

2/1982

Tomasz Sadowski

DWOISTOŚĆ RÓWNOWAGI
W STANACH CZYSTEGO ZGINANIA

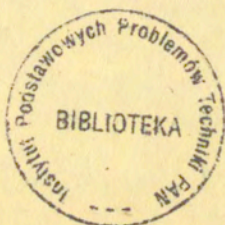
P.269



WARSZAWA 1982

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 16 listopada 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 2/1982



57072



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark. wyd. 1,5. Ark.druk. 2,5

Oddano do drukarni w styczniu 1982r.

Nr zamówienia 38/0/82

Z-107.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Tomasz Sadowski
Instytut Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej
Politechniki Lubelskiej

DWOISTOŚĆ RÓWNOWAGI W STANACH CZYSTEGO ZGINANIA

Spis treści

1. Wstęp	4
2. Sformułowanie problemu	5
2.1. Warunki brzegowe, równania równowagi, zasada prac przygotowanych	5
2.2. Kryterium dwoistości	9
2.3. Charakterystyka materiału	13
3. Stan naprężenia poprzedzający wystąpienie punktu bifurkacji	16
4. Analiza bifurkacji	26
4.1. Sformułowanie podstawowych zależności	26
4.2. Określenie obszarów rozwiązania równania różniczkowego	28
4.3. Charakterystyki	30
4.4. Krótkie długości fal	31
5. Omówienie wyników i wnioski	36

Praca wykonana w okresie
stażu naukowego w IPPT

1. W S T Ę P

Teoria bifurkacji należy do tych dziedzin mechaniki, a w szczególności analizy konstrukcji, które w ostatnich latach są bardzo silnie rozwijane. Opisuje ona zjawiska utraty kształtu, które mogą wystąpić w konstrukcji przy zadanym obciążeniu lub w trakcie procesów technologicznych obróbki metalowych elementów konstrukcyjnych /np. procesy formowania na zimno/ itd.

Z porównania kryteriów stosowanych w teorii bifurkacji i teorii stateczności wynika, że klasa rozwiązań bifurkacji jest szersza i zawiera w sobie klasę rozwiązań stateczności. (Shanley [16, 17]), bowiem o ile na wykresie obciążenie-przemieszczenie pojawią się punkty rozdzielenia, to zawsze wystąpią one wcześniej (lub najwyżej równocześnie) niż punkt graniczny charakteryzujący utratę stateczności konstrukcji.

Ważną pozycją w zakresie teorii bifurkacji jest praca Hilla [8], w której autor dokonał syntezy poprzednich wyników począwszy od końca lat 1950-tych, kiedy sformułował podstawy teorii. Wiele opublikowanych prac dotyczy płaskich stanów naprężeń lub odkształceń. Najistotniejsze z nich to praca Hilla i Hutchinsona [9] analizująca zjawiska bifurkacji powstające w próbach rozciągania. Uzupełnienie pracy [9] stanowi opracowanie Younga [21] dotyczące płaskich prób ściskania. Analizą lokalizacji odkształceń plastycznych w przypadku dwuosiowego stanu rozciągania grubych płyt zajmowali się Støren i Rice [19]. Natomiast podstawą w zakresie zagadnień czystego zginania jest praca Triantafyllidisa [20], w której autor buduje teorię bifurkacji stosując dwa modele konstytutywne: hypoelastyczny i hyperelastyczny oraz przyjmując, że materiał scharakteryzowany jest w stanie jednoosiowego rozciągania powyższej granicy plastyczności krzywą potęgową.

Niniejsza praca poświęcona jest analizie zjawisk dwoistości w stanach czystego zginania przy wykorzystaniu teorii Triantafyllidisa dla modelu hypoelastycznego, ale dla materiału scharakteryzowanego w stanie jednoosiowego rozciągania powyżej granicy plastyczności liniowym wzmocnieniem.

Wprowadzony model hypoelastyczny zaproponowali Støren i Rice [19] uogólniając deformacyjną teorię plastyczności na zakres dużych odkształceń. Zwrócić należy uwagę, że zastosowany model nie jest właściwym prawem plastyczności, ponieważ nie przewiduje odciążenia. W przypadku właściwego prawa plastyczności odciążenie następuje po pierwszym punkcie bifurkacji.

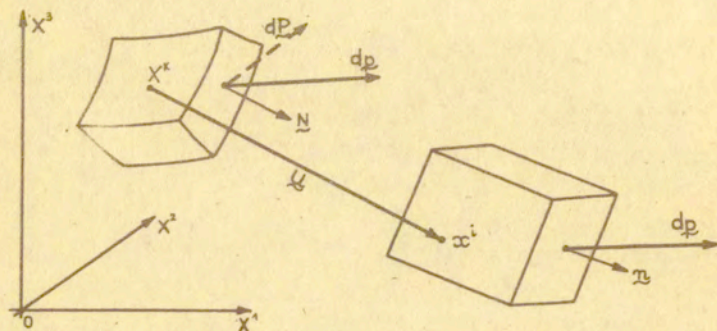
W pracy dla powyższych założeń wyznaczono krzywizny krytyczne odpowiadające pojawieniu się pierwszych punktów bifurkacji w zależności od parametrów charakteryzujących przyjęty materiał: granicy plastyczności i współczynnika liniowego wzmocnienia. Interesujące nas krótkofalowe powierzchnie rozdwojenia zawsze mogą pojawić się najpierw w strefie ściskanej zginanego pasma. Uzyskane rezultaty skonfrontowano z wynikami podanymi przez Triantafyllidisa. Podobnie do schematu wprowadzonego przez Hilla i Hutchinsona [9] podzielono obszar rozważanej konstrukcji na podobszary w zależności od tego, czy równanie podstawowe ma rozwiązanie w zakresie eliptycznym lub parabolicznym. W przypadku, gdy współistnieją różne podobszary wykreślono linie charakterystyczne.

2. Sformułowanie problemu.

2.1. Warunki brzegowe, równania równowagi, zasada prac przygotowanych.

Zakładamy, że położenie punktu materialnego ciała określone jest przez współrzędne konwekcyjnego układu odniesienia. W konfiguracji początkowej ciało ma objętość V_0 i powierzchnię F_0 , a współrzędne układu konwekcyjnego oznaczymy X^K , zaś jego kontrawariantne tensory metryczne G^{KL} . W konfiguracji aktualnej, w czasie t , współrzędne tegoż układu oznaczymy x^i , tensor metryczny c^{ij} , a objętość i powierzchnię ciała odpowiednio przez V i F .

Pod wpływem działających na konstrukcję obciążeń zewnętrznych wytwarza się w niej stan naprężenia, który możemy określić wprowadzając różne miary naprężenia (rys.1) .



Rys.1.

W konfiguracji aktualnej na zorientowany wektorem \underline{n} element powierzchni dF działa wektor siły $d\mathbf{p}$. Wprowadzamy tu miarę naprężeń σ^{ij} zwaną naprężeniami Cauchyego, którą określamy następująco:

$$dp^i = \sigma^{ij} n_j dF. \quad (2.1)$$

Podobnie możemy wprowadzić dwie miary naprężeń odniesione do konfiguracji początkowej. Pierwszą z nich otrzymujemy, gdy bieżącą siłę powierzchniową $d\mathbf{p}$ odniesiemy do zorientowanej przez wektor \underline{N} powierzchni początkowej dF_0 . Nazywamy ją I tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa i oznaczamy T^{ki}

$$dp^i = T^{ki} N_k dF_0. \quad (2.2)$$

Drugą z nich otrzymujemy wprowadzając siłę brzegową $d\mathbf{P}$ działającą na powierzchnię elementu konstrukcji, która jest związana z wektorem siły $d\mathbf{p}$ w chwili bieżącej w następujący sposób:

$$dP^k = X^k_{,i} dp^i \quad (2.3)$$

gdzie $X^k_{,i}$ oznacza gradient deformacji ciała. Nową miarą naprężeń S^{kl} zwaną II tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa uzyskujemy odnosząc siłę $d\mathbf{P}$ do powierzchni początkowej:

$$dP^K = S^{KL} N_L dF_o. \quad (2.4)$$

Przy formułowaniu problemu posłużymy się opisem Lagrangea, w którym warunki równowagi przy pominięciu sił masowych przyjmują postać:

$$T^{Ki},_{,K} = 0 \quad \text{w } V_o, \quad (2.5)$$

$$T^{Ki} N_K = T^i \quad \text{na } F_o. \quad (2.6)$$

Uwzględniając związek między I i II tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa:

$$T^{Ki} = S^{KL} x^i_{,L} \quad (2.7)$$

oraz jeśli gradient deformacji wyrazimy gradientem przemieszczenia

$$x^i_{,L} = g^i_L + u^i_{,L} \quad (2.8)$$

gdzie g^i_L jest tensorem metrycznym

$$g^i_L = \underline{e}^i \underline{e}_L, \quad (2.9)$$

to warunki równowagi wyrażają się:

$$(S^{KL} g^i_L + S^{KL} u^i_{,L}),_{,K} = 0 \quad \text{w } V_o. \quad (2.10)$$

$$(S^{KL} g^i_L + S^{KL} u^i_{,L}) N_K = T^i \quad \text{na } F_o. \quad (2.11)$$

We wzorze (2.9) \underline{e}^i oraz \underline{e}_L są wektorami bazy układów α_i i X_K . Ze względu na symetrię II tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa w dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać warunkami (2.10) i (2.11).

W zagadnieniach stateczności potrzebne jest przyrostowe sformułowanie problemu, dla którego warunki równowagi przyjmą formę:

$$(\dot{S}^{KL} g^i_L + \dot{S}^{KL} u^i_{,L} + S^{KL} v^i_{,L}),_{,K} = 0 \quad \text{w } V_o \quad (2.12)$$

$$(\dot{S}^{KL} g^i_L + \dot{S}^{KL} u^i_{,L} + S^{KL} v^i_{,L}) N_K = \dot{T}^i \quad \text{na } F_o. \quad (2.13)$$

W bazie \underline{G}_L przed odkształceniem II tensor naprężeń Pioli-Kirchhoffa możemy wyrazić jego reprezentacją S^{KL} :

$$\underline{S} = S^{KL} \underline{G}_K \otimes \underline{G}_L. \quad (2.14)$$

Aby znaleźć jego reprezentację w układzie współrzędnych konwekcyjnych, przetransformujemy wektory \underline{G}_K do konfiguracji aktualnej:

$$\underline{G}_K = \alpha^k_{,K} \underline{g}_k. \quad (2.15)$$

Uwzględniając (2.15) w (2.14) mamy :

$$\underline{S} = S^{KL} \alpha^k_{,K} \alpha^l_{,L} \underline{g}_k \otimes \underline{g}_l. \quad (2.16)$$

Ponieważ związek między \underline{S}^{kl} i S^{KL} w przypadku materiału nieściśliwego jest postaci:

$$\underline{S}^{kl} = t^{kl} = \alpha^k_{,K} \alpha^l_{,L} S^{KL} \quad (2.17)$$

dochodzimy do wniosku, że reprezentacją \underline{S} w bazie konwekcyjnej będą składowe tensora Cauchyego :

$$\underline{S} = \underline{S}^{kl} \underline{g}_k \otimes \underline{g}_l. \quad (2.18)$$

W związku (2.17) wprowadzono nowy symbol t^{kl} oznaczający składowe tensora naprężeń Kirchhoffa.

Wektory sił powierzchniowych i wektory przemieszczeń możemy również przedstawić za pomocą ich reprezentacji w bazie przed i po deformacji :

$$\underline{T} = T^L \underline{G}_L = T^L \alpha^k_{,L} \underline{g}_k = T^k \underline{g}_k \quad (2.19)$$

$$\underline{u} = U^L \underline{G}_L = U^L \alpha^k_{,L} \underline{g}_k = u^k \underline{g}_k \quad (2.20)$$

Możemy wówczas prędkościowe związki równowagi odnieść do bazy przed deformacją \underline{G}_L :

$$(\dot{S}^{KL} + \dot{S}^{KM} U^L_{,M} + S^{KM} \mathcal{V}^L_{,M})_{,K} = 0 \quad \text{w } V_0 \quad (2.21)$$

$$(\dot{S}^{KL} + \dot{S}^{KM} U^L_{,M} + S^{KM} \mathcal{V}^L_{,M}) N_K = \dot{T}^L \quad \text{na } F_0 \quad (2.22)$$

Określone związkami (2.21) i (2.22) pole nazwiemy statycznie zgodnym dla prędkości, jeśli na części powierzchni $F_0^{(n)}$, na której zadany jest wektor sił powierzchniowych \bar{T} spełniony będzie warunek:

$$\dot{T}^L = \bar{T}^L \quad \text{na } F_0^{(n)}. \quad (2.23)$$

Stan odkształcenia ciała odniesiony do konfiguracji początkowej zdefiniujemy tensorem Greena:

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{,L}^M U_{M,K}) \quad \text{w } V_0. \quad (2.24)$$

Obliczając pochodną względem czasu uzyskujemy formę przyrostową:

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{K,L} + \mathcal{V}_{L,K}) + \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{,L}^M U_{M,K} + \mathcal{V}_{,K}^M U_{M,L}). \quad (2.25)$$

Scharakteryzowane związkami (2.24) i (2.25) pole nazywamy polem kinematycznie zgodnym dla prędkości, jeśli na części powierzchni ciała $F_0^{(u)}$, na której zadany jest wektor przemieszczeń \bar{U}^* spełniony będzie warunek:

$$\mathcal{V}_K = \bar{U}_K \quad \text{na } F_0^{(u)}. \quad (2.26)$$

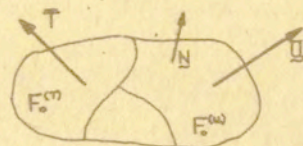
Na podstawie powyższych stwierdzeń dotyczących pól statycznie i kinematycznie zgodnych dla prędkości możemy zbudować zasadę prac przygotowanych:

$$\int_{F_0} \dot{T}^L \mathcal{V}_L dF = \int_{V_0} (\dot{S}^{KL} \dot{E}_{KL} + S^{ML} \mathcal{V}_{,L}^M \mathcal{V}_{,L}^M) dV. \quad (2.27)$$

Będzie ona podstawą do sformułowania kryteriów określających stan bifurkacji.

2.2. Kryterium dwoistości

Załóżmy, że w chwili przyjętej za początkową na część rozpatrywanego ciała $F_0^{(n)}$ działają konserwatywne siły powierzchniowe $\bar{T}^L(\underline{X}, t) = \lambda(t) \bar{T}_{(s)}^L(\underline{X})$, na części $F_0^{(u)}$ dane jest pole przemieszczeń $\bar{U}_K(\underline{X}, t) = \lambda(t) \bar{U}_K^{(s)}(\underline{X})$. $\lambda(t)$ zależy od czasu i stanowi parametr prostego obciążenia $\bar{T}_{(s)}^L(\underline{X})$ lub przemieszczenia $\bar{U}_K^{(s)}(\underline{X})$.



Rys.2. Schemat obciążeń i przemieszczeń powierzchniowych rozważanego ciała.

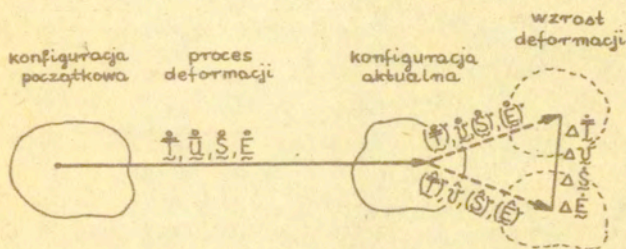
Zadane warunki brzegowe wywołują w rozważanym ciele stan naprężenia, który w opisie Lagrange'a możemy określić I lub II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa $T^{iK}(\lambda)$, $S^{KL}(\lambda)$ odpowiednio oraz stan odkształcenia opisany tensorem Greena, $E_{KL}(\lambda)$. Zakładamy, że w trakcie wzrostu parametru $\lambda(t)$ od wartości 0 do λ rozwiązanie w naprężeniach i odkształceniach jest jednoznaczne. Oznaczmy je symbolami $\hat{T}^{iK}(\lambda)$, $\hat{S}^{KL}(\lambda)$; $\hat{E}_{KL}(\lambda)$ i nazwiemy rozwiązaniem fundamentalnym. Bifurkacja jest możliwa wówczas, gdy parametr $\lambda(t)$ osiągnie wartość krytyczną λ_{kr} .

W rozważanym zagadnieniu dwistości interesuje nas, czy wywołane przez pole sił quasi-statycznych pole przemieszczeń (ruch) jest opisane jednoznacznie, gdy na części brzegu $F_0^{(m)}$ zadana jest prędkość sił powierzchniowych \hat{T}^L , a na części $F_0^{(w)}$ prędkości cząsteczek \hat{V}^L .

Zakładamy, więc, że od chwili t scharakteryzowanej parametrem $\lambda(t)$ do chwili sąsiedniej $t + dt$ następuje wzrost parametru do wielkości $\lambda + \dot{\lambda}$. Pociąga to za sobą wzrost rozwiązania fundamentalnego o wielkości \hat{V}_K , $(\hat{T}^L)'$, $(\hat{S}^{KL})'$; $(\hat{E}_{KL})'$. Ponieważ w zagadnieniu dwistości dla pewnego stanu deformacji i poziomu naprężeń możliwe jest wystąpienie dwóch różnych rozwiązań w prędkościach przemieszczeń i przyrostach sił powierzchniowych zakładamy, że istnieje również inne rozwiązanie, które nazwiemy bifurkacyjnym i oznaczmy \hat{V}_K , $(\hat{T}^L)'$, $(\hat{S}^{KL})'$, $(\hat{E}_{KL})'$. Możemy wówczas wprowadzić różnice pomiędzy tymi rozwiązaniami:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \check{v}_K &= \check{v}_K - \check{v}_K \\ \Delta \check{t}^L &= (\check{t}^L)^* - (\check{t}^L)^* \\ \Delta \check{S}^{KL} &= (\check{S}^{KL})^* - (\check{S}^{KL})^* \\ \Delta \check{E}_{KL} &= (\check{E}_{KL})^* - (\check{E}_{KL})^* \end{aligned} \right\} 2.28$$

Analizowany proces deformacji możemy przedstawić schematycznie rys.3.



Rys. 3.

Wówczas możemy podobnie do wzoru (2.27) zbudować zasadę prac przygotowanych w wersji przyrostowej [6,8] :

$$\int_{F_0} \Delta \check{t}^L \Delta \check{v}_L dF = \int_{V_0} (\Delta \check{S}^{KL} \Delta \check{E}_{KL} + \check{S}^{KL} \Delta \check{v}_{M,K} \Delta \check{v}^M_{,L}) dV, \quad (2.29)$$

gdzie $\Delta \check{E}_{KL}$ możemy wyrazić:

$$\Delta \check{E}_{KL} = \frac{1}{2} (\Delta \check{v}_{K,L} + \Delta \check{v}_{L,K}) + \frac{1}{2} (\check{v}^N_{,K} \Delta \check{v}_{N,L} + \check{v}^N_{,L} \Delta \check{v}_{N,K}) \quad (2.30)$$

Jeżeli do (2.29) wprowadzimy ogólny związek konstytutywny o postaci:

$$\check{S}^{KL} = L^{KLMN} \check{E}_{MN} \quad (2.31)$$

gdzie L^{KLMN} charakteryzuje materiał w chwili początkowej, to otrzymamy **funkcjonał**

$$F(\lambda, \Delta \check{v}_L) = \int_{V_0} (L^{KLMN} \Delta \check{E}_{KL} \Delta \check{E}_{MN} + \check{S}^{KL} \Delta \check{v}_{M,K} \Delta \check{v}^M_{,L}) dV. \quad (2.32)$$

Hill [6] wykazał posługując się teorią funkcji wypukłych, że rozważany przyrostowy problem brzegowy ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli spełnione będzie

$$F(\lambda, \Delta \mathcal{U}_L) > 0 \quad (2.33)$$

dla wszystkich pól $\Delta \mathcal{U}_L$, które zanikają na powierzchni $F_0^{(u)}$, ale nie są równe zeru w pozostałym obszarze.

Interesujący nas punkt bifurkacji scharakteryzowany będzie następująco:

$$\Delta \dot{T}^L = (\Delta \dot{S}^{KL} + \Delta \dot{S}^{KM} \dot{U}_{,M}^L + \dot{S}^{KM} \Delta \mathcal{U}_{,M}^L) N_K = 0 \quad \text{na } F_0^{(u)} \quad (2.34)$$

$$\Delta \mathcal{U}_K = 0 \quad \text{na } F_0^{(u)} \quad (2.35)$$

i spełnieniem warunków równowagi (2.21) przez $\Delta \mathcal{U}_L$

$$(\Delta \dot{S}^{KL} + \Delta \dot{S}^{KM} \dot{U}_{,M}^L + \dot{S}^{KM} \Delta \mathcal{U}_{,M}^L)_{,K} = 0 \quad \text{w } V_0. \quad (2.36)$$

Ponieważ równania (2.34), (2.35) i (2.36) stanowią układ jednorodny, to jego rozwiązaniem będzie rozwiązanie trywialne poszukiwanego $\Delta \mathcal{U}_L$. Wówczas jednak problem brzegowy określony będzie jednoznacznie. Układ powyższy w stanach własnych ma niezerowe rozwiązanie $\overline{\Delta \mathcal{U}}_K$ (funkcja własna), czyniące zadość niejednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego. Wtedy zgodnie z warunkami (2.34), (2.35) funkcjonal (2.32) przyjmuje stacjonarną wartość

$$F(\lambda_{k\tau}, \overline{\Delta \mathcal{U}}_K) = 0, \quad (2.37)$$

a wartość funkcji własnej $\overline{\Delta \mathcal{U}}_K$ wyznaczyć można z pierwszej wariacji $F(\lambda, \Delta \mathcal{U}_K)$, która zanika w stanach własnych ([6], [8]):

$$\delta F(\lambda_{k\tau}, \overline{\Delta \mathcal{U}}_K) = 0. \quad (2.38)$$

Przyrostową formę zasady prac wirtualnych możemy zapisać posługując się wielkościami odniesionymi do bazy konwekcyjnej w stanie zdeformowanym ciała o powierzchni bocznej F i objęto-

ści V. Otrzymujemy wówczas:

$$\int_F \Delta \dot{T}^i \Delta v_i dF = \int_V (\Delta \dot{t}^{ij} \Delta d_{ij} + \dot{t}^{ij} \Delta v_{m,i} \Delta v_{m,j}) dV. \quad (2.39)$$

\dot{T}^i oraz v_i są przyrostem sił powierzchniowych i prędkością przemieszczeń. \dot{t}^{ij} oznacza tu pochodną konwekcyjną tensora naprężeń Kirchhoffa, która związana jest z pochodną II tensora Pioli-Kirchhoffa zależnością:

$$\dot{t}^{ij} = \alpha^i_{,k} \alpha^j_{,l} S^{kl}. \quad (2.40)$$

\dot{t}^{ij} znajdujemy ze wzoru (2.17), natomiast związek między Δd_{ij} i $\Delta \dot{E}_{kl}$ jest następujący:

$$\Delta d_{ij} = X^k_{,i} X^l_{,j} \Delta \dot{E}_{kl}. \quad (2.41)$$

Jeżeli do (2.36) wprowadzimy związek konstytutywny o ogólnej postaci

$$\dot{t}^{ij} = B^{ijkl} d_{kl}, \quad (2.42)$$

gdzie:

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \quad (2.43)$$

to otrzymamy nową postać funkcjonału (2.32)

$$\hat{F}(\lambda, \Delta v_m) = \int_V (B^{ijkl} \Delta d_{ij} \Delta d_{kl} + \dot{t}^{ij} \Delta v_{m,i} \Delta v_{m,j}) dV. \quad (2.44)$$

Bifurkację charakteryzować będzie zerowanie się funkcjonału \hat{F} i jego pierwszej wariacji:

$$\hat{F}(\lambda_{kr}, \overline{\Delta v_m}) = 0, \quad (2.45)$$

$$\delta \hat{F}(\lambda_{kr}, \overline{\Delta v_m}) = 0. \quad (2.46)$$

2.3. Charakterystyka materiału

Rozważania dotyczyć będą materiałów ze wzmocnieniem liniowym, dla których równanie konstytutywne w konfiguracji odkształconej wyraża się związkiem dewiatorowym:

$$(\sigma^{ij})^{\nabla j} = (t^{ij})^{\nabla j} = A^{ijkl} d_{kl} \quad (2.47)$$

gdzie $(\sigma^{ij})^{\nabla J}$ i $(t^{ij})^{\nabla J}$ są pochodnymi Jaumanna dwiatorów naprężeń Cauchyego i Kirchhoffa. A^{ijkl} jest modulem charakteryzującym własności materiału w stanie deformacji, który przyjmujemy za Störenem i Ricem [19] w następującej postaci:

$$A^{ijkl} = \bar{h} \left[\frac{1}{2} (c^{ik} c^{jl} + c^{jk} c^{il}) - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{h}{\bar{h}}\right) \frac{\sigma^{ij} \sigma^{kl}}{\sigma_e^2} \right], \quad (2.48)$$

gdzie: $h = \frac{2}{3} E_s$, $\bar{h} = \frac{2}{3} E_t$, a σ^{ij} są składowymi dwiatora naprężeń Cauchyego, natomiast E_s i E_t odpowiednio ściecznymi i stycznymi modułami wzmocnienia otrzymanymi z krzywej naprężenie - odkształcenie dla jednoosiowego rozciągania w punkcie określonym zależnością:

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} (\sigma_i' \sigma_i'), \quad (2.49)$$

gdzie σ_i' są wartościami głównymi dwiatora naprężeń Cauchyego.

Przechodząc od postaci dwiatorowej związku konstytutywnego (2.47) do postaci tensorowej otrzymujemy:

$$(t^{ij})^{\nabla J} = (t^{ij} + p c^{ij})^{\nabla J} = A^{ijkl} d_{kl} + \dot{p} c^{ij} \quad (2.50)$$

\dot{p} jest tutaj prędkością zmian ciśnienia hydrostatycznego $p = \frac{1}{3} t^{kk}$.

(2.50) możemy przedstawić w postaci przetransformowanej wprowadzając pochodną konwekcyjną tensora naprężeń Kirchhoffa:

$$\dot{t}^{ij} = B^{ijkl} d_{kl} + \dot{p} c^{ij}. \quad (2.51)$$

Tensor B^{ijkl} charakteryzujący własności materiału wyrazimy (Luszek [2]):

$$B^{ijkl} = A^{ijkl} - t^{kj} c^{il} - t^{ki} c^{jl}. \quad (2.52)$$

Module B^{ijkl} i A^{ijkl} cechują się zupełną symetrią.

Po wprowadzeniu (2.51) do zasady prac przygotowanych (2.39) otrzymujemy funkcjonał o postaci (2.44) przy uwzględnieniu, że dla materiałów nieściśliwych zachodzi

$$c^{ij} \Delta d_{ij} = \overline{\Delta v^i}, i = 0. \quad (2.53)$$

Analizowane elementy konstrukcyjne wykonane są z materiałów, które można było opisać podobnie jak Stören i Rice [19] uogólni-

nioną na duże odkształcenia deformacyjną teorią plastyczności, dla której przyjęto w stanie jednoosiowym naprężeń model sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem :

$$\epsilon_e = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\mu} & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ \frac{1}{2\bar{\mu}} [\sigma_e - (1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu})\sigma_y] & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.54)$$

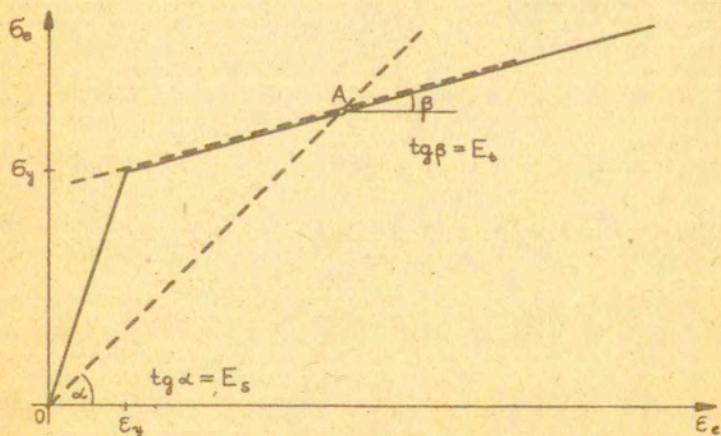
gdzie: 2μ jest modułem Younga, $2\bar{\mu}$ modułem stycznym w strefie plastycznej, σ_y - granicą plastyczności.

Stąd w prosty sposób otrzymujemy wyrażenia na E_s i E_t :

$$E_s = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} \frac{\sigma_e}{[\sigma_e - (1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu})\sigma_y]} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.55)$$

oraz

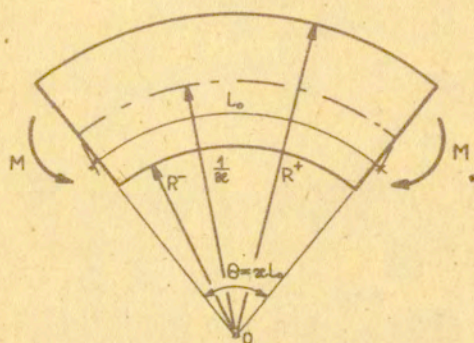
$$E_t = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.56)$$



Rys.4 Wykres naprężenie-odkształcenie pokazujący sposób wyznaczenia stycznego modułu E_t i siecznego modułu E_s w punkcie A.

3. STAN NAPRĘŻENIA POPRZEDZAJĄCY WYSTĄPIENIE PUNKTU ROZDWOJENIA

Rozważmy w warunkach płaskiego odkształcenia płytę o początkowej długości L_0 i wysokości h , wykonaną z materiału nieściśliwego, izotropowego, sprężysto-plastycznego poddaną stanowi czystego zginania.



Rys.5. Przekrój podłużny płyty w stanie deformacji.

Stan deformacji analizowanej konstrukcji opisujemy w układzie współrzędnych walcowych, który jest zbieżny w tym przypadku z kierunkami głównymi odkształceń i naprężeń. Wartości główne wzdłuż promienia r oznaczymy indeksem 1, zaś wzdłuż kierunku indeksem 2.

Niech ε oznacza krzywiznę włókna obojętnego o początkowej długości L_0 . Wówczas wydłużenia w dowolnym punkcie materialnym oddalonym o wielkość r od początku układu współrzędnych będą równe:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r\varepsilon}, \quad \lambda_2 = r\varepsilon. \quad (3.1)$$

Główne wartości odkształceń wyznaczymy korzystając z logarytmicznej miary odkształceń, którą najczęściej stosuje się przy opisie prób i testów metalurgicznych (Hill [8]; Keeler, Backofen [12])

w trakcie których materiał deformuje się w ten sposób, że kierunki główne osadzone są w materiale i deformują się wraz z nim w trakcie całego procesu obciążania (Stören, Rice [19]):

$$\varepsilon_{\alpha} = \ln \lambda_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.2)$$

Dla materiałów izotropowych nieściśliwych gęstość energii dopełniającej wyraża się zależnością:

$$W_c = \frac{3}{4 E_s} \mathbb{I} \sigma' \quad (3.3)$$

gdzie $\mathbb{I} \sigma'$ - drugi niezmiennik wartości głównych dewiatora naprężeń Cauchyego. Stąd otrzymujemy równanie konstytutywne:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma'_i} = \frac{\sigma'_i}{\frac{2}{3} E_s}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

σ'_i jest tutaj wartością główną dewiatora naprężeń Cauchyego.

W płaskim stanie odkształcenia $\varepsilon_3 = 0$, stąd z (3.4) otrzymujemy, że

$$\sigma'_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (3.5)$$

i dlatego z (2.49) i (3.5) mamy równoważne wyrażenie na σ_e

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|. \quad (3.6)$$

Dowolny element płyty znajduje się w stanie równowagi, który sprowadza się do równania:

$$\frac{d\sigma_1}{dr} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r} = 0. \quad (3.7)$$

Wprowadzając (3.2), (3.4), (3.5), (2.49) do (3.7) otrzymujemy

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \alpha r)} = \frac{4\mu}{3\tau_y} \ln \alpha r \quad (3.8)$$

dla strefy sprężystej, oraz

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \alpha r)} = \frac{4\bar{\mu}}{3\tau_y} \ln \alpha r \pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \quad (3.9)$$

dla strefy plastycznej. Znak plus w (3.9) obowiązuje dla strefy rozciąganej, znak minus zaś dla strefy ściskanej. Natomiast

$$\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Po scałkowaniu (3.8) dostajemy

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\mu}{3\tau_y} (\ln \alpha r)^2 + c \quad \text{dla } |\ln \alpha r| \leq \frac{3\tau_y}{2E} = \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.10)$$

dla obszaru sprężystego, przy czym E oznacza moduł Younga materiału. Po scałkowaniu (3.9) otrzymujemy

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\mu}{3\tau_y} (\ln \alpha r)^2 \pm (1 - \frac{\mu}{\mu}) \ln \alpha r + d \quad \text{dla } |\ln \alpha r| > \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.11)$$

Zależność (3.11) dotyczy obszaru plastycznego konstrukcji. Stałe całkowanie c i d w powyższych wzorach znajdujemy z warunków brzegowych.

Oznaczmy promienie włókien zewnętrznych przez R^+ i R^- (rys. 5). Z warunku ciągłości naprężeń σ_1 oraz ich zanikania na powierzchniach nieobciążonych mamy:

$$\alpha R^+ = \frac{1}{\alpha R^-} \quad (3.12)$$

Z warunku nieściśliwości materiału mamy drugą zależność pomiędzy R^+ i R^- :

$$(R^+)^2 - (R^-)^2 = \frac{2h_0}{\alpha} \quad (3.13)$$

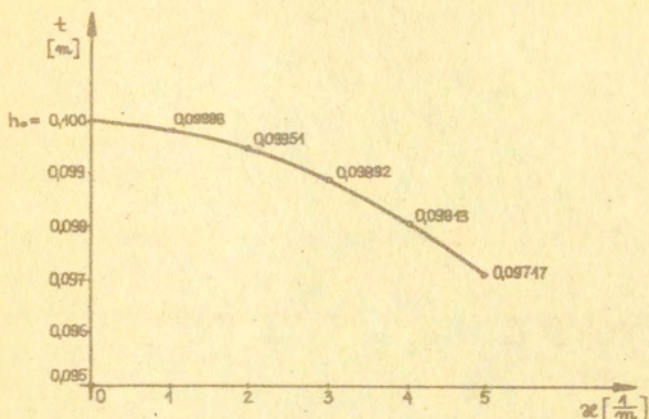
Dwa równania (3.12) i (3.13) po rozwiązaniu dają wzory do wyznaczania promieni włókien zewnętrznych:

$$\begin{aligned} R^+ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \alpha h_0 + [(\alpha h_0)^2 + 1]^{1/2} \right\}^{1/2}, \\ R^- &= \frac{1}{\alpha} \left\{ [(\alpha h_0)^2 + 1]^{1/2} - \alpha h_0 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Umożliwiają one sporządzenie wykresu zmian grubości w zależności od stanu deformacji. Przyjęto, że początkowa grubość płyty wynosi 10 cm.

Podobne zagadnienie zginanego pasma płytowego wykonanego z tworzywa hipersprężysto-plastycznego rozważali Sawczuk i Mjelniczuk [15]. Uzyskali oni zbliżone zmiany grubości pasma.

Znając wartości R^+ i R^- dla dowolnego α możemy wyznaczyć stałe całkowanie c i d, określając w ten sposób pole naprężeń występujące w stanie obciążenia konstrukcji. Zależy ono od zmiennej krzywizny α , stałych charakteryzujących materiał konstrukcji tzn. μ , $\bar{\mu}$, σ_y oraz od początkowej wysokości h_0 :



Rys. 6. Zmiany grubości płyty w ciągu procesu zginania.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \alpha r]^2 - \frac{4\mu}{3} [\ln \alpha R^+]^2 + \\ &+ 2\tau_y \left(1 - \frac{\mu}{\mu}\right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \alpha R^+\right) \\ \sigma_2 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \alpha r]^2 - \frac{4\mu}{3} [\ln \alpha R^+]^2 + \frac{8}{3}\mu \ln \alpha r + \\ &+ 2\tau_y \left(1 - \frac{\mu}{\mu}\right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \alpha R^+\right) \end{aligned} \right\} (3.15)_1$$

dla

$$\frac{3\tau_y}{4\mu} > \ln \alpha r > 0 \quad \text{strefa rozciągana,}$$

$$0 > \ln \alpha r > -\frac{3\tau_y}{4\mu} \quad \text{strefa ścisła}$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{4\mu}{3} [(\ln \alpha r)^2 - (\ln \alpha R^+)^2] + \\ &+ 2\tau_y \left(1 - \frac{\mu}{\mu}\right) [\pm \ln \alpha r - \ln \alpha R^+] \\ \sigma_2 &= \frac{4\mu}{3} [(\ln \alpha r)^2 - (\ln \alpha R^+)^2] + \\ &+ 2\tau_y \left\{ \left[\pm \left(1 - \frac{\mu}{\mu}\right) + \frac{4}{3} \frac{\tau_y}{\mu} \right] \ln \alpha r + \left(1 - \frac{\mu}{\mu}\right) [\pm 1 - \ln \alpha R^+] \right\} \end{aligned} \right\} (3.15)_2$$

dla

$$\ln \alpha R^+ > \ln \alpha r > \frac{\sigma_{Ty}}{4\mu} \quad \text{strefa rozciągana ,}$$

$$-\frac{\sigma_{Ty}}{4\mu} > \ln \alpha r > \ln \alpha R^- \quad \text{strefa ściskana .}$$

Zależności (3.15)₁ odnoszą się do obszaru sprężystego, natomiast (3.15)₂ do obszaru plastycznego.

W uzyskanym rozwiązaniu warunek plastycznego obciążenia wyraża się wzorem

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{4\sqrt{3}\mu}{3} \ln \alpha r \geq \sigma_y \quad (3.16)$$

bowiem rozważania obejmują materiał sprężysto-plastyczny. Hill podał w swej monografii [5] ogólną teorię zginanego pasma płytowego wykonanego z materiału idealnie plastycznego, dla którego odpowiednikiem (3.16) jest

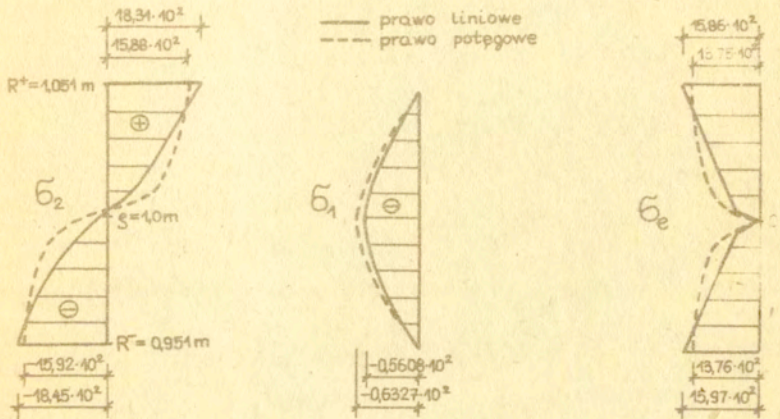
$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y \quad (3.17)$$

Stąd po uwzględnieniu (3.17) w warunkach równowagi (3.7) Hill uzyskał wyrażenia na σ_1 i σ_2 , które nie zależą od α i są funkcjami $\ln r$ w pierwszej potędze.

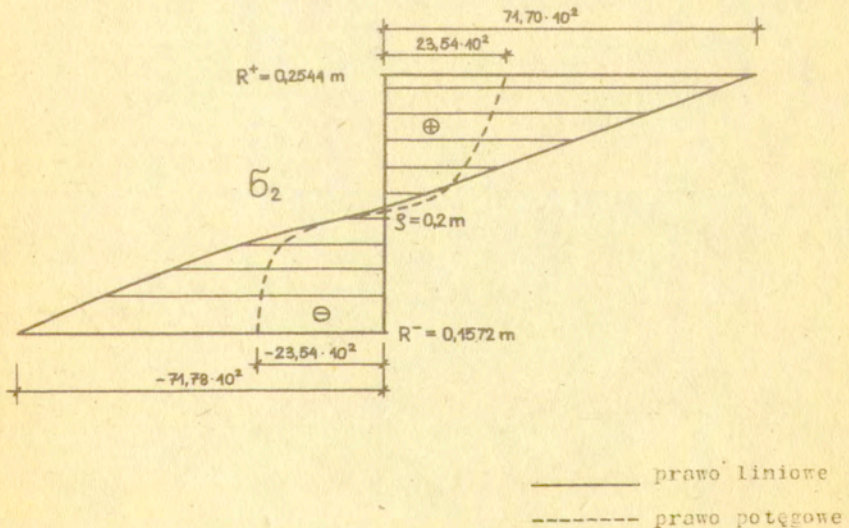
Na podstawie wzorów (3.15)₁ i (3.15)₂ możliwe jest sporządzenie wykresów rozkładów naprężeń wzdłuż wysokości płyty.

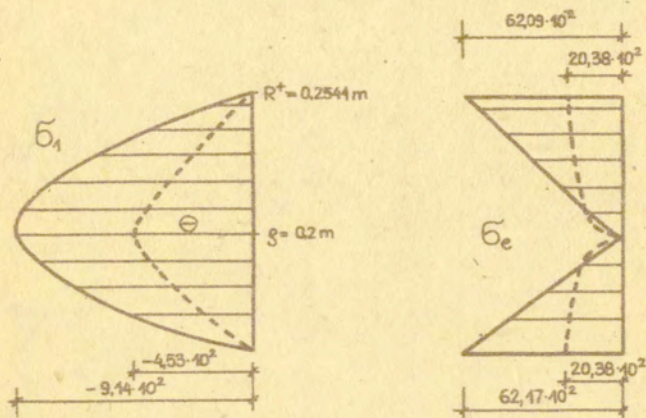
Poniżej na rys.7 sporządzono wykresy σ_1 , σ_2 , σ_c , przy krzywiznie $\alpha = 1 \frac{4}{m}$ dla parametru wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,1$ i porównano z uzyskanymi na podstawie wzorów Triantafyllidisa dla współczynnika potęgowego $m = 4$ linią przerywaną.

Identyczne wykresy porównawcze wykonano dla krzywizny $\alpha = 5 \frac{4}{m}$ (rys.8), z których wynika, że wzrost krzywizny powoduje kilkukrotny wzrost maksymalnych naprężeń dla materiału z liniowym wzmocnieniem, natomiast niewielki wzrost dla materiału rozważanego przez Triantafyllidisa.



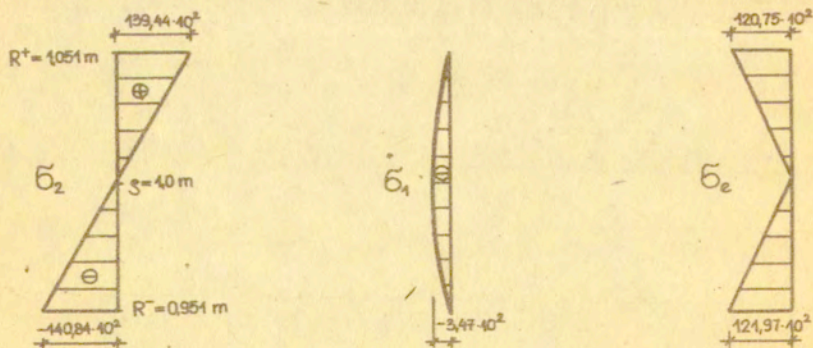
Rys. 7. Wykresy naprężeń σ_1 , σ_2 oraz intensywności σ_e przy krzywiznie $\alpha = 1 \frac{1}{m}$ (w $\frac{MN}{m^2}$)





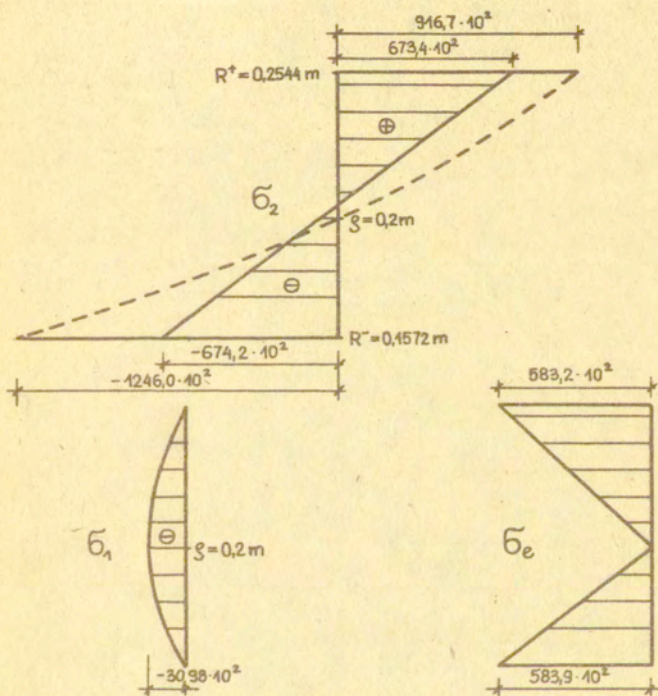
Rys. 8. Wykresy naprężeń σ_1 , σ_2 , oraz intensywności σ_e przy krzywiznie $\alpha = 5 \frac{1}{\text{m}}$ (w $\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$).

W przypadku, gdy współczynnik potęgowy $m = 1$ we wzorach Triantafyllidisa, a w rozważaniach niniejszej pracy $\bar{\mu} = \mu$ otrzymujemy ten sam materiał idealnie sprężysty. Rozkłady σ_1 , σ_2 i σ_e dla tego przypadku prezentujemy na rysunku 9 dla krzywizny $\alpha = 1 \frac{1}{\text{m}}$.



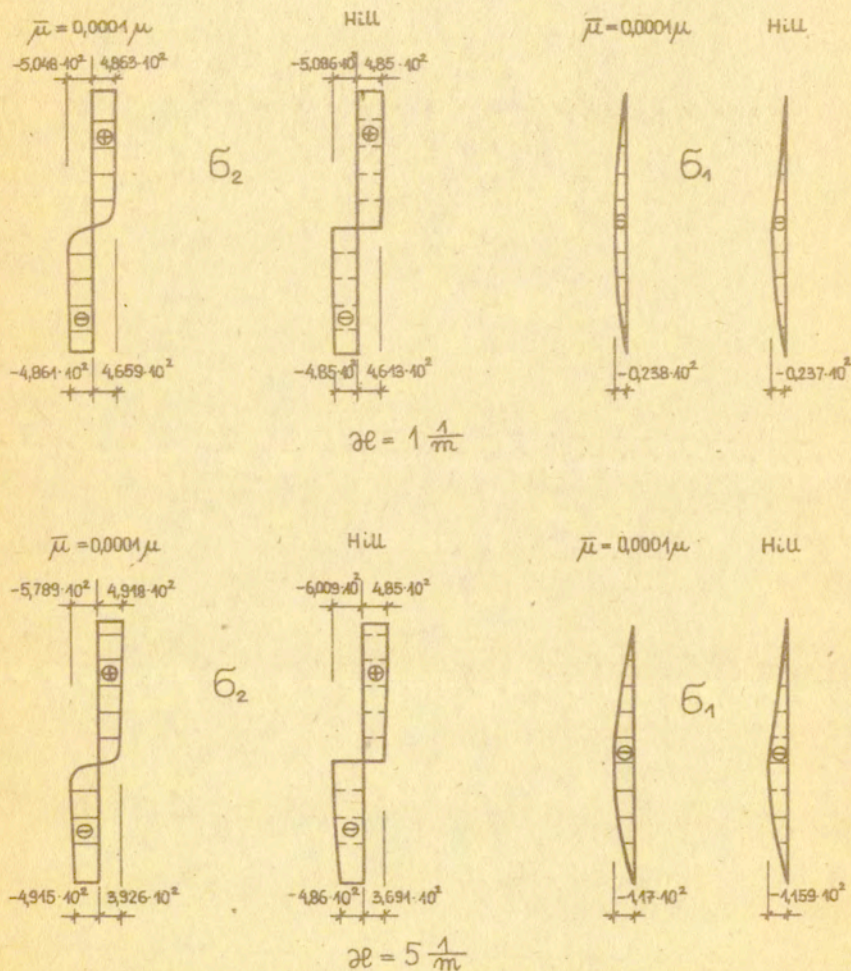
Rys. 9. Wykresy naprężeń σ_1 i σ_2 oraz intensywności σ_e dla materiału idealnie sprężystego dla $\alpha = 1 \frac{1}{\text{m}}$ (w $\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$).

Odpowiednie wykresy wykonano również dla krzywizny $\alpha = 5 \frac{1}{m}$ (rys.10). Wykres naprężeń σ_2 porównano z rozkładem σ_2 uzyskanym z teorii prętów zakrzywionych (linia kreskowana).



Rys.10. Wykresy naprężeń σ_1 , σ_2 i σ_e dla materiału idealnie sprężystego dla $\alpha = 5 \frac{1}{m}$ (liniakreskowana-teoria prętów zakrzywionych) (w $\frac{MN}{m^2}$).

Dla małej wartości współczynnika wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,0001\mu$ uzyskane rozkłady naprężeń skonfrontowano z rozwiązaniem Hilla [5] zginanego pasma sztywno-plastycznego (rys.11) . Otrzymano dużą zgodność wyników.

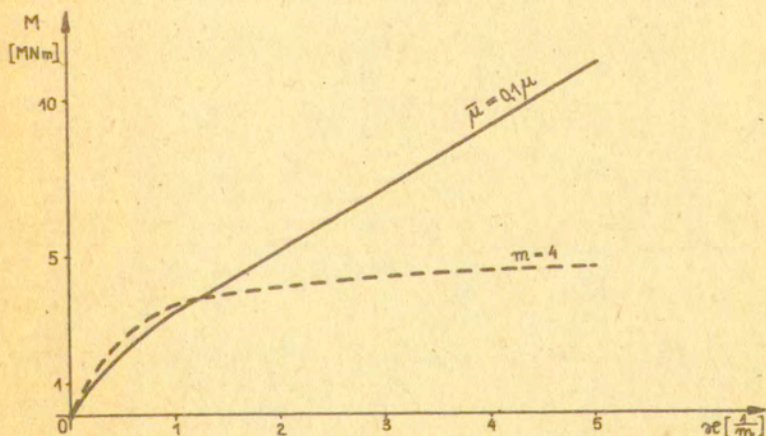


Rys.11. Wykres porównawczy naprężeń σ_2 i σ_1 dla płyty wykonanej z materiału o parametrze wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,0001\mu$ i materiału sztywno-plastycznego [5] ($w \frac{MN}{m^2}$).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w rozważanym zagadnieniu położenie osi obojętnej określamy jako średnią arytmetyczną promieni włókien skrajnych R^+ i R^- , natomiast w analizie Sawczuka i Mielniczuka [15] oś obojętka nie pokrywa się z osią symetrii pasma, a przesunięta jest nieco ku środkowi krzywizny.

Oprócz osi obojętnej wyróżnić możemy jeszcze jedno włókno scharakteryzowane zerowaniem się intensywności naprężeń σ_e . Jest ono poddane wszechstronnemu równomiernemu ścisnaniu, a promień jego wyznaczamy z zależności $\xi = \sqrt{R^+ + R^-}$. Włókno to w stosunku do osi obojętnej przesunięte jest nieco ku środkowi krzywizny.

Sporządzono również porównawczy wykres momentów zginających dla poszczególnych krzywizn.



Rys.12. Wykres porównawczy momentów zginających dla materiału z parametrem wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,1 \mu$ z otrzymanym na podstawie wzorów Triantafyllidisa $m = 4$.

4. ANALIZA BIFURKACJI

4.1. Sformułowanie podstawowych zależności.

W interesującym nas zagadnieniu czystego zginania parametrem λ wraz z którym narastają obciążenia będzie krzywizna włókna obojętnego α . Wówczas dla płaskiego stanu odkształceń w krzywoliniowym układzie współrzędnych funkcjonal (2.44) przyjmuje postać:

$$\hat{F}(\alpha, \Delta v_i) \equiv \int_0^{\alpha_0} \int_{\kappa^-}^{\kappa^+} (B^{pprs} \Delta d_{sp} \Delta d_{rs} + t^{sp} \Delta v_{r,s} \Delta v_{m,p}) \tau dr d\theta. \quad (4.1)$$

Występujące w 4.1 wielkości są składowymi fizycznymi tensorów. Składowe fizyczne $\Delta v_{i,j}$ we współrzędnych walcowych są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{1,1} &= \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \tau} ; & \Delta v_{1,2} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \theta} - \frac{\Delta v_2}{\tau} ; \\ \Delta v_{2,1} &= \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \tau} ; & \Delta v_{2,2} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} + \frac{\Delta v_1}{\tau} . \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Dla materiałów nieściśliwych spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\tau \Delta v_1) + \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} = 0. \quad (4.3)$$

Zakładamy, że istnieje potencjał, który określa prędkości na podstawie następujących zależności:

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} ; \quad \Delta v_2 = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau}. \quad (4.4)$$

Przez wprowadzenie potencjału upraszczamy rozwiązanie zagadnienia, bowiem w funkcjale (4.1) wystąpi jedna nieznamna funkcja $\hat{\Phi}$.

Składowe tensora B^{pprs} wyznaczamy posługując się (2.52), (2.48), (2.55) i (2.56):

$$\left. \begin{aligned} B^{1111} &= \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{h}\right) - 2 \sigma_1 ; & B^{2222} &= \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{h}\right) - 2 \sigma_2 ; \\ B^{1122} &= B^{2211} = \frac{h}{2} \left(\lambda - \frac{h}{h}\right) ; \\ B^{1212} &= B^{2112} = B^{1221} = B^{2121} = \frac{h}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} . \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Po wprowadzeniu (4.2), (4.4) i (4.5) do funkcjonału bifurkacji (4.1) otrzymujemy:

$$\hat{F}(\alpha, \hat{\Phi}) = \int_0^{\alpha l_0} \int_{R^-}^{R^+} \left[(2h - \epsilon_1 - \epsilon_2) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r \partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\bar{h} - \epsilon_1 - \epsilon_2) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \epsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r^2} \right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} \right)^2 \right] r dr d\theta. \quad (4.6)$$

Zagadnienie pojawienia się bifurkacji rozwiążemy dla warunków brzegowych, gdy moment na obu końcach płyty względem włókna obojętnego jest kontrolowany w ciągu procesu deformacji. Odpowiada to następującym warunkom brzegowym:

$$\Delta \hat{T}^i = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0, \alpha l_0; \quad i = 1, 2 \quad (4.7)$$

gdzie \hat{T}^i oznacza wzrost fizycznych składowych wektorów sił powierzchniowych. Ponadto, ponieważ pozostałe powierzchnie wyznaczone promieniami R^- i R^+ są wolne od obciążeń, zatem:

$$\Delta \hat{T}^i = 0 \quad \text{dla} \quad r = R^-, R^+; \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

Dla wyróżnionych warunków brzegowych dowolny potencjał $\bar{\Phi}$ można przedstawić w najogólniejszej postaci za pomocą rozwinięcia w szeregi trygonometryczne Fouriera, co umożliwi oddzielne rozpatrywanie powierzchni niestabilności scharakteryzowanych dowolną wartością n :

$$\hat{\Phi}(r, \theta) = \bar{\Phi}_{c0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\Phi}_{cn}(r) \cos\left(\frac{2\pi n \theta}{\alpha l_0}\right) + \bar{\Phi}_{sn}(r) \sin\left(\frac{2\pi n \theta}{\alpha l_0}\right) \right] \quad (4.9)$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$, a $\bar{\Phi}_{cn}(r)$, $\bar{\Phi}_{sn}(r)$ są ciągłymi różniczkowalnymi funkcjami r . Jeśli (4.9) wprowadzimy do funkcjonału (4.6) i scałkujemy względem θ , to $\hat{F}(\alpha, \hat{\Phi})$ możemy zapisać w postaci:

$$\hat{F}(\alpha, \bar{\Phi}) = \hat{F}_0(\alpha, \bar{\Phi}_{c0}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{F}_n(\alpha, \bar{\Phi}_{cn}) + \hat{F}_n(\alpha, \bar{\Phi}_{sn}) \right] \quad (4.10)$$

gdzie: \hat{F}_n dane jest zależnością

$$\hat{F}_n(\alpha, \bar{\Phi}) = \int_{R^-}^{R^+} \left\{ (2h - \epsilon_1 - \epsilon_2) \left[\frac{2\pi n}{\alpha l_0} \frac{\bar{\Phi}}{r^2} - \frac{2\pi n}{\alpha l_0} \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} \right]^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2) \left[\left(\frac{2\pi n}{\alpha l_0} \right)^2 \frac{\hat{\Phi}}{\tau^2} + \frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{d\hat{\Phi}}{d\tau} \right]^2 + \quad n = 1, 2, 3..$$

$$+ \sigma_1 \left(\frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\tau^2} \right)^2 + \sigma_2 \left[\left(\frac{2\pi n}{\alpha l_0} \right)^2 \frac{\hat{\Phi}}{\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{d\hat{\Phi}}{d\tau} \right]^2 \} \tau d\tau. \quad (4.11)$$

Poszukiwana krzywizna krytyczna pierwszego punktu rozdwojenia dana jest przez najmniejszą wartość własną każdego z funkcjonałów \hat{F}_n , dla wszystkich wartości n . Odpowiadająca moda własna wyrażona jest przez $\hat{\Phi}(\tau) \cos(2\pi n \theta / \alpha l_0)$ lub $\hat{\Phi}(\tau) \sin(2\pi n \theta / \alpha l_0)$.

4.2. Określenie obszarów rozwiązania równania różniczkowego.

W podobny sposób jak Hill i Hutchinson [9] przeprowadzimy klasyfikację obszarów rozwiązania równania bifurkacji, dla materiałów obejmujących związek konstytutywny (2.50). Rozdwojenie nastąpi gdy

$$\hat{F}(\alpha_{kr}, \hat{\Phi}) = 0. \quad (4.12)$$

Stąd po rozwinięciu wyrażenia podcałkowego (4.6) otrzymujemy:

$$0 = \int_0^{\alpha l_0} \int_{\bar{R}}^{R^+} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^4} + (2h - \bar{h}) \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{\tau^4} \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^4} + Q[\hat{\Phi}] \right\} \tau d\tau d\theta. \quad (4.13)$$

$Q[\hat{\Phi}]$ jest operatorem różniczkowym trzeciego rzędu, którego nie będziemy wyszczególniali. Spełnienie (4.12) i (4.13) pociąga za sobą zatem spełnienie przez potencjał $\hat{\Phi}(\tau, \theta)$ liniowego cząstkowego równania różniczkowego, czwartego rzędu:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{\tau^4} \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \tau^4} + Q[\hat{\Phi}] = 0. \quad (4.14)$$

Równanie to ma charakterystykę postaci $\varphi(\tau, \theta) = 0$, które możemy określić za pomocą wektora normalnego do nich o składowych fizycznych:

$$n_1 = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad n_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}. \quad (4.15)$$

Charakterystyki spełniają równanie charakterystyczne:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tau^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{\tau^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tau^4} = 0 \quad (4.16)$$

dla parametru $c=0$. Jeśli z postaci uwikłanej $\varphi(\tau, \theta)=0$ przejdziemy do postaci jawnej $\theta=f(\tau)$, to pochodną tej funkcji możemy wyrazić :

$$\theta' = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\tau \partial \theta}{\partial \varphi} = -\frac{\tau d\theta}{d\tau}$$

i wówczas otrzymujemy równanie charakterystyczne (4.16) postaci:

$$(\bar{h} + \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)(\theta')^4 + 2(2h - \bar{h})(\theta')^2 + (\bar{h} - \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) = 0. \quad (4.17)$$

Gdy (4.17) ma pierwiastki rzeczywiste, możemy skonstruować potencjał Φ , który spełnia (4.14) i ma ciągle pochodne drugiego rzędu wzdłuż charakterystyk. Klasyfikację obszarów rozwiązania równania różniczkowego (4.14) przeprowadzimy wprowadzając określenia stosowane w analizie układów równań cząstkowych. Mianowicie punkt pasma płytowego znajduje się w obszarze eliptycznym, jeżeli równanie (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeśli (4.17) ma dwa lub cztery pierwiastki rzeczywiste, to rozważany punkt znajduje się odpowiednio w obszarze parabolicznym, lub hiperbolicznym.

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem występują tylko dwa obszary w płycie: eliptyczny i paraboliczny, podczas gdy w rozwiązaniu Triantafyllidisa wystąpił również i obszar hiperboliczny.

Obszar eliptyczny

Równanie (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych, co równoważne jest warunkowi :

$$-2(2h - \bar{h}) \pm \sqrt{\Delta} < 0 \quad (4.18)$$

lub w szczególowej postaci:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} |\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2| + 2\bar{\sigma}_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} |\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2| + 2\bar{\sigma}_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \bar{\sigma}_y\right]^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} < 0 \quad (4.19)$$

Dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1, \mu = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ obszar eliptyczny zawiera się w granicach :

$$|\ln \alpha r| < 0,5 \quad (4.20)$$

Obszar paraboliczny

Równanie (4.17) ma dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \\
 & \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} = \\
 & = \begin{cases} > 0 & \text{strefa ściskana} \\ < 0 & \text{strefa rozciągana.} \end{cases} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

We wzorach (4.19) i (4.21) znak plus dotyczy strefy ściskanej, minus strefy rozciąganej.

Dla materiału o charakterystykach możemy określić obszar paraboliczny

$$|\ln \varepsilon_r| > 0,5. \quad (4.22)$$

4.3. Charakterystyki

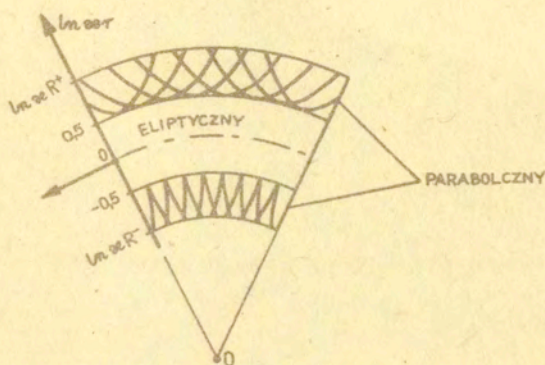
Równania charakterystyk dla (4.17) są następujące

$$\theta' = -\frac{r d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{\bar{h} - 2h \pm \sqrt{(\bar{h} - 2h)^2 - (\bar{h})^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}}{\bar{h} - (\sigma_2 - \sigma_1)}} \quad (4.23)$$

Stąd dla przyjętego modelu materiału otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \theta = \pm \int & \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \frac{1}{2\bar{\mu}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right] \frac{3}{2} (\sigma_2 - \sigma_1)}}} \\
 & \frac{+ \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2}{} d \ln \varepsilon_r. \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

W przypadku materiału $\bar{\mu} = 0,1\mu = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ i granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ naszkicowano na rysunku 12 kilka reprezentatywnych charakterystyk.



Rys.13. Krzywe charakterystyczne oraz obszary rozwiązania równania różniczkowego.

Z rysunku 13 widać, że w strefie rozciąganej charakterystyki są styczne do granicy E-P, natomiast w strefie ściskanej prostopadłe.

Płyta w przykładzie podanym przez Triantafyllidisa podzielona została na trzy podobszary, przy czym obszar hiperboliczny występuje między parabolicznym i eliptycznym. Charakterystyki w strefie rozciąganej są prostopadłe do granicy H-E, natomiast w strefie ściskanej są styczne.

Podstawową własnością charakterystyk w omawianym zagadnieniu jest ich występowanie po osiągnięciu pierwszego punktu bifurkacji. To stwierdzenie można wyrazić następująco: jeżeli w pewnym stanie deformacji określonym przez krzywiznę α , część ciała znajduje się w obszarze parabolicznym, wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt rozdwojenia dla $\alpha_{nr} \leq \alpha$. Podobne stwierdzenie dowiedzione zostało przez Rice [14] dla przypadku jednorodnego przedbifurkacyjnego pola naprężeń.

4.4. Krótkie długości fal

Jak stwierdzono w § 4.1. moda własna wyrażona jest w formie

$\Phi(\tau) \cos(2\pi n \Theta / \alpha l_0)$ lub $\Phi(\tau) \sin(2\pi n \Theta / \alpha l_0)$. Dla krótkich długości fal tzn. $n \rightarrow \infty$ krzywizną krytyczną α_{kr} , jak również i asymptotyczną formę mody własnej można wyznaczyć analitycznie.

Wariacyjna forma równania bifurkacji odpowiadająca parametrowi n jest postaci $\delta F_n = 0$, gdzie F_n dane jest przez (4.11). Stosując podstawienie $x = ln \alpha \tau$ otrzymujemy następujące równanie Eulera:

$$\begin{aligned} & [n^4(\bar{h} - \epsilon_1 + \epsilon_2) + O(n^2)] \Phi + O(n^2) \frac{d\Phi}{dx} + \\ & + [2n^2(\bar{h} - 2h) + O(1)] \frac{d^2\Phi}{dx^2} + O(1) \frac{d^3\Phi}{dx^3} + \\ & + [\bar{h} + \epsilon_1 - \epsilon_2] \frac{d^4\Phi}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\left. \begin{aligned} & [n^2(\bar{h} - \epsilon_1 - \epsilon_2)] \Phi + O(1) \frac{d\Phi}{dx} + (\bar{h} + \epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \\ & O(n^2) \Phi + [n^2(-4h + \bar{h} + \epsilon_1 + \epsilon_2) + O(1)] \frac{d\Phi}{dx} + \\ & + O(1) \frac{d^2\Phi}{dx^2} + [\bar{h} + \epsilon_1 - \epsilon_2] \frac{d^3\Phi}{dx^3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

dla $x = x^+ = ln \alpha R^+$ i $x = x^- = ln \alpha R^-$.

Dla dużych wartości n $\Phi(x)$ przyjmuje asymptotyczną reprezentację

$$\Phi(x) = A \exp [n^j f_j(x) + \dots + n f_1(x) + f_0(x) + n^{-1} f_{-1}(x) + \dots] \quad (4.27)$$

Z równania Eulera i warunków brzegowych grupując wyrażenia z tymi samymi potęgami n dochodzimy do wniosku, że dla $j > 1$ $f_j(x) = 0$, natomiast dla $j = 1$ $f_1(x)$ spełnia:

$$(\bar{h} - \epsilon_1 + \epsilon_2) + 2(\bar{h} - 2h) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^2 + (\bar{h} + \epsilon_1 - \epsilon_2) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^4 = 0. \quad (4.28)$$

Rozwiązanie równania (4.25) spełniające warunki brzegowe (4.26) można przedstawić dla dużych wartości n następująco:

$$\Phi(x) = A \exp [n f_{1a}(x)] + B \exp [n f_{1b}(x)], \quad (4.29)$$

gdzie $f_{1a}(x)$ i $f_{1b}(x)$ są dwoma rozwiązaniami (4.28). W rozważanym zagadnieniu funkcja $\Phi(x)$ musi być jednoznacznie ograniczona dla wszystkich n . Pociąga to za sobą spełnienie warunku $\operatorname{Re} [f_1(x)] < 0$. Gdy całe pasmo płytowe znajduje się w obszarze eliptycznym nie mamy pierwiastków rzeczywistych i rozwiązania (4.28) czynią wówczas zadość :

$$\operatorname{Re} \left[\frac{df_1}{dx} \right] < 0. \quad (4.30)$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy skrócony zapis:

$$\frac{df_1(x^-)}{dx} = \xi_a, \quad \frac{df_1(x^-)}{dx} = \xi_b \quad (4.31)$$

Z warunków brzegowych (4.26) dla $x = x^-$ uwzględniając (4.29) i (4.31) otrzymujemy:

$$(1 + \xi_a^2)A + (1 + \xi_b^2)B = 0$$

$$[(\bar{h} - 4h + \epsilon_2)\xi_a + (\bar{h} - \epsilon_2)\xi_a^3]A + [(\bar{h} - 4h + \epsilon_2)\xi_b + (\bar{h} - \epsilon_2)\xi_b^3]B = 0 \quad (4.32)$$

Zerowanie się wyznacznika podstawowego układu (4.32) zapewnia istnienie rozwiązań niezerowych :

$$(\bar{h} - 4h + \epsilon_2)(1 - \xi_a \xi_b) + (\bar{h} - \epsilon_2)(\xi_a^2 + \xi_b^2 + \xi_a \xi_b + \xi_a^2 \xi_b^2) = 0 \quad (4.33)$$

Z równania (4.28) przy oznaczeniach ξ_a i ξ_b dostajemy:

$$\xi_a \xi_b = \sqrt{\frac{\bar{h} + \epsilon_2}{\bar{h} - \epsilon_2}}, \quad \xi_a^2 + \xi_b^2 = \frac{2(2h - \bar{h})}{\bar{h} - \epsilon_2} \quad (4.34)$$

które w połączeniu z (4.28) umożliwia sformułowanie zależności:

$$\sqrt{\frac{\bar{h} - \epsilon_2}{\bar{h} + \epsilon_2}} = 1 - \frac{2h}{\bar{\epsilon}_2} \quad \text{dla } r = R^- \quad (4.35)$$

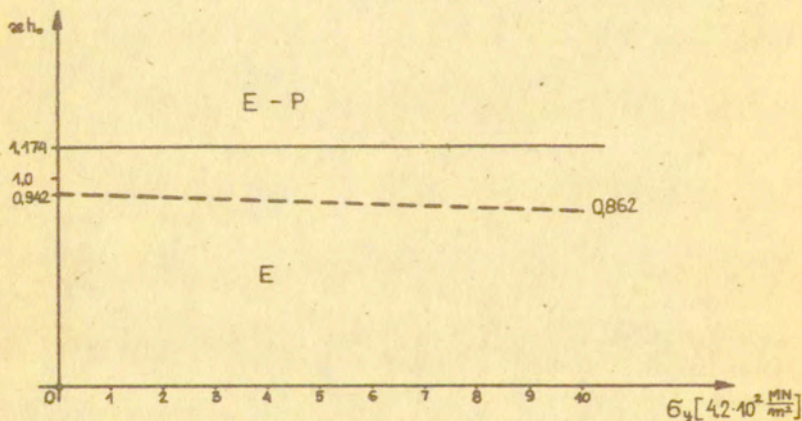
Warunki brzegowe (4.26) na końcu $x = x^+$ są również asymptotycznie spełnione, ponieważ $\operatorname{Re} [f_1(x)] < 0$, a więc dla dużych wartości n $\Phi(x)$ i jego pochodne dążą do zera zanikając w wąskiej strefie w pobliżu $x = x^-$.

Identyczne rozważania możemy przeprowadzić dla brzegu $x = x^+$.

Uwzględniając (2.55) , (2.56) , (3.15) w (4.35) otrzymujemy wzór do wyznaczania krzywej krytycznej odpowiadającej początkowemu punktowi bifurkacji :

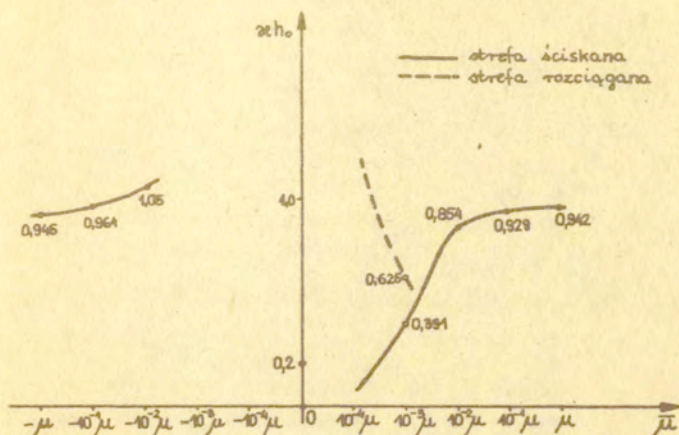
$$\sqrt{\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}} = \frac{\frac{8}{3} \bar{\mu} (\alpha-1) \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y (1-\frac{\bar{\mu}}{\mu})}{\frac{8}{3} \bar{\mu} \alpha \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y (1-\frac{\bar{\mu}}{\mu})} \quad (4.36)$$

gdzie znak plus dotyczy strefy rozciąganej, natomiast minus strefy ściskanej. Rozwiązując (4.36) znajdujemy pierwiastki odpowiadające niejednoznaczności procesu deformacji i możliwości pojawienia się powierzchni niestabilności. Zależność (4.36) od σ_y pokazano na rysunku 14.



Rys. 14. Krzywe krytyczne $\alpha_{cr} h_0$ odpowiadające pierwszym punktom rozdzielenia dla krótkich fal w zależności od σ_y dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1 \mu = 1,05 \cdot 10^{-4} \frac{MN}{m^2}$.

Zmienność zależności (4.36) od parametru wzmocnienia materiału $\bar{\mu}$ przedstawiono na rysunku 15.



Rys.15. Krzywizny krytyczne odpowiadające pierwszemu punktowi rozdzielenia dla krótkich fal w materiale o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ oraz $\mu = 1,05 \cdot 10^5 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ w zależności od parametru wzmocnienia $\bar{\mu}$.

Z wykresu widać, że jeśli w płycie pojawi się pierwsza krótkofalowa powierzchnia niestabilności, to zawsze będzie ona zlokalizowana w strefie ściskanej.

Dla rozważanego materiału sprężysto-plastycznego nie uzyskano początkowego punktu bifurkacji w przedziale $\langle -10^{-3}\bar{\mu}; 0 \rangle$ tzn: gdy współczynnik liniowego wzmocnienia $\bar{\mu}$ bliski jest zeru i materiał może być traktowany jako idealnie plastyczny. Zagadnieniem jednoznaczności zginania zajmował się między innymi Mielniczuk [13], który stwierdził, że niejednoznaczność może wystąpić, gdy kąt zgięcia określony ilorazem $\frac{R^+}{R^-}$ przekroczy wartość graniczną 1,25, co odpowiada stanowi zgięcia \bar{R} scharakteryzowanemu w niniejszej pracy przez $\alpha_{kr} = 2 \frac{1}{m}$ lub $\alpha_{kr} h_0 = 0,2$.

Lewa strona wykresu dotyczy materiału niestabilnego w sensie Druckera, tzn. parametr wzmocnienia $\bar{\mu}$ ma wartość ujemną, co możemy interpretować jako fakt, że stan naprężenia w konstrukcji osiągnął wartość powodującą np. degradację materiału konstrukcji i wówczas proces deformacji pasma następuje po niestatecznej drodze.

5. OMÓWIENIE WYNIKÓW I WNIOSKI

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że pierwsza powierzchnia niestabilności może pojawić się, gdy cała płyta znajduje się w obszarze eliptycznym rozwiązania podstawowego równania różniczkowego (4.14) podobnie jak w pracy Triantafyllidisa [20]. Również Bassani, Durban i Hutchinson [1] badając poddane ciśnieniu wydrążenie kuliste w nieskończonym ośrodku sprężysto-plastycznym stwierdzili, że krótkofalowa powierzchnia niestabilności jest pierwszym punktem bifurkacji pojawiającym się w ciągu procesu deformacji.

W rozważanym przypadku ciała wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem uzyskano zależność (4.36) określającą krzywiznę krytyczną odpowiadającą pierwszym punktem rozdzielenia jako funkcję cech fizycznych materiału σ_y , μ , $\bar{\mu}$ (rys.14, rys.15). Analiza wpływu σ_y na wartość krzywizny krytycznej wskazuje, że wraz ze wzmocnieniem się materiału, zależnym od historii obciążenia występuje w przypadku czystego zginania zmniejszenie się αh_0 . Obniżenie się wartości krzywizny krytycznej następuje również wraz ze zmniejszaniem się współczynnika $\bar{\mu}$ z wyłączeniem przedziału $\langle -40^{-3}\mu; 0 \rangle$.

Odpowiadająca krzywiznie krytycznej pierwsza powierzchnia niestabilności zawsze pojawia się najpierw w obszarze ściskającym pasma, podobnie jak w pracy Triantafyllidisa [20].

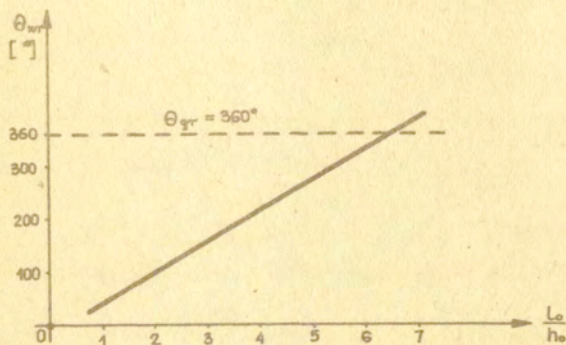
Uzyskane rozwiązanie ograniczone jest geometrią odkształcenia. Kąt zgięcia nie może przekraczać 360° . Graniczna krzywizna wynosi:

$$(\alpha h_0)_{gr} \frac{L_0}{h_0} \leq 360^\circ \quad (5.1)$$

Wartość kąta odpowiadającego dowolnej krzywiznie krytycznej możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$\theta_{kr} = (\alpha h_0)_{kr} \frac{L_0}{h_0} \leq 360^\circ \quad (5.2)$$

gdzie: l_0 i h_0 są długością oraz wysokością początkową pasma. Dla materiału o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ i module wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,1 \mu = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ zależność (5.2) ma przebieg jak na rysunku 16.



Rys.16. Wykres zależności kąta krytycznego θ_{kr} określający pierwszy punkt bifurkacji w zależności od $\frac{L_0}{h_0}$.

Z rys.16 wynika, że jeżeli $\frac{L_0}{h_0}$ wynosi 2, to krytyczny kąt zgięcia, przy którym może wystąpić pierwsza powierzchnia niestabilności jest równy 107° . Ponadto, gdy $\frac{L_0}{h_0}$ jest większe od 6,5 to pasmo możemy zgiąć do 360° bez obawy o utratę jednoznaczności procesu deformacji.

WYKAZ LITERATURY

1. Bassani, J.L., Durban, D., Hutchinson, J.W. 1979 Proc. Camb. Phil. Soc. 87, 339
2. Duszek M.K. 1980 Problems of Geometrically Non-linear Theory of Plasticity, Institut für Mechanik Ruhr-Universität Bochum.
3. Duszek M.K. i inni 1975 Zagadnienia pełzania i plastyczności, Wyd. PAN, 277
4. Hilbert D., Courant R. 1953 Methods of Mathematical Physics vol. 2, 577. Interscience, New York.
5. Hill R. 1950 The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford.
6. Hill R. 1957 J. Mech. Phys. Solids 5, 229.
7. Hill R. 1967 J. Mech. Phys. Solids 15, 79.
8. Hill R. 1978 Advances in Applied Mechanics, vol. 18, 1. Academic Press, New York.
9. Hill R., Hutchinson J.W. 1975 J. Mech. Phys. Solids 23, 239
10. Hutchinson J.W. 1973 J. Mech. Phys. Solids 21, 163
11. Hutchinson J.W. 1974 Advances in Applied Mechanics vol. 14, 67. Academic Press, New York.
12. Keeler S.P., Backofen W.A. 1963 Trans. Amer. Soc. Metals 56, 25.
13. Mielniczuk J. 1973 Praca doktorska, IPPT W-wa
14. Rice J.R. 1976 Proceedings of the 14th International Congress of Theoretical and Applied

Mechanics/Delft, 30 August-
4 September 1976/, /ed. by W.T.
Koiter/, vol. 1, 207, North-Holland
Amsterdam.

15. Sawczuk A, Mielniczuk J. 1975 ZAMM 55, 41, Akademie Verlag
GMBH, Berlin.
16. Shanley F.R. 1946 J. Aero-Sci 13, 678.
17. Shanley F.R. 1947 J. Aero-Sci 14, 261.
18. Storakers B. i inni 1975 Zagadnienia pełzania i plastycz-
ności, Wyd. PAN, 221.
19. Storen S, Rice J.R. 1975 J. Mech. Phys. Solids 23, 421.
20. Triantafyllidis N. 1980 J. Mech. Phys. Solids 28, 221.
21. Young N.J.B. 1976 J. Mech. Phys. Solids 24, 77.