

4,44 — tarcze, płyty, powłok

M. Kleiber, W. Sosnowski

LARSTRAN
SYSTEM NIELINIOWEJ ANALIZY
KONSTRUKCJI
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

47/1985

P. 269

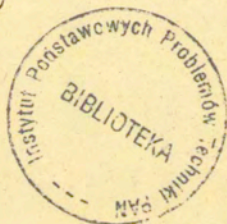


WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 czerwca 1985 r.

56902



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 3,4 Ark.druk. 4,75

Oddano do druku w listopadzie 1985 r.

Nr zamówienia 393/86.

**Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8**

Michał Kleiber, Włodzimierz Sosnowski
Zakład Teorii Konstrukcji

LARSTRAN - SYSTEM NIELINIOWEJ ANALIZY KONSTRUKCJI
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie

Celem pracy jest przedstawienie podstaw teoretycznych oraz sposobu praktycznego wykorzystywania systemu numerycznej analizy konstrukcji LARSTRAN. System ten oparty jest na metodzie elementów skończonych i wykorzystuje tzw. formalizm naturalny. Służy do analizy dużych odkształceń sprężystych i niesprężystych konstrukcji, przy dowolnie dużych zmianach jej geometrii. Dokonana przez system analiza ma charakter przyrostowy. Uwzględnienie nieliniowości materiałowych następuje poprzez alternatywne użycie metody zmiennej sztywności lub metody początkowych obciążeń. Ta ostatnia istnieje w wersji początkowych naprężeń lub początkowych odkształceń.

Pracę zilustrowano przykładami obliczeń kilku różnych konstrukcji powłokowych i prętowych.

1. Wstęp

W pracy niniejszej opisujemy szkic podstaw teoretycznych oraz sposób praktycznego wykorzystywania systemu numerycznej analizy konstrukcji o nazwie LARSTRAN /LARGe STRAiNs/. Prace nad zbudowaniem tego systemu nieliniowej analizy konstrukcji rozpoczęte zostały w Instytucie Statyki i Dynamiki Uniwersytetu w Stuttgarcie w roku 1974. Podjęcie tego zadania spowodowane było z jednej strony koniecznością dokonywania dla różnorodnych zleceniodawców nieliniowych obliczeń numerycznych dotyczących skomplikowanych układów konstrukcji, z drugiej zaś strony stwierdzoną niemożnością efektywnego rozbudo-

wywnania istniejących systemów analizy liniowej w kierunku pełnego uwzględnienia w nich efektów geometrycznie i materiałowo nieliniowych. Za podstawę analizy przyjęto metodę elementów skończonych, a w szczególności jej wersję w postaci tzw. formalizmu naturalnego. Pierwotna wersja systemu LARSTRAN oparta na pracy [1] dotyczyła analizy dużych odkształceń konstrukcji sprężystych. System został gruntownie przebudowany w momencie uwzględnienia w nim możliwości analizy niesprężystej w oparciu o teorię sformułowaną w pracy [2].

Opracowany program dopuszcza możliwość powstawania w analizowanym układzie konstrukcyjnych dużych odkształceń sprężystych i niesprężystych. Teoretyczną podstawą analizy jest tu koncepcja tzw. konfiguracji pośredniej w wersji zaproponowanej w pracach [3], [4].

Dopuszczalne są dowolnie duże zmiany geometrii konstrukcji. W obecnej wersji uwzględniono obciążenia zewnętrzne jedynie typu quasi-statycznego. Istnieje możliwość analizy konstrukcji z materiału charakteryzowanego równaniem konstytutywnym sprężysto-plastyczności lub sprężysto-lepkoplastyczności. W systemie istnieją obecnie cztery różne elementy, za pomocą których idealizować można analizowane układy. Są to elementy: prętowy /tzw. FLA2/, membranowy /TRIM3/, przestrzenny /TET4/ oraz osiowosymetryczny /TRIAX3/. Istnieje możliwość łączenia elementów TET4 w jeden przestrzenny superelement tzw. HETET.

Dokonywane przez system analiza konstrukcji ma charakter przyrostowy. Zależnie od decyzji użytkownika uwzględnienie nieliniowości materiałowych następuje poprzez alternatywne użycie metody zmiennej sztywności lub metody początkowych obciążeń. Ta ostatnia istnieje w wersji początkowych naprężeń oraz w wersji początkowych odkształceń.

Ze względu na udział pierwszego z autorów niniejszej pracy przy opracowywaniu LARSTRAN-u system ten uruchomiony został także na maszynie cyfrowej CYBER w Warszawie. Korzystanie z systemu znajdującego się na taśmie magnetycznej w Świerku możliwe jest z terminalu PAN-u w PKiN.

System LARSTRAN podlega aktualnie dalszej rozbudowie. W przyszłości uwzględnione będą w szczególności:

- obciążenia typu dynamicznego,
- inne rodzaje elementów skończonych /elementy wyższych rzędów, elementy belkowe, elementy powłokowe/,
- szersza klasa równań konstytutywnych,
- udoskonalone algorytmy algebraiczne,
- pełniejsze wykorzystanie hierarchicznego układu pamięci maszyny cyfrowej.

2. Podstawy teorii

W rozdziale tym omówimy podstawowe aspekty naturalnego sformułowania metody elementów skończonych, na bazie którego opracowano system LARSTRAN. Szczegóły nieliniowego zachowania się konstrukcji w ramach tej koncepcji znaleźć można w pracach [1-2, 4-9] oraz, w pełnym ujęciu, w pracy [10]. Ta ostatnia publikacja zawiera również podstawy analizy liniowej, na temat której napisano w latach 60-tych wiele prac, ujętych w bibliografiach artykułów cytowanych wyżej.

2.1. Ogólna charakterystyka naturalnego opisu zagadnień dyskretyzowanych

Pomimo, iż teoretyczne podstawy MES osiągnęły obecnie wysoki poziom matematycznej precyzji nie należy zapominać o podstawowej roli, jaką w rozwoju metody odegrała fizyczna intuicja badaczy tworzących jej zaciątki. Jak wskazuje wiele aktualnych zastosowań, fizyczna interpretacja poszczególnych wielkości sprzyja również obecnie opracowywaniu jeszcze skuteczniejszych algorytmów analizy numerycznej, umożliwiając wprowadzanie do nich wielu praktycznie dopuszczalnych uproszczeń trudno widocznych w zbiorze skomplikowanych i ściśle sformalizowanych równań metody. Jednym z podejść, której z jednej strony uznać można za podstawowe dla historycznego rozwoju MES, z drugiej zaś za oferujące duże możliwości inżynierskiej interpretacji poszczególnych wielkości jest tzw.

"naturalny" opis zagadnień dyskretyzowanych /nazywać go będziemy krótko NOZD/. W najprostszy sposób NOZD określić można jako metodę umożliwiającą /na etapie rozważań dotyczących kinematyki poszczególnych elementów skończonych/ rozdzielenie sztywnego ruchu każdego z elementów od względnego ruchu jego poszczególnych węzłów, powodującego powstawanie odkształceń. Zasadniczym krokiem przy stosowaniu NOZD jest określenie macierzy tzw. naturalnej sztywności elementu. Macierz ta jest niezmiennicza względem lokalnych układów współrzędnych i związana jest ściśle z rzeczywistą geometrią analizowanego elementu. Opisuje ona sztywność elementu względem tzw. naturalnych postaci deformacji. Naturalny opis deformacji elementu odpowiada formalnie wyeliminowaniu spośród wszystkich kartezjańskich stopni swobody elementu uogólnionych współrzędnych odpowiadających sztywnym ruchom elementu. Ponieważ te ostatnie nie wpływają na stan odkształceń w elemencie, ich uwzględnianie przy konstruowaniu macierzy sztywności elementu jest w pewnym sensie zbędne.

Stosując NOZD otrzymujemy znaczną redukcję wymiaru macierzy sztywności elementu. I tak np. w przypadku najprostszego, płaskiego elementu trójkątnego TRIM3, por. rozdział 2.2 wydzielonego w układzie płaskim obciążonym w jego płaszczyźnie zastosowanie NOZD redukuje wymiar macierzy sztywności z 6 /3 węzły razy 2 przemieszczenia w każdym z nich/ do 3, bowiem odpadają trzy stopnie swobody odpowiadające możliwym w tej sytuacji sztywnym ruchom tj. dwóm przesunięciom oraz obrotowi całego elementu. Jak to wynika z rozważań nad naturalnymi postaciami deformacji rozpatrywanego elementu, naturalna macierz sztywności łączy z sobą wydłużenia brzegów elementu z siłami węzłowymi działającymi wzdłuż tych brzegów. Prostota podejścia wynika więc tu z faktu ścisłego powiązania kinematycznych i dynamicznych wielkości charakteryzujących ruch elementu z jego geometrią.

Najbardziej spektakularnym przykładem zastosowania NOZD była analiza zagadnień małych odkształceń w konstrukcjach, których fragmenty doznawać mogą dużych obrotów /np. cienkie powłoki, belki/. NOZD umożliwia bowiem w takich przypadkach zastosowa-

nie kinematycznie zlinearyzowanego opisu deformacji elementu, uwzględniając wszystkie efekty nieliniowe jedynie podczas transformacji z lokalnego do globalnego układu współrzędnych.

2.2. Sprężysta macierz naturalnej sztywności elementu skończonego

Rozpatrzmy dowolny element skończony i załóżmy, że aproksymacja stanu przemieszczenia wewnątrz elementu dana jest w postaci

$$(2.1) \quad \underline{u}(x) = \underline{W}(x)_{d \times H} \quad {}^{(e)} \underline{u}_{H \times 1}$$

We wzorze (2.1) $\underline{W}(x)_{d \times H}$ jest znaną macierzą funkcji kształtu zaś ${}^{(e)} \underline{u}_{H \times 1}$ wektorem uogólnionych przemieszczeń węzłów elementu. Wprowadzmy dla rozpatrywanego elementu wektor sztywnych ruchów $\underline{u}_0_{H \times 1}$ oraz wektor naturalnych postaci deformacji $\underline{u}_N_{H' \times 1}$, $M' + M'' = M$. Wektory \underline{u}_0 , \underline{u}_N tworzą wspólnie wektor uogólnionego przemieszczenia $\underline{u}_{ON_{H \times 1}} = \left\{ \begin{matrix} \underline{u}_0 & \underline{u}_N \\ H \times 1 & H' \times 1 \end{matrix} \right\}$ dla którego istnieć musi jednoznaczny i odwracalny związek

$$(2.2) \quad \underline{u}_{ON_{H \times 1}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_0_{H' \times H} \\ \underline{a}_N_{H'' \times H} \end{bmatrix} \quad {}^{(e)} \underline{u}_{H \times 1} = \underline{a}_{ON_{H \times H}} \quad {}^{(e)} \underline{u}_{H \times 1}$$

Znaczenie wprowadzonych wyżej wielkości, odgrywających zasadniczą rolę w NOZD, wyjaśniono na przykładach na rys. 1. Przedstawiono na nim składowe wektorów \underline{u}_0 oraz \underline{u}_N dla trzech elementów skończonych rozpatrywanych na płaszczyźnie: prostego pręta, trójkątnej membrany oraz prostej belki.

Równanie 2.2 zapiszemy w postaci odwróconej jako

$$(2.3) \quad {}^{(e)} \underline{u}_{H \times 1} = \underline{a}_{ON_{H \times H}}^{-1} \quad {}^{(e)} \underline{u}_{ON_{H \times 1}} = \underline{A}_{ON_{H \times H}} \quad {}^{(e)} \underline{u}_{ON_{H \times 1}}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \underline{A}_{ON} = \begin{bmatrix} \underline{A}_O & \underline{A}_N \end{bmatrix}$$

Zwracamy uwagę, że związki (2.2) i (2.3) mają czysto kinematyczny charakter. Wykorzystując (2.1) oraz (2.3) otrzymamy zależność

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \underline{u}(\kappa)_{d \times 1} &= \underline{\omega}(\kappa)_{d \times M} \underline{A}_{ON} \underline{u}_{ON} = \underline{\omega}(\kappa)_{d \times M} \begin{bmatrix} \underline{A}_O & \underline{A}_N \end{bmatrix} \underline{u}_{ON} = \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\omega}_O(\kappa)_{d \times M} & \underline{\omega}_N(\kappa)_{d \times M} \end{bmatrix} \underline{u}_{ON} = \underline{\omega}_{ON} \underline{u}_{ON} \end{aligned}$$

w której zdefiniowano

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \underline{\omega}_O(\kappa) &= \underline{\omega}(\kappa) \underline{A}_O \\ \underline{\omega}_N(\kappa) &= \underline{\omega}(\kappa) \underline{A}_N \end{aligned}$$

Każdemu wektorowi uogólnionych przemieszczeń węzłów elementu /tj. na przykład wektorowi ${}^{(e)}\underline{u}_{H \times 1}$ lub wektorowi ${}^{(e)}\underline{u}_{ON \ H \times 1}$ odpowiada pewien wektor uogólnionych sił węzłowych. Odpowiedniość ta rozumiana jest, jak poprzednio, w sensie możliwości zdefiniowania odpowiedniego wyrażenia na pracę wirtualną. Mamy więc

$$(2.7) \quad \delta {}^{(e)}\underline{u}_{H \times 1}^T \delta {}^{(e)}\underline{U}_{H \times 1} = \delta \underline{u}_{ON}^T \delta \underline{U}_{ON \ H \times 1}$$

skąd, wykorzystując (2.2)

$$(2.8) \quad {}^{(e)}\underline{U}_{H \times 1} = \underline{a}_{ON}^T \underline{U}_{ON \ H \times 1} = \underline{a}_O^T \underline{U}_O + \underline{a}_N^T \underline{U}_N$$

Zależność odwrotną napiszemy w postaci

$$(2.9) \quad \underline{U}_{ON} = \begin{bmatrix} \underline{u}_O \\ \underline{u}_N \end{bmatrix} = \underline{A}_{ON}^T {}^{(e)}\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{A}_O^T \\ \underline{A}_N^T \end{bmatrix} {}^{(e)}\underline{U}$$

Ostatnie dwa równania są statycznym odpowiednikiem równań kinematycznych (2.2), (2.3). Wynika stąd, że macierze \underline{a}_{ON} i \underline{A}_{ON} mogą być również tworzone w oparciu o rozważania czysto statyczne.

Wprowadźmy następnie wektor odkształcenia. Pamiętając, że odkształcenie nie zależy od sztywnych ruchów ciała oraz zanedbując ewentualne odkształcenia wstępne napisać możemy

$$(2.10) \quad \underline{\varepsilon}_{f \lambda 1} = \underline{\alpha}_N f_{\lambda 1} H'' \underline{U}_{N H'' \lambda 1}$$

gdzie f jest liczbą składowych stanu odkształcenia występujących w konkretnym problemie. Pisząc równanie konstytutywne dla materiału liniowo sprężystego jako

$$(2.11) \quad \underline{\sigma}_{f \lambda 1} = \underline{E}_{f \lambda f} \underline{\varepsilon}_{f \lambda 1}$$

stosujemy następnie zasadę pracy wirtualnej w postaci

$$(2.12) \quad \delta \underline{U}_{ON}^T \underline{U}_{ON} + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\rho}_V dV = \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV$$

gdzie $\underline{\rho}_V$ jest wektorem sił masowych zaś V oznacza objętość elementu. Wprowadzając do (2.12) zależności (2.5) i (2.10) oraz wykorzystując możliwość dowolnego wyboru przemieszczeń wirtualnych \underline{U}_{ON} /które spełniać muszą jedynie przemieszczeniowe warunki brzegowe zadania/ otrzymamy

$$(2.13) \quad \underline{U}_0 + \int_V \underline{w}_0^T \underline{\rho}_V dV = 0$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \underline{U}_N + \int_V \underline{w}_N^T \underline{\rho}_V dV &= \int_V \underline{\alpha}_N^T \underline{\sigma} dV = \\ &= \left(\int_V \underline{\alpha}_N^T \underline{E} \underline{\alpha}_N dV \right) \underline{U}_N \end{aligned}$$

Równanie (2.13) wyraża fakt, że w stanie równowagi wypadkowe wszystkich sił działających na element muszą być równe zeru.

Siły "naturalne" \underline{U}_N znajdujące się po lewej stronie równania (2.14) stanowią natomiast układ samozrównoważony związany ze stanem przemieszczeń naturalnych \underline{u}_N za pomocą tzw. naturalnej macierzy sztywności \underline{K}_N zdefiniowanej jako

$$(2.15) \quad \underline{K}_{N_{H'' \times H'}} = \int_V \underline{\alpha}_N^T \underline{E} \underline{\alpha}_N dV$$

Zaniedbując siły masowe mamy więc związki

$$(2.16) \quad \underline{U}_0 = 0$$

$$(2.17) \quad \underline{U}_{N_{H'' \times 1}} = \underline{K}_{N_{H'' \times H''}} \underline{u}_{N_{H'' \times 1}}$$

z których drugi jest podstawowym równaniem NOZD. W wyniku podstawienia równania (2.17) do (2.8) otrzymamy zależność między naturalną a kartezjańską macierzą sztywności elementu w postaci

$$(2.18) \quad \underline{a}_{N_{H \times H''}}^T \underline{K}_{N_{H'' \times H''}} \underline{a}_{N_{H'' \times H}} = \underline{K}_{H \times H}$$

gdzie, zgodnie z definicjami podanymi w rozdziale 2.2 zachodzi związek

$$(2.19) \quad (e) \underline{U}_{H \times 1} = \underline{K}_{H \times H} (e) \underline{u}_{H \times 1}$$

W oparciu o otrzymane powyżej zależności sformułować już można pewną ogólną uwagę dotyczącą korzyści stosowania NOZD. Jak wiadomo, w dyskretyzowanej mechanice konstrukcji jedną z zasadniczych spraw rzutujących na koszt obliczeń jest liczba podstawowych operacji algebraicznych potrzebnych do sformułowania macierzy sztywności poszczególnych elementów. Ma to szczególne znaczenie w zagadnieniach nieliniowych rozwiązywanych na drodze przyrostowej, kiedy to na każdym kroku zachodzi często potrzeba budowania tych macierzy od nowa. W NOZD macierz

sztynności elementu jest wymiaru $M^n \times M^n$, podczas gdy w podejściu standardowym macierz ta ma wymiar $M \times M$. Jeśliby więc udało się w praktyce /co rzeczywiście zachodzi, [1]/ podać stosunkowo prosty i oszczędny algorytm dotyczący obliczania występującej w (2,18) macierzy $\underline{\alpha}_N^*$, to należałoby oczekiwać pewnych oszczędności całkowitego czasu obliczeń w przypadku stosowania NOZD. Na inne korzyści stosowania tej metody zwrócimy uwagę nieco później.

Na podstawie dotychczasowych rozważań stosowanie NOZD wydawać się może względnie proste w przypadku elementów bardzo prostych, takich jak np. pokazane na rys. 1. Przykłady efektywnego stosowania tego podejścia istnieją jednakże również w znacznie bardziej skomplikowanych przypadkach np. dla elementów o brzegach krzywoliniowych. W sytuacjach takich wykorzystuje się następujący ogólny sposób postępowania:

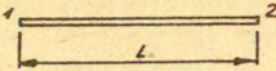
1. Punktem wyjścia są znane zależności otrzymane dla elementów prostych, nazywanych w tym kontekście elementami pierwotnymi.
2. Na tej podstawie otrzymuje się zależności dla elementów o wymiarach nieskończenie małych, dokonując przejścia granicznego na odpowiednich elementach pierwotnych.
3. Żądaną ostateczną postać macierzy sztywności krzywoliniowych elementów skończonych uzyskujemy poprzez całkowanie po obszarze elementów.

O postępowaniu powyższym mówi się, że wykorzystuje koncepcję tzw. podelementów lokalnych. Podelementem lokalnym nazywamy pierwotny element o prostych bokach przypisany do każdego punktu w krzywoliniowym układzie współrzędnych wprowadzonym w wyjściowym elemencie krzywoliniowym.

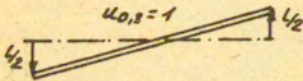
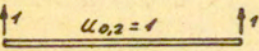
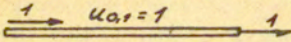
Długości boków podelementów lokalnych przyjmuje się albo równe odpowiednim wartościom metryki krzywoliniowego układu współrzędnych albo też jako odpowiednie wielkości nieskończenie małe. Lokalny podelement powinien być najprostszym z

* Budując globalną macierz konstrukcji musimy w każdym przypadku dysponować macierzami \underline{k} .

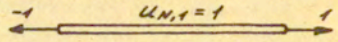
Prosty element prętowy w przestrzeni 2-wym ($M=4$)



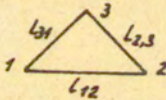
ruchy sztywne ($M'=3$)



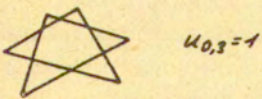
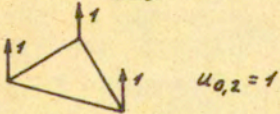
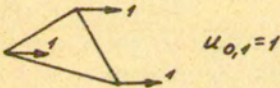
naturalne postaci deformacji ($M''=1$)



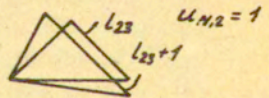
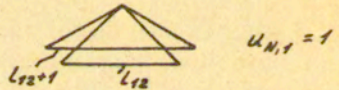
Trojkatny element membranowy w przestrzeni 2-wym ($M=6$)



ruchy sztywne ($M'=3$)

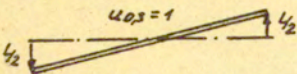
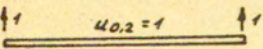
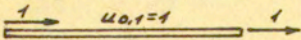


naturalne postaci deformacji ($M''=3$)

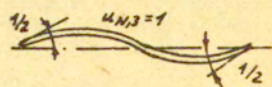
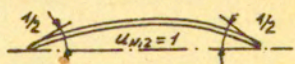
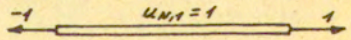


Prosty element belkowy w przestrzeni 2-wym ($M=6$)

ruchy sztywne



naturalne postaci deformacji ($M''=3$)



Rys. 1.

możliwych elementów pierwotnych o kształcie i charakterze występującego w nim stanu naprężenia odpowiadających elementowi wyjściowemu.

Dla np. trójkątnego, płaskiego elementu krzywoliniowego za podelementy lokalne przyjmuje się elementy TRIN3 zaś dla przestrzennego, czworościennego elementu krzywoliniowego - elementy TET4.

Wektor \underline{u}_L definiujący sztywne ruchy \underline{u}_{L0} oraz naturalne postaci deformacji \underline{u}_{LN} podelementu zapisać można jako:

$$(2.20) \quad \underline{u}_L = \begin{bmatrix} \underline{u}_{L0} \\ \underline{u}_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{L0} \\ \underline{a}_{LN} \end{bmatrix}_{M \times H} \underline{u}_{H \times 1} = \underline{a}_{L \quad M \times H} \underline{u}_{H \times 1}$$

gdzie macierz \underline{a}_L zależy od funkcji interpolujących stan przemieszczenia i geometrię elementu oraz od położenia punktu wewnątrz elementu wyjściowego. Wprowadzając, analogicznie jak w przypadku elementów pierwotnych, uogólnione siły $\underline{u}_L = \{ \underline{u}_{L0}, \underline{u}_{LN} \}$ z zasady pracy wirtualnej zastosowanej do całego elementu wyjściowego /tj. do układu elementów pierwotnych/ otrzymamy

$$(2.21) \quad \delta \underline{u}^T \underline{U} = \int_V \delta \underline{u}_L^T \underline{U}_L \frac{dV}{V_L}$$

W równaniu (2.21) występują objętości V_L podelementów określone na podstawie długości łuków odpowiadających zastosowanemu odwzorowaniu definiującemu rozpatrywany element krzywoliniowy. Odpowiedniki równań (2.14) /w przypadku znikania sił masowych/ mają postać

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \underline{U}_{L0} &= 0 \\ \underline{U}_{LN} &= \underline{k}_{LN} \underline{u}_{LN} \end{aligned}$$

gdzie postać naturalnej macierzy sztywności podelementu wynika wprost z postaci naturalnej macierzy sztywności odpowiedniego elementu pierwotnego, por. (2.15). Korzystając z

(2.21), (2.22) otrzymamy ostateczne wyrażenie definiujące macierz sztywności naturalnej elementu zbudowanego z podelementów w postaci

$$(2.23) \quad \underline{k}_N = \int_V \underline{a}_{LN}^T \underline{k}_{LN} \underline{a}_{LN} \frac{dV}{V_L}$$

W przypadku przyjęcia w (2.23) infinitezymalnych objętości lokalnych podelementów wyrażenie $\frac{1}{V_L} \underline{k}_N$ należy zastąpić odpowiednio przez \underline{k}'_{LN} .

2.3. Analiza przyrostowa konstrukcji uwzględniająca nieliniowości typu geometrycznego

Sformułowanie przyrostowe zagadnienia nieliniowych geometrycznie i materiałowo dużych odkształceń sprężysto-plastycznych zaprezentujemy na przykładzie prostego elementu membranowego TRIM3 w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. Oznaczmy długości boków elementu w konfiguracji początkowej przez 0l_r ($r = \alpha, \beta, \delta$), zaś w konfiguracji bieżącej przez l_r . Wielkości przyrostowe będziemy oznaczać przez δl_r . Zdefiniujmy ponadto niezmiennicze, skalarne miary deformacji boku r elementu trójkątnego:

a/ wydłużenie

$$(2.24) \quad \rho_{Nr} = l_r - {}^0l_r$$

b/ odkształcenie

$$(2.25) \quad \varepsilon_{Ar} = \frac{1}{2} \frac{l_r^2 - {}^0l_r^2}{l_r^2}$$

c/ odkształcenie

$$(2.26) \quad \varepsilon_{Gr} = \frac{1}{2} \frac{l_r^2 - {}^0l_r^2}{{}^0l_r^2}$$

Zauważmy, że wprowadzone miary odkształceń odpowiadają klasycznemu, przyjętemu w mechanice ośrodków ciągłych tensorom deformacji Almansiego \underline{e}_A (3x3) oraz Greena \underline{e}_G (3x3) i wiążą się z nimi następującymi zależnościami

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{AV} &= \underline{n}_V^t \underline{e}_A \underline{n}_V, \\ \varepsilon_{GV} &= {}^o\underline{n}_V^t \underline{e}_G {}^o\underline{n}_V, \end{aligned}$$

w których ${}^o\underline{n}_V$ (3x3) i \underline{n}_V (3x3) oznaczają normalne wektory jednostkowe dla V -tego boku trójkąta.

Jeśli przez \underline{F} oznaczymy macierz gradientów deformacji, to możemy napisać związki

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \underline{e}_A &= \frac{1}{2} [\underline{1}_3 - \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1}] \\ \underline{e}_G &= \frac{1}{2} [\underline{F}^T \underline{F} - \underline{1}_3] \end{aligned}$$

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \underline{F}^{-T} &= (\underline{F}^{-1})^T \\ \underline{e}_G &= \underline{F}^T \underline{e}_A \underline{F} \end{aligned}$$

Skalarne miary deformacji boków trójkąta łączy zależność

$$(2.30) \quad \varepsilon_{GV} = \varepsilon_{AV} \frac{L_V^2}{{}^oL_V^2}$$

Równania (2.24) - (2.26) można zapisać w postaci przyrostowej

$$(2.31) \quad \delta \varphi_{NV} = \delta L_V$$

$$(2.32) \quad \delta \varepsilon_{AV} = \frac{\delta L_V}{L_V}$$

$$(2.33) \quad \delta \varepsilon_{GV} = \frac{\delta L_V}{{}^oL_V} \frac{L_V}{{}^oL_V}$$

W problemach plastyczności zasadnicze znaczenie odgrywają lokalne redystrybucje naprężeń oraz odciążenie. Aby uwzględnić te zjawiska, konieczne jest stosowanie niewielkich przyrostów obciążenia. Dzięki założeniu niewielkich przyrostów możemy pominąć człony nieliniowe w przyrostowych związkach pomiędzy przyrostami odkształceń oraz przyrostami przemieszczeń bez obawy popełnienia większego błędu.

Przyrost skalarnej miary odpowiadającej tensorowi odkształceń Greena wyrazi się więc zależnością

$$(2.34) \quad \delta \varepsilon_G = \underline{\circ} \underline{R}^T \underline{\dot{\varepsilon}}_G \underline{\circ} \underline{R} \delta t$$

w której kropka oznacza różniczkowanie względem czasu. Obliczając przyrost skalarnej miary odkształceń odpowiadającej tensorowi Almansiego musimy uwzględnić człon pochodzący od pochodnej konwekcyjnej tego tensora w opisie przestrzennym. Pochodna konwekcyjna względem czasu tensora \underline{e}_A wyraża się wzorem

$$(2.35) \quad \underline{\dot{e}}_A = \underline{\dot{e}}_A + \underline{L}^T \underline{e}_A + \underline{e}_A \underline{L}$$

w którym

$$(2.36) \quad \underline{L} = \underline{F} \underline{F}^{-1}$$

zaś w przypadku jednowymiarowym

$$(2.37) \quad \underline{F} = \frac{l_r}{\circ l_r}$$

$$(2.38) \quad \underline{L} = \frac{\delta l_r}{l_r}$$

Wówczas

$$(2.39) \quad \delta \varepsilon_{AV} = \underline{R}^T \underline{\dot{e}}_A \underline{R} \delta t$$

gdzie $\underline{\underline{C}}_A^{\nabla}$ - oznacza część symetryczną tensora prędkości odkształceń.

Wprowadźmy wektor kolumnowy przemieszczeń węzłowych w globalnym układzie współrzędnych kartezjańskich \underline{u}_i (9x1) oraz wektor przyrostów tych przemieszczeń $\delta \underline{u}_i$ (9x1)

$$(2.40) \quad \underline{u}_i = \{ u_1^1 u_1^2 u_1^3 u_2^1 u_2^2 u_2^3 u_3^1 u_3^2 u_3^3 \} = \{ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \underline{u}_3 \}$$

$$(2.41) \quad \delta \underline{u}_i = \{ \delta u_1^1 \delta u_1^2 \delta u_1^3 \delta u_2^1 \delta u_2^2 \delta u_2^3 \delta u_3^1 \delta u_3^2 \delta u_3^3 \} = \{ \delta \underline{u}_1 \quad \delta \underline{u}_2 \quad \delta \underline{u}_3 \}$$

Odpowiadają im wektory o składowych równych wprowadzonym skalarным miarom odkształceń boków elementów trójkątnego

$$(2.42) \quad \delta \underline{\underline{P}}_N = \{ \delta p_\alpha \quad \delta p_\beta \quad \delta p_\gamma \}_{3 \times 1}$$

$$(2.43) \quad \delta \underline{\underline{E}}_{AN} = \{ \delta \varepsilon_{A\alpha} \quad \delta \varepsilon_{A\beta} \quad \delta \varepsilon_{A\gamma} \}_{3 \times 1}$$

$$(2.44) \quad \delta \underline{\underline{E}}_{GN} = \{ \delta \varepsilon_{G\alpha} \quad \delta \varepsilon_{G\beta} \quad \delta \varepsilon_{G\gamma} \}_{3 \times 1}$$

które są wzajemnie związane równaniami

$$(2.45) \quad \delta \underline{\underline{P}}_N = \underline{\underline{L}} \delta \underline{\underline{E}}_{AN} = \underline{\underline{O}} \underline{\underline{\lambda}}^{-1} \delta \underline{\underline{E}}_{GN}$$

$\underline{\underline{O}}$, $\underline{\underline{L}}$ oraz $\underline{\underline{\lambda}}$ oznaczają w tych równaniach następujące macierze diagonalne

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} L_\alpha & L_\beta & L_\delta \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(2.46) \quad \underline{\circ L} = \begin{bmatrix} \circ L_\alpha & \circ L_\beta & \circ L_\delta \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha & \lambda_\beta & \lambda_\delta \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(2.47) \quad \underline{\lambda}_v = \frac{L_v}{\circ L_v} \quad v = \alpha, \beta, \delta$$

Pomiędzy miarami odkształceń oraz przyrostami przemieszczeń globalnych zachodzą związki

$$(2.48) \quad \delta \underline{p}_N = \underline{B} \delta \underline{u}_i$$

$$(2.49) \quad \delta \underline{\varepsilon}_{AN} = \underline{L}^{-1} \underline{B} \delta \underline{u}_i = \underline{\lambda}^{-1} \circ \underline{L}^{-1} \underline{B} \delta \underline{u}_i$$

$$(2.50) \quad \delta \underline{\varepsilon}_{GN} = \underline{\lambda} \circ \underline{L}^{-1} \underline{B} \delta \underline{u}_i$$

Macierz \underline{B} można otrzymać wykorzystując zależności geometryczne oraz równania kinematyki. Zauważmy, że na przykład dla pary węzłów o numerach 2 i 3 różnice bieżących współrzędnych globalnych oraz przemieszczeń przybierają postać

$$(2.51) \quad \underline{x}_{23} = \begin{Bmatrix} x_3^1 - x_2^1 & x_3^2 - x_2^2 & x_3^3 - x_2^3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$(2.52) \quad \underline{u}_{23} = \begin{Bmatrix} u_3^1 - u_2^1 & u_3^2 - u_2^2 & u_3^3 - u_2^3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

Podobne wektory kolumnowe moglibyśmy zapisać dla pozostałych par numerów węzłów elementu trójkątnego, 3,1 oraz 1,2.

Z wektorów tych można zbudować macierze diagonalne

$$(2.53) \quad \underline{x}_\Delta = \begin{bmatrix} \underline{x}_{23} & \underline{x}_{31} & \underline{x}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_\Delta = \begin{bmatrix} \underline{u}_{23} & \underline{u}_{31} & \underline{u}_{12} \end{bmatrix}$$

Wektor \underline{u}_Δ można przedstawić w postaci

$$(2.54) \quad \left\{ \underline{u}_{23} \quad \underline{u}_{31} \quad \underline{u}_{12} \right\}_{9 \times 1} = \underline{\Delta} \underline{u}_i$$

gdzie $\underline{\Delta}$ oznacza macierz różnicową

$$(2.55) \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{0}_3 & -\underline{I}_3 & \underline{I}_3 \\ \underline{I}_3 & \underline{0}_3 & -\underline{I}_3 \\ -\underline{I}_3 & \underline{I}_3 & \underline{0}_3 \end{bmatrix}_{9 \times 9}$$

Z definicji przyrostów miar odkształceń wynika, że

$$(2.56) \quad \delta \underline{\rho}_N = \underline{\lambda}^{-1} \underline{o} \underline{L}^{-1} \underline{x}_\Delta \underline{\Delta} \delta \underline{u}_i$$

$$(2.57) \quad \delta \underline{\varepsilon}_{AN} = \underline{\lambda}^{-2} \underline{o} \underline{L}^{-2} \underline{x}_\Delta^T \underline{\Delta} \delta \underline{u}_i$$

$$(2.58) \quad \delta \underline{\varepsilon}_{GN} = \underline{o} \underline{L}^{-2} \underline{x}_\Delta \underline{\Delta} \delta \underline{u}_i$$

Wykorzystując wzory (2.48) - (2.50) i (2.56) - (2.58) można określić macierz \underline{B} 3×9 jako

$$(2.59) \quad \underline{B}_{3 \times 9} = \underline{\lambda}^{-1} \underline{o} \underline{L}^{-1} \underline{x}_\Delta^T \underline{\Delta}$$

Macierz ta zależy od aktualnej geometrii, a więc od wektora przemieszczeń globalnych \underline{u}_1 . Zauważmy, że w przypadku liniowej teorii zakładającej małe przemieszczenia macierz ta nie zależy od odkształceń. Istotne jest, że w opisie naturalnym przyrosty miar odkształceń określane są bez uwzględnienia ruchów sztywnych samego elementu.

Aby otrzymać wyrażenie na pracę wirtualną, musimy właściwie zdefiniować miary naprężeń odpowiadających wprowadzonym miarom odkształceń.

Oznaczmy najpierw przez \underline{P}_N wektor węzłowych sił uogólnionych odpowiadający odpowiedniemu wektorowi przyrostów miar odkształceń

Przyrost pracy wirtualnej elementu δW wyrazi się wzorem

$$(2.60) \quad \delta N = \underline{P}_N^T \delta \underline{S}_N = \delta \underline{S}_N^T \underline{P}_N$$

Wektory naprężeń odpowiadające wprowadzonym w opisie naturalnym wektorowym miarom odkształceń odpowiadających tensorom Almansięgo $\underline{\underline{\epsilon}}_{AN}$ oraz Greena $\underline{\underline{\epsilon}}_{GN}$ i ich przyrostom odpowiednio muszą być zbudowane ze składowych typu dyskutowanego przez autorów koncepcji w pracy [1].

Wyrażenie na pracę wirtualną winno być

$$(2.61) \quad \delta N = \int_{^1V} \underline{\underline{\sigma}}_{CN}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}}_{AN} d^1V = {}^1V \underline{\underline{\sigma}}_{CN}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}}_{AN}$$

$$(2.62) \quad \delta N = \int_{^0V} \underline{\underline{\sigma}}_{PN}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}}_{GN} d^0V = {}^0V \underline{\underline{\sigma}}_{PN}^T \delta \underline{\underline{\epsilon}}_{GN}$$

zaś wektory kolumnowe $\underline{\underline{\sigma}}_{CN}$ i $\underline{\underline{\sigma}}_{PN}$ o składowych

$$(2.63) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{CN} = \{ \sigma_{C\alpha} \quad \sigma_{C\beta} \quad \sigma_{C\gamma} \}$$

$$(2.64) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{PN} = \{ \sigma_{P\alpha} \quad \sigma_{P\beta} \quad \sigma_{P\gamma} \}$$

wynikają z definicji naprężeń podanych; odpowiednio, przez Cauchy'ego i Piolę-Kirchhoffa. 1V i 0V oznaczają objętości elementu trójkątnego w konfiguracjach bieżącej i początkowej. Wektorowi przemieszczeń globalnych w układzie kartezjańskim \underline{u}_i oraz wektorowi przyrostów tych przemieszczeń $\delta \underline{u}_i$ odpowiada wektor sił węzłowych

$$(2.65) \quad \underline{u}_i = \{ U_1^1 \ U_1^2 \ U_1^3 \ U_2^1 \ U_2^2 \ U_2^3 \ U_3^1 \ U_3^2 \ U_3^3 \}_{9 \times 1}$$

Wykorzystując wzory (2.56) - (2.58) i odpowiednie wyrażenie na pracę wirtualną otrzymamy

$$(2.66) \quad \underline{U}_i = \underline{B}^t \underline{P}_N$$

$$(2.67) \quad \underline{P}_N = {}^0V \underline{\lambda} {}^0L^{-1} \underline{\delta}_{PN}$$

$$(2.68) \quad \underline{P}_N = {}^1V \underline{\lambda}^{-1} {}^0L^{-1} \underline{\delta}_{CN} = {}^1V \underline{L}^{-1} \underline{\delta}_{CN}$$

$$(2.69) \quad \underline{\delta}_{PN} = \frac{{}^1V}{{}^0V} \underline{\lambda}^{-2} \underline{\delta}_{CN}$$

Rozpatrzmy następnie związki pomiędzy wprowadzonymi w opisie naturalnym miarami odkształceń i naprężeń wzdłuż krawędzi elementu trójkątnego oraz standartowymi miarami tych wielkości w układzie współrzędnych kartezjańskich. Przyjmijmy lokalny układ współrzędnych kartezjańskich \underline{x}' związany z globalnym układem współrzędnych \underline{x} za pomocą macierzy transformacji

$$(2.70) \quad \underline{x}' = \underline{Z} \underline{x}$$

Macierz \underline{Z} może być inna dla każdego elementu.

W pracy [7] wyprowadzono standartowe miary naprężeń: tensor naprężeń Cauchy'ego \underline{s}_C oraz drugi /symetryczny/ tensor naprężeń Pioli-Kirchhoffa \underline{s}_P

$$(2.71) \quad \underline{s}_C = \left\{ \begin{array}{ccc} s_{C_{x_1'x_1'}} & s_{C_{x_2'x_2'}} & \sqrt{2} s_{C_{x_1'x_2'}} \end{array} \right\}$$

$$\underline{s}_P = \left\{ \begin{array}{ccc} s_{P_{x_1'x_1'}} & s_{P_{x_2'x_2'}} & \sqrt{2} s_{P_{x_1'x_2'}} \end{array} \right\}$$

Odpowiednie przyrosty miar odkształceń wyrażają się wzorem

$$(2.72) \quad \delta \underline{e}_A = \left\{ \begin{array}{ccc} \delta e_{A_{x_1'x_1'}} & \delta e_{A_{x_2'x_2'}} & \sqrt{2} \delta e_{A_{x_1'x_2'}} \end{array} \right\}$$

$$\delta \underline{e}_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \delta e_{G_{x_1'x_1'}} & \delta e_{G_{x_2'x_2'}} & \sqrt{2} \delta e_{G_{x_1'x_2'}} \end{array} \right\}$$

Pomiędzy wielkościami wprowadzonymi w opisie naturalnym i w/w wielkościami zachodzą zależności

$$(2.73) \quad \underline{S}_C = {}^1\underline{C} \underline{S}_{CN}$$

$$\underline{S}_P = {}^0\underline{C} \underline{S}_{PN}$$

$$(2.74) \quad \delta \underline{E}_{AN} = {}^1\underline{C}^t \delta \underline{E}_A$$

$$\delta \underline{E}_{GN} = {}^0\underline{C}^t \delta \underline{E}_G$$

gdzie

$$(2.75) \quad {}^1\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{23, x_1'}^2 & C_{31, x_1'}^2 & C_{12, x_1'}^2 \\ C_{23, x_2'}^2 & C_{31, x_2'}^2 & C_{12, x_2'}^2 \\ \sqrt{2} C_{23, x_1'} C_{23, x_2'} & \sqrt{2} C_{31, x_1'} C_{31, x_2'} & \sqrt{2} C_{12, x_1'} C_{12, x_2'} \end{bmatrix}$$

3x3

Współczynniki macierzy ${}^1\underline{C}$ wynikają z cech geometrycznych elementu w konfiguracji aktualnej i wyrażają się wzorami

$$C_{ij, x'} = \cos(ij, x')$$

W przypadku macierzy ${}^0\underline{C}$ współczynniki określane są podobnie na podstawie związków geometrycznych odnoszących się do konfiguracji początkowej.

Wykorzystując wzory (2.66) - (2.69) i (2.73), (2.74) możemy otrzymać zależność

$$(2.76) \quad \underline{P}_N = \underline{W}^{-1} \underline{S}_C$$

w której

$$(2.77) \quad \underline{W}_{3 \times 3} = {}^1V^{-1} {}^1C \underline{\lambda} \underline{\lambda}^0$$

Przyjmując założenie o istnieniu potencjału przyrostów odkształceń w postaci

$$(2.78) \quad \delta \underline{\pi}_i = \frac{1}{2} {}^1V \delta \underline{\varepsilon}_{AN}^t \underline{\tilde{k}}_N \delta \underline{\varepsilon}_{AN}$$

otrzymamy przyrostowy związek konstytutywny

$$(2.79) \quad \delta \underline{\sigma}_{CN} = \frac{\delta \underline{\pi}_i}{\delta \underline{\varepsilon}_{AN}^t} = \frac{1}{2} {}^1V \underline{\tilde{k}}_N \delta \underline{\varepsilon}_{AN}$$

w którym styczna macierz sztywności $\underline{\tilde{k}}_N$ elementu zależy od jego cech materiałowych oraz od historii deformacji.

Podobny związek konstytutywny możemy wyprowadzić w wielkościach przyjętych przez nas w opisie naturalnym. Dla elementu TRIM3 przyjmie on postać

$$(2.80) \quad \delta \underline{P}_N = \hat{\underline{k}}_N \delta \underline{S}_N$$

Macierz "naturalnej" sztywności elementu $\hat{\underline{k}}_N$ łączy z macierzą \underline{k}_N zależność

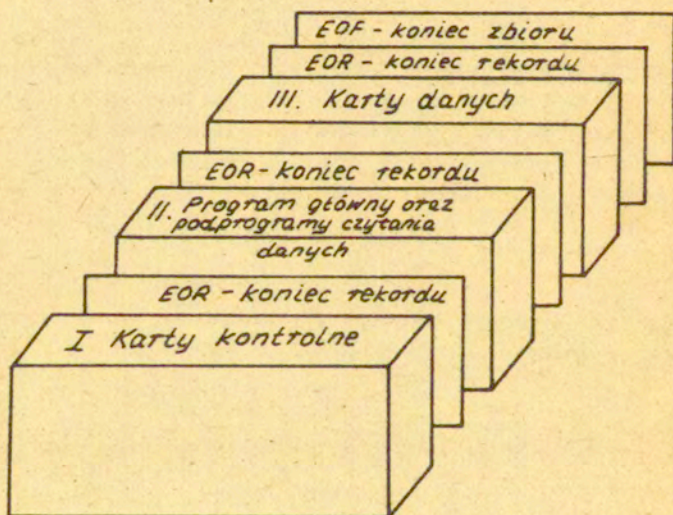
$$(2.81) \quad \hat{\underline{k}}_N = \underline{\lambda}^{-1} \underline{\lambda}^0 \underline{\tilde{k}}_N \underline{\lambda}^{-1} = \underline{L}^{-1} \underline{\tilde{k}}_N \underline{L}^{-1}$$

Związek (2.80) stanowi podstawowe równanie, umożliwiające rozwiązanie zagadnienia dużych deformacji ciał o własnościach sprężysto-plastycznych. Równanie to rozwiązujemy przyrostowo wykorzystując koncepcję konfiguracji pośredniej, opisaną dokładnie np. w pracy [4], stowarzyszone prawo płynięcia Hubera-Misesa i otrzymany z próby jednoosiowego ściskania moduł wzmocnienia h_N . Szczegóły algorytmu numerycznego można znaleźć np. w pracy [2].

3. Wprowadzanie danych

3.1. Ogólna charakterystyka zbioru danych i karty kontrolne tworzące podzbiór nr I

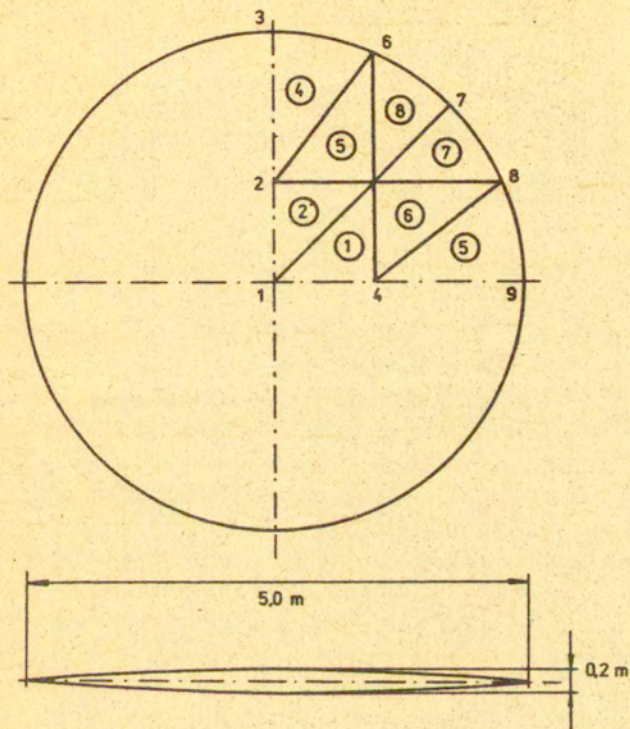
Zbiór wszystkich kart potrzebnych do uruchomienia programu LARSTRAN na maszynie cyfrowej CDC 600 lub CYBER można podzielić na trzy podzbiory pokazane na rys.2: podzbiór kart kontrolnych, podzbiór programu głównego i podprogramów czytania danych oraz podzbiór kart z danymi.



Rys. 2.

Aby ułatwić użytkownikom korzystanie z programu, w załączniku umieszczono treść wszystkich kart przepisanych na arkuszach programowych i potrzebnych do obliczenia opisanego w rozdziale 3.2 przykładu membrany obciążonej ciśnieniem. Schemat dyskretyzacji przedstawia rys. 3.

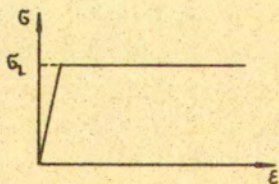
Zbiór kart kontrolnych o numerach 1 do 20 związany jest



$$\sigma_L = 18000 \text{ N/cm}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$



Rys. 3

Schemat dyskretyzacji oraz dane materiałowe przykładu.

(załącznik: 1 i 2)

z organizacją systemu kontrolnego komputera. W przypadku maszyny cyfrowej CYBER zmieniają się zwykle jedynie dwie pierwsze karty, określające numer zlecenia, nazwę instytucji, nazwisko programisty oraz numer konta rozliczeniowego, a także rezerwujące czas i obszar pamięci. Oczywiście uruchomienie programu na innym komputerze wymaga zmiany wszystkich kart kontrolnych.

3.2. Program główny i podprogramy, czytania danych tworzące podzbiór nr II

Podzbiór rozpoczyna karta nr 21 określająca nazwę zadania i przydzielająca odpowiednio urządzenia wejścia i wyjścia. Po kartach kontynuacji nr, nr 22 i 23 następują karty definiujące obszary COMMON. W dalszej kolejności wywoływane są za pomocą kart 42 i 43 podprogramy INIDAT oraz INFORM inicjujące czytanie danych.

Następne karty o numerach 44 do 48 wywołują podprogramy czytające bezpośrednio odpowiednie fragmenty podzbioru kart danych nr III /por. rys.2/ i dlatego ich kolejność musi ściśle odpowiadać kolejności tych podzbiorów. Karty te są następujące:

Karta nr 44:

CALL TOPIN (IU)

w której IU oznacza numer urządzenia wejścia.

Podprogram TOPIN czyta karty współrzędnych węzłów. Jego opis znajduje się w podpunkcie 3.3.1.

Karta nr 45:

CALL SUPIN (IU)

Podprogram SUPIN czyta karty elementowe. Jego opis znajduje się w podpunkcie 3.3.2.

CALL SA (IU)

Podprogram SA czyta karty opisu przemieszczeniowych warunków brzegowych. Jego opis znajduje się w podpunkcie 3.3.3.

CALL ELDTIN (IU)

Podprogram ELDTIN czyta karty geometrii elementu oraz danych materiałowych. Jego opis znajduje się w podpunkcie 3.3.4.

CALL LOADIN (IU)

Podprogram LOADIN czyta karty obciążeń. Jego opis znajduje się w podpunkcie 3.3.5.

Obliczenia możemy przeprowadzać w pojedynczej lub w podwójnej precyzji. W pierwszym przypadku wywołujemy podprogram STPLA, w drugim zaś podprogram DTPLA. Podprogramy te określają liczbę przyrostów obciążenia, liczbę iteracji i rodzaj algorytmu. Jeden z w/w podprogramów wywoływany jest kartą nr 56:

```
CALL STPLA /NINKR, NIT, EPS, NK, ISN, IES, IY/  
lub  
CALL DTPLA /NINKR, NIT, EPS, NK, ISN, IES, IY/
```

Poszczególne zmienne z listy parametrów formalnych należy podawać na oddzielnych kartach bezpośrednio przed wywołaniem powyższego podprogramu /patrz załącznik karta nr 49 do 55/. Wszystkie zmienne z wyjątkiem EPS są typu INTEGER. Zmienna EPS jest typu REAL. Ich znaczenie jest następujące:

NINKR = liczba przyrostów obciążenia
NIT = liczba iteracji na każdym przyroście obciążenia
EPS = kryterium zakończenia iteracji uzależnione od wielkości węzłowych sił niezerównoważonych R_u :

$$|R_u| \leq EPS$$

NK = 1, metoda zmiennej sztywności
NK = 0, metoda początkowych obciążeń
ISN = 1, metoda początkowych odkształceń
ISN = 0, metoda początkowych naprężeń
IES = 1, wynikowy przyrost odkształcenia plastycznego z poprzedniego kroku obciążenia służący do określenia początku bieżącego kroku obciążenia

- IES = 0, nie uwzględnia się poprzedniego kroku obciążenia
- IY = 1, naprężenie plastycznego płynięcia na końcu każdego kroku obciążenia jest zmieniane odpowiednim podprogramem /FUNCTION SIGM/
- IY = 0, naprężenie plastycznego płynięcia określa samoczynnie program na podstawie warunku plastyczności /np. przypadek idealnej plastyczności/.

Wielkość przyrostu obciążenia można kontrolować za pomocą podprogramu FACTIN.

SUBROUTINE FACTIN (FACT, I, DFACT)

gdzie:

- FACT = część obciążenia zewnętrznego przyłożona do konstrukcji
- I = numer przyrostu obciążenia
- DFACT = część obciążenia przyłożona do konstrukcji jako przyrost obciążenia.

Na przykład:

```
SUBROUTINE FACTIN /FACT, I, DFACT/  
DFACT = 0.1  
IF /I.EQ.3/ DFACT = 0.06  
FACT = FACT + DFACT FACT  
RETURN  
END
```

daje przyrost obciążenia równy 0.06 obciążenia całkowitego na trzecim kroku obciążenia.

Brak powyższego podprogramu powoduje przyjęcie przez program równych przyrostów obciążenia, zadanych w kartach danych /patrz podpunkt 3.3.5/.

Plastyczna część deformacji obliczana jest przy przyjęciu następujących założeń:

- a/ warunku plastyczności Hubera-Misesa,
- b/ stowarzyszonego prawa płynięcia /czyli zasady normalności wektora prędkości odkształcenia do powierzchni plastycz-

nego płynięcia/
c/ wzmocnienia izotropowego.

Granica plastyczności oraz nachylenie ξ plastycznej części krzywej naprężenie-odkształcenie otrzymanej z jednoosiowego rozciągania są wprowadzane do programu za pomocą następujących funkcji /karty 58 + 71/

FUNCTION SIG /IEL/

która przekazuje granicę plastyczności SIG elementu IEL

FUNCTION SIGM /ETA, IEL/

która przekazuje naprężenie SIGM /aktualne/ elementu IEL na końcu przyrostu obciążenia. Jest ono obliczane stosownie do odpowiedniego całkowitego odkształcenia plastycznego ETA. Funkcja może być zastosowana po wstawieniu IY = 1 do podprogramu STPLA lub DTPLA.

FUNCTION ZHTA /S1, S2, IEL/

która przekazuje nachylenie ZHTA plastycznej części krzywej materiałowej naprężenie-odkształcenie odpowiadającej elementowi IEL. S1 oznacza naprężenie płynięcia na początku a S2 - na końcu kroku obciążenia. W przypadku braku jednej z w/w funkcji sygnalizowany jest błąd.

W przypadku zastosowania metody początkowych obciążeń różnica pomiędzy plastycznym i lepkoplastycznym opisem zachowania się materiału polega na innym sposobie wyznaczania intensywności przyrostu odkształcenia plastycznego

Dla modelu plastycznego mamy:

$$(3.1) \quad \bar{\eta}_{p\Delta} = \frac{1}{\xi} [\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\eta}_p)]$$

/metoda początkowych odkształceń/

Dla modelu lepkoplastycznego zaś:

$$(3.2) \quad \bar{\eta}_{v\Delta} = \frac{\delta t_{\Delta}}{\sigma_y(\bar{\eta}_v)} [\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\eta}_v)]$$

Ostatni wzór odpowiada poprzedniemu po podstawieniu:

$$(3.3) \quad \xi = \frac{\sigma_y (\bar{\gamma}_v)}{\delta t_{\Delta}}$$

Gdzie δ oznacza lepkość materiału, t_{Δ} oznacza przyrost czasu a aktualna wartość naprężenia plastycznego płynięcia jest wzięta z próby jednoosiowego rozciągania. Model lepkoplastyczny spełnia następujący warunek:

$$(3.4.) \quad \bar{\sigma} - \left(1 + \frac{\bar{\gamma}_v}{\gamma}\right) \sigma_y = 0$$

Obliczenia dla lepkoplastycznego modelu materiału prowadzi się następująco:

a/ CALL STPLA/DTPLA przy NK = 0, ISN = 1, IY = 1

b/ wprowadź $\xi = \frac{\sigma_y (\bar{\gamma}_v)}{\delta t_{\Delta}}$ do programu poprzez FUNCTION ZHTA

c/ wprowadź $\sigma_y (\bar{\gamma}_v)$ do programu poprzez FUNCTION SIGM

Wydawnictwo wyników

Wyniki można uzyskać stosując następujący program:

SUBROUTINE PRNT /NINK, NIT, KDIS, KPLA, KST, NELB, NELE/,
który jest podany na kartach 72-92.

Argumenty podprogramu oznaczają:

- jeśli wywołanie podprogramu nastąpiło w pętli iteracji:
NINK = 0
NIT = numer iteracji
- jeśli wywołanie podprogramu nastąpiło na końcu przyrostu obciążenia:
NINK = numer kroku obciążenia
NIT = 0.

W zależności od wartości argumentów można uzyskać następujące wyniki:

	<u>Pętla iteracji</u>	<u>Pętla przyrostu obciążenia</u>
KDIS = 1	Wyprowadzenie informacji o iteracji	Wyprowadzenie przemieszczeń
KPLA = 1	Wyprowadzenie informacji o odkształceniach sprężysto-plastycznych	Wyprowadzenie informacji o odkształceniach sprężysto-plastycznych
KST = 1		Wyprowadzenie informacji o naprężeniach.
NELB =	numer pierwszego elementu, którego naprężenia chcemy uzyskać	
NELE =	numer ostatniego elementu, którego naprężenia chcemy uzyskać.	

3.3. Podzbiór nr III kart danych

Poszczególne fragmenty podzbioru nr III kart danych omówione w podpunktach 3.3.1 - 3.3.5 muszą być ułożone w kolejności zgodnej z kolejnością wymienionych uprzednio w punkcie 3.2. podprogramów TOPIN, SUPIN, SA, ELDTIN i LOADIN czytania poszczególnych podzbiorów.

Poniżej podano sposób przygotowania podzbioru nr III kart danych do programu LARSTRAN /porównaj rys.2/. W nawiasie po nazwie każdej z kart podano specyfikację deklaracji FORMAT, w jakiej należy podawać odpowiednie parametry zadania.

3.3.1. KARTY WSPÓLRZĘDNYCH WĘZŁÓW - /I5, 5X, 3F20.8/

Jedna karta dla punktu węzłowego. Ostatnia karta nieperforowana.

Kol 1-5 Numer węzła
11-30 Współrzędna węzła X w układzie globalnym
31-50 Współrzędna węzła Y w układzie globalnym
51-70 Współrzędna węzła Z w układzie globalnym.

3.3.2. KARTY ELEMENTÓW - 11I5

Jedna karta dla elementu. Ostatnia karta nieperfo-

rowana.

Kol	1-5	Numer elementu
	6-10	Liczba węzłów elementu
	11-15	Numer węzła I elementu
	16-20	Numer węzła J elementu
	21-25	Numer węzła K elementu

	51-55	Numer węzła N elementu.

3.3.3. KARTY OPISU PRZEMIESZCZENIOWYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH - /3I5.5X,6 A2.2X/

Jedna karta dla zbioru węzłów o takich samych więzach kinematycznych. Ostatnia karta nieperforowana.

Kol.	1-5	Najmniejszy numer opisywanego zbioru węzłów o takich samych więzach kinematycznych
	6-10	Największy numer w/w zbioru węzłów
	11-15	Różnica numerów w/w zbioru węzłów
	21-22	UU jeśli przemieszczenie w kierunku osi X układu globalnego jest zerowe
	25-26	VV jeśli przemieszczenie w kierunku osi Y układu globalnego jest zerowe
	29-30	WW jeśli przemieszczenie w kierunku osi Z układu globalnego jest zerowe
	33-34	FX jeśli brak obrotu wokół osi X układu globalnego
	37-38	FY jeśli brak obrotu wokół osi Y układu globalnego
	41-42	FZ jeśli brak obrotu wokół osi Z układu globalnego.

Należy specyfikować jedynie więzy kinematycznie dopuszczalne dla zastosowanego typu elementu skończonego.

3.3.4. KARTY GEOMETRII ELEMENTU ORAZ CECH MATERIALOWYCH - /3I5, 1X,4 A3, 1X, E11.0, 1X/

Jedna karta dla zbioru elementów o takiej samej geome-

trii i o identycznych danych materiałowych. Ostatnia karta nieperforowana. Kolejność elementów jest bez znaczenia.

Kol 1-5	Najmniejszy numer elementu w opisywanym zbiorze elementów o takiej samej geometrii i o identycznych danych materiałowych
6-10	Największy numer elementu w w/w zbiorze elementów
11-15	Różnica numerów elementów zbioru
17-20	Oznaczenie parametru
22-33	Wartość parametru
35-37	Oznaczenie parametru
39-50	Wartość parametru
52-55	Oznaczenie parametru
57-68	Wartość parametru.

Rodzaj parametru zależy od typu elementu. W przypadku elementu TRM3 należy podać:

moduł sprężystości - oznaczenie EM

grubość nieodkształconego elementu - oznaczenie TH
liczbę Poissona - oznaczenie NU.

Oznaczenia dla innych elementów - patrz praca [8],
str. 39-71.

3.3.5. KARTY OBCIĄŻEŃ - /3I5, 1X, A4, 4 1X, A4, E10.0/

Jedna karta dla wszystkich elementów jednakowo obciążonych. Ostatnia karta jest nieperforowana. Powtórzenie karty obciążenia dla danego węzła powoduje odpowiednie dodanie obciążenia. W przypadku analizy statystycznej ciśnienie jest prostopadle do powierzchni elementu na początku procesu. Kierunek przyłożonego obciążenia pozostaje stały względem globalnego układu współrzędnych niezależnie od zmieniającej się pod wpływem obciążenia geometrii.

Kol. 1-5 Najmniejszy numer elementu w opisywanym zbiorze elementów jednakowo obciążonych

- 6-10 Największy numer elementu w/w zbioru
- 11-15 Różnica numerów elementów zbioru
- 17-20 Oznaczenie rodzaju obciążenia, na przykład:
KNT - obciążenie węzłowe
DK3 - obciążenie ciśnieniem normalnym do powierzchni elementu TRIM3. Kierunek ciśnienia jest zdefiniowany iloczynem wektorowym $/X2-X1/ \times /X3-X1/$ gdzie $X1, X2$ i $X3$ są współrzędnymi węzłów 1, 2, 3 odpowiednio
- 22-25 Oznaczenie kierunku przyłożonego obciążenia węzłowego /nie musi występować jeśli w kolumnach 17-20 wystąpiło oznaczenie DK3/. Stosuje się następujące oznaczenia:
PX - obciążenie działające w kierunku osi X globalnego układu współrzędnych
PY - obciążenie działające w kierunku osi Y globalnego układu współrzędnych
PZ - obciążenie działające w kierunku osi Z globalnego układu współrzędnych
MX - moment zginający o kierunku odpowiadającym osi X globalnego układu współrzędnych
MY - moment zginający o kierunku odpowiadającym osi Y globalnego układu współrzędnych
MZ - moment zginający o kierunku odpowiadającym osi Z globalnego układu współrzędnych
- 26-35 Wielkość obciążenia.

4. Przykłady obliczeń programem LARSTRAN

4.1. Nieliniowa analiza przekrycia prętowego o węzłach przegubowych

Typowym przykładem sytuacji w której zachodzi konieczność uwzględniania dużych przemieszczeń jest analiza globalnej stateczności konstrukcji, kiedy to szukamy obciążeń powodujących nieproporcjonalnie duży przyrost przemieszczeń.

Zbadamy zachowanie się przekrycia prętowego pokazanego na rys.4. Poza analizą przekrycia idealnego /t.j. pozbawionego wszelkich imperfekcji/, zbadamy także wpływ na zachowanie się ustroju niedokładności wykonania układu prętów oraz wpływ "niesymetrycznego" przyłożenia obciążenia zewnętrznego.

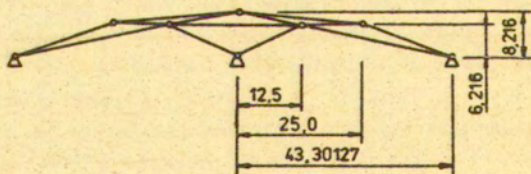
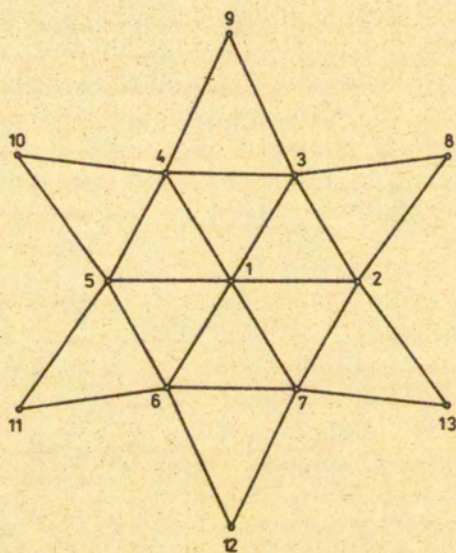
Współrzędne wierzchołków rozpatrywanego przekrycia podano w Tabl.1. W tabelicy tej zamieszczono również wartości współrzędnych w przypadku pewnej, założonej niedoskonałości wykonania układu oraz podano wartości rozpatrywanych obciążeń idealnych oraz obciążeń przytoczonych w punktach różniących się od punktów charakteryzujących przyłożenie idealne.

Założono, że pręty konstrukcji przenosić mogą jedynie siły osiowe i są połączone ze sobą w węzłach układu za pomocą idealnych przegubów. Pominięto ponadto możliwość lokalnej utraty stateczności poszczególnych prętów układu.

W obliczeniach numerycznych przyjęto, że rozpatrywany materiał sprężysty ma moduł Younga $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$; wszystkie pokazane na kolejnych rysunkach wielkości mają wymiary odpowiednio kg i cm .

Na rysunkach 5, 6 oraz 7 pokazano linią ciągłą wyniki analizy konstrukcji poddanej działaniu pionowego obciążenia skupionego, przyłożonego do wierzchołka przekrycia /węzeł nr 1/, a więc obciążenia oznaczonego symbolem A w Tabl. 1. Rys. 6 /linia ciągła/ przedstawia w zwiększonej skali fragment rys. 5.

Analizę przeprowadzono początkowo zadając kolejne przyrosty działające na węzeł nr 1 siły P. Przed osiągnięciem punktu K /porównaj rys.5/, będącego punktem typu maksimum obciążenia i odpowiadającego przeskokowi konstrukcji, zmieniło charakter obciążenia i zaczęto zadawać kolejne przyrosty przemieszczenia węzła nr 1, traktując siłę P jako reakcję. Analiza taka trwała aż do napotkania punktu B, w którym stwierdzono niemożność kontynuowania procesu zarówno za-

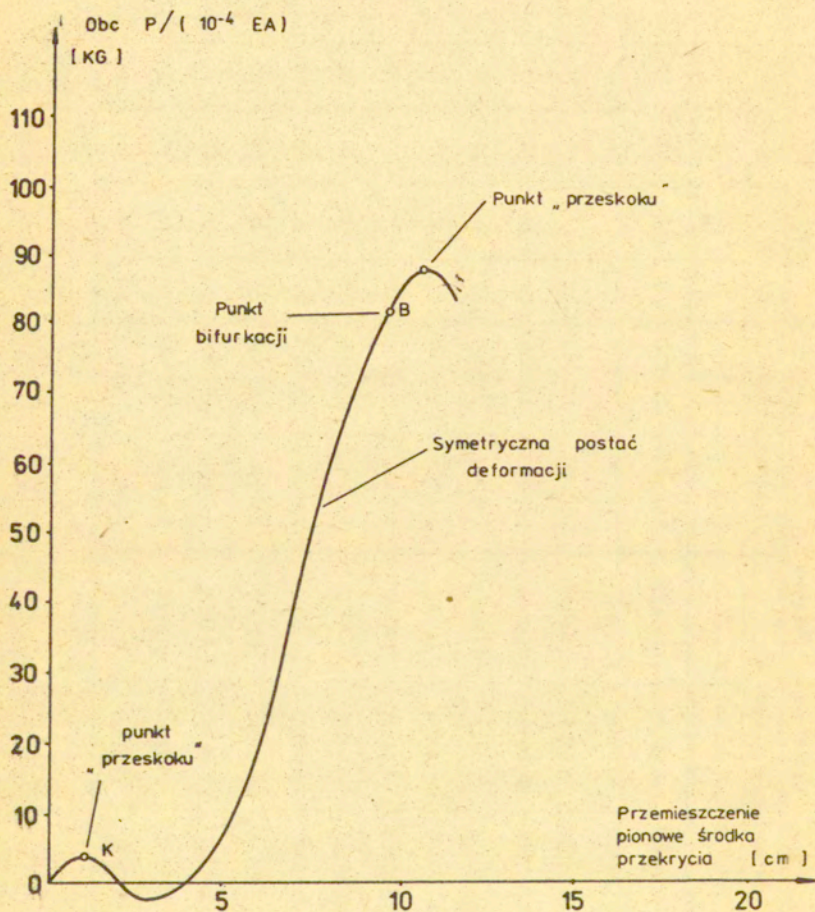


Rys. 4

Geometria przekrycia prętowego.

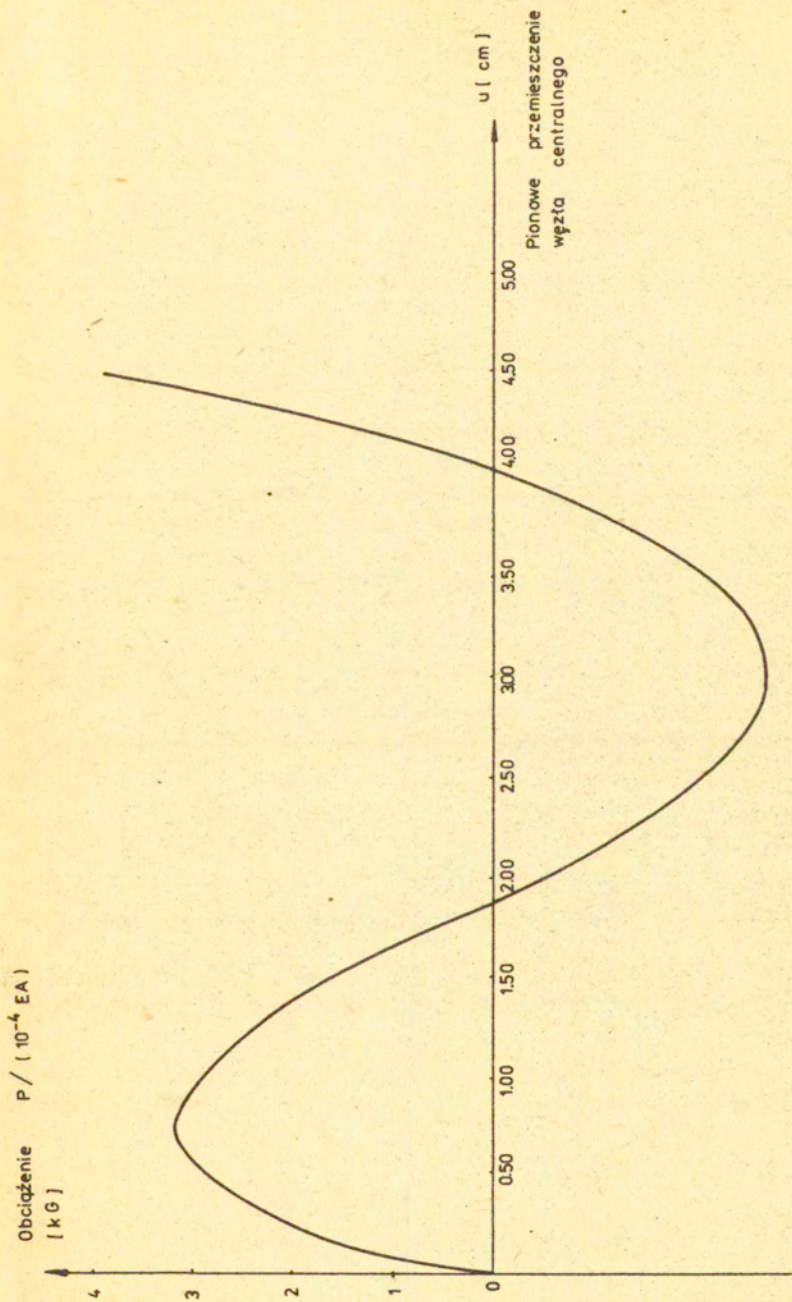
węzły	Współrzędne węzłów						Obciążenie											
	konstrukcja			idealna			niedokładności				idealne				niedokładności			
	x	y	z	x	y	z	1	2	z	A	z	B	z	3	z	4		
																	z	z
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0		
2	25.00000	0.00000	2.00000	2.00000	2.00000	1.60000	1.60000	1.60000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
3	12.50000	-21.65064	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
4	-12.50000	-21.65064	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
5	-25.00000	0.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
6	-12.50000	21.65064	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
7	12.50000	21.65064	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0		
8	43.30127	-25.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
9	0.00000	-50.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
10	-43.30127	-25.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
11	-43.30127	25.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
12	0.00000	50.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
13	43.30127	25.00000	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	8.21600	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		

Tabl. 1



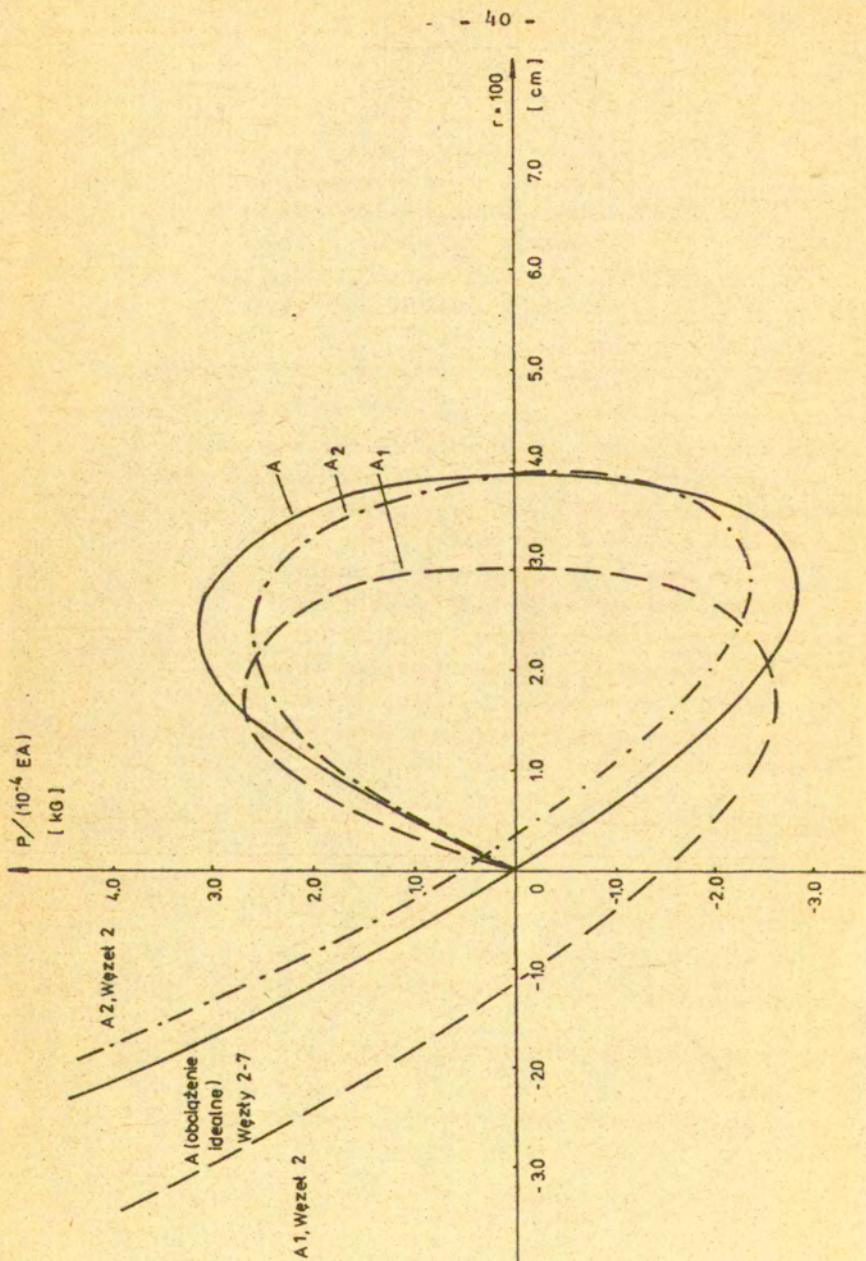
Rys. 5

Wykres P-u dla przekrycia prętowego.



Rys. 6

Wykres P-u dla przekrycia prętowego



Rys. 7

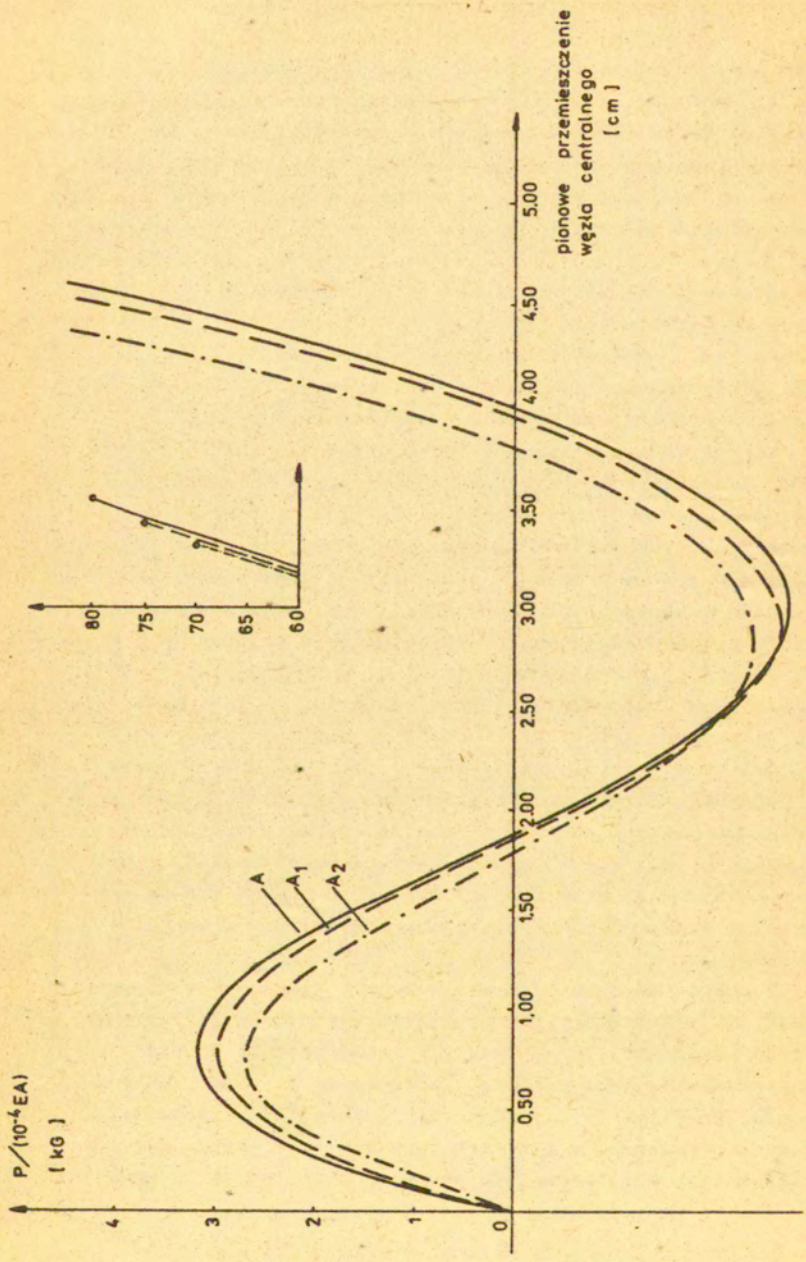
dając przemieszczenie węzła nr 1 jak i obciążając ten węzeł siłą P. Punkt B okazał się być punktem bifurkacji równowagi: pierwotna droga położenia równowagi odpowiadała deformacji charakteryzowanej symetrycznym przemieszczeniem się węzłów o numerach 2-7, podczas gdy przecinająca się z nią wtórna droga położenia równowagi odpowiadała deformacji niesymetrycznej. Analizę kontynuowano dalej wzdłuż pierwotnej drogi położenia równowagi nakładając na układ więzy wymuszające symetryczną postać deformacji.

Na rys. 7 pokazano zmienność wraz z obciążeniem P poziomych składowych radialnych przemieszczeń węzłów 2-7 /linia ciągła/ w początkowej fazie procesu deformacji.

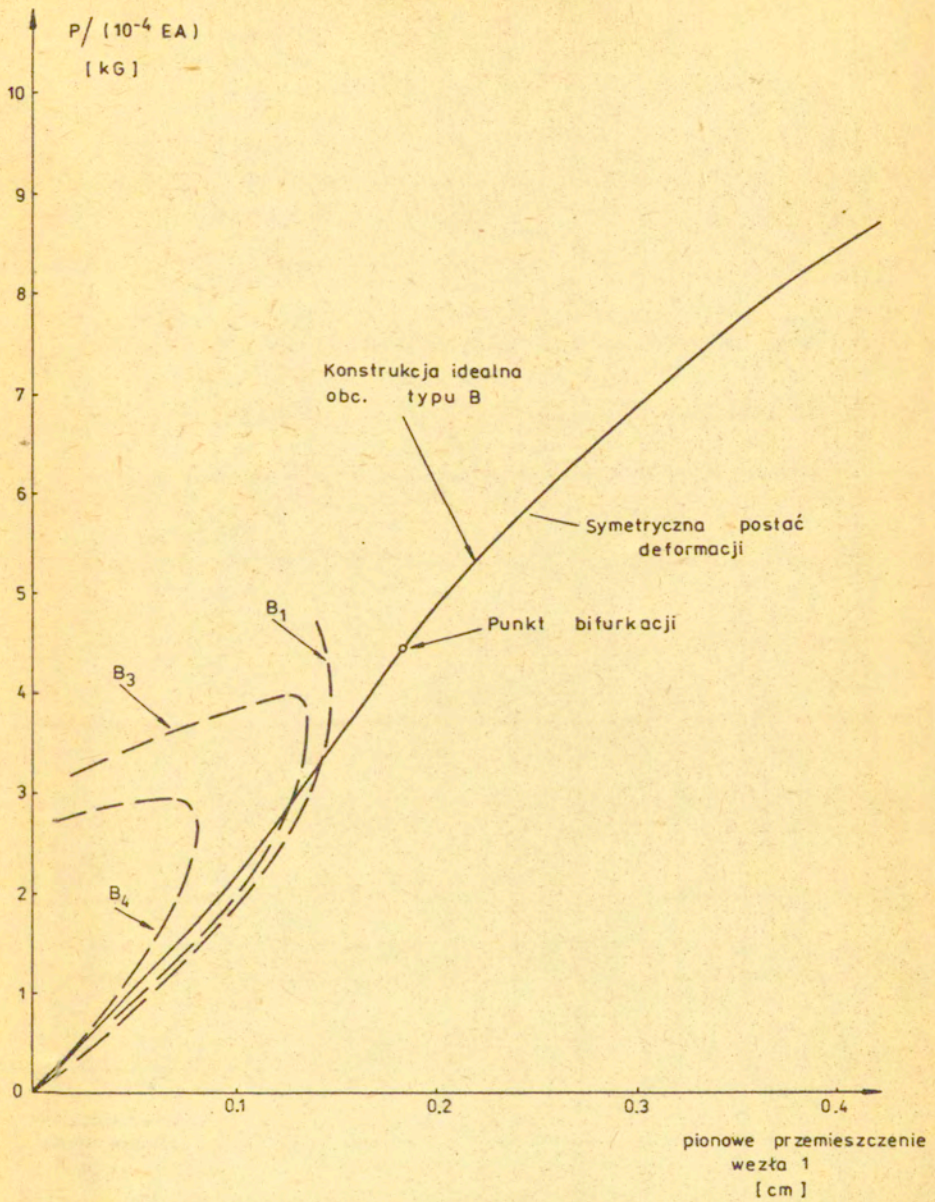
Na rys. 8 i 9 pokazano liniami przerywanymi analogiczne do omówionych wyżej krzywe charakteryzujące konstrukcje posiadające założone z góry niedoskonałości wykonania. Na podstawie tych rysunków stwierdzamy, że efekt wstępnych imperfekcji nie jest w przypadku obciążenia A drastyczny; krzywe opisujące zachowanie się konstrukcji z niedokładnościami wykonania nie wykazują różnic jakościowych w porównaniu z krzywymi opisującymi konstrukcję idealną. Możemy powiedzieć, że rozpatrywana konstrukcja poddana odciążeniu A jest mało wrażliwa na wstępne imperfekcje geometrii układu prętów.

Odmienną sytuację napotykamy w trakcie analizy przekrycia poddanego działaniu obciążenia B, por. Tabl.1. Pierwszym napotkanym punktem osobliwym jest tu bowiem punkt bifurkacji równowagi M, zaś dalsze obliczenia wzdłuż pierwotnej drogi położenia równowagi prowadzone mogły być po nałożeniu na rozpatrywany układ więzów wymuszających symetryczną postać deformacji.

Zupełnie odmiennie przedstawia się także sprawa imperfekcji. Na podstawie rysunków 9 i 10 stwierdzamy bowiem, że zarówno imperfekcje geometrii jak i imperfekcje obciążenia zewnętrznego mają zasadniczy, jakościowy wpływ na przebieg procesu. Przy tym, o ile imperfekcje obciążenia powodowały utratę stateczności w punktach typu maksimum obciążenia dla wartości siły P mniejszej od wartości odpowiadającej punktowi

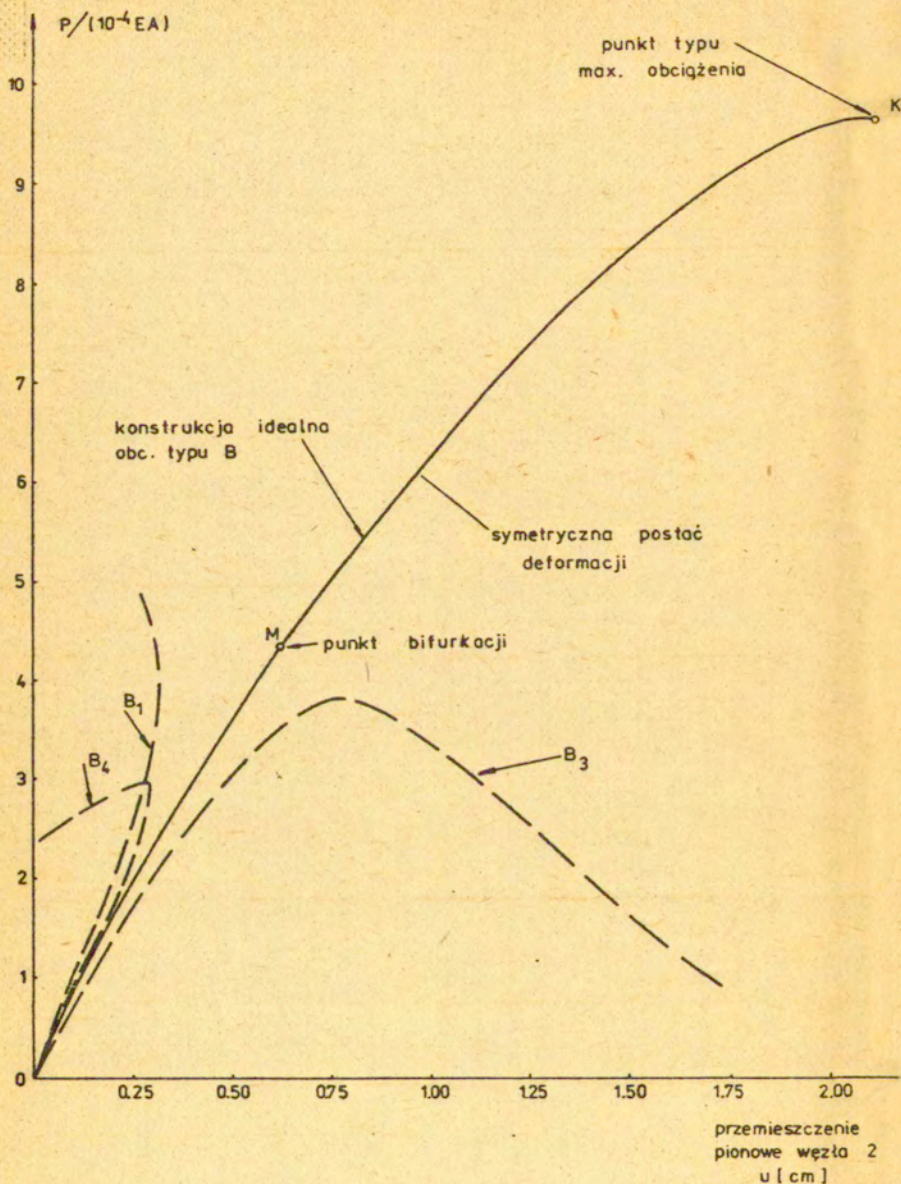


Rys. 8



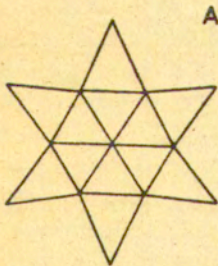
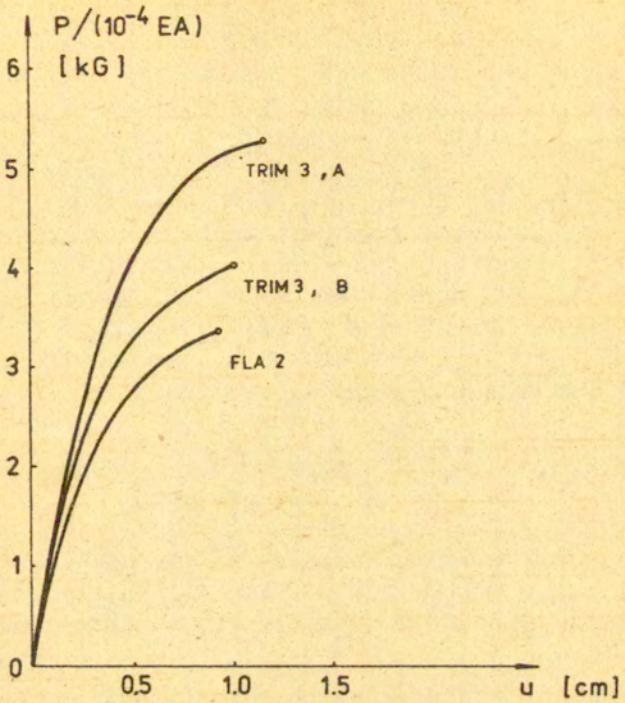
Rys. 9

Obciążenie typu B

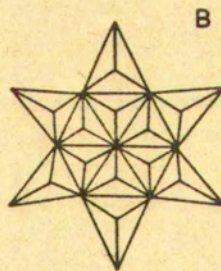


Rys. 10

Obciążenie typu B



12 elementów trójkątnych



30 elementów trójkątnych

Rys.11

Stateczność przekrycia prętowego przy różnych idealizacjach metody elementów skończonych.

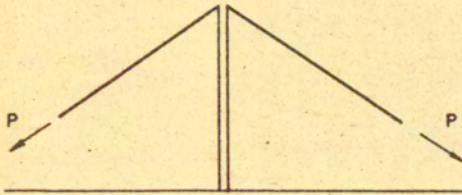
bifurkacji równowagi, to imperfekcje geometrii wpływały na zwiększenie się sztywności konstrukcji i ostateczne zachowanie się ustroju dla obciążeń P większych od tej wartości. Możemy powiedzieć, że rozpatrywana konstrukcja poddana obciążeniu B jest wrażliwa na wstępne imperfekcje geometrii układu prętów i na odchylenia wartości przyłożonych obciążeń.

Stateczność przekrycia prętowego badano również stosując inną idealizację /36 elementów trójkątnych/ a także wykorzystując inny rodzaj elementu /FLA 2/. Rys. 11 pozwala zauważyć, że przeskok rzeczywistej konstrukcji wystąpi przy większej sile, niż obliczona w przykładzie rys. 4. Nasze obliczenia dają więc "bezpieczne" wyniki.

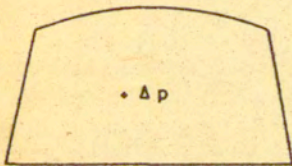
4.2. Numeryczna analiza dużych sprężysto-plastycznych deformacji przekrycia membranowego

Konstrukcje membranowe mogą przenosić jedynie naprężenia rozciągające. Nie przenoszą naprężeń ściskających, a naprężenia od zginania pozostają przy dowolnie małych krzywiznach pomijalnie małe. Przykłady przekryć membranowych pokazano schematycznie na rys. 12. Niezbędne "naprężenie wstępne", umożliwiające przenoszenie obciążeń zewnętrznych /śnieg, wiatr itp./ jest zapewnione w przypadkach b/ i c/ poprzez utrzymywanie stałego nadciśnienia lub podciśnienia wewnątrz pomieszczenia przykrytego membraną. Jeśli do wykonania przekryć przedstawionych na schematach d/ i e/ użyje się materiału nie przepuszczającego powietrza, a utworzone zbiorniki są szazelne to wystarcza w tych przypadkach jednorazowe wywołanie podciśnienia lub nadciśnienia. Odpowiednie duże odkształcenia sprężysto-plastyczne pozwalają jednocześnie uformować całą konstrukcję.

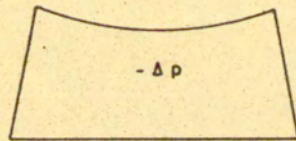
Celem zbadania niektórych możliwości optymalizacji procesu projektowania przekryć membranowych, przeprowadzona została numeryczna analiza dla przykładu przedstawionego na rys. 13. Dwie membrany kołowe połączone sztywnym pierścieniem na obwodzie tworzą zamknięty zbiornik ciśnieniowy, odkształ-



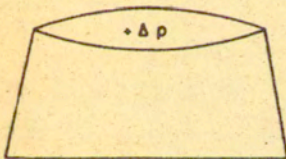
a)



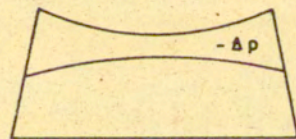
b)



d)



c)

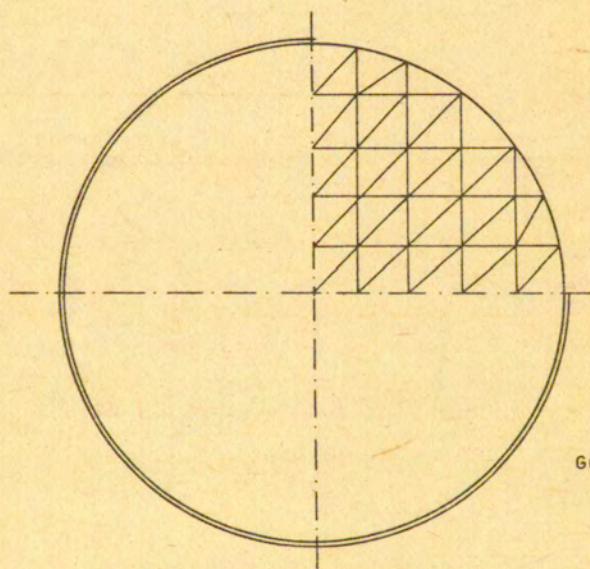
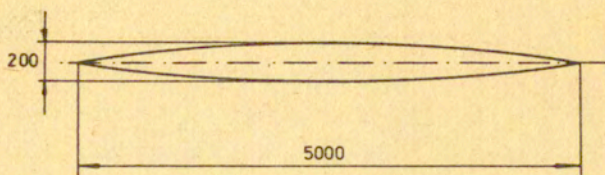


e)

Rys. 12

Schematyczne modele różnych przekryć membranowych

- a) membrana naciągana siłą P przyłożoną wzdłuż obwodu
- b) c) formowanie membrany za pomocą nadciśnienia
- d) e) formowanie membrany za pomocą podciśnienia



Grubość membrany

$h \approx 0,3 \text{ mm}$

Rys. 13

Kształt i wymiary początkowe membrany.

Schemat dyskretyzacji.

cający się w wyniku działania ciśnienia wprowadzonego od zewnątrz. Dyskretny model konstrukcji otrzymano dzieląc ówiartkę górnej membrany na płaskie trójkątne elementy skończone z liniową funkcją kształtu.

W trakcie rozwiązywania zagadnienia zbadano efektywność różnych algorytmów nieliniowej analizy ciał sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych. Korzystano z metody zmiennej sztywności oraz z dwóch wersji metody początkowych obciążeń:

a/ metody początkowych odkształceń

b/ metody początkowych naprężeń.

Uzyskane wyniki porównano z rezultatami doświadczeń opisanych w pracy 18. Niewielkie różnice są wynikiem niedokładności MES jako metody przybliżonej a także przyjęciem nieco innych krzywych materiałowych. Charakterystykę materiału uzyskaną z doświadczenia, która jest pokazana na rys. 14 jako krzywa nr 2, aproksymowano w programie numerycznym wykorzystując krzywą Ramberga-Osgooda, o równaniu

$$\varepsilon_p = \frac{1.1 \sigma_y}{m E} \left[\left(\frac{\sigma}{1.1 \sigma_y} \right)^m - \left(\frac{1}{1.1} \right)^m \right]$$

w którym

ε_p - odkształcenie plastyczne

σ - naprężenie całkowite

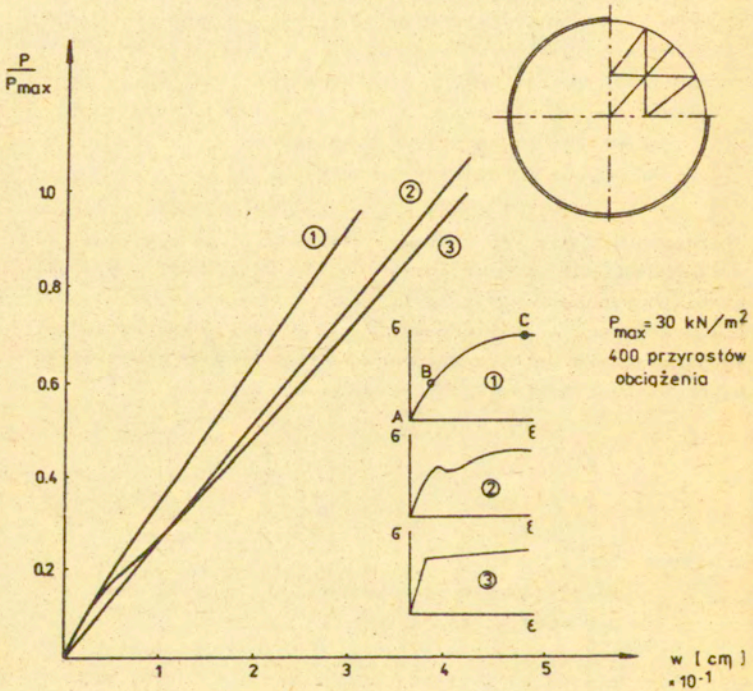
σ_y - naprężenie plastycznego płynięcia, w naszym przypadku przyjęte jako równe $\sigma_y = 18000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$

m - wykładnik stanowiący miarę wzmocnienia, u nas

$$m = 8$$

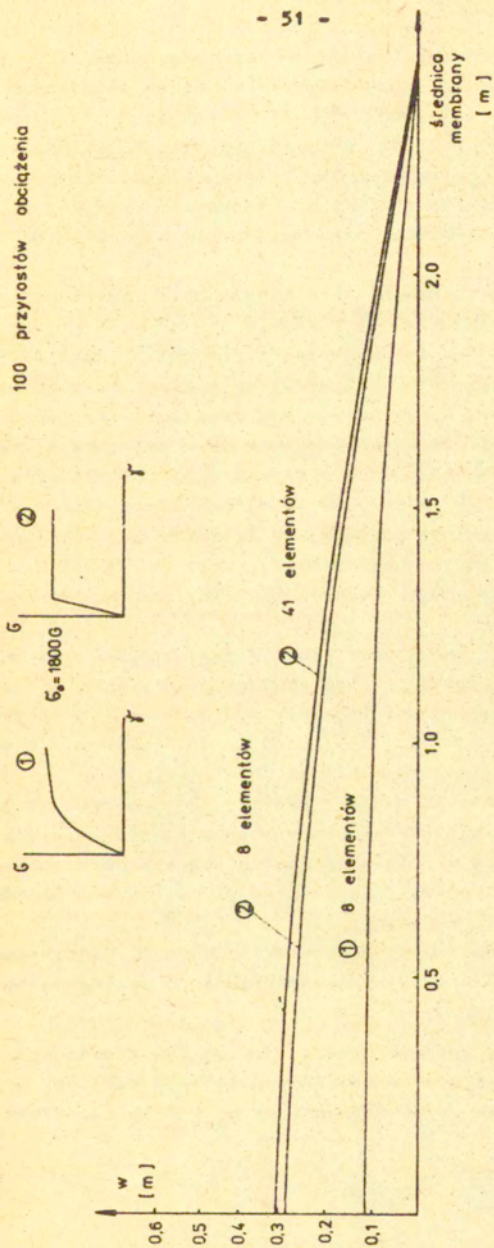
$E = 2.04 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ - moduł Younga

Przeprowadzono również obliczenia membrany zakładając charakterystykę materiału z niewielkim wzmocnieniem liniowym, pokazanym na rys. 14 jako krzywą nr 3. Porównanie przemieszczeń środka membrany w funkcji obciążenia P uzyskanych w wyniku obliczeń przy wykorzystaniu tego modelu materiału wska-



Rys. 14

Przemieszczenie środka membrany w w funkcji obciążenia P dla różnych charakterystyk materiałowych.



Rys.15 Kształt membrany obciążonej ciśnieniem 30 kN/m^2
dla różnych charakterystyk materiałowych

suje na lepszą zgodność z wynikiem doświadczenia.

Przy stosowanych w praktyce obciążeniach ciśnieniem rzędu $p = 30 \text{ kN/m}^2$ uzyskujemy w zależności od zastosowanego materiału kształty membrany pokazane na rys. 15. Linie oznaczone ① i ② na tym rysunku odpowiadają kształtom membrany wykonanej z materiałów charakteryzowanych wyżej opisaną krzywą Ramberga-Osgooda oraz niewielkim wzmocnieniem odpowiednio.

Choć zbadać zachowanie się konstrukcji towarzyszące większym zmianom geometrii i większym obciążeniom przyłożone ciśnienie narastające aż do wartości 180 kN/m^2 . Zmieniający się kształt membrany o charakterystyce materiałowej odpowiadającej w/w krzywej Ramberga-Osgooda pokazuje rys. 16.

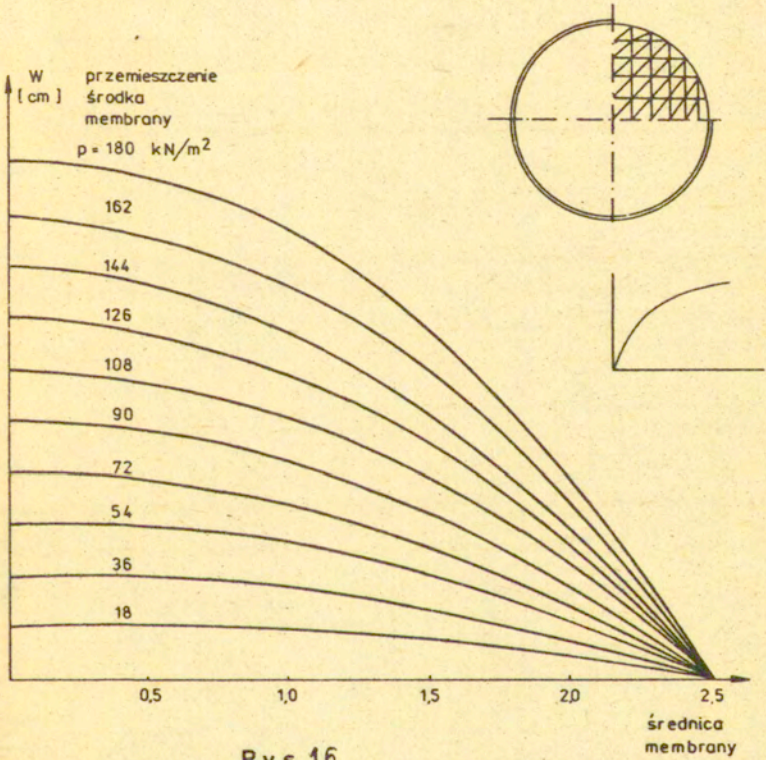
Program umożliwia łatwo prześledzenie kolejności uplastyczniania się poszczególnych elementów konstrukcji. Rysunki 17 i 18 pokazują, że uplastycznienie rozpoczyna się od środka membrany i stopniowo postępuje w kierunku jej krawędzi. Rysunek 18 pokazuje, że najwcześniej, przy obciążeniu $p = 0.131 P_{\max}$ następuje początek plastycznego płynięcia elementu nr 2.

Pozostałe elementy uplastyczniają się odpowiednio przy następujących wartościach ciśnień element nr 4 - przy $p = 0.137 P_{\max}$, element nr 6 - przy $p = 0.146 P_{\max}$, element nr 8 - przy $p = 0.164 P_{\max}$ i element nr 10 - przy $p = 0.191 P_{\max}$.

W przybliżeniu liniowym kształt krzywej ② na rys. 19 jest efektem dwu wzajemnie znoszących się zjawisk nieliniowych, a mianowicie osłabienie związane ze zmianą kształtu geometrycznego oraz wzmocnienia założonego dla przyjętej charakterystyki materiału membrany.

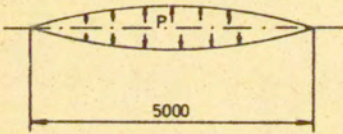
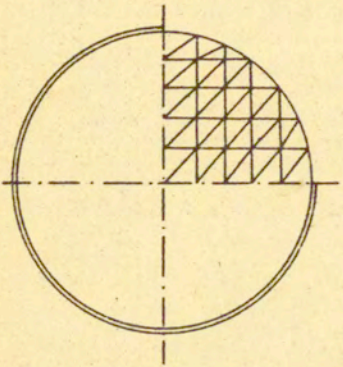
Obliczenia membrany przeprowadzono różnymi algorytmami i porównanie uzyskanych wyników upoważnia do wyciągnięcia następujących wniosków:

- a/ metoda zmiennej sztywności daje już po 2-3 iteracjach zmniejszenie sił niezrównoważonych do 1-3% wartości przyrostu obciążenia /wynoszącego $0.01 P_{\max}$ przy ilościach



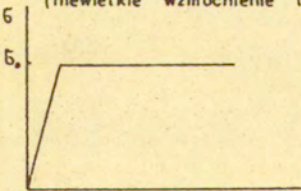
Rys. 16

Zmiana kształtu membrany przy proporcjonalnym
wzroście obciążenia.



Grubość membrany $TH = 0,3$

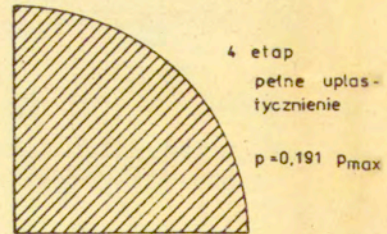
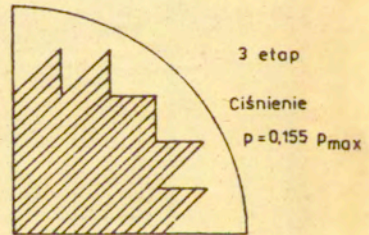
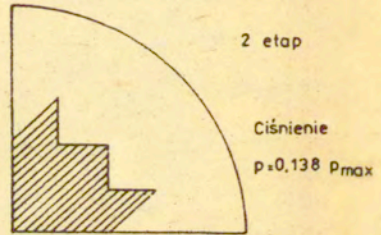
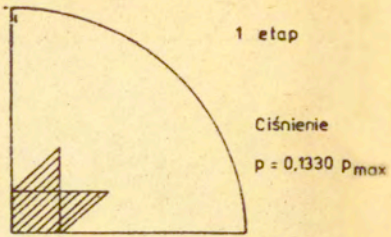
Charakterystyka materiału
(niewielkie wzmocnienie liniowe)



$$\sigma_0 = 18000 \text{ N/cm}^2$$

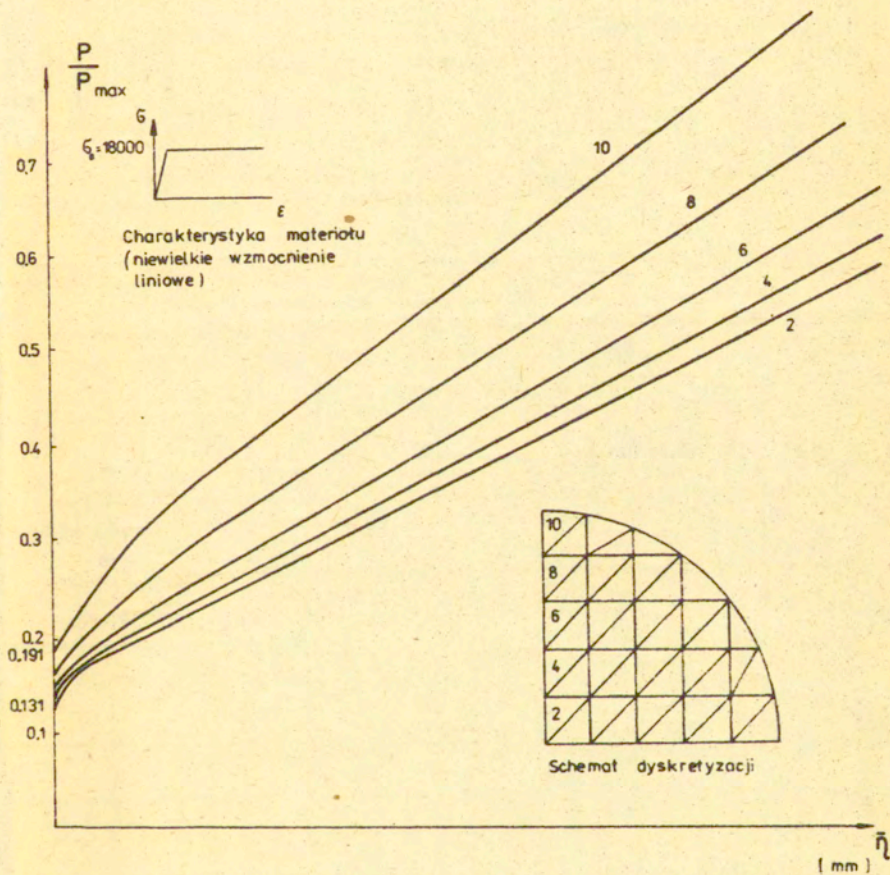
$$\nu = 0,3$$

$$E = 2,04 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$$



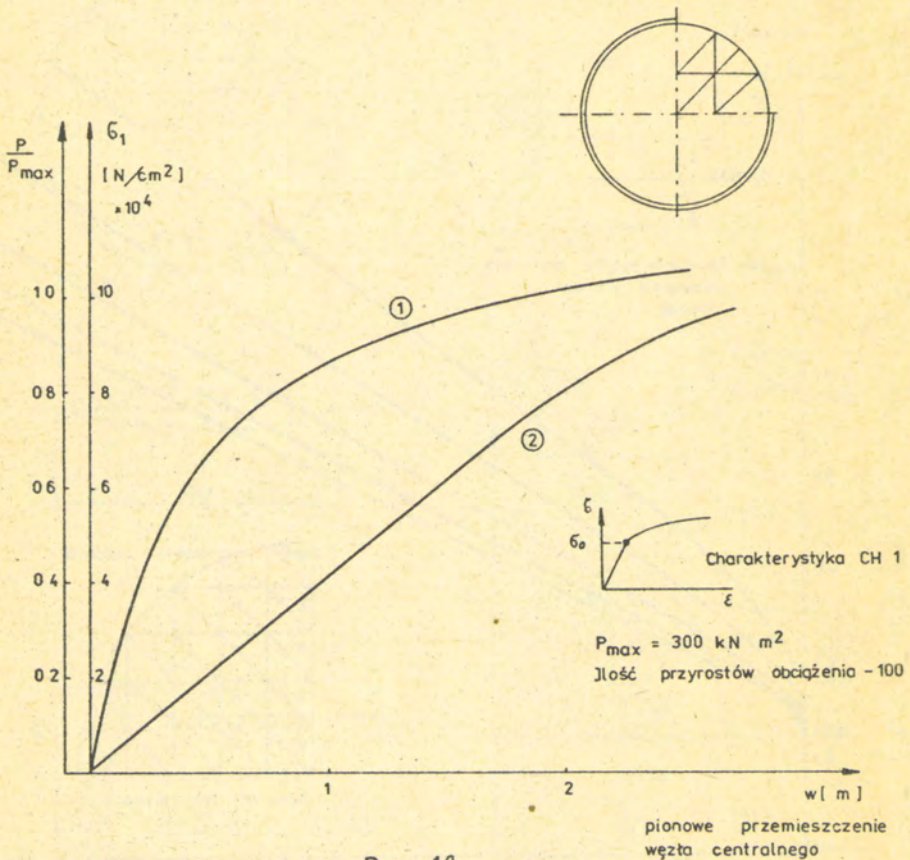
Rys. 17

Kolejność uplastycznienia się elementów skończonych membrany obciążonej do ciśnienia 30 kN m^2 . Obszar zakreskowany odpowiada strefie uplastycznienia.



Rys. 18

Przyrost intensywności całkowitego odkształcenia plastycznego $\bar{\eta}$ dla elementów o numerach 2, 4, 6, 8, 10 w funkcji obciążenia.



Rys. 19

Wykresy:

- ① - napężenie główne w środku membrany w funkcji przemieszczenia w
- ② - przemieszczenie środka membrany w funkcji obciążenia.

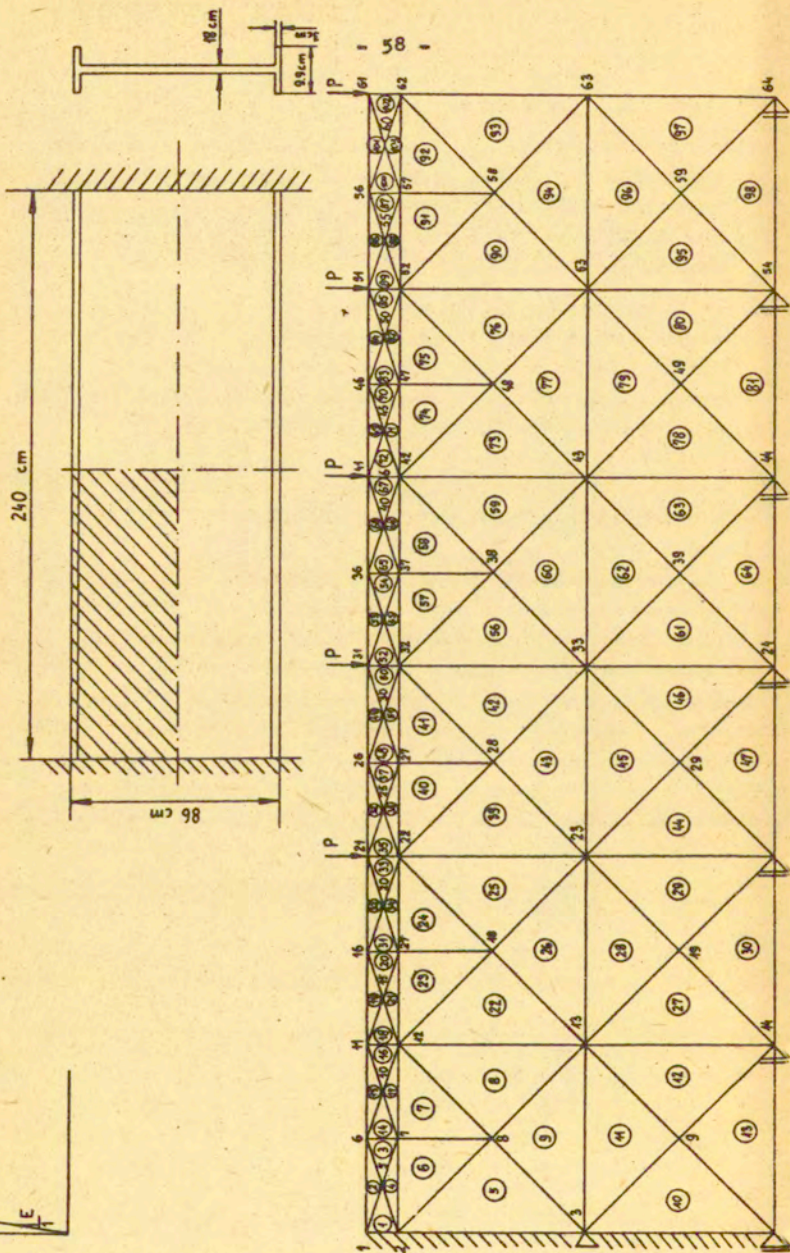
elementów w ćwiartce membrany od 8 do 11;

- b/ wyniki uzyskane za pomocą metod: początkowych naprężeń i zmiennej sztywności są bardzo zbliżone. Przy przyrostach obciążenia rzędu 0.0025 p_{max} wielkość sił niezrównoważonych jest większa i wynosi do 7-13% przyrostu obciążenia;
- c/ zmniejszenie przyrostów obciążenia podobnie jak zwiększenie liczby iteracji zdecydowanie poprawia dokładność wyników. Czas obliczeń jednak wyraźnie wzrasta osiągając już przy 400 przyrostach obciążenia i 10-ciu iteracjach na każdym przyroście wielkość 62 min.

4.3. Belka dwuteowa poddana dużym obciążeniom

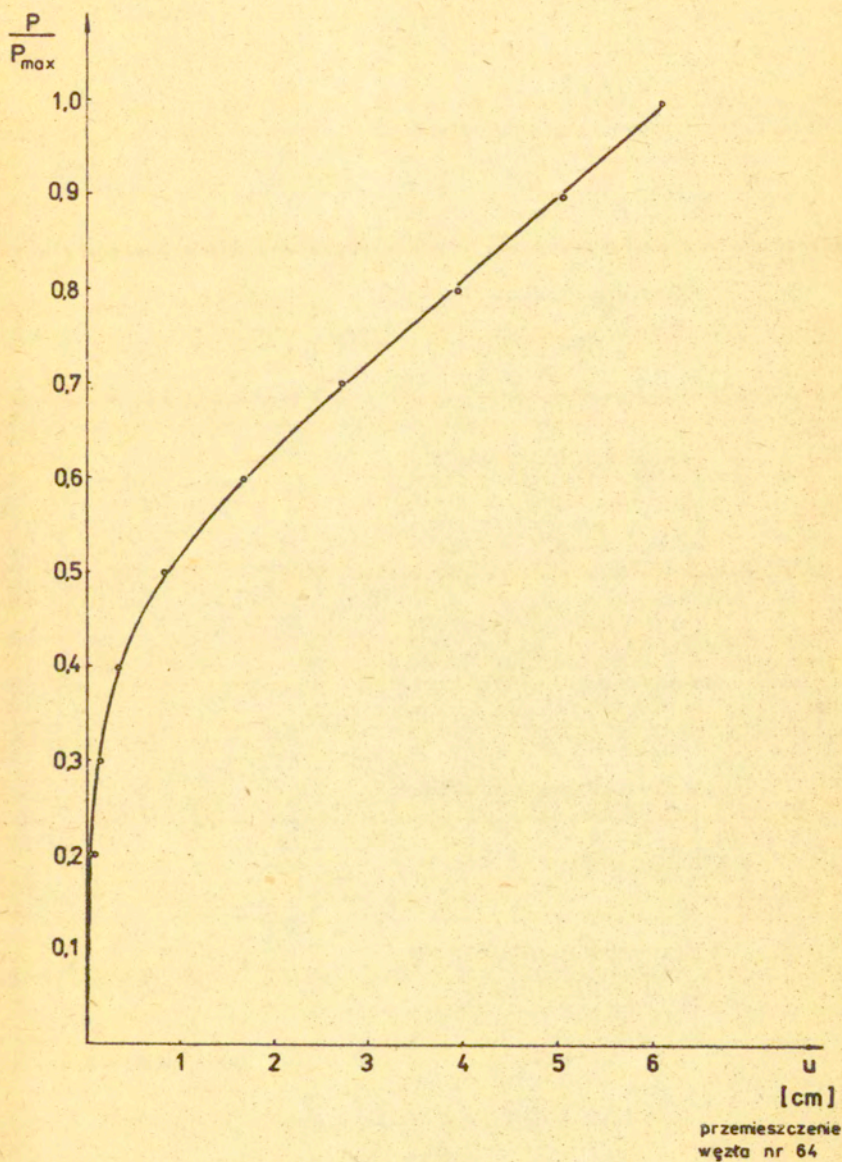
Celem sprawdzenia poprawności działania innego programu opracowanego przez autorów i opisanego w pracy [20] o nazwie ASGRAM, służącego do nieliniowej analizy ram dwuteowych, policzono dwustronnie utwierdzoną belką dwuteową. Sposób dyskretyzacji, wymiary i obciążenia pokazano na rys. 20. Na rys. 21 naniesiono ugięcia węzła nr 64 znajdującego się w środku rozpiętości i wysokości belki, zaś na rys. 22 - rozwój stref plastycznych poprzedzający pełne uplastycznienie całej belki.

$E_s = 10000$



oś symetrii belki

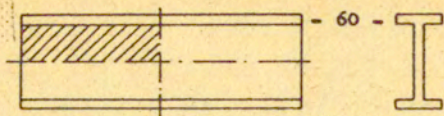
Rys. 20 Schemat dyskretyzacji i wymiary belki dwuteowej Obciążenie wzrasta od 0 do 290000 kG



Rys. 21

Obc. 360000 kg

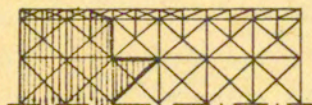
<http://rcin.org.pl>



$$P_{\max} = 810000 \text{ kG}$$



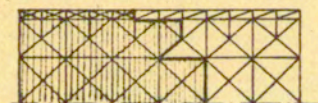
$$\frac{p}{P_{\max}} = 0.18$$



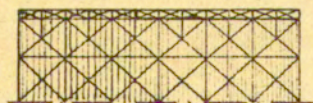
$$\frac{p}{P_{\max}} = 0.22$$



$$\frac{p}{P_{\max}} = 0.27$$



$$\frac{p}{P_{\max}} = 0.45$$



$$\frac{p}{P_{\max}} = 0.78$$



$$\frac{p}{P_{\max}} = 1.0$$

pełne uplastycznienie

Rys. 22

Rozwój stref plastycznych w belce dwuteowej.

5. Spis literatury

- 1 ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C., ANGELOPOULOS, T., BIACHT, B., Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 4, 1974, 219-278.
- 2 ARGYRIS, J.H., KLEIBER, M., Incremental formulation in non-linear mechanics and large strain elasto-plasticity - natural approach. Part I, *Comp. Meths, Appl. Eng.* 2, 1977, 215-247.
- 3 LEE, E.H. J. Elastic-plastic deformation at finite strains, *Appl. Mech. Ser. E*, 36, 1969, 1-6.
- 4 KLEIBER, M., Kinematics of deformation processes in material subjected to finite elastic-plastic strains, *Int. J. Engng. Sci.*, 13, 1975, 513-525.
- 5 KLEIBER, M., Natural finite elements and large deformation elasto-viscoplasticity, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn.*, 2, 1978, 73-81.
- 6 KLEIBER, M., Finite element analysis of axisymmetric large elasto-plastic strain problems, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn.*, 2, 1978, 83-92.
- 7 ARGYRIS, J.H., DOLTSINIS, J.St., KLEIBER, M., Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity - natural approach. Part II, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 2, 1978, 259-294.
- 8 ANGELOPOULOS, T., IGUTI, F., KNUDSON, W.C., Larstran user's manual, ISD-Report, nr 231, Stuttgart, 1978.
- 9 KLEIBER, M., Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych. Teoria i numeryczna analiza konstrukcji, Praca habilitacyjna, Warszawa, Prace IPPT nr 13/78.
- 10 ARGYRIS, J.H., BALMER, H., DOLTSINIS, J.St., DUNNE, P.C., HAASE, M., KLEIBER, M., MALEJANNAKIS, G.A., MLEJNEK, H.P., MÜLLER, M., SCHARPF, D.W., Finite element method-the natural approach, *Fenomech* 78. Part I, 1979, 1-106.
- 11 ARGYRIS, J.H., DUNNE, R.C., MALEJANNAKIS, G.A., SCHELKE, E., A simple triangular facet shell element with applications to linear and nonlinear equilibrium and elastic stability problems, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 10, 1977, 371-403.

- 12 ARGYRIS, J.H., BALMER, H., KLEIBER, M., HINDENLANG, W., Natural description of large inelastic deformations for shells of arbitrary shape - application of TRUMP element, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 3, 1980, 361-389.
- 13 ARGYRIS, J.H., BOLMER, H., DOLTSINIS, J.S., Nieliniowość materiału w analizie metodą elementów skończonych, *Met. obl. w mech. nielin.*, Ossolineum 1976.
- 14 ARGYRIS, J.H., Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous elastic media. Matrix analysis for small and large displacements, *Ing. Arch.*, 34, 1965, 33-55.
- 15 ARGYRIS, J.H., SCHARPF, D.W., SPOONER, J.B., Die elasto-plastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua, *Ing. Arch.*, 37, 1969, 326-352.
- 16 ARGYRIS, J.H., CHAN, A.S.J., Applications of finite elements in space nad time, *Ing. Arch.*, 41, 1972, 235-257.
- 17 DOLTSINIS, J.St., SUZUKI, S., WUSTENBERG, H., Large strain inelastic analysis with LARSTRAN, Internal ISD-Report, Stuttgart, 1978.
- 18 SCHLEICH, J., GREINER, S., Vorgespannte Flächentragwerke aus Metall membranen, *Bauingenieur*, 53, 1978, 77-87.
- 19 KLEIBER, M., Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych, *Mechanika i Komputer*, t. 3, 1980, 19-56.
- 20 BAUER, J., KLEIBER, M., SOSNOWSKI, W., Numeryczna analiza dwuteowych sprężysto-plastycznych ram płaskich z uwzględnieniem wybożenia środników, "Rozprawy Inżynierskie", nr 3, 1985.

FORTRAN CODING FORM										
PROGRAM <i>LARSTRAN</i>					SA CYFRONET		NAME DATE		PAGE <i>4</i>	OF
ROUTINE										
FORTRAN STATEMENT										
T	C	1 = ONE		2 = TWO		3 = ALPHA X		SERIAL NUMBER		
Y	O	1 = ALPHA I		2 = ALPHA Z						
P	N									
E	T									
1	WS315,	T2500,	CMY50000,	MT1.					<i>1</i>	
2	ACCBUNT,	QPAE9-	315						<i>2</i>	
3	REQUEST,	TAPE,	HD,	MDR,	MG,	VSM=	4206BH.		<i>3</i>	
4	COPYBE,	TAPE,	EPLSEQ.						<i>4</i>	
5	RETURN,	TAPE.							<i>5</i>	
6	EDITL/B.								<i>6</i>	
7	RUN(S,	3333,	30000)						<i>7</i>	
8	REDUCE.								<i>8</i>	
9	LDSET,	PRESET=	NG/NF.						<i>9</i>	
10	LDSET,	L1/B=	EPLX.						<i>10</i>	
11	LOAD,	LGØ.							<i>11</i>	
12	WØØØ,	GØ.							<i>12</i>	
13	RETURN,	EPLX.							<i>13</i>	
14	GØ.								<i>14</i>	
15	REWIND	(EPLX)							<i>15</i>	
16	REWIND	(EPLSEQ)							<i>16</i>	
17	SEQTORAN	(EPLSEQ,EPLX)							<i>17</i>	
18	ENDRUN.								<i>18</i>	
19	GØ.								<i>19</i>	
20	GØ.								<i>20</i>	

1/0PT PLAN W. SBSNOWSKI WS315

FORTRAN CODING FORM

PROGRAM

SA

NAME

ROUTINE

CYFRONET

DATE

PAGE 2

OF

LINE NO.	STATEMENT	SERIAL NUMBER
1	PROGRAM TEST(INPUT=1000,OUTPUT=1000,TAPE6=OUTPUT,TAPE5=INPUT	21
2	TAPE1=1000,TAPE2=1000,TAPE3=1000,TAPE4=1000,TAPEB=1000,	22
3	TAPE11=1000,PUNCH,TAPE7=PUNCH,TAPE12)	23
4	COMMON A(13000)	24
5	COMMON HILF,ARRAYX(200)	25
6	COMMON UNIT1/1(110)	26
7	COMMON ITEXT1/ITEXT1(110)	27
8	COMMON ITEXT2/ITEXT2(6)	28
9	COMMON ITEXT3/ITEXT3(6)	29
10	COMMON ITEXT4/ITEXT4(15)	30
11	COMMON CELDT1/CELDAT(119)	31
12	COMMON CELDT2/CELDT2(119)	32
13	COMMON CELDT3/CELDT3(151)	33
14	COMMON CMUST1/CMUST1(19)	34
15	COMMON CMUST2/CMUST2(19)	35
16	COMMON CELFR/CELLFR(119)	36
17	COMMON CHULEN/MULEN(119)	37
18	COMMON CELNM/IELNM(119)	38
19	COMMON CELKM/IELKM(20)	39
20		40

FORTRAN STATEMENT

1 - ONE

I - ALPHA I

0 - ZERO

O - ALPHA O

2 - TWO

Z - ALPHA Z

PROGRAM		FORTRAN CODING FORM										NAME	DATE	PAGE 3	OF	
ROUTINE		SA CYFRONET														
C S T A T E M E N T N O. N O.	T	FORTRAN STATEMENT												SERIAL NUMBER		
		1 = ONE I = ALPHA I 2 = TWO Z = ALPHA Z														
		0 = ZERO () = ALPHA O														
1	C	CALL INTDAT														41
2		CALL INFØRM														42
3		CALL TOPIN(5)														43
4		CALL SUPIN(5)														44
5		CALL SA														45
6		CALL FLDITIN(5)														46
7		CALL LØADIN(5)														47
8		WINKR=100														48
9		WJT=3														49
10		EPS=Y.F-3														50
11		WK=0														51
12		ISM=0														52
13		IFS=1														53
14		IY=0														54
15		CALL STOPA(WINKR,WJT,EPS,WK,ISN,IES,IY)														55
16		END														56
17		FUNCTION SIG(IJEL)														57
18		SIG=YØØØØ.														58
19		RETURN														59
20																60

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 Jedn. 163 zam. 2207/2M Graf./Wa
 RZCO - 133178 200.000 szt. A4. Płom. 61x86 V 81. 71 8

"CYFRONET" 71

FORTRAN CODING FORM

PROGRAM		NAME	
ROUTINE		SA	DATE
		CYFRONET	PAGE 4
		SERIAL NUMBER	
		2 = TWO Z = ALPHA Z	
FORTRAN STATEMENT			
1 = ONE I = ALPHA I			
O = ZERO Q = ALPHA O			
1	END		61
2	FUNCTION ZHTA(SY, VOMI, IEL)		62
3			63
4	ZHTA=0.		64
5	RETURN		65
6	END		66
7	FUNCTION SIGN(ETAG, IEL)		67
8	SIGN=18000.		68
9	E=20.4E6		69
10	RETURN		70
11	END		71
12	SUBROUTINE PRNT(WINK, NIT, NDIS, NPLA, NST, NELB, NELE)		72
13	COMMON/PRL/BRPA		73
14	NST=0		74
15	NPLA=0		75
16	NDIS=0		76
17	IF(NIT.NE.0)NDIS=1		77
18	WRITE(6,13)BRPA		78
19	FORMAT(5X,5HBRPA, E14.7)		79
20	IF(NST.NE.0) GO TO 10		80

PROGRAM		SA		NAME	
ROUTINE		CYFRONET		DATE	
		PAGE 5		OF	
		SERIAL NUMBER			
FORTRAN STATEMENT		1 = ONE		2 = TWO	
		I = ALPHA I		Z = ALPHA Z	
1	W=1				81
2	W=10				82
3	WD=WORD(MLNK,M)				83
4	IF(MD.WE.0) GO TO 10				84
5	WDIS=1				85
6	WPLA=1				86
7	WST=1				87
8	WELB=1				88
9	WELF=3				89
10	CONTINUE				90
	RETURN				91
	END				92

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 2686 IBM 226, 273 PZM, Grad. Wa. BZG - 152; 3 280 800 VOL. AT 1956; 612M V. 81 21 8
 CYFRONET 71

FORTRAN CODING FORM									
PROGRAM		SA		NAME		PAGE		OF	
ROUTINE		CYFRONET		DATE		6		6	
FORTRAN STATEMENT									
I = ONE I = ALPHA I									
O = ZERO O = ALPHA O									
2 = TWO Z = ALPHA Z									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	SERIAL NUMBER
1	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.100	
2	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.084	
3	0.0	0.0	0.0	2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	
4	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.084	
5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.068	
6	1.0	1.0	1.0	2.291	0.0	0.0	0.0	0.0	
7	1.75	1.75	1.75	1.75	0.0	0.0	0.0	0.0	
8	2.291	2.291	2.291	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
9	2.5	2.5	2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
blank card									
1	3	1	4	5					
2	3	5	2	1					
3	3	2	5	6					
4	3	3	2	6					
5	3	4	9	8					
6	3	8	5	4					
7	3	5	8	7					
8	3	7	6	5					
blank card									
1	1	1	11	11					

Spis treści

	str.
1. Wstęp	3
2. Podstawy teorii	5
2.1. Ogólna charakterystyka naturalnego opisu zagadnień dyskretyzowanych	5
2.2. Sprężysta macierz naturalnej sztywności elementu skończonego	7
2.3. Analiza przyrostowa konstrukcji uwzględniająca nieliniowości typu geometrycznego	14
3. Wprowadzanie danych	24
3.1. Ogólna charakterystyka zbioru danych i karty kontrolne tworzące podzbiór I	24
3.2. Program główny i podprogramy czytania danych tworzące podzbiór II	26
3.3. Podzbiór nr III kart danych	31
3.3.1. Karty współrzędnych węzłów	31
3.3.2. Karty elementowe	31
3.3.3. Karty opisu przemieszczeniowych warunków brzegowych	32
3.3.4. Karty geometrii elementu oraz cech materiałowych	32
3.3.5. Karty obciążeń	33
4. Przykłady obliczeń	34
4.1. Nieliniowa analiza przekrycia prętowego o węzłach przegubowych	34
4.2. Numeryczna analiza dużych sprężysto-plastycznych deformacji przekrycia membranowego	46
4.3. Belka dwuteowa poddana dużym obciążeniom	57
5. Spis literatury	61
6. Załącznik	63