

Tadeusz Sawicki

20 / 1982

**OCENA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH UGIĘĆ
KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH
O ELEMENTACH PODDANYCH ZGINANIU
ORAZ SKRĘCANIU
Z UWZGLĘDNIENIEM ROZCIĄGŁOŚCI
STREF PLASTYCZNYCH**

P. 269



WARSZAWA 1982

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 grudnia 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 20/1982



57054



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 2,25. Ark.druk. 3,25.

Oddano do drukarni w maju 1982 r.

Nr zamówienia 276/0/82 | Z-108 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Sniadeckich 8

Tadeusz Sawicki
Zakład Teorii Konstrukcji

OCENA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH UGIĘĆ KONSTRUKCJI
PRĘTOWYCH O ELEMENTACH PODDANYCH ZGINANIU ORAZ
SKRĘCANIU, Z UWZGLĘDNIENIEM ROZCIĄGŁOŚCI STREF
PLASTYCZNYCH

1. WPROWADZENIE

Obliczanie sprężysto-plastycznych ugięć konstrukcji napotyka, nawet w prostych przypadkach, na znaczne trudności rachunkowe [1]. Problem komplikuje się jeszcze bardziej, jeżeli obciążenia działające na konstrukcję nie są stałe, lecz mogą zmieniać się dowolnie w zadanych z góry granicach. Ten właśnie przypadek najczęściej występuje przy projektowaniu.

Istnieją już [4],[5],[6], metody ogólne, pozwalające oszacować od góry maksymalne ugięcia, które mogą wystąpić przy dowolnej drodze zmian obciążeń, we wspomnianych powyżej, z góry zadanych granicach. Jednakże w odniesieniu do konstrukcji prętowych/belki, ramy, ruszty/, podawane dotychczas oceny maksymalnych ugięć sprężysto-plastycznych bazowały na hipotezie przegubów plastycznych, co prowadzi może do znacznych błędów i to na niekorzyść bezpieczeństwa. Wyjątek stanowi tu praca St. Dorosza [3], uwzględniająca rozciągłość stref plastycznych w belkach zginanych. Niniejsza praca stanowi uogólnienie tego podejścia na bardziej złożone przypadki stanu naprężenia w przekroju.

Znajomość oceny wielkości przemieszczeń ważna jest również z punktu widzenia stosowalności metod analizy konstrukcji, w przypadku obciążeń zmiennych - teorii przystosowania, której twierdzenia podstawowe wyprowadzono przy założeniu geometrycznej liniowości, zatem małych przemieszczeń.

2. ZAŁOŻENIA I ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

W naszych rozważaniach przyjmować będziemy że :

- przekroje prętów poddane są działaniu momentu zginającego i momentu skręcającego, to znaczy siły osiowe oraz siły poprzeczne można pominąć ;
- przemieszczenia są małe.

W analizie sprężysto-plastycznej przyjmujemy ponadto :

- materiał prętów rusztu jest izotropowy, jednorodny, idealnie sprężysto-plastyczny ;
- przekroje prętów są odcinkami stałe ;
- obciążenia są quasi-statyczne, przykładane w postaci sił skupionych lub skupionych momentów zginających lub skręcających.

Podstawowym twierdzeniem statycznym w teorii przystosowania się ośrodka idealnie sprężysto-plastycznego do obciążeń zmieniających się w danych granicach jest twierdzenie Melana. Można je sformułować następująco :

Dla przystosowania ciała potrzeba i wystarcza, aby istniało niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych $Q_{ij}/x/$ takie, by dla dowolnych zmian obciążeń w danych granicach, zachodziła nierówność :

$$(1) \quad \varphi \left[\sigma_{ij}^E /x, t/ + Q_{ij} /x/ \right] \leq k \quad ,$$

przy czym $\sigma_{ij}^E /x, t/$ oznacza naprężenia w identycznym geometrycznie ciele idealnie sprężystym pod takimi samymi obciążeniami, a

$\varphi / \sigma_{ij} / - k \leq 0$ oznacza warunek plastyczności materiału.

W analizie konstrukcji **posługujemy się** zwykle wielkościami uogólnionymi : siłami uogólnionymi Q_r i odkształceniami uogólnionymi q_r . Wielkości te wprowadza się w ten sposób, aby w ramach ścisłości rozpatrywanej teorii zachodziła równość

$$(2) \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{\alpha} \sum_{r=1}^m Q_r q_r d\alpha \quad ,$$

gdzie: V oznacza objętość rozpatrywanej konstrukcji, σ_{ij} - tensor naprężenia, ϵ_{1j} - tensor odkształcenia, m - liczbę sił uogólnionych, α - pole wszystkich przekrojów danej konstrukcji.

Istnieje jednoznacznie określone przekształcenie pola naprężeń $\sigma_{ij}/x/$, $x \in \xi$, gdzie $\xi \in \alpha$ jest rozpatrywanym przekrojem konstrukcji, w siły uogólnione [2]:

$$(3) \quad Q_r / \xi / = \Phi_r \left[\sigma_{ij} / x / \right], \quad x \in \xi \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Dla przypadku czysto sprężystego zachowania się materiału przekroju, można otrzymać jednoznaczne odwrócenie związku (3):

$$(4) \quad \sigma_{ij}^E / x / = \sum_{r=1}^m Q_r^E / \xi / a_{ij}^r / x / \quad x \in \xi,$$

gdzie $a_{ij}^r / x /$ jest sprężystym rozkładem naprężeń w przekroju, wywołanym jednostkową siłą uogólnioną $Q_r = 1$, podczas gdy pozostałe siły uogólnione są równe zero, zaś $\sigma_{ij}^E / x /$ oznacza sprężystą część tensora naprężenia. Wobec tego, dowolny stan naprężenia w punkcie przekroju może być jednoznacznie przedstawiony w postaci:

$$(5) \quad \sigma_{ij} / x / = \sigma_{ij}^E / x / + \sigma_{ij}^O / x / = \sum_{r=1}^m \left(Q_r^E + Q_r^O \right) a_{ij}^r / x / + s_{ij} / x /,$$

gdzie: $\sigma_{ij}^O / x / = \sum_{r=1}^m Q_r^O a_{ij}^r / x / + s_{ij}$ jest naprężeniem reszt-

kowym, $\Phi_r / s_{ij} / = 0$, $r = 1, 2, \dots, m$. Naprężenia uogólnione Q_r^O są w równowadze z zerowymi obciążeniami, a Q_r^E jest sprężystym naprężeniem uogólnionym, zdefiniowanym analogicznie jak σ_{ij}^E .

Równania równowagi w wielkościach uogólnionych możemy zapisać następująco:

$$(6) \quad \sum_{r=1}^m L_{kr} Q_r + N_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

$$Q_r = Q_r^E + Q_r^O,$$

gdzie L_{kr} są liniowymi operatorami różniczkowymi, a N_k obciążeniami zewnętrznymi /zakładamy, że wpływ sił masowych jest pomijalnie mały/. Każde pole $Q_r^O / \xi /$, $\xi \in \Omega$ spełniające równanie (6) dla $N_k = 0$ jest polem uogólnionych sił resztkowych. Wobec powyższego, w ramach ścisłości danej teorii uogólnionej, dowolne pole $Q_{ij} / x /$ naprężeń resztkowych określone jest przez podanie resztkowych sił uogólnionych $Q_r^O / \xi /$, $\xi \in \Omega$, oraz samonaprężeń przekrojowych $s_{ij} / x /$, które dają zerowe siły uogólnione, w każdym przekroju ξ . W szczegółowym przypadku, rozważanym w następnym punkcie pracy /pręt o przekroju kołowym/ na rysunku 3.3 przedstawiono stan naprężenia, który odpowiada członowi s_{ij} z równania (5). W punkcie szóstym pracy /przykład rusztu/ na rysunku 6.10 oraz 6.11 przedstawiono przykład pola $Q_r^O / \xi /$ / $r = 1, 2$ /.

Obecność samonaprężeń przekrojowych w przekroju powoduje zmianę zakresu sprężystego reagowania tego przekroju. Wygodnym okazuje się wprowadzenie pojęcia powierzchni sprężystej przekroju, [2], [7]. Definiuje się ją jako brzeg obszaru w przestrzeni sił uogólnionych, w obrębie którego żaden punkt przekroju nie doznaje uplastycznienia. Czyli powierzchnię sprężystą określa warunek

$$(7) \quad \varphi \left[\sum_{r=1}^m Q_r a_{ij}^r / x / + s_{ij} / x / \right] = k$$

w pewnym punkcie /lub punktach/ przekroju, a w pozostałych $\varphi < k$, przy czym $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ jest warunkiem plastyczności, o którym zakłada się na ogół, że w przestrzeni naprężeń ogranicza obszar wypukły, przy czym $\varphi = k$ tylko na brzegu. Ze wzoru (7) wynika, że powierzchnia sprężysta jest określona jednoznacznie w przypadku gdy znamy wartość samonaprężeń przekrojowych $s_{ij} / x /$. W przypadku $s_{ij} / x / = 0$, $x \in \xi$, powierzchnię sprężystą

nazywamy początkową powierzchnią sprężystą. Przykłady pewnych powierzchni sprężystych powstałych przez translację początkowej powierzchni sprężystej pokazano na rysunkach 5.5, 5.6 w punkcie piątym pracy.

Wprowadzenie pojęcia wielkości uogólnionych jak też powierzchni sprężystych, pozwala na sformułowanie twierdzenia statycznego Melana o przystosowaniu w sposób następujący, [7] :

Dla przystosowania danej konstrukcji potrzeba i wystarcza, aby istniały stałe w czasie : pole resztkowych sił uogólnionych $Q_R^0 / \xi /$ oraz dla każdego przekroju ξ konstrukcji, odpowiednia powierzchnia sprężysta S_ξ , taka, że dla obciążeń zewnętrznych zmieniających się w przypisanych granicach pole sił zewnętrznych

$$(8) \quad Q_R^E / \xi, t / + Q_R^0 / \xi /$$

mieściło się dla każdego przekroju w odpowiedniej powierzchni sprężystej S_ξ . Wielkość Q_R^E oznacza pole sił uogólnionych w identycznej geometrycznie lecz idealnie sprężystej konstrukcji /rys.6.8, 6.9, 6.12 punkt 6 pracy/.

Na podstawie przyjętych na początku tego rozdziału założeń, analizę przystosowania rusztów przeprowadzamy sprawdzając warunek

(8) dla pewnego skończonego zbioru punktów /przekrojów $\xi /$, nazywanych przekrojami krytycznymi. Wówczas, siły uogólnione $Q_R / \xi /$ oraz odkształcenia uogólnione $q_R / \xi /$ możemy sprecyzować następująco /r = 1,2/ :

$$Q_1 / \xi / = M_i, \quad Q_2 / \xi / = \bar{M}_i, \quad q_1 / \xi / = \theta_i, \quad q_2 / \xi / = \varphi_i$$

lub w postaci macierzowej

$$Q = [M, \bar{M}] \quad , \quad q = [\theta, \varphi]^T \quad ,$$

a równania równowagi / [9] / obciążeń zewnętrznych P_j , $j = 1, 2, \dots, n$ z momentami zginającymi M_i i skręcającymi \bar{M}_i $i = 1, 2, \dots, p$ w przekrojach krytycznych mogą być zapisane w postaci układu równań algebraicznych :

$$(9) \quad P_j = \sum_{i=1}^p \left[\gamma_{ij} M_i + \bar{\gamma}_{ij} \bar{M}_i \right]$$

przy czym współczynniki γ_{ij} oraz $\bar{\gamma}_{ij}$ zależą tylko od geometrii rusztu.

W ramach przyjętych założeń, za przekroje krytyczne przyjąć należy :

- przekroje w których przyłożono obciążenia zewnętrzne ,
- przekroje w których następuje zmiana przekroju ,
- przekroje w których występują ograniczenia kinematyczne /przemieszczeń lub obrotów/.

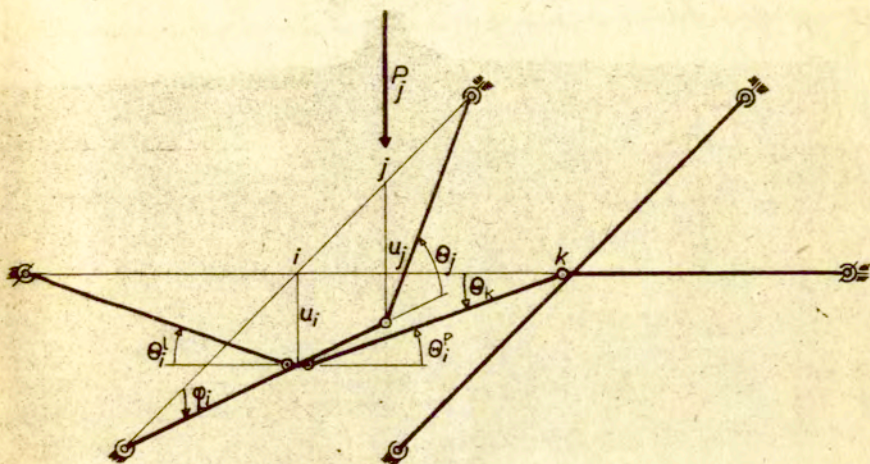
Jeżeli założyć hipotezę idealnych przegubów plastycznych, to znaczy koncentrowanie się odkształceń w przekrojach krytycznych, to kąty obrotu plastycznego θ_i i kąty skręcenia plastycznego φ_i wyrażą się poprzez przemieszczenia punktów przyłożenia obciążenia /dla małych przemieszczeń/ za pomocą tych samych macierzy $\gamma_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}$:

$$(10) \quad \theta_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_j$$

$$(11) \quad \varphi_i = \sum_{j=1}^r \bar{\gamma}_{ij} u_j$$

Macierze te można otrzymać zastępując układ statycznie niewyznaczalny układem statycznie wyznaczalnym oraz pisząc dla tego układu równania momentów w przekrojach krytycznych. Rugując z tak powstałego układu równań wielkości nadliczbowe otrzymamy zależność (9). W przypadku drugim /podejście kinematyczne/ należy budować mechanizmy podstawowe to znaczy układy przegubów plastycznych w określonych przekrojach krytycznych. Pisząc związki geometryczne dla każdego mechanizmu otrzymamy równania (10) i (11). Należy tu podkreślić istotną rolę macierzy równowagi $\Gamma = \gamma + \bar{\gamma}$, zarówno dla analizy przystosowania jak też nośności granicznej. W przypadku automatycznego rozwiązywania powyższych problemów przy użyciu maszyny cyfrowej, macierz równowagi

tworzy tam istotny element zbioru ograniczeń problemu programowania matematycznego do którego to zarówno problem przystosowania jak też nośności granicznej sprowadzają się [14] , [15] .



Rys. 2.1

Na rysunku 2.1 przedstawiono przykład mechanizmu ruchu kinematycznego, będącego kombinacją liniową dwóch mechanizmów podstawowych.

3. POWIERZCHNIE SPRĘŻYSTE DLA PRZEKROJÓW KOŁOWEGO PODDANEGO ZGINANIU ORAZ SKRĘCANIU

W przypadku przekroju pręta pryzmatycznego poddanego zginaniu i skręcaniu tylko trzy składowe tensora naprężenia są różne od zera :

- naprężenie normalne $\sigma_x = \sigma$ /w kierunku osi pręta/ ;
- naprężenie styczne σ_{zx} ;
- naprężenie styczne σ_{yx} ;

Zamiast tych dwu ostatnich , wystarczy operować wypadkowym naprężeniem stycznym $\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{yx}^2}$ równym /w układzie współrzędnych cylindrycznych i w przypadku osiowej

symetrii/ naprężeniom σ_{rx} .

Korzystać będziemy z warunku plastyczności Hubera-Misesa, który w tym przypadku przybiera postać :

$$(12) \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2$$

gdzie σ_0 jest granicą plastyczności przy rozciąganiu.

W przypadku przekroju kołowego /porównaj (4)/, funkcje a_{ij}^r , określające sprężyste rozkłady naprężeń przybierają postać :

$$(13) \quad a_\sigma = \frac{z}{J} = \frac{4z}{\pi R^4}, \quad a_\tau = \frac{r}{J_0} = \frac{2r}{\pi R^4},$$

gdzie : x - jest osią pręta, xz - płaszczyzną zginania, $r = z^2 + y^2$, J - momentem bezwładności przekroju względem osi y , J_0 - momentem bezwładności przekroju względem osi x , R - promieniem przekroju. Wobec tego, początkową powierzchnię sprężystą określamy z warunku /por. 7 / :

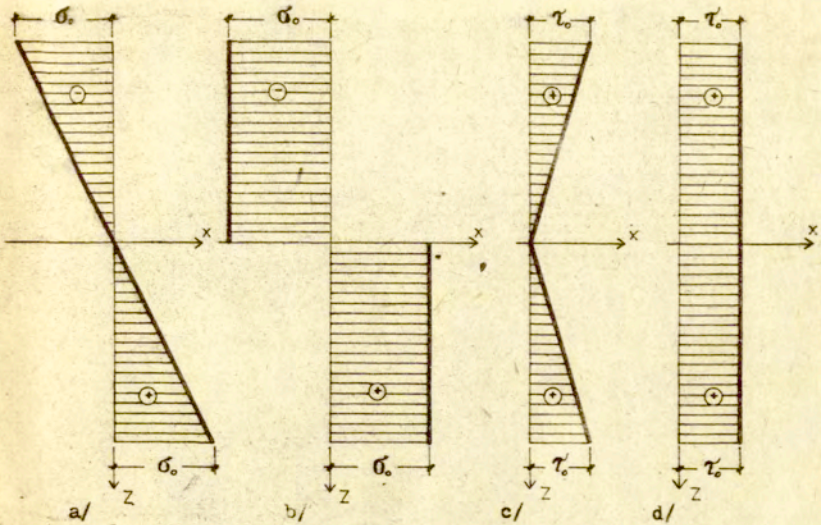
$$(14) \quad \left(\frac{Mz}{J}\right)^2 + 3\left(\frac{\bar{M}r}{J_0}\right)^2 \leq \sigma_0^2$$

Łatwo stwierdzić, że warunek (14) będzie spełniony w każdym punkcie przekroju, jeżeli nie jest on przekroczony dla $z = r = R$. Daje to poszukiwane równanie powierzchni sprężystej, które w postaci bezwymiarowej wygląda następująco' :

$$(15) \quad \left(\frac{m}{\frac{3\pi}{16}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{m}}{\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 1$$

gdzie $m = M/M_0$, $\bar{m} = \bar{M}/\bar{M}_0$, a M_0 i \bar{M}_0 oznaczają momenty przy pełnym uplastycznieniu przekroju, przy działaniu odpowiednio samego tylko momentu zginającego lub skręcającego, rysunek 3.1b, 3.1d. Wartości ich wynoszą odpowiednio :

$$(16) \quad M_0 = \frac{4}{3} R^3 \sigma_0, \quad \bar{M}_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} R^3 \sigma_0$$



Rys. 3.1

Wzór (15) przyjmuje bardzo prostą formę :

$$(17) \quad \frac{m'}{m^2} + \frac{\bar{m}'}{\bar{m}^2} = 1$$

jeżeli wprowadzić oznaczenia :

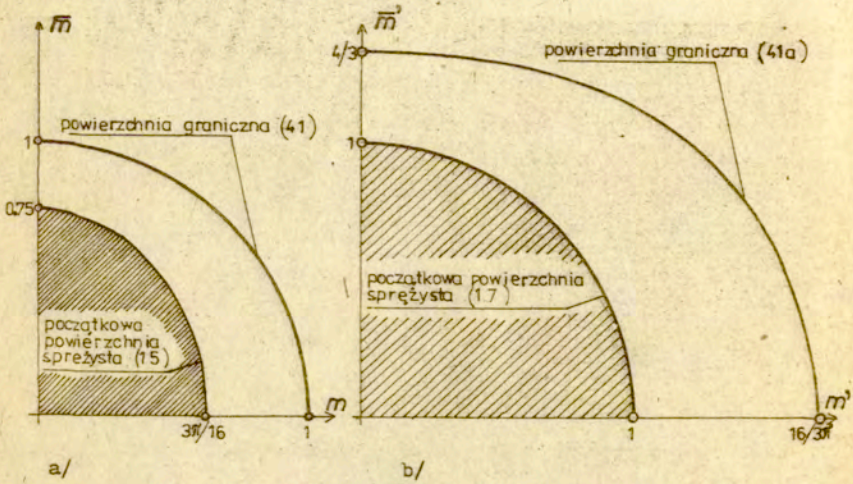
$$m' = \frac{M}{M^E} = \frac{16}{3\pi} m \quad , \quad \bar{m}' = \frac{\bar{M}}{\bar{M}^E} = \frac{4}{3} \bar{m} \quad ,$$

a M^E oraz \bar{M}^E oznaczają maksymalne momenty sprężyste /rys. 3.1a , 3.1c/ :

$$(18) \quad M^E = \frac{\pi}{4} R^3 \sigma_0 \quad , \quad \bar{M}^E = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} R^3 \sigma_0.$$

Postać taka jest bardziej korzystna z punktu widzenia poszukiwania rozwiązań zagadnienia przystosowania oraz wartości ugięć

metodą graficzną. Początkową powierzchnię sprężystą, odpowiednio we współrzędnych $/ m, \bar{m} /$ oraz $/ m', \bar{m}' /$, wraz z powierzchnią graniczną /aproxymacją według [10] /, przedstawiono na rys. 3.2a, 3.2b.



Rys. 3.2

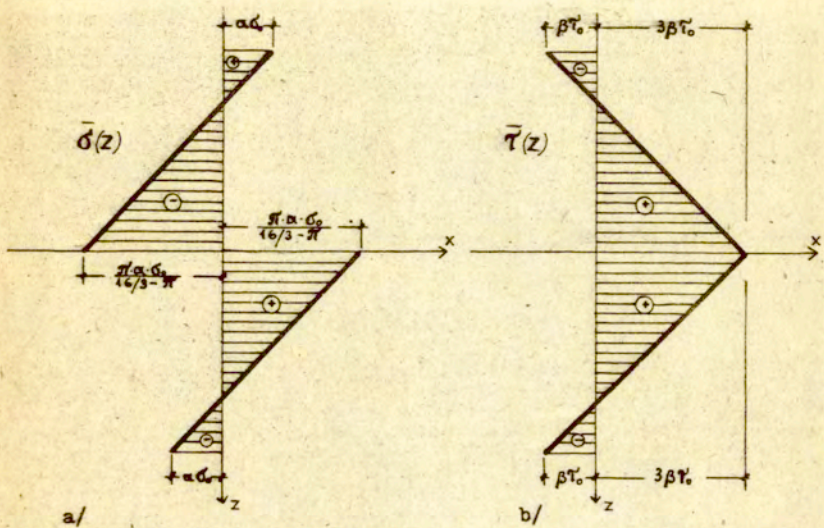
Jeżeli przyjąć rozkład samozrównoważonych naprężeń w przekroju jak na rysunku 3.3 /powstaje on przez odjęcie rozkładu sprężystego, rys. 3.1a, 3.1c, od rozkładu "plastycznego" z rys. 3.1b, 3.1d, w założeniu równoważenia tych samych momentów, zginającego i skręcającego/, to otrzymamy dwuparametrową rodzinę powierzchni sprężystych. Sprawą istotną, mającą znaczenie dla dalszych obliczeń, jest fakt, że powierzchnie te powstają przez translację początkowej powierzchni sprężystej. Jest to jeden z możliwych do przyjęcia rozkład samozrównoważonych naprężeń w przekroju. Naprężenia reszkowe przedstawione na rys. 3.3a, 3.3b można zapisać analitycznie, zgodnie z przyjętym układem osi x, z , następująco :

$$(19a) \quad \bar{\sigma}_z / z = \left[-\frac{\pi}{16/3 - \pi} - \left(1 + \frac{\pi}{16/3 - \pi} \right) \frac{z}{R} \right] \alpha \sigma_0 \quad \text{dla } z \leq 0$$

$$(19b) \quad \bar{\sigma}/z/ = \left[\frac{\pi}{16\sqrt{3}} - \pi - \left(1 + \frac{\pi}{16\sqrt{3}} - \pi \right) \frac{z}{R} \right] \alpha \sigma_0 \quad \text{dla } z \geq 0$$

$$(20) \quad \bar{\tau}/z/ = 3\beta\tau_0 - 4 \operatorname{sign} z \frac{z}{H} \beta\tau_0$$

Wartości α i β są pewnymi współczynnikami liczbowymi określającymi stan zaawansowania odkształceń plastycznych, odpowiednio przy zginaniu $|\alpha|$ i skręcaniu $|\beta|$.



Rys. 3.3

Wstawiając wielkości (19) - (20) do wzoru (7), dla warunku plastyczności (12) i znajdując maksymalne wartości lewej strony, otrzymujemy:

$$(21) \quad \sqrt{\frac{16}{3\pi} m} - \alpha/2 + \sqrt{\frac{4}{3} \bar{m}} - \beta/2 \leq 1$$

$$(22) \quad \sqrt{\frac{\pi \alpha}{16\sqrt{3} - \pi}}/2 + \sqrt{3\beta}/2 \leq 1$$

lub we współrzędnych m' , \bar{m}' :

$$(23) \quad \sqrt{m' - \alpha} / \alpha + \sqrt{\bar{m}' - \beta} / \beta \leq 1,$$

$$(24) \quad \sqrt{\frac{\pi}{16/3 - \pi}} \alpha / \alpha + \sqrt{3\beta} / \beta \leq 1.$$

Warunek (21) lub (23) wynika z (7) dla punktów $z = \frac{1}{3}R$, natomiast warunek (22) lub (24) - dla punktu $z = 0$. Łatwo przekonać się, że warunek (22), (24) nakłada na wielkość translacji powierzchni sprężystej pewne ograniczenia. Jest to oczywiste, gdyż powierzchnia sprężysta nie powinna "wyjść" poza powierzchnię graniczną.

Poszukano również maksymalnej translacji /obwiedni/ rodziny powierzchni sprężystych. Rugując za pomocą (22) jeden z parametrów z (21) otrzymamy następujące równanie jednoparametrowej rodziny powierzchni sprężystych :

$$(25) \quad F/m, \bar{m}/ = \sqrt{\frac{16}{3\pi} m - \alpha} / \alpha + \sqrt{\frac{4}{3} \bar{m} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{\pi \alpha}{16/3 - \pi}} / \alpha} / \alpha - 1 = 0$$

Korzystając następnie z warunku na obwiednię dla jednoparametrowej rodziny funkcji $F/m, \bar{m}, \alpha/ = 0$ [17],

$$(26) \quad \frac{\delta F / m, \bar{m}, \alpha /}{\delta \alpha} = 0,$$

dostaniemy równanie :

$$(27) \quad \alpha^4 + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$$

gdzie :

$$(28) \quad k = \frac{\pi}{16/3 - \pi}$$

$$(29) \quad p = \frac{96}{\sqrt{k^2 - 9}} m$$

$$(30) \quad q = \frac{16}{\sqrt{k^2 - 9}} \bar{m}^2 + \frac{2304}{\sqrt{k^2 - 9}} m^2 - \frac{1}{k^2}$$

$$(31) \quad r = \frac{96}{\sqrt{k^2 - 9}} m$$

$$(32) \quad s = \frac{-2304}{\sqrt{k^2 - 9}} m^2$$

Rozwiązując równanie (27) analitycznie [17] oraz podstawiając to rozwiązanie do (25) otrzymamy poszukiwane równanie obwiedni rodziny powierzchni sprężystych. Wygląda ono następująco :

$$(33) \quad F_0/m, \bar{m} = -1 + \left[\frac{16}{\sqrt{k^2 - 9}} m + \frac{1}{4} p + \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2} + a^2 - 4/K + b} \right]^2 + \left[\frac{4}{3} \bar{m} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - k^2 / \frac{p}{2} + a^2 - 4/K + b} - \frac{1}{4} p - \frac{1}{2} a^2 \right]^2 = 0$$

gdzie :

$$(34) \quad K = \frac{1}{6} q + \sqrt{\frac{q^3}{216} - \frac{4 k^2 \bar{m}^2}{k^2 - 9} s + \sqrt{D}} + \sqrt{\frac{q^3}{216} - \frac{4 k^2 \bar{m}^2}{k^2 - 9} s - \sqrt{D}}$$

$$(35) \quad a = \sqrt{2K + \frac{p^2}{4} - q}$$

$$(36) \quad D = -\frac{1}{36^3} q^6 + \frac{4 k^2 \bar{m}^2}{k^2 - 9} s - \frac{1}{216} q^3 / 2$$

$$(37) \quad b = \frac{K p - r}{2a}$$

Równanie obwiedni (33) przedstawia się znacznie prościej w formie parametrycznej i we współrzędnych m' , \bar{m}' . Mianowicie następująco :

$$(38) \quad m' = \frac{k^2 \alpha}{\sqrt{\alpha^2 / k^4 - 9 k^2 / + 9}} + \alpha$$

$$(39) \quad \bar{m}' = \frac{1}{3} \sqrt{1 - k^2 \alpha^2} + 3 \frac{\sqrt{1 - k^2 \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 / k^4 - 9 k^2 / + 9}}$$

gdzie parametr α zmienia się w granicach $/ 0 , \frac{16/3 - \pi}{3} /$, co wynika z warunku (22) lub (24).

Porównano uzyskaną obwiednię z powierzchnią graniczną podaną przez Życzkowskiego w pracy [10]. Wyniki leżą pomiędzy dolnym oszacowaniem (40) a rozwiązaniem aproksymacyjnym (41).

$$(40) \quad m^2 + \bar{m}^2 = 1$$

$$(41) \quad 0.8845 \bar{m}^2 + 0.9042 m^2 + 0.1155 \bar{m}^4 + 0.0958 m^4 = 1$$

Zestawiono je w tabeli nr 1, na podstawie której sporządzono wykres we współrzędnych m , \bar{m} /rysunek 3.4/.

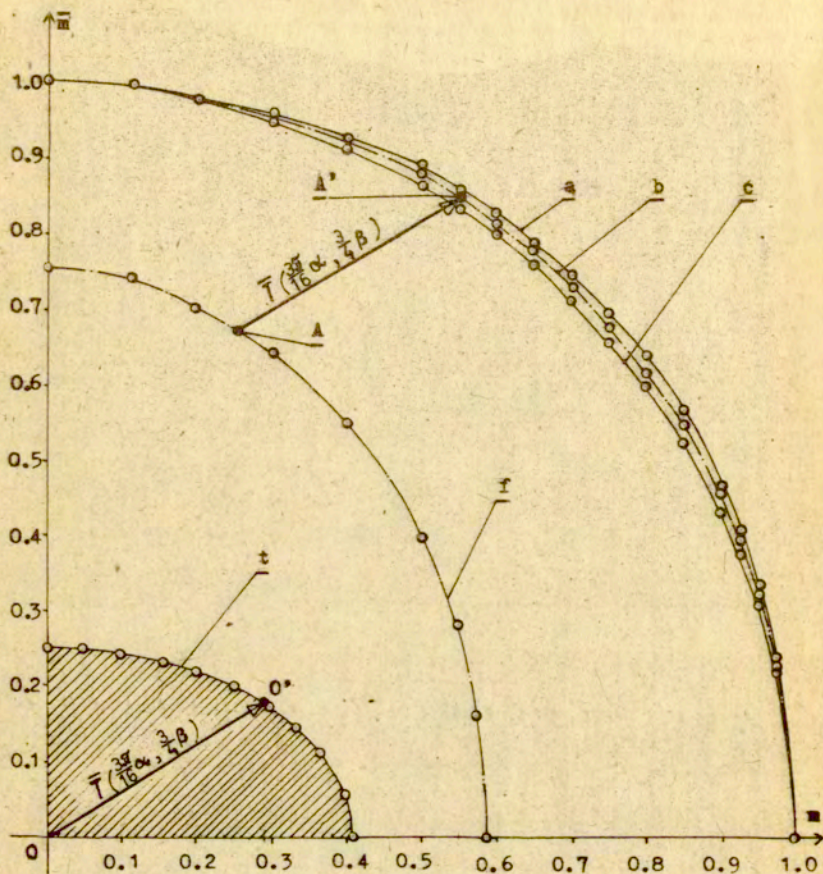
Równania (40), (41) we współrzędnych m' , \bar{m}' mają postać :

$$(40a) \quad / \frac{3\sqrt{3}}{16} m' /^2 + / \frac{3}{4} \bar{m}' /^2 = 1$$

$$(41a) \quad 0.4975 \bar{m}'^2 + 0.3137 m'^2 + 0.0365 \bar{m}'^4 + 0.0115 m'^4 = 1$$

T A B E L A 1

L.P.	DOLNE OSZACOWANIE (40)	TRANSLACJA POWIERZCHNI SPRĘŻYSTEJ (33)	APROKSYMACJA (41)
	m	m	m
1.	0.000	1.000 000 000	1.000 000 000
2.	0.100	0.994 987 437	0.995 931 123
3.	0.200	0.979 795 897	0.983 528 822
4.	0.300	0.953 939 201	0.962 175 654
5.	0.400	0.916 515 139	0.930 729 218
6.	0.500	0.866 025 404	0.887 301 377
7.	0.550	0.835 164 654	0.860 196 951
8.	0.600	0.800 000 000	0.828 801 661
9.	0.650	0.759 934 208	0.792 377 023
10.	0.700	0.714 142 843	0.749 910 780
11.	0.750	0.661 437 828	0.699 956 492
12.	0.800	0.600 000 000	0.640 321 810
13.	0.850	0.526 782 688	0.567 379 492
14.	0.900	0.435 889 894	0.474 210 984
15.	0.925	0.379 967 104	0.415 586 584
16.	0.950	0.312 249 900	0.343 432 375
17.	0.975	0.222 204 860	0.245 823 916
18.	1.000	0.000 000 000	0.000 000 000



Rys. 3.4

- a - aproksymacja (41)
- b - translacja powierzchni sprężystej (33)
- c - dolne oszacowanie (40)
- f - początkowa powierzchnia sprężysta (15)
- t - zakres maksymalnych translacji środka początkowej powierzchni sprężystej (22)

4. SZACOWANIE UGIĘĆ

Przemieszczenia sprężysto-plastyczne układów prętowych są zwykle wyznaczane przy założeniu, że wszystkie elementy konstrukcji zachowują pierwotną sztywność, aż do chwili osiągnięcia w pewnym przekroju stanu granicznego, kiedy to tworzy się tam przegub plastyczny, a sztywność maleje lokalnie do zera. Dalszemu wzrostowi obciążenia towarzyszy obrót θ_i oraz skrócenie ψ_i w przegubie plastycznym / por. [9] /, podczas gdy sztywność w innych przekrojach pozostaje niezmienną, aż do utworzenia się kolejnego przegubu i lokalnego tam wówczas spadku sztywności do zera.

Dokładne wyznaczanie przemieszczeń dla konstrukcji obciążonej monotonicznie przy uwzględnieniu aktualnego kształtu i zasięgu strefy plastycznej nie naraża z formalnego punktu widzenia zasadniczych trudności. W równaniu linii ugięcia należy uwzględnić zmienną sztywność przekrojów /malejącą w miarę rozprzestrzeniania się obszarów uplastycznienia /. Jednak nawet dla prostych belek obciążonych monotonicznie, efektywne obliczanie ugięć sprężysto-plastycznych przy zachowaniu wymogów ciągłości odkształceń na granicach obszarów uplastycznionych jest uciążliwe [1]. Dla teorii przystosowania, gdzie nie znamy historii obciążenia, a tylko granice tych zmian, zagadnienie komplikuje się jeszcze bardziej, a dokładne rozwiązanie wymagałoby podjęcia żmudnej procedury przebadania "krok za krokiem" wszystkich możliwych historii obciążeń. Dlatego też w praktyce korzysta się z metod przybliżonych i z oszacowań pozwalających efektywnie wyznaczać wielkości ugięć.

Uogólnione siły w sprężysto-plastycznej konstrukcji mogą być przedstawione w następującej formie :

$$(42) \quad M/x, t/ = M^E/x, t/ + M^R/x, t/ \quad ,$$

$$(43) \quad \bar{M}/x, t/ = \bar{M}^E/x, t/ + \bar{M}^R/x, t/ \quad ,$$

gdzie: M^E , \bar{M}^E oznaczają odpowiednio moment zginający i skręcający w identycznie obciążonej idealnie sprężystej konstrukcji, a M^R , \bar{M}^R - są resztkowym polem momentu, odpowiednio, zginają-

cego i skręcającego /uogólnione naprężenie resztkowe - por. przykład rusztu, punkt szósty pracy /.

Przemieszczenia mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$(44) \quad u/x, t/ = u^E/x, t/ + u^R/x, t/ ,$$

gdzie : u^E są przemieszczeniami konstrukcji idealnie sprężystej, natomiast u^R przemieszczeniami resztkowymi. Przemieszczenia u^E są liniowymi funkcjami aktualnego obciążenia, dlatego ich wielkości można łatwo obliczyć, natomiast resztkowe przemieszczenia u^R zależą od kształtu i zasięgu stref plastycznych.

Podobnie uogólnione odkształcenia możemy przedstawić w postaci następującej sumy :

$$(45) \quad \kappa = \kappa^E + \kappa^R + \kappa^P ,$$

$$(46) \quad \bar{\kappa} = \bar{\kappa}^E + \bar{\kappa}^R + \bar{\kappa}^P ,$$

gdzie wskaźniki : "E" , "R" , "P" , oznaczają odpowiednio sprężysty, resztkowy, plastyczny. Symbole κ , $\bar{\kappa}$ oznaczają uogólnione odkształcenia odpowiednio przy zginaniu oraz skręcaniu. Spełnione są przy tym następujące zależności :

$$(47) \quad \kappa = d^2u/dx^2 = M/EJ \quad , \quad (48) \quad \bar{\kappa} = \bar{M}/GJ_0 \quad ,$$

$$(49) \quad \kappa^E = d^2u^E/dx^2 = M^E/EJ \quad , \quad (50) \quad \bar{\kappa}^E = \bar{M}^E/GJ_0 \quad ,$$

$$(51) \quad \kappa^R = M^R/EJ \quad , \quad (52) \quad \bar{\kappa}^R = \bar{M}^R/GJ_0 \quad ,$$

$$(53) \quad \kappa^R + \kappa^P = d^2u^R/dx^2 \quad , \quad (54) \quad \bar{\kappa}^R + \bar{\kappa}^P = d\phi^R/dx \quad ,$$

$$(55) \quad \kappa^P = \sum_i \theta_i^P \delta/x-x_i/ \quad ,$$

gdzie : $\delta/x-x_i/$ jest funkcją Diraca.

Warunek plastyczności /powierzchnia graniczna/ w uogólnionych naprężeniach ma postać jak poniżej /dolne oszacowanie [10]/:

$$(56) \quad f_0/ M_0 \cdot \bar{M} / = / M/M_0 / ^2 + / \bar{M}/\bar{M}_0 / ^2 = 1$$

Przez M_0 , \bar{M}_0 oznaczono odpowiednio momenty graniczne przy czystym zginaniu i czystym skręcaniu, dla przekroju kołowego określone wzorami (16). Inną postać tego warunku, wynikłą wprost z tworzenia translacyjnych powierzchni sprężystych pokazano w punkcie trzecim pracy /równanie (33) /.

W pracy [3] podano metodę szacowania od góry wartości ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznej w przypadku, gdy znany jest wartość energii plastycznej K dysypowanej w procesie działania na ciało obciążen zmiennych. Wyprowadzony tam wzór na szacowanie ugięć resztkowych w punkcie " x_0 " ma postać :

$$(57) \quad u_i^R/x_0 \leq \frac{1}{\hat{P}_i/x_0/\pi} \max_V \sqrt{\hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}} K$$

gdzie: \hat{P}_i - fikcyjna siła jednostkowa przyłożona w punkcie i i kierunku poszukiwanych ugięć, u_i^R - rzeczywiste uogólnione przemieszczenie resztkowe w punkcie przyłożenia i kierunku siły \hat{P}_i ,

π - stała zależna od postaci warunku plastyczności [18], $\hat{\sigma}_{ij}$ - pole naprężenia sprężystego od siły \hat{P}_i , K - całkowita energia dysypowana w procesie przystosowania. Górną ocenę tej ostatniej podał Koiter, [8] :

$$(58) \quad K \leq \frac{s}{s-1} \int_V \frac{1}{2} A_{ijkl} Q_{ij} Q_{kl} dV$$

gdzie: s oznacza współczynnik bezpieczeństwa przeciw nieprzystosowaniu, a Q_{ij} jest polem fikcyjnych naprężeń resztkowych, występujących w warunku Melana (1).

Ale, w ramach przyjmowanej teorii w wielkościach uogólnionych, wobec (4), mamy

$$(59) \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sum_{r=1}^m \hat{Q}_r a_{ij}^r$$

gdzie \hat{Q}_r jest sprężystym polem sił uogólnionych przy obciążeniu \hat{E}

Zatem :

$$(60) \quad \max_V \sqrt{\hat{\sigma}_{ij} \hat{\delta}_{ij}} = \max_V \sqrt{\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \hat{Q}_r \hat{Q}_s a_{ij}^r a_{ij}^s}$$

Z drugiej strony, wobec (4) i (5), fikcyjne naprężenie Q_{ij} wyraża się wzorem :

$$(61) \quad Q_{ij} = \sum_{r=1}^m Q_r^0 a_{ij}^r + s_{ij}$$

Wobec tego

$$(62) \quad K \leq \frac{s}{2/s-1} \int_V A_{ijkl} \left[\sum_{r=1}^m Q_r^0 a_{ij}^r + s_{ij} \right] \left[\sum_{r=1}^m Q_r^0 a_{kl}^r + s_{kl} \right] dV$$

W przypadku konstrukcji złożonej z prętów o przekrojach kołowych, poddanych zginaniu i skręcaniu /por. założenia na początku rozdziału 2 /, podstawiając (13) oraz (19) i (20) do wzorów (60) i (62), otrzymamy

$$(63) \quad \max_V \sqrt{\hat{\sigma}_{ij} \hat{\delta}_{ij}} = \max_L \sqrt{\frac{M^2 R^2}{J^2} + \frac{M R^2}{J_0^2}}$$

$$(64) \quad K \leq \frac{s}{2/s-1} \left(\int_L \left[\frac{M^0/2}{EJ} + \frac{M^0/2}{2GJ_0} \right] dL + \int_{L_i} \int_{\xi} \left[\frac{\bar{\sigma}^2/z/}{E} + \frac{\bar{\tau}^2/z/}{2G} \right] d\xi dL \right)$$

Obliczając te dwie ostatnie całki dla samonaprężeń typu (19) i (20) w przekroju kołowym, otrzymujemy :

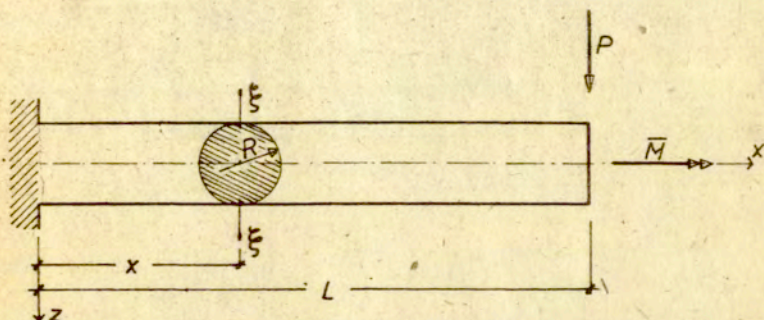
$$(65) \quad \int_{\xi} \frac{\bar{\sigma}^2}{E} d\xi = \frac{\frac{\alpha^3}{256} - \frac{\alpha}{36}}{\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{16} / 2} \quad \frac{\sigma_0^2 R^2}{E} \alpha^2$$

$$\int_{\xi} \frac{\bar{\tau}^2}{2G} d\xi = \frac{\alpha}{6} \frac{\sigma_0^2 R^2}{G} \beta^2$$

Całki (65) są różne od zera w obszarach gdzie warunek (15) nie jest spełniony, t.j. w strefach plastycznych.

5. PRZYKŁAD WSPORNIKA O PRZEKROJU KOŁOWYM

Rozważmy wspornik o długości L i jednakowym na całej długości przekroju /rys. 5.1/. Niech na koniec wspornika działają dwa niezależne od siebie obciążenia zewnętrzne - siła skupiona P oraz moment skręcający \bar{M} . Załóżmy ponadto, że działające na wspornik obciążenia zmieniają się dowolnie w czasie, to znaczy $P = P/t/$, $\bar{M} = \bar{M}/t/$, oraz, że znane są jedynie granice tych zmian.



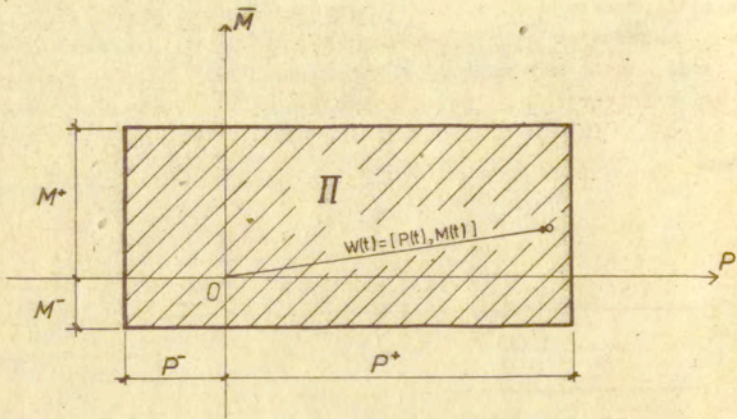
Rys. 5.1

Możemy zatem mówić o istnieniu obszaru obciążeń. Obszar taki możemy opisać analitycznie przy pomocy układu nierówności, a w przypadku gdy przestrzeń obciążeń nie jest większa niż trzy, również przedstawić graficznie. W rozważanym przypadku przestrzeń obciążeń jest dwuwymiarowa, zatem obszar ich zmian można opisać układem dwóch nierówności :

$$(66) \quad \begin{aligned} P^- &\leq P/t/ \leq P^+ \\ \bar{M}^- &\leq \bar{M}/t/ \leq \bar{M}^+ \end{aligned}$$

natomiast graficznie jest to pewien prostokąt o wymiarach scharakteryzowanych przez granice zmienności obciążeń /obszar II - - rys. 5.2/. W określonym momencie czasu t_1 działa zatem na

wspornik wektor obciążenia zewnętrznego $W/t_1/$, który zawarty jest w obszarze Π .

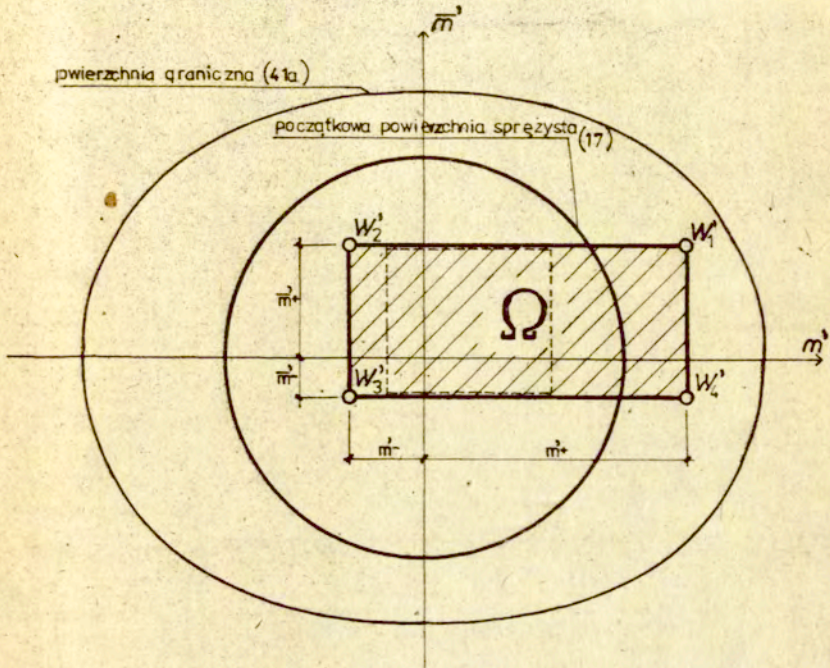


Rys. 5.2

Poszukajmy takiego zakresu zmienności obciążeń, przy którym zachodzi przystosowanie się wspornika, to znaczy jego sprężyste zachowanie po pewnej skończonej liczbie cykli obciążeń. Zgodnie z twierdzeniem Melana dla konstrukcji /w wielkościach uogólnionych/ [2] [16] , przystosowanie wspornika nastąpi, gdy istnieje dla każdego przekroju ξ stała w czasie powierzchnia sprężysta, taka, że dla obciążeń zewnętrznych zmieniających się w przepisanych granicach, pole sił wewnętrznych mieści się dla każdego przekroju w odpowiedniej powierzchni sprężystej. Najlepiej jest to zilustrować graficznie. I tak na rysunku 5.3 przedstawiono we współrzędnych bezwymiarowych m' , \bar{m}' , pole sił wewnętrznych Ω odpowiadające obszarowi obciążeń Π . Naniesiono również dodatkowo początkową powierzchnię sprężystą (17) oraz powierzchnię graniczną (41a). Zakładając, że obszar Ω odpowiada przekrojowi $\xi_{x=0}$, łatwo zauważyć, że dla dowolnego przekroju $\xi_{x>0}$, zachodzi :

$$(67) \quad \Omega (\xi_{x>0}) \subset \Omega (\xi_{x=0})$$

Przykładowo przekrojowi $\xi_x = L/2$, odpowiada obszar w którym zakres zmian bezwymiarowego momentu zginającego $m = p \cdot L/2$ / $p = P/P_0$ jest bezwymiarową siłą zewnętrzną / , jest o połowę mniejszy w stosunku do obszaru odpowiadającego przekrojowi $\xi_x = 0$. Zaznaczono go na rysunku 5.3. linią przerywaną.



Rys. 5.3

Wystarczy zatem warunek przystosowania sprawdzić w jednym przekroju $\xi_x = 0$, gdyż spełnienie warunku

$$(68) \quad S_{\xi_{x=0}} \supset \Omega(\xi_x = 0)$$

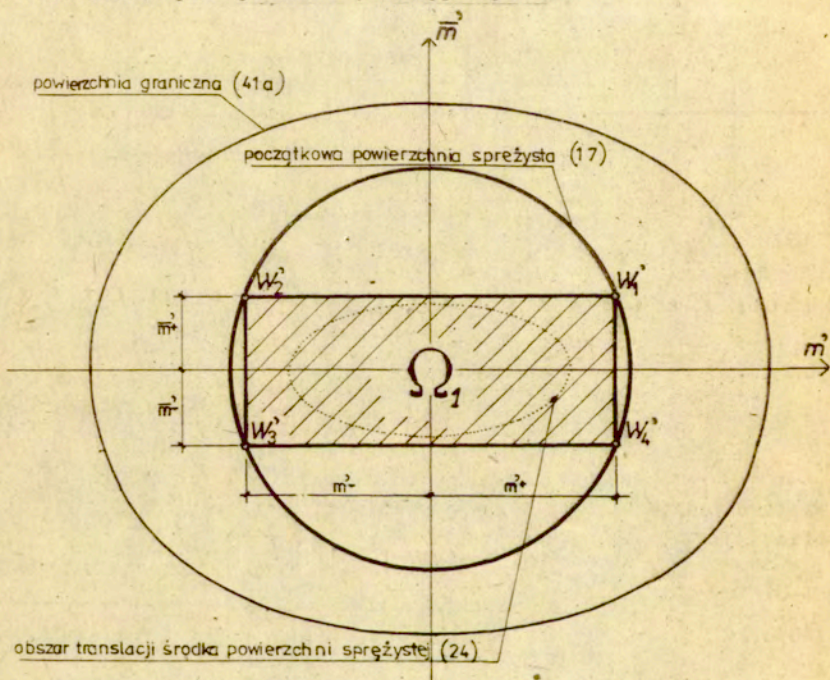
/obszar Ω zawarty jest w powierzchni sprężystej S_{ξ} / , powoduje automatycznie spełnienie warunku (69) ,

$$(69) \quad S_{\xi_x=0} \supset \Omega(\xi_x > 0)$$

skoro

$$(70) \quad \Omega(\xi_x > 0) \subset \Omega(\xi_x = 0)$$

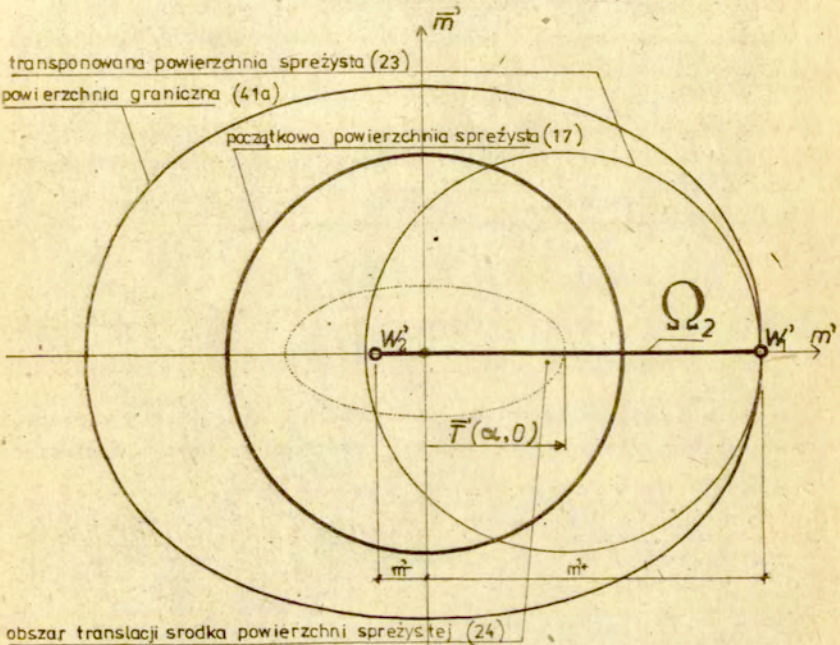
Określenie zakresu przystosowania wspornika odnosić będziemy zatem do punktu utwierdzenia. Wykorzystamy przy tym twierdzenie [12], które mówi, że warunek przystosowania wystarczy sprawdzić jedynie w wierzchołkach zmian obciążeń, o ile warunek plastyczności jest wypukły.



Rys. 5.4

Wartość obciążeń przystosowania leży zawsze pomiędzy za-

kresem sprężystym a nośnością graniczną i jest jednoznacznie określona dla ustalonego programu obciążeń. Poszukując w dalszym ciągu zakresu przystosowania dla obszaru obciążeń z rysunku 5.2, rozważmy dwa szczególne przypadki obszarów obciążeń Π_1 oraz Π_2 , takim, którym odpowiadają pola sił wewnętrznych Ω_1 i Ω_2 . / rys. 5.4 , 5.5 /



Rys. 5.5

Z rysunku 5.4 wynika jednoznacznie, że jedynie zerowa translacja początkowej powierzchni sprężystej, zapewnia spełnienie warunków przystosowania. Zatem zakres sprężysty jest zarazem zakresem przystosowania. Natomiast w drugim przypadku /rys. 5.5/, spełnienie warunku (68) nastąpi jedynie wówczas gdy dokonamy translacji początkowej powierzchni sprężystej o pewien wektor $\bar{T}'/\alpha, \beta/$, w ten sposób, że obszar Ω_2 będzie całkowicie zawarty w przemieszczonej powierzchni sprężystej /rys. 5.5/.

Wobec warunku (24) /obszar ograniczony linią kropkowaną - rysunek 5.5/ translacja taka jest ograniczona a jej maksymalna wartość określa nam górną granicę obszaru przystosowania /równanie (33) /. Dwa przytoczone przypadki wskazują zatem na fakt, że zależnie od programu obciążenia nośność przystosowania wspornika zawarta będzie pomiędzy nośnością sprężystą, a nośnością graniczną /granice tego obszaru określają krzywe (15) i (33) /, a w przypadkach skrajnych równa będzie nośności sprężystej bądź nośności granicznej. Dla pierwszej ćwiartki układu współrzędnych zaznaczono ten obszar na rysunku 5.6 .

Przejdźmy do obliczeń przemieszczeń wspornika wykorzystując przy tym wzór (57) z punktu 4 pracy. Dla układu statycznie wyznaczalnego jakim jest wspornik, wartość dwóch pierwszych całek ze wzoru (64) jest równa zero. Obliczamy zatem energię \bar{K} dysypowaną w strefie plastycznej. Wyniesie ona :

$$(71) \quad \bar{K} = \frac{s}{2 / s - 1 /} \iint_{L \xi} \left[\frac{\sigma^2 / z /}{E} + \frac{\tau^2 / z /}{2G} \right] d\xi dL$$

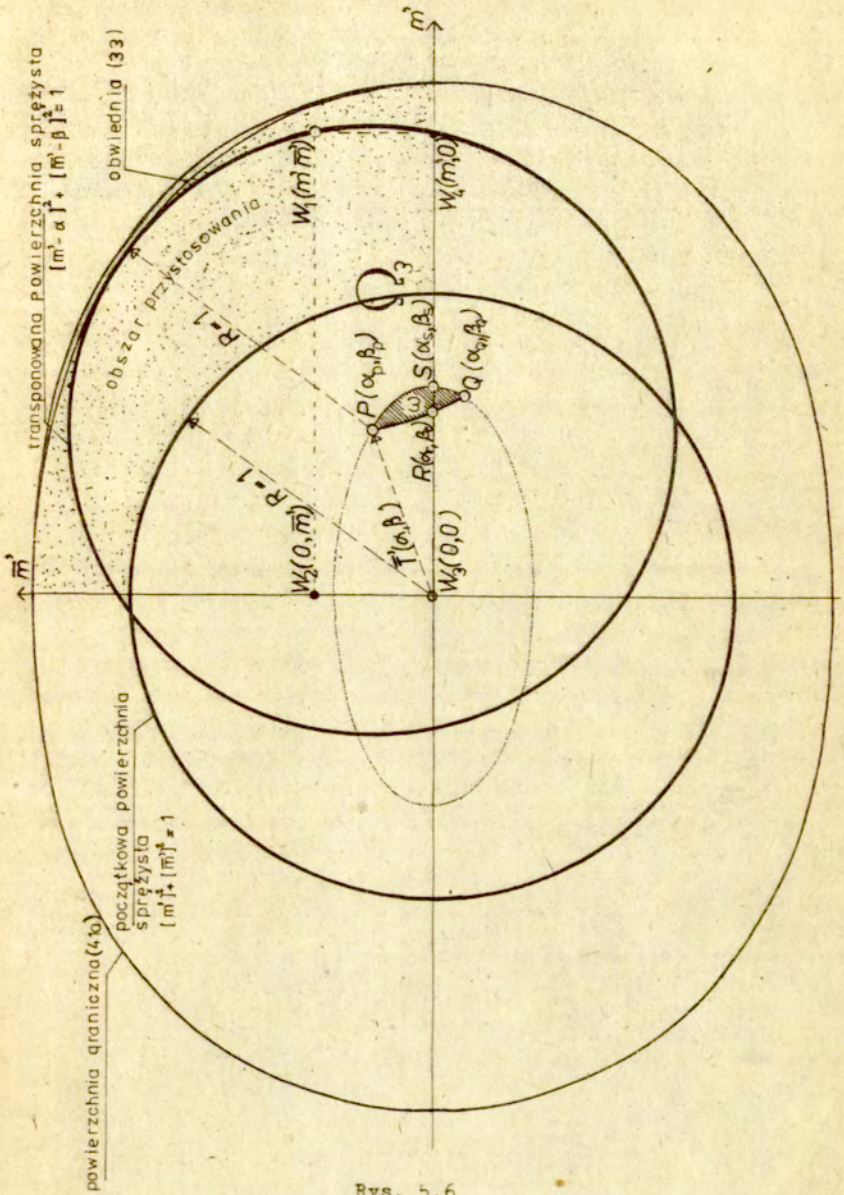
i zgodnie z (65) wartość całkowitej energii dysypowanej w procesie obciążeń zmiennych wspornika o przekroju kołowym , wyniesie:

$$(72) \quad \bar{K} = \frac{s}{2 / s - 1 /} \left\{ \frac{\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36}}{\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} / 2} \frac{\sigma_{0R}^2 R^2}{E} \int_L \alpha^2 dL + \frac{\pi}{2} \frac{\tau_{0R}^2 R^2}{G} \int_L \beta^2 dL \right\}$$

Należy następnie znaleźć długość strefy plastycznej L_p . Sprezyjmy w tym celu obszar obciążenia (66) , dobierając go tak aby możliwe było przystosowanie wspornika. Niech więc :

$$(73) \quad \begin{aligned} 0 &\leq P/t/ \leq 0.9P_0 \\ 0 &\leq \bar{M}/t/ \leq 0.3\bar{M}_0 \end{aligned}$$

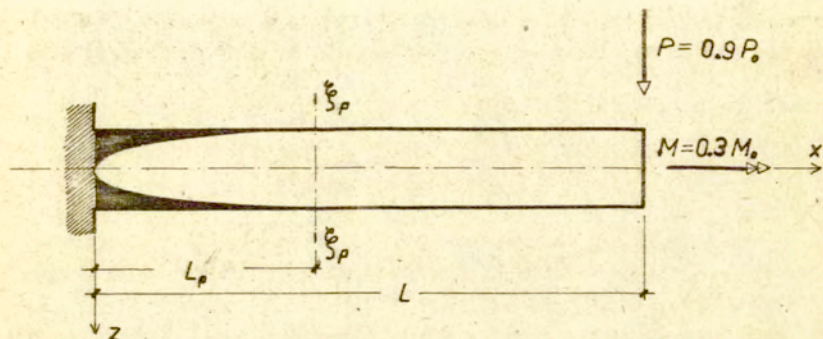
W tym przypadku tzn. gdy $\bar{M}^- = P^- = 0$ granicę przystosowania się wspornika określają punkty leżące na krzywej (33) /co jest łatwo stwierdzić na podstawie rysunku 5.6 /.



Rys. 5.6

Korzystając z zależności na powierzchnię sprężystą (15), oraz wiedząc, że: $\bar{m} = \bar{M}/\bar{M}_0$ i $p = P/P_0$, otrzymamy po przekształceniach związek na zasięg strefy plastycznej L_p /rys.5.8/.

$$(76) \quad L_p = \left[1 - \frac{3\pi}{16} \frac{1}{p} \sqrt{1 - \frac{\bar{m}^2}{\frac{3}{4} / ^2}} \right] L$$



Rys. 5.8

Wartości α i β są funkcjami argumentu x /zmieniają się wraz z przekrojem/. Funkcje te można wyrazić następująco :

$$(77) \quad \begin{aligned} \alpha/x/ &= \alpha_0/1 - \frac{x}{L_p} / & \text{dla } x \in /0, L_p/ \\ \alpha/x/ &= 0 & \text{dla } x \in /L_p, L/ \\ \beta/x/ &= \beta_0/1 - \frac{x}{L_p} / & \text{dla } x \in /0, L_p/ \\ \beta/x/ &= 0 & \text{dla } x \in /L_p, L/ \end{aligned}$$

Przy czym dla wartości zmieniających się w przedziale $/L_p, L/$, stany samonapężenia są zerowe - $\alpha, \beta = 0$ /zakres czysto sprężysty/. Natomiast α_0 oraz β_0 są wartościami $\alpha/x/$, $\beta/x/$ dla punktu utwierdzenia wspornika $/x = 0/$.

Korzystając z zależności (72) (76) (77) oraz przeprowadzając całkowanie po długości strefy plastycznej L_p otrzymamy:

$$(78) \quad K = \frac{s}{2/s-1} \frac{L}{3} \left[1 - \frac{3\pi}{16p} \sqrt{1 - \frac{\bar{m}^2}{4}} \right] \left[\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36} \frac{\sigma_{0R}^2}{E} \alpha_0^2 + \frac{\pi}{2} \frac{\tau_{0R}^2}{G} \beta_0^2 \right]$$

Zgodnie z normą PN-76/B-03200 dla stali stosunek współczynnika sprężystości podłużnej E do współczynnika sprężystości poprzecznej G wynosi $E/G = 70/27$, oraz zgodnie z (12) $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$, otrzymamy :

$$(79) \quad K = \frac{s}{2/s-1} \frac{L}{3} \left[1 - \frac{3\pi}{16p} \sqrt{1 - \frac{\bar{m}^2}{4}} \right] \left[\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36} \alpha_0^2 + \frac{35\pi}{81} \beta_0^2 \right] \frac{\sigma_{0R}^2}{E}$$

Obliczając na podstawie (79) wielkość energii dysypowanej w procesie przystosowania, rozważmy cztery następujące przypadki dróg obciążeń /rys. 5.7 / :

- obciążamy wspornik siłą $P = 0.9P_0$, a następnie dociążamy momentem skręcającym $\bar{M} = 0.3\bar{M}_0$,
- obciążamy wspornik momentem skręcającym $\bar{M} = 0.3\bar{M}_0$, a następnie dociążamy siłą $P = 0.9P_0$,
- obciążamy wspornik równocześnie siłą P oraz momentem skręcającym \bar{M} w sposób proporcjonalny aż do wartości $P = 0.9P_0$ oraz $\bar{M} = 0.3\bar{M}_0$,
- obciążamy wspornik siłą $P = 0.6P_0$, następnie dociążamy momentem skręcającym $\bar{M} = 0.3\bar{M}_0$, po czym dodatkowo dociążamy siłą $P = 0.3P_0$.

Graficzną ilustrację powyższych przypadków przedstawiono na rysunku 5.7. Zakładamy ponadto, że odciążenie przebiega po tej samej drodze co obciążenie.

Zależności (74), (75) określają nam całą rodzinę powierzchni sprężystych, których środki zawarte są w obszarze ω /rys. 5.6, str 29/. Aby dostać najlepsze oszacowanie energii należy rozwiązać następujące zadanie minimalizacyjne - znaleźć :

$$(80) \quad \text{minimum} \left[k_1 \alpha_0^2 + k_2 \beta_0^2 \right],$$

przy ograniczeniach /po obszarze ω - rys.5.6/ :

$$(1) \quad \sqrt{\frac{4.8}{J}} - \alpha_0 / 2 + \sqrt{\frac{2}{5}} - \beta_0 / 2 \leq 1$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{J}{16/3 - J}} \alpha_0 / 2 + \sqrt{3} \beta_0 / 2 \leq 1$$

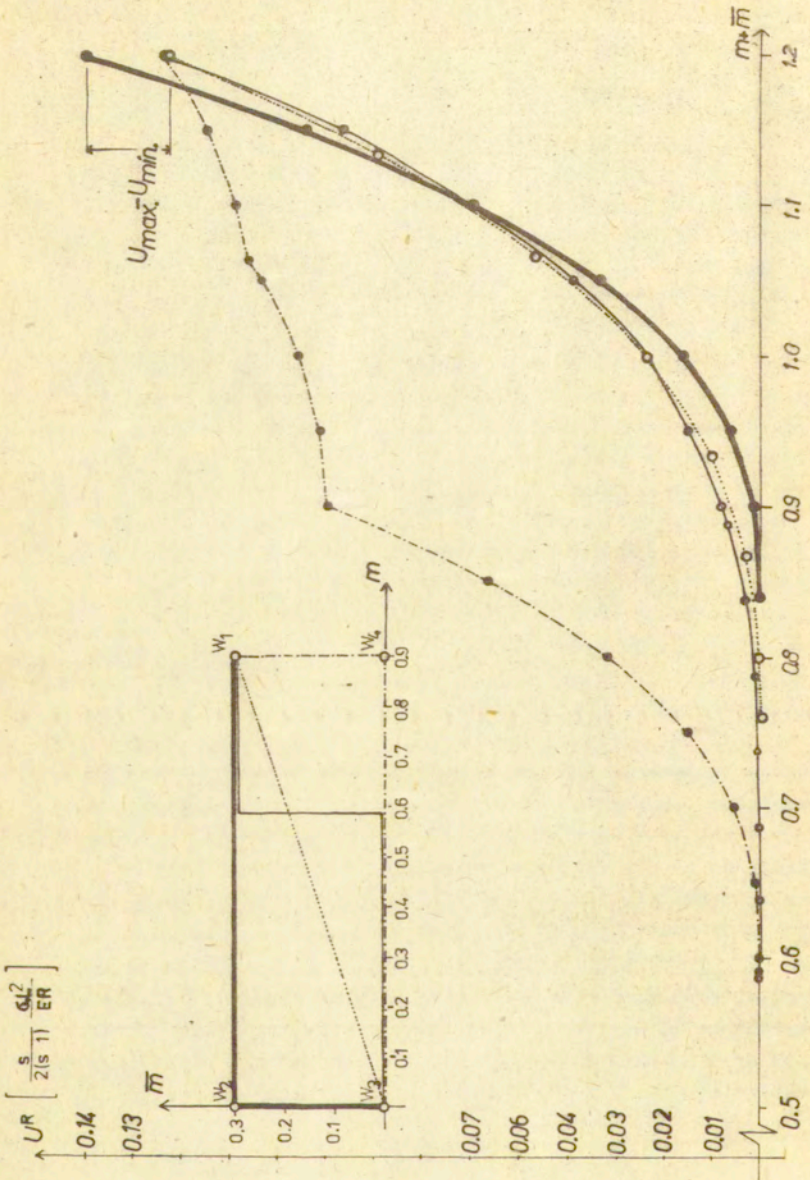
gdzie k_1, k_2 - współczynniki liczbowe /wzór (79) /.

Ne trudno jest zauważyć, że najlepsze oszacowanie energii dysypowanej K /to znaczy spełnienie warunku (80) /dostaniemy wówczas, gdy będziemy dobierali rozwiązania z obszaru /żuku/ $P - R - Q$ /rys. 5.6/. Poszukano wartości energii K dla czterech wcześniej sprecyzowanych dróg zmian obciążeń zewnętrznych / a, b, c, d - rys. 5.7 /. Stąd na podstawie (57) możemy już oszacować wartość przemieszczeń resztkowych wspornika. Przemieszczenia te w zależności od aktualnego stanu obciążenia przedstawiono na rysunku 5.9 str. 34. Naniesiono również przebieg zmian sił wewnętrznych : bezwymiarowego momentu zginającego m oraz bezwymiarowego momentu skręcającego \bar{m} . Poszukano dodatkowo wartości ekstremalnych przemieszczeń $u_{\max.}, u_{\min.}$ w momencie obciążenia maksymalnego, to znaczy dla $m = 0.9$ oraz $\bar{m} = 0.3$ /rys. 5.9/. Okazało się przy tym, że wartościom ekstremalnym odpowiadają również drogi obciążenia "b" /wartość maksymalna/ oraz "c" /wartość minimalna/ - rys. 5.7 .

W interpretacji graficznej /rys. 5.6/, sprecyzowana droga obciążenia wymusza określoną "wędrówkę" początkowej powierzchni sprężystej. W rozważanym przez nas przypadku, "wędrówka" ta trwa do chwili osiągnięcia wierzchołka $W_1/0.9m, 0.3\bar{m}$, kiedy to proces przystosowania jest zakończony i nie ma w dalszym ciągu dysypacji energii, a wspornik od tego momentu reaguje na każdy następny cykl obciążenia w sposób czysto sprężysty.

Przyjmując ścieżkę obciążenia "b" , obliczono wartość przemieszczenia końca wspornika przy maksymalnej amplitudzie zmian obciążeń zewnętrznych. Należy przy tym obliczyć wartość stałej K /wzór (57) / dla przyjętego warunku plastyczności Hibera-Misesa. Warunek ten w postaci ogólnej ma postać :

$$\varphi / \sigma_{ij} / = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 \leq 0$$



Rys. 5.9

gdzie s_{ij} jest dewiatorem naprężenia, a k modułem ścinania. Stąd prędkość odkształcenia plastycznego wyniesie :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\delta \sigma}{\delta \sigma_{ij}} = \lambda s_{ij} \quad , \quad \text{oraz} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda^2 s_{ij} s_{ij} = \lambda^2 2k^2$$

więc dysypacja energii D wynosi :

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P = s_{ij} \lambda s_{ij} = \lambda 2k^2 = \sqrt{2} k / \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / \frac{1}{2} \quad ,$$

zatem ostatecznie [3] :

$$\chi = \inf \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P}{|\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / \frac{1}{2}} = \sqrt{2} k = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad .$$

Założono dodatkowo $R = 2 \text{ cm}$, $L = 100 \text{ cm}$, materiał - stal StOS. Wyniki przedstawiają się następująco dla dwóch wartości współczynnika bezpieczeństwa $s = 1.1$, $s = 1.2$:

$$u_{1.1}^R = 3.34 \text{ cm} \quad , \quad u_{1.2}^R = 2.00 \text{ cm} \quad .$$

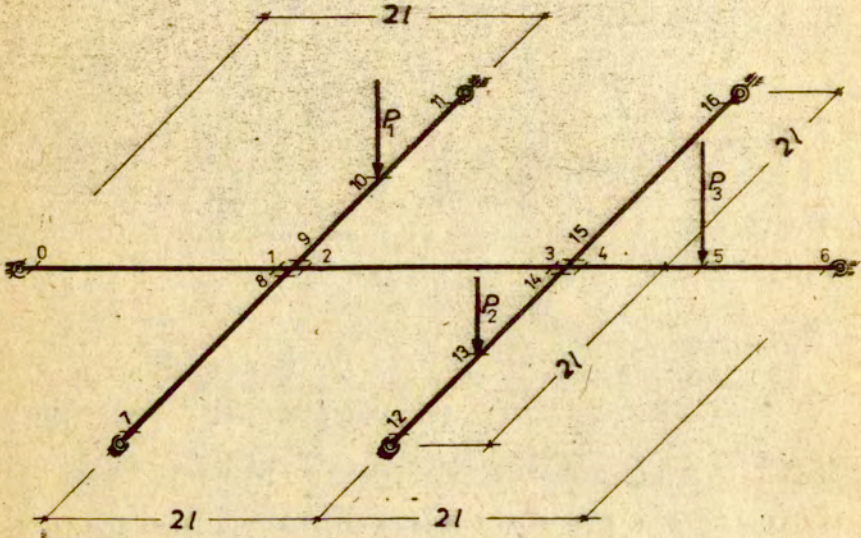
Analogiczne wartości przemieszczeń sprężystych wynoszą :

$$u_{1.1}^E = 2.21 \text{ cm} \quad , \quad u_{1.2}^E = 2.02 \text{ cm} \quad .$$

Otrzymane wartości przemieszczeń trwałych powstałych wskutek przystosowania się wspornika do cykli obciążeń zmiennych są zatem tego samego rzędu co przemieszczenia sprężyste.

6. PRZYKŁAD RUSZTU WYKONANEGO Z PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM

Do obliczeń przyjęto ruszt jak na rysunku 6.1 . Szywności oraz materiał wszystkich elementów są jednakowe. Obciążenia działające na ruszt zmieniają się w sposób niezależny od siebie.



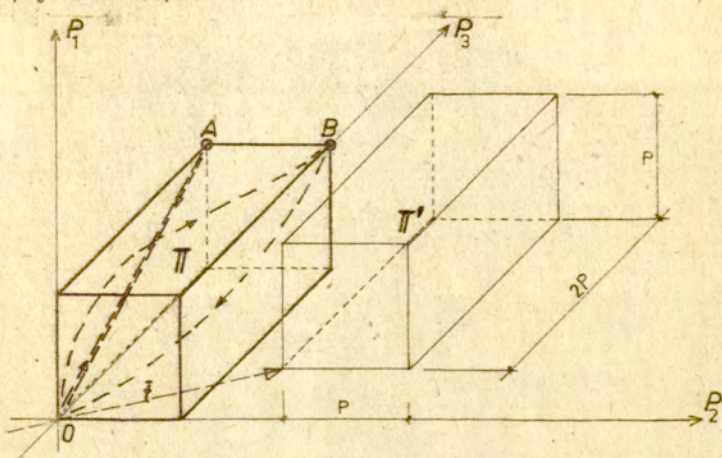
Rys. 6.1

Przyjęto następujący zakres zmienności poszczególnych obciążeń :

$$(83) \quad \begin{aligned} 0 &\leq P_1 \leq P \\ 0 &\leq P_2 \leq P \\ 0 &\leq P_3 \leq 2P \end{aligned}$$

Obszar zmian obciążeń jest więc w tym przypadku prostopadłością. Historia obciążenia i odciążenia jest nieznana, może więc mieć miejsce każda droga obciążenia i odciążenia, przykładowo \overline{OAO} czy też \overline{OBO} /rysunek 6.2/. W przypadku gdy udział obciążeń stałych jest znaczny, należałoby rozpatrywać obszar obciążeń Π'

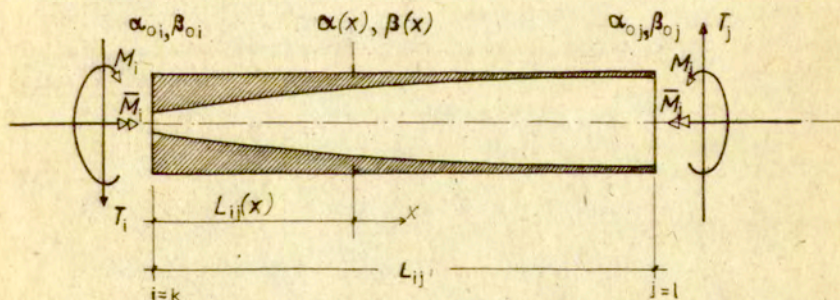
będący translacją obszaru Π o pewien wektor obciążeń stałych \vec{f} /rysunek 6.2/.



Rys. 6.2

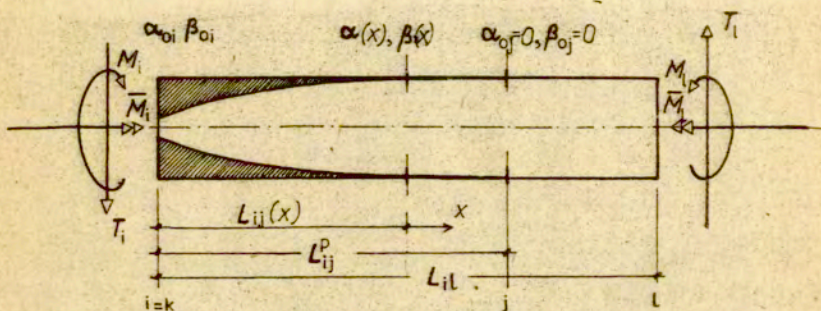
Zagadnienie przystosowania rozpatrywanego rusztu zostało przedstawione w pracy [9]. Tutaj ograniczymy się wyłącznie do oszacowania przemieszczeń z wykorzystaniem wyników wspomnianej pracy.

Rozpatrzmy myślowo wycięty element rusztu z rozwiniętą strefą plastyczną jak na rysunku 6.3. Wartości M , \bar{M} , T , oznaczają ekstremalne wartości momentów odpowiednio zginającego,



Rys. 6.3

skręcającego oraz siły poprzecznej /pominiętej w rozważaniach/ na krawędziach elementu "i" oraz "j". W przypadku gdy strefa plastyczna rozciąga się na całą długość elementu rusztu L_{kl} /wyznaczonego poprzez przekroje krytyczne k, l /, wówczas punkty "i" oraz "j" będą przekrojami krytycznymi prętów rusztu, czyli $L_{ij}^p = L_{kl}$ /rysunek 6.3/. W przeciwnym wypadku, to znaczy gdy strefa plastyczna nie będzie rozciągała się na całą długość elementu rusztu L_{kl} , wówczas jeden z punktów "i", "j" wyznaczy nam granicę strefy plastycznej L_{ij}^p , czyli $L_{ij}^p \neq L_{kl} \neq L_{il}$ /rysunek 6.4/, lub $L_{ij}^p \neq L_{kj}$.



Rys. 6.4

W przypadku gdy na konstrukcję działają obciążenia skupione /siła skupiona, skupiony moment zginający lub skupiony moment skręcający/, wówczas uogólnione siły wewnętrzne w konstrukcji pomiędzy sąsiednimi przekrojami krytycznymi zmieniają się w sposób liniowy. Zatem stan samonaprężeń przekrojowych s_{mn}/x na długości elementu L_{ij} możemy opisać poprzez współczynniki α/x oraz β/x w sposób następujący :

$$(84) \quad \begin{aligned} \alpha/x &= \alpha_{oi} + [x/L_{ij}] \cdot [\alpha_{oj} - \alpha_{oi}] \\ \beta/x &= \beta_{oi} + [x/L_{ij}] \cdot [\beta_{oj} - \beta_{oi}] \end{aligned}$$

gdzie α_o oraz β_o są wartościami współczynników α/x i

$\beta/x/$ na brzegu elementu "i" lub "j" dobranymi z kryterium minimalizacji energii dysypowanej K . Wykorzystując wcześniejszy wzór (65), po podstawieniu za $\alpha/x/$ i $\beta/x/$ wartości (84) i po przeprowadzeniu całkowania po długości strefy plastycznej L_{ij}^p , otrzymamy następującą zależność na energię dysypowaną w strefie plastycznej L_{ij}^p :

$$85 \quad \bar{K} = \frac{\sigma_0^2 R^2 L_{ij}^p s}{6E/s-1} \left[\frac{\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36}}{\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}} \left(\alpha_{oi}^2 + \alpha_{oi} \alpha_{oj} + \alpha_{oj}^2 \right) + \frac{35\pi}{81} \left(\beta_{oi}^2 + 3\beta_{oi} \beta_{oj} + \beta_{oj}^2 \right) \right]$$

Podobnie jak w zadaniu ze wspornikiem, funkcję powyższą należy zminimalizować przy następujących ograniczeniach /po obszarach ω_i , ω_j - rys. 6.5, 6.6 /:

$$(86) \quad / \alpha_i - m_i /^2 + / \beta_i - \bar{m}_i /^2 \leq 1$$

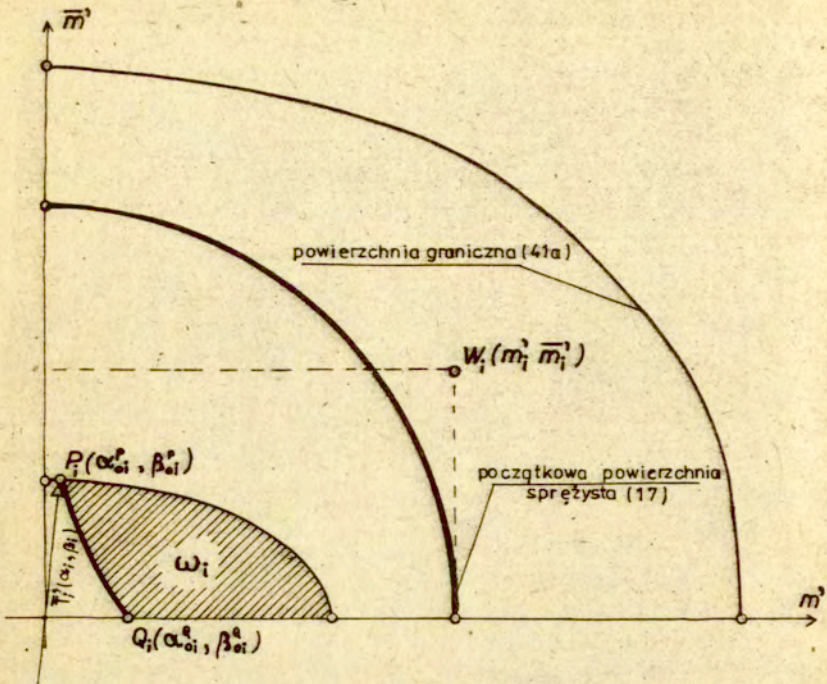
$$(87) \quad / \frac{\pi \alpha_i}{16/3 - \pi} /^2 + / 3\beta_i /^2 \leq 1$$

$$(88) \quad / \alpha_j - m_j /^2 + / \beta_j - \bar{m}_j /^2 \leq 1$$

$$(89) \quad / \frac{\pi \alpha_j}{16/3 - \pi} /^2 + / 3\beta_j /^2 \leq 1$$

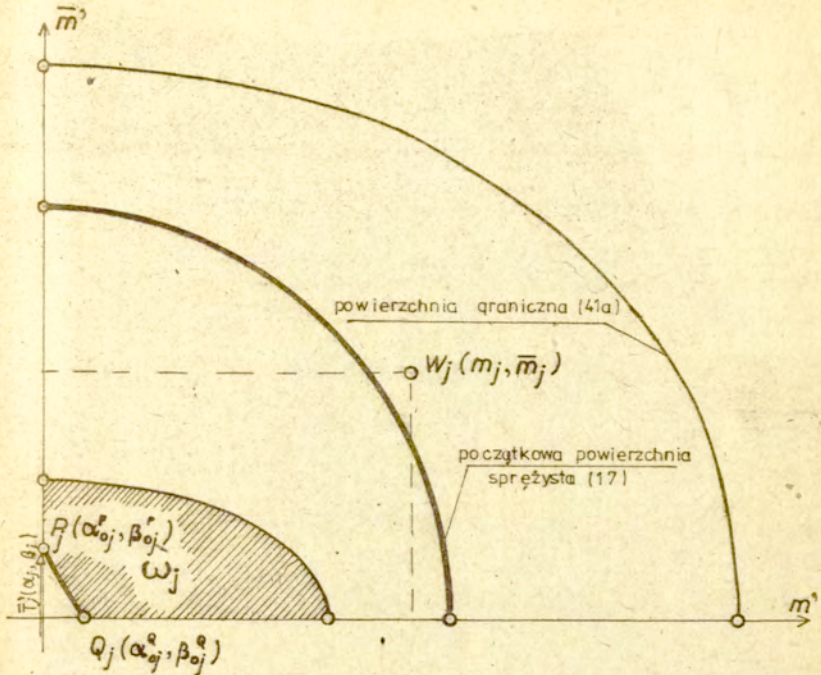
gdzie podobnie jak poprzednio $m' = \frac{16}{3\pi} m$, $\bar{m}' = \frac{4}{3} \bar{m}$, oraz m - jest bezwymiarowym momentem zginającym a \bar{m} - bezwymiarowym momentem skręcającym. Należy zatem poszukiwać rozwiązania po łuku $\overline{P_i Q_i}$ oraz $\overline{P_j Q_j}$ /rys. 6.5, 6.6 /. Wykorzystując zależności (86), (88) i obliczając β_{oi} oraz β_{oj} po podstawieniu do (85) otrzymamy:

$$(90) \quad \bar{K} = \frac{\sigma_0^2 R^2 L_{ij}^p s}{27s-1/3E} \left[\frac{\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36}}{\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}} \left(\alpha_{oi}^2 + \alpha_{oi} \alpha_{oj} + \alpha_{oj}^2 \right) + \frac{35\pi}{81} \left((\bar{m}_i - \sqrt{1 - /m_i' - \alpha_{oi}' /^2})^2 + (\bar{m}_j - \sqrt{1 - /m_j' - \alpha_{oj}' /^2})^2 + (\bar{m}_i - \sqrt{1 - /m_i' - \alpha_{oi}' /^2})^2 + (\bar{m}_j - \sqrt{1 - /m_j' - \alpha_{oj}' /^2})^2 \right) \right]$$



Rys. 6.5

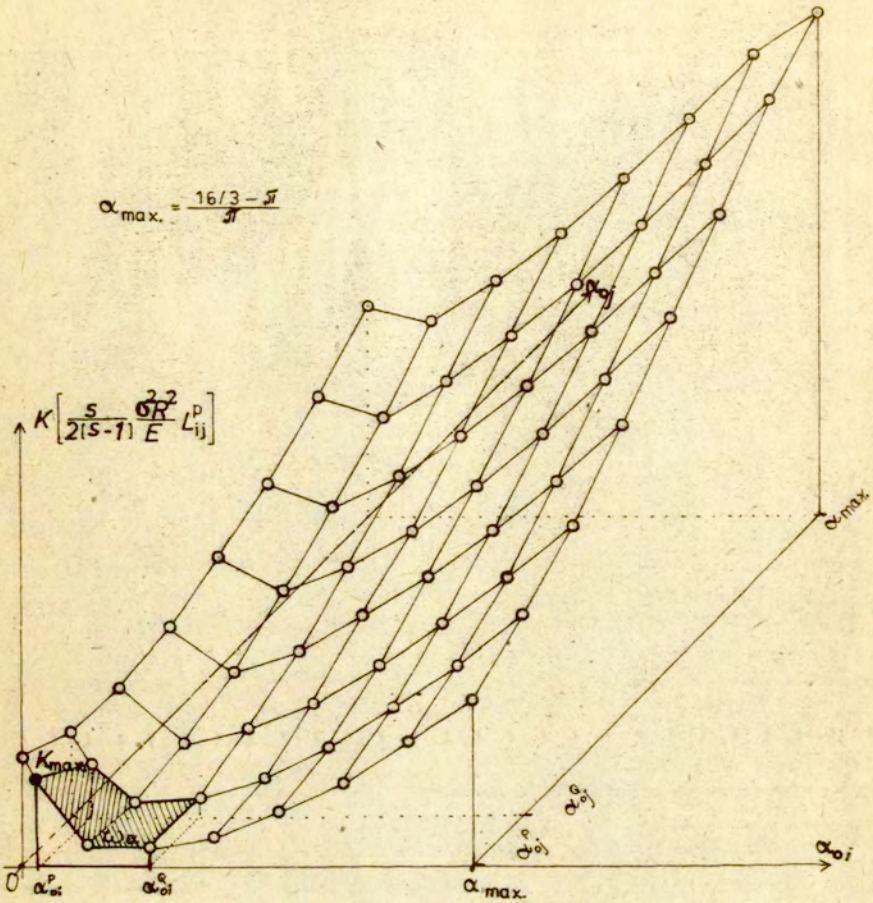
Przykładowo dla $m_1' = 1.0$, $m_j' = 0.9$, $\bar{m}_1' = \bar{m}_j' = 0.6$, przebieg funkcji dysypacji $K/\alpha_{oi}, \alpha_{oj}$, będzie taki jak na rysunku 6.7. Z kolei na podstawie ograniczeń (86), (88), obszarem nas interesującym jest ten ograniczony przez wartości α_{oi}^P i α_{oi}^Q oraz α_{oj}^P i α_{oj}^Q , odpowiednio w kierunku osi α_{oi} oraz α_{oj} /rysunek 6.7/. W tak wyodrębnionym obszarze poszukujemy maksymalnej wartości energii dysypowanej $K_{max}/\alpha_{oi}, \alpha_{oj}$, gdyż zakładamy zgodnie z (83), że obciążenia zmieniają się dowolnie. Nie znamy zatem z góry historii przyszłych obciążeń i odciążenia, a zatem nie możemy przewidzieć "wędrówki" początkowej powierzchni sprężystej. Nie znamy więc jej ostatecznego położenia /znamy je jedynie z dokładnością do łuku $\widehat{P_i Q_i}$ oraz $\widehat{P_j Q_j}$ - rys. 6.5, 6,6 /, kiedy to następuje stabilizacja odkształceń trwałych.



Rys. 6.6

Jak wynika z rysunku 6.7 lokalne maksimum energii dysypowanej występuje na brzegu wyodrębnionego obszaru Ω_α w punkcie o współrzędnych $\alpha_{oi}^P, \alpha_{oj}^P$. Zatem translacja początkowej powierzchni sprężystej o wektor $\bar{T}_i / \alpha_i, \beta_i$ oraz o wektor $\bar{T}_j / \alpha_j, \beta_j$ /rys. 6.5, 6.6/, odpowiednio dla przekroju "i" oraz "j", powoduje maksymalną dysypację energii w strefie plastycznej L_{ij}^P . Tą też wartość energii należy przyjąć do oszacowania przemieszczeń trwałych danej konstrukcji.

W przypadku gdy strefa plastyczna nie rozciąga się na całą długość elementu L_{kl} pomiędzy dwoma sąsiednimi przekrojami krytycznymi /rysunek 6.4/, należy wówczas dodatkowo obliczyć długość strefy plastycznej L_{ij}^P . Korzystamy przy tym z równania na początkową powierzchnię sprężystą (14). Po



Rys. 6.7

przekształceniach otrzymamy następującą zależność :

$$(91) \quad L_{ij}^P = \frac{4 \sigma_0 R^3 L_{ik}}{3/M_k - M_i} \left[\frac{3\pi}{16} \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi \sigma_0 R^3} M_{ik} \right)^2} - \frac{3M_i}{4 \sigma_0 R^3} \right]$$

gdzie M_i , M_k są wartościami momentów zginających odpowiednio

w przekrojach "i" oraz "k" , \bar{M}_{ik} jest wartością momentu skręcającego , R jest promieniem przekroju pręta. Stała wartość momentu skręcającego \bar{M}_{ik} na długości elementu L_{ik} wynika z przyjętego wcześniej charakteru obciążeń w postaci sił skupionych lub też skupionych momentów zginających czy skupionych momentów skręcających.

Formułując dalej pewien algorytm postępowania przy szacowaniu przemieszczeń trwałych /reszkowych/ konstrukcji prętowej należy :

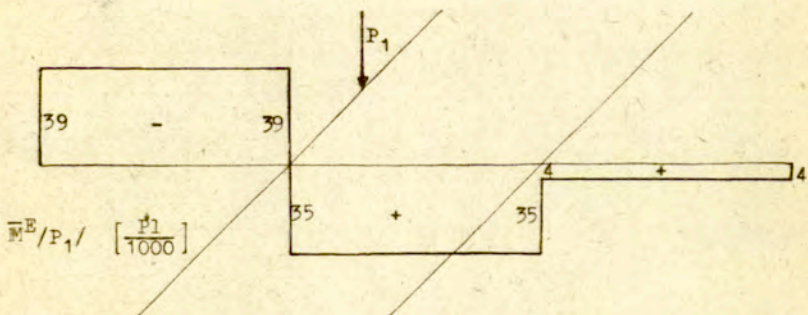
1/ Zlokalizować strefy plastycznego płynięcia w oparciu o wykresy sprężystych momentów zginających M^E i skręcających \bar{M}^E oraz reszkowych momentów zginających M^R i skręcających \bar{M}^R /rysunki 6.8 + 6.12 /. Korzystamy przy tym z równania początkowej powierzchni sprężystej (14) .

2/ Korzystając z równań (86) + (89) znaleźć współrzędne punktów P_i, Q_i, P_j, Q_j /rys. 6.5, 6.6/ dla każdej strefy L_{ij}^P .

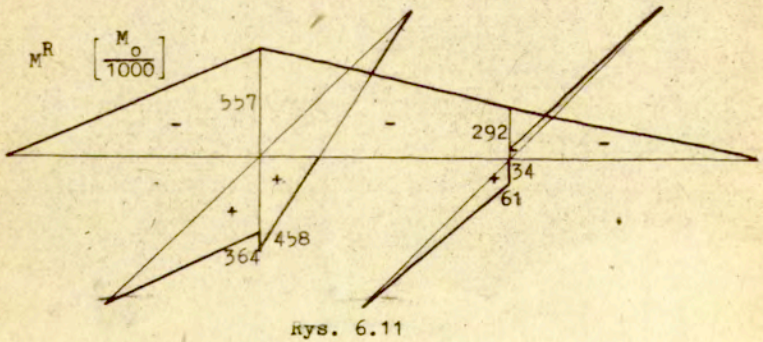
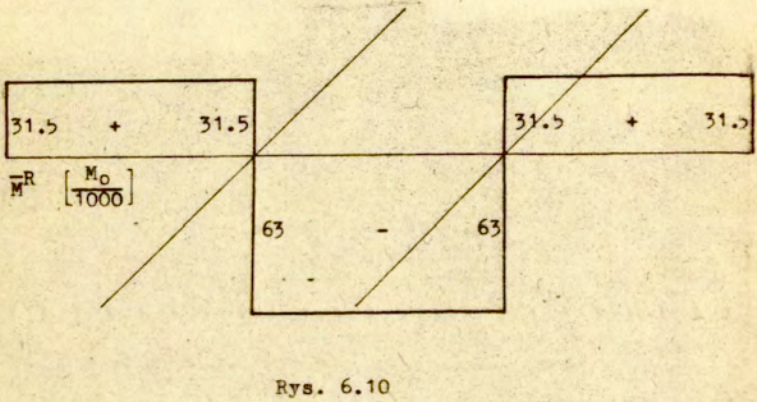
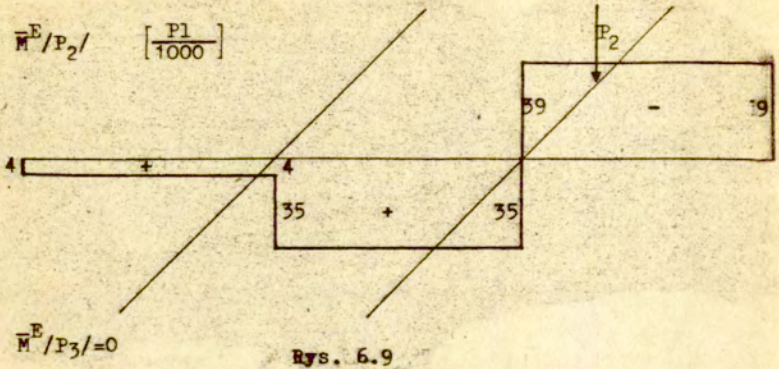
3/ Obliczyć na podstawie równania (90) maksymalną pracę plastyczną K_{max}^P w obszarze Ω_α sprecyzowanym przez współrzędne $\alpha_{oi}/\alpha_{oi}^Q, \alpha_{oi}^Q$ oraz $\alpha_{oj}/\alpha_{oj}^P, \alpha_{oj}^Q$ dla każdej strefy plastycznej .

4/ Obliczyć całkowitą energię dysypowaną we wszystkich strefach plastycznych oraz energię dysypowaną w przegubach plastycznych.

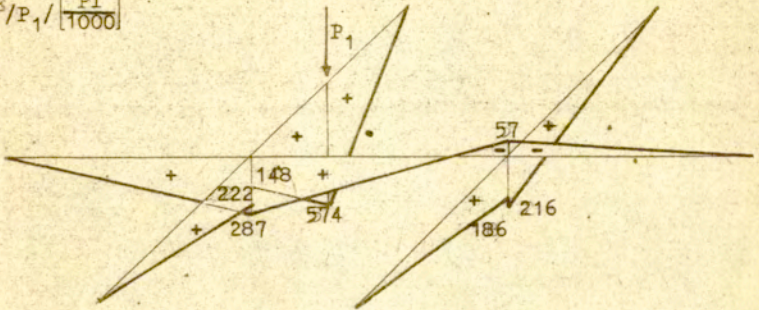
5/ Na podstawie zależności (57) oszacować przemieszczenia konstrukcji.



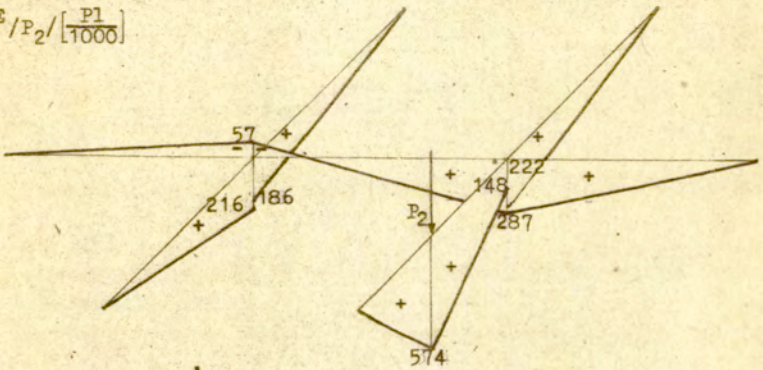
Rys. 6.8



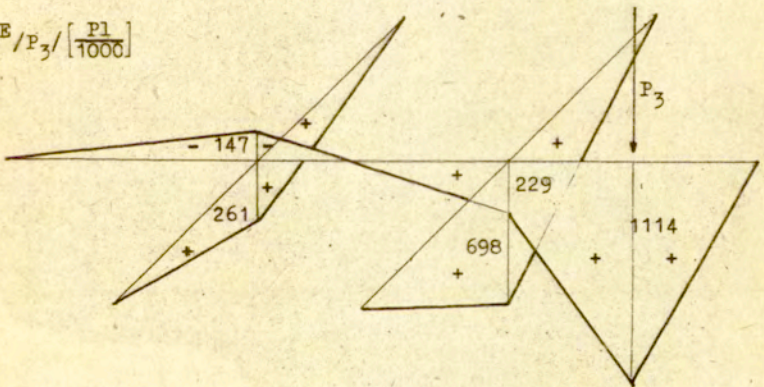
$$M^E/P_1 / \left[\frac{P_1}{1000} \right]$$



$$M^E/P_2 / \left[\frac{P_1}{1000} \right]$$

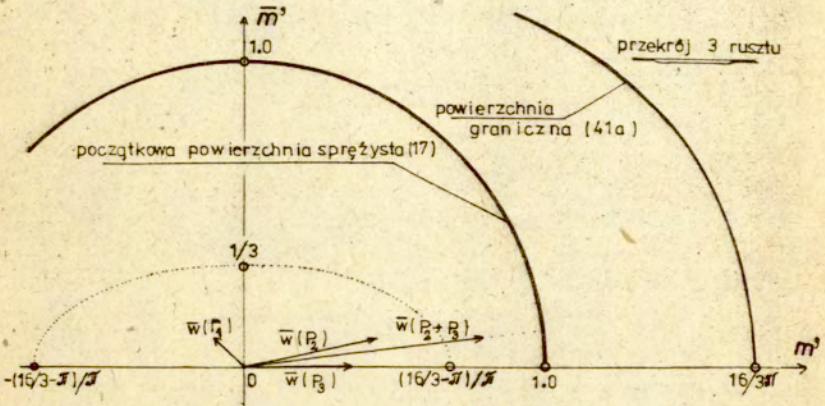


$$M^E/P_3 / \left[\frac{P_1}{1000} \right]$$



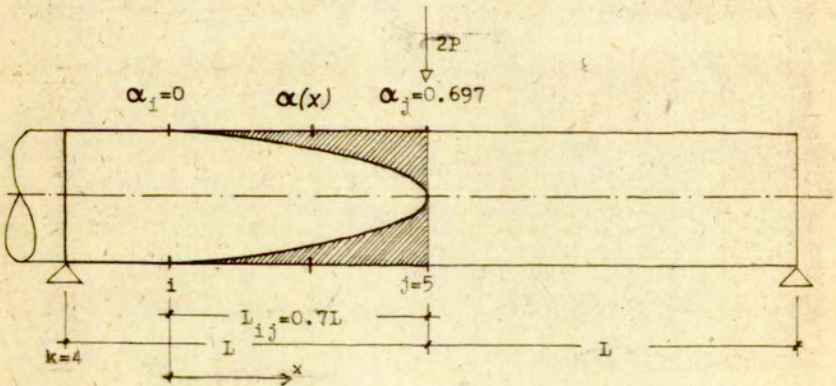
Rys. 6.12

Przykładowo dla belki 2-3 rozpatrywanego rusztu /rysunek 6.1 /, wartość energii plastycznej K_{2-3} jest równa zero gdyż żadna z kombinacji obciążeń nie wykracza poza początkową powierzchnię sprężystą (15) /rysunek 6.13 /.



Rys. 6.13

Dla odcinka rusztu 4-5 /rys. 6.14/ , na podstawie (14) , okazuje się, że przekrój "4" zachowuje się czysto sprężystie, natomiast przekrój "5" jest uplastyczniony. Obliczamy zatem z (91) zasięg strefy plastycznej L_{ij}^P , wynosi ona $L_{ij}^P = 0.697L$.



Rys. 6.14

Następnie na podstawie układu równań (88) , (89) obliczymy wartość α_{oj} , wynosi ona $\alpha_{o5} = 0.697$. Należy dodać, że w tym przypadku /to znaczy gdy przekrój jest całkowicie uplastyczniony - powstaje przegub plastyczny / wartość α_{oj} jest jednoznacznie określona /dostajemy z równań (88) , (89) jeden pierwiastek, to znaczy $\alpha_{oj}^P = \alpha_{oj}^Q$ / i nie zachodzi potrzeba poszukiwania K_{max} . po łuku $P_j Q_j$ gdyż otrzymana wartość jest zarazem wartością maksymalną. Innymi słowy obszar ω_α /rys.6.7/ redukuje się do jednego punktu. Natomiast w przekroju "i" to jest na granicy strefy plastycznej, wartości α_{oi}^P , α_{oi}^Q wynoszą oczywiście zero. Ostatecznie więc energia dysypowana w tej strefie plastycznej na podstawie (90) wyniesie :

$$(92) \quad \bar{K}_{4-5} = 0.610761 \frac{s}{2/s-1} \frac{\sigma_o^2 R^2}{3E} L_{4-5}$$

Postępując w podobny sposób dla pozostałych elementów rusztu otrzymamy energię dysypowaną w całej konstrukcji /we wszystkich strefach plastycznych /. Wynosi ona :

$$(93) \quad \bar{K} = \int_V \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{E} + \frac{\bar{\tau}^2}{2G} \right) /dV \frac{s}{2/s-1} = \sum_{i=1}^n K_{i-j} = 2.554 \frac{s \sigma_o^2 R^2 L_{i-j}}{2/s-1/E}$$

gdzie n jest ilością stref plastycznych w ruszcie.

Na podstawie równania (64) energia dysypowana w przegubach plastycznych wyniesie :

$$(94) \quad K^o = \int_L \left(\frac{M_o^2}{EJ} + \frac{\bar{M}_o^2}{2GJ_o} \right) /dL \frac{s}{2/s-1} = 1.981 \frac{s \sigma_o^2 R^2 L}{2/s-1/E}$$

Stąd :

$$(95) \quad K = \bar{K} + K^o = 4.535 \frac{s}{2/s-1} \frac{\sigma_o^2 R^2 L}{E}$$

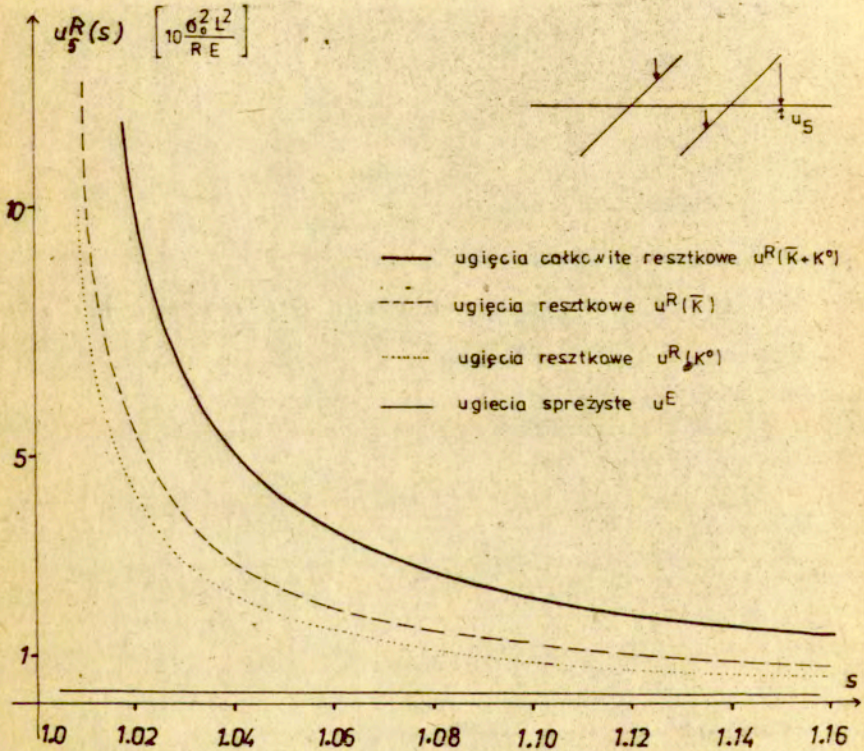
Zatem przemieszczenie przykładowo punktu piątego /rysunek 6.1/ wyniesie :

$$(96) \quad u_5^R = \frac{\max |M|}{W \sqrt{\frac{2}{3} \sigma_0}} / \bar{K} + K^0 / = 3.946 \frac{s}{2/s-1} \frac{\sigma_0^2 L^2}{RE}$$

Wartość ugięć sprężystych w analogicznym punkcie 5 wynosi :

$$(97) \quad u_5^E = 2.002 \frac{\sigma_0^2 L^2}{ERs}$$

Obliczone wartości przemieszczeń w funkcji współczynnika bezpieczeństwa s przedstawiono na rysunku 6.15



Rys. 6.15

Widzimy, że dla małych wartości współczynnika bezpieczeństwa s oszacowana wartość przemieszczeń rezidualnych znacznie przekracza analogiczne przemieszczenia sprężyste.

7. WNIOSKI

1. Wartość energii dysypowanej w strefach plastycznych jest w rozważanym przykładzie tego samego rzędu co wartość energii dysypowanej w przegubach plastycznych. Pominięcie więc członu (65) w oszacowaniu ugięć konstrukcji o elementach "nie idealnych" może prowadzić do znacznych błędów.
2. Otrzymany związek na powierzchni granicznej okazał się bardzo złożony w porównaniu z np. dolnym oszacowaniem. Niemniej dla pewnych odmiennych przypadków złożonego stanu naprężenia w przekroju konstrukcji sposób ten może dawać bardziej zadowalające wyniki.
3. Istnieją już algorytmy pozwalające obliczać nośność graniczną, czy obciążenie przystosowania rusztów w sposób automatyczny [14]. Niewiele jest jednak prac poświęconych problemowi szacowania ugięć przy obciążeniach zmiennych, szczególnie w przypadkach gdy nie możemy pominąć zagadnienia powstawania stref plastycznych. Niniejsza praca jest próbą przedstawienia tego problemu, dla pewnego szczególnego przypadku stanu naprężenia w przekroju /zginanie, skręcanie/ przy wykorzystaniu wyników pracy [3].
4. W przykładzie ze wspornikiem, nie można pominąć skręcania przy szacowaniu ugięć resztkowych, gdyż jego wpływ na wielkość dysypowanej energii jest znaczny. Natomiast w przypadku rusztu wpływ skręcania na wielkość dysypowanej energii jest pomijalnie mały.

LITERATURA

1. BANDYSZEWSKI W., SAWCZUK A., Przybliżona metoda obliczania przemieszczeń belek i ram sprężysto-plastycznych. AIL Tom XX zeszyt 1, 1974.
2. BRZEZIŃSKI R., KÖNIG J.A., Evaluation of shakedown deflection of framed structures by linear programming. Proc.Symp.Plastic Analysis of Structures, Jassy, 1972, 101 - 116.
3. DOROSZ S., Metoda szacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych w stanie przystosowania. Prace IPPT, Warszawa 1977.
4. EMPACHER A.B., Mały słownik matematyczny. Wiedza Powszechna, Warszawa 1974.
5. EYRE D.G., GALAMBOS T.V., Deflection analysis for shakedown. J.Struct.Div. 96, 1970, 1359 - 1376.
6. GRUNDY P., Shakedown of bars in bending and tension, J.E.M.D. June 1969, EM 3.
7. KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids. Progress in Solid Mechanics. North Holland, 1960, 165 - 221.
8. MELAN E., Die Spannungszustand eines Mises-Henkyscher Kontinuums bei veränderlicher Belastung, Sitz.Ber.Ak.Wiss., Wien, Abt. IIa, 147, 1938, 73.
9. SAWICKI T., Przykład zastosowania teorii przystosowania do analizy rusztu płaskiego. Prace IPPT, Warszawa 1980.
10. SPENCER W.J., Shakedown of elastoplastic grids. A Dissertation Submitted to the Faculty of Engineering in Fulfillment of the Requirement for the Degree of Doctor of Philosophy. Monash, Victoria, September 1976.
11. KÖNIG J.A., KLEIBER M., On a new method of shakedown analysis. Bull.Ac.Pol.Sci.Ser.Sci.Techn. 26, 1978, 165 - 171.
12. KÖNIG J.A., Theory of shakedown of elastic-plastic structures. Arch.Mech.Stos., 18, 1966, 227 - 238.
13. KÖNIG J.A., Deflection bounding of shakedown under thermal and mechanical loadings. 2nd Conf. SMiRT, Berlin 1973, vol. I, no 7/3.

14. KÖNIG J.A., Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie. MTS, 1970, 149 - 158.
15. KÖNIG J.A., SAWCZUK A., PAPROCKA-GRABCZYŃSKA W., Obliczanie ram i belek na przystosowanie. Zeszyty problemowe "Mostostal" nr 5, Warszawa 1974.
16. KÖNIG J.A., A method of shakedown analysis of frames and arches. Int.J.Solids Structures, 1971, Vol.7, pp. 327 - 344. Pergamon Press.
17. KÖNIG J.A., Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych. Prace IPPT, 24, 1974.
18. ŻYCZKOWSKI M., Obciążenia złożone w teorii plastyczności, Warszawa 1973.