

M. Olejnik, W. Sosnowski, A. Zacharski
LINIOWA ANALIZA
PŁYT USZTYWNIONYCH
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH
TEORIA ORAZ OPIS
I INSTRUKCJA UŻYTKOWANIA
PROGRAMU GETRAM

13/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 grudnia 1984 r.



56936

Podziękowanie

Autorzy wyrażają swoją wdzięczność
Prof.dr hab.inż. Michałowi Kleiberowi
za cenne sugestie przekazane
w trakcie przygotowywania pracy.

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 2 Ark.druk. 3,5

Oddano do drukarni w marcu 1985 r.

Nr zamówienia 173/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa
ul. Śniadeckich 8

Mirosław Olejnik, Włodzimierz Sosnowski, Andrzej Zacharski
Zakład Teorii Konstrukcji

LINIOWA ANALIZA PŁYT USZTYWNIONYCH METODĄ
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH
TEORIA ORAZ OPIS I INSTRUKCJA UŻYTKOWANIA
PROGRAMU ORTRAM

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest przedstawienie programu numerycznego o nazwie ORTRAM, służącego do liniowej analizy obciążonych wielokierunkowo płyt usztywnionych metodą elementów skończonych przy zastosowaniu dwu modeli rozpatrywanej konstrukcji: ortotropowego i ramowego. Sposób modelowania podyktowany został zamiarem dalszego wykorzystania programu w nieliniowej analizie płyt poszycia statku metodą wyidealizowanych jednostek strukturalnych, której koncepcję podaliśmy w pracy [1]. Autorom chodziło o maksymalne ograniczenie liczby elementów skończonych kosztem ich wielkości oraz o uwzględnienie w algorytmie dużej zmienności wymiarów i proporcji sztywności płyt i usztywnień.

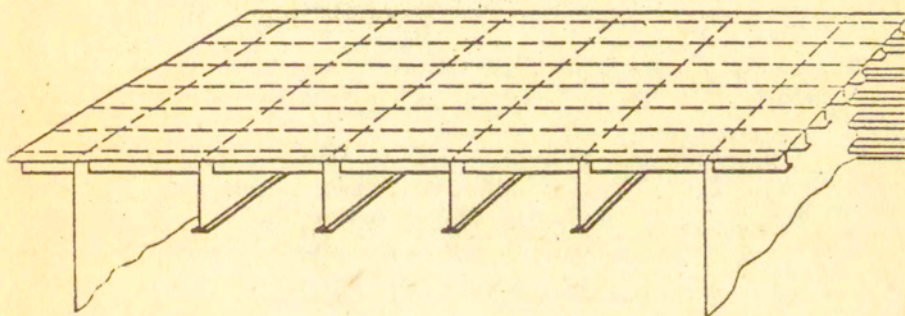
Model ortotropowy, w którym sztywności w dwu prostopadłych kierunkach reprezentują rzeczywistą kombinację sztywności płyt i usztywnień, był stosowany od dawna i opisano np. w pracach [2, 3, 4]. Model ten dobrze oddaje zachowanie się płyt posiadających stosunkowo słabe, lecz liczne usztywnienia.

Model belkowy zastosowano w pracach [5, 6] do obliczeń paneli czyli płyt usztywnionych w jednym kierunku. Panel idealizowano za pomocą belek których współpracę pomijano

zakładając, że wiotkie poszycie pozwala ograniczyć się do zbadania jednego wyidealizowanego usztywnienia z pasem współpracującym płyty. W naszej pracy wykorzystamy podobne założenie przyjmując jednak, że dopiero połączenie wszystkich belek w konstrukcję tworzącą ramę przestrzenną może dać zadowalające wyniki. Taki model lepiej oddaje zachowanie się poszycia o silnych, rzadko rozstawionych usztywnieniach i pozwala dodatkowo łatwo uwzględnić niepryzmatyczność usztywnień, otwory w płytach oraz zmienne warunki brzegowe.

2. Definicja założeń

W pracy analizuje się płyty prostokątne, pokazane na rys. 2.1, usztywnione jednostronnie za pomocą rozłożonych



Rys. 2.1.

równomiernie w dwu kierunkach równoległych do krawędzi usztywnień. Obliczeń dokonuje się metodą elementów skończonych. Zastosujemy dwa modele rozważanej konstrukcji:

- 1/ ortotropowy, w którym za element skończony przyjmujemy fragment płyty o sztywnościach zastępczych reprezentujących rzeczywiste sztywności kombinacji płyty i usztywnień,
- 2/ ramowy, w którym za element skończony przyjmujemy odcinek prostej belki dwuteowej odpowiadający zasadniczo odle-

głości pomiędzy sąsiednimi usztywnieniami. Jedną z pól dwuteownika stanowi tzw. pas poszycia współpracującego.

Przyjmujemy, że model konstrukcji opisuje rzeczywiste zachowanie się płyty usztywnionej przy spełnieniu następujących najważniejszych założeń:

1. Wydzielone elementy są jednorodne.
2. Płyta może być obciążona obciążeniem ciągłym, działającym prostopadle do jej powierzchni oraz siłami skupionymi przyłożonymi w węzłach na krawędziach, wywołującymi dwuosiowe ściskanie, rozciąganie i ścinanie.
3. Materiał konstrukcji wykazuje cechy sprężyste.
4. Nie rozpatrujemy zagadnienia stateczności oraz wyczerpania nośności płyty.
5. Pomijamy wpływ imperfekcji, naprężeń wstępnych, spawalniczych, niejednorodności materiału i innych błędów wykonania.
6. Stosujemy dwa rodzaje elementów skończonych:
 - 2-węzłowy element ramy przestrzennej o sześciu stopniach swobody w węźle $\psi_x, \psi_y, \psi_z, u, v, w,$
 - 4-węzłowy element płyty ortotropowej o pięciu stopniach swobody w węźle: $\psi_x, \psi_y, u, v, w.$

3. Główne cechy oraz kryteria wyboru modeli fizycznych płyty

Każdy z zaproponowanych modeli płyty usztywnionej: ortotropowy i ramowy pozwala określić w sposób przybliżony zachowanie się konstrukcji, lecz powstaje problem określenia zakresu stosowalności a następnie wyboru jednego z tych modeli.

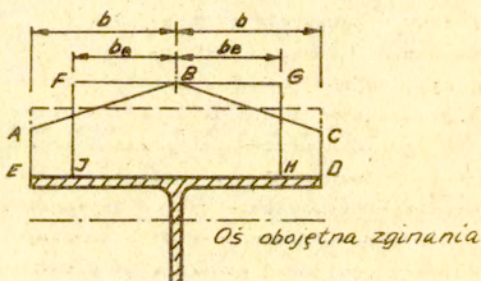
Sprecyzowanie jednoznacznych kryteriów jest niemożliwe, gdyż wymagałoby oszacowania wszystkich błędów, które wynikają z zastosowania każdego z tych modeli.

Wiemy np., że zastosowanie modelu ortotropowego przyniesie tym gorsze wyniki, im bardziej oddalone będą powierzchnie obojętne zginania usztywnień /różne dla dwu kierunków/ i powierzchnie zginania płyty, czyli im większa będzie wysokość usztywnień. Rozstawienie tych usztywnień ma z kolei zasadniczy wpływ na dokładność modelu ramowego, gdyż zmienia efekt współpracy pomijanej części płyt pomiędzy usztywnieniami, znajdującą się poza tzw. pasem współpracującym.

Bleich analizował w pracy [7] wpływ współczynnika δ określającego stosunek sztywności usztywnień do sztywności płyty na postać wybożenia dla prostych przypadków płyty ściskanej usztywnionej w jednym kierunku. Podobne rozważania odniesione do zniszczenia powybożeniowego można znaleźć w pracy [8]. My proponujemy za autorem pracy [4] stosowanie modelu ortotropowego do płyt o liczbie usztywnień w każdym kierunku przekraczającym trzy oraz stosowanie modelu ramowego w pozostałych przypadkach. Słuszność takiego kryterium może nie budzić wątpliwości, gdy mamy do czynienia z płytą usztywnioną za pomocą dużej liczby stosunkowo słabych usztywnień i stosujemy model ortotropowy lub w przypadku płyty o małej liczbie mocnych, wysokich usztywnień, liczonej jak rama przestrzenna.

W przypadkach pośrednich celowe jest wykorzystanie obydwu modeli i porównanie wyników, które jednak w każdym przypadku będą obarczone pewnym błędem.

Usztywnienia połączone są z płytą zwykle za pomocą spawania lub nitowania. W ten sposób część płyty w pobliżu linii połączenia odkształca się tak samo jak usztywnienie. Istnienie naprężeń stycznych powoduje, że rzeczywisty rozkład naprężeń normalnych jest zbliżony do przedstawionego na rys. 3.1. linią ABC



Rys. 3.1.

Obciążenie przenoszone przez pas poszycia odpowiada polu powierzchni figury ABCDE. Jeżeli przyjmiemy, że naprężenia normalne są stałe i równe maksymalnym, to obciążenie pasa poszycia można przedstawić za pomocą prostokąta FGHJ o polu równoważnym figurze ABCDE. Szerokość $2b_e$ jest tzw. szerokością pasa współpracującego.

Istnieje wiele nieporozumień związanych z określeniem szerokości pasa współpracującego poszycia stanowiącego po-niekąd drugą półkę profilu i szczególnie ważnych przy wykorzystaniu modelu ramowego. Nieporozumienia wynikają z operowania pojęciem szerokości efektywnej zarówno w przy-

padku obciążeń wywołujących zginanie płyty, prostopadłych do jej powierzchni, jak też w przypadku obciążeń ściskających i ścinających działających w płaszczyźnie płyty.

W pierwszym przypadku rozkład naprężeń w przekroju płyty jest zmienny ze względu na przekazywanie naprężeń ścinających z usztywnienia na płytę i normalne do przekroju naprężenia wypadkowe zmniejsza się wraz ze wzrostem odległości od usztywnienia niezależnie od grubości płyty czy poziomu obciążeń.

W drugim przypadku efektywność przekroju wiąże się ściśle z utratą stateczności, która jest przyczyną niejednorodnego rozkładu naprężeń normalnych, podobnego zresztą do rozkładu pokazanego na rys. 3.1. Odpowiednie wzory zalecane w normach oparte są na maksymalnej wytrzymałości płyt usztywnionych i będą przedmiotem naszych analiz w toku dalszych prac nad zachowaniem się płyt po wyboczeniu.

Przegląd metod związanych z doбором szerokości pasa współpracującego poszycia można znaleźć w podręczniku [9]. Rozwiązania oparte na założeniu płaskiego stanu naprężenia i szeregu innych uproszczeń nie są zadowalające i wielu autorów zaleca różne metody eksperymentalnego określania szerokości efektywnej.

Najbardziej rozpowszechniony jest wzór podany przez Schade'a w pracy [10].

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 2 / (cL/B)^2}$$

w którym b oznacza odległość między usztywnieniem, b_e - szerokość efektywną poszycia, $B = 2b$, zaś cL oznacza odległość pomiędzy punktami zerowymi momentu zginającego.

Wielu autorów /np. w pracy [11]/ akceptuje znacznie prostszy wzór, a mianowicie:

$$b_a = \frac{1}{2} b$$

4. Algorytm dla modelu ortotropowej płyty

Jeżeli rozpatrując płytę ortotropową obciążoną w płaszczyźnie środkowej i prostopadle do płaszczyzny środkowej uwzględnimy wpływ przemieszczeń pionowych w na odkształcenia ε_x , ε_y , i ε_{xy} wywołane obciążeniem tarczowych to otrzymamy układ dwóch nieliniowych równań różniczkowych [13]:

$$(4.2.1) \quad \frac{1}{E_y} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$(4.2.2) \quad D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^4} = p(x,y) + t \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

gdzie F - funkcja naprężeń Aire'go spełniająca tożsamościowo równania równowagi infinitezimalnego elementu płyty

w(x,y) - funkcja opisująca powierzchnię odkształconą płyty

E_x , E_y , ν_x , ν_y , G - stałe materiałowe

D_x , D_y - sztywności giętkie płyty ortotropowej

2H - tzw. efektywna sztywność skrętna płyty.

t - grubość płyty

Równania powyższe mają zastosowanie wtedy, gdy ugięcia płyty są rzędu $w \geq 0,2+0,3 t$ [14]. Gdy ugięcia płyty są rzędu t wpływy stanu tarczowego i zgięciowego na odkształcenia płyty są podobne. Jeżeli pominiemy wpływ przemieszczeń pionowych w na odkształcenia wywołane obciążeniem tarczowym wówczas najczęściej zakładamy superpozycję odkształceń stanu tarczowego i płytowego:

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^m + \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^m + \varepsilon_y^b \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^m + \varepsilon_{xy}^b \end{aligned}$$

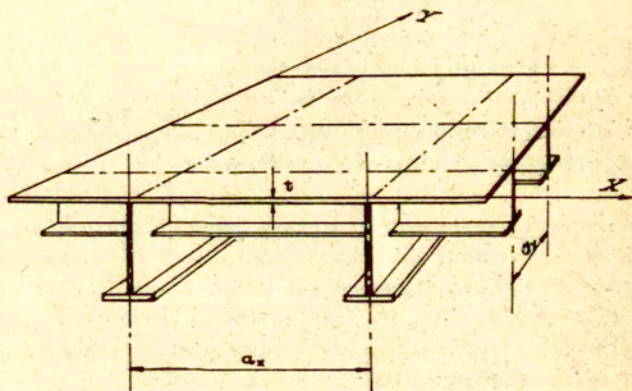
Przy takich założeniach równoznacznych z założeniami teorii małych odkształceń korzystamy z równania różniczkowego (4.2.2)

Równanie to opisuje zachowanie się konstrukcji symetrycznej względem płaszczyzny środkowej płyty, przy założeniu, że płaszczyzna ta jest wolna od naprężeń. Poza tym zakłada się, że sztywności D_x , D_y i $2H$ są równomiernie rozłożone w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Jak wspomniano poprzednio założenia powyższe są niezgodne z rzeczywistością szczególnie w przypadku, gdy sztywności giętne płyty D_x i D_y znacznie się różnią. Powyższe uwagi wskazują na to jak ważne jest ustalenie odpowiednich wzorów na sztywności giętne i skrętne w zależności od rodzaju rzeczywistej konstrukcji ortotropowej. Wzory na D_x i D_y przyjmuje się [16] najczęściej w następującej postaci:

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} D_x &= \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E I_x}{a_y} \\ D_y &= \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E I_y}{a_x} \end{aligned}$$

gdzie a_x i a_y - rozstawy usztywnień względem odpowiednio kierunków X i Y

$E I_x$, $E I_y$ - sztywności giętne odcinków płyty ortotropowej na które składa się jedno usztywnienie i pas płyty cienkiej o szerokości odpowiednio a_x i a_y rys. 4.1.



Rys. 4.1.

We wzorach powyższych przyjęto, że płyta wykonana jest ze stali wobec czego $E_x = E_y = E$ i $\nu_x = \nu_y = \nu$.

Często we wzorach (4.2.4) pomija się składnik $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ [17].

Większe trudności sprawia określenie sztywności skrętnej $2H$.

Przy założeniu M.T.Hubera [18], że płaszczyzna środkowa płyty jest wolna od naprężeń otrzymujemy następujący wzór na $2H$:

$$(4.2.5) \quad 2H = \nu_x D_x + \nu_y D_y + 2(1 - \nu_x \nu_y) \left(D_x \frac{G_{xy}}{E_x} + D_y \frac{G_{xy}}{E_y} \right)$$

lub

$$(4.2.6) \quad H = D_1 + 2D_{xy} \quad \text{gdzie } D_1 = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \text{a } D_{xy} = \frac{Gt^3}{12}$$

Przeważnie wzór na $2H$ przedstawia się w prostej postaci

$$(4.2.7) \quad 2H = \alpha \sqrt{D_x D_y}$$

gdzie α współczynnik sztywności skrętną przyjmuje się dla stalowych usztywnionych płyt o wartościach $\alpha < 1$, a najczęściej $0,3 < \alpha < 0,5$ uzyskane na podstawie badań eksperymentalnych [14] s.40.

Niekiedy sztywność skrętną $2H$ określa się na podstawie badań modelowych odniesionych do konkretnego przypadku. Do rozwiązania równania różniczkowego 4.2.2 zastosowano metodę elementów skończonych. Z uwagi na przyjętą niezależność stanu tarczowego i płytowego zastosowano element o pięciu stopniach swobody w węźle, gdzie dwa stopnie swobody u i v są niezależne od trzech stopni swobody w , φ_x i φ_y . W obszarze płytowego elementu skończonego przyjęto tzw. niedostosowane funkcje kształtu tzn. takie, które nie dają ciągłości nachylenia normalnej do powierzchni $w(x,y)$ przy przejściu z elementu do elementu sąsiedniego. Liczne rozwiązania wykazały, że takie elementy "spisują się" lepiej niż bardziej sztywno określone elementy z dostosowanymi funkcjami kształtu. Do analizy przyjęto element czterowęzłowy. Wielomian definiujący funkcję kształtu ma następującą postać:

$$(4.2.8) \quad w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

Stałe a_i $i=1, \dots, 12$ wyznaczamy pisząc dwanaście równań tzn. w każdym z czterech węzłów podstawiamy współrzędne tych węzłów do trzech równań opisujących w^i , φ_x^i , φ_y^i $j = 1 \dots 4$. Przedstawiając równania w postaci macierzowej uzyskujemy krótki zapis:

$$(4.2.9) \quad \{P\}^c = \mathcal{C} \{a\}$$

gdzie \mathcal{C} - macierz 12×12 zależna od współrzędnych węzłów

Przyjęte założenia pozwalają na jawne wyznaczenie wartości składników macierzy sztywności elementu co zostało dokonane w pracach Zienkiewicza i Cheung'a [19] oraz Melosh'a [20]. Ogólnie macierz sztywności czterowęzłowego elementu piszemy w następującej dogodnej postaci:

$$(4.2.10) \quad \underset{\sim}{K} = \frac{1}{60_{ab}} \underset{\sim}{L} \left\{ \underset{\sim}{D}_x \underset{\sim}{K}_1 + \underset{\sim}{D}_y \underset{\sim}{K}_2 + \underset{\sim}{D}_1 \underset{\sim}{K}_3 + \underset{\sim}{D}_{xy} \underset{\sim}{K}_4 \right\} \cdot \underset{\sim}{L}$$

gdzie a i b wymiary elementu skończonego odpowiednio względem osi x i y.

$\underset{\sim}{k}_1$ $k=1...4$, $\underset{\sim}{L}$ - macierze 12×12

Jawną postać macierzy $\underset{\sim}{k}_1$ i $\underset{\sim}{L}$ można znaleźć w pracy O.C. Zienkiewicza "Metoda elementów skończonych" z r. 1972 na stronach 170 i 171.

Posiadanie macierzy sztywności w jawnej postaci skraca oczywiście radykalnie czas obliczeń.

Element tarczowy z założenia /5 stopni swobody w węźle/ pokrywa się z elementem płytowym wobec czego również posiada cztery węzły. Przyjęto następującą funkcję kształtu:

$$(4.2.11) \quad u = b_1 + b_2x + b_3y + b_4yx$$

Podobnie jak w przypadku elementu płytowego stałe b_i wyznaczamy podstawiając współrzędne węzłów do (4.2.11).

I w tym przypadku macierz sztywności elementu można uzyskać w jawnej postaci. Ponieważ w dostępnej w kraju literaturze trudno spotkać macierze związane z własnościami czterowęzłowego elementu tarczowego podajemy je niżej w pełnej postaci.

Macierz $\underset{\sim}{B}$ wiążąca odkształcenia z przemieszczeniami według wzoru $\underline{\underline{\epsilon}} = \underset{\sim}{B} \underline{\underline{\delta}}$ ma postać:

$$(4.2.12) \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \partial \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 \end{bmatrix}$$

gdzie

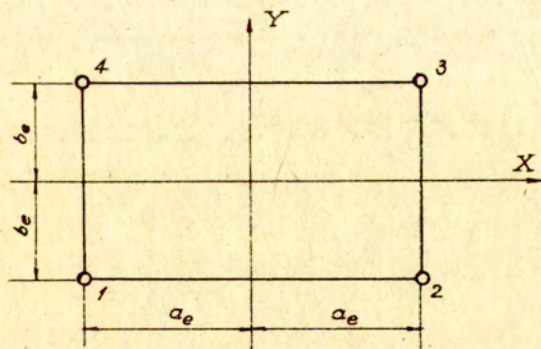
$$L_1 = \frac{1}{4} - \frac{4}{4a} - \frac{y}{4b} - \frac{xy}{4ab}$$

$$(4.2.13) \quad L_2 = \frac{1}{4} - \frac{x}{4a} - \frac{y}{4b} - \frac{xy}{4ab}$$

$$L_3 = \frac{1}{4} + \frac{x}{4a} + \frac{y}{4b} + \frac{xy}{4ab}$$

$$L_4 = \frac{1}{4} - \frac{x}{4a} + \frac{y}{4b} + \frac{xy}{4ab}$$

Znaki w powyższych wzorach zależą od tego w jakiej kolejności rozpatruje się węzły elementu. W elemencie płytowym jak i w tarczowym przyjęto kolejność jak na rys. 4.2.



Rys. 4.2.

Podstawiając (4.2.13) do (4.2.12) otrzymujemy:

$$(4.2.14) \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_y & 0 & c_1 - c_y & 0 & c_1 + c_y & 0 & -c_1 - c_y & 0 \\ 0 & -c_2 + c_x & 0 & -c_2 - c_x & 0 & c_2 + c_x & 0 & -c_2 - c_x \\ -c_2 + c_x & -c_1 + c_y & -c_2 - c_x & c_1 - c_y & c_2 + c_x & c_1 + c_y & -c_2 - c_x & -c_1 - c_y \end{bmatrix}$$

gdzie $c_1 = \frac{1}{4a}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_x = \frac{x}{4ab}$, $c_y = \frac{y}{4ab}$

Ogólną postać macierzy sztywności elementu tarczowego podajemy podobnie jak elementu płytowego

$$(4.2.15) \quad \tilde{K} = \frac{1}{24} \left\{ E_x \tilde{K}_1 + E_{xy} \tilde{K}_2 + E_y \tilde{K}_3 + G_x \tilde{K}_4 + G_{xy} \tilde{K}_5 + G_y \tilde{K}_6 \right\}$$

gdzie dla materiału izotropowego jakim jest stal mamy

$$(4.2.16) \quad E_x = \frac{Eh_x}{1 - \nu^2}, \quad E_{xy} = \frac{E(h_x + h_y)}{2(1 - \nu^2)}, \quad E_y = \frac{Eh_y}{1 - \nu^2},$$

$$G_x = Gh_x, \quad G_{xy} = \frac{G(h_x + h_y)}{2}, \quad G_y = Gh_y$$

h_x, h_y - sprawzone do odcinka odpowiednio a i b grubości tarczy oraz:

$$(4.2.17) \quad \tilde{K}_1 = \frac{b}{a} \begin{bmatrix} 8 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ -8 & 0 & 8 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 8 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -8 & 0 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{symetrycznie} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \text{symetrycznie} & & & \\ 6 & 0 & & & & & & \\ 0 & -6 & 0 & & & & & \\ 6 & 0 & -6 & 0 & & & & \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 0 & & & \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & & \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_3 = \frac{\sigma}{a} \begin{bmatrix} 0 & & & & \text{symetrycznie} & & & \\ 0 & 8 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 0 & 8 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -4 & 0 & -8 & 0 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_4 = \frac{\sigma}{a} \begin{bmatrix} 0 & & & & \text{symetrycznie} & & & \\ 0 & 8 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -8 & 0 & 8 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

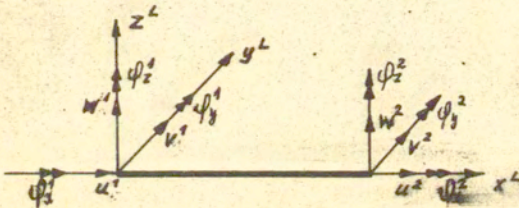
$$\tilde{K}_5 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \text{symetrycznie} & & & \\ 6 & 0 & & & & & & \\ 0 & 6 & 0 & & & & & \\ -6 & 0 & -6 & 0 & & & & \\ 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & & & \\ -6 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & & \\ 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & \\ 6 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}_6 = \frac{R}{b} \left[\begin{array}{cccccccc} 8 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 4 & 0 & 8 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -4 & 0 & -8 & 0 & 8 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ -8 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 8 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Wyżej opisane macierze sztywności sprawdzono rozwiązując tarczę obciążoną siłami skupionymi taką jak w pracy [21].

5. Algorytm dla modelu ramowego płyty

Model ramowy bazuje na dwuwęzłowym elemencie bękowym o sześciu stopniach swobody w węźle, por. rys. 5.1.



Rys. 5.1.

Stopnie swobody elementu ustawiono w kolejności:

$$\{ u^1, v^1, w^1, \varphi_x^1, \varphi_y^1, \varphi_z^1, u^2, v^2, w^2, \varphi_x^2, \varphi_y^2, \varphi_z^2 \}^T,$$

gdzie:

u^j, v^j, w^j - translacja j -tego węzła w kierunku osi x^L, y^L, z^L

$\varphi_x^j, \varphi_y^j, \varphi_z^j$ - rotacja j -tego węzła wokół osi x^L, y^L, z^L .

Macierz sztywności elementu w lokalnym układzie współrzędnych przyjęto w klasycznej postaci /por. [12] i podano w tabeli 5.1.

W tablicy 5.1. wprowadzono oznaczenia:

E - moduł Younga,

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - moduł sprężystości postaciowej,

ν - liczba Poissona,

L - długość elementu belkowego,

J_x - wskaźnik sztywności na skręcanie,

I_y, I_z - główne momenty bezwładności,

A - pole przekroju.

Transformacja macierzy sztywności elementu z układu współrzędnych lokalnych do układu globalnego opisana jest równaniem

$$\underline{K}^E = (\underline{A}^E)^T \underline{K}^{EL} \underline{A}^E ,$$

gdzie:

$\underline{K}_{12 \times 12}^E$ - macierz sztywności elementu w układzie współrzędnych globalnych,

$\underline{K}_{12 \times 12}^{EL}$ - macierz sztywności elementu w układzie współrzędnych lokalnych,

$\underline{A}_{12 \times 12}^E$ - macierz kosinusów kierunkowych /macierz transformacji/ - jest macierzą ortogonalną .

Macierz transformacji ma postać:

$$\underline{A}^E = \begin{bmatrix} \underline{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C} \end{bmatrix}$$

a macierz

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Wyrazy macierzy \underline{C} /por. 21 / są równe:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, \\ C_{12} &= \sin \alpha \cos \beta, \\ C_{13} &= -\sin \alpha, \\ C_{21} &= \cos \alpha \sin \beta \sin \tau - \sin \alpha \cos \tau, \\ C_{22} &= \sin \alpha \sin \beta \sin \tau + \cos \alpha \cos \tau, \\ C_{23} &= \cos \beta \sin \tau, \\ C_{31} &= \cos \alpha \sin \beta \cos \tau + \sin \alpha \sin \tau, \\ C_{32} &= \sin \alpha \sin \beta \cos \tau - \cos \alpha \sin \tau, \\ C_{33} &= \cos \beta \cos \tau, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\cos \alpha = \begin{cases} \Delta x / L_{xy} & , \quad \text{gdy } L_{xy} \neq 0, \\ 1 & , \quad \text{gdy } L_{xy} = 0, \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \begin{cases} \Delta y / L_{xy} & , \quad \text{gdy } L_{xy} \neq 0, \\ 0 & , \quad \text{gdy } L_{xy} = 0, \end{cases}$$

$$\cos \beta = L_{xy} / L, \quad \sin \beta = \Delta z / L,$$

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1,$$

$$L_{xy} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

x_1, y_1, z_1 - są współrzędnymi 1-go węzła elementu w układzie współrzędnych globalnych,

x_2, y_2, z_2 - są współrzędnymi 2-go węzła elementu w układzie współrzędnych globalnych,

γ - jest kątem jaki tworzy oś y^L układu współrzędnych lokalnych z płaszczyzną x-y układu współrzędnych globalnych.

Globalna macierz sztywności konstrukcji układana jest w momencie rozwiązywania układu równań algebraicznych postaci

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{R},$$

gdzie:

$\underline{K}_{N \times N}$ - globalna macierz sztywności konstrukcji,

$\underline{U}_{N \times 1}$ - wektor przemieszczeń węzłowych w układzie współrzędnych globalnych,

$\underline{R}_{N \times 1}$ - wektor obciążeń węzłowych w układzie współrzędnych globalnych,

N - liczba stopni swobody konstrukcji po podziale na elementy skończone.

Układ liniowych równań algebraicznych rozwiązywany jest metodą frontalną, por. [22].

Siły wewnętrzne w elementach wyznacza się w ich lokalnych układach współrzędnych zgodnie z równaniem:

$$\underline{S}^{EL} = \underline{K}^{EL} \cdot \underline{U}^{EL},$$

gdzie:

$\underline{U}_{12 \times 1}^{EL} = \underline{A}_{12 \times 12}^E \underline{U}_{12 \times 1}$ - wektor przemieszczeń węzłowych elementu w jego lokalnym układzie współrzędnych,

$\underline{S}_{12 \times 1}^{EL}$ - wektor sił wewnętrznych elementu w lokalnym układzie współrzędnych.

6. Opis programu na e.m.c.

Posługując się założeniami i wzorami opisanymi w p. 4 i 5 ułożono program ORTRAM na e.m.c. w języku FORTRAN. Program ułożono wykorzystując niektóre segmenty programu Hinton-Owena [22]. Kierowano się przede wszystkim zasadą by program był możliwie najprostszy mając na względzie późniejsze zastosowanie do rozwiązywania zagadnień nieliniowych. Schemat blokowy programu przedstawiono na rys. str. 52

Czytanie danych następuje w segmentach INPUT i GEOMETRY. Częściowo zautomatyzowano te czynności, gdyż współrzędne węzłów i numery węzłów są generowane. Stałe D_x , D_y , D_{xy} , D_1 obliczone są w segmencie MOD wg poniższych wzorów:

a/ w przypadku płyty usztywnionej w dwóch kierunkach

$$(6.1.) \quad D_x = \frac{E I_x}{b}, \quad D_y = \frac{E I_y}{a},$$
$$D_{xy} = (1 - \nu^2) \sqrt{D_x D_y}, \quad D_1 = \nu (D_x + D_y) / 2$$

b/ w przypadku płyty usztywnionej w jednym kierunku (ν)

$$(6.2.) \quad D_x = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_y = \frac{E I_y}{a}$$
$$D_{xy} = (1 - \nu^2) \sqrt{D_x D_y}, \quad D_1 = 0$$

c/ w przypadku płyty izotropowej

$$(6.3.) \quad D_x = D_y = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$$
$$D_{xy} = D_x (1 - \nu) / 2$$
$$D_1 = \nu D_x$$

lub wczytywane przez użytkownika /por. Instrukcje czytania danych/.

Macierze kwadratowe k_i $i=1, \dots, 4$ w przypadku elementu płytowego, k_j $j=1, \dots, 6$ w przypadku elementu tarczowego oraz k_{ij} $[12 \times 12]$ w przypadku elementu belkowego przechowywane są w zbiorze zewnętrznym i jednorazowo czytane w segmencie STIFF. Gdy macierz sztywności elementu następnego jest identyczna z jakąkolwiek macierzą już utworzoną /elementy mogą być obrócone względem siebie o kąt 90° / następuje kopiowanie tej macierzy z taśmy.

Istnieje możliwość obciążenia siłami skupionymi i obciążeniem równomiernym rozłożonym działającym prostopadle do elementu skończonego. Liczba wektorów obciążeń nie jest ograniczona. Do rozwiązywania układu równań liniowych zastosowano metodę frontalną /seg. FRONT z programu Hintona-Owena/ dostosowaną do metody elementów skończonych. Program podaje wyniki w postaci przemieszczeń, naprężeń i sił wewnętrznych. Obliczenie 25 elementowej płyty izotropowej trwa około 30 s., a 36 elementowej tarczy izotropowej około 20 s. na e.m.c. ODRA 1301. Zapotrzebowanie na pamięć wynosi 30 Kobyte'ów dla zadania z 64 elementami. Program został również uruchomiony na e.m.c. RIAD-32 oraz na minikomputerze SM-4. Opracowano w ramach projektu dogodny sposób konwersji programu pomiędzy w/w komputerami.

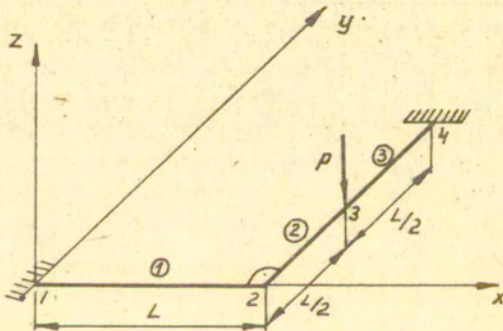
7. Przykłady obliczeń i analiza wyników

W celu sprawdzenia poprawności działania programu ORTRAM, policzono najpierw zwykle ramy przestrzenne oraz proste płyty /przykłady 1-4/. Wyniki porównano z rozwiązaniami analitycznymi oraz z rozwiązaniami identycznych przykładów z prac innych autorów.

Następnie policzono płyty usztywnione /przykłady 5 i 6/, stosując obydwa modele: ramowy i ortotropowy.

Przykład 1

Pręt wygięty pod kątem prostym i obciążony siłą prostopadłą do płaszczyzny, w której się znajduje podzielony na trzy elementy skończone jak pokazuje rys. 7.1.



Rys.7.1. Schemat dyskretyzacji

Przyjęto następujące dane:

Sztywność na zginanie $EI = 3,96 \cdot 10^{10} \text{ kG} \cdot \text{mm}^2$

Sztywność na skręcanie $GJ = 3,04 \cdot 10^{10} \text{ kG} \cdot \text{mm}^2$

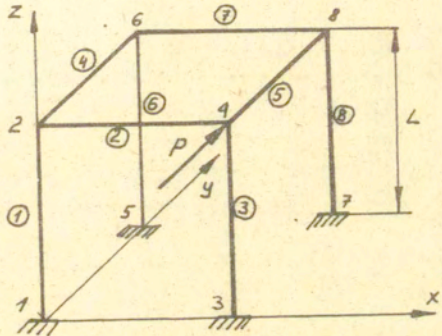
Długość $L = 1000 \text{ mm}$

Moduł Younga $E = 21\,000 \text{ kG/mm}^2$

Współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, $P = 6,72 \cdot 10^3 \text{ kG}$

Ugięcie w punkcie obciążenia wyniosło 4,43 mm, zaś według pracy [23] - 4,50 mm. Błąd względny nie przekroczył więc 1,5%.

Przykład 2



Rys.7.2. Schemat dyskretyzacja dla przykładu nr 2

Rama zbudowana z prętów o długości L jest obciążona siłą P .

Przyjęto następujące dane:

$$EI = 9,08 \cdot 10^9 \text{ kG mm}^2$$

$$GJ = 6,98 \cdot 10^9 \text{ kG mm}^2$$

$$L = 710 \text{ mm}$$

$$E = 21\,000 \text{ kG/mm}^2$$

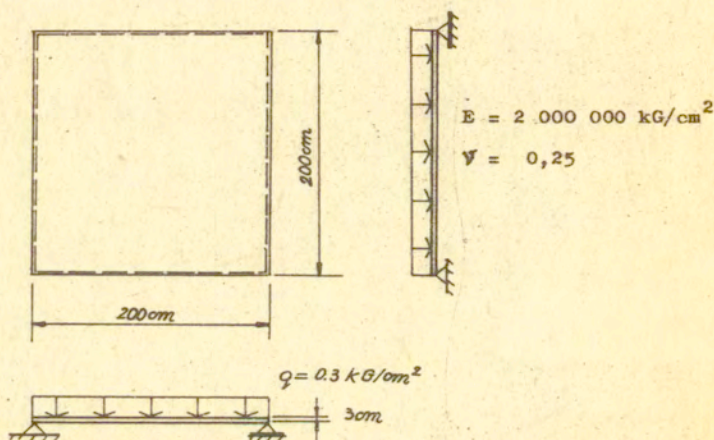
$$\nu = 0,3$$

$$P = 4075 \text{ kG}$$

Ugięcie w kierunku y węzła nr 4 wyniosło 7,362 mm zaś według [23] - 7,300 mm. Błąd względny wyniósł 0,85%.

Przykład 3

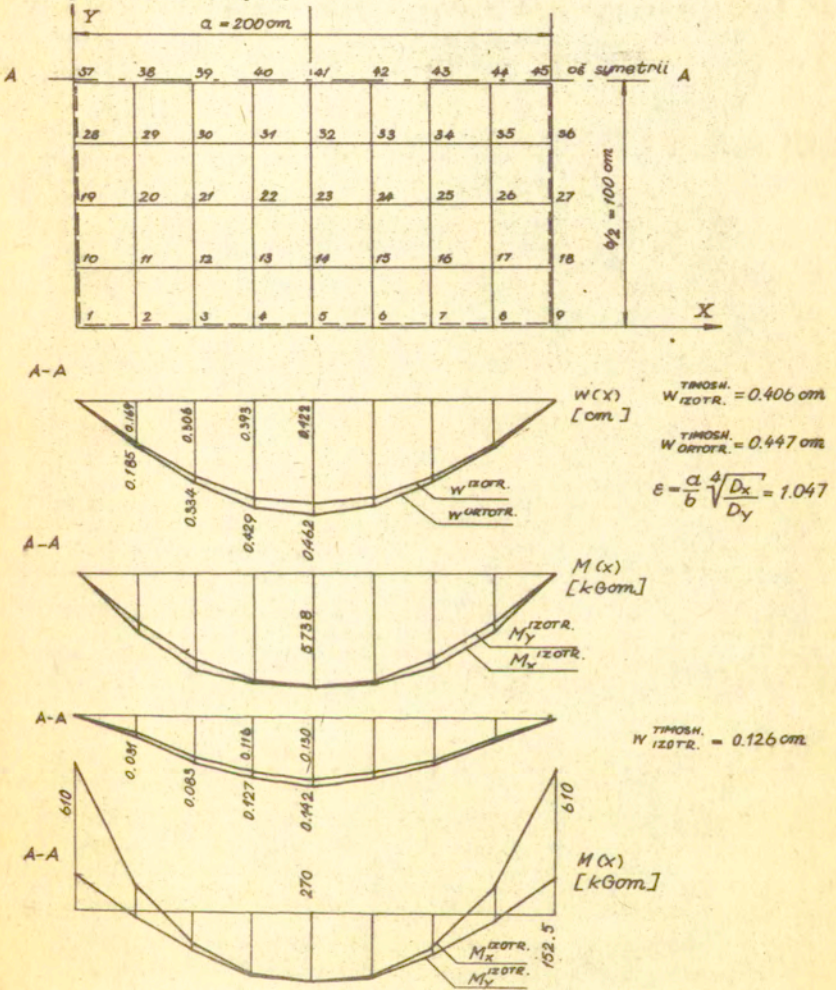
Rozpatrzmy płytę o wymiarach i własnościach fizycznych podanych na rysunku 7.3



Rys. 7.3

Płyta obciążona jest na całej powierzchni obciążeniem równomiernie rozłożonym o wartości $q = 0.3 \text{ kg/cm}^2$. Płyte tę rozwiążemy raz jako izotropową o sztywnościach $D_x = D_y = Et^3/12(1-\nu^2) = 48000\,000 \text{ kGcm}$, $D_{xy} = (1-\nu)D_x/2 = 1\,800\,000 \text{ kGcm}$, $D_1 = \nu \cdot D_x = 1\,200\,000 \text{ kGcm}$, a raz jako ortotropową o sztywnościach $D_x = 4\,000\,000 \text{ kGcm}$, $D_y = 4\,800\,000 \text{ kGcm}$, $D_{xy} = (1-\nu)\sqrt{D_x D_y}/2 = 3\,286\,335 \text{ kGcm}$, $D_1 = \nu \sqrt{D_x D_y} = 1\,095\,445 \text{ kGcm}$. Sztywności płyty ortotropowej zostały tak dobrane by sztywność $H = D_1 + 2D_{xy}$ występująca we wzorze (4.2.2) była równa $\sqrt{D_x D_y}$. Wówczas bowiem można rozwiązanie płyty ortotropowej wyrazić za pomocą rozwiązania płyty izotropowej jak pokazał S. Timoshenko [16]. Umożliwi to porównanie rozwiązania m.e.e płyty izotropowej i ortotropowej z rozwiązaniami ścisłymi. Na rysunku przedstawiono podział płyty na elementy skończone oraz wykresy przemieszczeń i momentów płyty izotropowej i ortotropowej swobodnie podpartej na krawędziach. Niżej

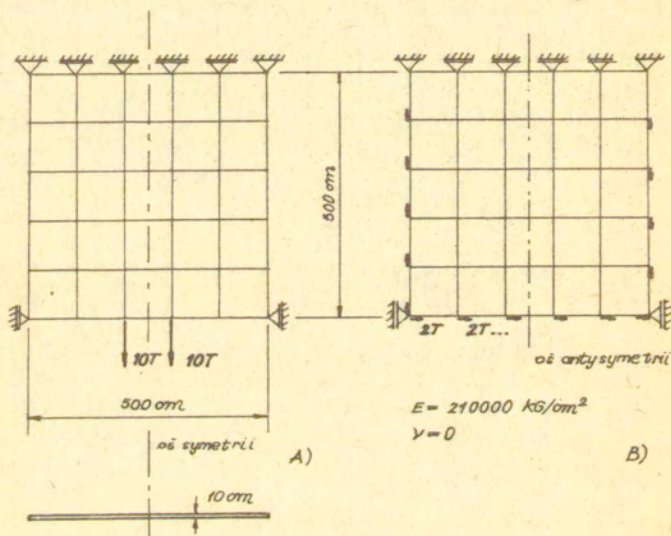
Na rys. 7.4. pokazano wykresy dotyczące płyty o krawędziach sztywno zamocowanych.



Rys. 7.4

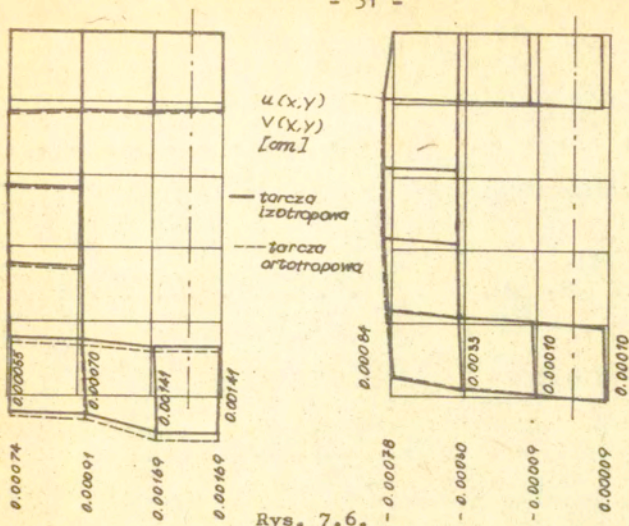
Przykład 4

Program ORTRAM pozwala również na rozwiązanie stanu tarczowego. Rozwiążemy tarczę kwadratową obciążoną dwiema siłami skupionymi taką jak w pracy N-E. Wiberga i H. Tagnforsa [21] /por. rys. 7.5/.



Rys. 7.5.

Dodatkowo tarczę tę obciążymy antysymetrycznie siłami stycznymi jak pokazano na rys. 7.5 i rozwiążemy również jako tarczę ortotropową. Na rys. 7.6 pokazano deformację brzegów tarczy izotropowej o średnich grubościach $h_x = 0,1 \text{ m}$ i $h_y = 0,1 \text{ m}$. W tab. porównano przemieszczenia pionowe krawędzi AB tarczy izotropowej i przemieszczenia tej samej krawędzi tarczy ortotropowej o średnich grubościach $h_x = 0,1 \text{ m}$ i $h_y = 0,08 \text{ m}$.



Rys. 7.6.

Własności materiałowe w obu przypadkach są takie same tzn. $E_x = E_y = 2\ 100\ 000\ \text{kg/cm}^2$ i $\nu_x = \nu_y = 0$.

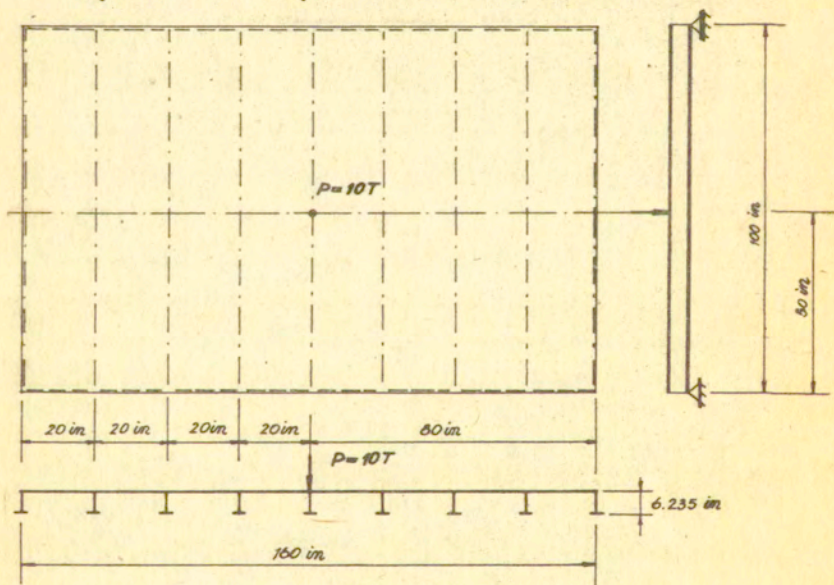
Obciążenie symetryczne	Numer węzła			
	1	2	3	4
Tarcza izotropowa ([211] i autorzy)	0.550	0.695	1.411	1.411
Tarcza ortotropowa	0.743	0.911	1.694	1.694
Obciążenie antysemetryczne	Numer węzła			
	1	2	3	4
Tarcza izotropowa	-0.780	-0.300	-0.086	0.086
Tarcza ortotropowa	-0.842	-0.333	-0.097	0.097

Przykład 5

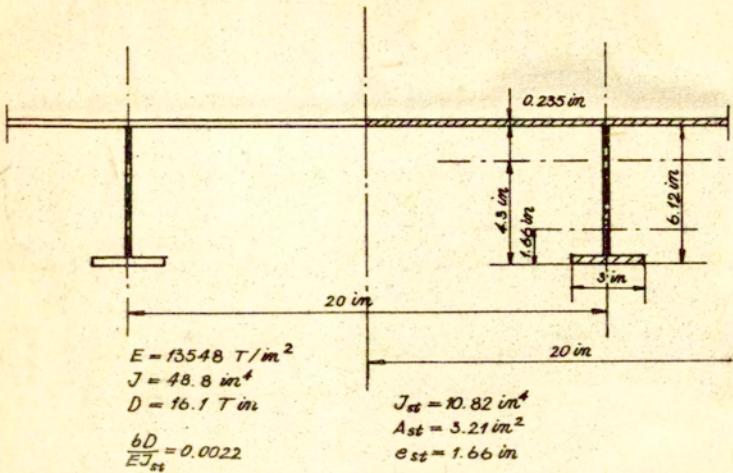
Obliczmy płytę prostokątną usztywnioną w jednym kierunku podpartą swobodnie na dwóch dłuższych krawędziach. Takie podobne płyty stalowe zostały poddane próbnym obciążeniom siłą skupioną $p = 10 \text{ T}$ przyłożoną w środku płyty, a wyniki eksperymentów przedstawione w pracy Clarksona [25]. Korzystając z danych podanych w tej pracy obliczono moment bezwładności $I_y = 48.8 \text{ in}^4$ jednej "sekcji" płyty /por. rys. 7.8/. Moduł sprężystości podłużnej wynosi $E = 13548 \text{ T/in}^2$, a liczba Poissona $\nu = 0.3$. Sztywności płyty obliczono jak niżej:

$$D_x = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} = 16.1 \text{ T} \cdot \text{in} \quad D_y = \frac{E I_y}{a} = 33044 \text{ T} \cdot \text{in}$$

$$D_{xy} = (1 - \nu^2) \sqrt{D_x D_y} = 663.8 \text{ T} \cdot \text{in} \quad D_1 = 0$$

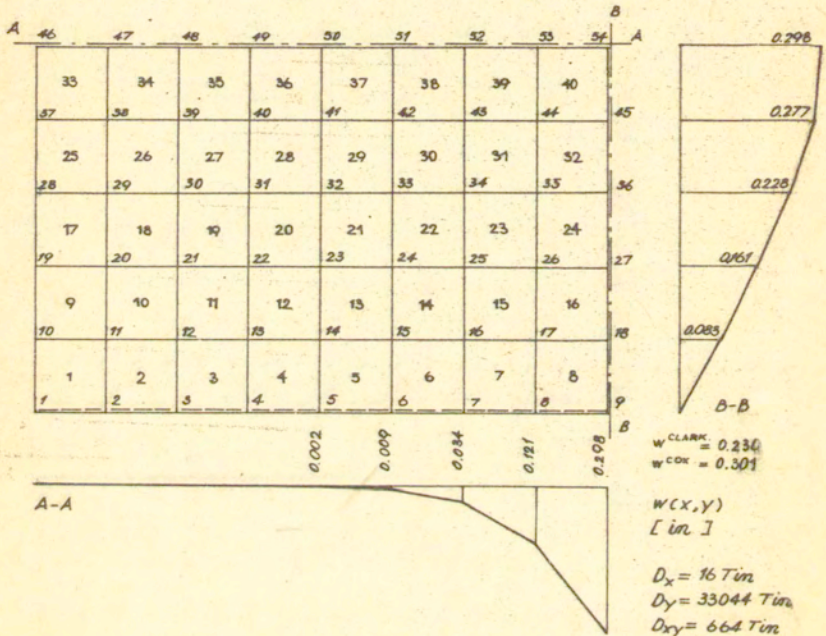


Rys. 7.7.



Rys. 7.8.

Na rys. 7.9. przedstawiono podział płyty na elementy skończone. Przyjęto szerokość elementu równą szerokości sekcji płyty usztywnionej. Założono, że moment bezwładności I_y elementu skończonego jest równy momentowi bezwładności I_{y_1} sekcji płyty.

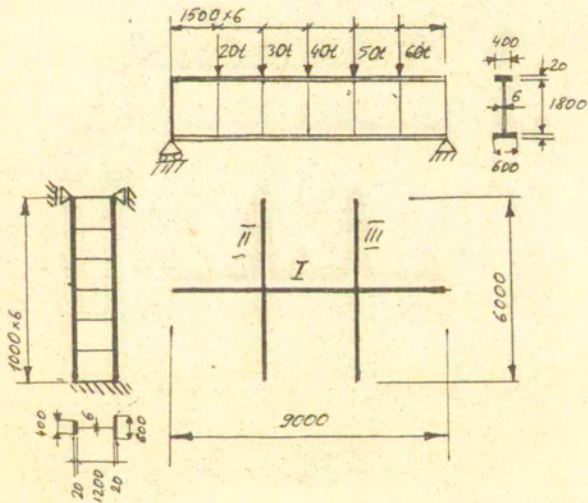


Rys. 7.9.

Przykład 6

Korzystając z danych zawartych w pracy [24] policzono typowy fragment układu usztywnień kadłuba statku, charakteryzujących się wysokim i wiotkim średnikiem.

Zastosowano najpierw model ramowy idealizujący układ za pomocą rusztu pokazanego na rysunku 7.10.



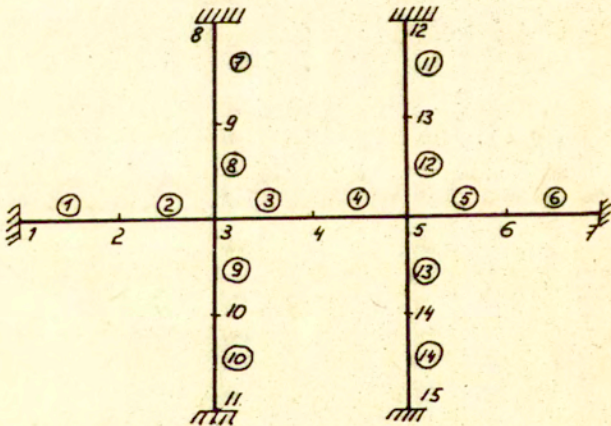
Rys. 7.10.

Przyjęto następujące wymiary belek dwuteowych stanowiących elementy rusztu [mm]

<u>Belka 1</u>		<u>Belka 2</u>	
t_w	= 6	t_w	= 6
t_{sf}	= 20	t_{sf}	= 20
t_{bf}	= 20	t_{bf}	= 20
h_w	= 1800	h_w	= 1200
b_{sf}	= 400	b_{sf}	= 400
b_{bf}	= 600	b_{bf}	= 600

Przyjęto, że moduł Younga $E = 21\ 000\ \text{kg/mm}^2$, zaś współczynnik Poissona - $\nu = 0.3$.

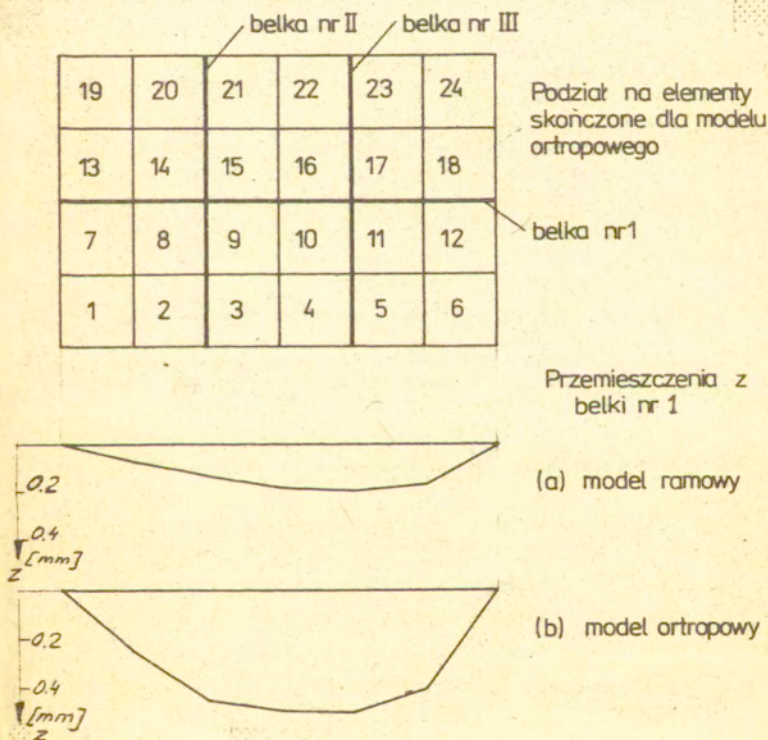
Schemat dyskretyzacji oraz sposób obciążenia pokazano na rys. 7.10 oraz 7.11. Ugięcie węzła środkowego /nr 4/ w kierunku osi z wyniosło $0.193\ \text{mm}$, zaś węzła nr 6 - $0.173\ \text{mm}$.



Rys. 7.11. Schemat dyskretyzacji

Przemieszczenia belki pokazano na rys. 7.12 a.

Następnie wykorzystano model ortotropowy aproksymując układ płytą ortotropową o sztywnościach D_x i D_y równych odpowiednim sztywnościom belek. Sposób dyskretyzacji pokazano na rys. 7.12b. Na rys. tym naniesiono również uzyskane przemieszczenia, które są tym razem przeszło dwukrotnie większe. Różnice wynikają z zasadniczej odmienności cech geometrycznych obydwu modeli i wskazują na konieczność bardzo ostrożnego stosowania modelu ortotropowego w przypadku niewielkiej liczby mocnych usztywnień.



Rys. 7.12

8. Instrukcja użytkowania programu ORTRAM

Do opisu pól na kartach perforowanych przyjęto następujące oznaczenia:

- A - transmisja ciągu znaków alfanumerycznych
- I - transmisja wartości typu INTEGER
- F - transmisja wartości typu REAL
- X - oznacza pole puste

8.1. Instrukcja czytania danych dla modelu ramowego płyty

1/ Karta tytułowa /18 A 4/

kol. 1-72 TITLE - ciąg znaków alfanumerycznych służący do identyfikacji zadania

2/ Karta kontrolna /8I5/

kol. 1-5 NPOIN - liczba węzłów

6-10 NELEM - liczba elementów

11-15 NVFIX - liczba węzłów z ograniczeniami kinematycznymi *

16-20 NNODE - liczba węzłów w elemencie /w obecnej wersji programu NNODE = 2/

21-25 NMATS - liczba rodzaj^{ów} elementów skończonych /jako jeden rodzaj elementów rozumiemy elementy mające równe kosinusy kierunkowe oraz równe: $E, \nu, I_x, I_y, I_z,$
 A i \bar{I} /

26-30 NALGO - w obecnej wersji programu parametr NALGO = 2

31-35 w obecnej wersji programu kolumny

36-40 te nie są wykorzystane

3/ Karty identyfikacyjne elementów. NUMEL kart /4I5/ ułożonych w sekwencji rosnącej

kol. 1-5 - numer elementu

6-10 - numer rodzaju elementu

11-15 - numer 1-go węzła elementu

16-20 - numer 2-go węzła elementu

4/ Karty geometrii NUMEL kart /I5, 3F10.0/ ułożonych w sekwencji rosnącej

kol. 1-5 - numer węzła

6-15 - współrzędna x

16-25 - współrzędna y danego węzła

26-35 - współrzędna z

5/ Karty warunków brzegowych. NVFIX kart /1x, I4, 4x, 6I1, 5X, 6F10.6/ ułożonych w sekwencji rosnącej

kol. 2-5 - numer węzła z ograniczeniami kinematycznymi

10- 1-szy s.s.

11- 2-gi s.s.

12- 3-ci s.s.

= 0 swobodne ruchy

13- 4-ty s.s.

= 1 ograniczenie kinematyczne

14- 5-ty s.s.

15- 6-ty s.s.

21-30 - 1-szy s.s.

31-40 - 2-gi s.s.

41-50 - 3-ci s.s.

51-60 - 4-ty s.s.

61-70 - 5-ty s.s.

71-80 - 6-ty s.s.

w przypadku wymuszonego przemieszczenia węzła w kierunku danego stopnia swobody /ss/wstawiamy w danym polu wartość tego przemieszczenia

6/ NMATS zbiór trzykartowych opisujących rodzaje elementów

a/ Karta kontrolna /I5/

kol. 1-5 - numer rodzaju elementu

b/ Karta materiałowa /5F10.5/

kol. 1-10 - moduł Younga E

11-20 - liczba Poissona

kolumny 21-50 są w obecnej wersji programu niewykorzystane

c/ Karta cech wytrzymałościowo-geometrycznych

kol. 1-10 - wskaźnik wytrzymałości na skręcanie I_x

11-20 - moment bezwładności przekroju względem osi y - I_y

- 21-30 - moment bezwładności przekroju względem
osi $Z-I_z$
31-40 - pole przekroju belki - A
41-50 - kąt δ

7/ Karta identyfikacyjna dla obciążeń /18A4/

kol. 1-72 TITLE - ciąg znaków alfanumerycznych identyfikujących przypadek obciążenia

8/ Zbiór kart obciążeniowych /I5, 6F10.3/

Karty te pisze się tylko dla węzłów obciążonych i węzła o maksymalnym numerze /jedna karta dla węzła/

kol. 1-5 - numer węzła obciążonego

6-15 - obciążenie w kierunku osi x

16-25 - obciążenie w kierunku osi y

26-35 - obciążenie w kierunku osi z

36-45 - obciążenie wokół osi x

46-55 - obciążenie wokół osi y

56-65 - obciążenie wokół osi z

9/ Karta /2F10.5, 3I5/. W wersji liniowej programu RAMA wczytujemy

kol. 1-10	1.
11-20	2.
21-25	1
26-30	3
31-35	2

8.2. Instrukcja czytania danych dla modelu ortotropowego płyt usztywnionych obciążonych w płaszczyźnie i prostopadle do płaszczyzny środkowej

Numer karty	Nazwa	Format	Opis zmiennych i tablic
1	NPROB	I5	NPROB - liczba zadań
2	TITLE	12A6	TITLE - dowolny tytuł zadania

Numer karty	Nazwa	Format	Opis zmiennych i tablic
3	NPOIN, NELEM, NVFIX, NCASE, NDOFN, NMATS NORTO NBETE, NPRES	10I4	<p>NPOIN - liczba węzłów</p> <p>NELEM - liczba elementów</p> <p>NVFIX - liczba węzłów podpartych</p> <p>NCASE - liczba wektorów obciążeń</p> <p>NDOFN - liczba stopni swobody w węźle</p> <p>= 2 - stan tarczowy</p> <p>= 3 - stan płytowy</p> <p>= 5 - stan tarczowy i płytowy łącznie</p> <p>NMATS - liczba różnego typu elementów w zależności od własności fizycznych i geometrycznych elementu</p> <p>NORTO - określa wzory na obliczenie stałych DX, DY, DXY, D1</p> <p>= \emptyset - czytanie stałych obliczonych przez użytkownika</p> <p>= 1 - płyta usztywniona w dwóch kierunkach</p> <p>= 2 - płyta usztywniona w jednym kierunku</p> <p>= 3 - płyta cienka izotropowa</p> <p>NBETE - określa wybór rodzaju stanu obciążenia</p> <p>= \emptyset - stan tarczowy i płytowy łącznie</p> <p>= 1 - stan płytowy</p>

			= 2 - stan tarczowy NPRES = \emptyset bez obciążeń typu geometrycznego = 1 - z obciążeniami typu geometrycz- nego /przemieszcze- nie podpory/
4	DX, DY, DXY, D1	10F8.6	sztynności płyty obli- czone przez użytkownika /NORTO = \emptyset /
5	MATNO	5/20/4/	MATNO /IELEM/ - numery związane z typem elementu; własności elementów czy- tane są do tablicy PROPS
6	ESTNO	5/20I4/	ESTNO /IELEM/ - numery związane ze sztywnością elementu; jeżeli kolejny element ma takie same wymiały i ten sam numer MATNO co którykolwiek ele- ment poprzedni to numer ESTNO kolejnego elementu możemy zapisać jako równy numerowi i odpowiedniego elementu poprzedniego
7	NUMAT, PROPS	I4, 10F8.6	NUMAT - numer typu ele- mentu PROPS - tablica zawiera- jąca własności fizyczne i geome- tryczne elementu PROPS /1/ - moduł Younga E PROPS /2/ - liczba Pois- sona

			PROPS /3/ - grubość płyty t
			PROPS /4/ - rozstaw usztywnień w kierunku osi X
			PROPS /5/ - rozstaw usztywnień w kierunku osi Y
			PROPS /6/ - sztywność odcinka płyty /rys. I_x
			PROPS /7/ - sztywność odcinka płyty /rys. I_y
			PROPS /8/ - sprawdzona grubość tarczy w kierunku osi X - h_x
			PROPS /9/ - sprawdzona grubość tarczy w kierunku osi Y - h_y
8	XPOIN, DIREC	I4, 10F8,6	XPOIN - liczba węzłów w linii brzegu w kierunku osi X DIREC IPOIN,1 - współrzędne tych węzłów
9	YPOIN, DIREC	I4, 10F8,6	j.w. w kierunku osi Y
10	NOFIX	6 10I8/	NOFIX IVFIX - numer podpartych węzłów
11	TYFIX	6 10I8/	TYFIX IVFIX - liczby określające sposób podparcia węzła np. 12 - zablokowany przesuw /lub obrót/ w kierunku osi X i Y 123 - zablokowany przesuw /lub obrót/ w kierunku osi X,Y,Z

12	PRESC	6 10F8.6	PRESC IVFIX, IDOFN - wartości znanych /nadanych/ przemieszczeń /NPRES = 1/
13	TITLE	12A6	TITLE - nazwa wektora obciążenia
14	IPL0D, IUNLO	2I4	IPL0D= \emptyset - nie ma obciążeń skupionych IPL0D=M - są obciążenia skupione M - największy numer węzła obciążonego siłą skupioną IUNLO= \emptyset - nie ma obciążeń równomiernie rozłożonych IUNLD=N - są obciążenia równomiernie rozłożone N - największy numer elementu obciążonego
15	LODPT, POINT	I4,5F8.6	LODPT - numer obciążonego siłą skupioną węzła POINT IDOFN - wartości sił w węźle LODPT na poszczególnych kierunkach stopni swobody
16	LODEL, AL0AD	I4, F8.6	LODEL - numer obciążonego obciążeniem równomiernie rozłożonym elementu AL0AD - wartość obciążenia równomiernie rozłożonego działającego na LODEL-ty element

9. Wydaruki danych i wyników dla przykładów nr 5 i 6

Przykład nr 5

PROBLEM NO. 1 *** CLARKSON'S PLATE ***

NPUIN =54 NELEM =40 NVFIX =22 NCASE =1 NSTRE =3 NNODE =4 NDOFN =3
 NMATS =1 NPROP =9 NDIME =2 NBETE =1 NORTO =2 NEVAB =12 NPRES =0

MATERIAL PROPERTIES

NUMAT	YOUNG	POISS	HPLAT	DIMAA	DIMBB	STFJY
1	0.1355E 05	0.3000E 00	0.2350E 00	0.1000E 02	0.1000E 02	0.2439E 02

ELEMENT	PROPERTY	STIFFNESS	NODE NUMBERS			
1	1	1	1	2	11	10
2	1	1	2	3	12	11
3	1	1	3	4	13	12
4	1	1	4	5	14	13
5	1	1	5	6	15	14
6	1	1	6	7	16	15
7	1	1	7	8	17	16
8	1	1	8	9	18	17
9	1	1	10	11	20	19
10	1	1	11	12	21	20
11	1	1	12	13	22	21
12	1	1	13	14	23	22
13	1	1	14	15	24	23
14	1	1	15	16	25	24
15	1	1	16	17	26	25
16	1	1	17	18	27	26
17	1	1	19	20	29	28
18	1	1	20	21	30	29
19	1	1	21	22	31	30
20	1	1	22	23	32	31
21	1	1	23	24	33	32
22	1	1	24	25	34	33
23	1	1	25	26	35	34
24	1	1	26	27	36	35
25	1	1	28	29	38	37
26	1	1	29	30	39	38
27	1	1	30	31	40	39
28	1	1	31	32	41	40
29	1	1	32	33	42	41
30	1	1	33	34	43	42
31	1	1	34	35	44	43
32	1	1	35	36	45	44
33	1	1	37	38	47	46
34	1	1	38	39	48	47
35	1	1	39	40	49	48
36	1	1	40	41	50	49
37	1	1	41	42	51	50
38	1	1	42	43	52	51
39	1	1	43	44	53	52
40	1	1	44	45	54	53

NODAL POINT COORDINATES

NODE	X	Y
1	0.000	0.000
2	10.000	0.000
3	20.000	0.000
4	30.000	0.000
5	40.000	0.000
6	50.000	0.000
7	60.000	0.000
8	70.000	0.000
9	80.000	0.000
10	0.000	10.000
11	10.000	10.000
12	20.000	10.000
13	30.000	10.000
14	40.000	10.000
15	50.000	10.000
16	60.000	10.000
17	70.000	10.000
18	80.000	10.000
19	0.000	20.000
20	10.000	20.000
21	20.000	20.000
22	30.000	20.000
23	40.000	20.000
24	50.000	20.000
25	60.000	20.000
26	70.000	20.000
27	80.000	20.000
28	0.000	30.000
29	10.000	30.000
30	20.000	30.000
31	30.000	30.000
32	40.000	30.000
33	50.000	30.000
34	60.000	30.000
35	70.000	30.000
36	80.000	30.000
37	0.000	40.000
38	10.000	40.000
39	20.000	40.000
40	30.000	40.000
41	40.000	40.000
42	50.000	40.000
43	60.000	40.000
44	70.000	40.000
45	80.000	40.000
46	0.000	50.000
47	10.000	50.000
48	20.000	50.000
49	30.000	50.000
50	40.000	50.000
51	50.000	50.000
52	60.000	50.000
53	70.000	50.000
54	80.000	50.000

RESTRAINED MODES

NODE CODE	FIXED VALUES
1	1 0 0
2	1 0 0
3	1 0 0
4	1 0 0
5	1 0 0
6	1 0 0
7	1 0 0
8	1 0 0
9	1 0 0
18	0 0 1
27	0 0 1
36	0 0 1
45	0 0 1
46	0 1 0
47	0 1 0
48	0 1 0
49	0 1 0
50	0 1 0
51	0 1 0
52	0 1 0
53	0 1 0
54	0 1 1

MAXIMUM FRONTWIDTH ENCOUNTERED = 33

MAXIMUM FRONTWIDTH ENCOUNTERED = 33

PLATE STIFFNESS

DX	DY	DDY	D1
0.16102E 02	0.33044E 05	0.66378E 03	0.00000E

LOAD CASE = 1

54	***	P=2.5TON	***
	2.50	0.00	0.00

DISPLACEMENTS

NODE	DISPL. W	ROTAT. FIX	ROTAT. FIY
1	0.000000000E 00	-0.273248154E-06	-0.938669791E-06
2	0.000000000E 00	-0.917676829E-06	-0.168840115E-05
3	0.000000000E 00	-0.383465408E-05	-0.798703509E-05
4	0.000000000E 00	-0.171855122E-04	-0.233173895E-04
5	0.000000000E 00	-0.703471983E-04	-0.122592195E-03
6	0.000000000E 00	-0.293754472E-03	-0.184774943E-03
7	0.000000000E 00	-0.105829036E-02	-0.135532596E-02
8	0.000000000E 00	-0.380731095E-02	0.359795422E-02
9	0.000000000E 00	-0.841038234E-02	0.410369308E-02
10	0.269839510E-05	-0.263464967E-06	0.364606759E-07
11	0.902805494E-05	-0.872736132E-06	0.807465620E-06
12	0.377684839E-04	-0.366359055E-05	0.266383908E-05
13	0.169008043E-03	-0.163312118E-04	0.193494533E-04
14	0.692397782E-03	-0.670517774E-04	0.432824322E-04
15	0.288780392E-02	-0.278871912E-03	0.383183550E-03
16	0.104015771E-01	-0.100417264E-02	0.433389550E-03
17	0.375117326E-01	-0.363901893E-02	0.725752635E-02
18	0.831959865E-01	-0.813713150E-02	0.000000000E 00
19	0.518637788E-05	-0.299571492E-06	0.249018291E-06
20	0.171772487E-04	-0.743969742E-06	0.250443323E-05
21	0.720797553E-04	-0.313989395E-05	0.102718075E-04
22	0.321355836E-03	-0.138924003E-04	0.506470423E-04
23	0.131903793E-02	-0.572283744E-04	0.170657825E-03
24	0.548537140E-02	-0.236346587E-03	0.835944997E-03
25	0.197486572E-01	-0.850470461E-03	0.199064807E-02
26	0.715800689E-01	-0.311029877E-02	0.105248532E-01
27	0.161010817E 00	-0.734322000E-02	0.000000000E 00
28	0.719819937E-05	-0.168712770E-06	0.105065265E-05
29	0.236732698E-04	-0.544598779E-06	0.367239363E-05
30	0.994515065E-04	-0.228613369E-05	0.156402322E-04
31	0.442455959E-03	-0.101280497E-04	0.729328918E-04
32	0.181749177E-02	-0.416366918E-04	0.263341361E-03
33	0.753842321E-02	-0.170841734E-03	0.117349074E-02
34	0.271484696E-01	-0.618899265E-03	0.323144126E-02
35	0.985370346E-01	-0.222746194E-02	0.135105102E-01
36	0.228106217E 00	-0.596114250E-02	0.000000000E 00
37	0.849994961E-05	-0.901194110E-07	0.128750952E-05
38	0.278701991E-04	-0.285252194E-06	0.437511781E-05
39	0.117076730E-03	-0.121710977E-05	0.189007648E-04
40	0.520239716E-03	-0.526276148E-05	0.865231201E-04
41	0.213925924E-02	-0.223082638E-04	0.319917602E-03
42	0.884186769E-02	-0.873543603E-04	0.138464274E-02
43	0.319597148E-01	-0.337051481E-03	0.402250020E-02
44	0.115289240E 00	-0.109598095E-02	0.157391723E-01
45	0.277358892E 00	-0.370999974E-02	0.000000000E 00
46	0.897424794E-05	0.000000000E 00	0.136171979E-05
47	0.292667305E-04	0.000000000E 00	0.461585110E-05
48	0.123384331E-03	0.000000000E 00	0.199773306E-04
49	0.546063550E-03	0.000000000E 00	0.912172864E-04
50	0.225482063E-02	0.000000000E 00	0.338547555E-03
51	0.926859429E-02	0.000000000E 00	0.145903390E-02
52	0.337179599E-01	0.000000000E 00	0.428692250E-02
53	0.120536184E 00	0.000000000E 00	0.166378026E-01
54	0.297502338E 00	0.000000000E 00	0.000000000E 00

Przykład nr 6.

WZDLUŻNIK	DENNY	2	2	1	1
24					
15	14				
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1				
6	1				
7	1				
8	1				
9	1				
10	1				
11	1				
12	1				
13	1				
14	1				
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1				
6	1				
7	1				
8	1				
9	1				
10	1				
11	1				
12	1				
13	1				
14	1				
15	1				
1	1				
7	1				
8	1				
11	1				
12	1				
15	1				
2100000.	0.3				
450000.	1904800.	52600.	304.		0.
2					
2100000.	0.3				
450000.	800780.	52600.	272.		0.
OBCIAZENIA					
2			200000.		
3			300000.		
4			400000.		
5			500000.		
6			600000.		
15					
1.	2.	1	3	2	

WZDLUŻNIK DENNY

NPOIN = 15 NELEM = 14 NVFIX = 6
 NNODE = 2 NMATS = 2 NEVAB = 12
 NALGO = 2 NCRIT = 1 NINCS = 1

ELEMENT	PROPERTY	NODE	NUMBERS
1	1	1	2
2	1	2	3
3	1	3	4
4	1	4	5
5	1	5	6
6	1	6	7
7	1	7	8
8	1	8	9
9	1	9	10
10	1	10	11
11	1	11	12
12	1	12	13
13	1	13	14
14	1	14	15

```

NODE      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
X      0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
Y      0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
Z      0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

```

```

NODE      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
CODE      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
FIXED VALUES
0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000

```

```

NUMBER      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
ELEMENT PROPERTIES
0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
ELEM. VALUES
0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000

```

MAXIMUM FRONTWIDTH ENCOUNTERED = 24

```

OBCIAZENA      0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
SPELKI         0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
SPOSI         0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

```


START

INPUT

Sterowanie programem
Dane ogólne

GEOMETRY

Dane geometryczne
Generacja współrzędnych
i numerów węzłów

ORT

Zbiór zawrotny
zawierający współczynniki
macierzy sztywności elementu
płytkowego
NBETE = 1
i elementu
tarczowego
NBETE = 2

NBETE =

NORTO =

MOD

Oblicza sztywności D_x ,
 D_y , D_{xy} , D_t elem. płytki

Oblicza sztywności
 S_x , S_y , S_{xy} elementu
tarczowego

Oblicza sztywności
 D_x , D_y , D_{xy} , D_t oraz
 S_x , S_y , S_{xy}

STIFF

Oblicza macierz sztywności elementu płytkowego i tarczowego

LOAD

Tworzy wektor obciążenia

FRONT

Rozwiązuje układ równań liniowych

STRESS

Oblicza naprężenia i siły wewnętrzne

END

Aplika, nowy wektor obciążenia

Aplika, nowe zadanie

Podprogramy programu ORPRAM dla modelu ortotropowego.

10. Spis literatury

1. SOSNOWSKI W., "Nieliniowe zachowanie się obciążonych wielokierunkowo usztywnionych płyt pozycja statku analizowane metodą wyidealizowanych jednostek strukturalnych". IPPT-PAN, ZTK, opracowanie nr 1/1984 dla Polskiego Rejestru Statków.
2. MANSOUR A., "On the Non-linear Theory of Orthotropic Plates". Journal of Ship Research, December 1971, p. 266.
3. MANSOUR A., "Post-Buckling Behaviour of Stiffened Plates with Small Initial Curvature under Combined Loads", International Shipbuilding Progress, June 1971, p. 217.
4. MANSOUR A., "Charts for the Buckling and Post-Buckling Analysis of Stiffened Plates under Combined Loading", Technical and Research Bulletin, No 2-22, Society of Naval Architects and Marine Engineers, July 1976.
5. AALAMI B., CHAPMAN J.C., "Large deflection behaviour of rectangular orthotropic plates under transverse and in-plane loads, Proc.Inst.Civ. Engineers, March 1969.
6. OSTAPENKO A., "Ultimate Strength Design of Wide Stiffened Plates Loaded Axially and Normally", in: Structural Analysis Non-Linear Behaviour and Techniques, Supplementary Report No 164UC, Transport and Road Research Laboratory, England, 1974, pp. 175-180.
7. BLEICH F., "Buckling strength of metal structures", McGraw Hill Book Co., New York 1976.
8. WEDA Y., YAO T., "Ultimate strength of stiffened plates and minimum stiffness ratio of their stiffeners /under thrust/, Trans of IWRI /Welding Research Institute, Osaka University/, Vol 10, Nr 2, 1981.
9. WIEWIORSKI S., WITUSZYNSKI K., "Konstrukcja stalowego kadłuba okrętowego, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1977.
10. SCHADE H.A., "The effective breadth of stiffened plating under bending loads", Transactions SNAME, Vol 59, 1951.
11. FAULKNER D., "A review of effective plating for use in the analysis of stiffened plating in bending and compress

- sion", J. of Ship Research, Vol 19, 1975, pp. 1-17.
12. MEYER C., SCORDELIS A.C., Computer program for prismatic folded plates and beam elements, University of California, Berkeley, report SESM 70-3, 1970.
 13. ROSTOVITSEV G.G., Calculation of a Thin Plate Sheeting Supported by ribs, Trudy Leningr. Inst. Inzhenerov Grozhdanshogo Vozdushnogo Flota /In Russian/, No. 20 /1940/ 3-108.
 14. TROITSKY M.S., Stiffened Plates Bending, Stability and Vibrations, Elsevier Scien, Publ.Comp. 1976, s.114.
 15. KARMAN T., Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, p.349, 1940.
 16. TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KRIEGER S., Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, Mc Graw Hill Book Company, Inc., New York 1959, 2.368.
 17. CORNELIUS W., Die Berechnung der ebenen Flächen tragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte, Der Stahlbau, nr 2/1952, 2.21, 43, 60.
 18. HUBER M.T., Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten, Akad.Nauk.Techn., Warszawa 1929.
 19. ZIENKIEWICZ O.C., CHEUNG Y.K., "The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs", Proc. Inst. Civ. Eng., 28, 2.471-88, 1964.
 20. MELOSH R.I.: Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method", I.A.I.A.A., 1, s.1631-37, 1963.
 21. WIBERG N-E., TAGNFORS H., FEMWT, A general purpose computer program for solving problems by finite element method, Göteborg, 1972.
 22. HINTON E., OWEN J., "Finite Element Programming", Academic Press., New York, 1977.
 23. UEDA Y., YAMAKAWA T., AKAMATSU T., "A new theory on elastic-plastic analysis of framed structures, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 19, N 875, 1969.
 24. UEDA Y., RESHED S.M.H., "The idealized structural unit method and its application to deep girder structures, Comp. and Struct., 18, 2, 277-293, 1984.
 25. Clarkson J., Uniform pressure tests on plates with edges free to slide inwards, Trans. RINA 104, 67-80, 1962.

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wprowadzenie	3
2. Definicja założeń	5
3. Główne cechy oraz kryteria wyboru modeli fizycznych płyty	7
4. Algorytm dla modelu ortotropowego płyty	10
5. Algorytm dla modelu ramowego płyty	19
6. Opis programu na e.m.c.	24
7. Przykłady obliczeń i analiza wyników	26
8. Instrukcja użytkowania programu ORTRAM	38
8.1. Instrukcja czytania danych dla modelu ramowego płyty	38
8.2. Instrukcja czytania danych dla modelu ortotropowego płyt usztywnionych obciążo- nych w płaszczyźnie i prostopadle do płasz- czyzny środkowej	40
9. Wydruki danych i wyników dla przykładów nr <u>5</u> i <u>6</u>	45
10. Spis literatury	

S t r e z z e c i e

Celem pracy jest przedstawienie programu numerycznego o nazwie ORTRAM, służącego do liniowej analizy obciążonych wielokierunkowo płyt usztywnionych metodą elementów skończonych. Zastosowano dwa modele rozpatrywanej konstrukcji: ortotropowy i ramowy. Sposób modelowania podyktowany został zamiarem dalszego wykorzystania programu w nieliniowej analizie płyt poszycia statku metodą wyidealizowanych jednostek strukturalnych. Przyszłe zastosowanie programu do celów praktycznych zmusiło autorów do maksymalnego ograniczenia liczby elementów kosztem ich wielkości oraz do uwzględnienia w algorytmie dużej zmienności wymiarów i proporcji sztywności płyt i usztywnień.

Praca zawiera instrukcję użytkownika programu ORTRAM oraz przykłady obliczeń prostych ram, płyt izotropowych, ortotropowych i usztywnionych.