

5.52 — fizyczne i mechaniczne własności
metali

7.72 — ogólne zagadnienia plastyczności

7.75 — mechanika sieci krystalicznej

Wiktor Gambin

**RÓWNANIA EWOLUCJI
OPISUJĄCE OBROTY SIECI
KRYSTALICZNEJ W POLIKRYSTALACH**

36/1986

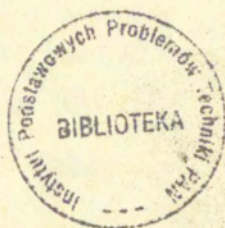
P.269



WARSZAWA 1986

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 października 1986 r.



56885



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,9 Ark.druk. 2,75
Oddano do drukarni w październiku 1986 r.
Nr zamówienia 564/86.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Wiktor Gambin

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

RÓWNANIA EWOLUCJI OPISUJĄCE OBROTY SIECI KRYSZTAŁICZNEJ W POLIKRYSZTAŁACH

Streszczenie

Rozważany jest polikryształ złożony z ziaren tego samego rodzaju, ale różnej początkowej orientacji ziaren. Badane jest zagadnienie obrotów sieci krystalicznej spowodowanych dużym odkształceniem plastycznym polikryształu. Przyjęto model materiału sprężysto-idealnie plastycznego, z parametrami wewnętrznymi opisującymi aktualną orientację sieci krystalicznej. Wykorzystując hipotezę dysypatywności normalnej, wprowadzonej w teorii materiałów standartowych uogólnionych, wyprowadzono równania ewolucji dla parametrów wewnętrznych. Aby je otrzymać, przyjęto dla polikryształu model Taylora oraz specjalny, anizotropowy warunek plastyczności. Wpływ obrotów sieci na plastyczne płynięcie przeanalizowano szczegółowo dla płaskiego stanu odkształcenia.

1. Wstęp

W literaturze dotyczącej plastycznego zachowania się metali można zaobserwować dwa kierunki [1]. Pierwszy, znany jako podejście fenomenologiczne, można uznać za matematyczny opis danych doświadczalnych w ramach ogólnych założeń mechaniki ośrodków ciągłych. W drugim, nazywanym podejściem fizycznym, autorzy próbują opisać makroskopowe zachowanie się metali poprzez analizę elementarnych mechanizmów deformacji na poziomie mikroskopowym. Podejście to począwszy od fundamentalnych prac

Taylora [2] i Sachsa [3], rozwijane następnie w wielu publikacjach [4-8], umożliwiło opis plastycznego płynięcia metali z uwzględnieniem obrotów sieci krystalicznej ziaren /np.[9] /. Wadą tego opisu jest konieczność analizowania każdego ziarna polikryształu. Jest to możliwe tylko poprzez symulację na maszynie cyfrowej całego procesu deformacji.

W podejściu fenomenologicznym, konieczność uwzględnienia mikrostruktury pojawia się przy analizie skończonych odkształceń plastycznych [10]. Duże deformacje plastyczne metali powodują duże obroty sieci krystalicznej. Obroty te mogą być opisane przez dodatkowe parametry wewnętrzne. Wykorzystując koncepcję reperu kierunków, wprowadzoną przez Mandela [11], podejście takie przedstawiono w pracy [12]. Jako zmienną opisującą strukturę materiału wprowadzono symetryczny tensor drugiego rzędu. Następnie, korzystając z teorii reprezentacji [13], zaproponowano równania ewolucji plastycznego spinu ośrodka. Podobne podejście zaproponowano w pracy [14].

W modelu przedstawionym w niniejszej pracy, jako dodatkowe parametry wewnętrzne przyjęto trzy kąty Eulera pomiędzy głównymi kierunkami sieci a osiami ustalonego układu współrzędnych. W dalszym ciągu polikryształ jest traktowany jako materiał standartowy uogólniony [15]. Podejście to umożliwia wprowadzenie konsekwentnego opisu zachowania się polikryształu. Opiszemy pokrótce drogę postępowania. Przede wszystkim zauważmy, że energia sprężysta i powierzchnia płynięcia pojedynczego kryształu zależą od orientacji jego sieci atomowej. Jeżeli przyjmiemy dla polikryształu założenia modelu Taylora [2] /równości lokalnych i globalnych odkształceń/ oraz pewien plastycznie anizotropowy warunek plastyczności /wyprowadzony z prawa Schmid'a dla monokryształu/, wówczas możemy otrzymać wyrażenie na energię swobodną i powierzchnię plastyczności dla całej próbki polikrystalicznej.

Energia swobodna, wyrażona poprzez odkształcenia sprężyste i parametry wewnętrzne, stanowi potencjał dla uogólnionych sił sprzężonych. Warunek plastyczności dla polikryształu umożliwia wprowadzenie potencjału plastycznego. Na tej podstawie, korzystając z hipotezy dysypatywności normalnej [15], możemy wypro-

wadzić równania ewolucji dla wszystkich parametrów wewnętrznych. Zgodnie z tą hipotezą każdy przyrost parametru wewnętrznego jest proporcjonalny do wektora normalnego do brzegu obszaru sprężystego w przestrzeni sił uogólnionych. Jeżeli brzeg ten ma naroże, wspomniany przyrost znajduje się pomiędzy dwiema normalnymi do powierzchni tworzących to naroże. Założenie to jest szczególnym przypadkiem zasady ortogonalności Zieglera [16].

Należy podkreślić, że zastosowanie hipotezy dysypatywności normalnej, ograniczone jest do przypadków, gdy powierzchnia plastyczności jest powierzchnią wypukłą w przestrzeni sił uogólnionych.

W toku rozważań przyjmujemy następujące ogólne założenia dotyczące polikryształu:

- i/ wszystkie ziarna mają te same własności;
- ii/ ziarna są sprężysto-idealnie plastyczne;
- iii/ odkształcenia sprężyste ziaren są małe;
- iv/ w próbce polikryształu wyróżniamy N grup ziaren o tej samej początkowej orientacji sieci;
- v/ udziały objętościowe tych grup w całej próbce nie ulegają zmianie w procesie deformacji;
- vi/ wszystkie ziarna tej samej grupy zmieniają orientację w ten sam sposób.

Otrzymane wyniki przeanalizowano na przykładzie próbki złożonej z wyidealizowanych ziaren znajdujących się w płaskim stanie odkształcenia. Dla próbki izotropowej, przyjęte warunki plastyczności sprowadzają się do kryterium Hubera-Misesa. Okazuje się, że polikryształ zbudowany ze sprężysto-idealnie plastycznych ziaren wykazuje efekt wzmocnienia lub osłabienia spowodowany orientacją sieci krystalicznej.

Ponadto, w przypadku jednoosiowego obciążenia próbki, początkowo dowolnie zorientowane sieci dążą do pewnych uprzywilejowanych orientacji.

Wydaje się, że powyższy model może opisywać rozwój tekstury w metalach, powszechnie obserwowany w badaniach metalurgicznych.

2. Oznaczenia

- g_{α}° - udział objętościowy γ -tej grupy ziaren;
 $\varphi_{i(\alpha)}$ - kąty Eulera γ -tej grupy ziaren; $i = 1, 2, 3$;
 $R_{ij(\alpha)}$ - tensor obrotu sieci γ -tej grupy ziaren;
 $f_{i(\alpha)}$ - siły uogólnione, sprzężone z $\varphi_{i(\alpha)}$;
 $\sigma_{ij(\alpha)}, \sigma_{ij}$ - lokalny i globalny tensor naprężeń Cauchy'ego;
 $\delta_{ij(\alpha)}, \delta_{ij}$ - lokalny i globalny dewiator tensora naprężeń Cauchy'ego;
 $e_{ij(\alpha)}, e_{ij}$ - lokalny i globalny tensor odkształceń sprężystych Almansi'ego;
 $d_{ij(\alpha)}, d_{ij}$ - lokalny i globalny tensor prędkości odkształceń plastycznych;
 k_c - graniczne naprężenie ścinające dla monokryształu;
 k - zmodyfikowane naprężenie ścinające dla monokryształu;
 K - graniczne naprężenie ścinające dla polikryształu;
 $\hat{L}_{ij\alpha k}$ - tensor modułów sprężystych dla ziarna, którego kierunki sieci pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych;
 $L_{ij\alpha k(\alpha)}$ - tensor modułów sprężystych dla ziarna, którego kierunki sieci opisane są kątami $\varphi_{i(\alpha)}$;
 $L_{ij\alpha k}$ - globalny tensor modułów sprężystych;
 $n_{i(\alpha)}$ - wektor normalny do płaszczyzny poślizgu, dla α -tego systemu poślizgu i γ -tej grupy ziaren;
 $m_{i(\alpha)}$ - wektor styczny do kierunku poślizgu na α -tym systemie poślizgu i γ -tej grupie ziaren;
 $\tau^{(\alpha)}$ - naprężenie ścinające Schmid'a na α -tym systemie poślizgu;
 $\hat{\kappa}_{ij\alpha k}^{(\alpha)}$ - tensor anizotropii plastycznej, odniesiony do α -tego systemu poślizgu, dla ziarna którego kierunki sieci pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych;

$\hat{\mathcal{L}}_{ijkl}^{(a)}$ - tensor anizotropii plastycznej, odniesiony do -tego systemu poślizgu, dla ziarna którego kierunki sieci opisane są kątami $\varphi_{i(r)}$;

$\bar{\mathcal{L}}_{ijkl}$ - globalny tensor anizotropii plastycznej uśredniony po wszystkich systemach poślizgu.

3. Energia swobodna monokryształu

Rozważmy pojedyncze ziarno należące do γ -tej grupy ziaren w polikryształe. Jeżeli kierunki sieci tego ziarna pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych, to jego własności sprężyste opisane są prawem Hooke'a

$$/3.1/ \quad \sigma_{ij(r)} = \hat{\mathcal{L}}_{ijkl} e_{kl(r)}.$$

gdzie $\sigma_{ij(r)}$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego, a $e_{ij(r)}$ sprężystą częścią całkowitego tensora odkształceń Almansi'ego. Jednakże, jeżeli kierunki sieci opisane są trzema kątami Eulera: $\varphi_{1(r)}$, $\varphi_{2(r)}$ i $\varphi_{3(r)}$, prawo to przyjmuje postać

$$/3.2/ \quad \sigma_{ij(r)} = \mathcal{L}_{ijkl(r)} e_{kl(r)},$$

gdzie

$$/3.3/ \quad \mathcal{L}_{ijkl(r)} = R_{mi(r)} R_{nj(r)} R_{pk(r)} R_{ql(r)} \hat{\mathcal{L}}_{mnpq},$$

a $R_{ij(r)}$ jest odpowiednim tensorem obrotu sieci.

W przypadku tym, macierz modułów sprężystych ziarna $\mathcal{L}_{ijkl(r)}$ zależy od orientacji jego sieci

$$/3.4/ \quad \mathcal{L}_{ijkl(r)} = \mathcal{L}_{ijkl(r)}(\varphi_{m(r)}).$$

Energia swobodna ziarna $\Phi(r)$, jest sumą energii sprężystej będącej funkcją $e_{ij(r)}$ oraz $\varphi_{m(r)}$

$$/3.5/ \quad \Phi(r) = \frac{1}{2} e_{ij(r)} \mathcal{L}_{ijkl(r)} e_{kl(r)},$$

oraz pewnej energii

/3.6/

$$\Phi''_{(r)} = \Phi''_{(r)} (\varphi_{m(r)}),$$

zmagazynowanej w ziarnie w wyniku zmiany orientacji jego sieci krystalicznej.

Zatem, stan kryształu opisany jest przez tensor odkształceń $\epsilon_{ij}^{(r)}$ i trzy parametry wewnętrzne: $\varphi_{1(r)}$, $\varphi_{2(r)}$ oraz $\varphi_{3(r)}$.

4. Powierzchnia plastyczności monokryształu

Podobnie jak poprzednio, założymy chwilowo, że kierunki sieci krystalicznej pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych.

Płynięcie plastyczne pojawi się jako wypadkowa deformacji na kilku systemach poślizgu. Oznaczając odpowiednio przez $\hat{m}_i^{(\alpha)}$ oraz $\hat{n}_i^{(\alpha)}$ składowe wektora stycznego i normalnego do płaszczyzny poślizgu, należącej do α -tego systemu poślizgu / $\alpha = 1, 2, \dots, M$ /, otrzymujemy naprężenie ścinające Schmid'a w postaci

/4.1/

$$\tau^{(\alpha)} = \hat{m}_i^{(\alpha)} \epsilon_{ij}^{(r)} \hat{n}_j^{(\alpha)}.$$

Z uwagi na ortogonalność wektorów $\hat{m}_i^{(\alpha)}$ oraz $\hat{n}_i^{(\alpha)}$, jak również ze względu na symetrię tensora $\epsilon_{ij}^{(r)}$, możemy napisać

/4.2/

$$\tau^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\hat{m}_i^{(\alpha)} \hat{n}_j^{(\alpha)} + \hat{n}_i^{(\alpha)} \hat{m}_j^{(\alpha)}) \epsilon_{ij}^{(r)}.$$

Zgodnie z prawem Schmid'a, dla każdego systemu poślizgu powinien być spełniony warunek:

/4.3/

$$-k_c \leq \tau^{(\alpha)} \leq k_c; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Warunki /4.3/ mogą być napisane w postaci

/4.4/

$$[\tau^{(\alpha)}]^2 \leq k_c^2; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

lub w postaci

$$/4.5/ \quad \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \Delta_{kl}(\nu) \leq k_c^2 ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie macierz

$$/4.6/ \quad \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv \frac{1}{4} (\hat{m}_i^{(\alpha)} \hat{n}_j^{(\alpha)} + \hat{n}_i^{(\alpha)} \hat{m}_j^{(\alpha)}) (\hat{m}_k^{(\alpha)} \hat{n}_l^{(\alpha)} + \hat{n}_k^{(\alpha)} \hat{m}_l^{(\alpha)}),$$

może być uważana za macierz tensora anizotropii plastycznej związanego z α -tym systemem poślizgu.

Jeżeli kierunki sieci ziarna opisane są kątami Eulera:

$\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$ oraz $\varphi_3(\nu)$, to warunki plastyczności /4.5/ przyjmą postać:

$$/4.7/ \quad S_{ij}(\nu) \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \Delta_{kl}(\nu) \leq k_c^2 ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie

$$/4.8/ \quad \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv R_{mi}(\nu) R_{nj}(\nu) R_{pk}(\nu) R_{ql}(\nu) \hat{H}_{mnpq}^{(\alpha)},$$

a $R_{ij}(\nu)$ jest odpowiednim tensorem obrotu sieci. Oznacza to, że tensory plastycznej anizotropii $\hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)}$ zależą od kątów $\varphi_i(\nu)$, dla $i = 1, 2, 3$.

Patrząc na wzory /4.6/ i /4.8/ widzimy, że tensory $\hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)}$ mają następujące własności /porównaj z [17] /:

$$/4.9/ \quad \begin{cases} \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} = \hat{H}_{klij}^{(\alpha)} = \hat{H}_{jikl}^{(\alpha)}, \\ \hat{H}_{ijkl}^{(\alpha)} \delta_{kl} = 0. \end{cases}$$

W przestrzeni naprężeń, wspólna część nierówności /4.7/ określa powierzchnię plastyczności i zarazem brzeg obszaru sprężystego.

Ustalmy położenie kierunków sieci względem kierunków głównych tensora naprężeń. Wówczas powierzchnia plastyczności jest nieskończenie długim graniastostupem o krawędziach równoległych do linii ciśnień. Dla zmieniających się kierunków sieci, otrzymamy trójparametrową rodzinę takich graniastostupów.

W dalszym ciągu, zamiast odcinkowo-liniowego prawa Schmid'a wprowadzimy jego kwadratową aproksymację.

Sumując stronami nierówności /4.7/, w których prawe strony pomnożone są przez pewien modyfikujący współczynnik m , otrzymamy

$$/4.10/ \quad s_{ij}^{(n)} \bar{H}_{ijkl}^{(n)} s_{kl}^{(n)} \leq k^2,$$

gdzie

$$/4.11/ \quad k \equiv m \cdot k_c,$$

oraz

$$/4.12/ \quad \bar{H}_{ijkl}^{(n)} \equiv \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^M H_{ijkl}^{(n)\alpha},$$

jest nowym uśrednionym tensorem anizotropii plastycznej kryształu. Współczynnik m dobieramy tak, aby nowa, gładka powierzchnia plastyczności niewiele odbiegała od opisanej prawem Schmid'a. W przypadku ciała izotropowego, stosując powyższą operację do warunku Tresca i biorąc

$$/4.13/ \quad m = \sqrt{2/3},$$

otrzymamy warunek Hubera-Misesa. Można pokazać [18], że dla kryształów kubicznych f.c.c. przy wartości

$$/4.14/ \quad m = 1,$$

odchylenie od prawa Schmid'a nie przekracza 35%. Tak duże wartości odchylenia pojawiają się tylko w niektórych narożach warunku plastyczności, gdzie prawo Schmid'a niezbyt dokładnie opisuje dane doświadczalne [19].

Ostatecznie zamiast trójwymiarowej rodziny graniastosłupów w przestrzeni naprężeń, otrzymaliśmy trójwymiarową rodzinę walców o przekroju eliptycznym i tworzących równoległych do linii ciśnienia.

5. Model polikryształu

Podstawowym zagadnieniem w opisie polikryształu jest znalezienie związków pomiędzy wielkościami lokalnymi i globalnymi opisującymi zachowanie materiału.

Aby otrzymać te związki, konieczne jest wprowadzenie dodatkowych założeń.

W modelu Taylora [2], odkształcenia sprężyste są zaniechywane, natomiast lokalne i globalne odkształcenia plastyczne przyjmowane są jako sobie równe.

Założenia te umożliwiają spełnienie warunków geometrycznej zgodności, ale nie pozwalają na spełnienie warunków lokalnej równowagi naprężeń. Pomimo to, wyniki otrzymane przy powyższych założeniach są zgodne z wynikami doświadczeń w zakresie dużych deformacji plastycznych, dla większości metali.

Model statyczny [8] zakłada równość naprężeń lokalnych i globalnych. Zgodność odkształceń jest zaniechywana w tym podejściu. Dla pewnych materiałów założenie to daje dość dobre wyniki.

W naszym modelu przyjmujemy następujące dodatkowe założenia:

1^o wszystkie lokalne odkształcenia sprężyste są równe odkształceniu sprężystemu globalnemu:

$$/5.1/ \quad e_{ij}^e(\alpha) = e_{ij}^e \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N;$$

2^o wszystkie lokalne prędkości odkształceń plastycznych są równe globalnej prędkości odkształceń plastycznych:

$$/5.2/ \quad d_{ij}^p(\alpha) = d_{ij}^p \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N;$$

3^o globalne warunki plastyczności mają postać:

$$/5.3/ \quad \Delta_{ij} \bar{\mathcal{H}}_{ij\alpha\epsilon} \Delta_{\alpha\epsilon} \leq k^2,$$

gdzie Δ_{ij} jest dewiatorem globalnego tensora naprężeń Cauchy'ego σ_{ij} , k jest zmodyfikowanym granicznym naprężeniem ścinającym, takim samym dla wszystkich ziaren dzięki założeniu /5.2/, natomiast $\bar{\mathcal{H}}_{ij\alpha\epsilon}$ jest średnią wartością lokalnego

tensora anizotropii plastycznej $\bar{H}_{ijkl}(r)$, tzn.

$$/5.4/ \quad \bar{H}_{ijkl} \equiv \sum_{\gamma=1}^N g_{\gamma}^0 \bar{H}_{ijkl}(\gamma).$$

Zgodnie z /4.7/ globalne tensory anizotropii plastycznej zależą od obrotów sieci wszystkich ziaren w polikryształe

$$/5.5/ \quad \bar{H}_{ijkl} = \bar{H}_{ijkl}(\varphi_{m(\alpha)}, \dots, \varphi_{m(\alpha)}); \quad m = 1, 2, 3.$$

W przestrzeni naprężeń, warunki /5.3/ opisują powierzchnię płynięcia i brzeg obszaru sprężystego dla polikryształu.

Przyjmując, że naprężenie globalne σ_{ij} jest średnią naprężeń lokalnych

$$/5.6/ \quad \sigma_{ij} \equiv \sum_{\gamma=1}^N g_{\gamma}^0 \sigma_{ij}^{\gamma},$$

oraz biorąc pod uwagę /5.1/ i /3.2/, możemy napisać

$$/5.7/ \quad \sigma_{ij} = L_{ijkl} e_{kl},$$

gdzie

$$/5.8/ \quad L_{ijkl} = \sum_{\gamma=1}^N g_{\gamma}^0 L_{ijkl}(\gamma).$$

Zgodnie z /3.3/, globalny tensor modułów sprężystych L_{ijkl} , również zależy od obrotów wszystkich ziaren w polikryształe:

$$/5.9/ \quad L_{ijkl} = L_{ijkl}(\varphi_{m(\alpha)}, \dots, \varphi_{m(\alpha)}); \quad m = 1, 2, 3.$$

Globalna energia swobodna polikryształu Φ , jest sumą energii sprężystej

$$/5.10/ \quad \Phi' = \frac{1}{2} e_{ij}^e L_{ijkl} e_{kl}^e,$$

oraz energii zmagazynowanej na skutek obrotów sieci krystalicznej ziaren

$$/5.11/ \quad \Phi'' = \sum_{\gamma=1}^N \Phi''_{(\gamma)} (\varphi_{m(\gamma)}).$$

Liczne wyniki badań doświadczalnych pokazują, że wpływ obrotów ziaren polikryształu na jego własności sprężyste jest niewielki. Dlatego w dalszym ciągu przyjmujemy założenie

$$/5.12/ \quad \Phi' = \Phi'(e_{ij}^e),$$

które bardzo uprości dalsze rozważania. Założenie to prowadzi do opisu równoważnemu opisowi kryształu jako materiału złożonego z ziaren sztywno-idealnie plastycznych [20].

6. Równania ewolucji opisujące obroty sieci

Zgodnie z teorią materiałów standartowych uogólnionych [15] energia swobodna Φ jest potencjałem dla naprężeń

$$/6.1/ \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}^e},$$

oraz dla sił uogólnionych

$$/6.2/ \quad f_{i(\gamma)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{i(\gamma)}}; \quad \gamma = 1, 2, \dots, N,$$

sprężonych z $\varphi_{i(\gamma)}$.

Do dalszej analizy potrzebne będą zależności

$$/6.3/ \quad \varphi_{i(\gamma)} = \varphi_{i(\gamma)}(e_{mn}^e, f_{k(\alpha)}, \dots, f_{k(N)}); \quad \gamma = 1, 2, \dots, N.$$

Procedura przez nas przyjęta może być użyta, jeżeli siły uogólnione są wzajemnie jednoznacznymi funkcjami odpowiednich parametrów wewnętrznych. Ma to miejsce dla $\varphi_{i(\gamma)}$ spełniających układ warunków:

$$/6.4/ \quad \det \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_{i(\gamma)} \partial \varphi_{j(\gamma)}} \neq 0.$$

Założenie /5.12/ sprowadza związek /6.2/ do zależności

$$/6.5/ \quad f_{i(x)} = \frac{\partial \Phi_{(x)}}{\partial \varphi_{i(x)}}$$

Oznacza to, że związki łączące $f_{i(x)}$ z $\varphi_{i(x)}$ można znaleźć na podstawie analizy pojedynczego ziarna polikryształu.

Warunki plastyczności /5.3/ generują uśredniony potencjał plastyczny dla stowarzyszonej prędkości plastycznego płynięcia

$$/6.6/ \quad \bar{F} \equiv \frac{1}{2} (\Delta_{ij} \bar{H}_{ijkl} \Delta_{kl} - k^2).$$

Potencjał ten wyrażony poprzez siły uogólnione, tworzy uśredniony potencjał sił sprzężonych:

$$/6.7/ \quad \bar{G} \equiv \frac{1}{2} (\Delta_{ij} \bar{G}_{ijkl} \Delta_{kl} - k^2),$$

gdzie tensory

$$/6.8/ \quad \begin{aligned} \bar{G}_{ijkl} (f_{n(1)}, \dots, f_{n(N)}) &\equiv \\ &\equiv \bar{H}_{ijkl} [\varphi_{n(1)}(f_{n(1)}), \dots, \varphi_{n(N)}(f_{n(N)})], \end{aligned}$$

mogą być obliczone na podstawie /6.3/, jeżeli spełniony jest warunek /6.4/.

Zgodnie z hipotezą dysypatywności normalnej mamy:
1^o stowarzyszone prawo płynięcia

$$/6.9/ \quad d_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \bar{G}}{\partial \delta_{ij}} ;$$

2^o równania ewolucji dla kątów Eulera

$$/6.10/ \quad - \dot{\varphi}_{i(x)} = \lambda \frac{\partial \bar{G}}{\partial f_{i(x)}} ;$$

gdzie $(\dot{})$ oznacza pochodną materialną.

Funkcja skalarna λ przyjmuje wartości dodatnie, dla

$$/6.11/ \quad \bar{F} = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{F} \geq 0,$$

znika w pozostałych przypadkach i może być obliczona z warunku zgodności

$$/6.12/ \quad \dot{\bar{F}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi_{i(\alpha)}} \dot{\varphi}_{i(\alpha)} = 0.$$

Podstawiając /6.9 - 6.10/ do /6.12/ otrzymujemy następujące równanie dla wielkości λ :

$$/6.13/ \quad \lambda = \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi_{i(\alpha)}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi_{j(\alpha)}} \frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial f_{i(\alpha)}}$$

Zauważmy, że polikryształ, zbudowany z ziaren sprężysto-idealnie plastycznych, może wykazywać wzmocnienie lub osłabienie wywołane reorientacją sieci krystalicznej.

Wzory /6.9 - 6.10/ można napisać w postaci

$$/6.14/ \quad d_{ij}^p = \lambda \bar{H}_{ijkl} s_{kl},$$

$$/6.15/ \quad -\dot{\varphi}_{i(\alpha)} = \lambda s_{mn} \frac{\partial \bar{H}_{mnlk}}{\partial \varphi_{j(\alpha)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{i(\alpha)}}{\partial f_{i(\alpha)}} s_{kl}.$$

Związki /6.15/ są słuszne tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek /6.4/, a więc w pewnym ograniczonym zakresie zmienności $\varphi_{i(\alpha)}$.

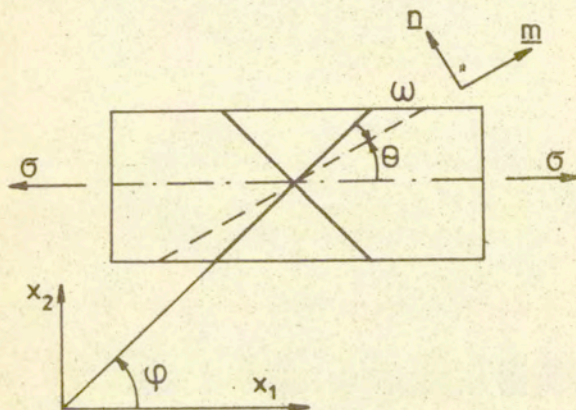
W następnym punkcie pracy powyższe rozważania zilustrujemy na przykładzie płaskiego stanu odkształcenia.

7. Płaski stan odkształcenia

7.1. Przypadek pojedynczego kryształu z jednym systemem poślizgu

Sprawą zasadniczą jest poprawność otrzymanych wyników w przypadku zastosowania ich do analizy zachowania się monokryształu.

W rzeczywistych kryształach mamy do czynienia z przestrzennymi systemami poślizgu, z którymi związane są przestrzenne stany deformacji. Rozważmy rozciąganie wyidealizowanego monokryształu z jednym systemem poślizgu, w którym oś rozciągania, kierunek poślizgu \underline{m} i normalna \underline{n} leżą w jednej płaszczyźnie /Rys.1/.



Rys.1. Rozciąganie wyidealizowanego monokryształu z jednym systemem poślizgu.

Kąt φ opisuje nachylenie jednego z kierunków sieci do osi rozciągania, a kąt Θ nachylenie kierunku poślizgu do tej osi. Dla wartości kąta

/7.1/

$$\Theta = n \frac{\pi}{2} ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kierunek poślizgu jest równoległy albo prostopadły do kierunku rozciągania. Zachowanie się kryształu będzie w pełni opisane,

jeżeli ograniczymy się do

$$/7.2/ \quad -\frac{\pi}{2} < \Theta < 0$$

Ponieważ, zgodnie z rys.1

$$/7.3/ \quad \varphi = \Theta + \omega,$$

gdzie

$$/7.4/ \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2},$$

ograniczenie /7.2/ jest równoważne następującemu:

$$/7.5/ \quad -\frac{\pi}{2} + \omega < \varphi < \omega.$$

Obrót sieci względem przyjętego układu współrzędnych zadany jest poprzez macierz

$$/7.6/ \quad R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

System poślizgu definiuje para wektorów \underline{m} , \underline{n} o składowych

$$/7.7/ \quad m_i = \begin{Bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$/7.8/ \quad n_i = \begin{Bmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Niezerowe składowe \bar{H}_{ijk} są następujące:

/7.9/

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{H}_{1111} &= \bar{H}_{2222} = -\bar{H}_{1122} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta, \\ \bar{H}_{1112} &= -\bar{H}_{2212} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta, \\ \bar{H}_{1212} &= \frac{1}{4} \cos^2 2\theta. \end{aligned} \right.$$

Potencjał plastyczny zdefiniowany wyrażeniem

/7.10/

$$\bar{F} = \frac{1}{2} (\lambda_j \bar{H}_{ijmn} s_{kn} - k^2),$$

przyjmuje teraz postać

/7.11/

$$\bar{F} = \frac{1}{8} [(s_{11} - s_{22})^2 \sin^2 2\theta + 2(s_{11} - s_{22}) s_{12} \sin 4\theta + 4s_{12}^2 \cos^2 2\theta] - \frac{1}{2} k^2.$$

Zgodnie ze wzorami /6.14 - 6.15/ otrzymujemy stowarzyszone prawo płynięcia

/7.12/

$$d_{11}^p = -d_{22}^p = \frac{1}{4} \lambda \bar{\epsilon} \sin^2 2\theta,$$

/7.13/

$$d_{12}^p = \frac{1}{8} \lambda \bar{\epsilon} \sin 4\theta,$$

oraz równanie ewolucji kąta θ ,

/7.14/

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{4} \lambda \bar{\epsilon}^2 (\sin 4\theta) \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}.$$

Występującą w powyższych wzorach funkcję λ można określić na podstawie wzoru /6.13/,

/7.15/

$$\lambda = \frac{1}{\cos^2 2\theta} \cdot \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}^3} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}.$$

Związek między siłą uogólnioną f a kątem Θ wyprowadzimy później.

Podstawiając /7.15/ do /7.14/ otrzymujemy następujący związek:

$$/7.16/ \quad \dot{\Theta} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} \operatorname{tg} 2\Theta.$$

Wzór /7.16/ można otrzymać niezależnie, na drodze elementarnych rozważań geometrycznych. Ponieważ naprężenie styczne τ , działające w płaszczyźnie poślizgu, związane jest z naprężeniem rozciągającym i kierunkiem poślizgu Θ , wzorem

$$/7.17/ \quad \tau = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\Theta,$$

a kryształ jest idealnie plastyczny to

$$/7.18/ \quad \dot{\tau} = \frac{1}{2} \dot{\sigma} \sin 2\Theta + \dot{\Theta} \sigma \cos 2\Theta = 0,$$

co jest równoważne /7.16/.

Na podstawie podobnie prostych rozważań można znaleźć związek pomiędzy kątem Θ a zmianą długości rozciąganego monokryształu /por.n.p.[21]/

$$/7.19/ \quad \frac{l}{l_0} = \frac{\sin \Theta_0}{\sin \Theta},$$

gdzie przez l_0 oraz l oznaczono odpowiednio początkową i końcową długość ziarna, a przez Θ_0 początkowe nachylenie kierunku poślizgu. Ponieważ

$$/7.20/ \quad d_{ll}^p = \frac{\dot{l}}{l} = - \frac{(\sin \Theta)^{\circ}}{\sin \Theta} = - \dot{\Theta} \operatorname{ctg} \Theta,$$

to biorąc pod uwagę /7.14/ i porównując /7.20/ z /7.12/, otrzymujemy

$$/7.21/ \quad \frac{\partial f}{\partial \Theta} = 2\sigma \frac{\cos 2\Theta}{1 - \cos 2\Theta}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do /7.15/, mamy

$$/7.22/ \quad \lambda = 2 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)}$$

Aby funkcja λ była nieujemna musi zachodzić

$$/7.23/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} < 0, \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}, \\ \dot{\sigma} = 0, \quad \text{dla} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}, \\ \dot{\sigma} > 0, \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < 0. \end{array} \right.$$

Powyższy wynik wskazujący na osłabienie monokryształu dla kątów θ mniejszych od $-\frac{\pi}{4}$, a wzmocnienie dla większych od $-\frac{\pi}{4}$ jest dobrze znany /por.n.p.[21]/.

Jeżeli potraktujemy wielkość d_n^p jako zmienną niezależną, to z zależności /7.20/ otrzymujemy związek

$$/7.24/ \quad \dot{\theta} = -d_n^p \tan \theta.$$

Widzimy, że

$$/7.25/ \quad \dot{\theta} > 0, \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0,$$

oraz

$$/7.26/ \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \dot{\theta} = 0.$$

Oznacza to, że podczas deformacji kierunek poślizgu zbliża się do kierunku rozciągania.

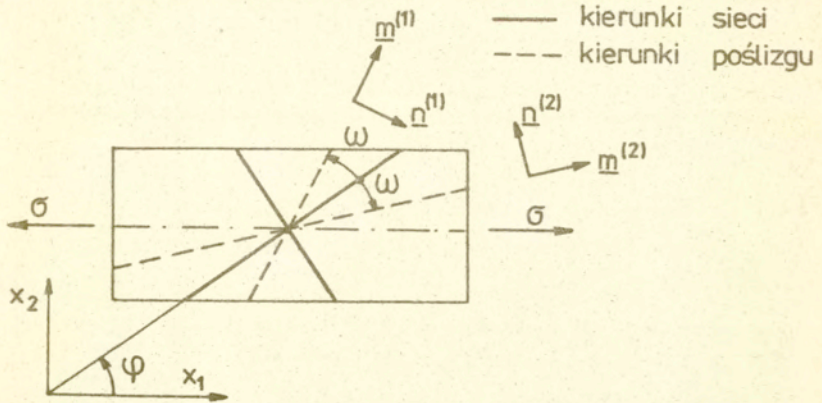
7.2. Przypadek pojedynczego kryształu z dwoma systemami poślizgu

7.2.1. Zależności ogólne

Rys.2 przedstawia wyidealizowany monokryształ z dwoma systemami poślizgu rozciągany w kierunku osi X_1 .

Dwa kierunki poślizgu odchylone są symetrycznie o kąt ω od

jednego z kierunków sieci.



Rys.2. Rozciąganie wyidealizowanego monokryształu z dwoma systemami poślizgu.

W przeciwieństwie do kryształu z jednym systemem poślizgu rozpatrywany model ulega uplastycznieniu dla dowolnej wartości kąta φ , jeżeli tylko kierunki poślizgu nie są ortogonalne.

Przyjmując zamiast prawa Schmid'a kwadratowy potencjał plastyczności /6.6/, dopuszczamy możliwość poślizgu na obu systemach, przy dowolnej orientacji sieci. W modelu klasycznym jest to możliwe tylko wtedy, gdy oś symetrii kierunków poślizgu pokrywa się z osią rozciągania.

Dalszą analizę przeprowadzimy dla dowolnej wartości kąta ω z przedziału

$$/7.27/ \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku znajdziemy

$$/7.28/ \quad m_i^{(\alpha)} = \begin{Bmatrix} \cos \Theta^{(\alpha)} \\ \sin \Theta^{(\alpha)} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \alpha = 1, 2,$$

/7.29/

$$\eta_i^{(\alpha)} = (-1)^\alpha \begin{Bmatrix} -\sin \theta^{(\alpha)} \\ \cos \theta^{(\alpha)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad ; \alpha = 1, 2,$$

gdzie

/7.30/

$$\begin{cases} \theta^{(1)} = \varphi + \omega, \\ \theta^{(2)} = \varphi - \omega. \end{cases}$$

Ponieważ

/7.31/

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{1111}^{(\alpha)} = \mathcal{H}_{2222}^{(\alpha)} = -\mathcal{H}_{1122}^{(\alpha)} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta^{(\alpha)}, \\ \mathcal{H}_{1112}^{(\alpha)} = -\mathcal{H}_{2212}^{(\alpha)} = -\frac{1}{8} \sin 4\theta^{(\alpha)}, \\ \mathcal{H}_{1212}^{(\alpha)} = \frac{1}{4} \cos^2 2\theta^{(\alpha)}, \end{cases}$$

to po uśrednieniu, otrzymamy

/7.32/

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{H}}_{1111} = \bar{\mathcal{H}}_{2222} = -\bar{\mathcal{H}}_{1122} = \\ = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega), \\ \bar{\mathcal{H}}_{1112} = -\bar{\mathcal{H}}_{2212} = \frac{1}{8} \sin 4\varphi \cos 4\omega, \\ \bar{\mathcal{H}}_{1212} = \frac{1}{8} (1 + \cos 4\varphi \cos 4\omega). \end{cases}$$

Uśredniony potencjał plastyczny przyjmie postać

/7.33/

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \frac{1}{16} [(S_{11} - S_{22})^2 (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega) + \\ & - 4 (S_{11} - S_{22}) S_{12} \sin 4\varphi \cos 4\omega + \\ & + 4 S_{12}^2 (1 + \cos 4\varphi \cos 4\omega)] - \frac{1}{3} k. \end{aligned}$$

Składowe $d\dot{\gamma}^p$ oraz równanie ewolucji kąta φ , dane są wzorami

$$/7.34/ \quad d_{11}^P = -d_{22}^P = \frac{1}{8} \lambda b (1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega),$$

$$/7.35/ \quad d_{12}^P = -\frac{1}{8} \lambda b \sin 4\varphi \cos 4\omega,$$

$$/7.36/ \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{4} \lambda b^2 (\sin 4\varphi \cdot \cos 4\omega) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial f}.$$

Funkcję λ obliczamy ze wzoru

$$/7.37/ \quad \lambda = 2 \cdot \frac{f}{b^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega}{\sin^2 4\varphi \cos^2 4\omega},$$

w którym należy określić związek pomiędzy siłą uogólnioną f i kątem φ .

Związek ten, podobnie jak w poprzednim przypadku, zostanie wyprowadzony na podstawie rozważań geometrycznych opisanych w Dodatku.

Na koniec, zauważmy że porównując wzory /7.36/ i /7.37/ otrzymujemy uogólnienie wzoru /7.16/

$$/7.38/ \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f}{b^3} \cdot \frac{1 - \cos 4\varphi \cos 4\omega}{\sin 4\varphi \cos 4\omega}.$$

7.2.2. Przypadek ortogonalnych płaszczyzn poślizgu

Mamy

$$/7.39/ \quad \omega = \frac{\pi}{4}.$$

Teraz, na obu płaszczyznach poślizgu naprężenie ścinające osiąga jednocześnie tę samą wartość krytyczną k_c .

Zachowanie się kryształu można zatem opisać przy założeniu, że słuszne jest klasyczne prawo Schmid'a, bez wprowadzenia uśrednionego potencjału plastycznego. Ponadto, uzasadnionym wydaje się być założenie, że jednakowym wartościom k_c na obu systemach poślizgu odpowiadają jednakowe wartości poślizgów γ ⁽⁴⁾

oraz $\gamma^{(2)}$. Wówczas wzory /D.15/ oraz /7.35/ prowadzą do wniosku, że jeżeli

$$/7.40/ \quad \varphi = (2n + 1) \frac{\pi}{4} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

to kryształ nie może się uplastyczyć, ponieważ jedna z płaszczyzn poślizgu jest równoległa, a druga prostopadła do kierunku rozciągania.

Wzory /D.16/, /D.27/ i /7.38/, mówią o tym, że jeżeli

$$/7.41/ \quad \varphi = n \frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

to obie płaszczyzny poślizgu nachylone są symetrycznie pod kątem 45° do kierunku rozciągania. Pojawia się nieustalone płygnięcie plastyczne, a sieć krystaliczna przestaje się obracać, tzn.

$$/7.42/ \quad \dot{\epsilon} = \dot{\varphi} = 0.$$

Rozważmy przypadek gdy

$$/7.43/ \quad \varphi \neq n \frac{\pi}{4} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wówczas, zgodnie ze wzorem /D.30/

$$/7.44/ \quad \dot{\varphi} = -d_{11}^p \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Biorąc pod uwagę /7.36/ i podstawiając /7.34/ do /7.44/, dostajemy

$$/7.45/ \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}.$$

Podstawiając /7.45/ do /7.37/ otrzymujemy

$$/7.46/ \quad \lambda = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi}.$$

Aby funkcja λ była nieujemna, kryształ powinien ulegać osłabieniu dla każdej badanej wartości kąta φ .

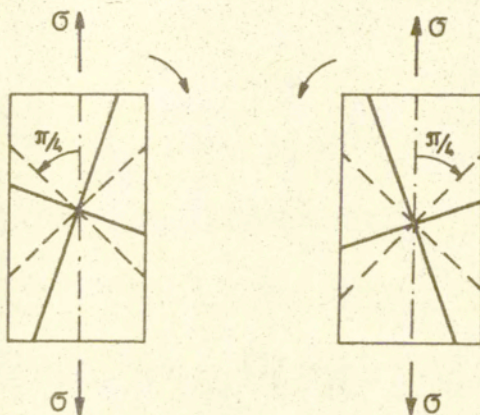
Ze wzoru /7.44/ widzimy, że

$$/7.47/ \quad \dot{\varphi} > 0, \text{ dla } (2n-1) \cdot \frac{\pi}{4} < \varphi < n \cdot \frac{\pi}{2},$$

oraz

$$/7.48/ \quad \dot{\varphi} < 0, \text{ dla } n \cdot \frac{\pi}{2} < \varphi < (2n+1) \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Oznacza to, że podczas plastycznej deformacji, oba kierunki poślizgu starają się zbliżyć do kierunków nachylonych symetrycznie pod kątem 45° do osi rozciągania /Rys.3/.



Rys.3. Kierunki obrotu sieci krystalicznej w rozciągającym monokryształe o dwóch ortogonalnych systemach poślizgu.

7.2.3. Przypadek kryształu plastycznie izotropowego

Zauważmy, że dla

$$/7.49/ \quad \omega = \frac{\pi}{8},$$

lub

$$/7.50/ \quad \omega = \frac{3}{8}\pi,$$

uśredniony tensor anizotropii plastycznej ma składowe

/7.51/

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{H}}_{1111} = \bar{\mathcal{H}}_{2222} = -\bar{\mathcal{H}}_{1122} = \bar{\mathcal{H}}_{1212} = \frac{1}{8}, \\ \bar{\mathcal{H}}_{1112} = \bar{\mathcal{H}}_{2212} = 0, \end{cases}$$

a odpowiadający mu potencjał plastyczny ma postać

/7.52/

$$\bar{F} = \frac{1}{16} (s_{11} - s_{22})^2 + \frac{1}{8} s_{12}^2 - \frac{1}{2} k^2.$$

Składowe tensora d_{ij}^p , dane są wzorami

/7.53/

$$\begin{cases} d_{11}^p = \frac{1}{8} \lambda \delta, \\ d_{12}^p = 0. \end{cases}$$

Niezależność tensora $\bar{\mathcal{H}}_{ijkl}$, potencjału \bar{F} oraz prawa płynięcia od kąta φ , stanowi o izotropii plastycznej badanego kryształu. Fakt ten uniemożliwia otrzymanie równania ewolucji kąta φ , oraz wyrażenia na funkcję λ , w ramach przedstawionego formalizmu.

Możemy jednak otrzymać te równania z rozważań czysto geometrycznych /por./D.28//

/7.54/

$$\dot{\varphi} = -d_{11}^p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2\varphi, \quad \text{gd}y \quad \omega = \frac{\pi}{8},$$

oraz

/7.55/

$$\dot{\varphi} = d_{11}^p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2\varphi, \quad \text{gd}y \quad \omega = \frac{3\pi}{8}.$$

Wskazuje to na interesujące zjawisko obrotu sieci krystalicznej w rozciągany monokryształ, plastycznie izotropowym. W przypadku gdy ω przyjmuje wartość $\frac{\pi}{8}$, widzimy że

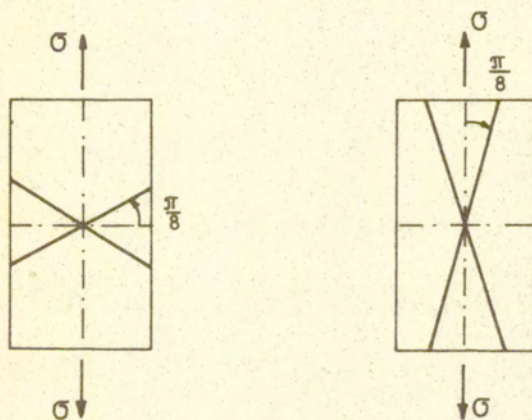
$$\dot{\psi} > 0, \text{ dla } (2n-1) \cdot \frac{\pi}{4} < \varphi < n \cdot \frac{\pi}{2},$$

/7.56/ $\dot{\psi} = 0, \text{ dla } \varphi = n \frac{\pi}{2},$

$$\dot{\psi} < 0, \text{ dla } n \frac{\pi}{2} < \varphi < (2n+1) \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli ω przyjmuje wartość $\frac{3}{8}\pi$, znaki $\dot{\psi}$ w odpowiednich przedziałach zmienności kąta φ , ulegają zmianie na przeciwnie.

Oznacza to, że oś symetrii kierunków poślizgu stara się zbliżyć do kierunku równoległego, lub prostopadłego do osi rozciągania /Rys.4/.



Rys.4. Graniczne położenie płaszczyzn poślizgu dla $\omega = \frac{\pi}{8}$.

7.2.4. Pozostałe przypadki

Niech kąt ω należy do jednego z czterech przedziałów

$$/7.57/ \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega < \frac{\pi}{8}, \\ \frac{\pi}{8} < \omega < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3}{8}\pi, \\ \frac{3}{8}\pi < \omega < \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Jeżeli podczas deformacji, kąt φ osiąga wartości

$$/7.58/ \quad \varphi^* \equiv (4n \pm 1) \cdot \frac{\pi}{4}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

zgodnie ze wzorem /7.35/, prędkość odkształceń postaciowych zmienia znak

$$/7.59/ \quad d_{12}^p |_{\varphi=\varphi^*} = 0.$$

W tych przypadkach mamy /por./D.28//

$$/7.60/ \quad d_{11}^p |_{\varphi=\varphi^*} = \mp \dot{\varphi} |_{\varphi=\varphi^*} \cdot \cos \omega.$$

Zatem, jeżeli kryształ deformuje się plastycznie, to

$$/7.61/ \quad \dot{\varphi} |_{\varphi=\varphi^*} \neq 0.$$

Z drugiej strony ze wzoru /7.38/ wynika, że musi zachodzić

$$/7.62/ \quad \dot{\sigma} |_{\varphi=\varphi^*} = 0.$$

Mamy więc, w rozpatrywanych przypadkach do czynienia z niepowstrzymywanym plastycznym płynięciem, przy jednoczesnym obrocie sieci krystalicznej.

Podobnie jeżeli

$$/7.63/ \quad \varphi = \varphi^* \equiv n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

to

$$/7.64/ \quad d_{12}|_{\varphi=\varphi^{**}} = 0.$$

Podstawiając do /D.28/ powyższy wynik, otrzymujemy

$$/7.65/ \quad \dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi^{**}} = 0.$$

Porównując /7.62/ ze wzorem /7.38/ widzimy, że musi zachodzić

$$/7.66/ \quad \dot{\sigma}|_{\varphi=\varphi^{**}} = 0.$$

Mamy więc do czynienia z niewowstrzymywanym plastycznym płynięciem, bez obrotu sieci krystalicznej.

Kąty φ^{**} stanowią graniczne wartości kąta φ osiągnane w procesie deformacji. Oznacza to, że oś symetrii kierunków poślizgu stara się zbliżyć do kierunku równoległego lub prostopadłego do osi rozciągania.

Dla wszystkich wartości kąta φ różnych od φ^* i φ^{**} , związek pomiędzy d_n^p i $\dot{\varphi}$ jest dobrze określony.

Jeżeli ograniczymy się do zbadania dwóch przypadków opisanych w pracy [22], a mianowicie
- "płaskiego modelu f.c.c.", gdy

$$/7.67/ \quad \omega = \frac{\pi}{6},$$

- "płaskiego modelu b.c.c.", gdy

$$/7.68/ \quad \omega = \frac{\pi}{3},$$

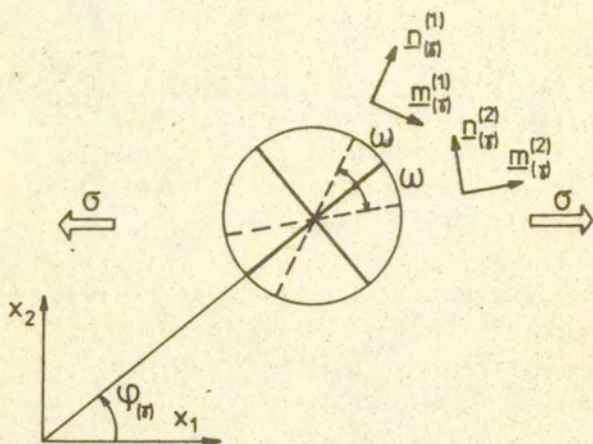
to okaże się, że sieci kryształów w obu rozpatrywanych przypadkach, obracają się w przeciwne strony przy tych samych wartościach początkowych kąta φ .

7.3. Przypadek N grup ziaren z dwoma systemami poślizgu

7.3.1. Zależności ogólne

Rozważmy próbkę polikrystaliczną, złożoną z N grup identycznych ziaren o różnej początkowej orientacji, rozciąganą w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Udział objętościowy γ -tej grupy ziaren oznaczmy przez $q_{(\gamma)}^0$.

Położenie kierunków poślizgu w pojedynczym ziarnie jest opisane podobnie jak w p.7.2.1., natomiast lokalny stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(r)}$, wywołany globalnym naprężeniem rozciągającym jest nieznaną /Rys.5/.



Rys.5. Pojedyncze ziarno rozciągane polikryształu.

Mając obliczone wielkości $\bar{\mathcal{H}}_{ijkl}^{(r)}$ /wzory /7.32/, dla φ równego $\varphi_{(r)}$, obliczamy globalny tensor anizotropii plastycznej

$$/7.69/ \quad \bar{\mathcal{H}}_{ijkl} = \sum_{\gamma=1}^N q_{(\gamma)}^0 \bar{\mathcal{H}}_{ijkl}^{(r)},$$

a następnie związany z nim potencjał plastyczny

/7.70/

$$\bar{F} = \frac{1}{16} \sum_{\gamma=1}^N g_{(\gamma)}^0 [(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 (1 - \cos 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega) +$$

$$- 4(\lambda_{11} - \lambda_{22}) \lambda_{12} \sin 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega +$$

$$+ 4\lambda_{12}^2 (1 + \cos 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega)] - \frac{1}{2} k^2$$

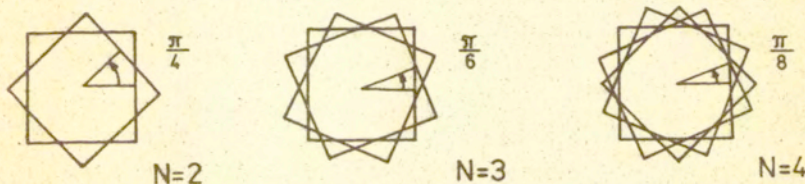
Przy szczególnym wzajemnym ułożeniu sieci ziaren w próbce
/Rys.6/, gdy

/7.71/
$$\varphi_{(i+1)} = \varphi_{(i)} + \frac{\pi}{3N} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

dla dowolnego $\varphi_{(1)}$ oraz

/7.72/
$$g_{(\gamma)}^0 = \frac{1}{N} \quad ; \quad \gamma = 1, 2, \dots, N,$$

polikryształ staje się materiałem plastycznie izotropowym.



Rys.6. Szczególne orientacje sieci prowadzące do plastycznej izotropii polikryształu.

Istotnie, ponieważ

/7.73/
$$\cos 4\varphi_{(1)} + \cos(4\varphi_{(1)} + \frac{2\pi}{N}) + \dots + \cos(4\varphi_{(1)} + 2\pi \cdot \frac{N-1}{N}) = 0,$$

oraz

/7.74/
$$\sin 4\varphi_{(1)} + \sin(4\varphi_{(1)} + \frac{2\pi}{N}) + \dots + \sin(4\varphi_{(1)} + 2\pi \cdot \frac{N-1}{N}) = 0,$$

to, zgodnie ze wzorami /5.4/ i /7.32/

$$\begin{cases} \bar{H}_{1111} = \bar{H}_{2222} = -\bar{H}_{1122} = \bar{H}_{1212} = \frac{1}{8}, \\ \bar{H}_{1112} = \bar{H}_{2212} = 0. \end{cases}$$

Potencjał plastyczny sprowadza się w tych przypadkach do izotropowego potencjału Hubera-Misesa w płaskim stanie odkształcenia

$$/7.76/ \quad F_{H-H} = \frac{1}{16} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 - 4K^2],$$

gdzie

$$/7.77/ \quad K = k \cdot \sqrt{2},$$

jest globalnym granicznym naprężeniem ścinającym dla izotropowej próbki polikrystalicznej.

W pracy [23] Bishop i Hill opierając się na modelu Taylora szczegółowo zbadali zachowanie się polikryształu zbudowanego z ziaren typu f.c.c. Między innymi oszacowano stosunek rozciągających naprężeń uplastyczniających polikryształa

$$/7.78/ \quad \sigma_y = 2 \cdot K$$

do naprężeń ścinających pojedynczy kryształ k_c . Otrzymano wartość 2,86.

W naszym przypadku, biorąc pod uwagę /4.11/, /4.14/ oraz /7.77/, otrzymujemy

$$/7.79/ \quad \frac{\sigma_y}{k_c} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,83,$$

co daje jednoprocetową różnicę w stosunku do wyniku Bishopa i Hilla.

Wrócimy do ogólnej sytuacji opisanej wzorem /7.70/. Zgodnie z /6.14 - 6.15/, otrzymujemy

$$/7.80/ \quad d_{11}^p = -d_{22}^p = \frac{1}{8} \lambda \sigma \cdot \sum_{\gamma=1}^N g_{(\gamma)}^0 (1 - \cos 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega),$$

$$/7.81/ \quad d_{12}^p = -\frac{1}{8} \lambda \sigma \cdot \sum_{\gamma=1}^N g_{(\gamma)}^0 \sin 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega,$$

$$/7.82/ \quad \dot{\varphi}_{(\delta)} = -\frac{1}{4} \lambda \sigma^2 \cdot \sin 4\varphi_{(\delta)} \cos 4\omega \cdot \frac{\partial \varphi_{(\delta)}}{\partial f_{(\delta)}}.$$

Funkcję obliczamy ze wzoru

$$/7.83/ \quad \lambda = 2 \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{\sum_{\gamma=1}^N g_{(\gamma)}^0 (1 - \cos 4\varphi_{(\gamma)} \cos 4\omega)}{\sum_{\gamma=1}^N g_{(\gamma)}^0 \cdot \frac{\partial \varphi_{(\gamma)}}{\partial f_{(\gamma)}} \cdot \sin^2 4\varphi_{(\gamma)} \cos^2 4\omega}.$$

W powyższych wzorach należy określić wyrażenie $\frac{\partial \varphi_{(\delta)}}{\partial f_{(\delta)}}$, dla

$$/7.84/ \quad \delta = 1, 2, \dots, N.$$

W tym celu zauważmy, że dla dowolnego, lokalnego stanu naprężenia w kryształach $\sigma_{ij}^p(\delta)$, wielkości $\varphi_{(\delta)}$ oraz $\dot{\varphi}_{(\delta)}$, związane są z wielkościami $d_{ij}^p(\delta)$ wzorem /D.28/

$$/7.85/ \quad d_{11}^p(\delta) \sin 2\varphi_{(\delta)} - d_{12}^p(\delta) \cos 2\varphi_{(\delta)} + \\ + (d_{12}^p(\delta) + \dot{\varphi}_{(\delta)}) \cos 2\omega = 0,$$

gdą

$$/7.86/ \quad \omega \neq \frac{\pi}{4},$$

lub wzorem /D.30/

$$/7.87/ \quad \dot{\varphi}_{(\delta)} = -d_{11}^p(\delta) \operatorname{tg} 2\varphi_{(\delta)},$$

gdy

/7.88/

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

Podstawiając /7.80 - 7.81/ do tych wzorów otrzymujemy odpowiednio:

- w pierwszym przypadku

/7.89/

$$\frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial f_{(s)}} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot \sin 4\varphi_{(s)} \cos 2\omega} \cdot \sum_{r=1}^N g_{(r)}^0 [(1 - \cos 4\varphi_{(r)}) \cdot \sin 2\varphi_{(s)} + \sin 4\varphi_{(r)} \cdot (\cos 2\varphi_{(s)} - \cos 2\omega)],$$

- w drugim przypadku

/7.90/

$$\frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial f_{(s)}} = \frac{-1}{4 \cdot 5 \cdot \cos^2 2\varphi_{(s)}} \cdot \sum_{r=1}^N g_{(r)}^0 (1 + \cos 4\varphi_{(r)}).$$

Tak więc, widzimy, że wzór /7.82/ łącznie z /7.83/ oraz /7.89/ lub /7.90/, w pełni opisuje ewolucję kątów $\varphi_{(s)}$, dla każdego z ziaren polikryształu. Podobnie jak w przypadku pojedynczego kryształu można śledzić zachowanie się materiału przy różnych wartościach kąta ω .

Na zakończenie, zwracamy uwagę, że powyższy opis bazujący na hipotezie dyssypatywności normalnej, prowadzi do tych samych wyników co model kryształu sztywno-idealnie plastycznego przedstawiony w pracach [18] i [20].

7.3.2. Przypadek dwóch grup ziaren o ortogonalnych systemach poślizgu

Aby zilustrować otrzymane wyniki, rozpatrzmy polikryształ zbudowany z dwóch grup ziaren o ortogonalnych systemach poślizgu, początkowej orientacji opisanej kątem

/7.91/

$$\varphi^0 = \varphi_{(s)}^0 = -\varphi_{(s)}^0 \neq \frac{1}{4} \cdot (2n+1) \cdot \pi; \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

udziałach objętościowych

$$/7.92/ \quad g_{(1)}^0 = g_{(2)}^0 = \frac{1}{2},$$

który poddany jest jednoosiowemu rozciąganiu wzdłuż osi x_1 ,

/Rys. 7a/.

Ponieważ

$$/7.93/ \quad \omega = \frac{\pi}{4},$$

to zgodnie z /7.82/ i /7.90/, mamy

$$\begin{aligned} /7.94/ \quad \dot{\varphi}_{(1)} &= -\frac{1}{8} \lambda \epsilon \cdot \operatorname{tg} 2\varphi_{(1)} \cdot [1 + \\ &+ \cos 2(\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}) \cos 2(\varphi_{(1)} - \varphi_{(2)})]; \\ \delta &= 1, 2. \end{aligned}$$

Widzimy, że rozwiązań powyższych równań różniczkowych, dla warunków początkowych

$$/7.95/ \quad \varphi_{(1)}(t_0) = -\varphi_{(2)}(t_0) = \varphi^0,$$

można poszukiwać w klasie funkcji

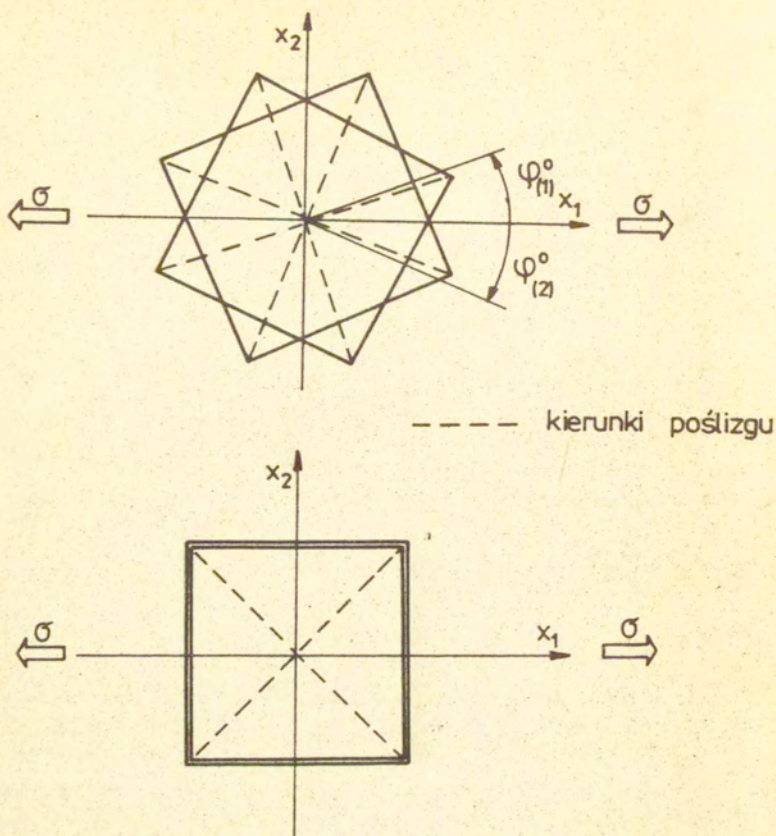
$$/7.96/ \quad \varphi_{(1)}(t) = -\varphi_{(2)}(t) \equiv \varphi(t).$$

Wówczas, /7.94/ przyjmuje postać

$$/7.97/ \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{8} \lambda \epsilon \cdot \sin 4\varphi,$$

a /7.90/, sprowadza się do zależności

$$/7.98/ \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{26}.$$



Rys.7. Zachowanie się ziaren próbki polikrystalicznej;
 a/ stan początkowy, b/ stan graniczny.

Podstawiając /7.92 - 7.93/, /7.96/ oraz /7.98/ do /7.83/,
 otrzymujemy

/7.99/
$$\lambda = -2 \cdot \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sin^2 2\varphi},$$

co podstawione ponownie do /7.98/, daje

/7.100/
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\sigma}} \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi.$$

Ponieważ funkcja λ jest nieujemna, polikryształ ulega osłabieniu w procesie rozciągania, o ile

$$/7.101/ \quad \varphi \neq n \cdot \frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

W przeciwnym przypadku, mamy do czynienia z niepowstrzymywanym plastycznym płynięciem, a sieci ziaren polikryształu nie obracają się, tzn.

$$/7.102/ \quad \dot{\epsilon} = \dot{\varphi} = 0.$$

O ile warunek /7.101/ jest spełniony, to

$$/7.103/ \quad d_{11}^p = -d_{22}^p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\varphi}} \cdot \operatorname{tg}^2 2\varphi,$$

$$/7.104/ \quad d_{12}^p = 0.$$

Porównując /7.103/ z /7.100/, mamy

$$/7.105/ \quad \dot{\varphi} = -d_{11}^p \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Otrzymaliśmy wzór identyczny z /7.44/, z którego wynikają wnioski analogiczne do /7.47 - 7.48/. Ich konsekwencją jest fakt, że kierunki sieci ziaren polikryształu dążą do uprzywi-
lejowanej orientacji pokazanej na rys.7b.

DODATEK: Związek prędkości obrotu sieci ze składowymi tensora prędkości deformacji, dla rozciąganego monokryształu o dwóch systemach poślizgu

A. Wyrażenie d_{ij}^p i ω_{ij}^p przez $\dot{\gamma}^{(a)}$ i $\dot{\gamma}^{(a)}$.

Rozważmy rozciągany monokryształ o dwóch systemach poślizgu /Rys.2/. Wprowadzimy dwa pomocnicze, kartezjańskie, prawoskrętne układy współrzędnych $\{\hat{x}_1^{(a)}, \hat{x}_2^{(a)}\}$ oraz $\{\hat{x}_1^{(a')}, \hat{x}_2^{(a')}\}$, takie że osie $\hat{x}_1^{(a)}$ oraz $\hat{x}_1^{(a')}$ są równoległe odpowiednio do wektorów $m^{(a)}$ oraz $m^{(a')}$.

Ponadto wprowadzimy trzeci kartezjański prawoskrętny układ współrzędnych $\{\xi_1, \xi_2\}$ w którym oś ξ_1 pokrywa się z kierunkiem sieci, od którego mierzony jest kąt ω .

Układ ten związany jest z wyjściowym układem odniesienia $\{x_1, x_2\}$, wzorami

$$/D.1/ \quad x_i = R_{ij}(-\varphi) \cdot \xi_j = R_{ji}(\varphi) \cdot \xi_j; \quad i, j = 1, 2,$$

gdzie macierz R_{ij} pokrywa się z macierzą daną wzorem /7.6/, jeżeli w tej ostatniej pominiemy trzecią kolumnę i trzeci wiersz.

Ponadto zachodzą związki

$$/D.2/ \quad \xi_i = R_{ij}(-\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a)} = R_{ji}(\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a)},$$

$$/D.3/ \quad \xi_i = R_{ij}(\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a')} = R_{ji}(-\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a')},$$

oraz

$$/D.4/ \quad x_i = R_{ki}(\varphi) \cdot R_{jk}(\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a)} = R_{ji}(\varphi + \omega) \cdot \hat{x}_j^{(a)},$$

$$/D.5/ \quad x_i = R_{ki}(\varphi) \cdot R_{jk}(-\omega) \cdot \hat{x}_j^{(a')} = R_{ji}(\varphi - \omega) \cdot \hat{x}_j^{(a')}.$$

Rozważmy dwa niezależne procesy czystego ścinania monokryształu, kolejno w kierunkach $m^{(a)}$ oraz $m^{(a')}$ z prędkościami poślizgu

lizgu odpowiednio: $\dot{\gamma}^{(1)}$ oraz $\dot{\gamma}^{(2)}$.

Wówczas przyrosty współrzędnych $\hat{x}_i^{(1)}$ oraz $\hat{x}_i^{(2)}$ od odpowiednich poślizgów będą następujące /por. [21]/:

$$\text{/D.6/} \quad \dot{\hat{x}}_i^{(1)} = -\dot{\gamma}^{(1)} \cdot a_{ij} \cdot \hat{x}_j^{(1)},$$

oraz

$$\text{/D.7/} \quad \dot{\hat{x}}_i^{(2)} = \dot{\gamma}^{(2)} \cdot a_{ij} \cdot \hat{x}_j^{(2)},$$

gdzie

$$\text{/D.8/} \quad a_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli rozpatrywać jednoczesny poślizg na obu systemach poślizgu, to można przyjąć, że wypadkowa prędkość cząstki o współrzędnych $\{\xi_1, \xi_2\}$ jest następująca /por. /D.2/ i /D.3//

$$\text{/D.9/} \quad \dot{\xi}_i = R_{ji}(\omega) \cdot \dot{\hat{x}}_j^{(1)} + R_{ji}(-\omega) \cdot \dot{\hat{x}}_j^{(2)}.$$

Ponieważ, zgodnie z /D.1/

$$\text{/D.10/} \quad \dot{x}_i = R_{ji}(\varphi) \xi_j + R_{ji}(\varphi) \dot{\xi}_j,$$

to podstawiając do /D.10/ wzory /D.2 - D.5/, otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{/D.11/} \quad \dot{x}_1 &= \frac{1}{2} \cdot [\dot{\gamma}^{(1)} \sin 2(\varphi + \omega) - \dot{\gamma}^{(2)} \sin 2(\varphi - \omega)] x_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \{-\dot{\gamma}^{(1)} [\cos 2(\varphi + \omega) + 1] + \\ &+ \dot{\gamma}^{(2)} [\cos 2(\varphi - \omega) + 1] - 2\dot{\varphi}\} x_2, \end{aligned}$$

/D.12/

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\dot{\gamma}^{(1)} [\cos 2(\varphi + \omega) - 1] + \right. \\ & \left. + \dot{\gamma}^{(2)} [\cos 2(\varphi + \omega) - 1] + 2\dot{\varphi} \right\} \cdot x_1 + \\ & - \frac{1}{2} \cdot \left[\dot{\gamma}^{(1)} \sin 2(\varphi + \omega) - \dot{\gamma}^{(2)} \sin 2(\varphi - \omega) \right] \cdot x_2. \end{aligned}$$

Korzystając ze związków

/D.13/

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right) = d_{ij}^P,$$

/D.14/

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right),$$

gdzie d_{ij} jest całkowitym tensorem prędkości deformacji, a ω_{ij} całkowitym spinem otoczenia włókna materialnego, otrzymujemy

/D.15/

$$d_{11}^P = -d_{22}^P = a \cos 2\varphi \sin 2\omega + b \sin 2\varphi \cos 2\omega,$$

/D.16/

$$d_{12}^P = a \sin 2\varphi \sin 2\omega - b \cos 2\varphi \cos 2\omega,$$

/D.17/

$$\omega_{12} = -b - \dot{\varphi},$$

gdzie

/D.18/

$$a \equiv \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}^{(1)} + \dot{\gamma}^{(2)}),$$

/D.19/

$$b \equiv \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}^{(1)} - \dot{\gamma}^{(2)}).$$

B. Wyrażenie $\dot{\psi}$ przez $\dot{\gamma}^{(1)}$ i $\dot{\gamma}^{(2)}$.

Zwróćmy uwagę, że w rozciągającym monokryształe, włókna równoległe do osi X_1 nie obracają się w procesie plastycznej deformacji. Zapiśzemy ten warunek w postaci analitycznej. Rozważmy dwie, bliskie sobie cząstki materialne, leżące na włóknie równoległym do pewnego wektora \underline{N} . Różnicę prędkości tych cząstek oznaczmy przez $d\underline{v}$. Jeżeli włókno nie obraca się to składowa $d\underline{v}$ do niego prostopadła znika. Zatem

/D.20/
$$d\underline{v}_i - N_i \cdot (d\underline{v}_j \cdot N_j) = 0.$$

Ponieważ

/D.21/
$$d\underline{v}_j \equiv (d_{jk} + \omega_{jk}) \cdot N_k,$$

oraz

/D.22/
$$\omega_{jk} \cdot N_k \cdot N_j \equiv 0,$$

otrzymujemy

/D.23/
$$(d_{ij} + \omega_{ij}) \cdot N_j = N_i \cdot d_{jk} \cdot N_k \cdot N_j$$

W naszym przypadku

/D.24/
$$N_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Zatem, warunek /D.23/ przyjmuje postać

/D.25/
$$d_{12} = d_{12}^p = \omega_{12},$$

który po uwzględnieniu /D.15/ i /D.17/ daje

/D.26/
$$\dot{\psi} = -a \sin 2\varphi \sin 2\omega + b (\cos 2\varphi \cos 2\omega - 1),$$

gdzie a oraz b zdefiniowane są przez /D.18 - D.19/. Bezpośrednie porównanie /D.25/ z /D.17/ daje zależność

$$/D.27/ \quad \dot{\varphi} = -d_{12} - b.$$

C. Związek pomiędzy $\dot{\varphi}$ a d_{ij}^p

Porównując /D.15 - D.16/ z /D.27/ otrzymujemy

$$/D.28/ \quad d_{11} \sin 2\varphi - d_{12} \cos 2\varphi + (d_{12} + \dot{\varphi}) \cos 2\omega = 0.$$

Powyższy wzór jest poszukiwanym związkiem między $\dot{\varphi}$ i d_{ij}^p , jeżeli ω jest różne od $\frac{\pi}{4}$. Gdy

$$/D.29/ \quad \omega = \frac{\pi}{4},$$

to zgodnie ze wzorem /7.17/, naprężenia ścinające $\tau^{(1)}$ i $\tau^{(2)}$ na obu systemach poślizgu, są takie same.

Przyjmując, że dysypacja na każdym z systemów jest również taka sama, otrzymamy równość prędkości poślizgów $\dot{\gamma}^{(1)}$ i $\dot{\gamma}^{(2)}$. Powoduje to znikanie wielkości b we wzorze /D.27/.

Ostatecznie, w rozpatrywanym przypadku wzory /D.15 - D.16/ oraz /D.27/ prowadzą do relacji

$$/D.30/ \quad \dot{\varphi} = -d_{11} \operatorname{tg} 2\varphi.$$

L I T E R A T U R A

1. T.H.Lin, Physical theory of plasticity, Adv.Appl.Mech. 11, 256-300, 1971.
2. G.I.Taylor, Plastic strain in metals, J.Inst.Metals 62, 1, 307-324, 1938.
3. G.Sachs, Zur ableitung einer fleissbedingung, Ver.Deut.Ing. Z., 72, 734, 1928.
4. T.H.Lin, Analysis of elastic and plastic strain of a free-centered cubic crystal, J.Mech.Phys.Solids, 5, 143-159, 1957.
5. E.Kröner, Zur plastischen verformung des vielkristals, Acta Met., 2, 155, 1961.
6. R.Hill, Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, J.Mech.Phys.Solids, 13, 89-101, 1965.
7. J.W.Hutchinson, Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites, Proc.Roy.Soc. /ser.A/, 319, 247-272, 1970.
8. A.Zaoui, Thèse, Paris, 1970.
9. M.Berveiller, A.Zaoui, An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals, J.Mech.Phys. Solids, 28, 325-344, 1979.
10. J.Mandel, Plasticite Classique et Viscoplasticite, Udine, 1971.
11. J.Mandel, Généralisation de la théorie de plasticité de W.T. Koiter, Int.J.Solids Structures, 1, 273-295, 1965.
12. Y.F.Dafalias, A missink link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformation, in Plasticity Today, ed A.Sawczuk, G.Bianchi, CISM, Udine, 1983.
13. C.C.Wang, A new representation theorem for isotropic functions, A.R.M.A. 36, 166-223, 1970.
14. E.H.Lee, R.L.Mallett, T.B.Wertheimer, Stress analysis for anisotropic hardening in finite - deformation plasticity, J.Appl.Mech. 50, 3, 554-560, 1983.

15. B.Halphen, Nguyen Quoc Son, Sur les matériaux standards généralisé, *Journal de Mécanique* 14, 1, 39-63, 1975.
16. H.Ziegler, Some extremum principle in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics, *Progress in Solid Mechanics*, 4, North Holland Pub., Amsterdam, 1963.
17. W.Olszak, W.Urbanowski, The tensor of module of plasticity, *Bull.Acad.Polon Sci.,Cl.4*, 5, 1, 39-45, 1957.
18. W.Gambin, A.simplified model of rigid-ideally plastic crystal, w przygotowaniu.
19. J.Diehl, Zugverformung von Kupfer Einkristallen, *Z.Metallk.* 47, 5, 331-343, 1956.
20. W.Gambin, A model of rigid-ideally plastic crystal, złożone w red. *Journal of Technical Physics*.
21. E.Schmid, W.Boas, *Plasticity of Crystals*, F.A.Hughes, London.
22. R.J.Asaro, Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals, *Acta Metall.* 27, 445-453, 1979.
23. J.F.Bishop, R.Hill, *Phil.Mag.* 42, ser.7, 1298-1307, 1951.