone przez nazwy: styczna i krzywizna i posiadające ważne znaczenie, zarówno teoretyczne, jak praktyczne. W § 33, II używaliśmy już okreś-

[1]) Rzuty na dwie płaszczyzny, tworzące zwykły układ, krzywej płaskiej, różnią się od rzutów krzywej skośnej tem, że istnieje pomiędzy nimi, jak pomiędzy rzutami wszelkich utworów płaskich, powinowactwo, opisane w § 30-ym. Pozatem rzuty krzywej skośnej mogą na pierwszy rzut oka zupełnie nie różnić się niczem od rzutów krzywej płaskiej.

lenia stycznej do koła lub elipsy, jako położenia granicznego siecznej; w tej chwili nadamy temu określeniu większą ścisłość.

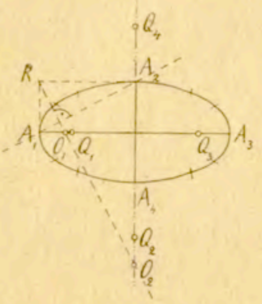
Weźmy sieczną $[AB]$, przechodzącą przez punkt stały $A$ krzywej (płaskiej lub skośnej), oraz punkt ruchomy $B$, zbliżający się wzdłuż krzywej do $A$ z jednej lub drugiej strony. Przypuśćmy, że przy zbliżaniu się punktu $B$ do punktu stałego $A$ czy to z lewej strony, przez położenia $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \ldots$, czy to z prawej, przez położenia $B', B'', B''', \ldots B^{(m)}, \ldots$ sieczna zmierza do pewnego jedynego określonego położenia granicznego $t$. Ścisłe znaczenie tego orzeczenia jest następujące: istnieje prosta $t$, przechodząca przez punkt $A$ i spełniająca ten warunek, iż można znaleźć taki punkt $B_n$ z lewej strony i taki punkt $B^{(m)}$ z prawej strony punktu $A$, że poczynając od tych punktów, kąt ostry pomiędzy sieczną a prostą $t$ *staje się i pozostaje mniejszy* od dowolnie małego, *z góry obranego*, kąta $\varepsilon$. Owa prosta $t$ nazywa się *styczną obustronną* lub poprostu *styczną do krzywej w punkcie $A$* (rys. 113 a).

W dalszym ciągu będziemy mówili wyłącznie o krzywych płaskich.

Styczna wyznacza kierunek, który możnaby nazwać kierunkiem krzywej w punkcie styczności; prosta, przechodząca przez ten sam punkt i posiadająca kierunek prostopadły nazywa się normalną do krzywej lub normalną krzywej płaskiej w omawianym punkcie. Rzecz jasna, że dla okręgu normalnemi są promienie. Weźmy, jak poprzednio, punkt stały $A$ i punkt ruchomy $B$; normalne do krzywej, odpowiadające punktom $A$ i $B$, przecinają się, przypuśćmy, w punkcie $K$. Gdy punkt $B$ będziemy zbliżali do punktu $A$, to punkt przecięcia odpowiedniej normalnej $n_B$ z nieruchomą normalną $n_A$ może (ale niekoniecznie musi) dążyć do pewnego położenia granicznego $O$, w odległości skończonej, niezależnego od tego, z której strony zbliżamy punkt $B$ do $A$. Jeżeli tak się dzieje istotnie, punkt $O$ stanowi t. zw. środek krzywizny krzywej płaskiej w punkcie $A$, odcinek $OA$ — promień krzywizny. Rzecz jasna, że środkiem krzywizny okręgu koła we wszystkich punktach jest jego środek, a promienie krzywizny mają tę samą stałą wartość, jako promienie koła.

Przy wykreślaniu *elipsy* należy się liczyć z tem, iż jej krzywizna wzrasta stopniowo (t. j. promień krzywizny maleje) od każdego końca osi małej do końca osi wielkiej. Krzywizna w tych czterech punktach, zwanych *wierzchołkami* elipsy, daje się wyznaczyć na podstawie twierdzenia:

Aby otrzymać środki krzywizny w dwu sąsiednich wierzchołkach elipsy, należy z punktu przecięcia stycznych w tych wierzchołkach (równoległych do osi) wykreślić prostopadłą do prostej, która je łączy i znaleźć jej punkty przecięcia z osiami (p. rys. 114).



Rys. 114.

Konstrukcya środków krzywizny w wierzchołkach elipsy umożliwia przybliżone wykreślenie tej krzywej zapomocą cyrkla, bez wyznaczania szeregu punktów. W tym celu przesuwamy środki kół *z położeń* $O_1$, $O_2$.... nieco ku środkowi [1]) — w tym celu aby osiągnąć możliwie największe przybliżenie nietylko w najbliższej okolicy samych wierzchołków ale na pewnej większej przestrzeni — i zataczając łuki dokoła otrzymanych w ten sposób punktów $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, łączymy je z sobą niewielkimi łukami pośrednimi.

## ĆWICZENIA.

1. Punkt przebiega okrąg, zawierający środek rzutu $S$, poczynając od pewnego dowolnego położenia $A$. Opisać dokładnie, co się dzieje jednocześnie z rzutem tego punktu w każdym z dwu przypadków: 1) okrąg jest styczny do płaszczyzny zniknienia w punkcie $S$; 2) okrąg przebija płaszczyznę zniknienia w dwu punktach: $S$ i $B$. Wskazówka. W pierwszym przypadku przebieg jednokrotny, w drugim - dwukrotny wzdłuż prostej, stanowiącej rzut.

2. Jeżeli środek rzutu leży w płaszczyźnie rzutu: $S \subset \Pi$, to za rzut każdego punktu, nie należącego do $\Pi$, należy uważać sam punkt $S$, rzutem zaś jakiegoś punktu $A$ płaszczyzny $\Pi$ może być nazwany każdy punkt prostej $[SA]$. Zgodnie z tem, stwierdzić, w co się zmieniają w tych warunkach rzuty koła, nie przecinającego płaszczyzny $\Phi \equiv \Pi$, przebijającego ją w dwu punktach lub stycznego. Otrzymane utwory stanowią „zwyrodnienia" czyli postacie graniczne krzywych drugiego rzędu (t. j. elipsy, hiperboli i paraboli). Zwrócić uwagę na to, jak rzuty zmierzają stopniowo do tych kształtów przy zbliżaniu płaszczyzny $\Phi$ i związanego z nią koła do $\Pi$.

3. Pewna krzywa płaska przebija płaszczyznę zniknienia $\Phi$ w 4-ch punktach $A$, $B$, $C$, $D$. Co stąd wynika w stosunku do rzutu tej krzywej?

4. Rzut środkowy lub równoległy każdej krzywej drugiego rzędu jest również jedną z krzywych drugiego rzędu. Uważając to za rzecz dowiedzioną, rozważyć, w jaki sposób np. rzutem środkowym hiperboli może być elipsa lub parabola i t. p. (wogóle 9 możliwych kombinacyi, jeżeli uważamy koło za szczególny gatunek elipsy i nie przesuwamy nigdy płaszczyzny krzywej przez środek rzutu).

---

[1]) Uwaga prof. R. Staudigla, cytowana przez E. Müllera, Lehrbuch etc. I, str. 138.

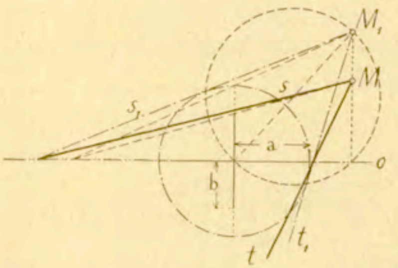
5. Środek koła leży w odległości **a** od płaszczyzny poziomej rzutów $\Pi_1$, a w odległości **b** — od pionowej $\Pi_2$. Płaszczyzna koła jest: a) równoległa do $\Pi_1$; b) równoległa do $\Pi_2$. Wykreślić w obu przypadkach rzuty koła (oczywiście tak, jak wyglądają po sprowadzeniu do jednej płaszczyzny rysunku). Zbadać przebieg obu rzutów, odpowiadający całkowitemu obrotowi.

6. Płaszczyzna koła jest równoległa do $\Pi_1$; $\Pi_1 \perp \Pi_2$; kierunek rzutu na $\Pi_2$ ma być równoległy do $\Pi_1$, kierunek rzutu na $\Pi_1$ ma być zupełnie dowolny. Wykreślić rzuty obwodu koła — jaka różnica w wynikach pomiędzy tym przypadkiem, a przypadkiem a) z poprzedniego zadania?

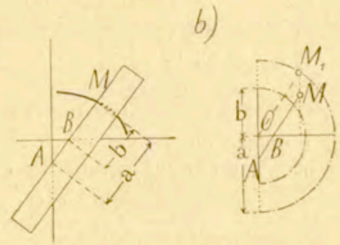
7. Płaszczyzna koła tworzy z płaszczyzną rzutów kąt $\theta = 30^0$; promień koła **r**=4 *cm*. Znaleźć oś wielką i małą elipsy, stanowiącej rzut prostokątny obwodu tego koła. To samo, gdy $\theta = 45^0$ lub $60^0$.

8. Elipsa, której oś wielka=2**a**, oś mała=2**b**, jest rzutem prostokątnym pewnego okręgu. Wyznaczyć promień tego okręgu i kąt nachylenia $\theta$ jego płaszczyzny do płaszczyzny rzutów. Przykłady: 1) **a**=3 *cm.*, **b**=1,5 *cm.*; 2) **a** = 3,5 *cm.*, **b** = 2 *cm.*; 3) **a** = 4 *cm.*, **b** = 1 *cm.*

9. Jest dana sama elipsa bez linii pomocniczych; wyznaczyć: 1) kierunek sprzężony względem tej elipsy z jakimś danym kierunkiem; 2) środek elipsy.



Rys. 115.



Rys. 116.

10. Są dane osie elipsy: 1) 2 **a**=8 *cm.*, 2 **b** = 3 *cm.*; 2) 2 **a**=8 *cm.*, 2 **b** = 5 *cm.*; 3) 2 **a** = 8 *cm.*, 2 **b** = 7 *cm.* Wykreślić elipsę zapomocą pierwszej ze wskazanych konstrukcyi.

11. W tych samych przypadkach użyć ogólnej konstrukcyi kolineacyjnej.

12. Są dane: osie elipsy 2 **a** i 2 **b** oraz dowolny punkt $M$. Wyznaczyć styczną z punktu $M$ do elipsy.

Wskazówka. Wyznaczyć punkt $M_1$, odpowiadający punktowi $M$ przy przekształceniu elipsy w obwód koła (o promieniu **r** = **a**) i wykreśliwszy z punktu $M_1$ styczne ($s_1$, $t_1$ na rys. 115) do koła, wyznaczamy proste ($s$, $t$), odpowiadające im w przekształceniu odwrotnem. Roztrząsanie.

13. Mamy dane: Osie elipsy oraz szereg punktów $M$, $N$...., położonych na jakiejś prostej. Wykreślić łuk elipsy, jako obwiednię stycznych do elipsy z punktów $M$, $N$.... (t. j. jako linię styczną do otrzymanych prostych).

14. Nadać tej konstrukcyi większą dokładność, wyznaczając jeszcze punkty styczności.

15. Są dane: osie elipsy i prosta $m$. Znaleźć, bez wykreślania elipsy, punkty przecięcia tej krzywej z $m$.

16. Wykreślić elipsę zapomocą wyznaczenia dostatecznej liczby jej punktów, gdy jest dana para średnic sprzężonych, spełniających następujące warunki: 1) stosunek ich $\mathsf{m}=2$, kąt pomiędzy niemi $\alpha=45^0$; 2) $\mathsf{m}=3$, $\alpha=30^0$; 3) $\mathsf{m}=1^1/_4$, $\alpha=70^0$. Użyć przytem konstrukcyi z rys. 111.

17. W tych samych przypadkach zastosować ogólną konstrukcyę kolineacyjną.

18. Są dane: osie elipsy lub para jej średnic sprzężonych. Wyznaczyć, bez wykreślania krzywej, kierunek sprzężony z kierunkiem danej prostej $m$, przechodzącej np. przez środek elipsy. Wskazówka: Odpowiednie kierunki w układzie koła winny być prostopadłe.

19. Istnieje bardzo szybki sposób wykreślania elipsy podług danej osi wielkiej i małej, zwany *konstrukcyą zapomocą skrawka papieru*. Na prostym brzegu kawałka papieru, otrzymanym np. zapomocą załamania, odmierzamy od punktu $M$ długość osi wielkiej $\mathsf{a}=MA$ oraz małej $\mathsf{b}=MB$ i przesuwamy następnie papier w ten sposób, aby punkt $A$ dotykał stale jednej, a punkt $B$—drugiej z dwu prostych prostopadłych $[OY]$ i $[OX]$. W takim razie punkt $M$ zakreśli elipsę o osi wielkiej wzdłuż prostej $[OX]$, (po której poruszał się punkt $B$, koniec odcinka, równego *małej osi*) i osi małej wzdłuż $[OY]$ (po której poruszał się punkt $A$, . . . .). Uzasadnić tę konstrukcyę (p. rys. 116 b), na którym prosta $[MA] \parallel [M_1O]$), i zastosować np. do danych liczbowych z ćwicz. 10-go.

20. Są dane dwa punkty $F_1$ i $F_2$ w odległości$=2\mathsf{c}$, które mają stanowić ogniska elipsy. oraz odcinek $2\mathsf{a}$, który ma stanowić oś wielką. Znaleźć oś małą i wykreślić elipsę. Roztrząsnąć możliwe przypadki.

21. Są dane: odległość $F_1F_2=2\mathsf{c}$ i oś mała $2\mathsf{b}$. Znaleźć oś wielką $2\mathsf{a}$ i wykreślić elipsę. Roztrząsanie.

22. Dowieść zapomocą rachunku, że z określenia elipsy, jako rzutu prostokątnego koła, wynika własność dowolnego jej punktu $D$, wyrażona przez równość: $F_1D+F_2D=2\mathsf{a}$ ($F_1$, $F_2$ — ogniska, $2\mathsf{a}$ — oś wielka, p. § 34). Nawzajem: miejsce geometryczne punktów, których suma odległości od dwu punktów stałych jest stała, może być uważane za rzut prostokątny okręgu. (Wskazówka— w § 34-ym).

23. Wykreślić — w granicach danego obszaru płaszczyzny rysunku — miejsce geometryczne punktów, spełniających ten warunek, że różnica ich odległości od dwu danych punktów $F_1$ i $F_2$ jest stała, równa danemu odcinkowi $2\mathsf{a}$ (t. j. punktów $M$ takich, że $F_1M - F_2M = \pm 2\mathsf{a}$). Jest to *hiperbola*. Stwierdzić na rysunku i okazać zapomocą wnioskowania z użytej własności krzywej, że składa się ona z dwu gałęzi, że posiada, jak elipsa, dwie osie symetryi prostokątnej i środek symetryi; że się oddala w nieskończoność w dwu kierunkach, tworzących kąty równe z $[F_1F_2]$.

24, 25. Proste, przeciągnięte przez środek symetryi hiperboli i posiadające kierunki, wymienione w poprzedniem ćwiczeniu, nazywają się *asymptotami hiperboli*— nie przecinają one krzywej w żadnym punkcie w odległości skończonej i zbliżają się do niej dowolnie w miarę oddalania się od środka. W geometryi analitycznej uzasadnia się własność asymptot, polegająca na tem, że odcinki wszelkiej siecznej, zawarte odpowiednio pomiędzy asymptotami, są równe. Innemi słowy: jeżeli punkty $A$ i $B$ są to punkty przecięcia się siecznej z asymptotami, a $M$ i $P$—z krzywą, to $AM=PB$ (więc i $AP=MB$ i nawzajem). Użyć tej własności do rozwiązania dwu zadań następujących:

24. Wykreślić hiperbolę, gdy są dane jej asymptoty $a$ i $b$ oraz jeden punkt $M$.

25. Są dane: 3 punkty hiperboli i jedna z asymptot. Wyznaczyć drugą asymptotę i kilka innych punktów krzywej.

26. $F$ oznacza dany punkt, $a$ — daną prostą. Wykreślić (w granicach płaszczyzny rysunku) miejsce geometryczne punktów, jednakowo oddalonych od $a$ (odległość liczymy, jak zwykle, wzdłuż prostopadłej) i $F$. Będzie to parabola. Zbadać jej własności—podobnie jak w ćw. 23-iem własności hiperboli.

27. Zastosować sposób wykreślenia przybliżonego elipsy zapomocą łuków koła do przykładów z ćw. 10-go.

## ROZDZIAŁ VII.

# Zamiana płaszczyzn rzutu. Rzut boczny. Metoda obrotów.

§ 36. **Uwagi wstępne. Zamiana płaszczyzn rzutu.** Jak stwierdzaliśmy już poprzednio, rzuty $a'$ i $a''$ prostej $a$ na dwie płaszczyzny niezawsze wyznaczają tę prostą, a ślady płaszczyzny niezawsze wyznaczają płaszczyznę. Dzieje się to mianowicie wtedy, gdy mamy do czynienia z prostą o kierunku, prostopadłym do osi rzutów (p. § 17, 4) lub z płaszczyzną, przechodzącą przez oś (§ 25, 3a). Jeżeli takie położenia prostej czy płaszczyzny można nazwać niedogodnemi, to z drugiej strony istnieją pewne położenia prostej czy płaszczyzny, wyjątkowo dogodne. Tak np. jeżeli odcinek jest równoległy do jednej z płaszczyzn rzutów, to długość odpowiedniego rzutu równa się długości samego odcinka, a kierunek jego (po sprowadzeniu płaszczyzn do położenia prostopadłego) jest równoległy do kierunku odcinka w przestrzeni. Gdy płaszczyzna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów (§ 25, 1, 2, 4, 5), to odpowiednie rzuty wszystkich punktów, położonych na tej płaszczyźnie, leżą na odpowiednim śladzie płaszczyzny. Widzieliśmy np. w § 28, I a), jak takie położenie ułatwia konstrukcye.

Uwzględniając podobne wypadki, zdajemy sobie łatwo sprawę z tego, że bywa nieraz dogodnie zmienić *położenie wzajemne jakiegoś utworu geometrycznego i układu płaszczyzn rzutów*. Można to osiągnąć w dwojaki sposób: 1) zapomocą wprowadzenia nowych płaszczyzn rzutów, co jest równoważne poruszeniu którejś z początkowo danych płaszczyzn rzutów bez zmiany miejsca, zajmowanego w przestrzeni przez dany utwór, 2) zapomocą nadania rozważanemu utworowi pewnego ruchu względem płaszczyzn rzutów, uważanych za nieruchome. Pierwsza z tych metod nazywa się *metodą zamiany płaszczyzn rzutów*, druga sprowadza się głównie do tego, co nosi nazwę *metody obrotów*.

Przypuśćmy, że mając do czynienia z rzutami i t. d. na dwu płaszczyznach rzutów $\Pi_1$ i $\Pi_2$, poziomej i pionowej, wprowadzamy jeszcze trzecią $\Pi_3$, prostopadłą do $\Pi_2$, i że chodzi o przejście od układu płaszczyzn prostopadłych ($\Pi_1$, $\Pi_2$) do takiegoż układu ($\Pi_2$, $\Pi_3$). Na płaszczyźnie rysunku wystarczy wykreślić jedynie ślad pionowy płaszczyzny $\Pi_3$, który oznaczymy przez $x_{2\,3}$ (podobnie jak oś rzutów $x=[\Pi_1\Pi_2]$ możemy, dla większej ścisłości i jednolitości, oznaczyć przez $x_{1\,2}$); ślad poziomy, prostopadły do $x=x_{1\,2}$, nie będzie potrzebny. Część płaszczyzny $\Pi_3$, położoną przed $\Pi_2$, będziemy uważali za dodatnią, część położoną poza $\Pi_2$, z tyłu, za ujemną. Jeżeli dalej płaszczyznę poziomą i rzuty poziome nazwiemy „odrzuconymi“ przy przejściu od układu ($\Pi_1$, $\Pi_2$) do układu ($\Pi_2$, $\Pi_3$), a płaszczyznę $\Pi_3$ i odpowiednie rzuty określimy jako „nowe“, to potrafimy łatwo uzasadnić w danym przypadku twierdzenie:

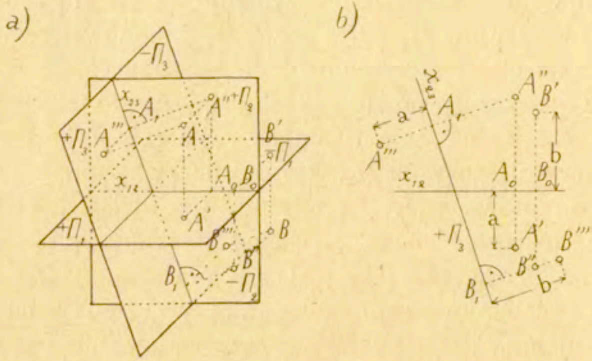
1. *Odległość nowego rzutu punktu od nowej osi* ($x_{2\,3}$) *równa się co do wielkości i znaku odległości odrzuconego rzutu od dawnej osi* ($x=x_{1\,2}$).

Istotnie (§ 10, tw. 3) w układzie ($\Pi_1$, $\Pi_2$) $A''A = A_0A'$, a w układzie ($\Pi_2$, $\Pi_3$) $A''A=A_1A'''$ (znak $'''$ służy do odróżnienia rzutów na $\Pi_3$); stąd wynika, że $A_0A' = A_1A'''$; przytem znak $=$ stosuje się wciąż i do wielkości bezwzględnej i do znaku.

Aby umieścić wszystkie rzuty na jednej płaszczyźnie rysunku, wyobrażamy sobie, że płaszczyzna $\Pi_3$ zostaje zapomocą obrotu dokoła $x_{2\,3}$ doprowadzona do nakrycia płaszczyzny $\Pi_2$, przytem kierunek obrotu może być dowolny. Umawiamy się np., że część dodatnia $+\Pi_3$ ma leżeć na lewo od $x_{2\,3}$, część ujemna $-\Pi_3$ — na prawo. Uczyniwszy tę umowę, możemy łatwo rozwiązać zadanie typowe:

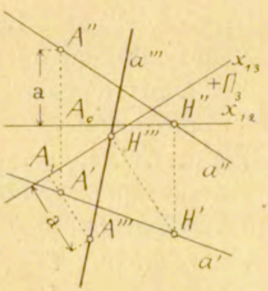
1. *Są dane rzuty: poziomy $A'$ i pionowy $A''$ punktu $A$ oraz osie $x=x_{1\,2}=[\Pi_1\Pi_2]$ i $x_{2\,3}=[\Pi_2\Pi_3]$, przytem $\Pi_3\perp\Pi_2$. Wyznaczyć rzut boczny $A'''$ punktu $A$ na $\Pi_3$* (rys. 117 b).

Zgodnie z twierdzeniem 2 z § 10-go, $A'''$ musi leżeć na prostopadłej [$\supset A''\perp x_{2\,3}$] z punktu $A''$ do $x_{2\,3}$, a zgodnie z tw. 1-em niniejszego paragrafu w odległości od $x_{23}$, równej co do wielkości i znaku odległości $A_0A'$ punktu $A'$ od osi $x \equiv x_{12}$, która np. w danym przypadku (p. § 13) jest dodatnia, jako odmierzona w dół od $x$; $A'''$ musi tedy leżeć z lewej strony osi $x_{23}$, stosownie do za-




Rys. 117.

wartej umowy. Wykreślamy tedy prostą $[\supset A'' \perp x_{23}]$ i od jej punktu przecięcia $A_1$ z osią $x_{23}$ odmierzamy (na lewo) $A_1A''' = A_0A' =$ a. Odległość $B_1B'''$ musi mieć zwrot przeciwny — na prawo od $x_{23}$, ponieważ $B_0B''$ jest ujemne (p. § 13). Jeżeli nowa płaszczyzna rzutów $\Pi_3$ jest prostopadła nie do $\Pi_2$, lecz do $\Pi_1$, to za część dodatnią $+\Pi_3$ należy uważać tę, która leży ponad $\Pi_1$, a za część ujemną—tę, która leży pod $\Pi_1$. Twierdzenie 1 pozostaje ważnem. Rozwiązanie zadania typowego odbywa się w sposób zupełnie analogiczny, z tą różnicą, że sprowadzamy wszystko do płaszczyzny poziomej, umawiając się, z której strony $x_{13}$ ma leżeć część $\Pi_1$ nakryta przez $+\Pi_3$, a z której—część nakryta przez $-\Pi_3$ [1]), oraz odmierzając, zgodnie z tem od osi $x_{13} \equiv [\Pi_1 \Pi_3]$ na prostej $[\supset A' \perp x_{13}]$ ogległość $A_1A'''$, równą co do wielkości i znaku odległości $A_0A''$ (p. rys. 118).



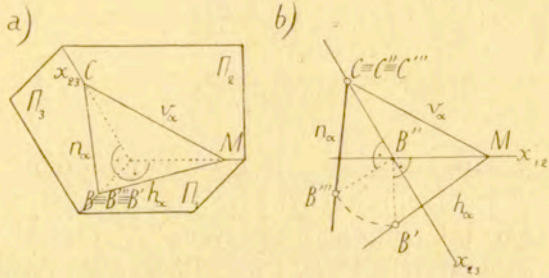
Rys. 118.

[1]) Co do $\Pi_2$, zgodnie z zawartą dawniej umową $+\Pi_2$ nakrywa $-\Pi_1$, a $-\Pi_2$ nakrywa $+\Pi_1$.

Wyznaczając nowe rzuty dwu punktów np. $A$ i $H$ na rys. 118, znajdujemy *nowy rzut prostej* $a \equiv [AH] : a''' \equiv [A'''H''']$. To samo stosuje się do figury, wyznaczonej zapomocą dowolnej liczby punktów. Rozwiążmy jeszcze zadanie:

2. Są dane: ślad poziomy i ślad pionowy płaszczyzny $\alpha$. Wyznaczyć nowy ślad $n_\alpha \equiv [\alpha \Pi_3]$ tej płaszczyzny na płaszczyźnie $\Pi_3$, prostopadłej do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$.

W obu przypadkach $n_\alpha$ daje się wyznaczyć zapomocą punktów $B$ i $C$, z których $B$ stanowi przecięcie $h_\alpha$ i prostej $[\Pi_1 \Pi_3]$, a $C$ jest punktem przecięcia $v_\alpha$ z prostą $[\Pi_2 \Pi_3]$; istotnie $B \subset h_\alpha$, więc $B \subset \alpha$, a że $B \subset [\Pi_1 \Pi_3]$ i przez to $B \subset \Pi_3$, zatem $B \subset [\alpha \Pi_3]$; podo-




Rys. 119.

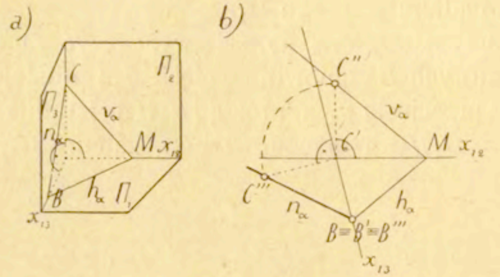
bnież $C \subset [\alpha \Pi_3]$ czyli $\subset n_\alpha$, i ostatecznie $[BC] \equiv [\alpha \Pi_3] \equiv n_\alpha$. Wyznaczając zgodnie z ogólnem prawidłem $B'''$ i $C'''$, łączymy tedy te punkty, i prosta $n_\alpha''' \equiv [B'''C''']$ może być oznaczona krócej jako $n_\alpha$. Rzecz jasna, iż gdy $\Pi_3 \perp \Pi_2$ (rys. 119), to $C'' \equiv C''' \equiv [v_\alpha x_{23}]$; $B'' \equiv [x_{12} x_{23}]$, $B'$ stanowi[1]) punkt przecięcia $h_\alpha \equiv h_\alpha'$ z prostą $[\supset B'' \perp x_{12}$; gdy $\Pi_3 \perp \Pi_1$ (rys. 120), $C' \equiv [x_{12} x_{13}]$, $C''$ stanowi punkt przecięcia $v_\alpha \equiv v_\alpha''$ z prostą $[\supset C' \perp x_{12}]$, $B' \equiv B''' \equiv [h_\alpha x_{13}]$.

Od rzutów na płaszczyznę $\Pi_3$, prostopadłą do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, możemy dalej przejść do rzutów na płaszczyznę $\Pi_4 \perp \Pi_3$, potem

---

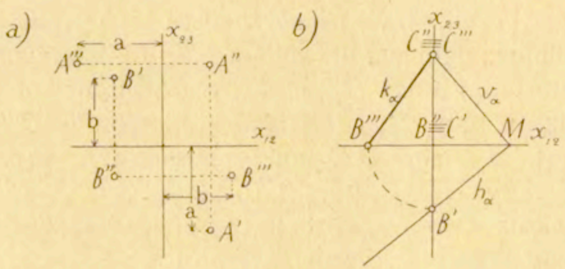
[1]) Przed sprowadzeniem płaszczyzn rzutów do tej samej płaszczyzny [p. rys. 119 a)] $B \equiv B' \equiv B'''$; rozdział tych punktów $B'$ i $B'''$ na rys. 119] b) pochodzi z tego, że prosta $[\Pi_1 \Pi_3]$, do której należy $B$, przybiera, po sprowadzeniu $\Pi_1$ i $\Pi_3$ do $\Pi_2$ inne położenie, gdy ją zaliczamy do $\Pi_1$, a inne znów, gdy jest zaliczona do $\Pi_3$. Z takiem „rozdwojeniem" prostych i punktów należy się liczyć nieraz w zadaniach, w których występuje zamiana płaszczyzn rzutów.

na $\Pi_5 \perp \Pi_4$ i t. d. Nie ustalając koniecznie z góry wyboru kierunków dodatnich i ujemnych, winniśmy przytem baczyć na to, by rzutom „odrzucanym", leżącym po tej samej stronie dawnej osi, odpowiadały nowe rzuty, położone po tej samej stronie nowej osi, a rzutom, położonym z różnych stron – nowe, położone także z różnych stron.




Rys. 120.

§ 37. **Przypadek szczególny: rzut boczny.** *Zastosowania.* I. W szczególności bywa rzeczą dogodną użycie t. zw. *rzutu bocznego*, t. j. rzutu na płaszczyznę $\Pi_3$, prostopadłą do osi rzutów $x_{12}$, więc zarazem do $\Pi_1$ i $\Pi_2$. Będziemy zakładali, w celu ustalenia konstrukcyi, że $\Pi_3$ zostaje przyłożone do $\Pi_2$, i przytem




Rys. 121.

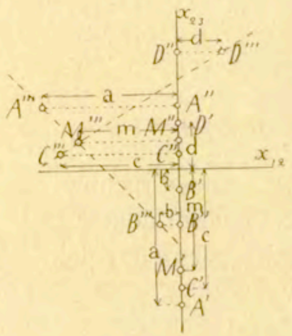
w ten sposób, że część dodatnia t. j. przednia $+\Pi_3$ przystaje do części płaszczyzny $\Pi_2$, położonej na lewo od $x_{23}$.

Konstrukcya rzutu bocznego punktu podług rzutów poziomego i pionowego oraz konstrukcya śladu $k_\alpha = [\alpha \Pi_3]$, gdy są dane $h_\alpha$ i $v_\alpha$, nie wymaga już, po tem, cośmy omówili w poprzednim paragrafie, zasadniczych wyjaśnień [rys. 121 a) i b)].

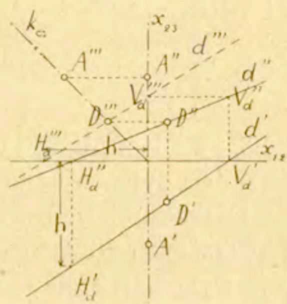
Zastosujmy rzut boczny do rozwiązania następujących zadań:

1. *Wyznaczyć punkt przecięcia M dwu prostych [AB] i [CD], położonych w tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutów $x_{12}$.*

Obierając dowolnie płaszczyznę $\Pi_3 \perp x_{12}$, więc równoległą do pł. $\big[[AB]\,[CD]\big]$ — w szczególności, co upraszcza znacznie konstrukcyę, biorąc $\Pi_3 \equiv \big[[AB]\,[CD]\big]$, więc $x_{23} \equiv [A'B'] \equiv [A''B''] \equiv$ i t. d. (p. rys. 122) — wyznaczamy rzuty boczne $A'''$, $B'''$, $C'''$, $D'''$. Wtedy możemy rozwiązać zadanie w układzie dwu rzutów: pionowego i bocznego. Otrzymujemy $M''' \equiv \big[[A'''B''']\,[C'''D''']\big]$ i zapomocą prostopadłej do $x_{23}$ rzut $M''$ (na $[A''B'']$ i t. d.), a stąd — rzut $M'$, położony w takiej samej (co do wielkości i znaku) odległości od $x_{12}$, jak $M'''$ od $x_{23}$.



Rys. 122.



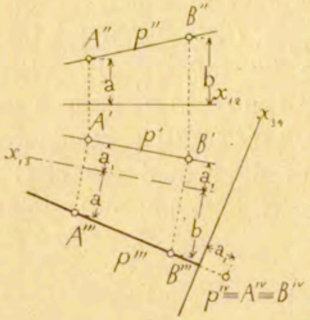
Rys. 123.

2. *Wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny $\alpha$, przechodzącej przez oś rzutów $x$ i dany punkt $A$, przez dowolną prostą $d$.* Bierzemy w tym celu pł. boczną $\Pi_3$, zawierającą $A$, i znajdujemy rzut boczny $d'''$ oraz ślad boczny $k_\alpha$. Rozwiązujemy następnie zadanie, jak w § 28, w układzie $(\Pi_2, \Pi_3)$ i od rzutu $D'''$ punktu $D \equiv [\alpha d]$ przechodzimy do $D'$ i $D''$ (rys. 123).

Widzimy, że metoda ogólna w zadaniach tego rodzaju polega na przejściu do nowego układu $(\Pi_2, \Pi_3)$, rozwiązaniu w tym układzie zadania jednym ze znanych już sposobów, a następnie na powrocie do dawnego układu $(\Pi_1, \Pi_2)$.

*II. 1. Dokonać takiej zamiany płaszczyzn rzutów, ażeby jedna z nich była równoległa do danej prostej.*

Wystarczy wprowadzić w tym celu albo taką płaszczyznę $\Pi_3$, prostopadłą do $\Pi_1$, iż oś $[\Pi_1\Pi_3] \equiv x_{13}$ jest równoległa do rzutu poziomego $a'$ danej prostej, albo też płaszczyznę, prostopadłą do $\Pi_2$ i przecinającą $\Pi_2$ wzdłuż prostej $\parallel a''$. Istotnie, jeżeli np. $x_{1\,3} \parallel a'$, to, jakiekolwiek położenie otrzymałby rzut $a'''$, prosta $a$ musi być $\parallel \Pi_3$ (§ 17). Konstrukcya ulega uproszczeniu, jeżeli bierzemy: $x_{1\,3} \equiv a'$ lub $x_{2\,3} \equiv a''$, t. j. jeżeli bierzemy za trzecią płaszczyznę rzutów jedną z dwu płaszczyzn rzutujących na płaszczyzny pierwotnie dane.




Rys. 124.

2. *Przejść do takiego układu płaszczyzn rzutów, iżby dana prosta była prostopadła do jednej z nich.*

W tym celu należy wprowadzić z początku płaszczyznę $\Pi_3$, równoległą do danej prostej $p$, a prostopadłą do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$ (zadanie poprzednie). Weźmy $\Pi_3 \perp \Pi_1$. Następnie możemy już wprowadzić płaszczyznę $\Pi_4$ prostopadłą do $p$, a więc również prostopadłą do $\Pi_3$: jej ślad na $\Pi_3$, t. j. $[\Pi_3\Pi_4] \equiv x_{3\,4}$ w układzie $(\Pi_1, \Pi_3)$ musi być prostopadły (§ 26) do rzutu $p'''$; $p^{IV} \equiv A^{IV} \equiv B^{IV}$ stanowi punkt, położony na $p'''$ w odległości od $x_{3\,4}$, równej odległości $A'$, $B'$ i wogóle dowolnego punktu prostej $p'$ od $x_{2\,3}$.

§ 38. **Przesunięcie równoległe. Obrót dokoła osi.** I. Istnieją dwa typy zasadnicze przekształceń ruchowych, a mianowicie: 1) przesunięcie równoległe; 2) obrót dokoła osi.

Przesunięciem równoległem figury nazywamy takie jej przekształcenie, czyli, jak się mówi zwykle, taką zmianę jej miejsca, przy której każdy z punktów zostaje przesunięty w tym samym kierunku i o tę samą odległość. Jeżeli $A$, $B$, $C \ldots.$ oznaczają punkty w ich położeniu początkowem, a $A_1$, $B_1$, $C_1 \ldots.$ położenia końcowe tych punktów po przesunięciu równoległem, to:

$$[AA_1] \parallel [BB_1] \parallel [CC_1] \text{ i t. d.} \ldots, \quad AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots.;$$

a przeto również, w ogólności:

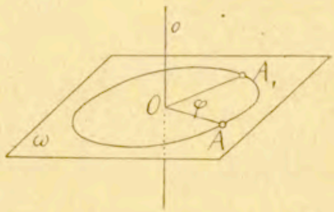
$$[A'A_1'] \parallel [B'B_1'] \parallel [C'C_1'] \ldots., \quad A'A_1' = B'B_1' = C'C_1' = \ldots.,$$

$$[A''A_1''] \parallel [B''B_1''] \parallel [C''C_1''] \ldots., \quad A''A_1'' = B''B_1'' = C''C_1'' = \ldots.$$

Związki powyższe wystarczają do rozwiązania zasadniczych zagadnień, dotyczących przesunięcia równoległego (p. ćwiczenia do tego rozdziału).

Ponieważ oba rzuty, równie jak sama figura w przestrzeni, nie zmieniają przy przesunięciu równoległem wielkości ani kształtu, przeto przekształcenie to, użyte jako środek pomocniczy, sprawia jedynie, że rzuty zostają zbliżone lub rozsunięte. Taki sam wpływ zresztą na położenie wzajemne dwu rzutów oraz ich położenie względem osi wywiera zamiana dwu płaszczyzn rzutów (lub jednej z nich) na płaszczyzny odpowiednio równoległe, stanowiąca tylko odmianę szczególną metody zamiany płaszczyzn rzutów. Nie mając zatem dostatecznych powodów praktycznych do szczegółowszego badania tego rodzaju ruchu, przejdźmy do typu daleko ważniejszego ze względu na zastosowania, jakie chcemy uczynić, a mianowicie do obrotu dokoła osi.

II. Obrót dokoła pewnej stałej prostej $o$, stanowiącej t. zw. oś obrotu, jest to takie przekształcenie ruchowe, przy którem odcinek, prostopadły do osi, przeciągnięty aż do niej z dowolnego punktu figury, ulegającej przekształceniu, odchyla się od położenia pierwotnego w określonym kierunku o pewien kąt $\varphi$, jednakowy dla wszystkich punktów figury, nie zmieniając przy tem swej długości i nie przestając być prostopadłym do osi. Odcinek ten nazywamy *promieniem obrotu*, odpowiadającym danemu punktowi figury; we wszystkich możliwych położeniach, odpowiadających różnym wartościom kąta $\varphi$, jest on położony w płaszczyźnie, prostopadłej do osi $o$, zwanej *płaszczyzną obrotu* danego punktu; wreszcie, jego koniec, położony na osi, stanowi *środek obrotu* dla danego punktu. Punktom, położonym w tej samej płaszczyźnie obrotu, odpowiada ten sam środek obrotu i nawzajem — jedynie oś i kąt obrotu $\varphi$ są to dane bezwzględnie stałe, jednakowe dla wszystkich punktów figury. Wyobraźmy sobie, że nadajemy kątowi obrotu $\varphi$ wszystkie możliwe wartości, od $o$ — w położeniu pionowem do kąta pełnego; miejscem geometrycznem różnych odpowiednich położeń jakiegoś punktu $A$ figury będzie okrąg, położony w odpowiedniej płaszczyźnie obrotu, zakreślony odpowiednim promieniem dokoła odpowiedniego środka. Nazwijmy go torem całkowitym punktu $A$. Rozwiążmy teraz zadanie następujące:

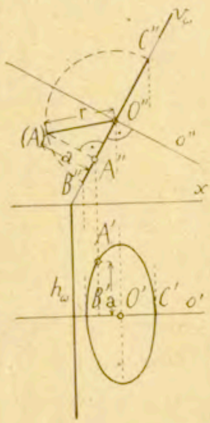


Rys. 125.

Są dane: rzuty $o'$ i $o''$ osi obrotu oraz rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$. Wyznaczyć: odpowiednią płaszczyznę obrotu, środek $O$ i długość $r$ promienia obrotu. Wykreślić rzuty całkowitego toru punktu $A$.

Wszystko się sprowadza do zadań, już rozwiązanych: a) $\omega \equiv [\supset A \perp o]$ (zad. 6 z § 26-go); b) $O \equiv [\omega\, o]$; c) $r = OA$ (§ 18); d) rzuty koła przy danych $O$, $\omega$ i $r$ potrafimy wykreślić według § 32-go. Zadanie znakomicie się upraszcza, gdy oś obrotu jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutu; w takim razie rzutem promienia obrotu $r$ na tę płaszczyznę, w jego położeniu pierwotnem, jest prostopadła do odpowiedniego rzutu osi, wykreślona z odpowiedniego rzutu punktu $A$ [p. § 28, II a)]; prostopadła ta przystaje do odpowiedniego śladu płaszczyzny obrotu; odkładając na tym śladzie w obie strony od punktu przecięcia się z rzutem osi, t. j. od rzutu środka obrotu $O$, długość promienia obrotu $OA$, otrzymujemy odcinek, stanowiący rzut koła obrotu, z warunkiem, że jest przebiegany dwukrotnie.

Zauważmy przytem, że sposób ogólny (p. § 18) wyznaczenia długości odcinka daje się tutaj ująć w postaci prawa następującego, bardzo dogodnego do zapamiętania:



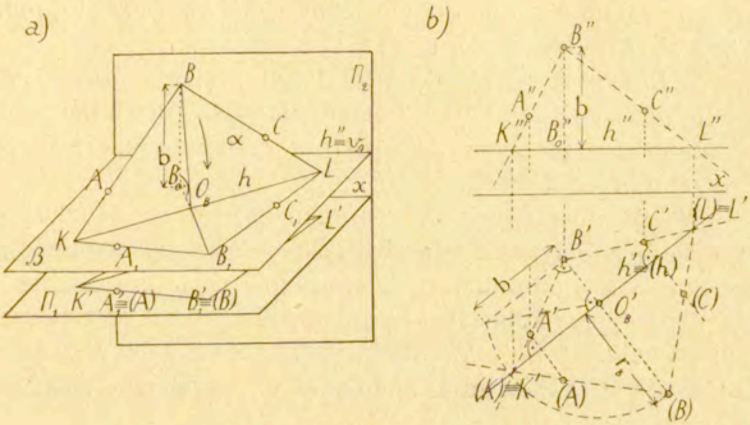
Rys. 126.

*Promień obrotu, odpowiadający dowolnemu punktowi A, stanowi przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne są równe odległościom rzutów punktu od rzutów osi obrotu:* istotnie w trójkącie pomocniczym $A''O''(A)$ przyprostokątna $O''A''$ jest to odległość $A''$ od $o''$, a przyprostokątna $A''(A) = a$ równa się odległości $A'$ od $o'$.

Rzuty punktu $O$ i prostej $r$ na drugą płaszczyznę rzutu otrzymujemy bezpośrednio; rzut koła obrotu — sposobem wskazanym przy końcu § 32-go. Np. na rys. 126 $o \parallel \Pi_2$.

§ 39. **Metoda kładów.** Wykonać kład jakiejś płaszczyzny $\alpha$ na inną płaszczyznę $\beta$, to znaczy obrócić pł. $\alpha$ dokoła śladu $[\alpha\beta]$ $\alpha$ na $\beta$ w ten sposób, iżby przystała do $\beta$. Zakładamy przytem, że płaszczyzna $\beta$ jest jedną z płaszczyzn, równoległych do płaszczyzn rzutu. Przypuśćmy, że kładziemy płaszczyznę $\alpha$ na płaszczyznę $\beta \parallel \Pi_1$ lub $\equiv \Pi_1$; nowy rzut poziomy jakiegoś punktu $A$ tej płaszczyzny $\alpha$, identyczny gdy $\beta \equiv \Pi_1$ z nowem położeniem samego punktu $A$, nazwiemy *kładem poziomym punktu A* i będziemy oznaczali przez $(A)$. Takie samo określenie stosuje się do kładu pionowego; jest to nowy rzut pionowy, po sprowadzeniu obracanej płaszczyzny do płaszczyzny $\beta \parallel \Pi_2$ lub $\equiv \Pi_2$. Kład pionowy będziemy oznaczali najczęściej tak samo jak poziomy [1]). Rzecz jasna, że kład poziomy lub pionowy wszelkiej figury płaskiej równa się samej figurze (§ 6, III), i na tem właśnie polega wartość metody kładów.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z płaszczyzną $\alpha$, nachyloną do obu płaszczyzn rzutu, i że chcemy wyznaczyć kład poziomy jakiegoś zbioru punktów tej płaszczyzny (np. $A$, $B$ i $C$ na rys. 127) zapomocą obrotu dokoła jednej z jej linii poziomu $h$, dopóki $\alpha$ nie przystanie do płaszczyzny $\beta$, zawierającej $h$ i równoległej do $\Pi_1$: $\beta \equiv$ pł $[\supset h \parallel \Pi_1]$. Wyznaczmy rzuty środka obrotu $o_B$




Rys. 127.

oraz promień obrotu $\mathfrak{r}_B$, odpowiadające jakiemuś punktowi $B$ (§ 38); $\mathfrak{r}_B$ równa się przeciwprostokątnej trójkąta, którego przyprostokątne są to odległości $B'$ od $h'$ i $B''$ od $h''$; drugą z tych odległości oznaczyliśmy przez $\mathfrak{b}$. Jak wiemy, torem punktu $B'$ jest odcinek prostej, prostopadłej do $h'$: $[B'O'_B] \equiv [\supset B' \perp h']$; po dokonaniu takiego obrotu, że promień $O_B B$, wraz z całą płaszczyzną $\alpha$, staje się równoległym do $\Pi_1$, rzut poziomy tego promienia musi przybrać swą rzeczywistą długość $\mathfrak{r}_B$. A więc punkt $(B) \equiv B_1'$ odnajdujemy łatwo na $[B'O'_B]$ w odległości $\mathfrak{r}_B$ od $O_B'$, przypuśćmy, ze strony przeciwnej niż $B'$.

---

[1]) W razie potrzeby rozróżnienia kłady poziome będziemy oznaczali przez $(A)^1$, $(B)^1$.... kłady pionowe — przez $(A)^2$, $(B)^2$ i t. d. Dla odróżnienia kilku kładów poziomych lub pionowych tego samego punktu będziemy dodawali u dołu numery lub literki, oznaczające płaszczyzny, obracane przy kładzie.

Możnaby również obrać taki kierunek obrotu, by $(B)$ leżało z tej samej strony, co $B'$ — kierujemy się przy tem tylko dążeniem do uczynienia rysunku przejrzystszym lub względami estetycznemi. W każdym razie uważać trzeba na to, by punktom, położonym z tej samej strony osi obrotu $h$ (a więc mającym rzuty poziome z tej samej strony $h'$, rzuty pionowe z tej samej strony $h''$) odpowiadały kłady, położone po tej samej stronie $(h) \equiv h'$, a punktom, położonym z różnych stron $h$ — kłady, położone po różnych stronach $(h) \equiv h'$.

Zauważmy teraz, że mając kład jednego punktu, możemy nie powtarzać tej samej konstrukcyi dla innych punktów. W istocie, widzimy, co następuje:

1. Rzut poziomy każdego punktu i jego kład leżą na prostej, prostopadłej do $h'$, której odpowiedni odcinek stanowi tor punktu (§ 38): $[C'(C)] \perp h'$, $[A'(A)] \perp h'$ i t. d.

2. Punkty $K \equiv [(AB)h]$, $L \equiv [(BC)h]$ i t. d., położone na osi obrotu, pozostają na miejscu i przeto kłady, t. j. nowe rzuty poziome, po obrocie, prostych $[AB]$, $[BC]$ i t. d. muszą przechodzić odpowiednio przez $K' \equiv (K)$, $L' \equiv (L)$ i t. d.

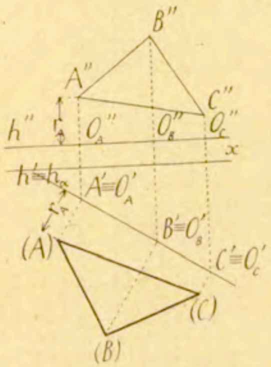
Współistnienie tych dwu warunków świadczy, że rzut poziomy i kład poziomy jakiejś figury płaskiej są ze sobą skolineowane (p. § 30). Istnieje tu mianowicie powinowactwo prostokątne, ponieważ promienie kolineacyi są prostopadłe do osi powinowactwa czyli osi kolineacyi $h' \equiv h$. Stąd wynika, że w celu wyznaczenia kładów $(A)$, $(C)$ i t. d., gdy znamy kład $(B)$, wystarczy zastosować konstrukcye (p. koniec § 30):

$$K' \equiv \big[[A'B']h'\big],\ (A) \equiv \big[[K'(B)]\ [\supset A' \perp h']\big];\ L' \equiv \big[[B'C']\,h'\big],$$
$$(C) \equiv \big[[L'(B)]\ [\supset C' \perp h']\big] \text{ i t. d.}$$

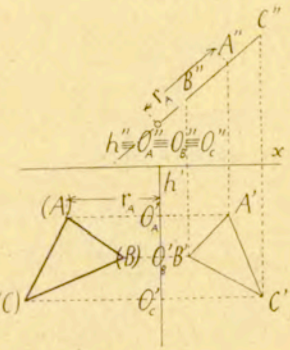
Wyznaczenie kładu poziomego płaszczyzny znacznie się upraszcza, jeżeli mamy do czynienia z płaszczyzną $\alpha$, prostopadłą a) do płaszczyzny poziomej lub b) do płaszczyzny pionowej rzutu. W pierwszym przypadku (por. rys. 128) rzuty $A'$, $B'$, $C'$.... leżą na śladzie $h_\alpha$, przystającym do rzutu $h'$ linii poziomu $h$, wziętej za oś obrotu, a danej przez ten rzut wraz z rzutem pionowym $h'' \parallel x$; linie spadku są prostopadłe do $\Pi_1$, a więc równoległe do $\Pi_2$. Stąd wynika, że rzutami ich odcinków $O_A A$, $O_B B$ i t. d., stanowiących promienie obrotu, są odpowiednio: $O_A' A' \equiv O_A' \equiv A'$ i $A'' O_A'' \perp x$ $(O_A'' \subset h'')$; $O_B' B' \equiv O_B' \equiv B'$ i $O_B'' B'' \perp x$ $(O_B'' \subset h'')$ i t. d., i że każdy z tych odcinków równa się swemu rzutowi pionowemu. W drugim przypadku osią obrotu jest prosta $h \perp \Pi_2$ (por. rys. 129); punkt $h'' \equiv O_A'' \equiv O_B'' \equiv \ldots$; rzutami poziomymi promieni obrotu $O_A A$, $O_B B$...., są odcinki $O_A' A'$, $O_B' B'$...., prostopadłe do $h'$, więc $\parallel x$; przeto każdy z tych promieni, jako równoległy do $\Pi_2$, równa się, jak poprzednio, swemu rzutowi pionowemu. W obu przypadkach tedy wystarczy odmierzyć na prostych $[\supset A' \perp h']$, $[\supset B' \perp h']$ i t. d. odcinki $O_A'(A) = O_A''A''$, $O_B'(B) \equiv O_B''B''$ i t. d. W drugim przypadku można też stosować ogólną konstrukcyę zapomocą kolineacyi. Na rys. 128 i 129 stosujemy powyższe wskazówki do trójkątów.

*Zupełnie te same rozważania, z odpowiednią zamianą oznaczeń, stosują się do kładów pionowych.*

Zauważmy jeszcze, że przy używanem przez nas określeniu kładów oś rzutu może być pomijana na rysunku, bylebyśmy umówili się co do jej kierunku (por. koniec § 24).

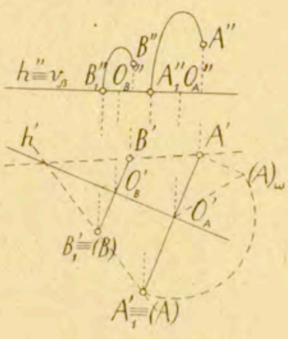



Rys. 128.

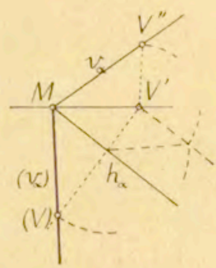



Rys. 129.

§ 40. **Ciąg dalszy.** Należy sobie uprzytamniać wyraźnie ten fakt, że kład nie jest ostatecznie niczem innem, jak tylko pewną postacią obrotu, z tem zastrzeżeniem, że wyznaczamy w praktyce tylko jeden z nowych rzutów, a drugi pomijamy. Jeżeli oznaczamy przez $A_1$, $B_1$, .... punkty $A$, $B$, .... w nowem ich położeniu, to kład poziomy $(A) \equiv A_1'$, $(B) \equiv B_1'$ i t. d. Jeżeli chcemy wyznaczyć $A_1''$, $B_1''$ i t. d., to wystarczy zwrócić uwagę na to, że płaszczyzna $\beta \parallel \Pi_1$, do której należą, zgodnie z założeniem, punkty $A_1$, $B_1$ ...., jako nowe położenia punktów $A$, $B$...., zawiera, jako $\perp \Pi_2$, wszystkie proste, rzutujące $A_1$, $B_1$ .... na $\Pi_2$, a więc $A_1''$, $B_1''$,.... leżą na śladzie $v_\beta$, równoległym do $x$. Ślad ten, z powodu że $\beta \supset h$ ($h$ jak wyżej—linia poziomu, stanowiąca oś obrotu), przystaje do $h''$ lub, gdy $h \perp \Pi_2$, a więc $h''$ jest punktem, przechodzi przez $h''$. Podajemy taką konstrukcyę na rys. 130-ym, w zastosowaniu do dwu punktów $A$ i $B$, uwydatniając tory ich rzutów, odpowiadające torom, zakreślanym przy obrocie w przestrzeni przez same punkty. Zauważmy jeszcze, że kreśląc łuk pomocniczy $(A)_\omega A'$, potrzebny do konstrukcyi rzutu pionowego podług wskazówek, podanych w § 32-im (rys. 108), wykreślamy, zgodnie z temi wskazówkami, odpowiedni łuk koła obrotu w jego rzeczywistej postaci. Stąd wynika, że $\sphericalangle (A)_\omega O_A' A_1'$ jest to właśnie kąt obrotu, równy w danym przypadku spełnieniu do $180^0$ kąta przy $O_A'$ trójkąta pomocniczego $(A)_\omega O_A' A_1'$. Przy obrocie w przeciwną stronę, tak iżby kład każdego punktu leżał z tej samej strony $h'$, co rzut, kątem obrotu byłby sam kąt przy $O_A'$ trójkąta




Rys. 130.



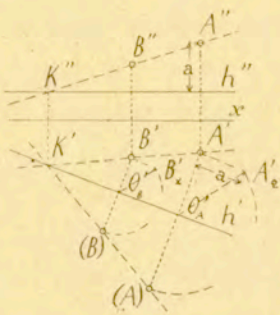

Rys. 131.

$(A)_\omega O_A' A_1'$. Zgodnie z użytą konstrukcyą i wyjaśnieniami co do 1-go przypadku szczególnego w końcu poprzedniego paragrafu, łuk $(A)_\omega A_1'$ jest kładem toru obrotu, otrzymanym przy obrocie płaszczyzny $\omega \perp \Pi_1$, zawierającej ten tor, dokoła średnicy poziomej koła obrotu; $(A)_\omega$ jest kładem punktu $A$, otrzymanym przy tem założeniu. Bardzo łatwo zdać sobie sprawę z tych szczególnych okoliczności, które zachodzą, gdy płaszczyzną, na którą kładziemy daną płaszczyznę, jest właśnie jedna z płaszczyzn rzutów, a nie płaszczyzna do niej równoległa. Weźmy np., jak poprzednio, kład poziomy. Z tego, że $\beta \equiv \Pi_1$ wynika, że oś obrotu $h \equiv [\beta\alpha] \equiv [\Pi_1\alpha] \equiv h_\alpha$, więc $h' \equiv h_\alpha' \equiv h_\alpha$, $h'' \equiv x$; dalej że nietylko $(A) \equiv A_1'$ i t. d., lecz $(A) \equiv A_1' \equiv A_1$, $(B) \equiv B_1' \equiv B_1$ i t. d. Zresztą konstrukcye nie ulegają zmianie.

Dla przykładu rozwiążmy łatwe zadanie następujące:

Wyznaczyć kład na płaszczyznę poziomą rzutów śladu pionowego płaszczyzny $\alpha$, danej zapomocą śladów. Zauważmy, że punkt $M = [h_\alpha v_\alpha]$ pozostaje na miejscu, wystarczy tedy znaleźć kład jednego jeszcze z punktów śladu $v_\alpha$, np. $V$, co czynimy, stosując metodę ogólną. Możemy również, wykreśliwszy tor $V'$, t. j. prostą $[\supset V' \perp h_\alpha]$, wyznaczyć na nim punkt $(V)$ zapomocą łuku o środku w $M$ i promieniu $MV''$, ponieważ $MV'' = M(V) = MV$ (rys. 131).

*Zadanie odwrotne.* Wyznaczyć rzuty figury płaskiej, gdy są dane: jej kład poziomy, rzuty linii poziomu $h$, która stanowiła oś obrotu, oraz jakiegoś punktu płaszczyzny $\alpha$ rozważanej figury, w jej położeniu przed obrotem, nie należącego do $h$. Wykonajmy konstrukcyę odpowiednią w zastosowaniu do jednego punktu $B$. Dane: $(B)$, $h'$, $h''$, $A'$, $A''$. Wyznaczmy kład $(A)$ punktu $A$; rzut $B'$ znajdujemy zapomocą kolineacyi, jako punkt, odpowiadający w figurze przekształconej, powstającej z kładu punktów $A$ i $B$, kładowi $(B)$, czyli innemi słowy, jako rzut punktu, należącego do prostej $[AK]$ $(K = [[AB]h])$, więc $B' = [[A'K'] [\supset (B) \perp h']]$. Odnalazłszy rzut pionowy tej prostej $(K'' \subset h''$, ponieważ $K \subset h)$, wyznaczymy na nim bez trudności $B''$. Można również (np. gdy $K'$ i $K''$ leżą poza granicami rysunku) wyznaczyć $[(B) O'_B] \perp h'$, przeciągnąć $O_B'B_2' = O_B'(B)$ równolegle do $O_A'A_2'$ i z punktu $B_2'$ opuścić prostopadłą na $[O_B'(B)]$. Spodek jej będzie to właśnie rzut $B''$, a $B''$ musi być położone w odległości od $h''$, równej $B'B_2'$, z tej samej strony, w danym przypadku. Uzasadnić [1]) dokładnie tę konstrukcyę.



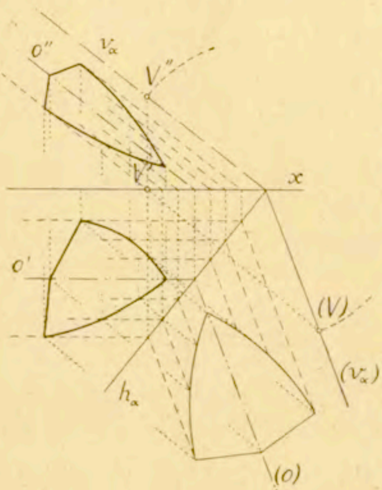
Rys. 132.

Możemy w ten sposób rozwiązać zadanie, rozwiązane już inaczej w § 32, II: Wyznaczyć rzuty koła, gdy są dane: rzuty $O'$ i $O''$ jego środka,

[1]) Wystarczy oprzeć się się na proporcyi $\dfrac{O_B'B'}{O_B'(B)} = \dfrac{O_A'A'}{O_A'(A)}$, wynikającej ze związku kolineacyjnego, oraz na tem, że jeżeli promień obrotu czyli $O_B'(B)$ jest przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych, równych odległościom $B'$ i $B''$ od rzutów osi obrotu, to nawzajem, odległość $B''$ od rzutu pionowego $h''$ osi obrotu znajdujemy jako przyprostokątną, gdy mamy już pozostałe dwa boki trójkąta.

ślad poziomy $h_\alpha$ płaszczyzny koła oraz promień $\mathbf{r}$. Znalazłszy kład $(O)$, otrzymujemy kład obwodu koła, zakreślając dokoła $(O)$ okrąg $(k)$ o promieniu $\mathbf{r}$. Wykreślając następnie zapomocą szeregu punktów $(A)$, $(B)$, $(C)$.... na $(k)$ figurę skolineowaną z $(k)$ w ten sposób, że kierunek powinowactwa jest $\perp h_\alpha$, osią powinowactwa jest $h_\alpha$, a punktowi $(O)$ odpowiada $O'$, otrzymujemy rzut poziomy $k'$, od którego znów możemy przejść do $k''$ przy pomocy znanych metod (por. § 30).

Na rys. 133-im mieliśmy dane: ślad $h_\alpha$, kład $(v_\alpha)$ oraz kład figury, położonej w płaszczyźnie $\alpha$, a mającej kształt tarczy o osi symetryi $o$, równoległej w przestrzeni do $v_\alpha$. W celu wyznaczenia jej rzutów znajdujemy zapomocą punktów $V'$, $(V)$ i $V''$ ślad $v_\alpha$, a następnie używamy szeregu linii frontu, przechodząc od ich kładów do rzutów. Wyjaśnić dokładnie konstrukcyę i zastanowić się nad występującą w rzutach symetryą ukośną i prostokątną!



Rys. 133.

Możemy również zapomocą metody kładów rozwiązać w każdym przypadku, bez wykreślania całego toru punktu, zadanie: Są dane: rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$ i $o'$, $o''$ prostej $o$ oraz kąt $\varphi$. Obrócić punkt $A$ dokoła $o$ (w określonym kierunku) o kąt $\varphi$.

Można w tym celu: wyznaczyć rzuty środka obrotu $O$ a następnie zapomocą obrotu dokoła jakiejś linii poziomu (lub linii frontu) płaszczyzny obrotu punktu $A$ otrzymać kład poziomy (lub pionowy) punktu $A$; kład ten obrócić o dany kąt $\varphi$, w jego rzeczywistej wielkości dokoła odpowiedniego kładu punktu $O$; wreszcie od otrzymanego w ten sposób *kładu* punktu $B$ przejść do rzutów $B'$ i $B''$.

Oczywiście, gdy $o \perp \Pi_1$, wystarczy obrócić o dany kąt dokoła $O' \equiv o'$ sam rzut $A'$ aż do położenia $B'$ (ponieważ odcinki i kąty, położone w płaszczyźnie obrotu, równoległej do $\Pi_1$, nie ulegają zmianie w rzucie poziomym), a następnie wyznaczyć rzut $B''$ na prostej $[\supset A'' \parallel x]$, do której przystaje rzut koła obrotu (§ 32, I; § 38, II). Podobnież postępujemy, gdy $o \perp \Pi_2$.

§ 41. **Najważniejsze zadania miarowe: wyznaczanie odległości.** Sposób wyznaczania długości odcinka, podany w § 18, a stanowiący w istocie pewną postać metody kładów, umożliwia właściwie rozwiązanie wszelkich zagadnień miarowych, ponieważ znajomość długości dostatecznej liczby odcinków, należących do figury, wystarcza teoretycznie i praktycznie do wyznaczena tej figury w jej rzeczywistej wielkości (i postaci) i nawzajem. Stosowanie jednak metody kładów, w jej postaci wyraźnej i rozwiniętej, oraz metody zamiany płaszczyzn rzutów pozwala na rozwiązywanie zadań, uwzględniających elementy miarowe, w sposób szybszy i dogodniejszy. W szczególności, metoda kładów może być stosowana w dwojaki sposób: 1) mając rzuty figury płaskiej, wyznaczamy jej kład, aby uczynić na nim pewne *pomiary* i konstrukcye; 2) mając kład jakiejś figury lub wyznaczywszy go umyślnie podług rzutów, nietylko wykonywamy nad nim pewne konstrukcye, polegające na odmierzaniu określonych odcinków, kątów i t. d., ale od kładów *wyznaczonych w ten sposób* prostych, punktów i t. d., *przechodzimy do ich rzutów*, początkowo nieznanych. Tak np. czyniliśmy w ostatnich przykładach poprzedniego paragrafu. Poprzestając na tych uwagach ogólnych, przejdźmy do przeglądu najbardziej typowych zadań miarowych.

O ile mowa o odległościach, może chodzić o wyznaczenie: 1) odległości dwu punktów; 2) odległości punktu od prostej, 3) odległości punktu od płaszczyzny; 4) odległości dwu prostych równoległych; 5) odległości prostej od płaszczyzny, do której prosta jest równoległa; 6) odległości pomiędzy dwiema płaszczyznami równoległemi; 7) najkrótszej odległości dwu prostych skośnych.

Zadanie 1 rozwiązaliśmy już w § 18 zapomocą konstrukcyi, która właściwie nie była niczem innem, jak kładem płaszczyzny rzutującej poziomo odcinek; obracaliśmy ją przytem dokoła linii poziomu, przeciągniętej przez jeden z końców odcinków. Można osiągnąć ten sam wynik zapomocą *obrotu dokoła osi, prostopadłej do* $\Pi_1$, *aż do położenia równoległego do* $\Pi_2$, t. j. zapomocą kładu pionowego tej samej płaszczyzny. Jeżeli oś obrotu $o$ przechodzi przez punkt $B$ (p. rys. 134 b) [1]), to rzut $A'B'$ przybiera przy tem położenie $A_2'B'$, równoległe do osi rzutów, a kład $(A)^2 \equiv A_2''$ znajdujemy na prostej $[\supset A'' \parallel x]$, której odcinek $A''A_2''$ stanowi tor rzutu $A$ (§ 38). Poszukiwana długość $\mathsf{d}$ jest to długość odcinka $(A)^2(B)^2 \equiv A_2''B''$.

Zadanie 2-gie, polegające na wyznaczeniu odległości punktu od prostej, po zastosowaniu konstrukcyi, wskazanych w § 28, II, wymaga tylko wyznaczenia długości odcinka $OA$ o wiadomych rzutach. Dochodzimy jednak szybciej do celu, wyznaczając kład poziomy lub pionowy danej prostej $m$ i danego punktu $A$, a to zapomocą obrotu dokoła jakiejś linii poziomu lub linii frontu (np. zawierającej $A$), i odnajdując odrazu szukaną odległość $\mathsf{d} = (O)\,(A)$.

---

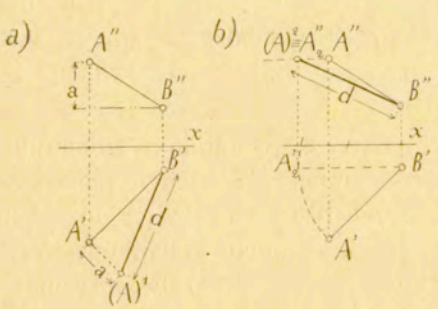
[1]) W takim razie $o' \equiv B''$, $o'' \equiv [\supset B' \perp x]$; rzuty te pominęliśmy na rys. 134-ym.

Od $(O)$ można przejść do $O'$ i $O''$ — a więc rozwiązać inaczej zadanie z § 28, II (p. rys. 135).

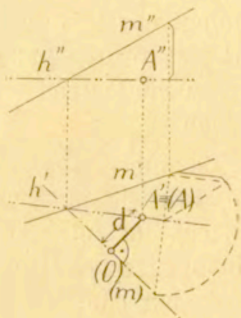
3. Odległość punktu $M$ od płaszczyzny $\alpha$, danej przez ślady lub rzuty dwu prostych, może być wyznaczona w sposób następujący:

a) Wyznaczywszy rzuty prostej $p = [M \perp \alpha]$ (§ 26, zad. 5) i punktu $A = [p\,\alpha]$ (§ 28, I), mierzymy odcinek $AM$ (zadanie 1 tego paragrafu). Zauważmy, że gdy $\alpha \perp \Pi_1$, to $A' = [h_\alpha p']$ i $A'M' = AM$ z powodu że $p = [AM]$ jest $\parallel \Pi_1$. Podobnież rozumujemy, gdy $\alpha \perp \Pi_2$. Stąd wynika drugi sposób:

b) Dokonać takiej zamiany płaszczyzn rzutów, aby zamiast jednej z pierwotnych wystąpiła nowa, $\Pi_3$, prostopadła do $\alpha$ (por.




Rys. 134.




Rys. 135.

ćwicz. 26 z tego rozdziału), a po rozwiązaniu powyżej wskazanym sposobem uproszczonym, wrócić do układu $(\Pi_1 \Pi_2)$.

Zadania 4 i 5 sprowadzają się odpowiednio do zadań 2-go i 3-go.

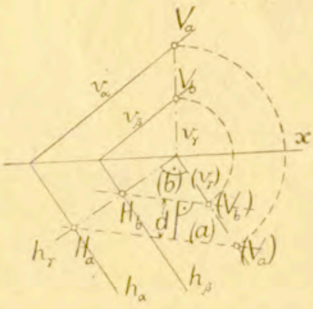
6. Wyznaczenie odległości pomiędzy dwiema płaszczyznami równoległemi może również polegać na odnalezieniu odległości punktu jednej z nich położonego np. na jednym ze śladów lub na obu śladach, od drugiej. Jeżeli atoli mamy dane obie pary śladów, to wygodnie użyć metody następującej:

Dane: $h_\alpha \parallel h_\beta$, $v_\alpha \parallel v_\beta$. Wykreślamy ślady: $h_\gamma \perp h_\alpha$ i $v_\gamma \perp x$ płaszczyzny pomocniczej $\gamma$, prostopadłej do $h_\alpha$ i $h_\beta$, a więc i do $\alpha$, $\beta$ i $\Pi_1$. Wyznaczamy następnie kłady[1]) prostych $a = [\alpha\gamma]$ i $b = [\beta\gamma]$,

[1]) Rzutów $a''$ i $b''$ możemy przy tem zupełnie nie wykreślać.

biorąc za oś obrotu ślad $h_\gamma$. Odległość pomiędzy prostemi równoległemi $(a)$ i $(b)$ jest odległością szukaną **d**.

Rozwiązanie zadania 7-go, w którem chodzi o najkrótszą odległość dwu prostych skośnych, może polegać na rozwiązaniu zadania 77-go ze ćwiczeń do rozdz. V-go, z dodatkiem konstrukcyi rzeczywistej długości danego odcinka. Ponieważ, jak widzieliśmy w § 28, II, wyznaczenie wspólnej prostopadłej do dwu prostych skośnych daje się uskutecznić w sposób bardzo prosty, gdy jedna z nich jest $\perp \Pi_1$ lub $\perp \Pi_2$, przeto można również użyć przejścia do takiego nowego układu płaszczyzn rzutów, w którym jedna byłaby $\perp$ do jednej z danych prostych (§ 37, II i ćw. 25, 66). W przypadku szczególnym, gdy rzuty poziome lub pionowe obu prostych są odpowiednio równoległe (np. gdy $a' \parallel b'$, $a''$ nie $\parallel b''$), najkrótszą odległość odnajdujemy odrazu, jako odległość pomiędzy tymi rzutami równoległymi, równą odległości pomiędzy odpowiedniemi płaszczyznami rzutującemi. Uzasadnić to!



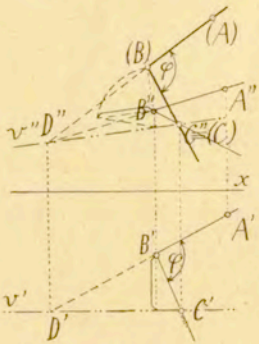
Rys. 136.

§ 42. **Mierzenie kątów.** Odróżnimy tu znów zadania następujące: 1) wyznaczenie kąta pomiędzy dwiema prostemi; 2) wyznaczenie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny; 3) wyznaczenie kąta dwuściennego; 4) wyznaczenie kątów płaskich i dwuściennych kąta trójściennego lub wogóle bryłowego, danego zapomocą rzutów.

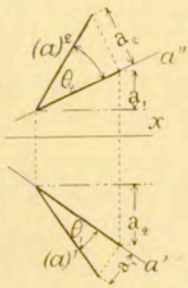
W zadaniu 1-em może chodzić o *kąty*, utworzone przez dwie przecinające się proste, o *kąt*, utworzony przez dwa promienie, wychodzące z jednego punktu, lub wreszcie o t. zw. kąt między prostemi skośnemi. Ostatni przypadek sprowadza się do jednego z pozostałych zapomocą przeciągnięcia przez dowolny punkt prostych, równoległych odpowiednio do danych prostych skośnych; jeżeli chcemy przy tem uniknąć dwuznaczności, to możemy się z góry umówić, że za miarę nachylenia do siebie prostych skośnych będziemy brali z kątów, otrzymanych w ten sposób, kąt nie rozwarty (a więc ostry lub prosty). Jakkolwiekbądź, gdy mamy już do czynienia z dwiema prostemi, położonemi w jednej płaszczyźnie $\alpha$, wystarczy wykonać kład tej płaszczyzny wraz z prostemi na dowolną płaszczyznę, równoległą do jednej z płaszczyzn rzutu. Osią obrotu musi być jakaś linia poziomu lub linia frontu płaszczyzny $\alpha$, którą potrafimy w danych warunkach wyznaczyć.

Przykład takiej konstrukcyi, w zastosowaniu do $\sphericalangle ABC$ pomiędzy promieniami $BA]$ i $BC]$, dajemy na rysunku 137-ym.

Przebieg konstrukcyi: $v'\equiv[\supset C' \parallel x]$; do $D'\equiv[v'[A'B']]$ dobieramy $D''$ na $[A''B'']$; $v''=[C''D'']$, $(C)\equiv C''$, $(D)\equiv D''$, kład punktu $B$ otrzymujemy w zwykły sposób. Rzecz jasna w tej chwili, że kątem poszukiwanym jest kąt, oznaczony przez $\varphi$



Rys. 137.



Rys. 138.

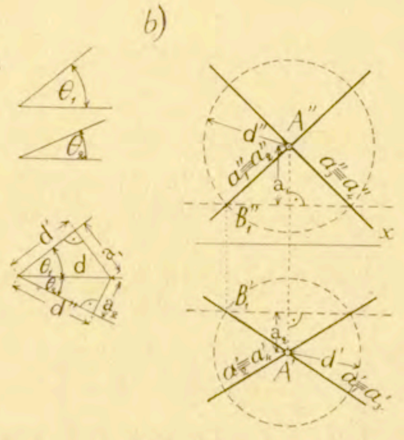
Co do zadania 2-go, zwróćmy uwagę przedewszystkiem na przypadek, gdy chodzi o kąt nachylenia prostej do jednej z płaszczyzn rzutów, t. j. o kąt ostry (lub prosty), utworzony przez prostą i odpowiedni jej rzut. Zadanie takie rozwiązaliśmy już w § 18, i wiemy obecnie, że sposób, tam podany, nie polegał na niczem innem, jak na kładzie poziomym płaszczyzny, rzutującej prostą na $\Pi_1$, lub na kładzie pionowym płaszczyzny, rzutującej na $\Pi_2$.

Odpowiednia konstrukcya różni się od użytej przy wyznaczaniu długości danego odcinka tem tylko, że mamy daną prostą *nieograniczoną* i że obieramy na niej *dowolnie* zarówno punkt, który ma pozostać nieruchomy, jak punkt, którego kład znajdujemy zapomocą metody ogólnej. (Na rys. 138-ym kąt $\theta_1$ jest kątem nachylenia do $\Pi_1$, kąt $\theta_2$—do $\Pi_2$).

Łatwo uzasadnić, że osiągniemy również żądany wynik przez kład pionowy płaszczyzny, rzutującej na $\Pi_1$, i kład poziomy płaszczyzny, rzutującej na $\Pi_2$. Tak np. na rys. 134 kąt nachylenia prostej $[BA]$ do $\Pi_1$ równa się kątowi nierozwartemu, utworzonemu przez $B''A_2''$ i oś $x$. Sformułować dowód!

Ważne znaczenie praktyczne posiada zadanie odwrotne:

*(A)* Wyznaczyć rzuty prostej, przechodzącej przez punkt $A$ o danych rzutach i tworzącej z płaszczyznami rzutu dane kąty nachylenia $\theta_1$ i $\theta_2$. Otóż, dowolny odcinek $AB$ szukanej prostej $m$ stanowi, co do długości, przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna równa się rzutowi poziomemu odcinka, druga — różnicy poziomów $A''$ i $B''$, t. j. odległości bezwzględnej $A''$ od równoległej do $x$, przeciągniętej przez $B''$, i którego kąt ostry przy przeciwprostokątnej, równej rzutowi, równa się kątowi nachylenia $\theta_1$ (por. §§ 6, II, 18). Zupełnie to samo stosuje się do rzutu pionowego $A''B''$, kąta $\theta_2$ i t. d. W obu omawianych trójkątach pomocniczych możemy wziąć dowolnie bok $\mathrm{d} = AB$; znając kąty $\theta_1$ i $\theta_2$, możemy te trójkąty zbudować, skąd otrzymujemy $\mathrm{d}' = A'B'$, $\mathrm{d}'' = A''B''$ oraz odległość $\mathrm{a}_1$ rzutu $A''$ od prostej $[\supset B'' \| x]$ i $\mathrm{a}_2$ — rzutu $A'$ od prostej $[\supset B' \| x]$ (rys. 139a). Punktu $B''$ (rys. 139 b) należy tedy szukać na okręgu koła o promieniu $\mathrm{d}''$ i środku $A''$ oraz na prostej $\| x$ i odalonej o $\mathrm{a}_1$ od $A''$; punktu $B'$ na okręgu koła o promieniu $\mathrm{d}'$ i środku $A'$ oraz na prostej $\| x$ i oddalonej o $\mathrm{a}_2$ od $A'$ [1]). Nazwijmy jedną z par punktów, spełniających te warunki i odpowiadających sobie wzajemnie, jako rzuty jednego punktu, $B_1''$ i $B_1'$; oczywiście, prosta $a_1 = [AB_1]$ czyni zadość warunkom zadania. Ponieważ jednak, jak łatwo sobie zdać sprawę z poprzednich konstrukcyi, kąty nachylenia $\theta_1$ i $\theta_2$ prostej $a$ do $\Pi_1$ i $\Pi_2$ zależą tylko od nachylenia $a''$ i $a'$ do osi $x$, przeto te same warunki są spełnione w danym przypadku przez 3 inne proste $a_2$, $a_3$, $a_4$; każda z czterech prostych



Rys. 139.

[1]) Jednego z tych dwu miejsc geometrycznych można zresztą nie wykreślać przy wyznaczaniu jednego z rzutów, a zastąpić je odpowiedniemi liniami rzutu, np. $[B_1' \perp x]$, gdy znamy już $B_1'$ i t. d.

$a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ posiada z jedną z pozostałych wspólną płaszczyznę, rzutującą na $\Pi_1$, a z drugą—wspólną płaszczyznę rzutującą na $\Pi_2$. (Punktów, spełniających warunki, którym winien czynić zadość punkt $B$, naliczylibyśmy 8). Zapomocą porównania rys. 139 a) i b) dochodzimy do następujących wyników, które tu podajemy, polecając uczącemu się wiodące do nich roztrząsania:

1) gdy $\theta_1+\theta_2>90^0$, zadanie jest niemożliwe;

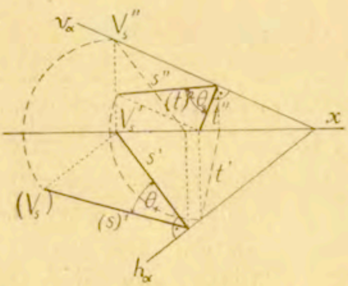
2) gdy $\theta_1+\theta_2=90^0$, zadanie posiada 2 rozwiązania; proste $a_1$ i $a_2$, czyniące mu zadość, leżą w tej samej płaszczyźnie $\perp x$;

3) gdy $\theta_1+\theta_2<90^0$, istnieją *4* proste, spełniające żądane warunki (przypadek, podany na rys. 139).

Gdy chodzi o nachylenie dowolnej prostej do dowolnej płaszczyzny, to najlepiej oprzeć się na uwadze, że kąt ten jest zawsze dopełnieniem do 90⁰ kąta ostrego, utworzonego przez daną prostą i prostopadłą do płaszczyzny, przeciągniętą z dowolnego punktu tej prostej.

Istotnie, w trójkącie prostokątnym, którego wierzchołkami są: ów punkt $A$ i punkty $B$ i $C$ przebicia płaszczyzny $\beta$ przez daną prostą i przez prostą $[\supset A\perp\beta]$, jednym z kątów ostrych jest właśnie szukany kąt nachylenia, $\measuredangle ABC$, a więc drugi i t. d. Gdy mamy np. dane ślady płaszczyzny $\beta$ i rzuty prostej $a$, to wystarczy obrać rzuty $A'$ i $A''$ dowolnego punktu $A$ na $a$, przeciągnąć $p'\equiv[\supset A'\perp h_\beta]$, $p''\equiv[\supset A''\perp v_\beta]$, zmierzyć $\measuredangle[ap]$ (ostry), jak wskazaliśmy na początku tego paragrafu i odjąć go od $90^0$.

W zadaniu 3-ciem może znów chodzić w szczególności o nachylenie danej płaszczyzny do *jednej z płaszczyzn rzutów*. Zauważmy w takim razie, że zadanie sprowadza się do wyznaczenia kąta ($\leqq 90^0$) pomiędzy dowolną linią spadku lub linią prostopadłą do śladu pionowego danej płaszczyzny a rzutem poziomym pierwszej linii lub pionowym drugiej — jako prostych, prostopadłych do krawędzi badanego kąta dwuściennego i położonych na jego ścianach. Innnemi słowy: należy wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej linii spadku do $\Pi_1$ lub dowolnej linii, prostopadłej do linii frontu wogóle a śladu pionowego w szczególności—do $\Pi_2$.



Rys. 140.

Zadanie odwrotne *(B)*, polegające na wyznaczeniu płaszczyzny, przeciągniętej przez dany punkt i tworzącej z płaszczyznami rzutu dane kąty ostre $\theta_1$ i $\theta_2$, dogodnie sprowadzić do zadania odwrotnego *(A)*. Wystarczy zdać sobie sprawę z tego, że prosta, prostopadła do szukanej płaszczyzny, musi tworzyć z płaszczyznami rzutów kąty $90^0-\theta_1$ i $90^0-\theta_2$; rozwiązanie zadania zaczyna się tedy od wyznaczenia rzutów jednej takiej prostej (lub wszystkich możliwych, przeciągniętych przez dowolny punkt); dalej stosujemy konstrukcye z § 26 (zad. 6). Warunkiem możliwości zadania jest związek: $\theta_1+\theta_2 \geqq 90^0$; gdy $\theta_1+\theta_2=90^0$, otrzymujemy dwie płaszczyzny $\alpha_1$ i $\alpha_2$, równoległe do $x$ i t. d. Uzupełnić to roztrząsanie!

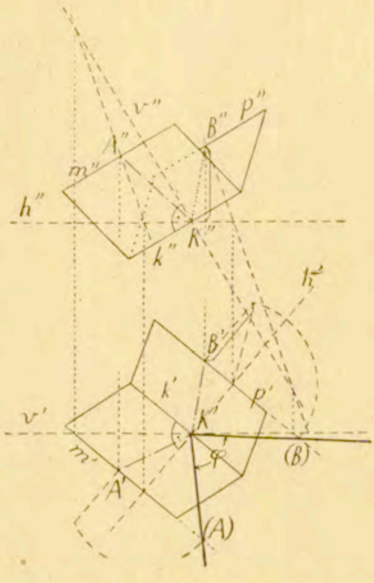
Gdy mamy do czynienia z dwiema dowolnemi płaszczyznami $\alpha$ i $\beta$ i szukamy $\sphericalangle[\alpha\beta]$, to metoda najogólniejsza polega: na wyznaczeniu prostej $k\equiv[\alpha\beta]$, płaszczyzny, dowolnej zresztą, $\gamma$, prostopadłej do $k$ oraz prostych $a\equiv[\alpha\gamma]$ i $b\equiv[\beta\gamma]$ i wreszcie zmierzeniu odpowiedniego $\sphericalangle[ab]$. Można również przeciągnąć przez punkt dowolny $M$ proste $c\perp\alpha$ i $d\perp\beta$; proste te tworzą parę kątów, równych kątom liniowym kątów $[\alpha\beta]$.

Sposób ten jest bardzo wygodny, gdy chodzi właśnie o wyznaczenie dowolnego z kątów dwuściennych $[\alpha\beta]$ — lub też tego z nich, który jest $\leqq 90^0$, („kąta nachylenia" jednej płaszczyzny do drugiej; gdy zamierzamy wyznaczyć wielkość określonego kąta dwuściennego, utworzonego przez dwie „półpłaszczyzny", konstrukcye komplikują się i przy użyciu tego, tak prostego zasadniczo sposobu, a to ze względu na potrzebę rozstrzygnięcia, który z dwu kątów (mniejszych od $180^0$), utworzonych przez $c$ i $d$, odpowiada żądaniu? Zastanowić się nad temi rozróżnieniami! Na rys. 141-ym płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$ były dane w postaci równoległoboków o wspólnym boku $k$, tworzących określony kąt dwuścienny; płaszczyzna $\gamma$ została wyznaczona przez linię poziomu $h$ i linię frontu $v$, przeciągnięte przez dowolny punkt $K$ krawędzi $k$ (p. § 26, po zad. 5-em); kątem szukanym $\varphi$ jest $\sphericalangle AKB$ o wierzchołku $K\equiv[k\gamma]$ i ramionach, przechodzących przez punkty $A\equiv[m\gamma]$ i $B\equiv[p\gamma]$ (wyznaczone podług § 24). Obracając pł. $\gamma$ dokoła $h$, otrzymujemy ten kąt w postaci kładu poziomego.

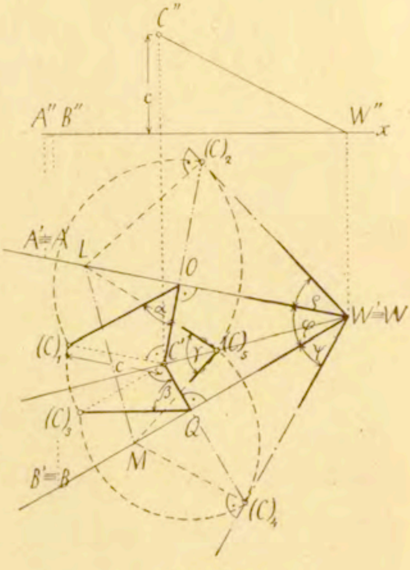
4. Wyznaczenie kątów płaskich i dwuściennych kąta bryłowego da się zawsze uskutecznić zapomocą konstrukcyi, wskazanych w zad. 1-em i 3-em. Nasuwają się tu jeszcze zagadnienia konstrukcyjne, polegające na wyznaczeniu podług znanych elementów kąta bryłowego lub w szczególności trójściennego pozostałych, niewiadomych kątów płaskich i dwuściennych oraz na *wykreślaniu rzutów* kąta bryłowego podług pewnych danych. Nie roztrząsając obszerniej tych zagadnień, poprzestaniemy tylko na paru przykładach.

Przypuśćmy, że mamy dane rzuty kąta trójściennego, którego jedna ściana leży na płaszczyźnie poziomej rzutów: pł. $[AWB]\equiv\Pi_1$. Kąt płaski $\sphericalangle AWB=\varphi$ mamy na rysunku w wielkości rzeczywistej; obracając ścianę $WCA$

dokoła $[WA]$, otrzymujemy jednocześnie kład kąta $\sphericalangle AWC = \rho$ i wielkość rzeczywistą $\alpha$ kąta liniowego, odpowiadającego kątowi dwuściennemu $CWAB$ (zad. 3), ponieważ punkt $(C)_1$ nie jest niczem innem jak kładem punktu $C$, otrzymanym przez obrót dokoła rzutu poziomego linii spadku $[OC]$, $[O(C)_1]$ — kładem tej linii. Zupełnie tak samo wyznaczamy $\psi = \sphericalangle BWC$ i $\beta = \sphericalangle AWBC$. Wreszcie kąt dwuścienny o krawędzi $[WC]$ odnajdziemy, kreśląc proste $[(C)_2 L] \perp [W(C)_2]$ i $[(C)_4 M] \perp [W(C)_4]$, stanowiące kłady ramion kąta liniowego $LCM$, który odpowiada temu kątowi dwuściennemu; obracając pł. $[LCM]$ dokoła $[LM]$, wyznaczamy kład $\sphericalangle LCM = \gamma$ zapomocą dwu łuków, (które winny się przeciąć na $[W'C']$ — dlaczego?) a to ze względu na to, że odcinki $LC$ i $MC$ mamy już w ich rzeczywistej wielkości: $LC = L(C)_2 = L(C)_5$, $MC = M(C)_4 = M(C)_5$.



Rys. 141.



Rys. 142.

Przy dowolnem położeniu rzutów kąta trójściennego możemy przejść do tego przypadku, stosując jeden obrót (dokoła śladu poziomego jednej ze ścian, póki nie przystanie do $\Pi_1$) lub też odpowiednie zmiany płaszczyzn rzutu. Oczywiście, zamiast czynić jedną ze ścian przystającą do $\Pi_1$, wystarczy tylko uczynić ją równoległą; konstrukcye, wskazane przed chwilą, ulegną tylko nieznacznym zmianom w samem znakowaniu. Figurę, utworzoną z trzech kątów $\sphericalangle (C)_2 WA$, $\sphericalangle AWB$, $\sphericalangle BW(C)_4$ nazwiemy ***siatką*** czyli ***rozwinięciem*** kąta trójściennego. Zauważmy, że odwracając część poprzednich konstrukcyi, możemy rozwiązać zadanie następujące:

Są dane kąty płaskie (czyli podług innej terminologii: ściany): $\rho$, $\varphi$, $\psi$ kąta trójściennego (a więc również jego siatka) — wyznaczyć jego kąty dwuścienne. Narysowawszy siatkę i uważając ją, jak poprzednio, za składającą się z jednej ściany, położonej na $\Pi_1$ i z kładów dwu innych ścian, weźmiemy dowolne odcinki $W(C)_2=W(C)_4$, wykreślimy $[(C)_2O]\perp[WA]$ i $[(C)_4Q]\perp[WB]$, otrzymamy rzut $C'\equiv[[(C)_2O]\ [(C)_4Q]]$, $\sphericalangle\alpha$ z trójkąta $O(C)_1C'$ o przyprostokątnej $OC'$ i przeciwprostokątnej $O(C)_1=O(C)_2$ i t. d.

## ĆWICZENIA.

1. Są dane rzuty poziomy i pionowy ($A'$ i $A''$) punktu $A$, położonego w I ćwiartce, punktu $B$ na $+\Pi_2$, $C$ w II ćw., $D$ na $-\Pi_1$, $E$ w III ćw., $F$ na $-\Pi_2$, $G$ w IV ćw., $H$ na $+\Pi_1$ oraz osie rzutów $x_{1\,2}$ i $x_{1\,3}$. Wyznaczyć rzuty $A''', \ldots\ldots H'''$, jeżeli wiadomo, że przednia część $\Pi_3\perp\Pi_2$ jest obracana przy sprowadzaniu do $\Pi_2$: a) na prawo; b) na lewo.

2. Nawzajem: przy tych samych założeniach 1) podług danych rzutów $A''$, $A'''$ i t. d., w rozmaity sposób położonych względem $x_{2\,3}$, wyznaczyć rzuty poziome $A'$ i t. d., punktów $A$ i t. d.; 2) podług rzutów na $\Pi_1$ i $\Pi_3$, spełniających ten warunek, że odległości ich od $x_{1\,2}$ i $x_{2\,3}$ są odpowiednio równe co do wielkości i znaku, wyznaczyć rzuty różnych punktów na $\Pi_2$.

3. Wyznaczyć rzuty na $\Pi_3\perp\Pi_1$ punktów $A, B, \ldots. H$ z ćw. 1-go, gdy są dane ich rzuty poziome i pionowe, $x_{1\,2}$ i $x_{2\,3}$, i gdy górna część $\Pi_3$ jest obracana: a) na prawo; b) na lewo.

4. Odwrócić to zadanie, podobnie jak to uczyniliśmy w ćw. 2-em, więc wyznaczyć 1) $A''$ i t. d., gdy są dane $A'$, $A'''$ i t. d.; 2) $A'$ i t. d., gdy są dane $A''$, $A'''$ i t. d.

5. Wyznaczyć rzuty punktów $A, B, \ldots. H$ z ćwicz. 1-go na płaszczyznę boczną $\Pi_3\perp x_{1\,2}$, przy zachowaniu zwykłych umów (§ 37).

6. Odwrócić to zadanie, t. j. uważać za niewiadome: a) rzuty poziome; b) rzuty pionowe, inne zaś za wiadome (przypadek szczególny w stosunku do ćw. 2-go).

W następnych zadaniach wybór kierunku obrotu nowych płaszczyzn przy sprowadzaniu ich do jednej płaszczyzny pozostawiamy uczącemu się; wyjątek mają stanowić ustalone już umowy co do płaszczyzny bocznej $\Pi_3\perp x_{1\,2}$ (§ 37). Nie będziemy też wciąż powtarzali, że są dane osie rzutów $x_{1\,2}$, $x_{1\,3}$ i t. d., co w odpowiednich zadaniach rozumie się samo przez się.

7. Wyznaczyć nowe rzuty (na $\Pi_3$): 1) odcinka $AB$; 2) prostej nieograniczonej $a$; 3) trójkąta; 4) dowolnego wielokąta płaskiego lub linii łamanej skośnej — gdy są dane rzuty poziome i pionowe tych figur. Rozróżnić przypadki: a) $\Pi_3\perp\Pi_1$; b) $\Pi_3\perp\Pi_2$; c) $\Pi_3$—jest to płaszczyzna boczna, $\perp x_{1\,2}$.

8. Są dane rzuty $A'$ i $A''$ dowolnego punktu $A$ (oraz osie: $x_{1\,2}$, $x_{2\,3}$, $x_{3\,4}$, $x_{4\,5}$)—wyznaczyć rzuty $A^{IV}$ i $A^{V}$, jeżeli $\Pi_3\perp\Pi_2$, $\Pi_4\perp\Pi_3$, $\Pi_5\perp\Pi_4$.

9. Wyznaczyć rzuty na $\Pi_3\perp\Pi_1$ i $\Pi_4\perp\Pi_3$ figur, wymienionych w ćwiczeniu 7-em.

10. Nawzajem: podług danych rzutów na $\Pi_3$ i $\Pi_4$ wyznaczyć rzuty na $\Pi_1$ i $\Pi_2$.

11. Wyznaczyć ślad na $\Pi_3$ dowolnej prostej $a$ o danych rzutach $a'$, $a''$. a) $\Pi_3\perp\Pi_1$; b) $\Pi_3\perp\Pi_2$; c) $\Pi_3\perp x_{1\,2}$.

12. Przy tych samych założeniach a), b) lub c) wyznaczyć rzuty na $\Pi_3$ śladów: poziomego, pionowego, na płaszczyznę spółrzutową i na płaszczyznę symetrycznorzutową prostej $a$ o danych rzutach $a'$ i $a''$.

13. a) Wyznaczyć rzuty boczne oraz rzuty na dowolną płaszczyznę $\Pi_4 \perp \Pi_3$ danych śladów $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny $\alpha$, przecinających się na osi $x_{1\,2}$. Przypadek szczególny: $x_{2\,3} \supset [h_\alpha v_\alpha]$, $x_{3\,4} \supset [h_\alpha v_\alpha]$.

14. a), b) i c) Przy tych samych założeniach co do $\Pi_3$ i $\Pi_4$ oraz $h_\alpha$ i $v_\alpha$ wyznaczyć nowe ślady $n_\alpha \equiv [\alpha \Pi_3]$ i $r_\alpha \equiv [\alpha \Pi_4]$ płaszczyzny $\alpha$.

15. Wyznaczyć ślady boczne płaszczyzn: a) $\parallel \Pi_1$; b) $\parallel \Pi_2$; c) $\parallel x_{1\,2}$; d) $\perp x_{1\,2}$; e) $\perp \Pi_1$ ale nie $\Pi_2$; f) $\perp \Pi_2$, nie $\parallel \Pi_1$, danych zapomocą śladów.

W zadaniach: 16 i t. d. aż do 25-go, danych do rozwiązania zapomocą zamiany płaszczyzn rzutu[1]), dane i wyniki, o ile nie będzie innych zastrzeżeń, mają być wyobrażone w zwykłym układzie $(\Pi_1, \Pi_2)$. Płaszczyzna boczna lub wogóle trzecia płaszczyzna rzutów ma odgrywać jedynie rolę pomocniczą i przejściową.

16. Są dane: punkty $A$ i $B$, położone na prostej $[AB] \perp x_{1\,2}$ i punkt $C$. Wyznaczyć, zapomocą rzutów dowolnego innego punktu, rzuty prostej, przechodzącej przez $C$ i $\parallel [AB]$.

17. Wyznaczyć ślady $H_m$ i $V_m$ prostej $m \equiv [AB]$, prostopadłej do osi $x_{1\,2}$. (Dane: $A'$, $A''$, $B'$, $B''$).

18. Wyznaczyć linię przecięcia dwu płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$, jeżeli a) $\alpha \parallel x_{1\,2}$, $\beta \parallel x_{1\,2}$; b) $\alpha \parallel x_{1\,2}$, $\beta \parallel \Pi_1$; c) $\alpha \parallel x_{1\,2}$, $\beta \parallel \Pi_2$. Płaszczyzny są dane przez ślady.

19. Wyznaczyć linię przecięcia dwu płaszczyzn: $\alpha$ o dowolnych śladach i $\beta$, przechodzącej przez oś $x_{1\,2}$ i dany punkt $M$.

20. Wyznaczyć punkt przebicia dowolnej płaszczyzny przez prostą o kierunku prostopadłym do osi $x_{1\,2}$.

21. Wyznaczyć rzuty prostopadłej, opuszczonej z danego punktu $A$ na płaszczyznę $\beta \parallel x_{1\,2}$.

22. Są dane: rzuty punktów $A$ i $B$, wyznaczających prostą, położoną w płaszczyźnie $\perp x_{1\,2}$, oraz dowolnego punktu $C$. Znaleźć rzuty prostopadłej z punktu $C$ do $[AB]$ i punktu przecięcia jej z $[AB]$. Uwzględnić przypadek szczególny, gdy $C$ należy do tej samej płaszczyzny $\perp x_{1\,2}$, co $A$ i $B$.

23. Przy tych samych danych wyznaczyć ślady płaszczyzny, prostopadłej do $[AB]$ i zawierającej $C$: pł. $[\supset C \perp [AB]]$.

24. Opuścić prostopadłą z punktu $C$ na dowolną prostą $a$ (nie $\perp x_{1\,2}$) zapomocą wprowadzenia nowej płaszczyzny rzutów, równoległej do $a$.

25. Mamy dane rzuty dwu prostych skośnych. Zapomocą przejścia do układu, w którym jedna z płaszczyzn rzutu jest prostopadła do jednej z danych prostych oraz przekształcenia powrotnego, wyznaczyć wspólną prostopadłą oraz punkty, w których spotyka te proste.

26. a) Są dane ślady płaszczyzny $\alpha$. Dokonać takiej zamiany płaszczyzn rzutu, aby pł. $\alpha$ stała się prostopadłą do jednej z płaszczyzn nowego układu. *Wskazówka*: płaszczyzna $\Pi_3$ musi być $\perp \alpha$ i $\perp$ do jednej z pła-

---

[1]) Porównać z innymi możliwymi sposobami rozwiązania!

szczyzn rzutów — wskutek tego odpowiednie ślady $\Pi_3$ i $\alpha$ muszą być prostopadłe (więc np. $x_{1\,3} \perp h_\alpha$). b) To samo, gdy płaszczyzna jest dana w inny sposób: przez rzuty dwu prostych i t. p., jak w § 23-im.

27. Są dane ślady płaszczyzny $\alpha$ i rzuty punktu $M$. Zapomocą tej samej zamiany, co w poprzedniem ćwiczeniu, wyznaczyć rzuty prostopadłej $p$ z $M$ do $\alpha$ oraz punktu przebicia $[p\alpha]$.

28. Przejść do takiego układu płaszczyzn rzutów, aby jedna z nich była równoległa do płaszczyzny $\alpha$, nachylonej do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, lub przystawała do niej. (*Wskazówka:* z początku wprowadzić trzecią płaszczyznę rzutu, $\perp \Pi_1$ lub $\perp \Pi_2$, jak w ćw. 26-em, a potem $\Pi_4 \parallel \alpha$, więc $\perp \Pi_3$ — można również związać to zadanie bezpośrednio z zad. 2-em z § 37, II). a) i b) jak w ćwiczeniu 26-em.

29. Znaleźć rzut jakiejkolwiek figury (o danych rzutach na $\Pi_1$ i $\Pi_2$) na dowolną płaszczyznę $\alpha$, daną: a) przez ślady; b) przez rzuty 3-ch punktów; c) w postaci ograniczonego płata.

30. Są dane: rzuty linii łamanej $ABCD$.... oraz rzuty $A_1'$ i $A_1''$ punktu $A_1$, stanowiącego nowe położenie punktu $A$ po odpowiedniem przesunięciu równoległem. Wyznaczyć rzuty pozostałych wierzchołków oraz boków łamanej, po wskazanem przekształceniu.

31. Przesunięcie równoległe jest wyznaczone: przez rzuty prostej $k$, wskazującej kierunek przesunięcia (t. j. wspólny kierunek prostych, łączących pary punktów odpowiednich: $[AA_1]$, $[BB_1]$ i t. d.) oraz odcinek, o który jest przesuwany każdy z punktów ($= AA_1 = BB_1 = ....$). Wyznaczyć rzuty nowego położenia danej figury po określonem w ten sposób przesunięciu.

32. Przy tych samych danych, określających przekształcenie, wyznaczyć: a) rzuty nowych położeń śladów płaszczyzny $\alpha$, danych w położeniu pierwotnem; b) nowe ślady tej płaszczyzny po przesunięciu.

33. Rozwiązać każde z zadań a) 30, b) 31 i c) 32 w tym przypadku, gdy kierunek przesunięcia jest prostopadły do jednej z płaszczyzn rzutu.

34. Są dane rzuty: punktu $A$ i osi obrotu $o$, prostopadłej: a) do $\Pi_1$, b) do $\Pi_2$. Wyznaczyć: ślad (w następnych zadaniach: ślady) płaszczyzny obrotu, rzuty środka obrotu, długość promienia i rzuty całkowitego toru obrotu.

35. To samo, gdy oś $o$ jest tylko $\parallel$ a) do $\Pi_1$, b) do $\Pi_2$, c) do osi $x$.

36. To samo, gdy $o$ nie jest $\perp$ ani $\parallel$ do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$.

37. Obrócić w określonym kierunku o dany kąt $\varphi$ dokoła osi $o$, prostopadłej do $\Pi_1$ lub $\Pi_2$: a) dany punkt; b) daną prostą; c) dany trójkąt. Zwrócić uwagę na przypadki, gdy dana prosta (b) leży w jednej płaszczyźnie z osią, oraz gdy oś leży w płaszczyźnie trójkąta (c).

38. Oś obrotu jest prostopadła do $\Pi_1$ i położona w płaszczyźnie danego trójkąta. Wykonać obrót tego trójkąta aż do położenia, równoległego do $\Pi_2$. To samo, z zamianą $\Pi_1$ na $\Pi_2$ i nawzajem. Wyznaczyć kąt obrotu.

39. Znaleźć nowe rzuty $A_1'B_1'C_1'$ i $A_1''B_1''C_1''$ trójkąta po obrocie dokoła jakiejś linii poziomu jego płaszczyzny $\alpha$ aż do położenia tej płaszczyzny, równoległego do $\Pi_1$. Rozróżnić przypadki: a) $\alpha \perp \Pi_2$; b) $\alpha$ jest nachylona do obu płaszczyzn rzutu. Wyznaczyć kąt obrotu.

40. To samo z zamianą $\Pi_1$ na $\Pi_2$ i nawzajem.

41. Wyznaczyć kład poziomy danego pięciokąta, położonego na płaszczyźnie: a) $\perp \Pi_1$; b) $\perp \Pi_2$; c) nachylonej do $\Pi_1$ i $\Pi_2$.

42. W tych samych warunkach wyznaczyć kład pionowy.

43. Rozwiązać zadania a) 41, b) 42 przy tem założeniu szczególnem, że obracamy pięciokąt dokoła odpowiedniego śladu jego płaszczyzny, a nie dowolnej linii poziomu lub linii frontu.

44. Wyznaczyć kład na płaszczyznę pionową śladu poziomego danej płaszczyzny.

45. Są dane: ślad poziomy $h_\alpha$ płaszczyzny $\alpha$ oraz kłady na $\Pi_1$: śladu pionowego (części, należącej do $+\Pi_2$) i a) dowolnej prostej, położonej w płaszczyźnie; b) linii poziomu płaszczyzny; c) linii frontu. Wyznaczyć ślad pionowy oraz rzuty tych prostych [a), b) i c)].

46. To samo z zamianą $\Pi_1$ na $\Pi_2$ i nawzajem.

47—49. Podług kładu poziomego pięciokąta płaskiego o dowolnym kształcie wyznaczyć jego rzuty, gdy oprócz niego są dane:

47. — rzuty linii poziomu, dokoła której była obracana płaszczyzna $\alpha$ pięciokąta oraz jednego z punktów tej płaszczyzny;

48. — ślady płaszczyzny $\alpha$ z tym warunkiem, że osią obrotu był ślad $h_\alpha$.

49. — rzuty dowolnej prostej płaszczyzny $\alpha$ oraz jednego z punktów osi obrotu.

50. Przerobić ćwiczenia 47, 48 i 49 z zamianą kładu poziomego na pionowy i t. d.

51. Mamy dany kład jakiegoś wielokąta foremnego na jedną z płaszczyzn rzutu oraz ślady jego płaszczyzny. Wyznaczyć rzuty wielokąta.

52. To samo w stosunku do a) koła; b) elipsy; c) krzywej, zakreślonej dowolnie.

53. Zastosować do wyznaczenia rzeczywistej długości odcinka: a) kłady płaszczyzny, rzutującej odcinek na płaszczyznę pionową rzutu; b) kłady dowolnej płaszczyzny, zawierającej odcinek.

54. Wyznaczyć odległość punktu od prostej: a) $\perp \Pi_1$; b) $\perp \Pi_2$; c) $\parallel \Pi_1$ ale nie $\perp \Pi_2$; d) $\parallel \Pi_2$ ale nie $\perp \Pi_2$; e) w szczególności od osi $x$ lub prostej $\parallel x$.

55. Wyznaczyć odległość punktu od prostej, nachylonej do obu płaszczyzn rzutu, zapomocą kładu pionowego.

56. Wyznaczyć odległość danego punktu $C$ od prostej $[AB] \perp x$, gdy $A$ i $B$ są dane (p. ćw 22).

57. Wyznaczyć odległość punktu od dowolnej prostej sposobem z ćwiczenia 24-go.

58. Wyznaczyć odległość punktu o danych rzutach od płaszczyzny: a) $\parallel \Pi_1$; b) $\parallel \Pi_2$; c) $\perp \Pi_1$ (ale nie $\parallel \Pi_2$); d) $\perp \Pi_2$; e) $\perp x$.

59. Wyznaczyć odległość punktu o danych rzutach od płaszczyzny nachylonej do $\Pi_1$ i $\Pi_2$ (a danej w dowolny sposób) obu sposobami, wskazanymi w § 41-ym (zad. 3-cie).

60. Są dane rzuty dwu prostych równoległych; wyznaczyć ich odległość. Odróżnić przypadki następujące: obie proste są: a) $\perp \Pi_1$, b) $\perp \Pi_2$, c) $\parallel \Pi_1$ (ale nie $\perp \Pi_2$), d) $\parallel \Pi_2$ (ale nie $\perp \Pi_1$).

61. Wyznaczyć odległość między dwiema płaszczyznami równoległemi o danych śladach: a) $\perp \Pi_1$ (w szczególności $\parallel \Pi_2$), b) $\perp \Pi_2$ (w szczególności $\parallel \Pi_1$), c) nie $\perp$ do $\Pi_1$ ani do $\Pi_2$.

62. To samo, gdy płaszczyzny są dane w postaci płatów ograniczonych o bokach odpowiednio równoległych.

63. Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych skośnych, z których jedna jest a) $\perp \Pi_1$, b) $\perp \Pi_2$.

64. Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych skośnych o równoległych odpowiednio: a) rzutach poziomych; b) rzutach pionowych. Rozpatrzeć również przypadek, gdy proste, dane przez rzuty 2 punktów, leżą w płaszczyznach $\perp x$.

65. Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych skośnych: a) równoległych do $\Pi_1$; b) równoległych do $\Pi_2$.

66. Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych skośnych w warunkach najogólniejszych (por. § 28, II i ćw. 25).

67. Wyznaczyć kąty, utworzone przez dwie proste przecinające się, z których jedna jest a) $\parallel \Pi_1$ w szczególności $\perp \Pi_2$, b) $\parallel \Pi_2$ (w szczególności $\perp \Pi_1$), c) $\parallel x$ lub $\equiv x$.

68. Wyznaczyć kąt dwu danych prostych skośnych. Wyróżnić przypadki, wskazane w poprzedniem ćwiczeniu.

69. Są dane: rzuty prostej $m$ i punktu $A$, nie należącego do niej. Wyznaczyć rzuty prostej, któraby zawierała punkt $A$, przecinała prostą $m$ i tworzyła z nią dany kąt $\varphi$. Ile takich prostych da się wyznaczyć? *Wskazówka.* Po wyznaczeniu rzutów jakiejś linii poziomu lub linii frontu pł. $[mA]$ (np. przeciągniętej przez $A$), należy znaleźć kłady $(m)$ i $(A)$ i od wyznaczonych bez trudności kładów prostych, spełniających żądany warunek, przejść do ich rzutów. Zbadać przypadki szczególne, gdy a) $m \parallel \Pi_1$, b) $m \parallel \Pi_2$.

70. Mamy dane: ślady płaszczyzny $\delta$, rzuty prostej $a$, należącej do tej płaszczyzny i punktu $B$, leżącego na $a$. Wyznaczyć rzuty prostej, położonej w pł. $\delta$ i tworzącej z $a$ kąt dany $\varphi$ o wierzchołku $B$.

71. Wyznaczyć rzuty promieni, dzielących dany $\sphericalangle ABC$ na kilka części równych.

72. Wyznaczyć kąty nachylenia: a) do $\Pi_1$ — prostej $\parallel \Pi_2$, b) do $\Pi_2$ — prostej $\parallel \Pi_1$.

73. Wyznaczyć (zapomocą rzutu bocznego) kąty nachylenia do $\Pi_1$ i $\Pi_2$ prostej, położonej w płaszczyźnie $\perp x$.

74. Mamy daną prostą, nachyloną do dwu płaszczyzn rzutów. Użyć wszystkich wskazanych konstrukcyi, wiodących do wyznaczenia jej kątów nachylenia do tych płaszczyzn. Stwierdzić przez porównanie dokładność wyników.

75. A) Są dane: rzuty jednego z punktów prostej $a$, jej rzut poziomy, oraz kąt nachylenia do płaszczyzny poziomej $\theta_1$, równy w szczególności: a) $45^0$; b) $30^0$; c) $60^0$; d) $80^0$. Wyznaczyć rzut pionowy tej prostej. *B*) To samo z zamianą rzutu pionowego na poziomy i nawzajem oraz kąta $[a\Pi_1]$ na $\sphericalangle [a\Pi_2]$.

76. Wyznaczyć rzuty prostych, przechodzących przez punkt o danych rzutach $A'$ i $A''$ i tworzących z płaszczyznami rzutów kąty $\theta_1$ i $\theta_2$, przybierające odpowiednio wartości: a) $30^0$ i $45^0$; b) $60^0$ i $15^0$; c) $45^0$ i $36^0$; d) $45^0$ i $60^0$;

e) $40^0$ i $42^0$; f) $45^0$ i $45^0$; g) $30^0$ i $60^0$; h) $47^0$ i $43^0$. Gdy prosta musi leżeć w płaszczyźnie (bocznej) $\perp$ osi $x$, użyć rzutu bocznego.

77. Wyznaczyć kąt nachylenia prostej, tworzącej kąty ostre z $\Pi_1$ i $\Pi_2$, do płaszczyzny a) $\perp \Pi_1$, b) $\perp \Pi_2$.

78. Użyć do wyznaczenia kąta nachylenia dowolnej prostej $b$ do dowolnej płaszczyzny $\alpha$, danej w jakikolwiek sposób: a) konstrukcyi wskazanej w tekście; b) konstrukcyi rzutu $b_\alpha$ prostej $b$ na pł. $\alpha$.

79. Wyznaczyć kąt nachylenia do $\Pi_1$ płaszczyzny $\perp \Pi_2$ i nawzajem.

80. Wyznaczyć ślad pionowy płaszczyzny, której ślad poziomy jest dany i która jest nachylona do płaszczyzny poziomej pod danym kątem $\theta_1$, równym w szczególności: a) $45^0$; b) $30^0$; c) $60^0$; d) $80^0$.

81. Wyznaczyć ślad poziomy płaszczyzny, której ślad pionowy i kąt nachylenia do $\Pi_2$ są dane; kątowi nachylenia $\theta_2$ nadać kolejno wartości z poprzedniego zadania.

82. Wyznaczyć (w dowolny sposób) płaszczyzny, przechodzące przez dany punkt i tworzące odpowiednio z płaszczyznami rzutu $\Pi_1$ i $\Pi_2$ kąty: a) $90^0$ i $45^0$; b) $90^0$ i $30^0$; c) $45^0$ i $45^0$; d) $60^0$ i $30^0$; e) $60^0$ i $60^0$; f) $75^0$ i $60^0$; g) $47^0$ i $63^0$; h) $15^0$ i $60^0$.

83. Wyznaczyć kąty dwuścienne, utworzone przez dwie płaszczyzny, prostopadłe do tėj samej płaszczyzny rzutów $\Pi_1$ lub $\Pi_2$.

84. Wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej płaszczyzny $\alpha$ do płaszczyzny $\beta \perp x$.

85. Wyznaczyć kąty, utworzone przez dwie dowolne płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$, dane zapomocą śladów. Przypadek szczególny: $\alpha \perp \Pi_1$, $\beta \perp \Pi_2$.

86. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów, przechodzącej przez dany punkt i tworzącej z płaszczyzną o danych śladach, prostopadłą do tej samej płaszczyzny rzutu, dany kąt dwuścienny $\varphi$.

87. a) Mamy dane: kąt liniowy kąta dwuściennego oraz rzuty jednej ze ścian tego kąta o kształcie równoległoboku, którego jeden określony bok ma być krawędzią kąta dwuściennego. Wyznaczyć drugą ścianę i nadać jej również kształt równoległoboku. b) To samo, gdy jedna płaszczyzna jest dana, a druga ma być wyznaczona zapomocą śladów.

88. Są dane rzuty kąta trójściennego w dowolnem położeniu; wyznaczyć rzuty kąta trójściennego, biegunowego czyli spełniającego względem danego.

89. Są dane rzuty kąta trójściennego w dowolnem położeniu; wyznaczyć wszystkie jego kąty płaskie i dwuścienne.

90. Są dane kąty dwuścienne kąta trójściennego; wyznaczyć jego kąty płaskie. *Wskazówka:* użyć kąta trójściennego spełniającego.

91. Są dane: dwa kąty płaskie kąta trójściennego oraz kąt dwuścienny, zawarty pomiędzy płaszczyznami tych kątów. Wyznaczyć pozostałe kąty.

92. Są dane: dwa kąty dwuścienne oraz kąt płaski, zawarty pomiędzy ich krawędziami. Wyznaczyć pozostałe elementy kąta trójściennego.

## ROZDZIAŁ VIII.

# Wielościany.

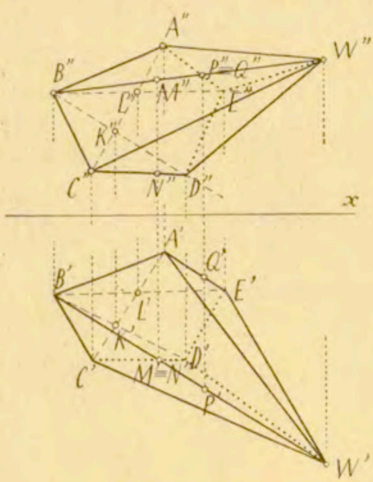
§ 43. **Określenia; zagadnienia co do widzialności i niewidzialności.** Odróżniamy wśród brył geometrycznych: 1) bryły, ograniczone przez *powierzchnie wielościenne*, t. j. powierzchnie, złożone z wielokątów, łączących się ze sobą wzdłuż wspólnych boków; 2) bryły, ograniczone przez powierzchnie krzywe, lub też przez powierzchnie krzywe i części płaszczyzn. Bryły pierwszego rodzaju nazywamy, jak wiadomo, wielościanami; wielokąty ograniczające wielościan — ścianami, a ich wierzchołki i boki — wierzchołkami i krawędziami wielościanu. Wielościan jest wypukły, jeżeli *każda* z jego ścian ma tę własność, iż wszystkie pozostałe ściany leżą po tej samej stronie jej płaszczyzny. Jak już wspominaliśmy na początku tej książki, wyobrażamy wielościany na płaszczyznach rzutów w ten sposób, że wykreślamy rzuty ich krawędzi, odróżniając przy tem krawędzie widzialne i niewidzialne: widzialnym odpowiadają linie ciągłe, niewidzialnym—linie kropkowane. Zasadę najogólniejszą odróżniania części widzialnych i niewidzialnych wysłowiliśmy już w § 20-ym; dodamy tu jednak do niej pewne szczególne wskazówki praktyczne, dotyczące wielościanów.

Jeżeli mamy jakąś prostą nieograniczoną i powierzchnię wielościenną ograniczoną, to mogą zachodzić przypadki następujące: 1) prosta nie ma żadnego punktu wspólnego z powierzchnią; 2) prosta spotyka powierzchnię ale nie wchodzi *wewnątrz* ograniczonej przez nią bryły, t. j. żaden z jej punktów nie jest punktem *wewnętrznym* wielościanu; przytem prosta może przechodzić przez jeden lub więcej wierzchołków wielościanu, przystawać do jednej lub kilku ścian albo krawędzi i t. p.; 3) prosta posiada punkty, należące do punktów wewnętrznych wielościanu; w takim razie muszą istnieć *co najmniej dwa punkty*, w których prosta przebija powierzchnię wielościenną, t. j. przechodzi z jej strony wewnętrznej na zewnętrzną lub przeciwnie, zależnie od obranego zwrotu; punkty przebicia mogą być wierzchołkami powierzchni, leżeć na jej krawędziach, lub wewnątrz ścian. Prosta, spotykająca powierzchnię wielościenną w punkcie wewnętrznym którejś ze ścian (i nie przystająca do niej), musi wejść wewnątrz bryły, a więc należy *zawsze* do tej kategoryi. Jeżeli wielościan jest wypukły, to z samego określenia tego pojęcia wynika niemal bezpośrednio, że prosta, zawierająca punkty wewnętrzne wielościanu, nie może posiadać *więcej niż dwa punkty wspólne* z powierzchnią wielościanu—a więc *przebija ją zawsze dokładnie w dwu punktach.*

Przypuśćmy teraz, że chodzi o zbiór prostych, rzutujących różne punkty wielościanu wypukłego na płaszczyznę rzutów — równoległych, lub przeciągniętych przez środek rzutu, położony w odległości skończonej. Rzutem każdej ze ścian — z wyjątkiem tych, które należą do płaszczyzn rzutujących, a które zostaną wyobrażone w postaci odcinków — będzie odpowiedni wielokąt na płaszczyźnie rzutu. Z powodu, że każda prosta rzutująca, która przechodzi przez punkt wewnętrzny którejkolwiek z odpowiednich ścian, musi, jak stwierdziliśmy, przebijać w jednym jeszcze punkcie powierzchnię wielościenną wypukłą, wszystkie te wielokąty *nakrywają dwukrotnie* pewną część płaszczyzny rzutu. Granicę tego obszaru stanowi pewna linia łamana, którą nazywamy *konturem* czyli *zarysem pozornym* wielościanu, a która się składa z rzutów pewnej liczby jego krawędzi. Przechodząc do samego wielościanu, dobierzmy jego krawędzie w taki sposób: 1) jeżeli jakiś bok konturu pozornego jest rzutem jednej tylko krawędzi wielościanu, to weźmy tę krawędź; 2) jeżeli bok zarysu pozornego stanowi rzut dwu krawędzi jednocześnie, to weźmy tę z nich, która się znajduje pomiędzy okiem widza a drugą, przy założeniu, że to oko jest położone w środku rzutu, lub też oddaliło się wraz z nim nieskończenie wzdłuż pewnej prostej w określoną stronę, gdy chodzi o rzut równoległy. W ten sposób otrzymujemy na powierzchni wielościennej pewną linię łamaną zamkniętą, zwaną *konturem istotnym* czyli *zarysem istotnym* wielościanu, przy danym punkcie widzenia. Z uwag powyższych i określenia zarysu istotnego wynika, że odgranicza on część widzialną powierzchni wielościennej od jej części niewidzialnej: jeżeli tedy znamy układ ścian i zarys istotny, a ponadto potrafiliśmy orzec coś stanowczego co do widzialności lub niewidzialności jednej ze ścian, nie leżących w płaszczyznach rzutujących lub jednej z krawędzi o rzucie położonym wewnątrz zarysu pozornego, to zagadnienie co do widzialności i niewidzialności jest już rozstrzygnięte. Można tu jeszcze wypowiedzieć następujące wskazówki praktyczne, łatwe do uzasadnienia: 1) zarys pozorny należy wykreślać zawsze jako rzut linii widzialnej, ponieważ jest on rzutem zarysu istotnego; 2) jeżeli mamy rzut jakiegoś wierzchołka, położony wewnątrz zarysu pozornego, to w tym wierzchołku schodzą się albo a) *same krawędzie widzialne* albo też b) *same krawędzie niewidzialne*; 3) rzuty dwu krawędzi widzialnych albo dwu krawędzi niewidzialnych nie mogą się przecinać między swymi punktami końcowymi. Zaznaczamy raz jeszcze, że te uwagi i przepisy nie stosują się do wielościanów wklęsłych, na których np. można w pewnych przypadkach odróżnić więcej niż jedną osobną część widzialną i więcej niż jedną niewidzialną i t. d.

Wśród wielościanów zasługują na szczególniejszą uwagę: 1) ostrosłupy; 2) graniastosłupy; 3) wielościany foremne. Nie roztrząsając znanych określeń tych brył, zaznaczymy w tem miejscu, że będziemy nazywali *powierzchnią ostrosłupową nieograniczoną* powierzchnię, utworzoną przez prostą, która porusza się w ten sposób, że przechodzi wciąż przez ten sam punkt stały, stanowiący wierzchołek powierzchni i posiada zawsze punkt wspólny z pewną linią łamaną, nie mieszczącą się w jednej płaszczyźnie z wierzchołkiem, a stanowiącą t. zw. *kierownicę* powierzchni, czyli, jak się mówi, wciąż się na niej opiera. Podobnież się tworzy *powierzchnia graniastosłupowa nieograniczona*, z tą różnicą, że prosta poruszająca się, czyli tworząca powierzchni, nie przechodzi przez punkt stały lecz zachowuje kierunek stały, tak że różne jej położenia są równoległe. Innemi słowy: każda z tych powierzchni jest powierzchnią, rzutującą kierownicę, z danego środka rzutów w pierwszym przypadku, przy określonym kierunku rzutów równoległych, w drugim. Oczywiście, ostrosłup w zwykłem znaczeniu tego słowa może być uważany za bryłę, ograniczoną a) przez część dowolnej płaszczyzny siecznej, zawartą wewnątrz powierzchni ostrosłupowej nieograniczonej o kierownicy zamkniętej i b) przez część tej powierzchni, zawartą pomiędzy płaszczyzną sieczną a wierzchołkiem. Podobnież z powierzchni graniastosłupowej nieograniczonej powstaje, przy pomocy dwu równoległych płaszczyzn siecznych, bryła znana jako graniastosłup. Część a) powierzchni ostrosłupa stanowi, jak wiadomo, jego podstawę, część b)—złożona z trójkątów—powierzchnię boczną; graniastosłup, wobec istnienia dwu płaszczyzn siecznych, posiada dwie podstawy a jego powierzchnia boczna składa się z równoległoboków. Rzecz jasna, że ostrosłup jest wyznaczony dokładnie przez podstawę i wierzchołek; graniastosłup przez jedną z podstaw i jedną z krawędzi bocznych, t. j. nie należących do żadnej podstawy (lub ogólniej, przez dowolny odcinek, równoległy do krawędzi i równy im, a wychodzący z określonego punktu podstawy, z odpowiedniej strony). Zastrzegamy się jeszcze w tem miejscu, że będziemy badali w dalszym ciągu niemal wyłącznie ostrosłupy i graniastosłupy *wypukłe* — i że takie tylko będziemy mieli na myśli, gdy nazw: ostrosłup i graniastosłup używać będziemy bez żadnych omówień i zastrzeżeń w tym względzie.

§ 44. **Konstrukcya rzutów ostrosłupa i graniastosłupa.** Zadanie 1-sze. Wykreślić rzuty ostrosłupa, gdy mamy dane: rzuty wierzchołka, rzut poziomy podstawy oraz rzuty pionowe trzech wierzchołków podstawy.



Rys. 143.

Są dane np.: $W'$, $W''$; $A'B'C'D'E'$ oraz $A''$, $B''$, $C''$. Przedewszystkiem musimy wyznaczyć $D''$ i $E''$ tak, aby punkty $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$ leżały istotnie w jednej płaszczyźnie. Można użyć w tym celu powinowactwa równoległego, o ile oś powinowactwa, t. j. prosta spółrzutowa $g_\alpha' \equiv g_\alpha''$ (p. § 30) jest położona w obrębie rysunku. Można również użyć odpowiedniej siatki z prostych i punktów pomocniczych.

Np. na rys. 143-im wyznaczyliśmy

$$K' \equiv [[A'C'] \, [B'D']], \quad L' \equiv [[A'C'] \, [B'E']],$$

skąd $K''$, $L''$ na $[A''C'']$ i wreszcie $D'' \equiv [[B''K''] \, [\supset D' \perp x]]$ oraz

$$E'' \equiv [[B''L''] \, [\supset E' \perp x]].$$

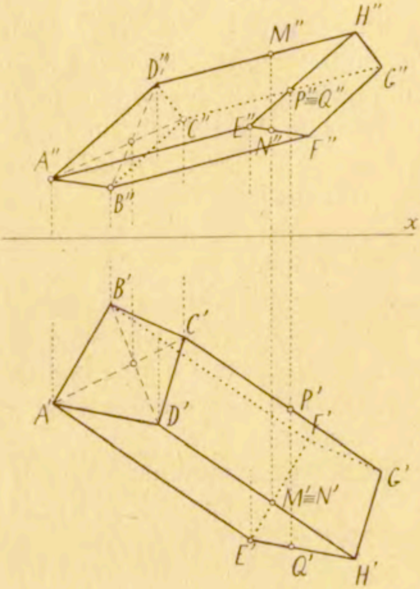
Łączymy teraz $W'$ z punktami $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $W''$ z $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, $E''$ oraz $A''$ z $B''$, $B''$ z $C''$, $C''$ z $D''$, $D''$ z $E''$, $E''$ z $A''$, poczem stwierdzamy, co następuje, przed ostatecznem wykreśleniem tych odcinków w postaci ciągłej lub kropkowanej:

I. Zarysem rzutu poziomego ostrosłupa jest łamana $A'B'C'W'E'A'$; jest to *zarys pozorny* ostrosłupa dla oka, które się oddaliło nieskończenie ponad płaszczyznę poziomą, w kierunku do niej prostopadłym (p. § 20), t. j. wzdłuż dowolnej prostej rzutującej. *Zarys istotny* stanowi linia łamana skośna $ABCWEA$, utworzona z krawędzi ostrosłupa, której rzutem poziomym jest $A'B'C'W'E'A'$. Łamana ta dzieli powierzchnię ostrosłupa na 2 części: 1-sza składa się z podstawy $ABCDE$ i ścian bocznych $WCD$, $WDE$; 2-ga—ze ścian bocznych $WEA$, $WAB$, $WBC$. Aby rozstrzygnąć, która z tych części jest widzialna, bierzemy *dwie krawędzie skośne, których rzuty poziome przecinają się wewnątrz konturu pozornego*, np. $WB$ i $CD$. Punkt $[[W'B'][C'D']] = M' = N'$ jest wspólnym rzutem poziomym punktu $M$ na $WB$ i punktu $N$ na $CD$. Znajdując $M''$ na $W''B''$ i $N''$ na $C''D''$, stwierdzamy, że punkt $M$ leży powyżej $N$, a więc punkt $M$ i wraz z nim krawędzie $WB$ i $WA$ i ściany boczne $WEA$, $WAB$, $WBC$ są widzialne—pozostała część powierzchni ostrosłupa jest niewidzialna.

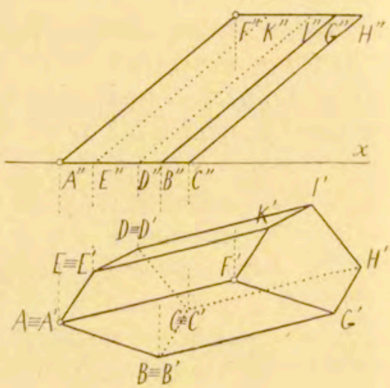
II. *Rzut pionowy*. Dla oka, oddalonego nieskończenie poprzed $\Pi_2$ wzdłuż którejś z prostych rzutujących pionowo (§ 20) zarysem pozornym jest $A''B''C''D''W''A''$; zarysem istotnym — $ABCDWA$—a więc *inna* grupa krawędzi, niż poprzednio! Stwierdzając, że z dwu punktów $P$ i $Q$ o wspólnym rzucie pionowym punkt $P$ krawędzi $WC$ jest bardziej naprzód wysunięty (co poznajemy po rzucie poziomym, dalszym od osi), niż punkt $Q$ krawędzi $AE$, stwierdzamy, że część widzialna, do której ten punkt musi należeć, składa się ze ścian bocznych: $WAB$, $WBC$, $WCD$. Pozostałe części powierzchni ostrosłupa są niewidzialne.

*Zadanie 2-gie*. Mamy dane: rzuty jednej z krawędzi graniastosłupa, rzut poziomy (lub pionowy) jednej z podstaw i rzuty pionowe (lub poziome) trzech wierzchołków tej samej podstawy. Wykreślić rzuty graniastosłupa.

Zaczynamy, jak poprzednio, od dopełnienia jednego z rzutów podstawy, omawianej w warunkach zadania. Mając np. dane: $A'E'$ i $A''E''$ oraz wielokąt $A'B'C'D'$ i punkty $A''$, $B''$, $C''$, wyznaczamy $D''$ i łączymy $A''$ z $B''$, $B''$ z $C''$, $C''$ z $D''$, $D''$ z $A''$. Następnie kreślimy odcinki $B'F'$, $C'G'$ i $D'H'$, równe $A'E'$ i równoległe do $A'E'$ oraz odcinki $B''F''$, $C''G''$ i $D''H''$, równe $A''E''$ i równoległe do $A''E''$; wreszcie kreślimy rzuty $E'F'G'H'$ i $E''F''G''H''$ drugiej podstawy. Dla oka, patrzącego na płaszczyznę poziomą: zarysem pozornym jest $A'B'C'G'H'E'A'$, zarysem istotnym — $ABCGHEA$; z punktów $M$ na $DH$ i $N$ na $EF$ o wspólnym rzucie $M'\equiv N'\equiv[[D'H'][E'F']]$ jest widzialny punkt $M$ — a wraz z nim ściany: $CDHG$, $DAEH$, $ABCD$. Co do oka, patrzącego na płaszczyznę pionową, poprzestaję na odesłaniu do rysunku.



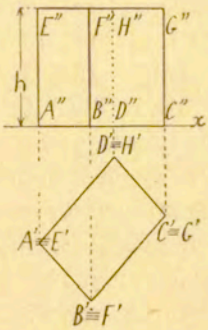

Rys. 144.



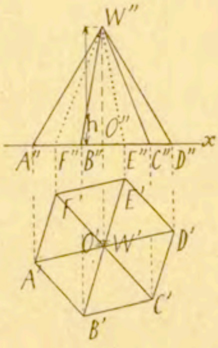

Rys. 145.

Zasługują na uwagę te przypadki szczególne, gdy chodzi o rzuty ostrosłupa, którego podstawa przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoległa, lub graniastosłupa, którego jedna z podstaw spełnia ten warunek, a więc i druga musi być w każdym razie równoległa do danej płaszczyzny rzutu. Aby ostrosłup był wyznaczony, przy takiem zastrzeżeniu, wystarczy mieć dane: rzuty jednej z krawędzi bocznych, jeden z rzutów podstawy i rzut na drugą płaszczyznę rzutów jednego z wierzchołków podstawy—sformułować odpowiednie warunki dla graniastosłupa! Co do widzialności i niewidzialności, można stosować sposób ogólny, wskazany przed chwilą — przy pewnej wprawie jednak wystarcza do orzeczenia w tym względzie jeden rzut oka.

Tak np. na rysunku 145-ym widać odrazu, że dla oka, patrzącego na płaszczyznę poziomą, z dwu podstaw graniastosłupa jest widzialna podstawa *FGHIK*, jako położona wyżej, druga zaś — niewidzialna. Z widzialności krawędzi *IK*, *KF* i *FG* wynika (p. poprzedni paragraf) widzialność krawędzi bocznych *AF* i *EK* i t. d. Co do rzutu pionowego, wystarczy tylko zauważyć, że część *ABC* obwodu jednej z podstaw leży przed częścią *AEDC*, a przeto ściany boczne *ABGF* i *BCHG* leżą *przed* pozostałemi ścianami bocznemi i jako takie są widzialne. Co do podstaw, z każdej z nich, ściśle biorąc, jest widzialna tylko część obwodu: *ABC* i *FGH*. Na rys. 146-ym, zrozumiałym bez bliższych wyjaśnień, wyznaczyliśmy rzutu równoległościanu prostego podług danego rzutu poziomego podstawy, która ma przystawać do $\Pi_1$, oraz wysokości h; to samo uczyniliśmy w stosunku do ostrosłupa foremnego sześciokątnego na rys. 147-ym.



Rys. 146.



Rys. 147.

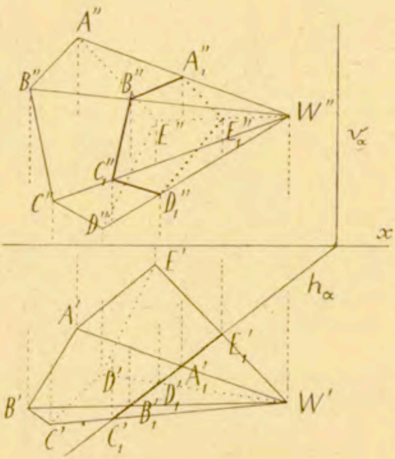
Dołączyć tu jeszcze można zadania typowe następujące:

Zadanie 3-cie. Są dane: kład podstawy ostrosłupa na płaszczyznę poziomą lub pionową, ślady płaszczyzny podstawy $\alpha$, kład spodka wysokości ostrosłupa $h$ t. j. punktu $O \equiv [h\alpha]$ oraz długość wysokości. Wykreślić rzuty ostrosłupa.

Zadanie 4-te. Są dane: kład jednej z podstaw graniastosłupa prostego na $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, ślady płaszczyzny $\alpha$ tej podstawy oraz długość wysokości graniastosłupa—wykreślić jego rzuty.

W obu przypadkach należy wyznaczyć rzuty podstawy, o której mowa (§ 40, ćw. 48 z rozd. VII) oraz rzuty wysokości ostrosłupa lub jednej z krawędzi graniastosłupa, prostopadłe odpowiednio do śladów płaszczyzny podstawy; punkt końcowy otrzymujemy zapomocą odmierzenia odcinka o danej długości (p. § 18). Dalszy przebieg rozwiązania—jak wyżej.

**§ 45. Przekroje ostrosłupów i graniastosłupów w przypadkach szczególnych. Punkty przebicia powierzchni wielościennej przez prostą.** Płaszczyzna i dowolny wielościan mogą posiadać punkty wspólne, których zbiór stanowi w ogólności pewien wielokąt płaski, sprowadzający się w poszczególnych przypadkach np. do trójkąta lub równoległoboku; może się zdarzyć również, że płaszczyzna przechodzi tylko przez jeden z wierzchołków wielościanu lub jedną z jego krawędzi, albo też że przystaje do jednej z jego ścian, nie posiadając pozatem więcej punktów wspólnych. O ile mamy do czynienia z właściwym przekrojem, o kształcie trójkątnym lub wielokątnym, to wierzchołkami jego są punkty przebicia płaszczyzny siecznej przez krawędzie wielościanu, a bokami—linie przecięcia jej ze ścianami. Zaczniemy od paru przypadków łatwiejszych.




Rys. 148.

*Zadanie 1.* Wyznaczyć przekrój wielościanu płaszczyzną, prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów. Mamy naprzykład dane: rzuty $W'A'B'C'D'E'$ i $W''A''B''C''D''E''$ oraz ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny $\alpha \perp \Pi_1$. Odnajdujemy bez trudności punkty przebicia płaszczyzny $\alpha$ przez krawędzie wielościanu (§ 28), pamiętając o tem, że ich rzuty poziome muszą należeć do $h_\alpha$. Więc $A_1' \equiv [[W'A']h_\alpha]$, $B_1' \equiv [[W'B']h_\alpha]$ i t. p. Oczywiście bierzemy pod uwagę tylko te krawędzie, których rzuty poziome przecinają $h_\alpha$, ponieważ dla innych punkty przecięcia leżałyby poza wielościanem. Podług rzutów poziomych wyznaczamy odrazu

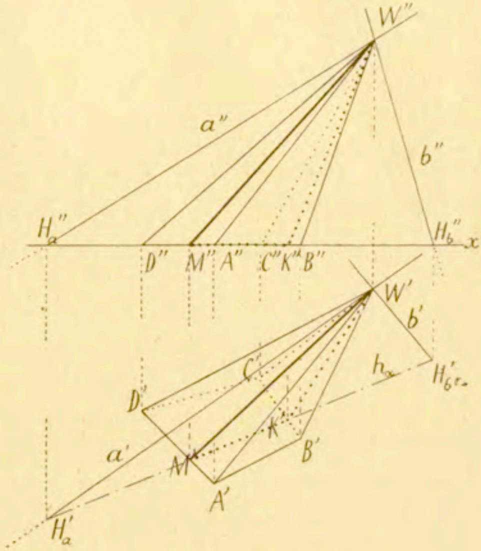
$$A_1'' \equiv [[\supset A_1' \perp x]\,[W''A'']],\quad B_1'' \equiv [[\supset B_1' \perp x]\,[W''B'']] \text{ i t. d.}$$

Następnie wystarczy jedynie połączyć $A_1''$, $B_1''$.... odcinkami, odpowiadającymi odcinkom, położonym na ścianach wielościanu, w danym przypadku—na ścianach bocznych ostrosłupa i odróżnić części widzialne od niewidzialnych, na mocy tej prostej uwagi, że na ścianach widzialnych wielościanu muszą leżeć widzialne boki przekroju, a na niewidzialnych—niewidzialne. Więc rzuty $A_1''B_1''$, $B_1''C_1''$, $C_1''D_1''$ odpowiadają bokom widzialnym przekroju, $D_1''E_1''$ oraz $E_1''A_1''$—bokom niewidzialnym.

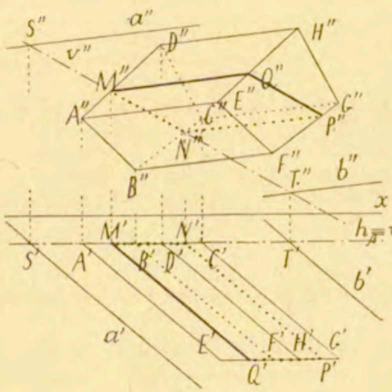
*Zadanie 2-gie.* Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołek.

*Zadanie 3-cie.* Wyznaczyć przekrój graniastosłupa płaszczyzną, równoległą do krawędzi bocznych.

W obu powyższych przypadkach, o ile tylko płaszczyzna sieczna „przecina“ bryłę, we właściwem znaczeniu tego słowa, t. j. zawiera jej punkty wewnętrzne, z góry orzec możemy, jaki kształt musi mieć przekrój: będzie to mianowicie trójkąt w zad. 2-giem, a równoległobok o dwu bokach, położonych na podstawach, a dwu innych, umieszczonych na powierzchni bocznej i równoległych (lub przystających) do krawędzi bocznych, w zad. 3-em. Wystarczy tedy wyznaczyć linię przecięcia płaszczyzny siecznej z płaszczyzną podstawy ostrosłupa i końce jej odcinka, należącego do samej podstawy, połączyć z wierzchołkiem — lub, gdy chodzi o graniastosłup, wyznaczyć podobnież linię przecięcia płaszczyzny siecznej z jedną z podstaw i z końców jej odcinka, należącego do samej podstawy, przeciągnąć proste, równoległe do krawędzi bocznych aż do przecięcia się z krawędziami drugiej podstawy, wreszcie połączyć punkty otrzymane. Zadanie ułatwia się w znacznym stopniu, gdy płaszczyzna podstawy ostrosłupa lub płaszczyzny obu podstaw graniastosłupa *są prostopadłe do jednej z płaszczyzn rzutu* — w szczególności równoległe lub przystające




Rys. 149



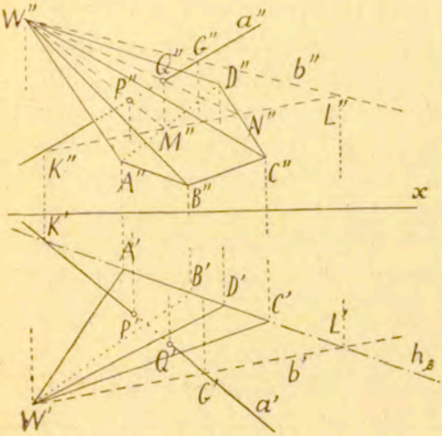

Rys. 150.

do drugiej. Tak np. na rys. 149-ym mieliśmy dane rzuty ostrosłupa, stojącego na płaszczyźnie poziomej oraz rzuty prostych $a$, $b$, zawierających wierzchołek $W$ i wyznaczających płaszczyznę sieczną $\alpha$=pł. $(ab)$. Ślad $h_\alpha$ jest szukaną linią przecięcia $\alpha$ z płaszczyzną podstawy — na $h_\alpha$ otrzymujemy wierzchołki przekroju $M \equiv M'$ i $K \equiv K'$; rzut poziomy przekroju jest to $\triangle W'M'K'$—rzut pionowy odnajdujemy bezpośrednio, wyznaczając $M''$, $K''$ na rzutach $A''D''$ i $B''C''$, nakrywających oś rzutów.

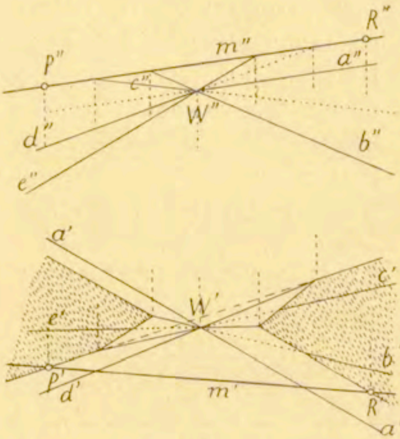
Na rys. 150-ym płaszczyzny podstaw graniastosłupa są równoległe do $\Pi_2$; płaszczyzna sieczna $\alpha$=pł. $(a\ b)$, przytem $a \parallel b \parallel [AE]$ i t. d. Odnajdujemy w tej chwili rzuty puntów $S$ i $T$, w których $a$ i $b$ przebijają pł. $[ABCD] \equiv \beta$: $S' \equiv [a'h_\beta]$, $T' \equiv [b'h_\beta]$, stąd $S''$ i $T''$. Dalej wystarczy przeciągnąć rzut $v'' \equiv [S''T'']$ prostej $v \equiv [\alpha\beta]$, wyznaczyć $M'' \equiv [v''[A''D'']]$ i $N'' \equiv [v''[B''C'']]$, dalej $M'$ i $N'$, a potem wykreślić $M''Q''$ i $N''P''$ równolegle do $A''E''$...., $M'Q'$ i $N'P'$ równolegle do $A'E'$,.... i t. d.

Możemy w tej chwili rozwiązać w postaci najogólniejszej:

*Zadanie 4-te.* Wyznaczyć punkty, w których dana (jak zwykle, zapomocą rzutów) prosta przebija daną powierzchnię wielościenną. Oznaczmy wielościan jedną literą **W**. Weźmy dowolną płaszczyznę $\alpha$, zawierającą daną prostą $a$ i wyznaczmy przekrój $[\alpha \mathbf{W}]$. Punkty, w których $a$ przecina boki wielokąta $[\alpha \mathbf{W}]$, są punktami szukanymi. Konstrukcya najogólniejsza i niezawodna będzie polegała na użyciu płaszczyzny $\alpha$, zawierającej $a$ i prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutu (Zadanie 1-sze): $\alpha$=pł. $[\supset a \perp \Pi_1]$ lub $\alpha$=pł. $[\supset a \perp \Pi_2]$. W pewnych jednak przypadkach dogodniej użyć innej płaszczyzny — mianowicie gdy mamy do czynienia z ostrosłupem lub graniastosłupem o podstawie, prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutu, za płaszczyznę pomocniczą wypadnie wziąć płaszczyznę, zawierającą daną prostą i wierzchołek ostrosłupa w jednym przypadku, a zawierającą daną prostą i równoległą do krawędzi graniastosłupa—w drugim. Tak np. na rys. 151-ym wyznaczyliśmy płaszczyznę pomocniczą $\alpha$ zapomocą danej prostej $a$ i prostej $b \equiv [WG]$, przecinającej ją w punkcie $G$. Oznaczając przez $\beta$ płaszczyznę podstawy $ABCD$, otrzymujemy odrazu rzuty poziome punktów $K \equiv [a\beta]$ i $L \equiv [b\beta]$ i t. d. W istocie wystarczy tylko jeden z rzutów, mianowicie pionowy przekroju, utworzonego przez płaszczyznę pomocniczą $\alpha$: wyznaczywszy rzuty $P'' \equiv [a''[W''M'']]$ i $Q'' \equiv [a''[W''N'']]$ punktów przebicia, odnajdujemy $P'$ i $Q'$ bezpośrednio na $a'$. Co do widzialności i niewidzialności części prostej $a$, łatwo zdać sobie sprawę ze słuszności zasady ogólnej: Gdy prosta przebija płaszczyznę wielościenną wypukłą, to jej część zewnętrzna, ograniczona z jednej strony przez widzialny punkt przebicia, jest w całości widzialna; z części zewnętrznej, ograniczonej przez niewidzialny punkt przebicia, jest niewidzialny odcinek, zawarty pomiędzy tym punktem, a punktem, w którym odpowiedni rzut prostej wychodzi poza kontur pozorny wielościanu. Tak np. w przykładzie, podanym na rys. 151-ym, jest niewidzialna



Rys. 151.



Rys. 152.

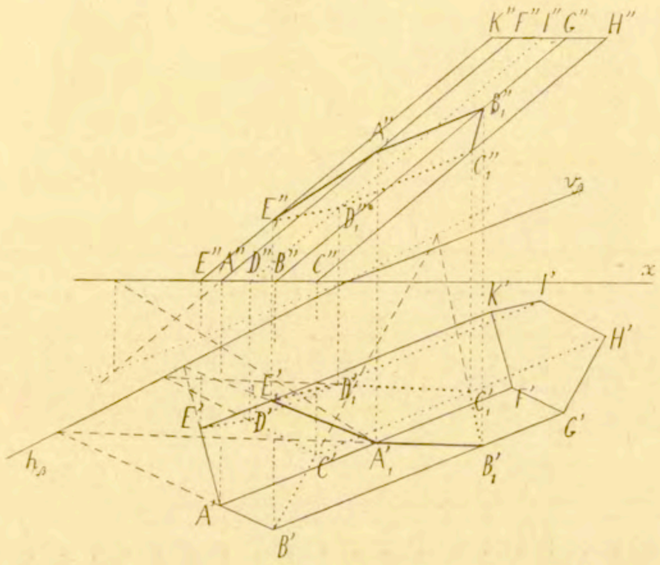
tylko część wewnętrzna ($PQ$) prostej $a$, gdy chodzi o rzut poziomy; ten sam odcinek $PQ$ i część półprostej od $P$ na lewo, gdy chodzi o rzut pionowy.

Na rys. 152-ym wyobraziliśmy jeszcze w układzie dwu rzutów powierzchnię ostrosłupową nieograniczoną bez części górnej, odciętej przez płaszczyznę sieczną $\mu \perp \Pi_2$ i $\parallel$ do krawędzi $a$, oraz prostą $m$ (należącą do $\mu$), przebijającą tę powierzchnię w punktach $P$ i $R$. Część wewnętrzną powierzchni ostrosłupowej wyróżniliśmy przez kreskowanie.

§ 46. **Przekroje ostrosłupa i graniastosłupa w warunkach najogólniejszych.** Przetnijmy jakąkolwiek powierzchnię ostrosłupową lub graniastosłupową, nieograniczoną, dwiema płaszczyznami nierównoległemi $\alpha$ i $\beta$, posiadającemi punkty wspólne ze wszystkiemi krawędziami. Otrzymamy w ten sposób dwa wielokąty perspektywiczne, t. j. takie, że jeden z nich może być uważanym za rzut środkowy (gdy chodzi o powierzchnię ostrosłupową) lub równoległy (gdy chodzi o powierzchnię graniastosłupową) drugiego i nawzajem (§ 1). Za punkty odpowiednie dwu takich wielokątów należy uważać takie, które leżą na jednej prostej z wierzchołkiem ostrosłupa w pierwszym przypadku, a na prostej równoległej lub przystającej do krawędzi graniastosłupa w drugim. Proste, łączące dwa punkty jednego przekroju $A_1$, $B_1$ i dwa odpowiednie punkty $A_2$ i $B_2$ drugiego przekroju, leżą tedy w jednej płaszczyźnie (zawierającej wierzchołek powierzchni ostrosłupowej lub równoległej do krawędzi powierzchni graniastosłupowej), a więc, o ile nie są równoległe, muszą się przecinać. Punkt przecięcia musi leżeć na prostej $o \equiv [\alpha\beta]$, ponieważ $[A_1B_1] \subset \alpha$, $[A_2B_2] \subset \beta$. Prosta $o \equiv [\alpha\beta]$ jest tedy tem, cośmy nazwali osią kolineacyi (§ 30). Oczywiście, te same związki zostaną zachowane w rzutach, a mianowicie: 1) rzuty poziome $[A_1'A_2']$, $[B_1'B_2']$ i t. d. prostych, łączących punkty odpowiednie dwu przekrojów, przechodzą wszystkie przez rzut poziomy wierzchołka ostrosłupa, lub też są równoległe, gdy mowa o graniastosłupie; 2) rzuty poziome par prostych odpowiednich, jak np.: $[A_1'B_1']$ i $[A_2'B_2']$ i t. d. przecinają się na rzucie poziomym $o'$:

$$[[A_1'B_1']\,[A_2'B_2']] \subset o', \quad [[B_1'C_1']\,[B_2'C_2']] \subset o' \ldots \text{ i t. d.}$$

Wogóle: $[p_1'p_2'] \subset o'$ ($p_1$, $p_2$ — dwie dowolne proste dwu przekrojów, odpowiadające sobie). To samo się stosuje do rzutów pionowych. Innemi słowy, podług określeń, wyżej już podanych (§ 30): rzuty tego samego rodzaju (poziome lub pionowe) dwu przekrojów ostrosłupa nieograniczonego są ze sobą skolineowane w ten sposób, że środkiem kolineacyi jest odpowiedni rzut wierzchołka, a osią — odpowiedni rzut linii przecięcia płaszczyzn przekrojów. Kolineacya dwu przekrojów graniastosłupa nieograniczonego, różni się od poprzedniej tem tylko, że jest równoległa, t. j. że stanowi tak zwane *powinowactwo*, dla którego elementem charakterystycznym zamiast środka kolineacyi jest kierunek powinowactwa, wyznaczony przez rzuty odpowiednie krawędzi: oś kolineacyi jest tak samo określona jak poprzednio. W szczególności, gdy mamy do czynienia z ostrosłupem lub graniastosłupem ograniczonym, za jeden przekrój, dany, uważać możemy podstawę ostrosłupa lub jedną z podstaw graniastosłupa. Aby wyznaczyć np. rzut poziomy przekroju, wyznaczonego przez daną płaszczyznę $\beta$, wystarczy tedy: 1) wyznaczyć oś kolineacyi, t. j. rzut poziomy linii przecięcia $o \equiv [\alpha\beta]$ płaszczyzny $\beta$ z płaszczyzną podstawy $\alpha$; 2) znaleźć bezpośrednio rzut poziomy jakiegokolwiek punktu przekroju, odpowiadającego określonemu punktowi podstawy; najdogodniej wyznaczyć w tym celu punkt przebicia płaszczyzny $\beta$ przez jedną z krawędzi bocznych. Stosując następnie postępowanie z § 30, możemy wyznaczyć rzuty poziome innych wierzchołków przekroju, a podług nich wyznaczyć na odpowiednich rzutach pionowych krawędzi bocznych rzuty pionowe; można też, dla sprawdzenia, powtórzyć tę samą konstrukcyę w zastosowaniu do rzutów

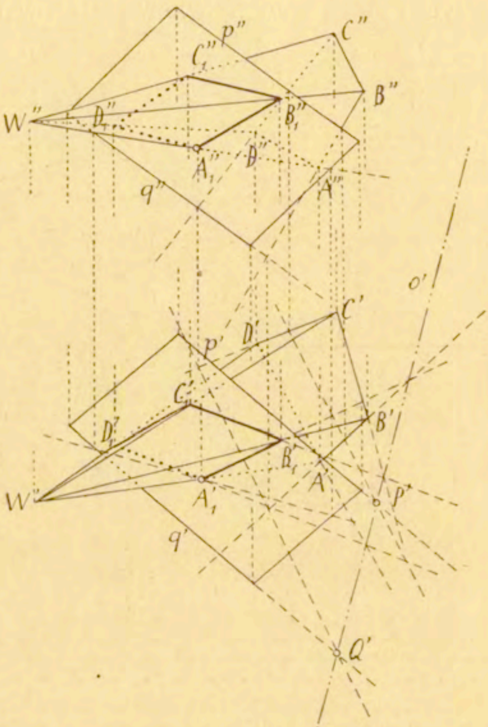



Rys. 153.

pionowych (osią kolineacyi — $o''$; środkiem kolineacyi, gdy chodzi o ostrosłup — rzut pionowy $W''$ wierzchołka, lub też: kierunkiem kolineacyi, gdy chodzi o graniastosłup — kierunek rzutów pionowych krawędzi bocznych; rzut pionowy jednego z wierzchołków przekroju musi być z góry wyznaczony).

Zauważmy, że gdy prosta $o \equiv [\alpha\beta]$ przecina obwód podstawy bryły, położonej w płaszczyźnie $\alpha$, to jej odcinek, zawarty wewnątrz tego wielokąta, stanowi oczywiście jeden z boków przekroju: zadanie jest ułatwione z powodu zmniejszenia się liczby konstrukcyi, opartych na wskazanym związku kolineacyjnym.

Na rys. 153-im podaliśmy konstrukcyę przekroju graniastosłupa, stojącego na płaszczyźnie poziomej rzutów, gdy płaszczyzna przekroju jest dana zapomocą śladów $h_\beta$, $v_\beta$. Ponieważ w tym przypadku płaszczyzna podstawy $\alpha \equiv \Pi_1$, przeto osią kolineacyi, wiążącej rzut poziomy $A'B'C'D'E' \equiv ABCDE$ podstawy z rzutem poziomym $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ przekroju jest $h_\beta \equiv [\beta \Pi_1]$. Rzut $A_1'$ na $A'F'$ wyznaczamy bezpośrednio, jako rzut punktu $[\beta[AF]]$ (§ 28),




Rys. 154.

rzuty innych wierzchołków przekroju—przy pomocy powinowactwa. Rzuty pionowe $A_1''$, $B_1''$,.... dają się wyznaczyć w zależności od rzutów poziomych $A_1'$, $B_1'$...., jako punkty przecięcia odpowiednich linii rzutu ($\perp x$) z rzutami pionowymi odpowiednich krawędzi.

Na rys. 154 płaszczyzna sieczna $\beta$ została dana w postaci płata równoległobocznego, którego dwa boki stanowią odcinki prostych $p$ i $q$. Wyznaczając rzuty $P'$ i $Q'$ puktów $P \equiv [p\alpha]$

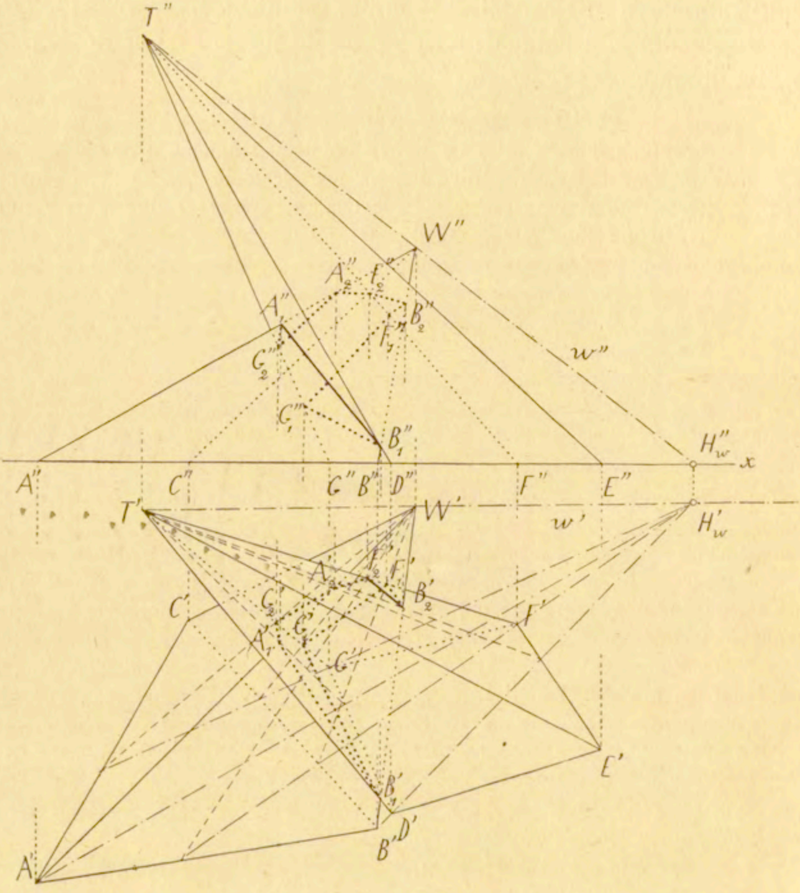
i $Q=[q\alpha]$ ($\alpha$ oznacza w tym paragrafie płaszczyznę podstawy ostrosłupa), otrzymujemy rzut poziomy osi kolineacyi $o=[\beta\alpha]$, a mianowicie $o'=[P'Q']$. Wyznaczając w ten sam sposób rzut $A_1'$ punktu $[\beta[WA]]$ (§ 24), przechodzimy do użycia kolineacyi, skąd otrzymujemy $B_1'$, $C_1'$, $D_1'$. Rzuty pionowe $A_1''$...., $D_1''$ możemy wyznaczyć, jak poprzednio, zapomocą linii rzutów, albo też bezpośrednio zapomocą przekształcenia kolineacyjnego o osi $o''=[P''Q'']$. Zastosowanie obu konstrukcyi jednocześnie może być doskonałą próbą dokładności rysunku.

§ 47. **Przenikanie się wielościanów.** Zastosowaniem powyżej wyłożonych metod jest jeszcze rozwiązanie zagadnienia, polegającego na wyznaczeniu części wspólnej dwu danym wielościanom oraz linii łamanych, podług których przecinają się ich powierzchnie. W przypadku szczególnym może to być jedna linia łamana zamknięta; mogą jednak istnieć dwie takie osobne linie lub więcej. Innemi słowy możemy sobie wyobrazić, że jeden wielościan wnika w drugi, wypierając lub odcinając pewną część tegoż; lub też, że jeden z wielościanów przedziurawia drugi, wchodząc wzdłuż jednej linii łamanej, a wychodząc wzdłuż drugiej i t. p. Boki takich linii łamanych są to linie przecięcia ścian jednego wielokąta ze ścianami drugiego; wierzchołki są to punkty przebicia ścian jednego przez krawędzie drugiego i nawzajem. Zadanie tedy, jak zaznaczyliśmy, sprowadza się do zadań poprzednich; najczęściej przy tem wyznaczamy nie boki, jako linie przecięcia, które należałoby potem odpowiednio ograniczyć, lecz wierzchołki, jako punkty przebicia, które należy przedewszystkiem wyznaczyć tak, aby leżały istotnie na odpowiednich krawędziach i ścianach, a nie na ich przedłużeniach, oraz po wyznaczeniu umieć połączyć bokami w odpowiednim porządku, tak mianowicie, iżby łączyły się ze sobą bezpośrednio jedynie wierzchołki, położone na tej samej ścianie jednego wielościanu i na tej samej ścianie drugiego.

Jak wiemy, do wyznaczenia punktu przebicia powierzchni wielościennej przez prostą, potrzeba jakiejś płaszczyzny pomocniczej, zawierającej tę prostą. Gdy mamy do czynienia z ostrosłupem, bywa dogodnie brać w tym celu (§ 45) płaszczyznę, przechodzącą przez daną prostą i przez wierzchołek ostrosłupa. Stosując tę metodę w przypadku, gdy chcemy wyznaczyć punkty przebicia ścian ostrosłupa $WABC$, przez krawędzie ostrosłupa $TDEFG$ i nawzajem, wprowadzimy pęk płaszczyzn:

$$\text{pł. } [W[TD]], \quad \text{pł. } [W[TE]], \quad \text{pł. } [W[TF]], \quad \text{pł. } [W[TG]],$$
$$\text{pł. } [T[WA]], \quad \text{pł. } [T[WB]], \quad \text{pł. } [T[WC]],$$

przecinających się wzdłuż prostej $[WT]$, *łączącej wierzchołki ostrosłupów*. Pierwsze cztery, o ile wogóle przecinają ostrosłup $WABC$, wyznaczają przekroje trójkątne i na obwodach tych przekrojów szukamy punktów przebicia powierzchni $WABC$ przez krawędzie $TD$, $TE$, $TF$, $TG$; na obwodach przekrojów ostrosłupa $TDEFG$, wyznaczonych przez trzy pozostałe, leżą punkty przebicia powierzchni ostrosłupa $TDEFG$ przez krawędzie $WA$, $WB$, $WC$. Oczywiście, o ile widzimy, że jeden z rzutów jakiejś krawędzi jednego ostrosłupa nie nakrywa zupełnie rzutu na tę samą płaszczyznę drugiego ostrosłupa, to możemy pominąć wszelkie konstrukcye pomocnicze, ponieważ możemy być pewni, że odpowiednich punktów przebicia niema zupełnie. Gdy chodzi o figurę, podług której przenikają się dwa graniastosłupy, zastosowanie tej samej myśli zasadniczej polega na użyciu pęku płaszczyzn *równoległych jednocześnie do krawędzi bocznych obu graniastosłupów* i zawierających odpo-



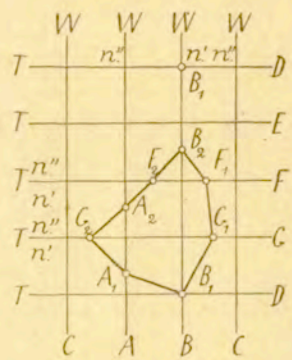

Rys. 155.

wiednio krawędzie każdego z nich. Wreszcie przy poszukiwaniu figury, podług której przecinają się ostrosłup z graniastosłupem, *płaszczyzny pomocnicze, przy zastosowaniu tej samej zasady, winny przechodzić przez wierzchołek ostrosłupa równolegle do krawędzi graniastosłupa,* a więc tworzyć pęk płaszczyzn, przecinających się wzdłuż prostej, równoległej do krawędzi graniastosłupa i przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa.

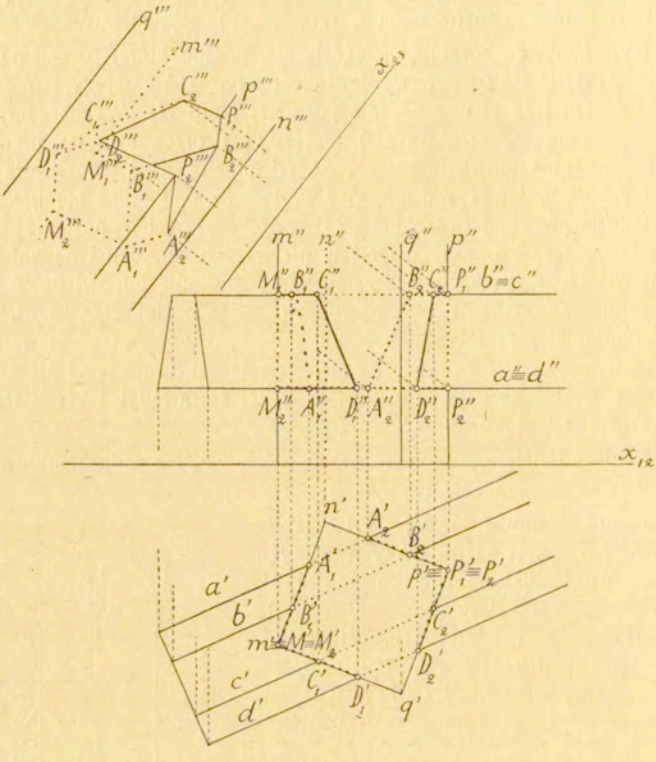
Wskazane sposoby wiodą szybko do celu, gdy mamy do czynienia z ostrosłupami lub graniastosłupami o podstawach, położonych w tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutu (por. § 45); gdy chodzi o powierzchnie ostrosłupowe lub graniastosłupowe nieograniczone, łatwo sprowadzić zagadnienie do tego przypadku, wyznaczając linie przecięcia obu powierzchni z jedną z płaszczyzn rzutu; w innych przypadkach, o ile nie nasuwają się szczególniejsze ułatwienia, można również brać za płaszczyzny pomocnicze płaszczyzny, rzutujące krawędzie (sposób, nadający się do dowolnych wielościanów)—bliższe roztrząsania w tym względzie pomijamy.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć figurę, podług której przenikają się dwa ostrosłupy $WABC$ i $TDEFG$, wyobrażone na rys. 155-ym przy tem założeniu, że podstawy ich leżą w płaszczyźnie poziomej rzutu $\Pi_1$. Wyznaczamy w tym celu ślad poziomy $H_w \equiv H_w'$ prostej $w \equiv [WT]$ i przez ślad ten przeciągamy proste, łączące go odpowiednio z $D'$, $F'$, $G'$ oraz z $A'$ i $B'$ (prosta $[H_w'E']$ jest zbyteczna, ponieważ nie przecina $\triangle A'B'C'$; podobnież pomijamy prostą $[H_w'C']$, jako nie przecinającą czworokąta $D'E'F'G'$) to jest ślady poziome płaszczyzn pomocniczych; łącząc punkty przecięcia pierwszych czterech i obwodu $A'B'C'$ z rzutem wierzchołka $W'$, wyznaczamy rzuty poziome odpowiednich przekrojów ostrosłupa $WABC$, a na ich obwodach—rzuty poziome $D_1' \equiv B_1'$, $F_1'$, $F_2'$, $G_1'$, $G_2'$ punktów przebicia powierzchni tego ostrosłupa przez krawędzie $TD$, $TF$, $TG$. Krawędź $TE$ oczywiście nie przebija ostrosłupa $WABC$. To samo powtarzamy w stosunku do ostrosłupa $TEFGH$ i krawędzi $WA$, $WB$ — znajdujemy rzuty: $A_1'$, $A_2'$, $B_1'$, $B_2'$.

W celu łatwiejszego zorjentowania się co do łączenia punktów przebicia, możemy użyć tabliczki, utworzonej w taki sposób:




Odcinki pionowe $WC$, $WA$, $WB$, $WC$, oznaczają krawędzie o tych samych nazwach, równie jak proste poziome $TD$, $TE$, $TF$, $TG$, $TD$. Pasy pionowe, zawarte między $WC$, $WA$ i t. d., oznaczają odpowiednio ściany: $WCA$, $WAB$, $WBC$ — pasy poziome: ściany $TDE$, $TEF$, $TFG$ i t. d. Chcąc wyrazić, że np. punkt $B_2$ jest punktem przebicia ściany $TEF$ przez krawędź $WB$, umieszczamy punkt $B_2$ w tablicy na $WB$ i wewnątrz pasa, wyobrażającego ścianę $TEF$ i t. p. Nadawszy w ten sposób odpowiednie położenie na tabliczce wszystkim znalezionym punktom przebicia, łączymy je w ten sposób, aby żaden z boków otrzymanej linii łamanej nie przecinał żadnej z prostych $[WA]$, $[WB]$,.... $[TD]$, $[TE]$...., tworzących sieć pomocniczą. W ten sposób otrzymujemy istotne linie przecięcia tych ścian, które się wogóle przecinają, i linie te przenosimy na wykres. Ta sama tabliczka może służyć również do rozstrzygnięcia zagadnień co do widzialności i niewidzialności. Rozstrzygnijmy mianowicie to pytanie w stosunku do *każdego ostrosłupa z osobna* (tak jakgdyby drugiego zupełnie nie było) i wyróżnijmy na tabliczce ściany niewidzialne w rzucie poziomym np. zapomocą znaku $n'$, niewidzialne, gdy patrzymy na płaszczyznę pionową, np. zapomocą znaku $n''$. Tylko te boki wyznaczonej linii łamanej są widzialne, które należą jednocześnie do ściany widzialnej jednego i drugiego ostrosłupa, które zatem znajdziemy w kratkach, należących do pasów bez znaku $n'$, gdy chodzi o rzut poziomy ($B_2F_2$) lub bez $n''$, gdy i t. d. (bok $A_1B_1$). Co do podziału krawędzi samych wielościanów, przy

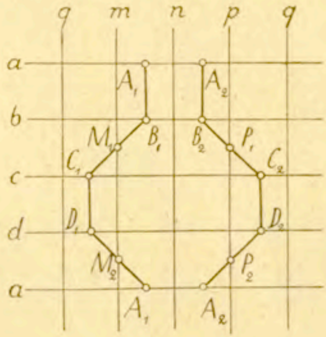



Rys. 156.

połączeniu ich w jedną figurę, na części widzialne i niewidzialne, stosujemy uwagi z paragrafu 45-go o prostej, przebijającej powierzchnią wielościenną wypukłą.

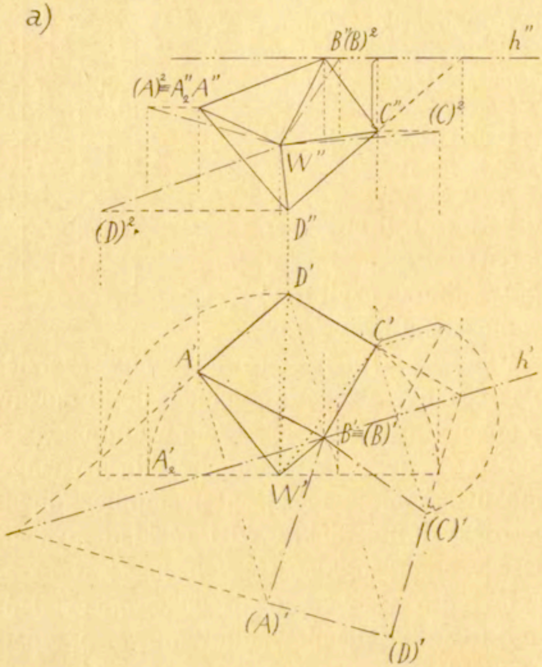
Na rys. 156-ym badamy połączenie słupa pionowego o przekroju kwadratowym, którego krawędzie boczne oznaczamy przez $m$, $n$, $p$ i $q$, z belką poziomą, o przekroju w postaci trapezu (krawędzie boczne—$a$, $b$, $c$, $d$). Z powodu prostopadłości do $\Pi_1$ płaszczyzn ścian bocznych słupa otrzymujemy bezpośrednio rzuty poziome punktów: $A_1 \equiv [a \text{ pł. } [mn]]$, $A_2 \equiv [a \text{ pł. } [np]]$, $B_1 \equiv [b \text{ pł. } [mn]]$ i t. d., a następnie wyznaczamy zapomocą odpowiednich linii rzutu rzuty pionowe tych punktów.

Do rys. 156-go dołączamy tabliczkę, podobną do poprzedniej. Na samym rysunku dodaliśmy jeszcze rzut na płaszczyznę $\Pi_3 \perp \Pi_2$ części słupa pionowego, z otworem na belkę, odpowiednio do założenia, że chcemy, gdy chodzi o zagadnienie praktyczne, przedziurawić słup, nie nadwyrężając belki — moglibyśmy również pokazać, jak należy obciąć belkę, nie ruszając słupa i t. p.

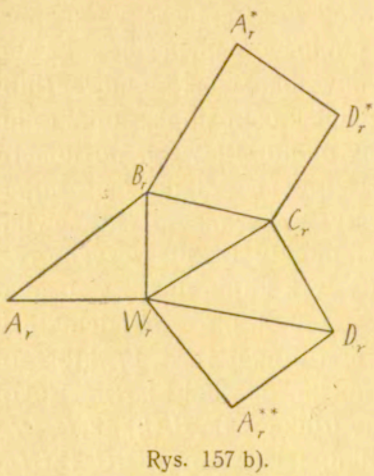



§ 48. **Rozwinięcie powierzchni ostrosłupów i graniastosłupów.** Siatką czyli rozwinięciem wielościanu nazywamy figurę płaską, powstałą przez sprowadzenie wszystkich jego ścian do jednej płaszczyzny, z zachowaniem, o ile to możliwe, związku, istniejącego między niemi; można sobie wyobrazić, że w tym celu rozcinamy powierzchnię wielościenną wzdłuż pewnych krawędzi, w liczbie możliwie najmniejszej, a następnie zapomocą obrotu ścian dokoła różnych innych krawędzi, rozkładamy całą powierzchnię na płaszczyźnie rysunku. Oczywiście, jest to zastosowanie znanych już metod, służących do rozwiązywania zadań miarowych; chodzi tylko o to, aby postępowaniu temu w przypadkach szczególnych, wymienionych w tytule tego paragrafu, nadać pewną systematyczność i jednolitość.

I. Gdy mowa o ostrosłupie, możemy postępować w ten sposób, że czynimy kład poziomy lub pionowy podstawy, a każdą z osobna z krawędzi bocznych obracamy dokoła osi pionowej (lub poziomej), przeciągniętej przez wierzchołek ostrosłupa, dopóki nie stanie się równoległą do płaszczyzny pionowej (wzgl. poziomej) rzutów. Przypuśćmy np., że chcemy otrzymać siatkę ostrosłupa czworokątnego $WABCD$; wykonawszy wskazane przed chwilą konstrukcye, wykreślamy z jakiegoś punktu $W_r$ płaszczyzny rysunku odcinek $W_rA_r$, równy krawędzi $WA$, której długość została wyznaczona zapomocą wskazanego obrotu, t. j. równy odcinkowi $W''(A)^2$, następnie zaś budujemy na nim trójkąt $W_rA_rB_r$, którego bok $W_rB_r$ jest wyznaczony w ten sam sposób, bok $A_rB_r$ — jako kład $(A)^1(B)^1$. Podobnież wykreślamy trójkąty $W_rB_rC_r$, $W_rC_rD_r$, $W_rD_rA_r^{**}$, w takim samym porządku, jak ściany $WBC$, $WCD$, $WDA$, wreszcie dołączamy wielokąt $A_r^*B_rC_rD_r^*$, równy podstawie, do dowolnego z tych trójkątów, np. $W_rB_rC_r$ tak aby miał z nim odpowiedni bok wspólny, np. $B_rC_r$. Powierzchnia została



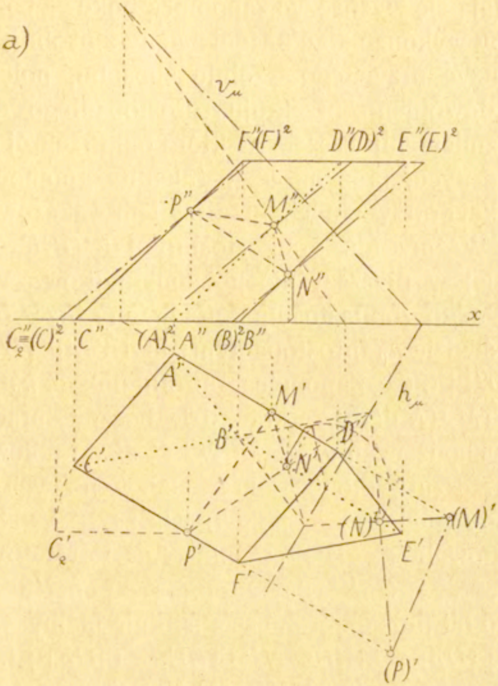

Rys. 157 a).




Rys. 157 b).

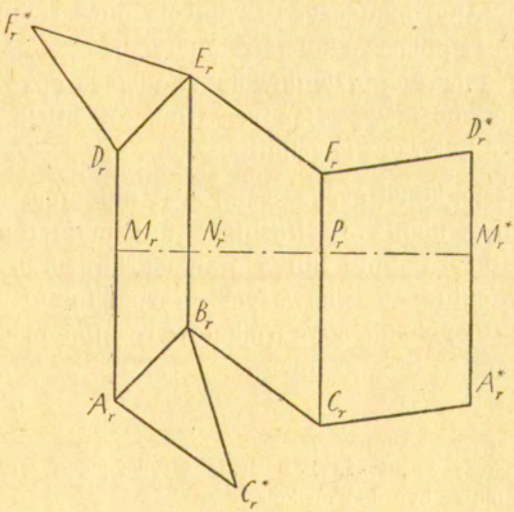
tedy „rozcięta" wzdłuż krawędzi: $WA$ oraz $AB$, $CD$, $DA$. Zadanie jest oczywiście w znacznym stopniu ułatwione, jeżeli podstawa ostrosłupa jest położona na jednej z płaszczyzn rzutów.

II. Metoda analogiczna (z tą różnicą, że potrzebaby znaleźć długość tylko jednej krawędzi bocznej, gdyż wszystkie są równe) nie wystarczyłaby przy rozwijaniu powierzchni graniastosłupa, ponieważ jego ściany boczne, jako równoległoboki, a nie a)




Rys. 158 a).

b)




Rys. 158 b).

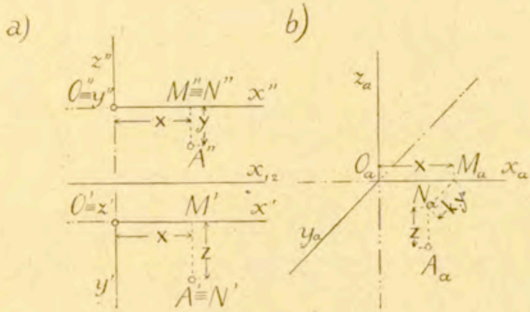
trójkąty, nie dają się wyznaczyć zapomocą boków, bez innych danych. Możnaby wykonać kład każdej ściany z osobna — najdogodniej jednak użyć przyjętego ogólnie sposobu, polegającego na wyznaczeniu dowolnego przekroju, prostopadłego do krawędzi bocznych, na zmierzeniu części, na które ten przekrój dzieli każdą z krawędzi bocznych, oraz na uzupełnieniu zapomocą odpowiednich konstrukcyi otrzymanych już przy tem wskazówek (boki) co do podstaw. Weźmy np. graniastosłup $ABCDEF$ o podstawie $ABC$, położonej w płaszczyźnie poziomej rzutów. Wyznaczamy przekrój $MNP$ tego graniastosłupa, utworzony przez dowolną płaszczyznę $\mu$ o śladzie $h_\mu$ prostopadłym do $[A'D']$, $[B'E']$ i $[C'F']$ oraz $v_\mu \perp [A''D'']$ i t. d. Zapomocą obrotu dokoła $h_\mu$ znajdujemy kład poziomy $(M)^1(N)^1(P)^1$, a krawędzie boczne obracamy dokoła osi $\perp \Pi_1$ i przechodzących przez $M$, $N$ i $P$ aż do położenia równoległego do $\Pi_2$. Rzuty pionowe krawędzi w nowych położeniach (czyli ich kłady pionowe) są to: $(A)^2(D)^2$ i t. d.[1]. Następnie odmierzamy na dowolnej prostej odcinki $M_rN_r = (M)^1(N)^1$, $N_rP_r = (N)^1(P)^1$, $P_rM_r^* = (P)^1(M)^1$ i z punktów podziału wystawiamy prostopadłe do tej prostej, ponieważ istotnie mamy w przestrzeni związki: $MN \perp [DA]$ i $\perp [BE]$, $NP \perp [BE]$ i $\perp [CF]$ i t. d. Na tych prostopadłych odmierzamy w dół $M_rA_r = M''(A)^2$, $N_rB_r = N''(B)^2$, $P_rC_r = P''(C)^2$, $M_r^*A_r^* = M''(A)^2$, a od punktów $A_r$, $B_r$, $C_r$, $A_r^*$ w górę tę samą długość krawędzi bocznych $A_rD_r = B_rE_r = \ldots = (A)^2(D)^2 \ldots$ Aby dokończyć rozwinięcia powierzchni graniastosłupa, wystarczy połączyć kolejno punkty $A_r$, $B_r$, $C_r$, $A_r^*$ oraz $D_r$, $E_r$, $F_r$, $D_r^*$ i dołączyć przy dowolnych bokach np. $A_rB_r$ i $D_rE_r$ trójkąty równe podstawie. Bez tych trójkątów mielibyśmy siatkę, odpowiadającą tylko powierzchni bocznej.

Oczywiście, konstrukcya siatki jest ogromnie uproszczona, gdy mamy do czynienia z ostrosłupem foremnym o podstawie na jednej z płaszczyzn rzutu lub z graniastosłupem prostym w tem samem położeniu. W pierwszym przypadku rozwinięcie powierzchni bocznej składa się z trójkątów równoramiennych i równych, w drugim—z prostokątów.

---

[1]) Wystarczy wyznaczyć bezpośrednio tylko jeden z tych kładów np. $(C)^2(F)^2$—inne muszą być doń równoległe.

§ 49. **I. Przejście od rzutów prostokątnych wielościanów na dwie płaszczyzny do rzutów aksonometrycznych.** Biorąc za przykłady wielościany, a w szczególności ostrosłupy i graniastosłupy, zastanówmy się, jak należy przechodzić od pary rzutów prostokątnych do rzutu aksonometrycznego, przy założeniach co do kątów i skróceń, przyjętych w § 7-ym. Będziemy przytem nazywali osie $[OX]$, $[OY]$, $[OZ]$ krótko: $x$, $y$, $z$, oznaczając oś rzutów, jak przy zamianie płaszczyzn rzutów, przez $x_{12}$. Osi $x$ nadamy, zgodnie z § 7-ym i umowami co do płaszczyzn rzutów (§ 12) kierunek poziomy, równoległy do kierunku $x_{12}$, osi $y$ — kierunek poziomy, prostopadły do kierunku $x_{12}$, osi $z$—kierunek pionowy. Zwrotem dodatnim osi $x$ będzie zwrot



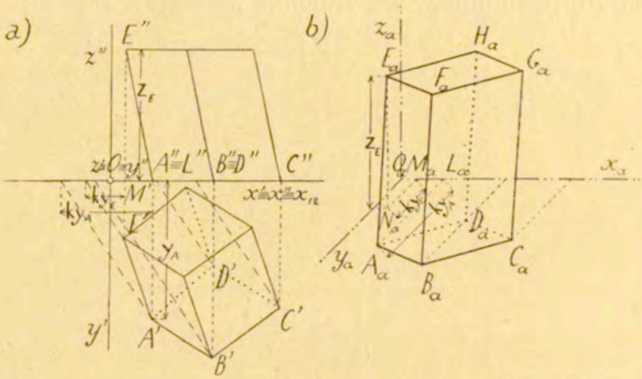

Rys. 159.

na prawo, osi $y$—naprzód, osi $z$—ku górze. Oczywiście, będziemy mieli przy tych założeniach: $x' \parallel x_{12}$ lub $\equiv x_{12}$, $y' \perp x_{12}$, $z' \equiv O'$ ($O$—punkt przecięcia $x$, $y$ i $z$ czyli początek układu osi); $x'' \parallel x_{12}$ lub $\equiv x_{12}$, $y'' \equiv O''$, $z'' \perp x_{12}$.

*Zadanie podstawowe.* Są dane: rzuty $A'$ i $A''$ punktu $A$ oraz rzuty $x'$, $x''$, $y'$, $y''$, $z'$, $z''$ osi spółrzędnych. Wyznaczyć rzut aksonometryczny $A_a$ punktu $A$ w związku z układem osi.

Rysując rzuty linii łamanej $OMNA$ o bokach, posiadających kierunki osi (por. § 7; $N'A' \equiv A'$, $M''N'' \equiv M'' \equiv N''$), znajdziemy odrazu spółrzędne punktu $A$, jako liczby względne x, y, z, mierzące co do wielkości i znaku odległości: $O'M' = O''M''$, $M'N'$, $N''A''$. Wykreśliwszy tedy rzuty aksonometryczne $x_a, y_a, z_a$ osi (kąty od $x_a$ w górę równają się kolejno: 90°, 135°, 135°, jak w § 7), rozwiążemy zadanie, odmierzając w odpowiednich zwrotach odcinki: $O_aM_a = O'M'$, wzdłuż $x_a$, $M_aN_a = \mathrm{k} \cdot M'N'$ wzdłuż prostej $\parallel y_a$, oraz $N_a A_a = N''A''$ (w danym przypadku — w zwrocie ujemnym, więc w dół) w kierunku osi $z_a$; k oznacza przytem spółczynnik skrócenia odcinków o kierunku osi $y$, równy w tym podręczniku $\frac{2}{3}$ (we wszystkich odpowiednich rysunkach od początku aż do rys. 160-go włącznie) lub $\frac{1}{2}$.

To samo postępowanie możemy zastosować do dowolnego układu punktów, a w szczególności do zbioru wierzchołków jakiegoś wielościanu, których rzuty wypadnie tylko połączyć ze sobą odpowiednio. W poszczególnych przypadkach, ze względu na róż-



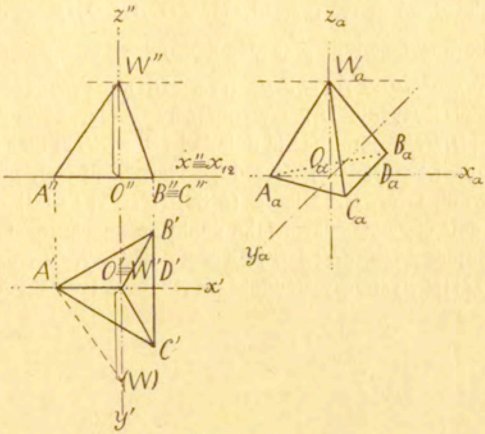
Rys. 160.

ne rodzaje prawidłowości i symetryi, zadanie ogromnie się upraszcza. Tak np. gdy chodzi o graniastosłup (rys. 160) wystarczy (por. § 44) wyznaczyć rzuty jednej z podstaw i jednego wierzchołka (np. $E$) drugiej: $B_a F_a \parallel A_a E_a$ i $= A_a E_a$ i t. d., ponieważ, jak wiemy (§ 5) rzuty ukośne odcinków równych i równoległych są równe i równoległe. Aby otrzymać szybciej odcinki: $L_a A_a = \mathrm{k} \cdot L'A' =$[1]) $= \mathrm{k} \cdot \mathrm{y}_A$, $M_a N_a = \mathrm{k} \cdot M'E' = \mathrm{k} \cdot \mathrm{y}_A$ i t. d. możemy znaleźć bezpośrednio długość jednego z nich, a długości innych wyznaczyć na osi $x'$ zapomocą szeregu prostych równoległych.

Polecamy uczącemu się podobne ćwiczenia w zastosowaniu do graniastosłupów i ostrosłupów w dowolnem położeniu, foremnych i t. d.

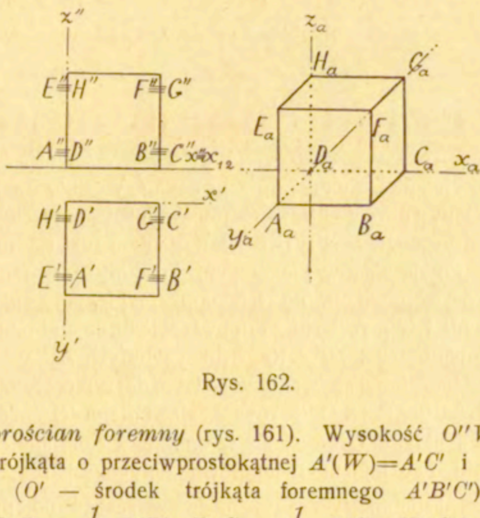
[1]) $L' \equiv L'' \equiv A''$.

II. *Wielościany foremne.* Podamy tu jeszcze krótkie wskazówki co do rzutów wielościanów foremnych w pewnych prostych położeniach, pozostawiając uczącemu się ich rozwinięcie i poparcie dokładnymi dowodami.



Rys. 161.

Przy wykreślaniu rzutów aksonometrycznych, dołączonych do zwykłych rzutów prostokątnych na dwie płaszczyzny, nadajemy wogóle spółczynnikowi **k** skrócenia prostych o kierunku osi $y$, wartość $\frac{1}{2}$, z wyjątkiem przypadku, gdy chodzi o dwunastościan foremny, dla którego dogodniej było ze względu na wyrazistość rysunku wziąć spółczynnik $\mathbf{k} = \frac{1}{3}$.



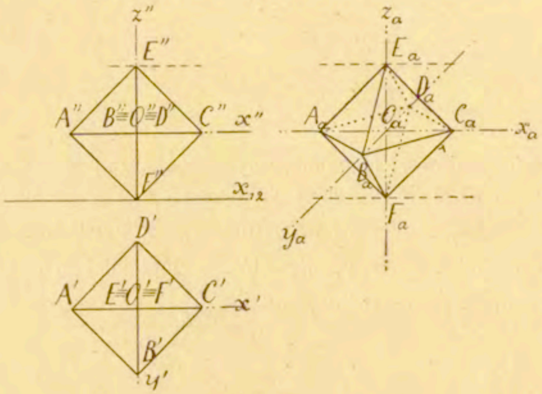
Rys. 162.

1. *Czworościan foremny* (rys. 161). Wysokość $O''W''$ = przyprostokątnej $O'(W)$ trójkąta o przeciwprostokątnej $A'(W) = A'C'$ i drugiej przyprostokątnej $O'A'$ ($O'$ — środek trójkąta foremnego $A'B'C'$). $A_aO_a = A'O'$, $O_aD_a = O'D'$, $D_aB_a = \frac{1}{2}\ D'B'$, $D_aC_a = \frac{1}{2}\ D'C'$, $[B_aC_a] \parallel y_a$; $O_aW_a = {}$ $= O''W''$.

2. *Sześcian foremny.* Wystarczy powołać się na rys. 162.

3. *Ośmiościan foremny* (rys. 163). $A'B'C'D'$ i $A''E''C''F''$ — kwadraty, których środki stanowią odpowiednio punkty $E'\equiv O'\equiv F'$ i $B''\equiv O''\equiv D''$. Odcinki $O_aE_a$, $O_aF_a$, $O_aA_a$, $O_aC_a$ mają tę samą długość, równą długości połowy przekątnej każdego z tych kwadratów; $O_aB_a$, $O_aD_a$ — długość, zmniejszoną w stosunku, wyrażonym przez spółczynnik $k=\frac{1}{2}$.

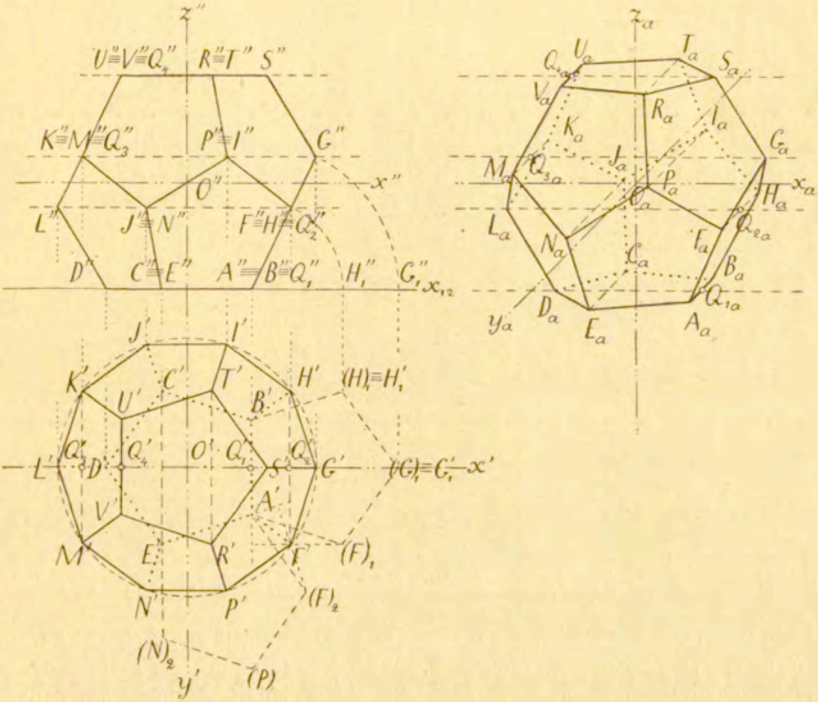
4. *Dwunastościan foremny* (rys. 164). Przypuśćmy, że ściana $ABCDE$ leży w płaszczyźnie $\Pi_1$, i wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy kład poziomy ściany $ABHGF$, obracając ją dokoła $[AB]\equiv[A'B']$ oraz ściany $AFPNE$, obracając ją dokoła $[AE]\equiv[A'E']$. Każda z tych ścian jest, jak wiadomo, pięciokątem foremnym. Otóż, jak wiemy (§ 39) $[F'(F)_1]\perp[AB]$, $[F'(F)_2]\perp[AE]$, a więc punkt $F'$ daje się wyznaczyć, jako punkt przecięcia prostopadłych, opuszczonych odpowiednio: z $(F)_1$ do $[A'B']$ i z $(F)_2$ do $[A'E']$. $G'$ moglibyśmy znaleźć zapomocą kolineacyi; wystarczy jednak zużytkować ten łakt (którego udowo-




Rys. 163.

dnienie pomijamy), że rzuty $F'$, $G'$, $H'$, $I'$, $J'$, $K'$, $L'$, $M'$, $N'$, $P'$ stanowią wierzchołki dziesięciokąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu $O'F'$. Rzut poziomy ściany górnej otrzymujemy w postaci pięciokąta foremnego $R'S'T'U'V'$, symetrycznego z $A'B'C'D'E'$ względem osi $x'$ (i $y'$ oraz względem punktu $O'$). Co do rzutów pionowych, kreślimy tory rzutów pionowych punktów $G$ i $H$ przy powrocie do ich normalnego położenia, t. j. łuki kół o środku w $A''\equiv B''$ i w przecięciu z odpowiedniemi liniami rzutów $[\supset G'\perp x_{12}]$, $[\supset H'\perp x_{12}]$ znajdujemy $G''$ i $H''$. Konstrukcya innych rzutów pionowych jest dość wyraźnie uwidoczniona na rysunku — wypada tylko zaznaczyć, że odległość pomiędzy $[G''M'']$ i $[S''V'']$ równa się odległości pomiędzy $[H''L'']$ a $[A''D'']$ (początek układu $O$ bierzemy w środku wielościanu, więc w jednakowej odległości od dwu jakichkolwiek równoległych ścian).

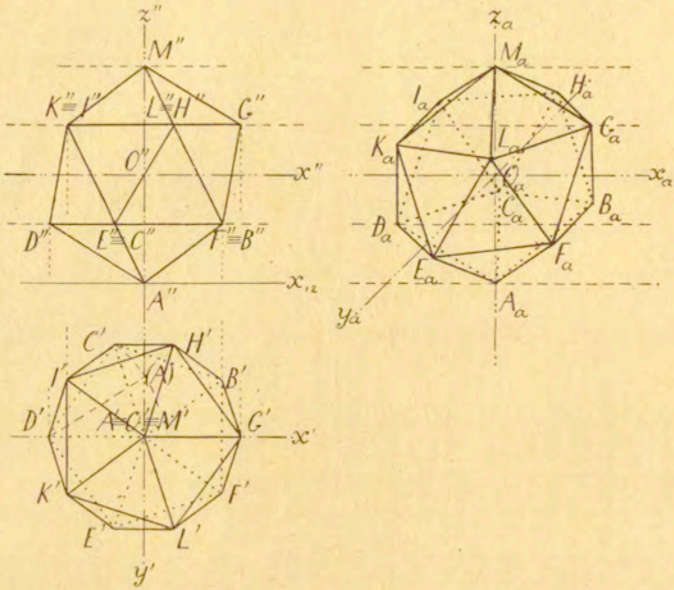
Co do rzutu aksonometrycznego, możemy zacząć od prostych: $[DQ_1]$, $[LQ_2]$, $[Q_3G]$, $[Q_4S]$, równoległych do osi $x$, a więc zachowujących bez zmiany długość swych odcinków, a następnie wyznaczyć rzuty, zmniejszone stosownie do umowy (na rys. 164-ym, jak zaznaczyliśmy, aż do $^1/_3$ rzeczywistej wielkości) przepołowionych przez nie odcinków: *AB, EC*; *FH, NJ*; *PI, MK*; *RT, VU*. Zauważmy, że rzut aksonometryczny każdego z wierzchołków jest symetryczny względem punktu $O_a$ z rzutem aksonometrycznym innego (np. $A_a$ z $U_a$, $B_a$ z $V_a$ i t. d.)—zastosowanie tej uwagi może stanowić dobrą próbę dokładości rysunku.




Rys. 164.

5. *Dwudziestościan foremny* (rys. 165). Korzystamy z tej własności, że każdy zbiór pięciu ścian o wspólnym wierzchołku tworzy powierzchnię boczną pięciokątnego ostrosłupa foremnego. Rysujemy tedy odrazu w rzeczywistej wielkości rzut poziomy $B'C'D'E'F'$ pięciokąta foremnego $BCDEF$ (o boku równym krawędzi bryły), zakładając, że jego płaszczyzna jest $\parallel \Pi_1$. Wysokość ostrosłupa o podstawie $BCDEF$ znajdujemy jako przyprostokątną $A'(A)$ trójkąta, którego przeciwprostokątna $D'(A)$ równa się krawędzi $DA = D'C'$, a drugą przyprostokątną jest rzut $D'A'$. W odległości, równej $A'(A)$ od osi $x_{12}$ (o ile ma być: $A \subset \Pi_1$), kreślimy równoległą do $x_{12}$ i na niej wyznaczamy rzuty $D''$, $E'' = C''$, $F'' = B''$. Ponieważ punkty $A$, $E$, $K$, $I$, $C$ winny leżeć w jednej płaszczyźnie, a mianowicie płaszczyźnie podstawy ostrosłupa o wierzchołku $D$, przeto ze zbiegu rzutów $E''$ i $C''$ wnioskujemy, że płaszczyzna ta jest $\perp \Pi_2$

i że rzutu $K'' \equiv I''$ należy szukać na jej śladzie pionowym $[A''C'']$. Podobnież $L'' \equiv H''$ oraz $G''$ winny leżeć na prostej $[\supset K'' \parallel x_{12}]$, wreszcie $M''$ w tej samej odległości od $[K''G'']$ co $A''$ od $[D''B'']$. W celu otrzymania rzutu aksonometrycznego stosujemy tę samą konstrukcyę, co w poprzednim przypadku (4) — do wyznaczenia rzutów pięciokątów foremnych: $BCDEF$




Rys. 165.

i $GHIKL$ (więc zaczynamy od wyznaczenia rzutów odcinków $FB$, $EC$ i t. d., równoległych do osi spółrzędnycb $y$). Wyznaczenie rzutów $A_a$ i $M_a$ nie wymaga wyjaśnień osobnych. (Spółczynnikowi skrócenia **k** została znów nadana wartość $\frac{1}{2}$).

## ĆWICZENIA.

1. Rozważyć różne przypadki, jakie mogą się zdarzyć przy spotykaniu przez prostą powierzchnię wielościennej wypukłej. Wskazać inne możliwości, odpowiadające wielościanom wklęsłym.

2. Wykreśliwszy rzuty sześcianu, stojącego na $\Pi_1$, wskazać, w stosunku do każdego rzutu, z jakich odcinków składa się zarys pozorny i zarys istotny.

3. Dowieść słuszności wskazówek praktycznych co do widzialności, podanych w § 43-im.

4. Prosta nieograniczona przechodzi przez punkt stały, położony w płaszczyźnie pewnego wielokąta i porusza się w ten sposób, że jeden z jej punk-

tów przebiega obwód tego wielokąta. W jakich granicach będzie się zawierała zakreślona przy tem powierzchnia? jakie jej części będą nakrywały płaszczyznę dwukrotnie (lub więcej razy)?

5. To samo, gdy prosta, położona w płaszczyźnie wielokąta, zachowuje kierunek stały.

6. Prosta, przechodząca przez punkt stały lub zachowująca stały kierunek, porusza się w ten sposób, że spotyka wciąż pewną łamaną *skośną*. Czy utworzona przy tem powierzchnia ostrosłupowa lub graniastosłupowa posiada zawsze tyle odrębnych ścian, ile linia łamana boków? Rozważyć przypadek, gdy linia łamana jest związana (t. j. przecina samą siebie)—gdy jakieś jej dwa punkty leżą na jednej prostej z punktem stałym, w pierwszym przypadku, lub na prostej o danym kierunku, w drugim.

7. Wykreślić rzuty: a) dowolnego ostrosłupa trójkątnego, w położeniu ogólnem; b) dowolnego ostrosłupa o podstawie równoległobocznej.

8. Wykreślić rzuty: a) dowolnego graniastosłupa trójkątnego; b) dowolnego równoległościanu.

9. Są dane: jeden z rzutów podstawy ostrosłupa, rzuty na obie płaszczyzny dwu prostych, położonych w płaszczyźnie podstawy oraz oba rzuty wierzchołka. Wykończyć oba rzuty ostrosłupa.

10. To samo w zastosowaniu do graniastosłupa, z tą różnicą w układzie danych, że zamiast obu rzutów wierzchołka mamy dane oba rzuty jednej z krawędzi bocznych.

11. Wykreślić rzuty: a) równoległościanu prostego o podstawie, położonej 1) w $\Pi_1$, 2) w $\Pi_2$ lub 3) w płaszczyźnie bocznej ($\perp x$) i b) dowolnego graniastosłupa prostego w tych samych położeniach. *Wskazówka.* Jeżeli podstawa graniastosłupa ma być położona w płaszczyźnie bocznej, to należy zacząć od rzutów: bocznego i pionowego tej podstawy, a następnie dopiero wyznaczyć odpowiedni rzut poziomy.

12. Są dane: rzuty środka $O$ podstawy ostrosłupa foremnego o podstawie, położonej w płaszczyźnie poziomej rzutów, liczba jego ścian bocznych, długość **a** boku podstawy i długość **h** wysokości ostrosłupa. Zakładamy przytem kolejno, co następuje: a) jeden z boków podstawy jest położony równolegle do osi $x$ i z drugiej strony punktu $O$; b) jeden z boków podstawy tworzy z osią rzutów dany kąt ostry $\varphi$, położony w ten sposób, iż jego wierzchołek jest zwrócony na prawo, a punkt $O$ zawiera się pomiędzy jego ramionami. Wykreślić w tych warunkach rzuty ostrosłupów foremnych: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) pięciokątnego, 4) sześciokątnego, 5) ośmiokątnego, o wierzchołkach, położonych ponad $\Pi_1$.

13. Rozwiązać zadanie, różniące się od poprzedniego tem tylko, że podstawy ostrosłupów foremnych, z analogicznemi zastrzeżeniami, mają leżeć w płaszczyźnie pionowej rzutów $\Pi_2$, a wierzchołki mają być położone przed tą płaszczyzną.

14. Przy tych samych danych: $O'$, $O''$, **a** i **h** wykreślić rzuty ostrosłupów foremnych, wyliczonych w ćwiczeniu 12-em, a umieszczonych w ten sposób, że ich podstawy leżą w płaszczyźnie bocznej rzutów $\Pi_3$. Wysłowić odpowiednio dokładne umowy co do położenia tych podstaw i zwrotu wysokości.

Zamiast wysokości **h** może być dana krawędź boczna **b** lub apotema **l**. Jakiej zmianie ulega wtedy przebieg rozwiązania 3 zadań poprzednich?

15. Rozwiązać zadanie 12-te w zastosowaniu do graniastosłupów foremnych o tej samej odpowiednio liczbie ścian i tym samym zwrocie wysokości.

16. Rozwiązać zadanie 13-te z tą samą zmianą.

17. Wykreślić rzut graniastosłupa o podstawie, położonej w płaszczyźnie bocznej $\Pi_3$ przy tych samych danych $O'$, $O''$, **a** i **h** oraz umowach dokładnych co do położenia, danych do sformułowania w ćwiczeniu 14-em.

18. Są dane: rzuty podstawy, położonej w $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, jeden z rzutów jednej krawędzi bocznej oraz kąt nachylenia $\theta$ tej krawędzi do odpowiedniej płaszczyzny rzutów, (np. $B'E'$ i $\sphericalangle[[BE]\,\Pi_1])$, z tem zastrzeżeniem, że krawędź ta ma leżeć w I ćwiartce. Wykreślić podług tych danych rzuty: a) ostrosłupa, b) graniastosłupa (por. ćw. 75 z rozdziału VII; zastosować podane w tem ćwiczeniu wartości liczbowe kąta nachylenia).

19. Są dane: rzuty podstawy, położonej w $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, wysokość **h** oraz kąty $\varphi$ i $\rho$, utworzone przez jedną z krawędzi bocznych z dwiema krawędziami podstawy. Wykreślić podług tych danych rzuty: a) ostrosłupa; b) graniastosłupa (por. § 42).

20. Są dane: rzuty środka $O$ podstawy ostrosłupa foremnego (o dowolnej liczbie ścian bocznych), promień **r** koła opisanego na podstawie oraz a) kąt nachylenia $\theta$ do płaszczyzny podstawy krawędzi bocznych lub też, zamiast niego b) kąt nachylenia $\varphi$ do tej samej płaszczyzny ścian bocznych. Zakładamy przytem, jak w poprzedniem zadaniu, że podstawa jest położona w jednej z płaszczyzn rzutów, dodając jeszcze, w celu ustalenia uwagi, ten warunek, że jeden z boków podstawy jest równoległy do osi $x$ i położony przed środkiem $O$. Przykłady liczbowe: 1) liczba ścian bocznych $\mathbf{n}=6$; promień $\mathbf{r}=2\ cm.$, odległość $O$ od $x$ $\mathbf{d}=3\ cm.$, kątowi $\theta$ nadać kolejno wartości: a) $30^0$, b) $45^0$, c) $80^0$; 2) $n=8$, $\mathbf{r}=2\ cm.$, $\mathbf{d}=3\ cm.$, $\varphi=$ a) $45^0$; b) $60^0$; c) $54^0$ [1]).

21. Rozwiązać zadanie 3-cie z § 44-go.

22. Rozwiązać zadanie 4-te z § 44-go.

23. Są dane: ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny podstawy ostrosłupa foremnego o dowolnej liczbie ścian bocznych, jeden z rzutów środka $O$ podstawy, położonego w I ćwiartce, promień **r** koła opisanego oraz wysokość **h** ostrosłupa. Wykreślić rzuty ostrosłupa, jeżeli wiadomo ponad to, że jeden z boków podstawy tworzy ze śladem $h_\alpha$ kąt ostry $\mu$ o wierzchołku, zwróconym naprzód, zawierający pomiędzy ramionami punkt $O$.

24. To samo, gdy zamiast **h** jest dana: a) długość krawędzi bocznych **b** lub b) apotemy **l**.

25. Przy takich samych zresztą założeniach, jak w ćw. 23-em, wykreślić rzuty nie ostrosłupa, lecz graniastosłupa foremnego [1]).

26. Mamy dane: rzuty płata równoległobocznego płaszczyzny $\alpha$ oraz dwa odcinki **r** i **h**. Wyznaczyć rzuty ostrosłupa foremnego o wysokości **h**, którego podstawa spełnia warunki następujące: 1) jej środkiem jest punkt przecięcia przekątnych danego równoległoboku; 2) jeden z jej boków jest równoległy do jednego z boków równoległoboku i położony w płaszczyźnie $\alpha$; 3) **r** stanowi promień koła opisanego. Wierzchołek ostrosłupa ma leżeć z określonej strony płaszczyzny $\alpha$, co może być wyznaczone przez wybór jednej

---

[1]) W ćwiczeniach 19-em i 20-em położenie wierzchołka ostrosłupa lub drugiej podstawy graniastosłupa może być określone jak w ćwicz. 12-em i 13-em, w ćwicz. 21 – 25 — jak w ćwicz. 26.

z części dowolnej prostej, przebijającej tę płaszczyznę. Liczba ścian bocznych ostrosłupa może np. przybierać wartości: a) n=*3*; b) n=*4*; c) n=*6*. Płat płaszczyzny uważamy za nieprzezroczysty, a r dobieramy w ten sposób, iżby podstawa ostrosłupa zmieściła się na nim.

27. To samo w stosunku do graniastosłupa foremnego o dowolnej liczbie ścian bocznych.

28. Mamy dane rzuty dowolnego ostrosłupa w warunkach najogólniejszych. Wykonać obrót całej bryły dokoła: a) jednej z linii poziomu lub b) jednej z linii frontu płaszczyzny jego podstawy, o taki kąt, iżby ta płaszczyzna stała się równoległą do $\Pi_1$ przy założeniu a) lub do $\Pi_2$ przy założeniu b).

29. To samo w stosunku do graniastosłupa.

30. Środek i jeden z wierzchołków sześciokąta foremnego są położone w płaszczyźnie poziomej rzutów, środek leży przytem w odległości *5 cm.* od $x$. Płaszczyzna sześciokąta tworzy z płaszczyzną $\Pi_1$ kąt $= 39^0$, a ślad poziomy tej płaszczyzny tworzy z osią $x$ kąt $53^0$. Wyznaszyć rzuty ostrosłupa foremnego, którego podstawą jest ten sześciokąt, wysokość $= 15$ *cm.* a wierzchołek leży w II ćwiartce [1]).

31. To samo w zastosowaniu do graniastosłupa foremnego, ze zmianą ostatniego warunku w ten sposób, iż ma leżeć w II ćwiartce środek drugiej z podstaw.

32. Są dane: 1) ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny $\alpha$, tworzące z osią $x$ odpowiednio kąty: $45^0$ i $36^0$, o wierzchołkach zwróconych na lewo, 2) punkt $S$, położony w tej płaszczyźnie w odległości *4,2* cm. od płaszczyzny pionowej rzutu, przed tą płaszczyzną, oraz w odległości, równej *5,4* cm. od $\Pi_1$, ponad $\Pi_1$. Wykreślić rzuty ostrosłupa trójkątnego $SABC$ o wierzchołku $S$ i podstawie $ABC$ (której wierzchołek $A$ jest bardziej oddalony od osi $x$, niż $B$ i $C$), przy pomocy danych następujących: płaszczyzna ściany $ASC$ jest prostopadła do płaszczyzny $\alpha$ i tworzy kąt$=72^0$ z płaszczyzną $\Pi_1$; ściana $ASB$ jest położona w płaszczyźnie $\alpha$; $\sphericalangle ASC = 75^0$; $\sphericalangle ASB = 66^0$ ([1]).

33. Wyznaczyć rzuty ostrosłupa foremnego ściętego o danej wysokości $h_1$, utworzonego przez odcięcie [2]) części danego ostrosłupa o wysokości $h$ większej od $h_1$. Odróżnić przypadki następujące: a) płaszczyzna podstawy danego ostrosłupa leży w jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoległa; b) płaszczyzna ta jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutu, lecz nie równoległa do drugiej; c) żaden z powyższych warunków nie jest spełniony, t. j. ostrosłup jest dany w położeniu najogólniejszem. *Wskazówka.* W trzecim przypadku można, po wyznaczeniu rzutów wysokości ostrosłupa i odmierzeniu od jej spodka $O$ do punktu $Q$ danej długości $h$ (§ 18), przeciągnąć przez jeden z rzutów punktu $Q$ równoległą do takiegoż rzutu prostej $[OA]$, łączącej $O$ z jednym z wierzchołków podstawy; punkt przecięcia się tej równoległej z rzutem odpowiedniej krawędzi bocznej $WA$ będzie rzutem jednego

[1]) Ćwiczenia 30 i 32 stanowią części zadań, rozwiązywanych na egzaminie konkursowym do „École navale“ w r. 1881 (ćw. 30), oraz na takim samym egzaminie do École de Saint-Cyr w r. 1882, a przytoczonych w podręczniku Antomariego (Traité de géometrie descriptive etc.) str. 106, 107.

[2]) Podług zwykłego określenia, płaszczyzną || do płaszczyzny podstawy.

z wierzchołków drugiej podstawy szukanego ostrosłupa ściętego. Dalsza konstrukcya nie wymaga wyjaśnień.

34. Zastosować konstrukcyę z poprzedniego zadania do ostrosłupów foremnych z ćwiczeń 12, 13, 14 oraz 23-go.

35. Wyznaczyć rzuty i postać rzeczywistą wielokąta, podług którego dany a) ostrosłup lub b) graniastosłup o podstawie, położonej w jednej z płaszczyzn rzutów, przecina się z płaszczyzną, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów. (Do wyznaczenia wielokąta w jego istotnej postaci należy użyć, rzecz jasna, konstrukcyi kładu).

36. Wyznaczyć rzuty i kształt rzeczywisty przekroju płaszczyzną, prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutu, graniastosłupa w położeniu ogólnem, jeżeli płaszczyzna przekroju jest dana: a) jedynie przez ślady; b) w postaci ograniczonego kawałka, który uważamy za nieprzezroczysty.

37. Są dane rzuty ostrosłupa w położeniu najogólniejszem oraz prostej $a$. Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną $\alpha$=pł. $[Wa]$. ($W$ oznacza wierzchołek ostrosłupa). Prosta $a$ może w szczególności stanowić jeden ze śladów płaszczyzny $\alpha$.

38. Przy analogicznych założeniach wyznaczyć przekrój graniastosłupa.

39. Wyznaczyć punkty przebicia przez prostą powierzchni graniastosłupa o podstawie położonej w płaszczyźnie a) $\| \Pi_1$ lub $\Pi_2$, b) $\perp \Pi_1$ lub $\Pi_2$.

40. Wyznaczyć punkty przebicia przez prostą powierzchni ostrosłupa lub graniastosłupa trójkątnego w położeniu najogólniejszem.

41. Mamy dane rzuty graniastosłupa prostego o podstawie, położonej w jednej z płaszczyzn rzutów. Przeciąć ten graniastosłup płaszczyzną $\alpha$, daną zapomocą śladów lub w inny sposób. (Wyznaczyć rzuty i kład przekroju).

42. To samo, gdy są dane: rzuty graniastosłupa foremnego o podstawie, położonej w jedej z płaszczyzn rzutów, ślad na tej płaszczyźnie płaszczyzny $\alpha$, równoległy do jednego z boków podstawy i nie przecinający jej, oraz kąt nachylenia $\varphi$ do tej samej płaszczyzny rzutów płaszczyzny $\alpha$ (dany z tem zastrzeżeniem, iż $\alpha$ ma być nachylona ku graniastosłupowi, a nie w kierunku przeciwnym). Zastosować w szczególności następujące dane: a) liczba ścian bocznych $\mathbf{n}=6$, bok $\mathbf{a}$ podstawy, położonej w płaszczyźnie $\Pi_1 = 2$ *cm.*, odległość śladu $h_\alpha$ od jednego z boków, równoległego i najbliższego, $\mathbf{d} = 3$ *cm.*, wysokość graniastosłupa $\mathbf{h} = 8$ *cm.*, kąt $\varphi = 30^0$; b) $\mathbf{n} = 8$, $\mathbf{a} = 2$ *cm.*, $\mathbf{d} = 4$ *cm.*, $\mathbf{h}=4$ *cm.*, $\sphericalangle \varphi=35^0$; c) $\mathbf{n}=6$, $\mathbf{a}=3$ *cm.*, $\mathbf{d}=1$ *cm.*, $\mathbf{h}=3$ *cm.*, $\sphericalangle \varphi=75^0$.

43. Są dane rzuty krawędzi powierzchni ostrosłupowej nieograniczonej, ze wskazówką co do ich kolejnego następstwa — wyznaczyć rzuty linii przecięcia tej powierzchni z płaszczyzną $\alpha$, daną: a) przez ślady; b) przez rzuty prostej oraz punktu, położonego na jednej z krawędzi; c) przez rzuty dwu prostych.

44. To samo w stosunku do powierzchni graniastosłupowej nieograniczonej.

45. Wyznaczyć rzuty bryły, utworzonej przez przecięcie danej powierzchni ostrosłupowej o kierownicy zamkniętej dwiema płaszczyznami nierównoległemi $\alpha$ i $\beta$. Wyróżnić przypadki, gdy jedna z tych płaszczyzn, np. $\alpha$ jest a) $\|$ do jednej z płaszczyzn rzutów; b) prostopadła do jednej z tych płaszczyzn.

46. Wyznaczyć rzuty pnia graniastosłupowego, utworzonego zapomocą przecięcia powierzchni graniastosłupowej zamkniętej przez dwie nierównoległe płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$. Uwzględnić przypadki szczególne z poprzedniego ćwiczenia.

47. Rozwiązać zadanie 42, z uwzględnieniem tych samych danych szczególnych, gdy chodzi o przekrój nie graniastosłupa, lecz ostrosłupa foremnego.

48. Są dane rzuty a) ostrosłupa lub b) graniastosłupa o podstawie sześciokątnej, położonej w jednej z płaszczyzn rzutu. Przeciąć tę bryłę płaszczyzną, przechodzącą przez oś rzutów i dany punkt $A$.

49. Przeciąć daną płaszczyzną: a) ostrosłup czworokątny; b) takiż graniastosłup; c) ostrosłup ścięty o tej samej liczbie ścian; d) pień graniastosłupowy czworokątny, przy założeniu, że żadna z podstaw tych brył nie jest $\perp$ do jednej z płaszczyzn rzutów. Zbadać różne postacie wyników, zależne od położenia płaszczyzny siecznej względem podstaw.

50. Przypuśćmy, że została już wykonana, jak np. na rys. 155-ym, konstrukcya linii, wzdłuż której przecinają się powierzchnie dwu ostrosłupów. Wykreślić z osobna: a) rzuty jednego z nich wraz z „wyrwą", uczynioną przez drugi, t. j. bez części, zawartej jednocześnie *wewnątrz* powierzchni obu ostrosłupów; b) rzuty drugiego, pozbawionego tej samej części; c) rzuty wielościanu, stanowiącego właśnie tę część wspólną.

51. Dobrać rzuty dwu ostrosłupów czworokątnych o podstawach, położonych w tej samej płaszczyźnie rzutów, w ten sposób, aby jeden z nich przebijał drugi, wchodząc podług jednej linii, a wychodząc podług drugiej — t. j. aby linia przecięcia ich powierzchni była złożona z dwu osobnych części. Będzie to t. zw. *przenikanie się właściwe*.

52. Po wykonaniu takiej konstrukcyi wykreślić z osobna, jak w ćwiczeniu 50-em: a) rzuty ostrosłupa, przedziurawionego przez drugi; b) rzuty dwu części drugiego ostrosłupa, położonych poza pierwszym; c) rzuty części wspólnej obu ostrosłupów, pominiętej w dwu poprzednich rysunkach.

53. Są dane rzuty ostrosłupa czworościennego i graniastosłupa czworościennego, posiadających podstawy, umieszczone w tej samej płaszczyźnie rzutu, w ten sposób, iż nakrywają się częściowo wzajemnie. Wyznaczyć rzuty linii przecięcia powierzchni tych brył, które mają być przytem wyobrażone, podobnie jak ostrosłupy na rysunku 155-ym, jako jedna całość.

54. Wyznaczyć linię (lub linie), wzdłuż której (ych) przenikają się dwie powierzchnie graniastosłupowe *nieograniczone*, trójścienne lub czworościenne, o kierownicach wypukłych, dowolnie obranych na jednej z płaszczyzn rzutu. Czy przecinanie się kierownic odgrywa w tym przypadku jakąś rolę zasadniczą?

55. Wyobrazić połączenie słupa pionowego o podstawie w kształcie sześciokąta foremnego z przedziurawiającą go belką poziomą o przekroju kwadratowym i krawędziach równoległych do osi rzutów, gdy osie tych obu graniastosłupów (t. j. proste, łączące środki ich podstaw lub przekrojów prostopadłych) przecinają się. Przykład liczbowy: promień podstawy słupa r=*25 cm.*, bok przekroju prostopadłego belki a=*20 cm.*, oś belki leży o 50 *cm.* nad płaszczyzną $\Pi_1$, w której jest położona podstawa słupa. Wysokość słupa

i długość belki, przy założeniu, że bryły te, oprócz powierzchni graniastosłupowych, są ograniczone ścianami, prostopadłemi do krawędzi tych powierzchni—dowolne, możemy zresztą nie określać granicy górnej słupa i końców belki, bacząc tylko na zgodność obu rzutów. (Użyć odpowiedniego zmniejszenia). Co do położenia podstawy względem osi $x$ oraz położenia przekroju belki w jego płaszczyźnie, prostopadłej do osi, pozostawiamy wybór uczącemu się. Uzupełnić rysunek zapomocą rzutu słupa przedziurawionego lub jednej z obciętych części belki na trzecią płaszczyznę rzutu, nie prostopadłą do osi $x$.

56. Rozwiązać zadanie poprzednie z tą jedynie zmianą, że krawędzie belki mają być równoległe do płaszczyzny poziomej, ale nie równoległe do osi $x$; niech np. kąt nachylenia tych krawędzi do $\Pi_2$ równa się a) $30^0$; b) $75^0$.

57. Wyobrazić połączenie opisanych wyżej brył w tych przypadkach, gdy krawędzie belki tworzą z $\Pi_1$ i $\Pi_2$ dane kąty $\theta_1$ i $\theta_2$, a osie słupa i belki a) przecinają się, b) nie przecinają się. Przykład: $\mathbf{r}=25$ *cm.*, $\mathbf{a}=10$ *cm.*, jak wyżej, odległość punktu przecięcia osi w przypadku a) lub prostej, prostopadłej do obu osi w przypadku b), od płaszczyzny poziomej rzutów, wynosi $50$ *cm.*, pozatem w przypadku b) jest jeszcze dana najkrótsza odległość tych osi $\mathbf{d}=10$ *cm.*, liczona wzdłuż wymienionej prostej; $\theta_1=30^0$, $\theta_2=45^0$.

58. Dwie sztaby poziome o jednakowych przekrojach prostopadłych w postaci sześciokątów foremnych, posiadające pary ścian bocznych pionowych, są położone w ten sposób, że oś jednej leży wyżej niż oś drugiej o długość boku przekroju. Wyznaczyć rzut pionowy, boczny i poziomy jednej ze sztab z wyrwą, uczynioną przez drugą, przy założeniu, że druga sztaba posiada krawędzie, prostopadłe do $\Pi_2$. Rózróżnić przypadki: a) kąt pomiędzy kierunkami osi $\varphi=90^0$, b) $\measuredangle\, \varphi=120^0$. Końce sztab mogą być np. ścięte prostopadle.

59. W rogu baryery schodzą się dwie sztaby poziome, o przekrojach (prostopadłych), mających kształty: pięciokąta foremnego i trójkąta foremnego, w ten sposób, że osie ich przecinają się i że przy uwzględnieniu powierzchni graniastosłupowych nieograniczonych mielibyśmy przenikanie się właściwe, przy któremby np. powierzchnia drugiej sztaby wchodziła wewnątrz powierzchni pierwszej. Obciąć odpowiednio sztabę trójkątną, a pięciokątną zakończyć powierzchnią ostrosłupową o małej stosunkowo wysokości, graniczącą z zakończeniem drugiej sztaby, a zresztą położoną nazewnątrz. Użyć z początku rzutów: pionowego i bocznego, przy założeniu, że krawędzie jednej ze sztab są prostopadłe do płaszczyzny pionowej, a potem wprowadzić rzut poziomy lub rzut na dowolną płaszczyznę, prostopadłą do $\Pi_2$, ale nie $\perp$ ani $\parallel$ do $x_{23}$. Rozpatrzeć przypadki następujące: a) osie obu sztab przecinają się pod kątem prostym, bok przekroju pięciokątnego $\mathbf{a}=3$ *cm.*, bok przekroju trójkątnego $\mathbf{b}=2{,}5$ *cm.*; wysokość $\mathbf{h}$ ostrosłupa, stanowiącego zakończenie słupa pięciościennego, wynosi $1$ *cm*; b) osie przecinają się pod kątem równym $120^0$; $a=3$ *cm.*, $b=2{,}5$ *cm.*, $\mathbf{h}=1$ *cm* jak wyżej. Kierunki boków przekroju dobrać dowolnie, równie jak długości krawędzi i granice sztab z drugiej strony.

60. Są dane rzuty dwu ostrosłupów, z których jeden stoi na płaszczyźnie poziomej rzutów, a drugi ma podstawę, położoną w $\Pi_2$, i jest zwrócony

wierzchołkiem ku przodowi. Wyznaczyć linię (e) przecięcia ich powierzchni bocznych; wykończyć rysunek podobnie jak rys. 155.

*Wskazówki*: Użyć, podobnie jak przy podstawach, położonych w tej samej płaszczyźnie rzutów płaszczyzn, przechodzących przez linię, łączącą wierzchołki. Wyjaśnić dokładnie przebieg konstrukcyi.

61. Rozwiązać to samo zadanie w stosunku do dwu ostrosłupów foremnych (np. sześciokątnych), równych i położonych a) symetrycznie względem płaszczyzny dwusiecznej, należącej do I i III ćwiartki (t. j. płaszczyzny symetryczno-rzutowej); b) w ten sposób, jak gdyby ten z nich, który stoi na $\Pi_1$, został przesunięty ku osi $x$, w kierunku prostopadłym do $x$; c) w taki sposób, jakgdyby oprócz przesunięcia nastąpił jeszcze obrót o pewien kąt dokoła wysokości tego ostrosłupa.

62. Wykreślić siatki: a) danego graniastosłupa trójkątnego prostego o podstawie, położonej w $\Pi_1$ lub $\Pi_2$; b) graniastosłupa foremnego, położonego w ten sam sposób, wraz z rozwiniętą linią przecięcia jego powierzchni przez jakąś płaszczyznę. Wziąć w szczególności dane liczbowe z ćw. 42-go.

63. Wykreślić siatki ostrosłupów z zadania 47, wraz z przekształconemi liniami przekroju.

64. Wykreślić siatkę ostrosłupa ściętego o podstawie położonej a) w $\Pi_1$ lub $\Pi_2$, b) w płaszczyźnie nachylonej do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, gdy mamy dane jego rzuty.

65. Wykreślić siatkę graniastosłupa o podstawie, położonej w płaszczyźnie nachylonej do $\Pi_1$ i $\Pi_2$, w szczególności zaś równoległościanu, którego żadna ściana nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów.

66. Rozwinąć powierzchnię boczną każdego z ostrosłupów, wyobrażonych na rys. 155, przy założeniu, że część każdej powierzchni, zawarta wewnątrz drugiej, jest wycięta.

67, 68. Rozwinąć powierzchnie boczne brył, których rzuty wraz z rzutami linii przenikania się zostały wykreślone przy rozwiązywaniu zadań 51-go i 53-go, pozbawione, jak poprzednio, części, zawartych wewnątrz powierzchni, przecinających je.

Konstrukcye tego rodzaju, jak łatwo sobie zdać sprawę, mają ważne znaczenie praktyczne np. w blacharstwie. Istotnie, wycinając wskazane figury z płaskich kawałków blachy lub papieru, otrzymujemy następnie zapomocą odpowiedniego załamywania żądane powierzchnie wielościenne, które się dadzą następnie połączyć ze sobą w żądany sposób.

69. Chcemy przedziurawić słup pionowy z ćwiczenia 55-go w ten sposób, by otwór odpowiadał dokładnie opisanej belce, przy żądanem jej położeniu. Wykreślić w tym celu odpowiednią siatkę i opisać dokładnie sposób jej użycia (wraz z odpowiednią tabliczką) i wogóle wykonanie przy jej pomocy wskazanej pracy ciesielskiej.

70. Są dane: osie aksonometryczne (t. j. rzuty osi w prestrzeni) $x_a$, $y_a$, $z_a$, ułożone podług zwykłej umowy, wartość **k** spółczynnika skrócenia osi $y$, rzut aksonometryczny $M_a$ punktu $M$ oraz wartość jednej z jego spółrzędnych: a) **x**, b) **y** lub c) **z** Wyznaczyć: 1) wartości dwu pozostałych spółrzędnych; 2) rzuty prostokątne punktu $M$ na dwie płaszczyzny $\Pi_1$ i $\Pi_2$—przy założeniu, że początek $O$ układu osi został obrany dowolnie na $x_{12}$.

71—80. Przy zwykłych założeniach co do kierunków osi aksonometrycznych i spółczynnika $k = \frac{1}{2}$ (początek układu osi może być obrany dowolnie) wykreślić podług rzutów prostokątnych na dwie zwykłe płaszczyzny rzutu $\Pi_1$ i $\Pi_2$ rzuty aksonometryczne:

71—76. — ostrosłupów i graniastosłupów z ćwiczeń 12—17.

77. — tych części graniastosłupów foremnych z ćwiczenia 42 a), b) i c), odciętych przez płaszczyzny sieczne, które się łączą z jedną z płaszczyzn rzutu.

78. — takich samych części ostrosłupów foremnych z ćw. 47.

79. — figur, powstałych z połączenia dwu brył, wyobrażonych na rys. 155-ym (lub podobnym) i dwu brył z ćw. 60-go.

80. — połączonych ze sobą słupa i belki z ćwiczenia 55-go.

81. Wykreślić rzuty prostokątne dwunastościanu foremnego po obrocie z położenia wskazanego w § 49-ym, o kąt: a) $=36^0$; b) $=24^0$.

82. To samo w stosunku do dwudziestościanu foremnego.

83—84. Przy takich samych założeniach, jak w ćw. 76, wykreślić rzuty aksonometryczne:

83. — podwójnych piramid, należących do układów krystalograficznych: a) kwadratowego; b) heksagonalnego; c) rombowego; d) jednoskośnego; e) trójskośnego. (Porównać z ośmiościanem foremnym czyli postacią odpowiednią z układu regularnego).

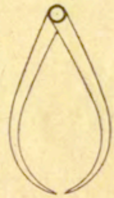
84. — sześcianu piramidalnego i b) ośmiościanu piramidalnego przy założeniu, że wysokość, odpowiadająca powierzchni ostrosłupowej foremnej, która ma przytem zastępować każdą ze ścian sześcianu lub ośmiościanu, ma się równać $\frac{1}{3}$ odległości tej ściany od środka symetryi. *Wskazówka*: Rzut aksonometryczny spodka wysokości ostrosłupa, gdy chodzi o ośmiościan, da się łatwo wyznaczyć jako punkt przecięcia linii środkowych trójkąta, stanowiącego rzut odpowiedniej ściany; sama wysokość przechodzi przez środek ośmiościanu.

Co do rozróżnienia części widzialnych i niewidzialnych w obrazie aksonometrycznym, kierunek prostych rzutujących, przy dowolnym spółczynniku **k** skrócenia osi $y$, został dobrany w ten sposób, że oko widza można sobie wyobrazić jako położone w odległości nieskończonej, z góry, z przodu i z prawej strony w stosunku do początku układu i że można się kierować wobec tego zasadą następującą: Z dwu punktów o tym samym rzucie aksonometrycznym jest widzialny ten, który posiada jedną ze spółrzędnych (a więc i wszystkie inne, jak łatwo dowieść) większą algebraicznie od odpowiedniej spółrzędnej drugiego. Kto chce uprzytomnić sobie dokładniej kierunek rzutu, może rozwiązać, z niewielkim nakładem wiadomości trygonometrycznych, zadanie następujące:

85. Przy użytym układzie osi aksonometrycznych i spółczynniku **k**, równym a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ wyznaczyć kąty, utworzone w przestrzeni przez kierunek rzutu z kierunkami osi.

86. Przeciąć dwunastościan foremny w położeniu z § 49-go a) płaszczyzną $\perp \Pi_1$, b) płaszczyzną $\perp \Pi_2$, c) płaszczyzną, nachyloną do $\Pi_1$ i $\Pi_2$.

Dobre ćwiczenie stanowi rysowanie rzutów brył, danych nie zapomocą określeń i wskazówek lecz bezpośrednio. Mając taki przedmiot, np. kryształ lub model drewniany, i pragnąc otrzymać jego rzuty w postaci możliwie najprostszej, szukamy z początku jego płaszczyzn i osi symetryi, odnajdujemy krawędzie i ściany prostopadłe i t. p. i odpowiednio do tego (o ile nie zostały uczynione szczególne zastrzeżenia z góry) obieramy sposób ustawienia przedmiotu względem płaszczyzn rzutu. Do pomiaru długości służy oprócz podziałki centymetrowej osobny cyrkiel (rys. 166), zwany z niemiecka „tastrem“, którym dadzą się zmierzyć odcinki, zawarte wewnątrz bryły. Poprzestając na tych uwagach, pozostawiamy resztę pomysłowości i wprawie uczącego się.



Rys. 166.

ROZDZIAŁ IX.

# Powierzchnie krzywe i bryły, ograniczone przez nie.

§ 50. **Ważniejsze określenia i rozróżnienia, dotyczące powierzchni.** Podobnie jak linię (ciągłą) możemy określić jako tor punktu, poruszającego się w przestrzeni, tak znów linia płaska lub skośna, poruszająca się w przestrzeni i nie zmieniająca przy tem swej postaci lub też zmieniająca ją stopniowo, bez nagłych przeskoków, czyli, jak się mówi, w sposób ciągły, zakreśla to, co nazywamy powierzchnią w zwykłem znaczeniu tego słowa. Inaczej: powierzchnia jest to zbiór punktów, należących do wszystkich położeń poruszającej się krzywej. Podobnie jak linia jest określona, gdy znamy prawo, podług którego porusza się tworzący ją punkt, tak samo dokładne określenie powierzchni wymaga: 1) określenia poruszającej się linii w jakiemś jej położeniu; 2) znajomości prawa jej ruchu i przekształcania się. Linię, zakreślającą w swym ruchu powierzchnię, nazywamy *tworzącą* powierzchni. Powierzchnia, która może być określona w ten sposób, iżby jej tworzącą była *linia prosta*, nazywa się *prostoliniową* lub *prostokreślną*—wszelka inna powierzchnia należy do kategoryi powierzchni *krzywokreślnych*. Z tego, że jakaś powierzchnia została utworzona przez ruch pewnej linii krzywej, nie wynika jeszcze bynajmniej, iżby nie była prostokreślną — należy dopiero uzasadnić, iż powierzchnia ta nie może wogóle powstać z ruchu prostej, czyli że jej tworzącą *nie może być w żaden sposób prosta*.

Powierzchnie prostoliniowe dzielą się w dalszym ciągu na 1) rozwijalne; 2) skośne czyli wichrowate. Powierzchnia prostoliniowa rozwijalna w najogólniejszem znaczeniu tego słowa jest to taka, która daje się utworzyć przez ruch prostej, pozostającej we wszystkich swych położeniach styczną do pewnej krzywej, zwanej w takim razie *krawędzią zwrotu* powierzchni; przytem, o ile powierzchnia rozwijalna nie ma się stać zwyczajną płaszczyzną, krzywa ta musi być skośną. (Innemi słowy: powierzchnia rozwijalna jest to miejsce geometryczne stycznych pewnej krzywej). Krawędź zwrotu może przejść w szczególności w jeden punkt, w odległości skończonej lub nieskończonej — otrzymujemy wtedy w ogólności powierzchnie stożkowe lub walcowe, o których będziemy zaraz mówili dokładniej. Nazwa: rozwijalna wyraża tę własność omawianych powierzchni, że dadzą się one rozwinąć na płaszczyźnie „bez zmarszczek, rozciągnięcia i rozdarcia“ [1]), i że nawzajem, można je sobie wyobrazić, jako powstałe z odpowiedniego zwinięcia płaszczyzny. Mając np. model powierzchni prostoliniowej rozwijalnej w postaci szeregu drutów, wyobrażających tworzące, możemy wypełnić przerwy między nimi, nawijając arkusz papieru lub kawałek papieru, odpowiednio z płaskiego arkusza wycięty. W dalszym ciągu powrócimy znów do własności powierzchni rozwijalnych, w danem miejscu określimy jeszcze jedno ważne pojęcie, dotyczące wszelkiej powierzchni, prostokreślnej czy krzywokreślnej.

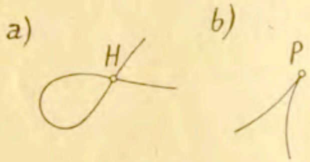
Styczne do krzywych, położonych na powierzchni, nazywamy również stycznemi do powierzchni. Nakreślmy na jakiejś powierzchni dowolną liczbę krzywych, przechodzących przez ten sam punkt $M$; o ile ten punkt jest tak zwanym *punktem zwyczajnym* powierzchni, styczne do tych wszystkich krzywych leżą w tej samej płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie $M$. Inaczej: *płaszczyzna styczna do powierzchni w jej punkcie zwyczajnym jest to miejsce geometryczne stycznych do powierzchni, przeciągniętych przez ten punkt*, zwany w danym przypadku punktem styczności.

Nie należy wyobrażać sobie, że płaszczyzna styczna posiada zawsze z powierzchnią tylko jeden punkt wspólny, a mianowicie punkt styczności, jak możnaby np. wnioskować zbyt pohopnie z przykładu powierzchni kulistej. Jeżeli nawet powierzchnia nie posiada żadnego innego punktu wspólnego z płaszczyzną styczną w najbliższem otoczeniu punktu styczności, który w ta-

---

[1]) Pozostają przy tem bez zmiany: długość wszelkiej linil nakreślonej na powierzchni oraz kąty, utworzone przez styczne do takich linii.

kim razie jest t. zw. punktem eliptycznym powierzchni, to z tego bynajmniej nie wynika, iż płaszczyzna styczna nie może przecinać powierzchni w pewnem oddaleniu od tego punktu. Może się jednak zdarzyć również, że płaszczyzna styczna przecina powierzchnię krzywą podług linii, która przecina samą siebie w punkcie styczności, t. j. posiada w tem miejscu t. zw. punkt podwójny o dwu różnych stycznych, odpowiadających dwu przechodzącym przezeń łukom; punkt, spełniający ten warunek, nazywamy *punktem hiperbolicznym* powierzchni, która jest tedy położona z obu stron płaszczyzny stycznej w otoczeniu tego punktu (rys. 167 a). Może się również zdarzyć, że płaszczyzna styczna przecina powierzchnię wzdłuż krzywej o postaci, wskazanej na rys. 167 b), t. j. posiadającej w tem miejscu t. zw. punkt zwrotu (w którym oba spotykające się łuki są styczne do tej samej prostej), albo też, jak zobaczymy nieco niżej, że *dotyka ją* wzdłuż pewnej prostej lub krzywej, zawierającej dany punkt styczności (p. np. rys. 176). Punkty tego rodzaju nazywamy *parabolicznymi*.



Rys. 167.

Rzuty wszystkich punktów bryły, ograniczonej przez powierzchnie krzywe lub powierzchnie krzywe i płaszczyzny, na jedną z płaszczyzn rzutu, wypełniają pewien obszar tej płaszczyzny. Oprócz linii, ograniczającej ten obszar, kreślimy jeszcze rzuty krawędzi, t. j. linii, wzdłuż których powierzchnia ogólna bryły jakby się załamywała, stanowiące granice pomiędzy różnemi jej częściami i odpowiadające krawędziom powierzchni wielościennych, oraz rzuty innych linii, położonych na powierzchni, a posiadających dla niej znaczenie charakterystyczne lub też potrzebnych do zamierzonych konstrukcyi. Przypuśćmy, że ogólna powierzchnia bryły posiada taką własność, że prosta o dowolnym kierunku[1]), wchodząca wewnątrz niej, przecina ją dokładnie w dwu punktach. W takim razie są słuszne twierdzenia, wypowiedziane w § 43-im w stosunku do wielościanów wypukłych, a mianowicie: 1) rzuty punktów powierzchni na jedną z płaszczyzn rzutów nakrywają *dwukrotnie* odpowiedni jej obszar; 2) w związku z tem, powierzchnia dzieli się na dwie części: jedną widzialną, drugą niewidzialną. Linia, rozgraniczająca te dwie części, jest zarysem istotnym bryły, jej rzut na daną płaszczyznę, stanowiący linię graniczną rzutu bryły, jej zarysem pozornym. Inne możliwości omówimy później.

[1]) W istocie, do wysnucia poniższych wniosków wystarczy założyć, że własność tę posiadają tylko proste, rzutujące na daną płaszczyznę rzutów.

§ 51. **Określenie ogólne powierzchni stożkowych i walcowych. Zadania zasadnicze.** I. Prosta, poruszająca się w ten sposób, że przechodzi wciąż przez pewien punkt stały i opiera się stale na pewnej krzywej nieruchomej (t. j. ma z nią zawsze punkt wspólny), zakreśla powierzchnię stożkową w najogólniejszem znaczeniu tego słowa. Prosta ruchoma, zgodnie z określeniem z poprzedniego paragrafu, stanowi tworzącą powierzchni; punkt stały nazywamy *wierzchołkiem*, a krzywą nieruchomą — *kierownicą* powierzchni stożkowej. Jeżeli prosta ruchoma, opierając się na pewnej nieruchomej krzywej, zachowuje bez zmiany swój kierunek, tak iż różne jej położenia są do siebie równoległe, to powierzchnia, zakreślona przez nią, jest to *powierzchnia walcowa* w najogólniejszem znaczeniu tego słowa. Krzywą nieruchomą nazywamy podobnież *kierownicą* powierzchni walcowej. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z powierzchniami stożkowemi i walcowemi o kierownicach zamkniętych. Bryłę, ograniczoną a) przez część takiej powierzchni stożkowej, zawartą pomiędzy wierzchołkiem a jakąś płaszczyzną sieczną i b) przez część tej płaszczyzny, zawartą wewnątrz powierzchni, będziemy nazywali wogóle *stożkiem*, rozróżniając szczególne odmiany zapomocą bliższych określeń. Część a) powierzchni całkowitej stożka będzie dogodnie nazywać jego powierzchnią boczną, część b) nazwiemy podstawą stożka. Walcem w ogólniejszem znaczeniu nazwiemy bryłę, ograniczoną przez część powierzchni walcowej (spełniającej wymieniony warunek), zawartą pomiędzy dwiema równoległemi płaszczyznami siecznemi (powierzchnia boczna), oraz przez części tych płaszczyzn siecznych, zawarte wewnątrz powierzchni walcowej (a stanowiące jego podstawy). Łatwo spostrzedz odrazu podobieństwo pomiędzy temi wszystkiemi określeniami a podanemi poprzednio określeniami powierzchni nieograniczonych: ostrosłupowej i graniastosłupowej, oraz ostrosłupa i graniastosłupa. Z podobieństwa tego wynika podobieństwo zasadniczych konstrukcyi, które się opierają w istocie rzeczy na tych samych myślach przewodnich, z tą różnicą, że zamiast ograniczonej liczby krawędzi bocznych występują tworzące [1]) prostoliniowe, z których nieskoń-

---

[1]) Słowa: „tworząca“ używamy nietylko w zastosowaniu do jakiejś jednej prostej ruchomej, ale też do oznaczenia wszelkiej prostej, stanowiącej jakieś szczególne, określone jej położenie.

czonej liczby możemy dobierać tyle i w taki sposób, ile i jak potrzeba, w zależności od rodzaju zagadnienia i żądanego stopnia dokładności, że zamiast pewnych linii łamanych mamy linie krzywe i t. d.

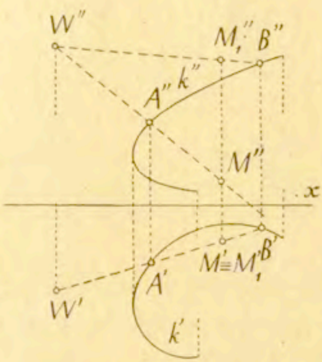
Jeżeli kierownicą powierzchni stożkowej jest okrąg koła, a wierzchołek jej leży na osi tego koła, t. j. na prostopadłej do jego płaszczyzny, wystawionej ze środka, to mamy do czynienia ze zwykłą *powierzchnią stożkową obrotową*. *Powierzchnia walcowa obrotowa* powstaje wtedy, gdy kierownicą jest również okrąg koła, a tworząca zachowuje kierunek prostopadły do płaszczyzny tego koła. Uważając koło, ograniczone przez kierownicę, za podstawę, otrzymujemy bryłę, zwaną stożkiem obrotowym; biorąc koło, podobnie określone, za jedną z podstaw, a za drugą — takie same koło, wykrojone przez powierzchnię walcową z płaszczyzny siecznej równoległej, otrzymujemy walec obrotowy.

W dalszym ciągu tego paragrafu, o ile nie będziemy dodawali dokładnych omówień, będziemy mieli na myśli zawsze powierzchnie stożkowe i walcowe w znaczeniu najogólniejszem tego słowa. Rzecz jasna, że powierzchnia stożkowa jest wyznaczona przez kierownicę i wierzchołek, powierzchnia walcowa — przez kierownicę i jakąkolwiek prostą, do której mają być równoległe jej tworzące.

*II. Zadanie 1 a.* Są dane: rzuty $k'$ i $k''$ kierownicy powierzchni stożkowej, rzuty $W'$ i $W''$ wierzchołka oraz jeden z rzutów (np. poziomy $M'$ na rys. 168-ym) punktu $M$, położonego na powierzchni; wyznaczyć drugi rzut tego punktu, a więc i położenie samego punktu w przestrzeni.

Zauważmy przy tej sposobności, że rzuty $k'$ i $k''$ jakiejś krzywej $k$, płaskiej czy skośnej, muszą być położone pomiędzy dwiema temi samemi liniami rzutu (t. j. prostemi, prostopadłemi do osi rzutów $x$), a końce ich, o ile nie są to linie zamknięte, winny również leżeć odpowiednio na tych samych liniach rzutu. Jeżeli istnieją linie rzutu, przecinające oba rzuty w dwu, trzech i t. d. różnych punktach, to należy, w celu uniknięcia nieporozumień, wskazać zapomocą liter lub odpowiedniego znakowania, jakie części obu rzutów odpowiadają sobie wzajemnie, jako rzuty tej samej części krzywej. Rozwiązanie zadania odbywa się w sposób następujący, przy danych z rys. 168-go.

Przeciągamy prostą $[W'M']$, która, rzecz jasna, musi stanowić rzut poziomy tworzącej, przechodzącej przez poszukiwany punkt $M$. Otóż prosta ta przecina rzut poziomy $k'$ kierownicy w dwu punktach $A'$ i $B'$, może być tedy uważaną za rzut wspólny dwu tworzących $[WA]$ i $[WB]$. Rzuty pionowe tych tworzących odnajdujemy łatwo, wyznaczając $A''\equiv[[\supset A'\perp x]\,k'']$ i $B''\equiv[[\supset B'\perp x]\,k'']$ i łącząc $W''$ z $A''$ i $W''$ z $B''$. Punkty $M''\equiv[[W''A''][\supset M'\perp x]]$ oraz $M''_1\equiv[[W''B''][\supset M'\perp x]]$ odpowiadają wymaganiom, ponieważ stanowią rzuty punktów $M$ i $M_1$, posiadających wspólny rzut poziomy $M'\equiv M'_1$ i położonych odpowiednio na tworzących: $[WA]$ i $[WB]$, a więc na powierzchni stożkowej. Oczywiście, możemy również, w innych przypadkach, otrzymać nie dwie różne odpowiedzi, lecz tylko jedną, lub przeciwnie więcej niż dwie.



Rys. 168.

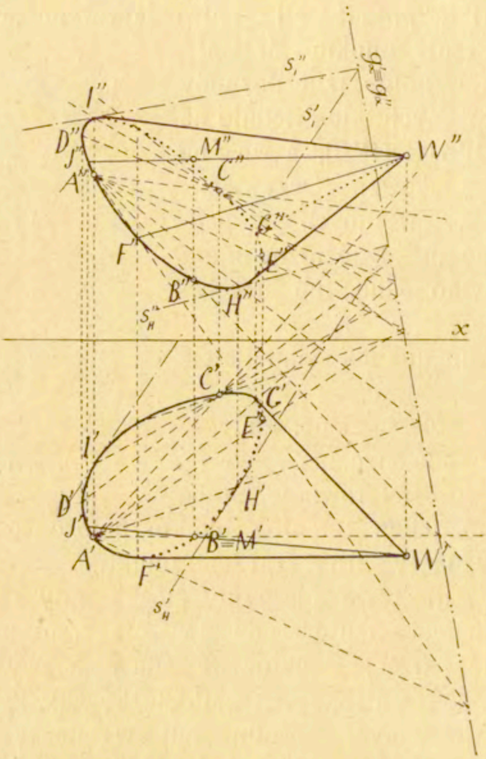
Niemal zupełnie tak samo da się rozwiązać:

*Zadanie 1 b.* Są dane: rzuty $k'$ i $k''$ kierownicy powierzchni walcowej, rzuty $a'$ i $a''$ prostej równoległej do tworzących oraz jeden z rzutów punktu, położonego na tej powierzchni. Wyznaczyć drugi rzut tego punktu.

*Zadanie 2 a.* Wykreślić rzuty stożka, gdy są dane: rzuty wierzchołka, jeden z rzutów podstawy oraz rzut na drugą płaszczyznę rzutów trzech punktów obwodu podstawy (który możemy uważać za kierownicę powierzchni stożkowej).

Rzutem poziomym obwodu podstawy na rys. 169-ym jest pewna krzywa zamknięta $A'B'C'A'$; oprócz tego są dane rzuty pionowe $A'', B'', C''$ oraz oba rzuty $W'$ i $W''$ wierzchołka stożka. O ile chodzi o rzut poziomy, możemy wykreślić odrazu zarys pozorny bryły, przeciągając z punktu $W'$ styczne do rzutu $A'B'C'A'$; zarys pozorny będzie się składał z odcinków $W'F'$ i $W'G'$ tych stycznych, oraz z części $F'A'G'$ rzutu poziomego obwodu podstawy. Same tworzące $WF$ i $WG$ oraz łuk $FAG$ w przestrzeni odgraniczają część całkowitej powierzchni stożka, widzialną przy spoglądaniu na płaszczyznę poziomą rzutów, od części niewidzialnej; nie możemy jednak odróżnić tych części pod tym względem bez odwołania się do rzutu pionowego. Ponieważ obwód podstawy z istoty swej musi być krzywą płaską, przeto jego rzut pionowy da się wyznaczyć przy pomocy powinowactwa (§ 30). W tym celu wyznaczamy prostą spółrzutową $g_\alpha' \equiv g_\alpha''$, odpowiadającą płaszczyźnie $\alpha$ podstawy, a to przez połączenie punktów

$$[[A'B'[A''B'']] \text{ i } [[A'C'][A''C'']];$$




Rys. 169.

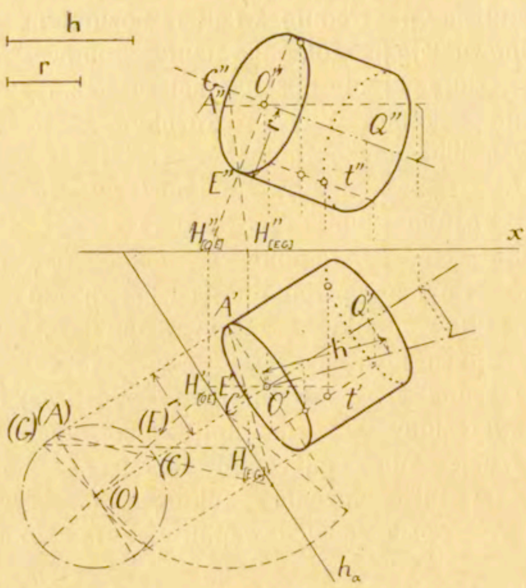
prosta ta jest, jak wiemy, osią powinowactwa, wiążącego rzuty poziome i pionowe punktów płaszczyzny $\alpha$. Następnie znajdujemy szereg punktów, odpowiadających różnym punktom rzutu poziomego obwodu podstawy. Zasługują przytem na uwagę w szczególności punkty $D'$ i $E'$, w których ten rzut poziomy posiada styczne, prostopadłe do osi $x$; o ile chodzi o krzywą płaską, takim rzutom poziomym odpowiadają naogół takie same rzuty pionowe (co wynika np. z konstrukcyi, opartych na powinowactwie), a więc rzut pionowy obwodu podstawy musi posiadać w punktach $D''$ i $E''$ te same styczne, co rzut poziomy w punktach $D'$ i $E'$. W celu nadania konstrukcyom większej dokładności, wyznaczamy jeszcze styczne $s_H''$ i $s_I''$ w paru odnalezionych punktach $H''$ i $I''$, jako proste, odpowiadające przy stosowanem przekształceniu stycznym $s_H'$ i $s_I'$ do rzutu poziomego obwodu podstawy w punktach $H'$ i $I'$ (por. ćw. 13 i 14 z rozdziału VI). Wyznaczone rzuty pionowe łączymy w sposób ciągły, z uwzględnieniem kierunku stycznych. Następnie wykreślamy z punktu $W''$ styczne do wyznaczonej w ten sposób krzywej, w celu otrzymania zarysu pozornego bryły, jak czyniliśmy poprzednio z rzutem poziomym. Styczne te (por. § 43) odpowiadają naogół, jako rzuty pionowe, *innym* tworzącym, niż te, których rzuty poziome należą do zarysu pozornego na płaszczyźnie poziomej. W celu rozróżnienia części widzialnych i niewidzialnych bierzemy np. punkt $B' \equiv M'$, w którym rzut $W'J'$ tworzącej $WJ$ przecina rzut obwodu podstawy, uważając go za wspólny rzut poziomy punktu $B$ na obwodzie podstawy oraz punktu $M$ na tworzącej $WJ$; ponieważ, jak się okazuje, $M''$ (na $W''J''$) leży wyżej niż $B''$, przeto dla oka, patrzącego na płaszczyznę poziomą rzutów, punkt $M$ zakrywa punkt $B$, i ostatecznie z dwu wymienionych powyżej części powierzchni całkowitej stożka, jest niewidzialna ta, do której należy podstawa; łuk $F'B'G'$ winien być wykreślony w postaci linii kropkowanej. Podobnież orzekamy o rzucie pionowym; wogóle stosujemy w takich razach zasadę porównywania położenia punktów, należących do powierzchni bryły a posiadających wspólny rzut poziomy lub pionowy.

*Zadanie 2 b.* Wykreślić rzuty walca, gdy są dane: rzut poziomy lub pionowy jednej z podstaw, rzut na drugą z płaszczyzn rzutu trzech punktów obwodu tej podstawy oraz oba rzuty tworzącej, wychodzącej z jednego z tych punktów — jest o tyle utrudnione w porównaniu z poprzedniem, że potrzeba wykreślać rzuty drugiej podstawy, którą można uważać przytem za wynik określonego przeniesienia równoległego pierwszej (§ 36, ćwicz. 30 i 31 z rozdziału VII-go). Szczegóły prawidłowego wykonania rysunku w najprostszych przypadkach uwydatnią się w przykładzie, który badamy w zadaniu następnem.

*Zadanie 3.* Wykreślić rzuty stożka obrotowego, gdy są dane: rzuty $O'$ i $O''$ środka jednej z podstaw, ślad $h_\alpha$ jej płaszczyzny, promień **r** i wysokość **h** stożka (z zastrzeżeniem, że zwrot tworzących walca jest np. taki, iż ich rzuty poziome mają iść na prawo od rzutu poziomego podstawy).

Jak wiemy (por. § 38 i rys. 107 oraz § 40), oba rzuty podstawy, położonej w pł. $\alpha$, muszą być elipsami o środkach $O'$ i $O''$ i osiach wielkich, równych **r**.

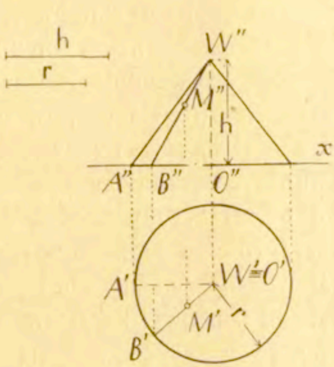
Końce osi wielkiej rzutu poziomego $A'$ i symetryczny z nim względem $O'$ znajdujemy łatwo na prostej $[\supset O' \parallel h_\alpha]$; w celu wyznaczenia osi małej używamy kładu, który pozwala otrzymać zapomocą kolineacyi punkt $C'$, jako odpowiadający końcowi $(C)$ promienia, prostopadłego do $[(O)(A)]$. Końce osi



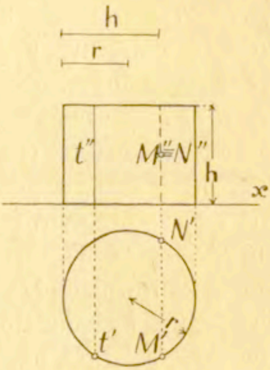

Rys. 170.

wielkiej rzutu pionowego odnajdujemy na rzucie pionowym linii frontu $[OH_{OE}]$, dającym się łatwo wyznaczyć podług rzutu poziomego $[O'H'_{OE}] \parallel x$, wreszcie od kładu $[(G)(E)]$, łączącego $(E)$ z końcem promienia $(O)(G) \perp [(O)(E)]$, przechodzimy do rzutu pionowego tej prostej i wyznaczamy rzut $G''$ jako punkt przecięcia tegoż z prostą $[\supset O'' \perp [O''E'']]$. Podporządkowanie wzajemne punktów obu elips, jako rzutów tych samych punktów w przestrzeni, jest w zupełności wyznaczone, jeżeli, dzieląc je na części „górne“ i „dolne“ zapomocą punktów, w których styczne są prostopadłe do osi $x$, wiemy, czy odpowiadają sobie wzajemnie części górne i części dolne, czy też przeciwnie — część górna jednego rzutu odpowiada części dolnej drugiego i nawzajem. Wystarczy do tego wyznaczenie obu rzutów jednego punktu, nie należącego do punktów, których rzuty są wymienionymi punktami podziału, np. $A'$ i $A''$ na rys. 170-ym.

Oś walca, t. j. prosta, łącząca środki jego podstaw, jako $\perp \alpha$, posiada rzuty prostopadłe odpowiednio do $h_\alpha$ i do rzutu linii frontu $[O''E'']$; odmierzamy na niej, jak wskazaliśmy w § 18, odcinek o danej długości h. Otrzymane w ten sposób rzuty $Q'$ i $Q''$ stanowią środki elips, równych dwu poprzednim i o tych samych kierunkach osi głównych. Rzuty tworzących, które należą do zarysu pozornego, są styczne do odpowiednich rzutów obwodów *obu podstaw*. O podziale na część widzialną i niewidzialną sądzimy tak samo, jak poprzednio, badając np. położenie dwu punktów, położonych na obwodzie jednej z podstaw i na jakiejś tworzącej $t$ i posiadających wspólny rzut poziomy lub pionowy. Oczywiście, jedna




Rys. 171.



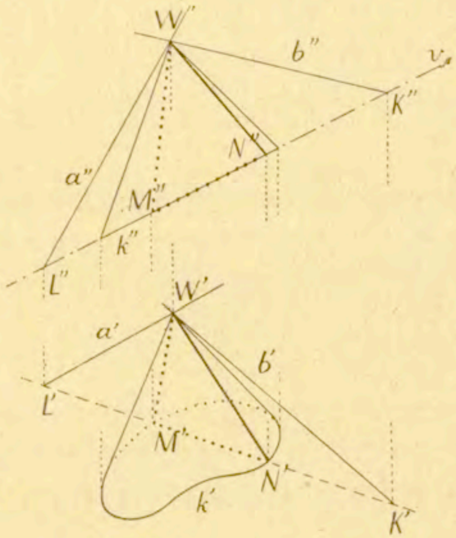

Rys. 172.

z podstaw będzie zawsze widzialna, druga — niewidzialna. Uczący się łatwo zastosuje podobne konstrukcye do wykreślenia rzutu stożka obrotowego w najogólniejszem położeniu.

Rysunki 171 i 172, nie wymagające obszerniejszych wyjaśnień, wyobrażają stożek kołowy i walec kołowy o danych: promieniu r i wysokości h, stojące na płaszczyźnie poziomej rzutów. Na rys. 171 podług rzutu poziomego tworzącej $WB$ i punktu $M$ na tej tworzącej został wyznaczony rzut pionowy tej tworzącej, wraz z rzutem pionowym punktu $M$; na rys. 172-im danemu rzutowi $M'' \equiv N''$ punktu na powierzchni walcowej odpowiadają dwa rzuty $M'$ i $N'$, a rzutowi $t''$, danemu *nietylko co do położenia*, ale z zastrzeżeniem, że jest rzutem tworzącej, widzialnej przy patrzeniu na płaszczyznę pionową, odpowiada tylko jeden rzut poziomy $t'$, więc tylko jedna tworząca w przestrzeni (bez tego zastrzeżenia odpowiadałyby mu 2 tworzące).

III. Jeżeli jakaś płaszczyzna zawiera wierzchołek dowolnej powierzchni stożkowej, to, jak łatwo zdać sobie sprawę ze sposobu powstawania tej powierzchni, mogą zachodzić przypadki następujące: 1) płaszczyzna nie posiada, oprócz wierzchołka, żadnego punktu wspólnego z powierzchnią stożkową; 2) istnieje jedna lub kilka prostych, należących jednocześnie do płaszczyzny i do powierzchni stożkowej. Podobnież możemy orzec, że płaszczyzna, równoległa do tworzących powierzchni walcowej, albo nie ma z nią żadnych punktów wspólnych (w odległości skończonej) albo też zawiera jedną lub więcej prostych, należących do tej powierzchni krzywej. Tworzące powierzchni stożkowej lub walcowej, należące do danej płaszczyzny, dadzą się wyznaczyć np. w ten sposób, że znajdujemy punkty przecięcia jednego ze śladów płaszczyzny ze śladem na tej samej płaszczyźnie rzutów danej powierzchni krzywej, t. j. miejscem geometrycznem śladów jej tworzących; tworzące, przechodzące przez te punkty, są to oczywiście proste poszukiwane. Możemy również, o ile to jest dogodne w danym razie, użyć śladów na innej płaszczyźnie; w szczególności, gdy mamy daną kierownicę płaską, stanowi ona właśnie ślad na swej płaszczyźnie powierzchni stożkowej lub walcowej i wystarczy znaleźć linię przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną sieczną. Gdy szukamy tedy przekroju stożka (bryły) płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołek, lub przekroju walca płaszczyzną, równoległą do tworzących, to wypada stosować te same metody, jak w § 45-ym (zad. 3-cie i 4-te). Wykonaliśmy np. taką konstrukcyę na rys. 173, na którym został wyznaczony przekrój trójkątny *WMN* stożka o podstawie, położonej w płaszczyźnie $\beta \perp \Pi_2$, utworzony przez płaszczyznę [*ab*]. Polecamy uczącemu się zastanowienie się nad odróżnieniem części widzialnych i niewidzialnych.

Jeżeli płaszczyzna, przecinająca powierzchnię stożkową, nie zawiera jej wierzchołka, to linia przecięcia będzie w ogólności linią krzywą — to samo się stosuje do linii przecięcia powierzchni walcowej przez płaszczyznę, nierównoległą do tworzących. Aby wyznaczyć taką krzywą, należy znaleźć punkty, w których płaszczyznę sieczną przebija pewna liczba tworzących, dość zbliżonych do siebie; rzuty tych punktów łączymy odpowiednio linią ciągłą. Oczywiście, zadanie jest ogromnie ułatwione, jeżeli płaszczyzna sieczna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów (por. § 45, zad. 1). Jeżeli płaszczyzna nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutu, to możemy stosować prawa ogólne, uzasadnione już dostatecznie przy badaniu przekrojów powierzchni ostrosłupowych i graniastosłupowych: 1) rzuty tego samego rodzaju (poziome lub pionowe) dwu przekrojów powierzchni stożkowej są ze sobą skolineowane w ten sposób, że środkiem kolineacyi jest odpowiedni rzut wierzchołka, a osią — odpowiedni rzut linii przecięcia płaszczyzn przekrojów; 2) rzuty tego samego rodzaju dwu przekrojów powierzchni walcowej są ze sobą skolineowane równolegle czyli spowinowacone w ten sposób, że kierunkiem powinowactwa jest kierunek wspólny odpowiednich rzutów tworzących, a oś powinowactwa jest określona tak samo, jak poprzednio. Jeżeli (oczywiście, oprócz wierzchołka powierzchni stożkowej lub kierunku tworzących powierzchni walcowej) jest dana *kierownica płaska* (względnie obwód podstawy stożka lub walca ograniczonego), którą możemy uważać za jeden z przekrojów, znany, i należy wyznaczyć linię przecięcia powierzchni z pewną daną płaszczyzną, to odpowiednim konstrukcyom wypadnie nadać zupełnie taki sam przebieg, jak przy wyznaczaniu przekrojów powierzchni ostrosłupowych i graniastosłupowych (§ 46)—z tą różnicą, że wyznaczamy bezpośrednio punkt przebicia płaszczyzny siecznej nie przez krawędzie, lecz przez jedną z tworzących, że odnajdujemy zapomocą kolineacyi punkty, odpowiadające nie wierzchołkom pewnego wielokąta, lecz punktom, dobranym odpowiednio na pewnej krzywej (por. rys. 97), a mianowicie na jednym z rzutów kierownicy i t. d. Podnosimy znacznie

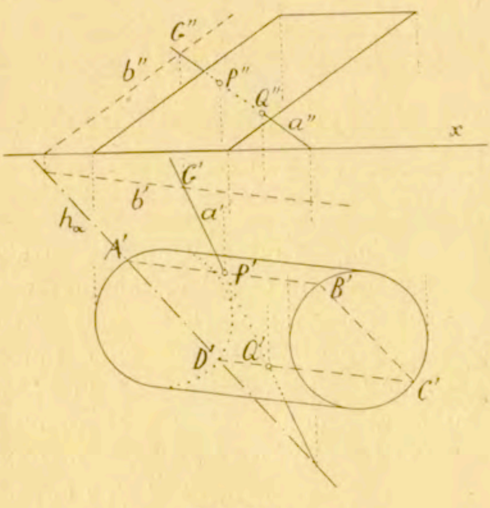



Rys. 173.

dokładność konstrukcyi, wykreślając styczne do poszukiwanych rzutów przekroju, odpowiadające przy przekształceniu kolineacyjnem stycznym do rzutów kierownicy (por. § 33, rys. 110 i 169). Oczywiście, zadanie jest w znacznym stopniu ułatwione, jeżeli kierownica jest położona w jednej z płaszczyzn rzutu.

Przypuśćmy, że płaszczyzna sieczna jest równoległa do jednej z tworzących powierzchni stożkowej; możemy się w takim przypadku wyrazić, że punkt przekroju, należący do tej tworzącej, jest punktem w nieskończoności. Tworzące, spełniające ten warunek, dają się wyznaczyć, jak łatwo zdać sobie sprawę, jako linie przecięcia powierzchni z płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny siecznej i przeciągniętą przez wierzchołek.

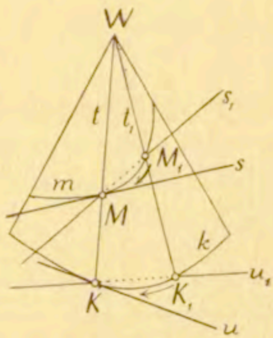
Wyznaczenie punktów przebicia powierzchni stożkowej lub walcowej przez prostą opiera się na tej samej zasadzie, którą wyjaśniliśmy już powyżej, w § 45-ym, a mianowicie wprowadzamy w tym celu płaszczyznę pomocniczą, zawierającą daną prostą, i znajdujemy punkty, w których ta prosta przecina linię przekroju, wyznaczoną na powierzchni przez użytą płaszczyznę. Najczęściej wypadnie używać w tym celu płaszczyzny, zawierającej wierzchołek powierzchni stożkowej lub równoległej do tworzących powierzchni walcowej, a to ze względu na łatwość wykreślenia odpowiedniej linii przecięcia, składającej się z prostych.



Rys. 174.

Na rys. 174-ym podajemy przykład takiej konstrukcyi w zastosowaniu do prostej $a$ i walca o podstawie, położonej w $\Pi_1$. Prosta pomocnicza $b$, przecinająca $a$, jest równoległa do tworzących walca; płaszczyzna pomocnicza $\alpha \equiv$ pł. $[ab]$; ślad $h_\alpha$ wyznacza linię przecięcia $\alpha$ z powierzchnią całkowitą stożka, $ABCDA$; na linii tej leżą szukane punkty $P$ i $Q$.

§ 52. **O płaszczyznach stycznych do powierzchni stożkowych i walcowych.** I. Przypuśćmy, że jakaś krzywa $k$ na powierzchni stożkowej, którą możemy np. uważać za kierownicę tej powierzchni, posiada w pewnym punkcie $K$ określoną styczną, nie przystającą do tworzącej $[WK]$ (rys. 175; $W$ oznacza wierzchołek powierzchni). Weźmy następnie dowolny punkt $M$ tej samej tworzącej $[WK]\equiv t$ (nie identyczny, równie jak punkt $K$, z wierzchołkiem $W$) i wykreślmy przez ten punkt na powierzchni stożkowej dowolną krzywą $m$, posiadającą w $M$ styczną $s$. Płaszczyzna, przeciągnięta przez tworzącą $t\equiv[WK]$ i jakąś inną tworzącą $t_1$, przecina krzywe $k$ i $m$, oprócz punktów $K$ i $M$, jeszcze w punktach $k_1$ i $M_1$ i zawiera sieczne tych krzywych: $[KK_1]\equiv u_1$ i $[MM_1]\equiv s_1$. Przypuśćmy, że obracamy tę płaszczyznę dokoła tworzącej $t$ tak, iżby punkt $K_1$ zdążał wzdłuż $k$ ku punktowi $K$; w takim razie sieczna $u_1$ (§ 35) zmierza do osiągnięcia położenia granicznego, w którem staje się styczną $u$ w punkcie $K$ do krzywej $k$, a płaszczyzna $[tt_1]$ zmierza do osiągnięcia położenia, w którem staje się wyznaczoną przez proste $t$ i $u$. Otóż jednocześnie punkt $M_1$ zmierza wzdłuż $m$ ku $M$, więc sieczna $s_1$ dąży do stycznej $s$, jako do swej granicy. Ponieważ przytem $s_1$ i $u_1$, nie poruszając się niezależnie od siebie, pozostają zawsze w tej samej płaszczyźnie $[tt_1]$, przeto styczne $s$ i $u$, stanowiące ich granice, muszą również leżeć w tej samej płaszczyźnie, którą możemy uważać za wyznaczoną przez tworzącą $t$ i styczną $u$. Owóż, krzywa $m$ była przez nas obrana dowolnie (z tym jedynie warunkiem, że posiada styczną), i to samo rozumowanie można zastosować do nieskończenie wielu innych krzywych, przeciągniętych na powierzchni stożkowej przez punkt $M$; pł. $[ut]$, zawierając styczne do tych wszystkich krzywych, stanowi płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie $M$, który jest jej punktem zwyczajnym [1]). Z powodu, że ten punkt był obrany dowolnie na



Rys. 175.

[1]) Nie dawszy poprzednio dokładnego określenia pojęcia „punkt zwyczajny powierzchni“, coby wymagało roztrząsań stosunkowo dość subtelnych,

tworzącej $t$, to samo się stosuje do wszystkich punktów tej tworzącej i ostatecznie:

Płaszczyzna styczna do powierzchni stożkowej, wyznaczona dla jakiegoś jej punktu, jest płaszczyzną styczną we wszystkich innych punktach tej samej tworzącej, z wyjątkiem wierzchołka, w którym (jest to „punkt szczególny“) powierzchnia nie posiada płaszczyzny stycznej. Zupełnie takie samo rozumowanie i takie samo twierdzenie stosuje się do powierzchni walcowej, z tą różnicą, że nie posiada ona takiego punktu wyjątkowego w odległości skończonej.

Pominięty przed chwilą przypadek, w którym styczna do krzywej $k$ przystaje do tworzącej $t$, może być również uwzględniony, ponieważ płaszczyzna, zawierająca styczną $u \equiv t$ do krzywej $k$ w punkcie $K$ oraz punkt „sąsiedni“ $K_1$, zmierza w ogólności również do osiągnięcia pewnego położenia granicznego, w którem stanowi to, co nazywamy *płaszczyzną ściśle styczną* do krzywej $k$ w punkcie $K$ (gdy krzywa jest płaska, jest to jej płaszczyzna). Owa płaszczyzna ściśle styczna spełnia te same warunki, co poprzednio pł. $[ut]$, i stanowi płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej wzdłuż tworzącej $t$.

Jako jeden z wyników poprzednich rozważań, przytoczymy jeszcze twierdzenie następujące: Rzutem stycznej do krzywej płaskiej lub skośnej w jakimś jej punkcie jest naogół styczna w rzucie tego punktu do rzutu krzywej.

Istotnie, wszystkie proste, rzutujące punkty jakiejś prostej $m$, tworzą pewną powierzchnię stożkową, gdy mowa o rzucie środkowym, walcową, gdy rzut jest równoległy; powierzchnia ta, zwana *powierzchnią rzutującą krzywą*, przecina płaszczyznę rzutów wzdłuż rzutu $m'$; płaszczyzna styczna do powierzchni rzutującej wzdłuż prostej $[MM']$, rzutującej punkt $M$, zawiera jednocześnie, jak widzieliśmy, styczną $s$ do $m$ i styczną do $m'$, jako styczną do innej krzywej tej powierzchni, w punkcie $M'$ tej samej tworzącej; rzecz jasna tedy, że rzutuje ona prostą $s$ i że styczna do $m'$ w $M$ jest właśnie rzutem $s'$ krzywej $s$. Gdyby styczna $s$ była jedną z prostych rzutujących, rzut jej byłby punktem, a styczna do $m'$ w $M'$ byłaby śladem płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej $m$ w punkcie $M$.

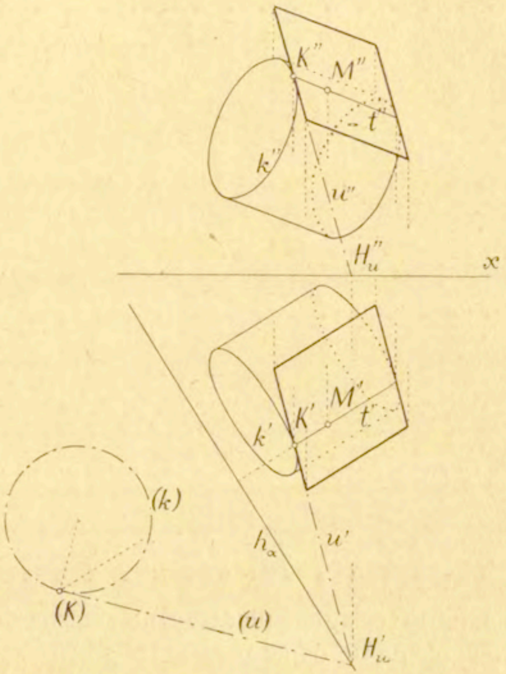
Nawzajem, jeżeli mamy rzuty prostokątne $m'$ i $m''$ na dwie płaszczyzny rzutów $\Pi_1$ i $\Pi_2$ jakiejś krzywej $m$, to styczne do nich w punktach $M'$ i $M''$, stanowiących rzuty tego samego punktu $M$ krzywej, są w ogólności (a mianowicie, gdy są nachylone do $x$) rzutami stycznej do $m$ w punkcie $M$; jeżeli jedna z tych stycznych jest prostopadła do osi rzutów, druga zaś nachylona, to pierwsza

---

pominąć też musimy ścisłe udowodnienie, że punkt $M$ spełnia odpowiednie warunki; nie dowodzimy również rzeczywistego istnienia nieskończenie wielu krzywych, położonych na powierzchni i posiadających styczne.

jest, jak poprzednio, jednym z rzutów stycznej do $m$ w punkcie $M$, drugim zaś jest nie styczna do drugiego rzutu, lecz sam rzut punktu $M$ na drugą płaszczyznę (styczna w przestrzeni jest $\perp$ do tej płaszczyzny).

*II. Zadanie (A).* Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej, określonej, jak zwykle, przez kierownicę i wierzchołek lub też do powierzchni walcowej, danej przez kierownicę i kierunek tworzących, w określonym jej punkcie.



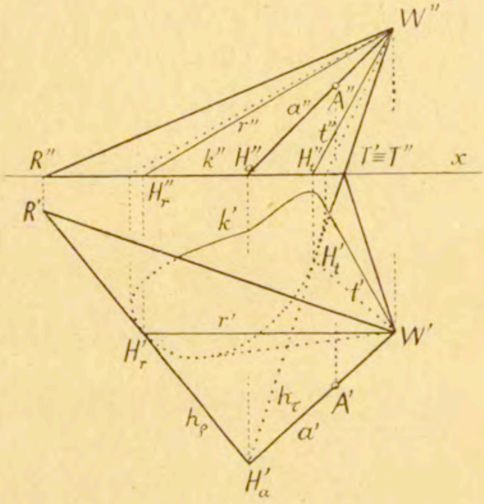

Rys. 176.

Zgodnie z powyższemi rozważaniami wystarczy wyznaczyć w punkcie przecięcia $K$ kierownicy $k$ z tworzącą $t$, zawierającą dany punkt $M$, styczną $u$ do kierownicy; płaszczyzna, wyznaczona przez tę styczną i tworzącą $t$, jest szukaną płaszczyzną. Rzuty prostej $u$ znajdujemy, jako styczne: do $k'$ w punkcie $K'$ i do $k''$ w punkcie $K''$. Przykład takiej konstrukcyi dajemy na rys. 176-ym, na którym wyobraziliśmy walec obrotowy z rys. 170-go; w celu dokładnego wyznaczenia stycznych $u'$ i $u''$ w punktach $K'$ i $K''$

używamy kładu $(k)$ kierownicy (t. j. obwodu jednej z podstaw) i podług kładu $(u)$, stycznego do $(k)$ w punkcie $(K)$, odnajdujemy rzuty prostej $u$, łącząc $H_u'$ z $K'$ i $H_u''$ z $K''$. Wyobraziliśmy na rysunku płat prostokątny płaszczyzny stycznej, zakrywający, przy spoglądaniu na obie płaszczyzny rzutów, pewne części rzutów walca.

Rozwiążmy jeszcze następujące cztery zadania typowe:

Zadanie 1. Przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej przez dany punkt, nie należący do powierzchni.




Rys. 177.

Zadanie 2. Przeciągnąć płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej, równoległą do danej prostej.

Zadanie 3. Przeciągnąć przez dany punkt, nie należący do powierzchni walcowej, płaszczyznę styczną do tej powierzchni.

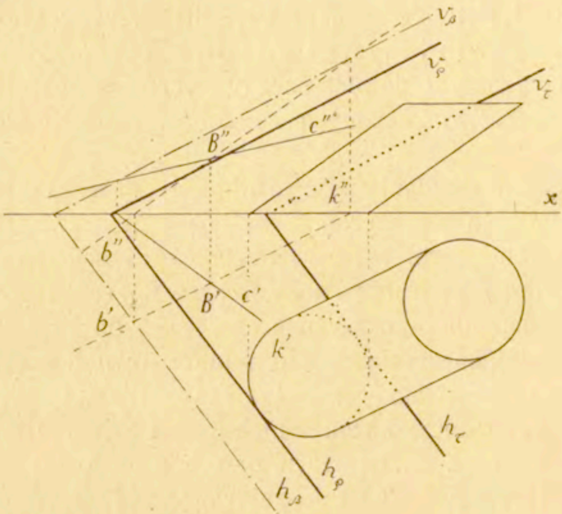
Zadanie 4. Przeciągnąć płaszczyznę styczną do danej powierzchni walcowej i równoległą do danej prostej.

W celu rozwiązania zadania 1-go wyznaczamy ślad na płaszczyźnie kierownicy (zakładamy w tych wszystkich zadaniach, że kierownice są liniami płaskiemi) prostej, łączącej wierzchołek stożka z danym punktem i kreślimy z tego śladu styczne do kierownicy; płaszczyzny, wyznaczone przez te styczne i przez wierzchołek powierzchni, jako zawierające styczne do kierownicy i odpowiednie tworzące, są to właśnie płaszczyzny styczne. Tak np. mając do czynienia na rys. 177-ym ze stożkiem o wierzchołku $W$ i kierownicy w $\Pi_1$ oraz z punktem $A$ o danych rzutach $A'$ i $A''$, wyznaczamy ślad poziomy $H_a \equiv H_a' \equiv [a\Pi_1]$ prostej $a \equiv [WA]$ i wykreślamy zeń styczne $h_\rho$ i $h_\tau$ do $k \equiv k^3$, które wraz z punktem $W$ wyznaczają płaszczyzny $\rho \equiv [h_\rho W]$ i $\tau \equiv [h_\tau W]$, odpowiadające wymaganiom. Rzuty poziome $r'$ i $t'$ tworzących, wzdłuż których te płaszczyzny są styczne do powierzchni, otrzymujemy, łącząc $W'$ z punktami styczności $H_r'$ i $H_t'$ prostych $h_\rho$ i $h_\tau$ z $k \equiv k'$ czyli ze śladami poziomymi tych tworzących; wyznaczenie ich rzutów pionowych $t''$ i $r''$ nie wymaga wyjaśnień, rzuty pionowe śladów $h_\rho$ i $h_\tau$ płaszczyzn $\rho$ i $\tau$ przystają do osi $x$. Na omawianym rysunku przedstawiliśmy obie płaszczyzny styczne w postaci trójkątów $WH_aR$ i $WH_aT$, połączonych ze sobą wzdłuż boku wspólnego $WH_a$.

Rozwiązanie zadania 2-go różni się tylko tem od rozwiązania poprzedniego, że wyznaczamy ślad na płaszczyźnie kierownicy prostej, przechodzącej przez wierzchołek i *równoległej do danej prostej*—dalsza konstrukcya odbywa się w ten sam sposób. W celu rozwiązania zadania 3-go wyznaczamy ślad na płaszczyźnie kierownicy prostej, zawierającej dany punkt i równoległej do tworzących powierzchni walcowej, i kreślimy zeń wszystkie możliwe styczne do kierownicy; każda z nich wyznacza wraz z odpowiednią linią styczności, t. j. tworzącą, przechodzącą przez punkt styczności na kierownicy, jedną z poszukiwanych płaszczyzn stycznych. Wreszcie, gdy mamy do rozwiązania zadanie 4-te, należy wyznaczyć ślad na płaszczyźnie kierownicy dowolnej płaszczyzny, równoległej jednocześnie do tworzących powierzchni walcowej i do danej prostej. Styczne do kierownicy, równoległe do tego śladu, wyznaczają wraz z odpowiedniemi tworzącemi żądane płaszczyzny styczne, które można jeszcze inaczej określić, jako przeciągnięte przez te styczne i równoległe do opisanej płaszczyzny pomocniczej.

Przykład takiego rozwiązania podajemy na rys. 178-ym, na którym został wyobrażony walec o podstawie kołowej, położonej w $\Pi_1$; daną prostą oznaczyliśmy przez $c$. Przez rzuty dowolnego punktu $B$ na $c$ kreślimy rzuty $b'$ i $b''$, równoległe odpowiednio do rzutów tworzących walca, i wyznaczamy ślady $h_\beta$ i $v_\beta$ płaszczyzny $\beta \equiv$ pł. $[bc]$; poszukiwane płaszczyzny styczne $\rho$ i $\tau$ mają ślady poziome, styczne do obwodu podstawy i równoległe do $h_\beta$; $v_\rho \parallel v_\beta$ i $v_\tau \parallel v_\beta$.

W zadaniach 2-em i 4-em może chodzić w szczególności o płaszczyzny, styczne do powierzchni i prostopadłe do jednej z płaszczyzn rzutu. Rzuty tworzących, należące do zarysu pozornego powierzchni, stanowią naogół ślady takich płaszczyzn. Pojęcie zarysu pozornego rozszerza się właśnie w ten sposób, że zaliczamy do niego rzuty tworzących, wzdłuż których jest styczna do powierzchni płaszczyzna prostopadła do danej płaszczyzny rzutu, choćby nawet te rzuty nie należały do linii granicznych obrazu, leżąc wewnątrz, pomiędzy rzutami innych tworzących. Czynimy to dlatego, że wzdłuż takich tworzących proste rzutujące są styczne do powierzchni i że przeto, przy znanej umowie idealnej co do sposobu umieszczenia oka widza, tworzące te stanowią granice fałdów, zakrywających dalej położone części powierzchni. To samo się stosuje




Rys. 178.

do dowolnej powierzchni i dowolnego rodzaju rzutu; wogóle zaliczamy do „zarysu pozornego“ rzuty wszystkich punktów powierzchni, w których płaszczyzna styczna zawiera prostą, rzutującą ten punkt.

III. Roztrząsania z I części tego paragrafu pozwalają na pogłębienie zagadnień z paragrafu poprzedniego oraz na osiągnięcie pewnych nowych wyników. Możemy sobie teraz np. uprzytomnić, że przy poszukiwaniu linii przecięcia powierzchni stożkowej lub walcowej z płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołek pierwszej lub równoległą do tworzących drugiej, może się okazać, że płaszczyzna ta jest styczna do powierzchni wzdłuż jednej lub kilku tworzących, że natomiast styczność jest wykluczona, gdy płaszczyzna sieczna nie spełnia odpowiednio jednego z tych warunków i t. d.

Określmy jeszcze, co nazywamy styczną do krzywej w jej punkcie w nieskończoności. Przypuśćmy, że punkt, zakreślający krzywą, oddala się wzdłuż niej nieskończenie w ten sposób, iż prosta, łącząca go z jakimś punktem stałym w odległości skończonej, zmierza do osiągnięcia pewnego położenia granicznego — mówimy w takim razie, że kierunek owej prostej granicznej jest *kierunkiem asymptotycznym* krzywej, określającym jej „punkt w nieskończoności". Wszelką prostą o takim kierunku, przecinającą krzywą w jednym przynajmniej punkcie, położonym w odległości skończonej, który oznaczymy w danej chwili przez $S$, możemy nazwać sieczną krzywej, przechodzącą przez odpowiedni punkt w nieskończoności $P_\infty$. Przy przesuwaniu równoległem takiej prostej $[SP_\infty]$ w ten sposób, iżby punkt $S$ oddalał się nieograniczenie, t. j. „dążył do punktu $P_\infty$", może ona zmierzać do osiągnięcia pewnego określonego położenia granicznego, nie uciekając całkowicie w nieskończoność — i prostą o tem położeniu nazwiemy w takim razie styczną w $P_\infty$ czyli *asymptotą* krzywej. Jeżeli mamy do czynienia z krzywą płaską, położoną perspektywicznie względem jakiejś innej krzywej płaskiej w przestrzeni, lub skolineowaną z nią w jednej płaszczyźnie (przy istnieniu w obu przypadkach środka kolineacyi w odległości skończonej), to jakiś jej punkt w nieskończoności będzie w ogólności odpowiadał punktowi tamtej drugiej krzywej, położonemu w odległości skończonej, sieczne, przechodzące przez ów punkt w nieskończoności — siecznym, przechodzącym przez wymieniony punkt odpowiedni, a asymptota, zgodnie z przebiegiem przejścia do granicy — stycznej w tamtym punkcie. Zastosujmy te uwagi do rozwiązania zadania następującego:

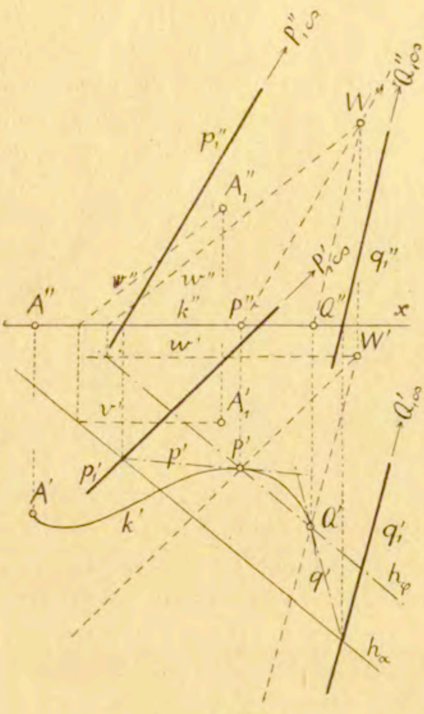
Są dane: rzuty wierzchołka $W$ powierzchni stożkowej, rzuty jej kierownicy $k$, położonej w $\Pi_1$ oraz ślad $h_\alpha$ i rzuty jednego z punktów $A_1$ płaszczyzny siecznej $\alpha$. Wyznaczyć asymptoty przekroju powierzchni stożkowej.

Punkty w nieskończoności przekroju leżą na tworzących, równoległych do $\alpha$. W celu wyznaczenia tych tworzących znajdujemy zapomocą linii frontu $w$ ślad poziomy $h_\varphi$ płaszczyzny $\varphi$=pł. $[\supset W \parallel \alpha]$ (p. paragraf poprzedni); będą to tworzące $[WP]$ i $[WQ]$ (rys. 179); kierunki ich określają właśnie dwa punkty w nieskończoności $P_{1\infty}$ i $Q_{1\infty}$, przeto asymptoty winny być odpowiednio do nich równoległe. Przy przekształceniu kolineacyjnem, wiodącem od $k'$ do rzutu poziomego linii przekroju, rzutom $P_{1\infty}$ i $Q_{1\infty}$ odpowiadają rzuty $P'$ i $Q'$ punktów $P$ i $Q$ na $k$; ponieważ, jak widzieliśmy, ze stycznemi $p$ i $q$ do $k$ w punktach $P$ i $Q$ są związane perspektywicznie w przestrzeni szukane asymptoty $p_1$ i $q_1$, przeto zapomocą wymienionego powyżej przekształcenia kolineacyjnego rzuty $p_1'$ i $q_1'$ wyznaczamy jako odpowiadające rzutom $p'$ (w danym przypadku $\equiv p$) i $q'$ (w danym przypadku $\equiv q$); więc

$$p_1' \equiv [\supset [p'h_\alpha] \parallel [W'P']],$$

$$q_1' \equiv [\supset [q'h_\alpha] \parallel [W'Q']].$$

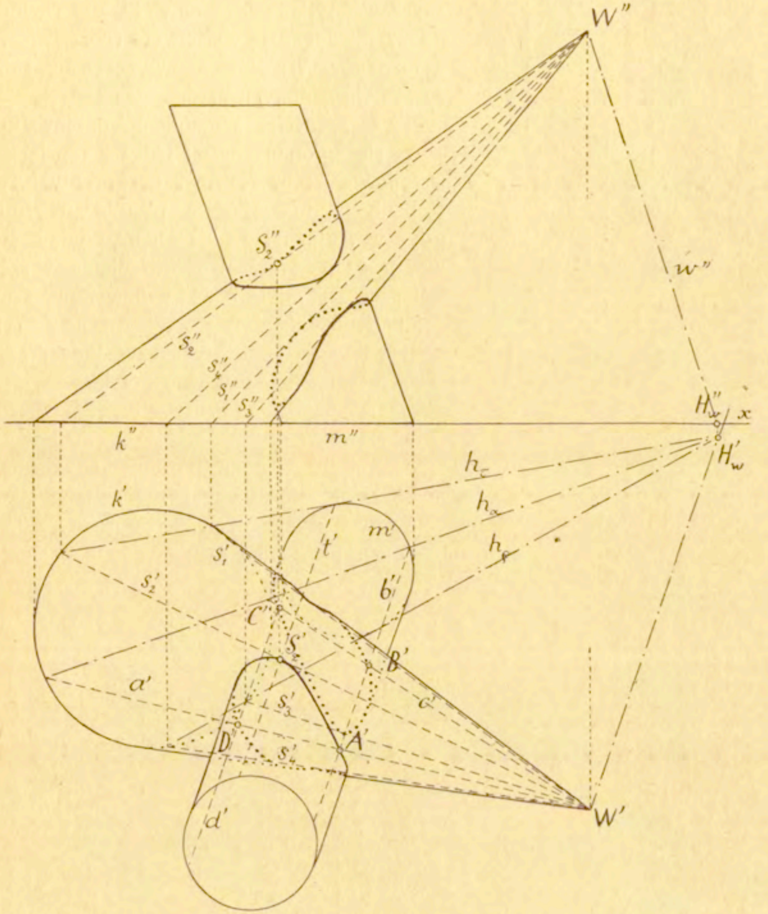
Podług $p_1'$ i $q_1'$ wyznaczamy łatwo $p_1'' \parallel [W''P'']$ i $q_1'' \parallel [W''Q'']$.




Rys. 179.

**§ 53. I. Przenikanie się powierzchni stożkowych i walcowych i ich siatki.** W celu wyznaczenia linii, wzdłuż której przecinają się powierzchnie walcowe lub stożkowe, używamy metod podobnych do wyłożonych w § 47-ym; różnica polega na tem tylko, że zamiast np. przesuwać płaszczyzny pomocnicze przez krawędzie jednego ostrosłupa i wierzchołek drugiego i nawzajem, przesuwamy pęk płaszczyzn odpowiednio dobranych, przez wierzchołki dwu stożków, znajdujemy tworzące, wzdłuż których każda z nich przecina obie powierzchnie i wyznaczamy punkty przecięcia tych tworzących, które należą do tych samych płaszczyzn pomocniczych, a różnych powierzchni. Rzuty tych punktów należy połączyć zapomocą linii ciągłych w takim porządku, jaki odpowiada porządkowi tworzących na obu stożkach. Na rys. 180-ym podaliśmy konstrukcyę linii przenikania się powierzchni walca i stożka, przy założeniu, że obie te bryły mają podstawy kołowe w $\Pi_1$. Prosta $w \supset W$ i jest $\parallel$ do tworzących walca; przez jej ślad poziomy $H_w$ przechodzą ślady płaszczyzn pomocniczych np. $h_\alpha$. Płaszczyzna $\alpha$ przecina powierzchnię boczną stożka podług tworzących $a$ i $c$, a powierzchnię walca wzdłuż tworzących $b$ i $d$ i daje cztery punkty $A \equiv [ab]$, $B \equiv [bc]$, $C \equiv [cd]$, $D \equiv [da]$ szukanej linii przecięcia, których rzuty poziome są oznaczone na rysunku.

Płaszczyzna pomocnicza $\tau$, styczna do powierzchni walcowej wzdłuż tworzącej $t$, przecina powierzchnię stożkową wzdłuż tworzących $s_1$ i $s_2$, które jako linie przecięcia płaszczyzny stycznej do jednej powierzchni z płaszczyznami stycznemi do drugiej, są styczne do szukanej linii przecięcia tych dwu powierzchni [1]). Dwie inne styczne $s_3$ i $s_4$ wyznaczamy zapomocą płaszczyzny stycznej $\rho$. Zgodnie z roztrząsaniami z poprzedniego paragrafu rzuty tych two-

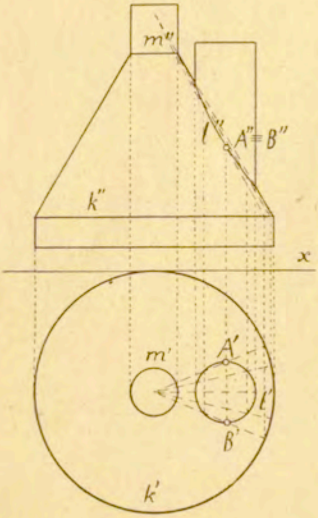



Rys. 118.

rzących muszą być odpowiednio styczne do rzutów szukanej linii przenikania się. Rzuty pionowe punktów tej linii muszą leżeć: 1) na rzutach pionowych

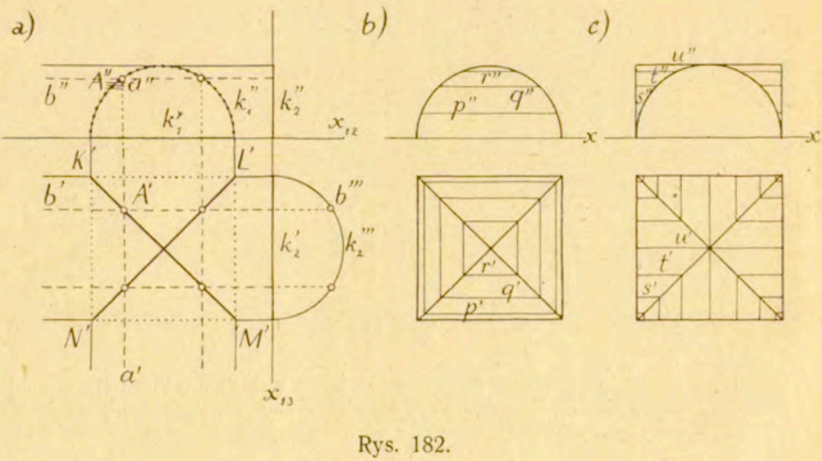
[1]) Gdy krzywa jest położona jednocześnie na dwu powierzchniach, to styczna do niej w jakimkolwiek punkcie musi należeć jednocześnie do płaszczyzn stycznych do obu powierzchni w tym punkcie, a więc stanowić ich linię przecięcia.

odpowiednich tworzących jednej powierzchni; 2) na rzutach pionowych odpowiednich tworzących drugiej; 3) na odpowiednich liniach rzutu. Na rys. 180 pokazaliśmy np. konstrukcyę rzutu $S_2''$ punktu $S_2 \equiv [s_2 t]$. Inne szczegóły konstrukcyi pozostawiamy, dla braku miejsca, do rozważenia i sprawdzenia uczącemu się, zaznaczając tylko, że mamy tu do czynienia z przenikaniem się właściwem (por. ćwicz. 51 z rozdziału VII); krzywa wyznaczona składa się z dwu osobnych części.




Rys. 181.

Oczywiście, zagadnienie ogólne upraszcza się ogromnie, jeżeli jedna z powierzchni jest powierzchnią walcową o tworzących, prostopadłych do jednej z płaszczyzn rzutów, gdyż w takim razie odpowiedni jej rzut sprowadza się do krzywej, na której leżą w szczególności wszystkie odpowiednie rzuty szukanej linii przenikania się. Tak np. na rys. 181 bardzo łatwo dała się wyznaczyć linia przecięcia $l$ powierzchni stożkowej z taką powierzchnią walcową: rzut $l'$ nakrywa rzut powierzchni walcowej, rzuty $A'$, $B'$ i t. d. są to punkty przecięcia $l'$ z rzutami poziomymi tworzących powierzchni stożkowych; na rzutach pionowych tych tworzących wyznaczamy $A''$, $B''$ i t. d. Cały rysunek przedstawia połączenie

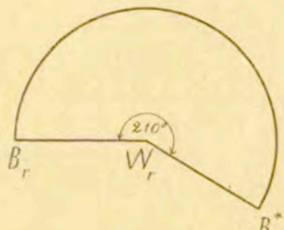



Rys. 182.

stożka z trzema walcami, o typie, spotykanym w konstrukcyi maszyn parowych. Co do rzutów linii przecięcia $k$ i $m$, nie wymagają one żadnych dodatkowych wyjaśnień.

Inne jeszcze zastosowanie praktyczne z tego zakresu stanowi budowa sklepień. Przypuśćmy, że mamy (rys. 182 a), dwie powierzchnie walcowe o kierownicach $k_1$ i $k_2$ w kształcie półokręgów, położonych odpowiednio w płaszczyznach: $\Pi_2$ i $\Pi_3 \perp x$, a o tworzących, prostopadłych do tych płaszczyzn. W celu dokładnego wyznaczenia jednej z nich, podaliśmy jeszcze rzut $k_2'''$; przy zastosowaniu tego rzutu oraz rzutu $k_1''$ widać odrazu, że rzuty poziome tworzących obu powierzchni, położonych na tym samym poziomie ponad $\Pi_1$, a więc przecinających się, np. tworzących $a$ i $b$, są jednakowo oddalone od boków kwadratu $KLMN \equiv K'L'M'N'$, utworzonego przez ślady poziome obu powierzchni; stąd wynika, że rzuty poziome linii przenikania się są to przekątne tego kwadratu; rzuty pionowe nakrywają, rzecz oczywista, $k_1''$. Biorąc tylko części każdej z powierzchni, położone pod drugą, otrzymujemy t. zw. *sklepienie klasztorne* (rys. 182 b); odrzucając te właśnie części wewnętrzne oraz części, nie położone ponad kwadratem $KLMN$, otrzymujemy *sklepienie krzyżowe* (rys. 182 c); $p, q, r, s, t, u$ — tworzące widzialne przy spoglądaniu na *obie* płaszczyzny rzutu).

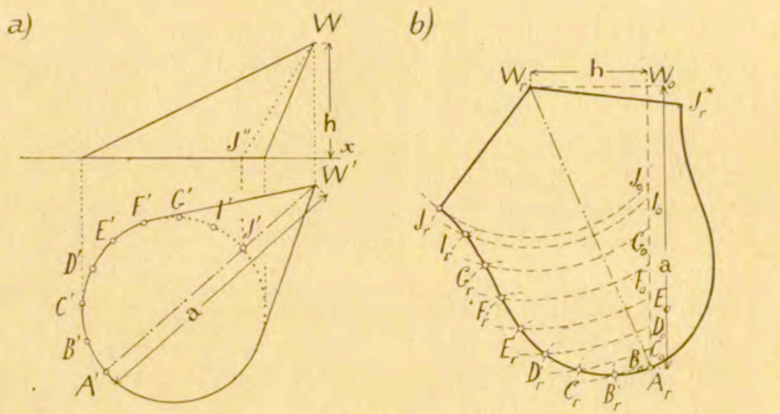
II. Przy rozwijaniu powierzchni bocznej stożka obrotowego otrzymujemy z powodu jednakowej długości wszystkich tworzących (liczonej oczywiście od wierzchołka do podstawy) wycinek koła o promieniu, równym tworzącym. Możemy wykreślić ten wycinek zapomocą wyznaczenia z góry jego kąta środkowego, który tak się ma do kąta pełnego, jak promień podstawy stożka do tworzącej, co nader łatwo uzasadnić. Tak np. na rys. 183-im kąt środkowy wycinka, stanowiącego wynik rozwinięcia powierzchni bocznej stożka z rysunku 171-go, $= 210^0$, gdyż stosunek promienia do tworzącej $\frac{r}{t} = \frac{7}{12}$ (r = 1,05 *cm.*, t = 1,8 *cm.*).



Rys. 183.

Można również użyć konstrukcyi ogólnej, którą zaraz wskażemy.

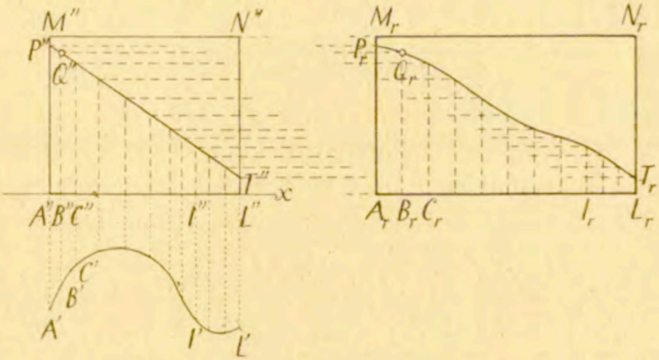
Gdy chodzi o rozwinięcie części powierzchni stożkowej, zawartej pomiędzy wierzchołkiem a kierownicą, dzielimy kierownicę na części dość małe, aby można było bez znacznego błędu uważać je za równe odpowiednim cięciwom. Następnie wyznaczamy rzeczywiste długości tych cięciw oraz tworzących, łączących wierzchołek z punktami podziału i wyznaczamy po kolei punkty, odpowiadające przy rozwinięciu tym punktom podziału, w taki sposób, jakby chodziło o rozwinięcie powierzchni ostrosłupowej, mającej te tworzące za krawędzie, t. j. wpisanej w daną powierzchnię stożkową. Otrzymane punkty łączymy zapomocą linii krzywej i kreślimy jeszcze rysem nieprzerywanym proste graniczne, wyobrażające odpowiednie tworzące. Tak np. na rys. 184-ym podzieliliśmy połowę okręgu, stanowiącego kierownicę, na 8 części równych zapomocą punktów $A'\equiv A$, $B'\equiv B$,... $J'\equiv J$; długości tworzących $WA$, $WB$,... $WJ$ zostały wyznaczone, jako mierzące przeciwprostokątne trójkątów prostokątnych o jednej wspólnej przyprostokątnej $=$ h (odległości $W''$ od $x$) i drugiej, równej kolejno: $W_oA_r = W'A'$, $W_oB_o = W'B'$,... $W_oJ_o = W'J'$; punkt $B_r$ jest to punkt przecięcia łuku koła o promieniu $W_rB_o$, zatoczonego dokoła $W_r$ i łuku o promieniu $= A'B'$, zatoczonego dokoła $A_r$, punkt $C_r$—punktem przecięcia łuku o promieniu $W_rC_o$ i środku $W_r$ z łukiem o promieniu




Rys. 184.

$= B'C' = A'B'$ i środku $B_r$ i t. d. Część rozwinięcia, położona na prawo od $W_rA_r$, jest symetryczna z lewą względem $[W_rA_r]$, równie jak powierzchnia dana dzieli się na części symetryczne względem pł. $[[WA][WS]]$.

Sposób ogólny rozwijania części powierzchni walcowej, dowolnie ograniczonej, polega, podobnie jak sposób konstrukcyi siatki graniastosłupa, na wyznaczeniu linii przecięcia powierzchni z płaszczyzną prostopadłą do jej tworzących (prostopadłość linii zachowuje się zgodnie z tem, co mówiliśmy w § 50-ym, również po rozwinięciu, a więc linia ta musi przejść w prostą), na przybliżonem wyznaczeniu jej długości jak w poprzednim przykładzie, wreszcie na odmierzeniu na prostych prostopadłych, wyobrażających tworzące, odpowiednich długości rzeczywistych. Granice rozwinięcia łatwo określić. Na rys. 185-ym, w celu rozwinięcia części powierzchni walcowej o kierownicy w $\Pi_1$ i tworzących prostopadłych do $\Pi_1$, zawartej pomiędzy $\Pi_1$ a płaszczyzną równoległą do $\Pi_1$, „wyprostowaliśmy“ kierownicę, podobnie jak poprzednio ($A_rB_r = A'B'$, $B_rC_r = B'C'$,....; punkty podziału na łuku $IL$ wzięliśmy bliższe, niż na łuku $ABCI$, z powodu wybitniejszej krzywizny). Oczywiście $A_rM_r = A''M''$, $L_rN_r = L''N''$. W prostokącie $A_rL_rN_rM_r$, powstałym z rozwinięcia powierzchni, wykreśliliśmy jeszcze przekształconą przy tem linię przecięcia powierzchni z płaszczyzną $\perp \Pi_2$, której rzutem pionowym jest odcinek $P''T''$. $A_rP_r = A''P''$, $B_rQ_r = B''Q''$,.... $L_rT_r = L''T''$, co nie wymaga już wyjaśnień.




Rys. 185.

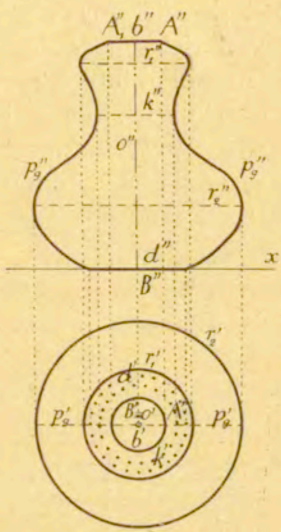
*Uwaga.* Wykreślanie rzutów aksonometrycznych powierzchni stożkowych i walcowych oraz stożków i walców nie nastręcza żadnych nowych trudności. Należy wyznaczyć podobnie jak poprzednio: rzut kierownicy (względnie podstawy) i rzut wierzchołka, gdy chodzi o powierzchnię stożkową (względnie o stożek, jako bryłę), lub też rzuty: kierownicy (względnie jednej z podstaw) i jednej z tworzących, gdy mowa o powierzchni walcowej (wzgl. walcu), następnie zaś wykreślić rzuty tworzących, ograniczające obraz aksonometryczny; rzuty te będą w ogólności styczne do rzutu kierownicy (względnie obwodu podstawy), o ile jest to krzywa zamknięta. Co do rozróżnienia części widzialnych i niewidzialnych, pewne wskazówki daliśmy w końcu ćwiczeń do poprzedniego rozdziału (VIII). Jeżeli kierownica jest okręgiem koła, to rzutem jej jest elipsa, którą możemy wyznaczyć zapomocą pary średnic sprzężonych, stanowiących rzuty dwu średnic prostopadłych koła.

§ 54. **Powierzchnie obrotowe w ogólności; zadania zasadnicze.** Powierzchnią obrotową nazywamy wszelką powierzchnię, utworzoną przez obrót linii płaskiej lub skośnej dokoła stałej osi, aż do pierwotnego położenia. Każdy punkt tej linii czyli tworzącej zakreśla przytem, jak wiemy (§ 38), okrąg koła, położonego w płaszczyźnie, prostopadłej do osi; wszystkie te okręgi nazywamy *równoleżnikami*. Taki równoleżnik, nie stanowiący krawędzi powierzchni, którego promień jest większy od promieni równoleżników najbliższych, nazywamy *równikiem*[1]); podobnież taki, którego promień jest mniejszy od promieni równoleżników sąsiednich, wyróżniamy jako t. zw. *koło szyjne*. Linia przecięcia się powierzchni obrotowej z płaszczyzną, zawierającą oś powierzchni, nazywa się *południkiem*; jeżeli mamy dwie takie płaszczyzny, to przez obrót jednej z nich dokoła osi powierzchni aż do nakrycia drugiej, doprowadzamy również odpowiednio do przystawania punkty, w których te płaszczyzny są przebite przez równoleżniki, a więc i całe przekroje — innemi słowy, wszystkie południki są równe i przechodzą jeden w drugi przy obrocie dokoła osi, niezależnie od tego, jaka linia, płaska lub skośna, była wzięta początkowo za tworzącą powierzchni. Możemy tedy zawsze uważać za tworzącą powierzchni obrotowej którykolwiek z południków. Zauważmy jeszcze, że każdy z południków jest symetryczny względem osi obrotu, ponieważ płaszczyzna sieczna, która go wyznacza, przecina każdy z równoleżników w dwu punktach, stanowiących końce odpowiedniej średnicy. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że oś powierzchni obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów; południk, którego płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny pionowej, będziemy nazywali przy tem założeniu *południkiem głównym*. Owóż przy takiem położeniu rzutem poziomym osi $o$ jest punkt, nakrywający jej ślad poziomy $o' \equiv H_o$, rzut pionowy $o'' \perp x$; rzutem poziomym każdego południka jest ślad jego płaszczyzny, prostopadłej do $\Pi_1$, t. j. prosta, przechodząca przez punkt $o'$; w szczególności, rzutem poziomym południka głównego $p_g$ jest prosta $[\supset o' \parallel x]$. Rzut pionowy południka

---

[1]) Określeniu temu można nadać następującą postać ściślejszą: pewien określony równoleżnik $r$ jest równikiem powierzchni obrotowej, jeżeli można znaleźć dwa inne równoleżniki, położone z różnych stron tego równoleżnika i spełniające ten warunek, że $r$ posiada większy promień, niż wszystkie inne równoleżniki, położone w ograniczonym przez nie pasie powierzchni. Podobne zupełnie określenie stosuje się do koła szyjnego.

głównego, równy samemu południkowi z powodu równoległości do $\Pi_2$, jest kładem pionowym każdego innego południka i jako taki jest skolineowany z rzutem pionowym każdego innego południka; osią kolineacyi, w danym przypadku powinowactwa prostokątnego, jest $o''$, kierunek powinowactwa jest $\perp o''$, więc $\parallel x$ (por. § 39). Związek ten ma ważne znaczenie — w szczególności daje się zastosować do konstrukcyi rzutu pionowego jakiegoś południka. Co do równoleżników, jak już wiemy, ich rzuty poziome, równe im, z powodu równoległości ich płaszczyzn do $\Pi_1$, są to okręgi kół o środku w $o'$, rzuty pionowe—są to odcinki, równoległe do $x$ i t. d. (por. § 32, I, i § 38).



Rys. 186.

Na rys. 186-ym została wyobrażona powierzchnia, utworzona przez obrót dokoła osi $o \perp \Pi_1$ linii $AB$ [1]), położonej na płaszczyźnie, równoległej do $\Pi_2$, a składającej się z części krzywej i z odcinka (dolnego) prostej. W ten sposób powstaje jakby powierzchnia dzbana, otwartego u góry. Południk główny $p_g \equiv ABA_1$, składa się z linii $AB$ i linii $A_1B$ symetrycznej z nią względem $o$; jego rzut pionowy wraz z rzutem brzegu $b$ ogranicza rzut pionowy powierzchni. Rzut poziomy jest ograniczony przez rzut $r_2'$ równika $r_2$, oprócz tego kreślimy rzuty poziome: brzegu $b$, drugiego równika $r$, koła szyjnego $k$ oraz krawędzi dolnej $d$. Przy spoglądaniu na $\Pi_1$ są widzialne części powierzchni: a) zawarta pomiędzy $b$ a $r_1$; b) zawarta pomiędzy $r_2$, a najbliższym równoleżnikiem, położonym ponad $r_2$ i równym $r_1$; c) zawarta wewnątrz koła, równego $b$, położonego w płaszczyźnie „dna“. Część c) jest widzialna „ze strony wewnętrznej“. Zgodnie z tem $b$, $r_1$ i $r_2$ są widzialne, $k$ i $d$—niewidzialne, co nie wymaga bliższych wyjaśnień.

---

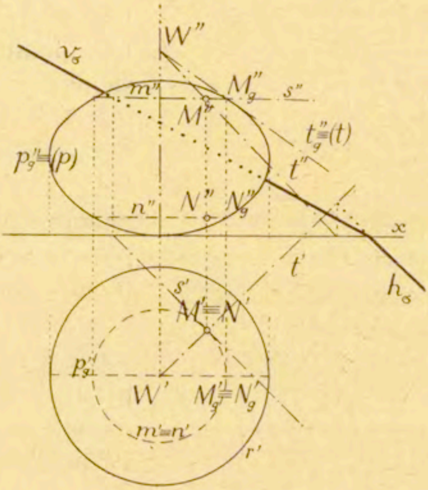
[1]) Oś i tworząca, w szczególności oś i południk, wyznaczają zupełnie, rzecz oczywista, powierzchnię obrotową.

Płaszczyzną styczną [1]), wyznaczoną w ogólności przez styczne do dwu jakichś krzywych, położonych na powierzchni i przechodzących przez dany punkt, najdogodniej wyznaczyć w tym przypadku, gdy chodzi o powierzchnię obrotową, zapomocą stycznych: do południka i do równoleżnika, przecinających się w danym punkcie. Przy obrocie południka dokoła osi jego styczna w jakimś punkcie, zakreślającym przy tem odpowiedni równoleżnik, zakreśla, jak sobie łatwo zdać sprawę: a) powierzchnię stożkową, o ile przecina oś obrotu; b) powierzchnię walcową, o ile jest do niej równoległa. Równoleżnik, zakreślony przez punkt styczności, może być uważany za kierownicę utworzonej powierzchni a) lub b), a przeto we wszystkich jego punktach powierzchnia obrotowa i powierzchnia a) lub b) posiadają te same płaszczyzny styczne i mówimy, że powierzchnia a) lub b) jest styczna do powierzchni obrotowej wzdłuż tego równoleżnika; używamy także nazw: powierzchnia stożkowa lub walcowa, opisana na danej powierzchni. Styczne do południka są równoległe do osi wzdłuż równików i kół szyjnych przy osi $\perp \Pi_1$, płaszczyzny styczne w punktach, położonych na tych równoleżnikach, są tedy $\perp \Pi_1$, i dlatego (§ 52, II) zaliczamy równiki i koła szyjne do zarysu pozornego rzutu poziomego.

Na rys. 187-ym zostały wyznaczone: 1) rzuty pionowe punktów $M$ i $N$, posiadających dany rzut poziomy $\equiv M'$ i należących do powierzchni obrotowej, której rzuty są ograniczone przez rzut równika (jedynego) $r'$ oraz rzut $p_g''$ południka głównego; 2) ślady płaszczyzny, stycznej do tej powierzchni w punkcie $M$. Co do pierwszej części zadania, kreślimy przez $M'$ okrąg koła o środku $o'$; okrąg ten stanowi rzut poziomy jednego lub kilku równoleżników. Punktowi przecięcia tego rzutu z rzutem $p_g'$ odpowiadają, jako rzuty pionowe punktów na $p_g$, dwa punkty $M_g''$ i $N_g''$ na $p_g''$; stąd wynika, że wykreślony okrąg jest rzutem poziomym dwu równoleżników $m$ i $n$, przechodzących odpowiednio przez $M_g$ i $N_g$, o rzutach pionowych $m''$ i $n''$, równoległych do $x$. Punkty

[1]) Pomijamy dokładne rozważania co do warunków istnienia płaszczyzny stycznej w różnych punktach powierzchni obrotowej; łatwo sobie wyobrazić, że określona płaszczyzna styczna wyjątkowo nie istnieje np. w punktach przecięcia południka z osią obrotu, o ile południk nie posiada w nich stycznej prostopadłej do osi, w punktach krawędzi i t. p.

$M$ i $N$ tych równoleżników, o wspólnym rzucie poziomym $M' \equiv N'$ i rzutach pionowych $M'' \equiv [m''[\supset M' \perp x]]$ i $N' \equiv [n''[\supset M' \perp x]]$ odpowiadają oczywiście wymaganiom. W celu znalezienia płaszczyzny stycznej w punkcie $M$, wyznaczamy: rzuty stycznej $s$ do równoleżnika $m$, z których $s'$ jest styczny do $m'$ (p. § 52, I), a $s''$ nakrywa $m''$, oraz rzuty stycznej $t$ do południka $p$, a mianowicie: $t' \equiv [o'M']$, nakrywający rzut samego południka, oraz $t''$, odpowiadający w opisanym powyżej związku kolineacyjnym pomiędzy $p''$ a $p_g''$ rzutowi $t_g''$ stycznej do $p_g$, stycznemu do $p_g''$, a więc wyznaczony, jako prosta $[W''M'']$, jeżeli $W'' \equiv [o''t_g'']$. Wyznaczenie śla-

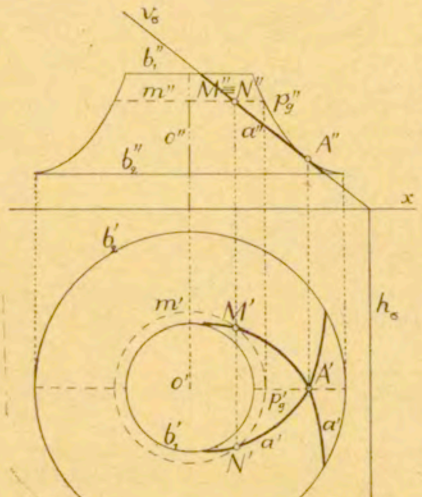



Rys. 187.

dów płaszczyzny $\sigma \equiv [st]$ nie wymaga obecnie wyjaśnień. Zauważmy, z czego łatwo sobie zdać sprawę, że $W''$ stanowi rzut pionowy wierzchołka $W$ powierzchni stożkowej, stykającej się z daną powierzchnią wzdłuż $m$; $W' \equiv o'$, gdyż $W \subset o$.

Przekrój powierzchni obrotowej, której oś jest prostopadła, do $\Pi_1$, płaszczyzną, prostopadłą do $\Pi_2$ lub do $\Pi_1$, da się łatwo wyznaczyć zapomocą szeregu równoleżników; wykreśliwszy ich rzuty, znajdujemy rzuty punktów, w których przebijają płaszczyznę sieczną. Tak np. na rys. 188-ym równoleżnik $m$ przebija płaszczyznę $\sigma$, daną przez ślady $h_\sigma \perp x$ i $v_\sigma$, w punktach $M$ i $N$, których wspólnym rzutem pionowym jest oczywiście punkt $[m''v_\sigma]$, a których rzuty poziome znajdujemy na okręgu $m'$. Rzutem pionowym linii przecięcia $a$ jest odpowiedni odcinek śladu $v_\sigma$; rzut poziomy stanowi pewna krzywa $a'$, przecinająca samą siebie w punkcie $A'$; to samo się stosuje do samej linii $a$ i punktu $A$. Płaszczyzna $\sigma$ jest w danym przykładzie styczna do powierzchni w punkcie $A$ południka głównego $p_g$, jako zawierająca styczną do $p_g$ i styczną do odpowiedniego równoleżnika, prostopadłą do $\Pi_2$.

Pnnkt $A$ jest tedy punktem hiperbolicznym powierzchni, zgodnie z uwagą z § 50-go.



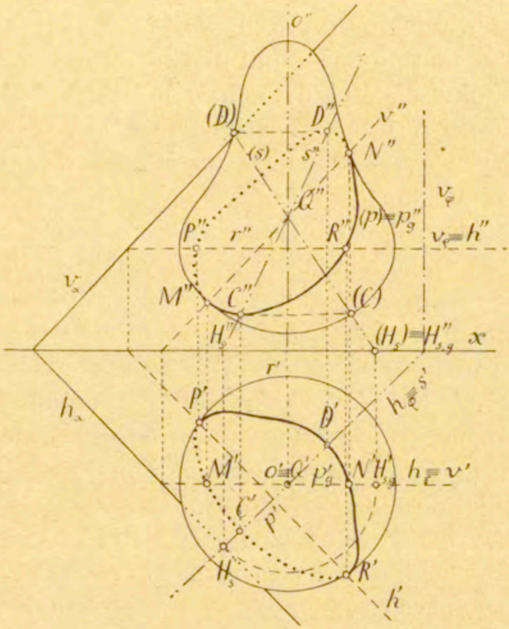

Rys. 188.

Jeżeli płaszczyzna sieczna zawiera oś, otrzymujemy, podług samego określenia, jeden z południków; jeżeli jest prostopadła do osi, linia przekroju jest to jeden z równoleżników, ten mianowicie, którego rzut pionowy przystaje do śladu pionowego płaszczyzny [1]).

Jeżeli płaszczyzna sieczna jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów, to odnajdujemy podobnież punkty przebicia jej przez równoleżniki, wprowadzając płaszczyzny pomocnicze, równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów; każda z nich przecina płaszczyznę podług jednej z jej linii poziomu, a powierzchnię obrotową wzdłuż jednego z równoleżników i punkty przecięcia się każdej z tych linii poziomu z odpowiednim równoleżnikiem należą właśnie do szukanego przekroju. W szczególności, wyznaczamy w ten sposób punkty przekroju, położone na równikach lub kołach szyjnych; rzut poziomy linii przecięcia winien być w tych punktach

[1]) Może istnieć, zresztą, więcej niż jeden taki równoleżnik.

w ogólności stycznym do rzutu poziomego odpowiedniego równika lub koła szyjnego, czyli do zarysu pozornego, t. j. posiadać z nim wspólną styczną [1]). Tak np. na rys. 189-ym płaszczyzna pomocnicza $\rho \parallel \Pi_1$ przecina płaszczyznę sieczną $\alpha$ wzdłuż linii poziomu $h$ (o rzutach $h'' \equiv v_\rho$ i $h' \parallel h_\alpha$; por. § 28 zad. 2b), a powierzchnię obrotową o danych rzutach wzdłuż równika $r$ (którego




Rys. 189.

rzut pionowy nakrywa częściowo $h'' \equiv v_\rho$); punkty $P$ i $R$, których rzuty poziome są wyznaczone, jako punkty przecięcia $r'$ i $h'$,

---

[1]) Opieramy się w takich przypadkach na następującem twierdzeniu ogólnem, którego tu nie będziemy uzasadniali:

Jeżeli jakaś krzywa, należąca do powierzchni przecina zarys istotny tej powierzchni w jakimś jej punkcie zwyczajnym, to jej rzut jest w ogólności styczny w rzucie tego punktu do zarysu pozornego (t. j. rzutu zarysu istotnego).

Twierdzenie to stosuje się równie do rzutów prostokątnych i wogóle równoległych, jak do środkowych.

a rzuty pionowe leżą na $r''$, są to punkty szukane. W zupełnie ten sam sposób, z zamianą równika na którykolwiek równoleżnik, możemy wyznaczyć dowolną linię punktów przekroju. Stosujemy jednak nieco odmienne konstrukcye do wyznaczenia kilku jeszcze punktów ważniejszych. A mianowicie, przecinając płaszczyznę $\alpha$ płaszczyzną $\gamma$ południka głównego $p_g$ (równoległą do $\Pi_2$), otrzymujemy linię frontu $v$, która przecina $p_g$ w dwu punktach $M$ i $N$, należących oczywiście do przekroju. $M''$ i $N''$ są to punkty przecięcia $v''$ z $p_g''$ — rzut pionowy linii przekroju winien być w takich punktach, w ogólności, stycznym do rzutu pionowego południka głównego $p_g$. ($M'$ i $N'$ leżą, oczywiście, na $p_g'$). Wreszcie wprowadzamy płaszczyznę $\varphi$, zawierającą oś $o$ powierzchni obrotowej, więc $\perp \Pi_1$, oraz prostopadłą do $\alpha$, więc posiadającą ślad poziomy $h_\varphi \perp h_\alpha$; płaszczyzna ta dzieli jednocześnie na części symetryczne powierzchnię oraz płaszczyznę $\alpha$, skąd wynika, że linia spadku $s$ płaszczyzny $\alpha$, wyznaczona jako linia przecięcia płaszczyzn $\alpha$ i $\varphi$, stanowi *oś symetryi prostokątnej przekroju*. Rzut jej poziomy dzieli rzut poziomy przekroju również na części symetryczne, w tem samem znaczeniu (udowodnić to!), rzut pionowy $s''$ stanowi oś symetryi ukośnej rzutu pionowego przekroju. Związki te łatwo wyzyskać w celu wyznaczenia nowych punktów linii przecięcia lub sprawdzenia dokładności konstrukcyi. Oczywiście, $s' \equiv h_\varphi$, $s''$ potrafimy wyznaczyć albo zapomocą śladu $v_\varphi \perp x$ (§ 27), albo też na mocy tej uwagi, że musi przecinać $o''$ w tym samym punkcie $Q''$, co $v''$, ponieważ same proste $v$ i $s$ przecinają się na osi $o$. Płaszczyzna $\varphi$ przecina powierzchnię obrotową wzdłuż pewnego południka $p$; punkty przecięcia się $p$ z prostą $s$ stanowią punkty linii przekroju, niższe lub wyższe od sąsiednich, w danym zaś przypadku punkty: (bezwzględnie) najniższy i najwyższy przekroju, $C$ i $D$. Wyznaczamy z początku kłady pionowe tych punktów, obracając płaszczyznę $\varphi$ dokoła osi $o$ aż do położenia, $\parallel$ do $\Pi_2$, t. j. aż do nakrycia płaszczyzny południka głównego; południk $p$ przejdzie przytem w $p_g$, więc $(p) \equiv p_g''$, wyznaczenie kładu $(s) \equiv s_g''$ prostej $s$ nie wymaga w danej chwili wyjaśnień. Od punktów $(C) \equiv C_g''$ i $(D) \equiv D_g''$, stanowiących punkty przecięcia $(p)$ i $(s)$; przechodzimy łatwo do $C''$ i $D''$ na $s''$ oraz do $C'$ i $D'$ na $s'$. Styczne do rzutu pionowego przekroju w takich punktach jak $C''$ i $D''$ są w ogólności równoległe do osi $x$. Rozróżnienie części widzialnych i niewidzialnych pozostawiamy uczącemu się.

Gdy chodzi o wyznaczenie linii przenikania się dwu powierzchni obrotowych, których osie są prostopadłe do $\Pi_1$, to metoda, która zawsze może być zastosowaną, polega na wprowadzeniu tego samego szeregu płaszczyzn pomocniczych, prostopadłych do osi, o którym mówiliśmy już powyżej; punkty przecięcia równoleżników obu powierzchni, położonych odpowiednio w tych samych płaszczyznach pomocniczych, czyli inaczej: na tym samym poziomie, należą do poszukiwanej krzywej.

Zaznaczaliśmy już, że przez obrót prostej, przecinającej oś obrotu, powstaje powierzchnia stożkowa obrotowa, a przez obrót prostej dokoła osi równoległej tworzy się powierzchnia walcowa obrotowa. Nasuwa się pytanie, jaka utworzy się powierzchnia, gdy prosta, obracająca się dokoła osi, jest skośna względem niej? Możemy poszukać odpowiedzi, wyznaczając konstrukcyjnie południk takiej powierzchni; podług twierdzenia, znanego już w XVII wieku, musi to być hiperbola (por. ćw. 23 z rozdz. VI), położona w ten sposób, że osią obrotu jest jej t. zw. oś urojona lub poboczna. Taka powierzchnia posiada wskutek tego nazwę *hiperboloidy obrotowej o jednej powłoce* (o jednym płacie); przez obrót hiperboli dokoła drugiej osi symetryi, zwanej rzeczywistą czyli główną, powstaje *hiperboloida obrotowa o dwu powłokach*. Gdy obracamy elipsę dokoła osi a) wielkiej lub b) małej, tworzy się *elipsoida obrotowa a) wydłużona* lub *b) spłaszczona;* elipsoida obrotowa spłaszczona jest również zwana *sferoidą*. Parabola (p. ćwicz. 26 z rozdz. VI) zakreśla przy obrocie dokoła osi symetryi t. zw. *paraboloidę*. Okrąg koła, obracającego się dokoła osi, położonej w jego płaszczyźnie, ale nie przechodzącej przez środek, zakreśla t. zw. *powierzchnię pierścieniową (torus)*.

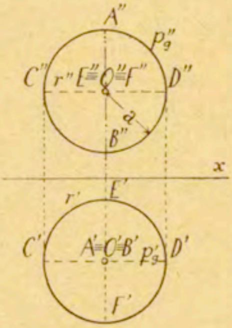
§ 55. **Powierzchnia kulista i kula.** Jak wiemy, *powierzchnia kulista* jest to powierzchnia obrotowa, utworzona przez obrót półokręgu dokoła średnicy, łączącej jego punkty końcowe; *kula*, w ścisłem znaczeniu tego słowa, jest to bryła, ograniczona przez taką powierzchnię. Rzecz jasna, że każda ze średnic [1]) kuli może być uważana za oś obrotu, bez żadnej zmiany zakreślanej powierzchni, byleby wziąć za tworzącą odpowiedni półokrąg; każdy okrąg koła wielkiego, zależnie od wyboru osi obrotu, a) zawierającej to koło lub b) prostopadłej do jego płaszczyzny może być uważanym a) za południk powierzchni kulistej lub b) za jej równik. Ze względu na to wszystko, położenie kuli względem płaszczyzn rzutu nie wywiera żadnego wpływu na postać jej rzutów, ograniczonych zawsze przez okręgi kół, które możemy oznaczać, zachowując określenia z poprzedniego paragrafu, jako rzut poziomy $r'$ równika i jako rzut pionowy $p_g''$ południka głównego.

---

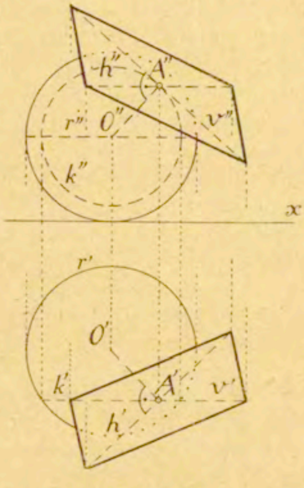
[1]) Określenia: środka, promienia i średnicy kuli i t. p. oraz najprostsze własności tej bryły i jej powierzchni, uważamy tu oczywiście za dobrze znane.

Na rys. 190-ym wyobraziliśmy kulę o danym promieniu r i środku *O*, wyznaczonym przez rzuty $O'$ i $O''$; oprócz zarysów pozornych $r'$ i $p_g''$ zostały jeszcze oznaczone literami rzuty kilku punktów, z których położenia łatwo sobie zdać sprawę.

*Zadanie 1-sze.* Wyznaczyć płaszczyznę styczną do kuli w danym jej punkcie. Przypuśćmy, że mieliśmy dane początkowo: rzuty środka $O'$ i $O''$, zarys pozorny $p_g''$ oraz rzut pionowy $A''$ punktu *A* powierzchni kulistej, położony oczywiście wewnątrz $p_g''$ — załóżmy jeszcze, że punkt *A* ma leżeć w przedniej części po-




Rys. 190.




Rys. 191.

wierzchni kulistej, tak aby był widzialny w rzucie pionowym. Kreśląc okrąg o takim samym promieniu, jaki posiada $p_g''$, dokoła $O'$, otrzymujemy zarys pozorny $r'$; z dwu okręgów kół małych, położonych w płaszczyźnie $\parallel \Pi_2$ [1]), których wspólny rzut pionowy $k''$ zawiera $A''$, bierzemy, zgodnie z warunkiem dodatkowym co do punktu *A*, ten, którego rzut poziomy $k'$ leży niżej i na nim znajdujemy $A'$. Zadanie sprowadza się obecnie, ze względu

[1]) Do wyznaczenia podług jednego z rzutów punktu powierzchni kulistej, danego, drugiego rzutu tegoż punktu, może służyć oczywiście równie dobrze zupełnie równoważna w tym przypadku szczególnym konstrukcya ogólna zapomocą przekrojów, wyznaczonych przez płaszczyzny, $\parallel \Pi_1$, czyli „równoleżników“.

na znaną własność płaszczyzny stycznej do kuli, do wyznaczenia płaszczyzny, prostopadłej do promienia $OA$ i zawierającej jego punkt końcowy $A$. Zgodnie z twierdzeniem 2) z § 26, II (por. również zad. 6 z tegoż paragrafu), wyznaczyliśmy na rys. 191-ym rzuty linii poziomu i linii frontu szukanej płaszczyzny:

$$h' \equiv [\supset A' \perp [O'A']], \quad h'' \equiv [\supset A'' \parallel x]$$

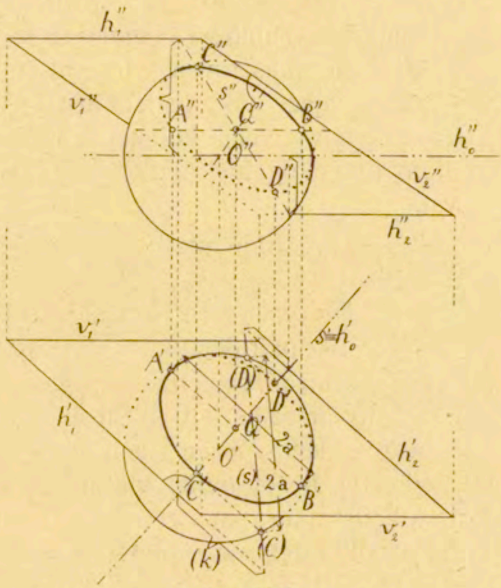
(jeżeli oś $x$ nie jest wykreślona na rysunku, to jednak kierunek jej jest znany, jako prostopadły do umówionego kierunku wspólnego linii rzutu—por. uwagę z § 24-go),

$$v' \equiv [\supset A' \parallel x], \quad v'' \equiv [A'' \perp [O''A'']],$$

a następnie, w celu nadania rysunkowi charakteru bardziej poglądowego, ograniczyliśmy tę płaszczyznę, tak by otrzymać płat równoległoboczny, zakrywający przy patrzeniu na obie płaszczyzny rzutów pewne części powierzchni kulistej. Oczywiście, możemy również użyć konstrukcyi ogólnej płaszczyzny stycznej do powierzchni obrotowej.

*Zadanie 2.* Wyznaczyć linię przecięcia danej powierzchni kulistej z daną płaszczyzną.

Przypadek, gdy płaszczyzna sieczna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, rozpatrujemy w końcu tego paragrafu, wykreślając rzuty pewnej linii przenikania się; wogóle zaś, rodzaj konstrukcyi jest wskazany przez kształt przekroju kuli, który, jak wiemy, musi być zawsze kołem. Możemy tedy nie wyznaczać bezpośrednio rzutów większej liczby punktów szukanej linii przecięcia, ale oprzeć dalszą konstrukcyę na wyznaczeniu obu osi elips, stanowiących jej rzuty, albo też osi jednej i średnic sprzężonych drugiej, odpowiadających im, jako rzuty tych samych prostych. Możemy to zadanie sprowadzić do zadania z § 32, II (por. rys. 107); wskażemy jednak jeszcze pewien dogodny sposób. Przypuśćmy np. (p. rys. 192), że płaszczyzna sieczna $\alpha$ została dana w postaci płata równoległobocznego, ograniczonego przez linie poziomu $h_1$ i $h_2$ i linie frontu $v_1$ i $v_2$. Wspólna płaszczyzna symetryi płaszczyzny $\alpha$ i kuli, prostopadła do $\alpha$ i zawierająca środek kuli $O$, przecina $\alpha$ wzdłuż linii spadku $s$, a powierzchnię kulistą wzdłuż okręgu $k$ pewnego koła wielkiego (por. zad. z poprzedniego paragrafu). Oznaczmy tę płaszczyznę przez $\varphi$. $s' \equiv h_\varphi \equiv [O' \perp h_1']$, $s''$ wyznaczamy, jako rzut prostej $s$, należącej do $\alpha$ i posiadającej znany już rzut poziomy $s'$, podług metody z § 23-go. Znajdźmy następnie kłady poziome ($s$) i ($k$), obracając płaszczyznę $\varphi$ dokoła jej linii poziomu $h_0$, zawierającej punkt $O$ ($h_0' \equiv s'$, $h_0'' \equiv [\supset O'' \parallel x]$); kład ($k$) nakrywa oczywiście zarys pozorny rzutu poziomego kuli, jako okrąg o tym samym środku i promieniu, ($s$) otrzymujemy w zwykły sposób. Od kładów ($C$) i ($D$) punktów $C$ i $D$, w których $s$ przecina $k$, a więc przebija powierzchnię kulistą, przechodzimy do ich rzutów $C'$ i $D'$ na $s'$ i $C''$ i $D''$ na $s''$, $C'$ i $D'$ są to końce osi małej elipsy, stanowiącej jeden z poszukiwanych rzutów. Owóż odcinek ($C$) ($D$), jako kład cięciwy przekroju, dzielącej

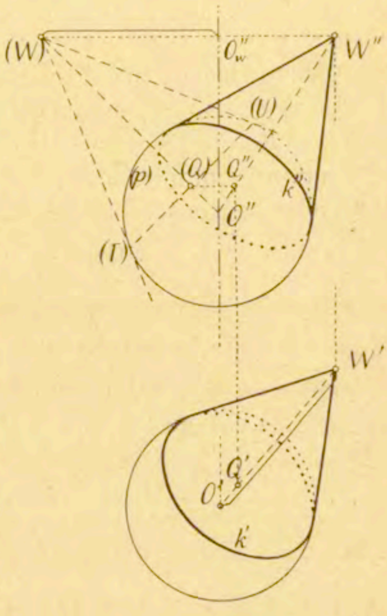



Rys. 192.

go na części symetryczne, równa się oczywiście jego średnicy, a przez to podwójnej osi wielkiej każdej z elips, stanowiących rzuty linii przecięcia. Stąd wynika, że otrzymujemy końce $A'$ i $B'$ osi wielkiej rzutu poziomego, dzieląc $C'D'$ w punkcie $Q'$ na połowy i odmierzając od $O'$ w obie strony wzdłuż prostej $\perp [C'D']$ odcinki, równe $\frac{1}{2}$ ($C$) ($D$). Od $Q'$, $A'$ i $B'$ przechodzimy łatwo do $Q''$ na $s''$, oraz do $A''$ i $B''$ na prostej $[\supset Q'' \parallel x]$, ponieważ $[AB]$ musi być linią poziomu płaszczyzny $\alpha$ (por. § 32, II). Rzut pionowy jest w takim razie wyznaczony przez dwie średnice sprzężone (p. § 33, III) — możemy zresztą w ten sam sposób wyznaczyć jego osie główne. Konstrukcya punktów styczności obu rzutów z odpowiednimi zarysami pozornymi, stanowiąca dobrą próbę dokładności rysunku, może być wykonaną, jak wskazaliśmy w poprzednim paragrafie.

*Zadanie 3.* Wyznaczyć punkt przebicia powierzchni kulistej przez prostą. Można w tym celu zastosować kład płaszczyzny wyznaczonej przez prostą i środek kuli, przytem za oś obrotu wygodnie wziąć linię poziomu lub linię frontu tej płaszczyzny, przechodzącą przez środek kuli, tak jak uczyniliśmy przed chwilą z prostą $s$.

*Zadanie 4.* Są dane: rzuty kuli i rzuty punktu $W$, położonego zewnątrz kuli. Wyznaczyć miejsce geometryczne stycznych do powierzchni kulistej, przechodzących przez punkt $W$ (p. rysunek 193).

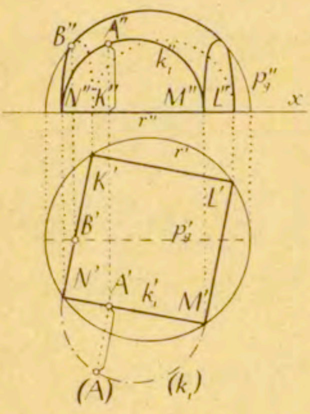


Rys. 193.

Prostą $[WO]$ ($O$ oznacza wciąż środek kuli) możemy uważać za oś obrotu, z którego powstaje dana powierzchnia kulista. Styczna z punktu $W$ do obracanego półokręgu zakreśla przytem powierzchnię stożkową, a punkt styczności — okrąg koła. Jak widzieliśmy już w poprzednim paragrafie, taka powierzchnia stożkowa posiada w punktach wspólnych z powierzchnią obrotową, w danym przypadku kulistą, wspólne płaszczyzny styczne, czyli jest styczna do niej wzdłuż wspomnianego okręgu. Jest to szukane miejsce geometryczne, ponieważ każda z tworzących jest styczna do kuli, a wszelka inna prosta, przechodząca przez $W$, albo nie spotyka powierzchni kulistej albo przebija ją w dwu punktach i w żadnym z nich nie należy do płaszczyzny stycznej, nie będąc prostopadłą do odpowiedniego promienia. Płaszczyzna, przesunięta przez $W$ i prostą pionową, zawierającą $O$, przecina powierzchnię kulistą wzdłuż pewnego okręgu $p$, a powierzchnię stożkową wzdłuż dwu tworzących $[WT]$ i $[WU]$, stycznych do $p$ w punktach $T$ i $U$, stanowiących końce średnicy linii styczności $k$. Obracając tę płaszczyznę dokoła wymienionej osi aż do położenia, równoległego do $\Pi_2$, wyznaczamy łatwo kład punktu $W$ $(O_W''(W)=O'W')$, $(p)$ nakrywa zarys pozorny $p_g''$ kuli; wykreślając styczne $[(W)\ (T)]$ i $[(W)\ (U)]$, znajdujemy kład $(Q)\equiv[[O''(W)]\ [(T)(U)]]$ środka średnicy $TU$, a więc i środka okręgu szukanego $k$, i jego promień, równy $(Q)(T)=(Q)(U)$. Wyznaczywszy rzuty $Q''$ i $Q'$ na $[O''W'']$ i $[O'W']$, sprowadzamy zadanie do wykreślenia rzutów koła o danym środku i promieniu. Na rys. 193-im wyobraziliśmy część powierzchni stożkowej, zawartą pomiędzy $W$ a $k$, uważając ją za nieprzezroczystą.

Z omówionego przed chwilą sposobu powstawania powierzchni stożkowej, stycznej do kuli, łatwo wysnuć wniosek, że odcinki, stycznych do powierzchni kulistej, przeciągniętych z pewnego stałego punktu, ograniczone przez ten punkt i odpowiedni punkt styczności, są równe.

Miejscem geometrycznem stycznych do kuli, *równoległych do danej prostej*, jest powierzchnia walcowa styczna do kuli wzdłuż okręgu koła wielkiego, położonego w płaszczyźnie, prostopadłej do danej prostej. (Uzasadnić to!) Ponieważ mamy odrazu środek i promień linii styczności, przeto wyznaczenie jej jest łatwiejsze, niż w poprzedniem zadaniu.




Rys. 194.

Na rys. 194-ym wykreśliliśmy rzuty części półkuli, zawartej wewnątrz graniastosłupa prostego o podstawie kwadratowej $KLMN$, wpisanej w podstawę stożka, a wysokości dowolnej, byle większej od promienia półkuli. (Dane: rzuty półkuli, posiadające kształty koła i półkola, oraz rzut poziomy $K'L'M'N'\equiv KLMN$). Każda ze ścian bocznych graniastosłupa przecina powierzchnię czaszy półkulistej wzdłuż okręgu o średnicy, równej $K'L'=L'M'=\ldots.$ Stąd wynika, że rzutami pionowymi tych linii przecięcia muszą być połowy elips, posiadających takie same osie wielkości, a osie małe równe odpowiednio $K''L''$, $L''M''$ i t. d. Wyznaczenie poszczególnych punktów każdego z tych rzutów np. $k_1''$, może polegać na przejściu od punktów, należących do kładu $(k_1)$, do odpowiednich rzutów pionowych (por. § 32, II i rys. 108). Część czaszy półkulistej, ograniczona przez takie cztery półokręgi, występuje w budownictwie pod nazwą *sklepienia czeskiego*.

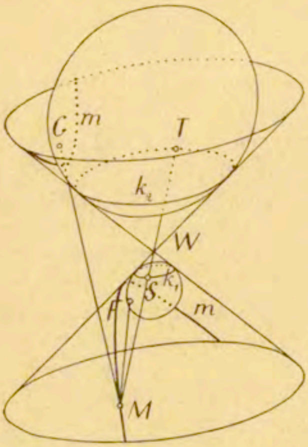
§ 56. **Przekroje powierzchni stożkowej obrotowej.** Powierzchnia stożkowa obrotowa łączy własności ogólne powierzchni stożkowych i powierzchni obrotowych, i stąd wynika znaczna rozmaitość konstrukcyi, jakie mogą być do niej stosowane. Podobną uwagę można wypowiedzieć co do powierzchni walcowej obrotowej. W szczególności, możemy wyzyskać te okoliczności przy wyznaczaniu przekrojów powierzchni, należących do tych kategoryi.

Możliwości, któreśmy rozważali w § 51, III przy badaniu przecięcia powierzchni stożkowej dowolnej płaszczyzną, zawierającą wierzchołek, sprowadzają się, gdy chodzi o powierzchnię stożkową obrotową, do trzech tylko, a mianowicie: 1) płaszczyzna sieczna nie posiada żadnego punktu wspólnego z powierzchnią, oprócz wierzchołka; 2) płaszczyzna sieczna styka się z powierzchnią wzdłuż jednej tworzącej i nie przecina jej ani nie styka się z nią oprócz tego wzdłuż żadnej innej; 3) płaszczyzna sieczna przecina powierzchnię stożkową wzdłuż dwu tworzących. (Uzasadnić to ściśle!) Jeżeli mamy płaszczyznę sieczną $\alpha$, nie zawierającą wierzchołka powierzchni stożkowej, to rodzaj przekroju zależy od tego, który z tych trzech warunków jest spełniony przez płaszczyznę $\beta$, równoległą do $\alpha$ i zawierającą wierzchołek powierzchni. W zależności od tego płaszczyzna sieczna $\alpha$ może 1) nie być równoległą do żadnej z tworzących; 2) być równoległą do jednej z nich; 3) być równoległą do dwu tworzących. W pierwszym przypadku otrzymujemy krzywą zamkniętą, nie oddalającą się w nieskończoność; w drugim — krzywą rozciągającą się w nieskończoność w jednym kierunku; w trzecim — krzywą, złożoną z dwu gałęzi, rozciągającą się w nieskończoność w dwu różnych kierunkach. Zgodnie z tem, co było mówione w § 31-ym o rzutach środkowych koła, czyli o przekrojach dowolnych powierzchni stożkowych kołowych, t. j. mających za kierownicę okrąg koła, dowolnie położony względem wierzchołka, krzywym tym nadamy odpowiednio nazwy 1) elipsy, 2) paraboli, 3) hiperboli. Gdy mowa o stożku nietylko kołowym lecz obrotowym, łatwo dowieść w sposób zupełnie elementarny, że wszystkie te przecięcia stożkowe posiadają istotnie własności miarowe, na których opierają się ich określenia najbardziej popularne. Można mianowicie uzasadnić twierdzenia następujące:

*Twierdzenie 1.* Przy położeniu 1) płaszczyzny siecznej $\alpha$ każdy punkt linii jej przecięcia z powierzchnią stożkową spełnia ten warunek, że *suma jego odległości od punktów styczności* płaszczyzny $\alpha$ z dwiema kulami, stycznemi jednocześnie do powierzchni stożkowej i do $\alpha$, *jest stała.*

*Twierdzenie 2.* Przy położeniu 2) linia przecięcia ma tę własność, że każdy jej punkt *jest jednakowo oddalony od punktu styczności* płaszczyzny $\alpha$ z jedyną kulą, która może być wpisana w powierzchnię w omówiony sposób i *od linii przecięcia płaszczyzny $\alpha$ z płaszczyzną okręgu,* wzdłuż którego kula styka się z powierzchnią stożkową.

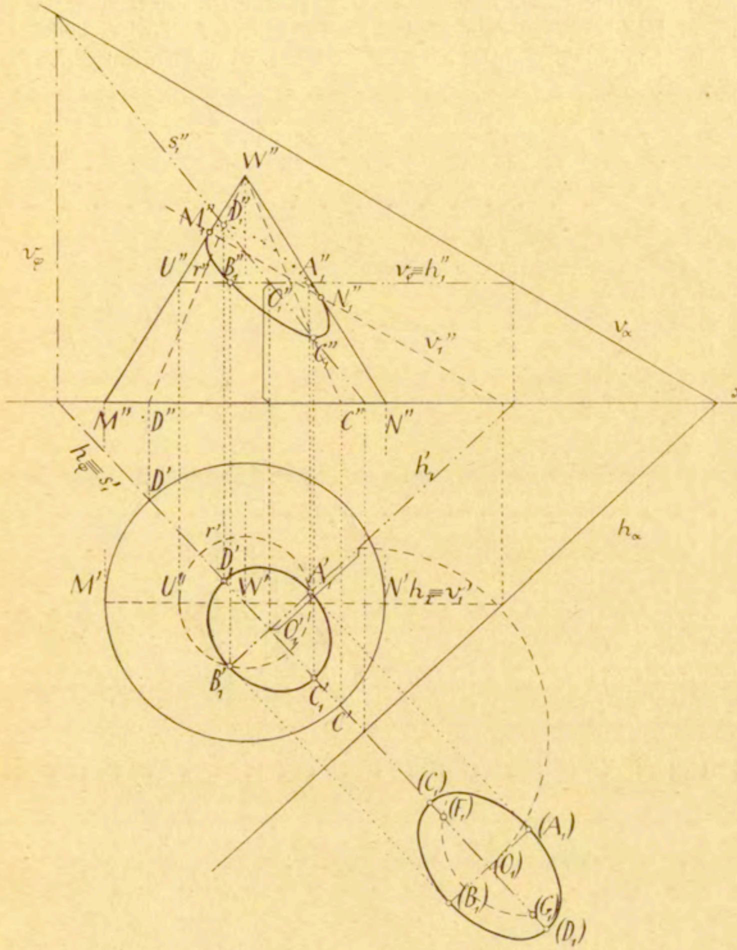
*Twierdzenie 3.* Przy położeniu 3) linia przecięcia ma tę własność, że *różnica odległości* każdego jej punktu od punktów styczności z $\alpha$ dwu kul, opisanych w twierdzeniu pierwszem, jest stała. Dowiedźmy np. twierdzenia 3-go. Użyjemy do tego rys. 195-go, wyobrażającego część powierzchni stożkowej, uważanej za przezroczystą, wraz z dwiema kulami, wpisanemi w nią i stycznemi również w punktach $F$ i $G$ do płaszczyzny $\alpha$, przecinającej powierzchnię wzdłuż krzywej $m$, złożonej z dwu gałęzi. $k_1$ i $k_2$ oznaczają okręgi, wzdłuż których powierzchnie kuliste stykają się z powierzchnią stożkową. Połączmy dowolny punkt $M$ krzywej $m$ z punktami $F$ i $G$ oraz przeciągnijmy przezeń tworzącą $[WM]$, przecinającą $k_1$ i $k_2$ w punktach $S$ i $T$. Odcinki $MF$ i $MS$ są równe, jako odcinki stycznych do kuli, przeciągniętych z tego samego punktu $M$; podobnież $MG = MT$. Przeto $MG - MF = MT - MS = ST$, a $ST$ ma długość stałą, niezależną od położenia punktu $M$, tworzącej $[WM]$ i jej punktów przecięcia z $k_1$ i $k_2$, ponieważ jest to zawsze suma odcinków stycznych do dwu stałych powierzchni kulistych, przeciągniętych ze stałego punktu $M$. c. b. d. o.



Rys. 195.

Na rysunkach 196-ym, 197-ym i 198-ym wyznaczyliśmy przekroje powierzchni stożkowej obrotowej w kilku typowych wypadkach, z uwzględnieniem przytoczonych przed chwilą twierdzeń i z zastosowaniem uwagi, której tu nie uzasadnimy, że rzutem prostokątnym każdego z trzech przecięć stożkowych jest w ogólności przecięcie stożkowe tego samego rodzaju. Na rysunku 196-ym mieliśmy dane ślady $h_\alpha$ i $v_\alpha$ płaszczyzny siecznej oraz rzuty stożka obrotowego, stojącego na $\Pi_1$. Jedną z osi symetryi prostokątnej przekroju, jak się okazuje, eliptycznego, $s_1$, wyznaczyliśmy, podobnie jak przy kreśleniu rzutów przekroju dowolnej powierzchni obrotowej, jako linię przecięcia $\alpha$ z płaszczyzną symetryi $\varphi$, prostopadłą do $h_\alpha$ i zawierającą wierzchołek $W$; punkty elipsy $C_1$ i $D_1$, położone na $s_1$, a stanowiące końce jednej z osi przekroju, wyznaczamy łatwo, jako punkty przecięcia $s_1$ z tworzącemi $WC$ i $WD$, położonemi w tej samej płaszczyźnie rzutującej $\varphi$. Druga oś symetryi $h_1$ musi przejść przez środek $O_1$ odcinka $C_1D_1$, i jako prostopadła do linii spadku $s_1$ musi być równoległa do $h_\alpha$, przeto $h_1' \equiv [\supset O_1' \parallel h_\alpha]$ i $h_1'' \equiv [\supset O_1'' \parallel x]$; wierzchołki $A_1$ i $B_1$, położone na $h_1$, wyznaczamy zapomocą równoleżnika $r$, położonego w tej samej płaszczyźnie $\rho \parallel \Pi_1$, co $h_1$. Rzuty wierzchołków $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ są również wierzchołkami (t. j. końcami osi głównych) rzutu poziomego przekroju. Uzupełniamy jeszcze znanymi sposobami oba rzuty (punkty $M_1''$ i $N_1''$ są to punkty styczności rzutu pionowego przekroju z odpowiednim zarysem pozornym powierzchni stożkowej) i wyznaczamy kład wierzchołków i całej elipsy, stanowiącej przekrój. Wyznaczenie ognisk — podług § 34.

Na rys. 197-ym [1]) płaszczyzna sieczna $\alpha$ jest $\perp \Pi_2$ i $\|$ do dwu tworzących $[WP]$ i $[WQ]$. Oś symetryi $s_1$ jest to, jak poprzednio, linia przecięcia płaszczyzny $\varphi$, $\perp h_\alpha$, z płaszczyzną $\alpha : s_1' \equiv h_\varphi$, $s_1'' \equiv v_\alpha$, stąd łatwo otrzymujemy rzuty wierzchołków hiperboli, stanowiącej linię przekroju: $C_1 \equiv [s_1 [WC]]$



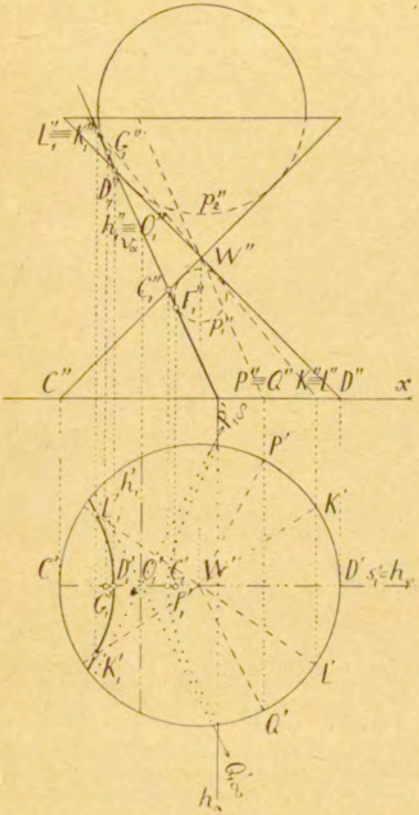
Rys. 196.

i $D_1 \equiv [s_1 [WD]]$; rzuty drugiej osi $h_1$ są to: $h_1'' \equiv O_1''$ ($O_1''$ — środek $C_1'' D_1''$) oraz $h_1' \equiv [\supset O_1' \perp x]$. Asymptoty wyznaczamy jako proste, przechodzące przez

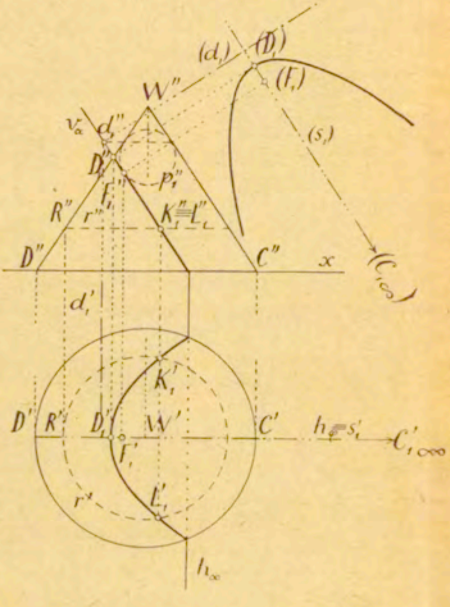
[1]) Założyliśmy tam, że mamy do czynienia nie ze stożkiem, jako bryłą, lecz z częścią powierzchni stożkowej, otwartą z góry (i z dołu) i stąd widzialność gałęzi górnej hiperboli (od wewnątrz).

$O_1$ i równoległe do tworzących $[WP]$ i $[WQ]$. Wreszcie punkty styczności rzutów pionowych $p_1''$ i $p_2''$ południków głównych kul, wpisanych w odpowiedni sposób, ze śladem $v_\alpha$, są to, zgodnie z twierdzeniem 3-em, rzuty pionowe ognisk $F_1$ i $G_1$ hiperboli ($F_1'$ i $G_1'$ — na $s_1'$).

Płaszczyzna sieczna $\alpha$ na rys. 198-ym jest $\perp \Pi_2$ i równoległa do jednej tworzącej $[WC]$. Wyznaczenie jedynej osi symetryi $s_1$ i wierzchołka $D_1$ na niej — jak poprzednio; oprócz ogniska $F_1$ wyznaczamy kierownicę $d_1$ o rzucie




Rys. 197.

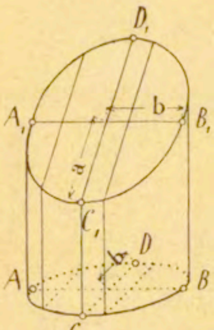



Rys. 198.

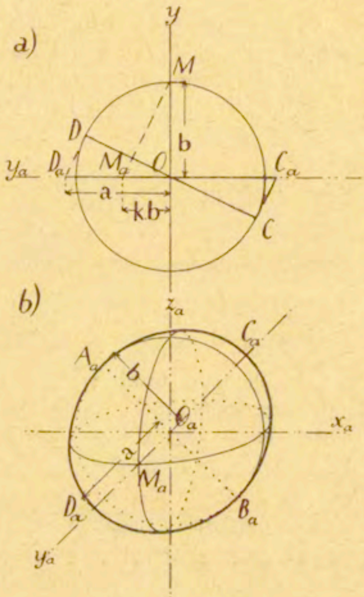
pionowym $d_1''$, stanowiącym punkt przecięcia $v_\alpha$ ze śladem pionowym płaszczyzny, zawierającej linię styczności kuli wpisanej z powierzchnią stożkową, oraz o rzucie poziomym $d_1'$, prostopadłym, rzecz jasna, do osi, ze względu na prostopadłość tej płaszczyzny i $\alpha$ do $\Pi_2$. Na rys. 198-ym został również wyznaczony kład paraboli, otrzymanej jako szukana linia przecięcia, wraz z kładem ogniska i kierownicy. Do wyznaczenia punktów $K_1$ i $L_1$ na rys. 197-ym użyliśmy odpowiednich tworzących; do odszukania punktów, tak samo oznaczonych, na rys. 198-ym, odpowiedniego równoleżnika.

Należy zastrzedz wyraźnie, że rzuty ognisk przecięć stożkowych nie są w ogólności bynajmniej ogniskami ich rzutów na te same płaszczyzny.

§ 57. **Przekroje walca obrotowego. Rzut aksonometryczny kuli.** Linią przecięcia powierzchni walcowej obrotowej z płaszczyzną, nachyloną do tworzących, jest zawsze elipsa. Łatwo to uzasadnimy (por. § 32, 34), zdając sobie sprawę z tego, że okrąg o promieniu **b** (rys. 199), stanowiący kierownicę powierzchni, może być uważany za rzut prostokątny przekroju, i że przeto nawzajem w przekroju tym istnieją dwa kierunki prostopadłe do siebie (kierunki prostych $[A_1B_1]$ i $[C_1D_1]$ na rys. 199-ym) i takie,




Rys. 199.




Rys. 200.

że wszystkie cięciwy, posiadające jeden z tych kierunków, równają się odpowiednim cięciwom kierownicy, a wszystkie cięciwy, posiadające drugi kierunek, są powiększone w pewnym stosunku $\frac{C_1 D_1}{CD} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$. Stąd można już wysnuć odrazu własności elipsy; można też uważać krzywą $A_1B_1C_1D_1A_1$, zgodnie z tym wynikiem, za rzut prostokątny innego okręgu koła $A_2B_2C_2D_2A_2$, o promieniu **a**, położonego w ten sposób, że $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, a $C_2D_2$ ulega w rzucie skróceniu w stosunku $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ i t. d.

Ponieważ rzut ukośny kuli powstaje, jak łatwo sobie wyobrazić, przez przecięcie płaszczyzną rzutu walca, opisanego na kuli, którego tworzące mają kierunek promieni rzutujących, przeto zarys pozorny jest w ogólności nie kołem, lecz elipsą. Możemy np. wyznaczyć dokładnie elipsę, wyobrażającą kulę o danym promieniu przy zwykłych umowach, co do układu osi aksometrycznych. Przypuśćmy, że środek $O$ kuli jest początkiem układu a płaszczyzną rzutu sama płaszczyzna $[xz]$ (por. § 7). Kierunek rzutu przy danym spółczynniku skrócenia **k** wyznaczymy, rysując osobno (rys. 200 a) przekrój kuli płaszczyzną $[yy_a]$ wraz z potrzebnemi do konstrukcyi średnicami, położonemi w tej płaszczyźnie. Jest to kierunek prostej $[MM_a]$. Płaszczyzna $\beta$ linii styczności z kulą powierzchni walcowej obrotowej, której tworzące mają ten kierunek, prostopadła, jak wiemy, do tworzących, przecina (przy danym kierunku rzutu $y_a$, tworzącego z $x_a$ i $z_a$ kąty po $135^0$) płaszczyznę rzutu wzdłuż prostej $[AB] \perp y_a$. Średnica $AB \equiv A_aB_a$ kuli nie ulega tedy zmianie i stanowi oś małą szukanej elipsy; oś wielka, jest to rzut średnicy $CD$, prostopadłej do kierunku rzutu i położonej w pł. $[yy_a]$, którego długość wyznaczamy na rysunku 200a), kreśląc $DD_a \parallel MM_a$. (Rozwinąć ten dowód — uzasadnić w szczególności, że $[AB]$ jest $\perp$ do kierunku $[MM_a]$ i $[CD] \perp [AB]$.)

## WSKAZÓWKI CO DO ĆWICZEŃ.

Ze względu na brak miejsca oraz na dość znaczną liczbę napomknień ~~co do~~ dotyczących zagadnień do przemyślenia i konstrukcyi do wykonania, zawartą w samym tekście rozdziału IX, poprzestaję w tem miejscu tylko na krótkich wskazówkach.

I. O ile chodzi o stożki i walce oraz ich powierzchnie, nasuwają się przedewszystkiem zadania, zupełnie podobne do zadań, dotyczących ostrosłupów i graniastosłupów. Możemy tedy kreślić rzuty stożków i walców obrotowych lub dowolnych w różnych położeniach, przy danych możliwie ściśle określonych, z uwzględnieniem pierwiastku liczbowego (por. ćw. 12—23, 26—31 z rozdz. VIII), oraz rzuty stożków ściętych i pni walcowych, z temi samemi zastrzeżeniami (por. ćw. 33, 34 z rozdz. VIII), wyznaczać punkty przebicia powierzchni tych brył przez prostą oraz ich przekroje (por. ćw. 36 42, 45, 47, 48 z tegoż rozdziału). Zadania z § 52-go, przy różnych układach danych i umowach co do postaci wyników i sposobu wykończenia rysunku, stanowią same przez się materyał nader obfity. Co do przenikań się, oprócz zadań bardziej teoretycznych, dotyczących stożków i walców dowolnych, o podstawach, położonych w tych samych lub różnych płaszczyznach rzutów, albo też powierzchni o danych dowolnie kierownicach (por. ćw. 50—54, 60, 61 z rozdz. VIII), należy zwrócić uwagę na zagadnienia bardziej praktyczne i badać np. połączenia rur walcowych o przekrojach kołowych lub eliptycznych równych i nierównych, sposoby dostosowania ich brzegów do powierzchni stożkowych obrotowych, połączenia graniastosłupów z poprzeczkami walcowemi (por. ćw. 55 - 59 z rozdz. VIII) i t. p. Z ćwiczeniami tego rodzaju (por. uwagę po ćw. 68 w rozdz. VIII) wiążą się naturalnie konstrukcye siatek; wreszcie ćwiczenia w kreśleniu rzutów aksonometrycznych mogą dopomódz bardzo skutecznie żywszemu rozwojowi wyobraźni.

II. Co do brył obrotowych w ogólności, należy poświęcić uwagę zadaniu typowemu, polegającemu na wyznaczeniu południka powierzchni, gdy są dane rzuty osi i tworzącej, w ogólności skośnej względem osi; nasuwa się tutaj zwłaszcza konstrukcya rzutów hiperboloidy jednopowłokowej podług osi, $\perp \Pi_1$ lub $\perp \Pi_2$, i prostej, skośnej względem niej, danej jako tworząca. Dalej, można zastosować wszystkie konstrukcye, podane w tekście lub pewne ich odmiany, do powierzchni obrotowych szczególnych, określonych tam, a także badać możliwości, wynikające z wyboru bardziej złożonych kształtów tworzącej. Przy konstrukcyach linii przenikania się dwu powierzchni obrotowych dadzą się uwzględnić znów obszerne zastosowania praktyczne. Wiele sposobności do dyskusyi i materyału do wykresów dają zagadnienia, polegające na wyznaczeniu powierzchni kulistej, zawierającej 4 punkty dane, lub kul, stycznych do czterech płaszczyzn danych Co do przekrojów stożka obrotowego, pozostają jeszcze do uwzględnienia, prócz trzech przykładów z ostatniego paragrafu, inne możliwe typy zasadnicze układu danych -- wreszcie narzuca się sama przez się konstrukcya przekroju walca obrotowego.

III. Podobnie jak w końcu ćwiczeń do rozdziału VIII, warto zwrócić baczną uwagę na wykreślanie rzutów przedmiotów konkretnych, danych bezpośrednio do rąk ucznia.

IV. Przy sposobie indywidualnym prowadzenia ćwiczeń w godzinach, poświęconych na kreślenie w klasie, można uczniom lepszym i okazującym większe zainteresowanie, dawać do opracowania zagadnienia (oczywiście nie nazbyt trudne), nie poruszone w podręczniku, jako to np.: konstrukcyę rzutów linii śrubowej i powierzchni śrubowych prostoliniowych, wyznaczanie cieniów.