

4.42 — konstrukcje plastyczne

S. Dorosz, J. A. König

ITERACYJNA METODA
OKREŚLANIA UGIĘĆ
RAM SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

46/1983

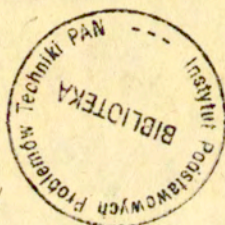
P. 269



WARSZAWA 1983

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 lipca 1983 r.

56992



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,7. Ark.druk. 3.
Oddano do drukarni w grudniu 1983 r.
Nr zamówienia 47/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stanisław Dorosz

Jan A. König

Zakład Teorii Konstrukcji

IPPT PAN

ITERACYJNA METODA OKREŚLANIA UGIĘĆ
RAM SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH

1. WSTĘP.

Normy projektowania i obliczeń konstrukcji stalowych szeregu krajów /31/ w tym również polska norma /30/ zezwala-
ją na coraz szersze stosowanie metod teorii plastyczności
w analizie i projektowaniu tych konstrukcji. Opracowano
również wytyczne obliczenia i projektowania konstrukcji
stalowych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej /34/ jako
uzupełnienie normy /30/.

Jednym z problemów, sprawiającym w praktyce duże
trudności, jest obliczanie ugięć w sprężysto - plastycznym
zakresie pracy konstrukcji. Trudności te związane są:

- ze zmniejszaniem się sztywności przekroju poprzecznego
/belki lub ramy / po przekroczeniu w nim maksymalnego
momentu plastycznego,
- z wyznaczeniem redystrybucji pola sił wewnętrznych w
konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych,
- z możliwością wystąpienia lokalnych odciążeń materiału
uprzednio uplastycznionego, nawet przy wzroście obciążeń.

Oczywiście zastosowanie zorientowanej na EMC metody elementów skończonych /3/, /24/, /8/ pozwala na rozwiązanie tego problemu, ale znacznym nakładem pracy i kosztów.

Dlatego też właściwym wydaje się stosowanie w praktyce inżynierskiej podejść przybliżonych, ale pozwalających wyznaczyć ugięcia z technicznie wystarczającą dokładnością /9/.

Proponowane dotychczas uproszczenia polegały:

- 1° na pominięciu lokalnych obciążeń. Pozwala to na pominięcie procedury przyrostowej i analizy stanu konstrukcji przy niższych poziomach obciążeń. Tym niemniej wynikająca stąd konieczność analizowania belki o zmiennej, nieznannej z góry sztywności, prowadzi, nawet w najprostszych przypadkach konstrukcji statycznie wyznaczalnych do uciążliwych rachunków /27/ /19/ /10/. W przypadkach nieco tylko bardziej skomplikowanych obliczenia te mogą być prowadzone tylko numerycznie /32/ /10/ /33/,
- 2° na dodatkowym uproszczeniu, polegającym na przyjęciu a priori pewnej formy zmienności sztywności elementów w strefach uplastycznionych. Polega to między innymi na stosowaniu linearyzacji rzeczywistego jej przebiegu /22/ lub przyjmowaniu pewnej stałej, uśrednionej sztywności w tych strefach /4/, /5/. Efektywne obliczanie ugięć staje się wtedy możliwe, ale w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych pozostaje trudność określenia redystrybucji pola sił wewnętrznych /22/,

- 3^o Przy określaniu nośności granicznej belek i ram płaskich, jak również ich nośności na przystosowanie, stosowana jest z powodzeniem hipoteza idealnych przegubów plastycznych. Polega ona na przyjęciu, że deformacje plastyczne koncentrują się w przekrojach, w których występują ekstremalne momenty zginające. Wiele prac /18/ /23/ /28/ /19/ /20/ /21/ opublikowanych na temat wielkości obrotu w idealnym przegubie plastycznym i związanych z tym ugięć w chwili wyczerpania nośności granicznej. Przy użyciu tej hipotezy, problem wyznaczania ugięć sprężysto - plastycznych, nawet w konstrukcjach silnie statycznie niewyznaczalnych znacznie się upraszcza /23/. Dla praktycznie stosowanych dwuteowników walcowanych otrzymuje się ugięcia z niedomiarem mniejszym niż 10% /15/ /2/. Tym niemniej, dla innych kształtów przekrojów poprzecznych, otrzymane w oparciu o tę hipotezę wielkości ugięć mogą być obarczone trudnym do ogólnego oszacowania błędem /często bardzo dużym/. Szczególnie duży wpływ stref plastycznych obserwuje się w konstrukcjach ramowo-belkowych z dużymi siłami osiowymi /10/ /33/.
- 4^o W związku z tym zrodziła się myśl połączenia prostoty obliczeniowej metody idealnych przegubów plastycznych z dokładnością podejścia opisanego w punkcie 1^o. Wymienić tu należy prace /15/, /23/, /5/, /13/, /32/, w których wpływ częściowego uplastycznienia uwzględniano zakładając w obliczeniach istnienie "zastępczych przegubów plastycznych", powstających przed całkowitym uplastycznieniem przekroju. Wielkość obrotu w takim

przegubie określana jest z różnych warunków, które zostaną szczegółowo omówione w punkcie 3. W pracach tych nie rozwiązano jednak problemu określania wpływu stref plastycznych na redystrybucję momentów zginających w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych.

Obecnie powstało wiele prac zorientowanych na wykorzystywanie różnorodnych metod programowania matematycznego dla konstrukcji dyskretnych /6/, /7/, /25/, /26/, /16/, /17/, /2/.

Dokładna znajomość wielkości stref plastycznych i ich wpływu na deformacje sprężysto - plastyczne całej konstrukcji jest szczególnie konieczna w analizie konstrukcji na terenach sejsmicznych, przy określaniu maksymalnej odkształcalności sprężysto - plastycznej /29/, przy analizie procesów formowania blach /33/, jak również w analizie pokrytycznego zachowania się elementów belkowo - ramowych ze znacznymi siłami osiowymi /10/.

Praca niniejsza przyjmuje za podstawę założenia punktu 4^o, proponuje, dodatkowo, dosyć prostą procedurę iteracyjną pozwalającą na przybliżone, ale stosunkowo dokładne uwzględnienie wpływu rozprzestrzeniania się stref plastycznych na redystrybucję pola momentów.

2. PEWNE ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE.

W sprężysto - plastycznej analizie belek i ram płaskich przyjmuje się zwykle następujące założenia:

- pozostaje w mocy hipoteza Bernoulliego płaskich przekrojów, stwierdzająca, że odkształcenie ε /w kierunku osi belki/ jest liniową funkcją odległości z od osi belki

$$\varepsilon(z) = z \cdot \chi \quad (1)$$

gdzie χ jest krzywizną linii ugięcia belki czy ramy,

- pomija się wpływ sił osiowych ,
- przekrój ma dwie osie symetrii ,
- w przekroju występuje tylko naprężenie normalne ,
- zależność naprężenie - odkształcenie przyjmowana jest jak dla materiału sprężysto idealnie plastycznego t. zn.

$$\varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^P \quad (2)$$

$$\varepsilon^E = \sigma / E$$

$$\dot{\varepsilon}^P = 0 \quad \text{dla} \quad |\sigma| < \sigma_0$$

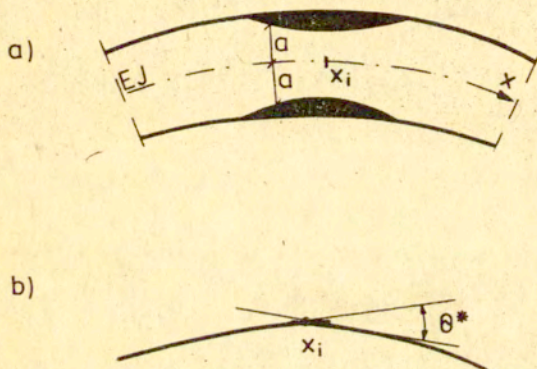
$$\sigma \cdot \dot{\varepsilon}^P \gg 0 \quad |\sigma| = \sigma_0$$

gdzie E jest modułem Younga, a σ_0 oznacza granicę plastyczności przy czystym rozciąganiu /ściskaniu/.

Z założeń tych można wyprowadzić zależności między momentem zginającym w przekroju, a krzywizną linii ugięcia. Przykład takiej zależności pokazano w załączniku I.

3. METODA SKUPIONYCH OBROTÓW ZASTĘPCZYCH.

Rozpatrzmy strefę uplastycznioną w elemencie odkształconym /Rys. 1 a/.



Rys.1.

Wpływ tej strefy na pozostałe części konstrukcji chcemy uwzględnić poprzez wprowadzenie zastępczego obrotu skupionego θ^* w przekroju najbardziej wyteżonym /Rys.1b/. Wielkość tego obrotu będziemy obliczać stosując dwa podejścia:

I. Dobieramy kąt θ_I^* w taki sposób, że krzywizna linii ugięcia, scałkowana po długości strefy uplastycznionej równa się przyrostowi obrotów sprężystych plus zastępczy kąt obrotu θ_I^*

Prowadzi to do wzoru, por. /15/, /5/, /32/

$$\theta_I^* = \int_c \kappa^p dx \quad (3)$$

uwzględniając

$$\begin{aligned} \varepsilon^P &= \varepsilon - \varepsilon^E, \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0}{E\alpha}, \\ \varepsilon^E &= \frac{M}{EJ} \end{aligned} \quad (4)$$

otrzymujemy

$$\theta_I^* = \frac{1}{E} \int_c \left(\frac{\sigma_0}{\alpha} - \frac{M}{J} \right) dx \quad (5)$$

gdzie α jest połową wysokości nieuplastycznionej części przekroju /por. rys. 1a/, całkowanie rozciąga się na długości strefy uplastycznionej, C .

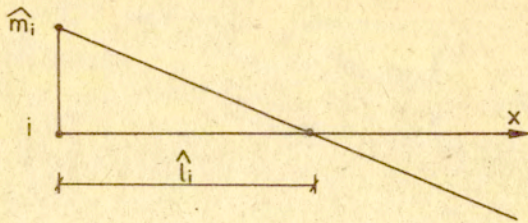
II. Można też zażądać, by praca momentu zginającego w przekroju najbardziej wyężonym, x_0 , na zastępczym kącie obrotu θ_{II}^* równa były pracy naprężeń w strefie uplastycznionej na występujących tam odkształceniach plastycznych t.zn (por./13/),

$$M(x_0) \cdot \theta_{II}^* = \iint_{c A} \sigma \cdot \varepsilon^P dA dx = \frac{\sigma_0^2}{E} \iint_{c A'} \left(\frac{|z|}{\alpha} - 1 \right) dA dx \quad (6)$$

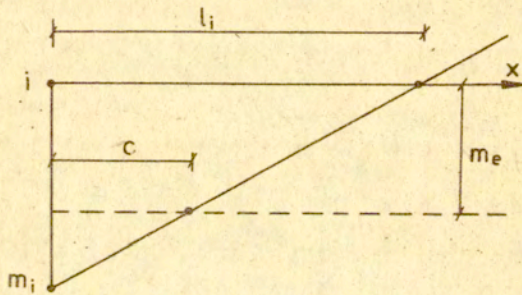
gdzie A' oznacza uplastycznioną część przekroju.

W celu zorientowania się do jakich wyników prowadzą wzory /5/ i /6/ i możliwości ich porównania z niektórymi dostępnymi rozwiązaniami, rozpatrzmy szczególny przypadek konstrukcji:

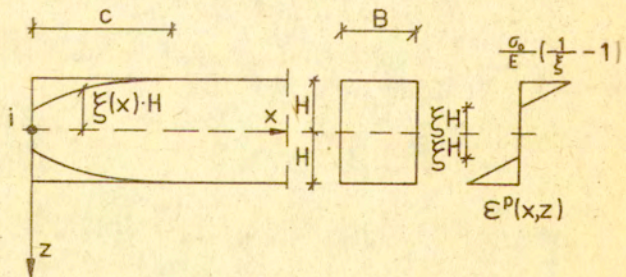
a)



b)



c)



Rys.2

- o przekrojach poprzecznych prostokątnych o wymiarach $2 H \times B$
- o liniowym wykresie momentów zginających M , który to realizowany jest przy obciążeniach siłami skupionymi.

Część takiego wykresu momentów dla przekroju krytycznego "1" przedstawiona jest na rys. 2 b.

Zależność moment zginający - krzywizna, opisana jest dla przekroju prostokątnego wzorami /rys. 2 b/ :

$$|M| = \frac{2}{3} B H^3 \kappa \quad \text{jeżeli} \quad |M| \leq M_e = \frac{2}{3} B H^2 \zeta_0 \quad (7)$$

$$|M| = \zeta_0 B \left(H^2 - \frac{a^2}{3} \right) \quad \text{jeżeli} \quad M_e \leq |M| \leq M_0 = \zeta_0 B H^2$$

Podstawiając liniową zależność momentu zginającego w belce, rys. 2 b, do wzorów, kolejno /5/ i /6/ oraz wykorzystując /7/, otrzymujemy następujące wyrażenia na skupione kąty zastępcze:

na podstawie wzoru /5/

$$|\theta_1^*| = \frac{\zeta_0 c}{E H} \left[\frac{2}{m-2/3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1-m}{3}} \right) - \frac{3}{4} m - \frac{1}{2} \right], \quad (8)$$

gdzie

$$c = L \left(1 - 2/3m \right);$$

na podstawie wzoru /6/

$$|\theta_{II}^*| = \frac{2\sigma_0 L}{EH} \cdot \frac{1}{m} \left\{ -1 + \frac{1}{m} \left[\frac{10}{9} - (2-m) \sqrt{\frac{1-m}{3}} \right] \right\} \quad (9)$$

przy czym $m = M/M_0$ jest bezwymiarowym momentem zginającym /ekstremalnym/ w przekroju krytycznym "i" to jest dla $x = 0$.

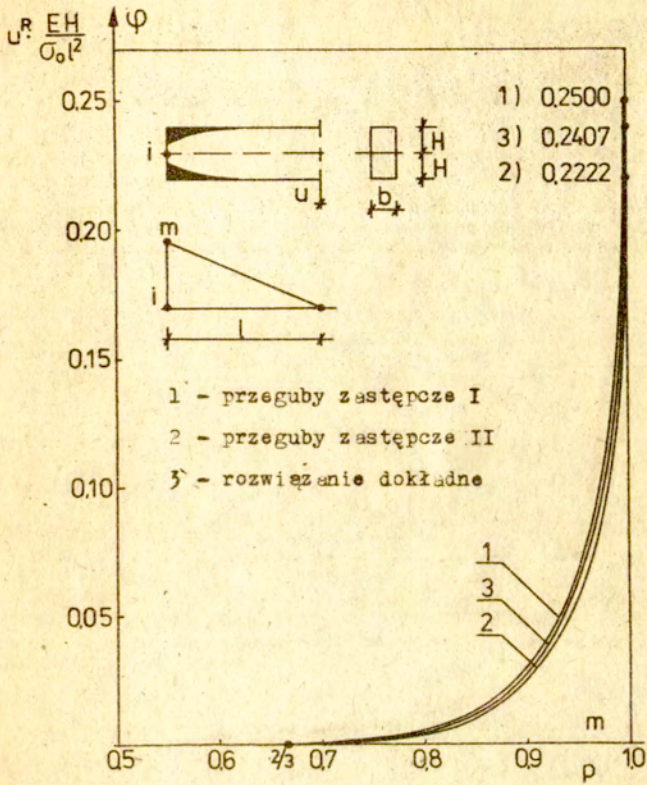
Zależność bezwymiarowego kąta zastępczego

$$\varphi^* = \theta^* EH / \sigma_0 L$$

od bezwymiarowego momentu m pokazano dla rozważanego przypadku elementu belki na rys. 3, krzywa 1 i 2. Z porównania tych krzywych widzimy, że wzory /8/ i /9/ dają podobną ocenę wpływu strefy częściowo uplastycznionej.

W załączniku I podano wzory na zastępczy kąt obrotu plastycznego wyprowadzone wg definicji II dla przekroju dwuteowego, przy prostoliniowym wykresie momentów. Dla praktycznie stosowanych przekrojów dwuteowych wpływ rozprzestrzeniania się stref uplastycznionych na wielkość ugięć stanowi mniej niż 10% wielkości ugięć obliczonych przy założeniu idealnych przegubów plastycznych. Podobne wnioski dla przekrojów dwuteowych można znaleźć w pracach /22/ /15/ /23/.

W pracy /29/ wprowadzono wzory na maksymalne zastępcze kąty obrotu dla różnych przekrojów dwuteowych, których to wielkości obliczane są na podstawie badań doświadczalnych.



Rys. 3 Porównanie ugięć resztkowych końca belki wspornikowej.

4. ITERACYJNA PROCEDURA OKREŚLANIA MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W KONSTRUKCJACH STATYCZNIE NIETYCZALNYCH.

Pokazany w poprzednim punkcie przykład sugeruje, że hipoteza przegubów zastępczych pozwala w sposób dostatecznie ściśle określić sprężysto-plastyczne deformacje elementów konstrukcji, a zatem spełnić warunki nierozdzielności, potrzebne przy rozwiązywaniu konstrukcji statycznie niewyznaczalnych.

Jednakże, analiza takich konstrukcji metodami klasycznej mechaniki konstrukcji, np metodą sił prowadziłyby do skomplikowanych /choć możliwych do wykonania/ rachunków. Dlatego do wyznaczania pola momentów zginających w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych, jako bardziej efektywną, proponujemy iteracyjną procedurę postępowania. Przebiega ona następująco:

- 1° Dla danego obciążenia, przyjmujemy pewne /dowolne/ pole momentów zginających $M^0(x)$, będące z tym obciążeniem w równowadze oraz nie naruszające warunku plastyczności $|M^0(x)| \leq M_0$.
- 2° Na podstawie tego pola obliczamy wartości skupionych obrotów zastępczych θ_i^* ($i=1..n$), według jednego z zaproponowanych w poprzednim rozdziale wzorów.
- 3° Obecność w konstrukcji sprężystej lub sprężysto - plastycznej pewnej liczby wymuszonych nieciągłości styczne do linii ugięcia, a taki jest sens geometryczny skupionych obrotów θ_i^* , powoduje powstanie w niej pewnego pola samorzównoważonych momentów zginających

Znając rozmieszczenie i wielkości tych nieciągłości można pole $M^*(x)$ wyznaczyć metodami klasycznej mechaniki konstrukcji sprężystych. Łatwo stwierdzić, że momenty M^* zależą od obrotów θ_i^* w sposób liniowy

$$M^*(x) = \sum_{i=1}^n K_i(x) \theta_i^* \quad (10)$$

gdzie $K_i(x)$ jest rozkładem momentów dla wymuszonego w przekroju "i" załamania osi belki o kąt $\theta_i^* = 1$

4^o Dodając te samozrównoważone momenty $M^*(x)$ do pola momentów $M^E(x)$ obliczonych przy założeniu nieograniczonej sprężystej pracy konstrukcji, wynikających z danego obciążenia, otrzymujemy pole

$$M^1(x) = M^E(x) + M^*(x) \quad (11)$$

będące również w równowadze z tym obciążeniem. Będzie ono, na ogół, różne od wyjściowego pola $M^0(x)$

Powtarzając tę procedurę dla $M^1/x/$ jako pola wyjściowego, otrzymujemy pewne pole $M^2/x/$ itd.

Jeżeli taki proces iteracyjny jest zbieżny /w sensie dążenia do zera różnic między wartościami momentów w kolejnych iteracjach, w każdym punkcie $x/$, to otrzymamy w rezultacie pole momentów zginających takie, że wynikię z niego deformacje sprężysto-plastyczne spełniają warunki nierozdzielności /zgodności geometrycznej/. Na podstawie znajomości pola momentów obliczyć możemy ugięcia sprężysto - plastyczne np wg. metod przedstawionych w następnym rozdziale.

Opisana procedura wymaga jeszcze wyjaśnienia, jak należy postępować, gdy pole M^1/\bar{x} lub któreś z otrzymanych w następnych iteracjach przekracza, co do wartości bezwzględnej moment graniczny M_0 . Otóż oznacza to, że w przekrojach, w których takie przekroczenie nastąpiło, występuje, oprócz obrotu zastępczego θ_i^* /pochodzącego od rozprzestrzeniania się strefy plastycznej/, również obrót plastyczny $\bar{\theta}_i$ /jak w idealnym przegubie plastycznym/. Wysokość rdzenia sprężystego w tym przekroju jest oczywiście równa zero. Wielkości obrotów $\bar{\theta}_i$, muszą być takie, by wynikiłe z nich dodatkowe momenty samozrównoważone

$$\bar{M}(x) = \sum_{i=1}^n K_i(x) \bar{\theta}_i \quad (12)$$

sprowadzały ekstremalne momenty zginające do zakresu $/ - M_0, + M_0 /$ t.j. by zachodziła zależność:

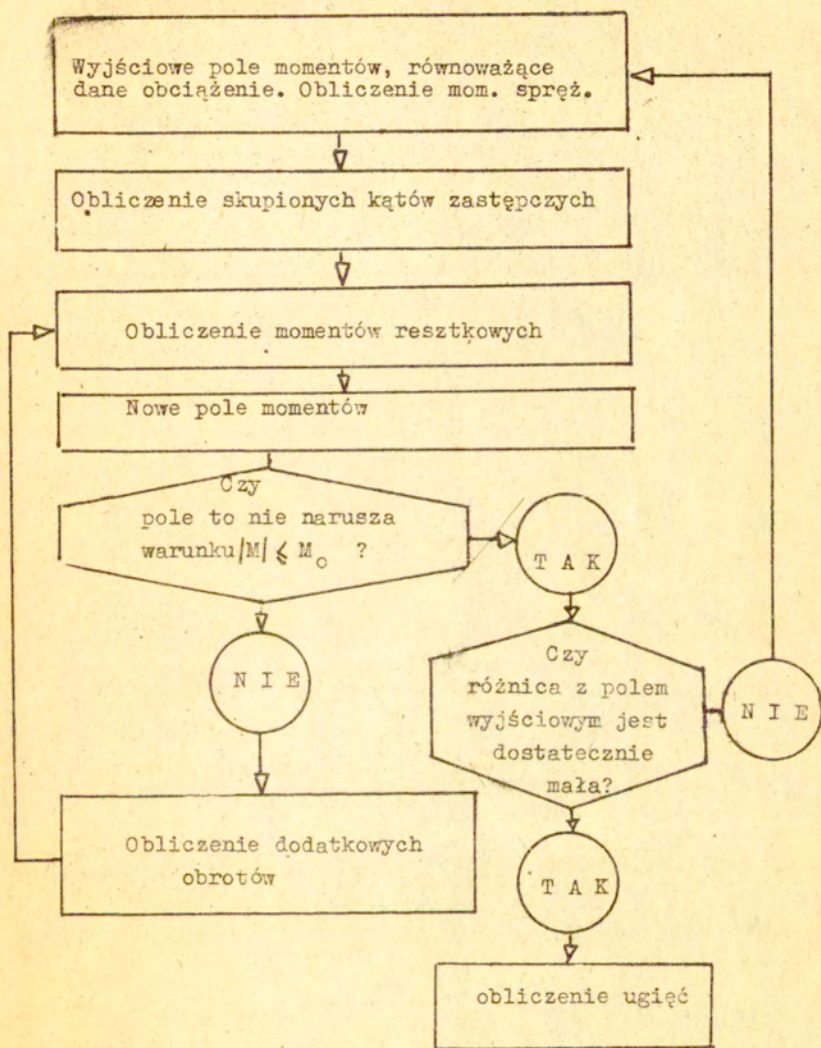
$$|M^E(x) + \sum_{i=1}^n K_i(x) (\theta_i^* + \bar{\theta}_i)| \leq M_0 \quad (13)$$

Schemat operacyjny opisanej procedury iteracyjnej pokazano na rys. 4.

4.1. PRZYKŁADY

Dla ilustracji rozpatrzmy dwuprzęsłową belkę ciągłą, rys. 5, o przekroju prostokątnym $2H \times B$.

W obliczeniach numerycznych wygodniej będzie posługiwać się następującymi wielkościami bezwymiarowymi:



Rys. 4

$$P = \frac{PL}{6BH^2\delta_0}, \quad m_i = \frac{M_i}{M_0}, \quad \varphi_i = \frac{\theta_i Eh}{\delta_0 L}, \quad i=1,2 \quad (14)$$

gdzie M_i , θ_i - odpowiednie momenty zginające i kąty obrotu w przekroju o numerze "i".

Bezwymiarowe momenty sprężyste m_i^E wynoszą

$$m_1^E = \frac{15}{16} P, \quad m_2^E = -\frac{18}{16} P \quad (15)$$

a bezwymiarowa nośność sprężysta P_e i nośność graniczna P_0 dane są wielkościami:

$$P_e = \frac{16}{27} = 0.592593, \quad P_0 = 1. \quad (16)$$

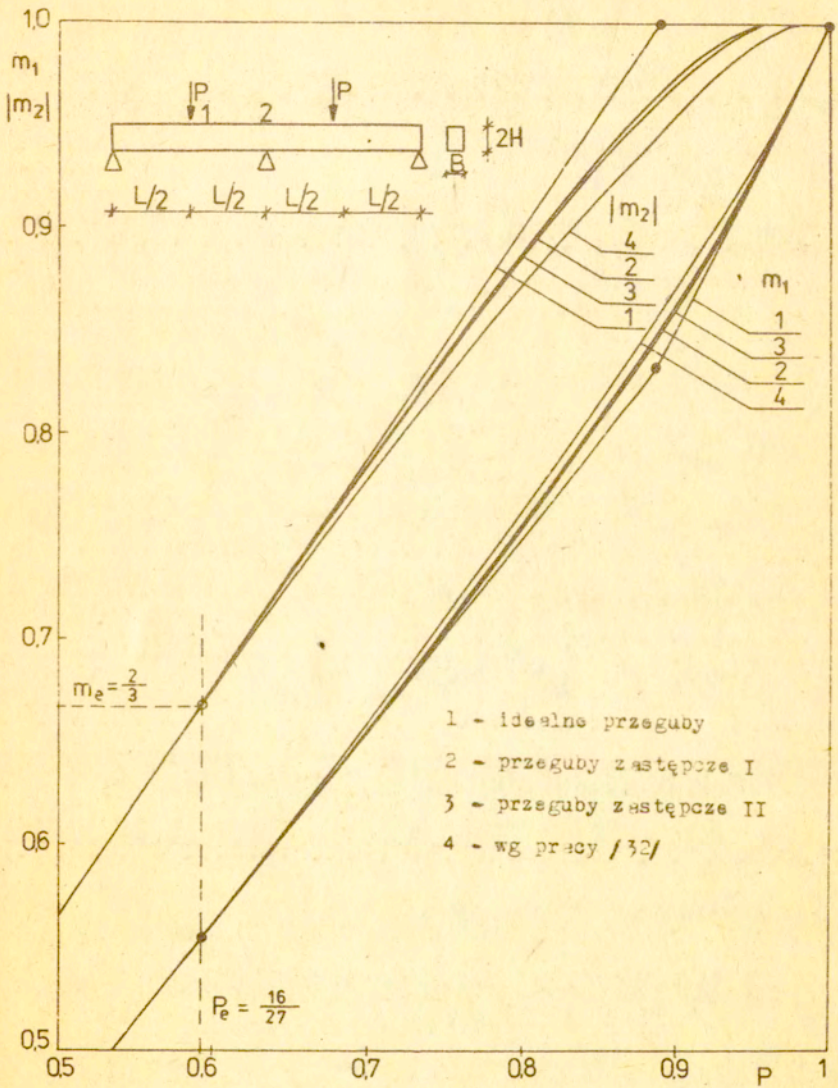
natomiast zależność bezwymiarowych momentów resztkowych od bezwymiarowych obrotów ma postać:

$$m_1^R = -\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \quad (17)$$

$$m_2^R = -(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Bezwymiarowe skupione kąty zastępcze φ_1^* , φ_2^* wyrażają się następująco, za pośrednictwem bezwymiarowych momentów m_1 , m_2 :

- w oparciu o metodę I /wzór 15//



Rys. 5.

$$\varphi_1^* = (\gamma_1 + \gamma_2) \left[\frac{2}{m_1 - 2/3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1-m_1}{3}} \right) - \frac{3}{4} m_1 - \frac{1}{2} \right] \quad (18)$$

$$\varphi_2^* = \gamma_3 \left[\frac{-2}{m_2 + 2/3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1+m_2}{3}} \right) + \frac{3}{4} m_2 - \frac{1}{2} \right] \quad (19)$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \frac{m_1 - 2/3}{2 m_1}, \quad \gamma_2 = \frac{m_1 - 2/3}{2(m_1 - m_2)}, \quad \gamma_3 = \frac{m_2 + 2/3}{m_1 - m_2} \quad (20)$$

We wzorach tych założono, że $m_1 > 0$, $m_2 < 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$.
 Ponadto $\varphi_i^* = 0$, jeżeli $|m_i| \leq 2/3$.

Natomiast wykorzystując wzory /6/ metody II otrzymujemy

$$\varphi_1^* = \frac{2(l_1 + l_2)}{m_1} \left[-1 + \frac{1}{m_1} \left(\frac{10}{9} - (2 - m_1) \sqrt{\frac{1 - m_1}{3}} \right) \right], \quad (21)$$

$$\varphi_2^* = \frac{4 l_3}{m_2} \left[1 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{10}{9} - (2 + m_2) \sqrt{\frac{1 + m_2}{3}} \right) \right], \quad (22)$$

gdzie

$$l_1 = \frac{L}{2}, \quad l_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_1 - m_2}, \quad l_3 = -\frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1 - m_2} \quad (23)$$

Mogące wystąpić, ewentualne, bezwymiarowe obroty $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ w pełnych przegubach plastycznych określone będą odpowiednio, z warunku $m_1 = 1$ lub $m_2 = -1$ oraz z równania równowagi belki

$$2 m_1 - m_2 = 3p \quad (24)$$

Zatem

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{15}{8} P - 2 - \varphi_1^* - \varphi_2^* \quad (25)$$

$$\bar{\varphi}_2 = 1 - \frac{18}{16} P - \varphi_1^* - \varphi_2^* .$$

TABELA I Przykład iteracji dla $p = 0.96$
 Kąty zastępcze wg (21), (22)

No iteracji	PRZEKRÓJ	$i = 1$	$i = 2$
1	Momenty sprężyste m^E	0.90000	- 1.08000
	Momenty początkowe m	0.96000	- 0.96000
	φ_i^*	0.05049	- 0.03366
	m_i^R	- 0.00841	- 0.01683
	Momenty całkowite $/m_i + m_i^R/$	0.89158	- 1.09683
	Przyjęte mom. początk.	0.94000	- 1.0000
	φ_i^*	0.035625	- 0.114547
	$\frac{\varphi_i^*}{\varphi_i}$		- 0.001078

Zauważmy jeszcze, że gdy powstaje jeden z tych kątów obrotu, to belka staje się układem statycznie wyznaczalnym. Oba równocześnie wystąpić nie mogą dla $p < p_0 = 1$, bo wtedy nastąpiłoby wyczerpanie nośności granicznej belki.

Tablica I podaje przykładowo kolejne etapy postępowania

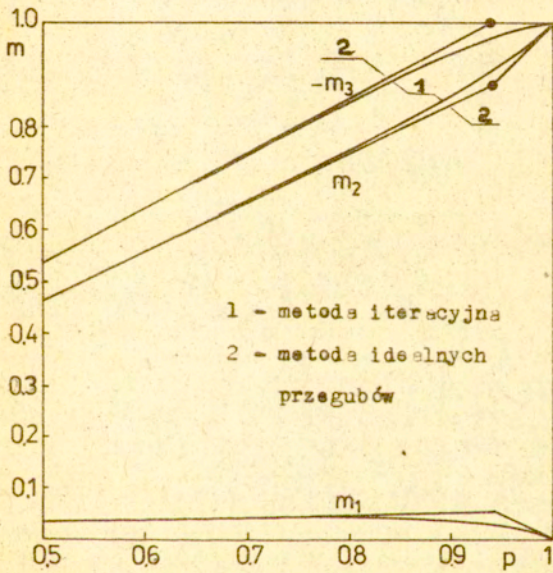
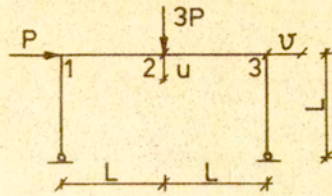
przy wyznaczaniu wartości momentów zginających według procedury iteracyjnej dla przypadku $p = 0.96$ gdy skupione kąty obliczane są wzorami /21/, /22/. Jako początkowe wartości momentów zginających przyjęto /na wzór pola momentów w stanie wyczerpania nośności/ $m_1 = 0.96$, $m_2 = -0.96$. Po pierwszej iteracji widać, że w przekroju 2 powstać musi pełny przegub plastyczny, czyli $m_2 = -1$. Wobec tego wzór /24/ daje $m_1 = 0.940$, a wartość kąta $\bar{\varphi}_2$ obliczamy z drugiego ze wzorów /25/, po wstępnym obliczeniu kątów φ_1^* i φ_2^* . Dalsze iteracje są w tym wypadku niepotrzebne.

Wielkości ostateczne momentów m_1 , m_2 dla różnych wartości obciążenia p przedstawiono graficznie na rys.5, gdzie podano analogiczne rezultaty dla przypadku obliczania skupionych kątów zastępczych wg metody II wzory /21 - 23/ oraz profile momentów zginających otrzymane na podstawie hipotezy idealnych przegubów plastycznych. Podano tam również, dla porównania, rozwiązanie otrzymane numerycznie w pracy /32/, uwzględniające rozciągłość stref uplastycznionych i lokalne odciążenia występujące w pobliżu przekroju 2 przy obciążeniach bliskich granicznemu.

Rys.6 przedstawia analogiczne wyniki dla ramy portalowej /również o prostokątnych przekrojach elementów/.

W obu przykładach obliczenia wykonano na kalkulatorze kieszonkowym TI - 58 C.

Dla wartości obciążenia p bliskich tym, którym odpowiada powstanie kolejnych pełnych przegubów plastycznych, opisana powyżej procedura iteracyjna staje się słabo zbieżna.



Rys. 6.

Zaradzić temu można przyjmując wyjściowe pole momentów k-tej iteracji $M^k /x/$ w formie

$$M^k(x) = \alpha M^{k-2}(x) + (1-\alpha) M^{k-1}(x) \quad (26)$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$ jest parametrem, który można dobierać i zmieniać w trakcie procesu iteracyjnego.

Dodajmy jeszcze, że zależność momentów reszkowych $M^*(x)$ od obrotów θ_i ; t.zn. zależność $/10/$, łatwo otrzymać w następujący sposób. Jeżeli dana konstrukcja jest r razy statycznie niewyznaczalna, a $\bar{M}_k /x/ /k = 1 \dots r/$ oznacza pole momentów od jednostkowej k-tej nadliczbowej w pewnym $/dowolnym/$ statycznie wyznaczalnym schemacie zastępczym, to

$$M^*(x) = \sum_{k=1}^r X_k \bar{M}_k(x) \quad (27)$$

gdzie wielkości nadliczbowych X_k wyznaczyć można z układu równań

$$\sum_{k=1}^r X_k a_{kj} + \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{M}_{ji} = 0 \quad (28)$$

gdzie

$$a_{kj} = 2 \int_L \frac{\bar{M}_k(x) \bar{M}_j(x)}{EJ(x)} dx \quad (29)$$

$$\bar{M}_{ji} = \bar{M}_j(x_i) \quad (30)$$

a x_i oznacza położenie przekroju, w którym występuje obrót Θ_i . Całkowanie rozciąga się na całą konstrukcję. W przypadku ramy o prętach prostoliniowych funkcje \bar{M}_k/x są odcinkowo - liniowe, całkowanie to nie następuje żadnych trudności.

5. OBLICZANIE UGIĘĆ SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH.

Po wyznaczeniu pola momentów zginających i skupionych kątów zastępczych /oraz, ewentualnie, kątów $\bar{\theta}_i$ w przegubach plastycznych/, obliczenie ugięć sprężysto-plastycznych, w zasadzie, nie przedstawia trudności. Można tu wybrać jedną z dwóch dróg postępowania.

- a/ Można potraktować użycie skupionych obrotów zastępczych jedynie jako uproszczenie obliczeń przy wyznaczaniu pola momentów zginających, natomiast ugięcia obliczać już w sposób ścisły, z uwzględnieniem stref uplastycznionych.
- b/ Zaakceptować, również przy obliczaniu ugięć, zmodelowanie konstrukcji rzeczywistej za pomocą układu elementów sprężystych z występującymi w odpowiednich przekrojach obrotami skupionymi.

To ostatnie podejście wydaje się być bardziej konsekwentne, natomiast pierwsze gwarantuje, że obliczanie ugięć obciążone jest jedynie błędem wynikającym z przyjętej procedury wyznaczania pola momentów zginających.

W tym przypadku, dla wyznaczenia ugięć, najwygodniej użyć jest następującego wzoru, wynikającego z zasady prac wirtualnych:

$$u = \int_L \hat{M} \kappa \, dx = \int_L \hat{M} (\kappa^E + \kappa^P) \, dx =$$

$$= \int_{L_e} \frac{\hat{M} M}{EJ} dx + \int_{L_p} \frac{\hat{M} \delta_e}{E \alpha} dx \quad (31)$$

Tutaj $\hat{M}/x/$ oznacza dowolne pole momentów zginających, które jest w równowadze z obciążeniem, składającym się z jednostkowej siły skupionej, przyłożonej w punkcie, w którym ugięcie u obliczamy i działającej w kierunku tego ugięcia /rys. 2a/. Wyrażając wysokość $a/x/$ strefy nieuplastycznionej za pomocą momentów zginających /te obliczone zostały za pomocą procedury iteracyjnej/ otrzymujemy ugięcie całkowite przez wykonanie całkowania we wzorze /31/, przy czym L_e oznacza obszary nieuplastycznione, a L_p - uplastycznione.

Przy całkowaniu w obszarach uplastycznionych wystąpić mogą pewne trudności. Mianowicie, nie zawsze wysokość $a/x/$ strefy sprężystej wyrazić można efektywnie w postaci jawnej jako funkcję momentu zginającego. Ma to miejsce np. w pewnym zakresie dla przekroju dwuteowego, por. wzór/I.8/. Ponadto, nawet jeżeli nie sprawia to trudności, to wykonanie całkowania może być wykonalne jedynie w sposób numeryczny. Ma to miejsce nawet w przypadku przekroju prostokątnego, jeżeli moment zginający jest bardziej skomplikowaną funkcją współrzędnej wzdłuż osi elementu.

Tym niemniej, w szeregu ważnych praktycznie przypadków można rozwiązanie otrzymać w postaci jawnej. Na przykład, jeżeli przekroje poprzeczne elementów są prostokątne, a wyniki z iteracji pole momentów $M/x/$ jest odcinkowo liniowe /ma to miejsce, gdy obciążenie składa się z sił i mo-

mentów skupionych /Rys.2/, to

$$\begin{aligned}
 u = & \int_L \frac{\hat{M} M}{EJ} dx + \sum_i \frac{\hat{b}_0 \hat{M}_i}{EH} \cdot \frac{\hat{L}_i^2}{\hat{L}_i} \left[\frac{m_i}{4} \left(1 - 3 \frac{\hat{L}_i}{L_i} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{m_i} \left(\frac{\hat{L}_i}{L_i} - 1 \right) + \frac{20}{27 m_i^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\hat{L}_i}{L_i m_i} (1 - m_i)^{\frac{1}{2}} + \\
 & \left. - \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{m_i^2} (1 - m_i)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (32)
 \end{aligned}$$

gdzie $m_i = |M_i| / M_0$ jest bezwymiarowym momentem maksymalnym i -tej strefy uplastycznionej, \hat{L}_i jest odległością do miejsca zerowego momentu \hat{M} / x por. rys. 2 abc gdzie pokazano przykładowo jedną strefę plastyczną.

Natomiast założenie "konsekwentne", że deformacje plastyczne koncentrują się w przekrojach, w których założono powstanie skupionych obrotów prowadzi w oparciu o wzory /31/ do bardzo prostych wyników:

$$u = \int_L \frac{\hat{M} M}{EJ} dx + \sum_i \hat{M}_i (\theta_i^* + \bar{\theta}_i) \quad (33)$$

gdzie \hat{M} jest rozkładem momentów w konstrukcji idealnie sprężystej od obciążenia siłą skupioną $\hat{P} = 1$ przyłożoną w punkcie i kierunku poszukiwanych ugięć,

\hat{M}_i jest wartością M w przekrojach gdzie występują obroty skupione θ_i^* i $\bar{\theta}_i$.

Poniżej podamy trzy proste przykłady w celu porównania dokładności proponowanych metod.

5. 2. PRZYKŁADY

Obliczmy ugięcia końca belki wspornikowej o długości L , przekroju prostokątnym $2 H \times B$, obciążonej na końcu siłą skupioną P .

Sprężysto - plastyczne ugięcie końca belki, obliczone bezpośrednio w oparciu o podejście skupionych kątów zastępczych /8/ lub /9/ wynosi:

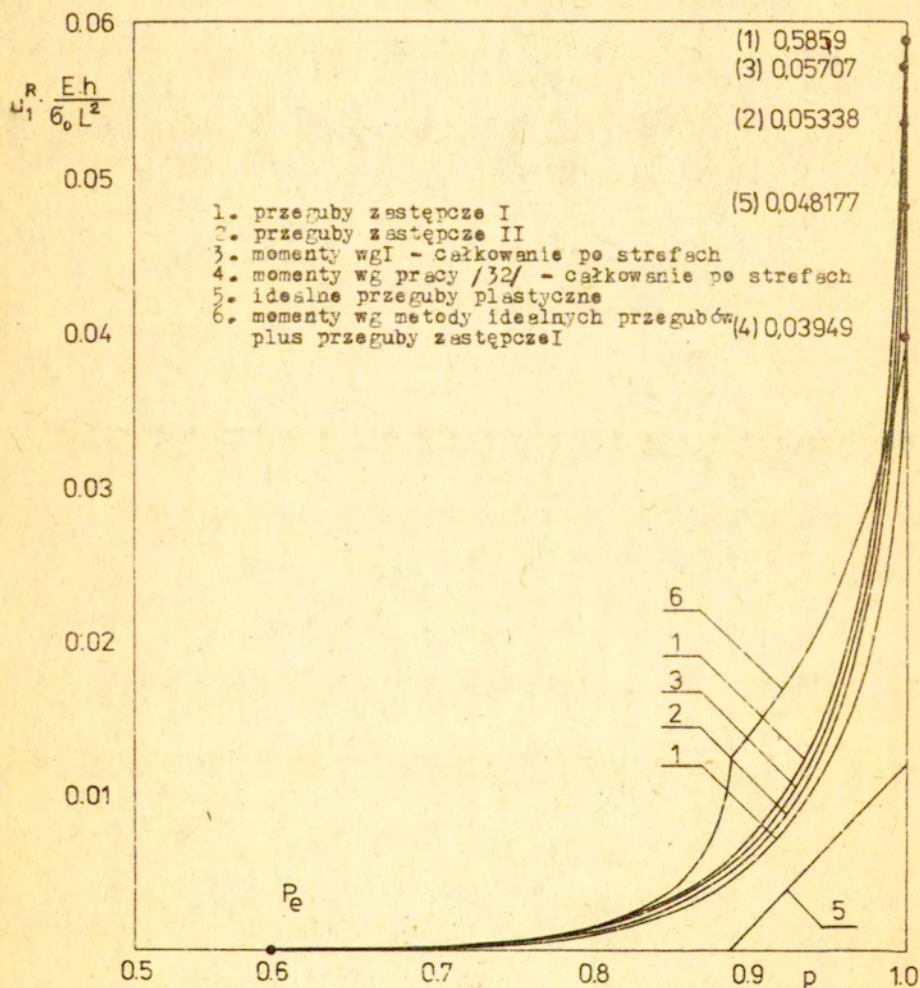
$$u = u^E + \theta^* \cdot L = \frac{PL^3}{2EBH^3} + \theta^* \cdot L \quad (34)$$

podczas gdy rozwiązanie w oparciu o wzór (32), gdzie przyjęto $l_1 = l_2 = L$ /por. np. 13/ daje

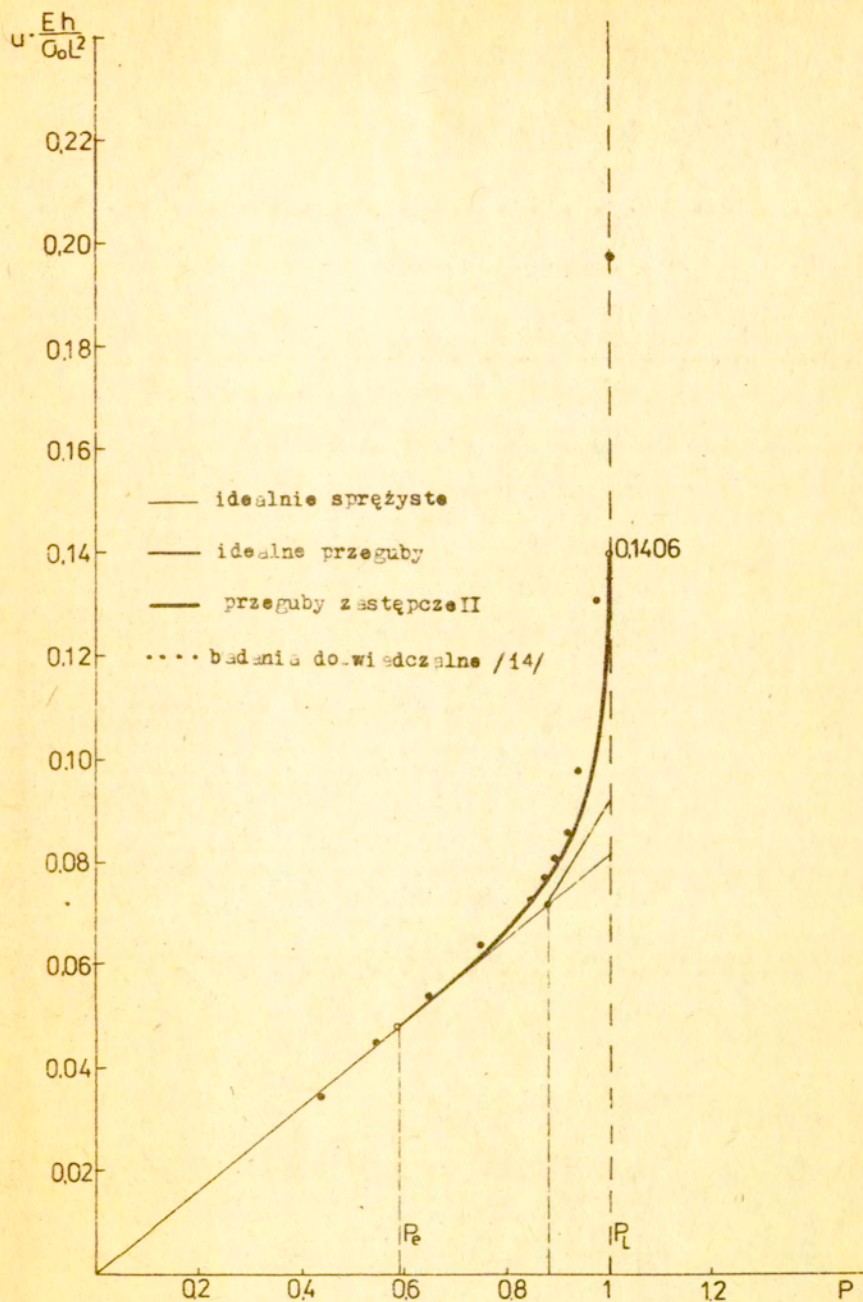
$$u^R = \frac{20}{27} \frac{\sigma_0^3 B^2 H^3}{EP^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{BHL\sigma_0^2}{EP} \left(1 - \frac{PL}{\sigma_0 BH^2} \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\sigma_0^3 B^2 H^3}{EP^2} \left(1 - \frac{PL}{\sigma_0 BH^2} \right) \quad (35)$$

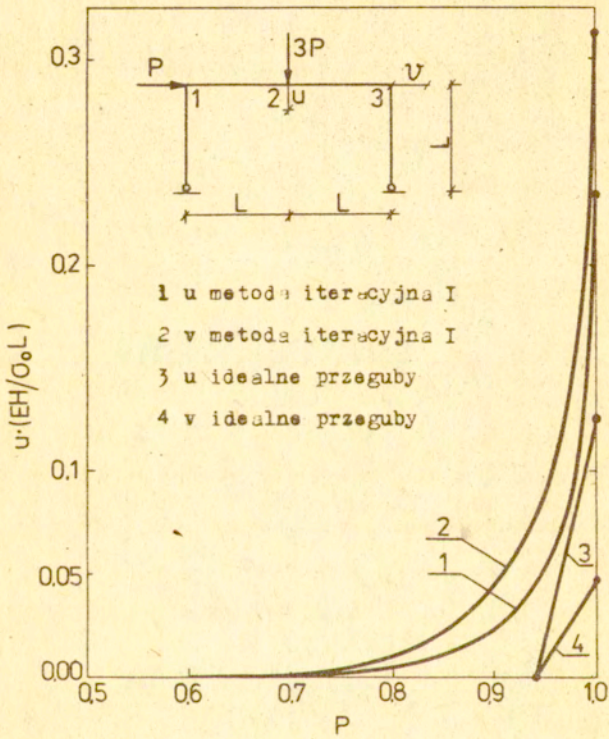
co dokładnie pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym [20], [27]. Porównanie wyników otrzymanych wg koncepcji zastępczych obrotów skupionych wg metody I i II /8/ /9/ i wyniku ścisłego /35/ pokazano na rys. 3. Widać bardzo dobrą zbieżność tych wyników.



Rys. 7 - Porównanie wielkości ugięć resztkowych obliczonych wg różnych metod.



Rys. 8. Ugięcia końca belki wspornikowej.



Rys. 9.

Rys. 7 przedstawia trwałą część ugięć u^R belki dwuprzęsłowej z rys. 5 w zależności od wielkości obciążenia, obliczoną za pomocą wzorów /31/ i wzoru /32/ w oparciu o znalezione w punkcie 4.1 pole momentów zginających. Dla porównania na rys. 8 podano również wyniki obliczeń w oparciu o hipotezę idealnych przegubów plastycznych i wyniki eksperymentalne zaczerpnięte z pracy [14]. Wyraźnie widać większą zgodność z doświadczeniami obliczeń teoretycznych uwzględniających skończony zasięg uplastycznień. Dla obciążeń bliskich nośności granicznej, dla prostokątnego przekroju, nieuwzględnienie tego wpływu daje wynik z niedomiarem około 50%.

Na rys. 9 pokazano analogiczne rezultaty dla ramy portalowej o prostokątnym przekroju poprzecznym słupów i belki. Dla zaawansowanych obciążeń z zakresu sprężysto - plastycznego wpływ stref plastycznych jest znaczny.

6. WNIOSKI KOŃCOWE.

Poprzez wprowadzenie zastępczych obrotów plastycznych i stosując metodę iteracyjną uwzględniamy wpływ kształtu stref plastycznych na redystrybucję sił wewnętrznych. Wyniki pokazanych przykładów wskazują, że sprężysto - plastyczne ugięcia ram płaskich i belek mogą być wyznaczone efektywnie, z wystarczającą praktyczną dokładnością, w oparciu o przedstawione podejście. Momenty zginające i ugięcia wyznaczone z dwu różnych metod na skupione obroty zastępcze dają bardzo podobną ocenę.

Metoda idealnych przegubów plastycznych daje wyniki z niedomiarem mniejszym niż 10% ugięcia w konstrukcjach belkowo ramowych o przekroju dwuteowym. Natomiast w przypadku konstrukcji o przekrojach prostokątnych lub zbliżonym wpływ skończonego zakresu stref plastycznych należy uwzględnić w analizie ugięć w zakresie sprężysto - plastycznym.

LITERATURA

1. ADAMS P.F., GALAMBOS T.U., Material considerations in plastic design.
Publications 29.II.1969, Int. Ass. for Bridge and Struct. Eng. pp 1 - 15.
2. ANDREAS U., A linear programming method of deflection analysis at plastic collapse in elastic - plastic frame structures.
AIL, XXVII z 3/1981.
3. ARGYRIS J.H., BONI B., HINDENLANG U., KLEIBER M.
Finite element analysis of two - and three dimensional elastic - plastic frames. The natural approach. Com.Meth. in App. Mech. and Eng. 35, 1982, 221 - 248 .
4. BANDYSZEWSKI W., SAWCZUK A., Przybliżona metoda obliczania przemieszczeń belek i ram sprężysto - plastycznych ,
AIL tom XX z 1/1974 .
5. BANDYSZEWSKI W., SAWCZUK A., Deflection estimation for elastic - plastic beams and frames at finite spread of yielding zones. , AIL XXVI 4/1980 .
6. BARONAS R. P., The degeneracy in the estimation of deflections in elastic - plastic framed structures. ,
Litowski Mech. Sbor. 2, 5, 1969 pp 61 - 69.

7. BARONAS R. P., CHYRAS A. A., Linear programming methods of displacement analysis in elastic - plastic frames.
8. BACKLUND J., Large deflections analysis of elastic plastic beams and frames.
Int. Journ. Mech.. Sci., 18, 1976 pp 269 - 277.
9. BRÓDKA J. Techniczne uwarunkowania wykorzystania rezerwy plastycznej konstrukcji stalowych.,
Inż. i Bud. 11 - 12, 1982
10. CHEN W. F., ATSUTA T., Theory of beam - columns,
Mc Grow - Hill 1976
11. CHI K. S., LIN T.H., Slope - deflection method for elastic - plastic multistorageframes.,
Int. Jour. Solids and Struct. 13, 2, 1977 pp 125-135.
12. DOROSZ S., Calculo de desplazamientos de estructuras elastoplasticos. Universidad National Autonoma de Mexico, julio 1980 nr.425.
13. DOROSZ S., SAWCZUK A., Deflections of elastic plastic beams at finite spread of plastic zones.
IUTAM Symp. Senlis 1980 in "Physical Non - Linearities in Structural Analysis" Springer Verlag
14. DOROSZ S., SAWCZUK A., BIEGUS A., KOWAL Z., SEIDEL W.,
Post yield deflections of elastic - plastic beams under uniformly increasing loads.,
Eng. Trans. 29, 2, 1981 pp 279 - 294

15. GERSTLE K., ZARBOULAS V. Elastic - plastic deformations of steel structures., I. Str.Div., ASCE, Vol 89, No ST 1 Feb. 1963
16. GRIERSON D. E., GLADWELL G.M.L., Collapse load analysis using linear programming.
I. Str. Div. ASCE Vol 97, 1971, pp 1561 - 1573
17. GRIERSON D. E., Deformation analysis of elastic - plastic frames.
I. Str. Div. ASCE Vol 98 oct, 1972, pp 2247 - 2267
18. HEYMAN J., Plastic design of frames.
Cambridge Univ. Press, Cambridge 1971,
19. HODGE P. G., Plastic analysis of structures.
Mc Graw Hill, New York 1959
20. HODGE P.G., Complete solutions for elastic plastic trusses. SIAM T. Appl. Mech. 25, 1973 pp 435 - 447
21. HORNE M.R., Plastic theory of structures.,
Nelson 1971
22. KNUDSEN K. E., YANG C.H., JOHNSTON B.G., BEEDLE L.S.,
Plastic strength and deflections of continuous beams.,
Welding Research Supplement Mag. 1953
23. LIND N.C., Analysis of deflections in elastic - plastic frames.,
I. Struct. Div. ASCE, 91, 1965 pp 197 - 218.
24. ŁODYGOWSKI T., Geometrycznie nieliniowa analiza sztywno - plastycznych belek i ram płaskich. Prace IPPT
Warszawa 1982

25. MAIER G., GIERSON D.E., BEST M. J., Mathematical programming methods for deformation analysis of plastic collapse. Computer Struct., 7, 1977 pp 599 - 612 .
26. MAIER G., Mathematical programming methods in structural analysis., Proc. Int. Symp. Vor. Meth.Eng., Southampton Univ. Press 2, 8, 1972 pp 1 - 32.
27. MUTERMILCH J., OLSZEWSKI E., LUBINSKI M., Wymiarowanie konstrukcji stalowych. Nowe metody. Budownictwo i Architektura 1956.
28. NEAL B. G., The plastic methods of structural analysis. 2-nd ed. Chapman and Hall, London 1963.
29. POPOV E., BERTERO V., Cyclic loading of steel beams and connections. I. Struct. Div. ASCE Vol. 99 No ST6, June 1973.
30. PN - 76/B - 03200, Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Wyd. Normalizacyjne, Warszawa
31. "Recommandations pour le calcul en plasticité des constructions en acier"
Construction Métallique No 4, dec. 1975.
32. STRZELECKI A., Wpływ odkształceń na określenie stanów granicznych w prętach konstrukcji stalowych.
Praca doktorska, Politechn. Warsz. Wydz. Inż. Łąd. 1981.
33. YU T.X., JOHNSON W., Influence of axial force on the elastic-plastic bending and spring back of beam.
I. Mech. Work. Technology 6. 1982 pp 5 - 21.

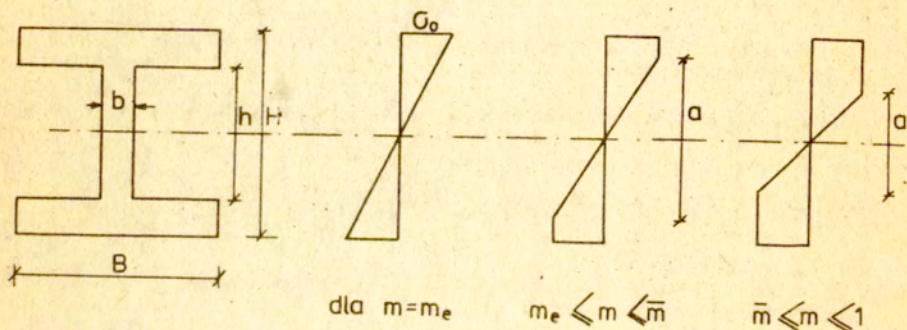
34. Wytyczne obliczania i projektowania konstrukcji stalowych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej.

Branżowy Ośrodek Informacji Technicznej i Ekonomicznej
"Mostostal" Warszawa, 1980.

DODATEK I PRZEKRÓJ DWUTEOWY.

Rozpatrzmy jak na rysunku I 1 przekrój dwuteowy.

a) b) c) d)



Rys I 1

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$\alpha = h/H, \quad \beta = b/B, \quad (I 1)$$

podstawowe wzory dla tego przekroju wyrażają się wzorami

- moment bezwładności

$$J_x = \frac{BH^3}{12} \left[\frac{21}{4} \alpha - \frac{21}{4} \alpha^2 - \frac{25}{4} \alpha^3 + \alpha^3 \beta + \frac{25}{4} \right], \quad (I 2)$$

- wskaźnik plastyczny W_{pl}

$$W_{pl} = \frac{BH^2}{4} (1 - \alpha^2 + \beta \alpha^2), \quad (I 3)$$

- maksymalny moment sprężysty

$$M_e = \frac{\sigma_0 B H^2}{6} \left[\frac{21}{4} \alpha - \frac{21}{4} \alpha^2 - \frac{25}{4} \alpha^3 + \alpha^3 \beta + \frac{25}{4} \right] \quad (I 4)$$

- moment graniczny

$$M_0 = \frac{\sigma_0 B H^2}{4} (1 - \alpha^2 + \beta \alpha^2) \quad (I 5)$$

- bezwymiarowy moment

$$m = M / M_0 \quad (I 6)$$

- moment m odpowiadający całkowitemu uplastycznieniu pólki

$$\bar{m} = \frac{\bar{M}}{M_0} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\beta \alpha^2}{1 - \alpha^2 + \beta \alpha^2} \quad (I 7)$$

Dla przekroju dwuteowego należy rozpatrzyć dwa przypadki

a/ rdzeń sprężysty obejmuje cały środnik i częściowo półki rys. 1 a ,

b/ rdzeń sprężysty obejmuje tylko część środnika rys. 1 b.

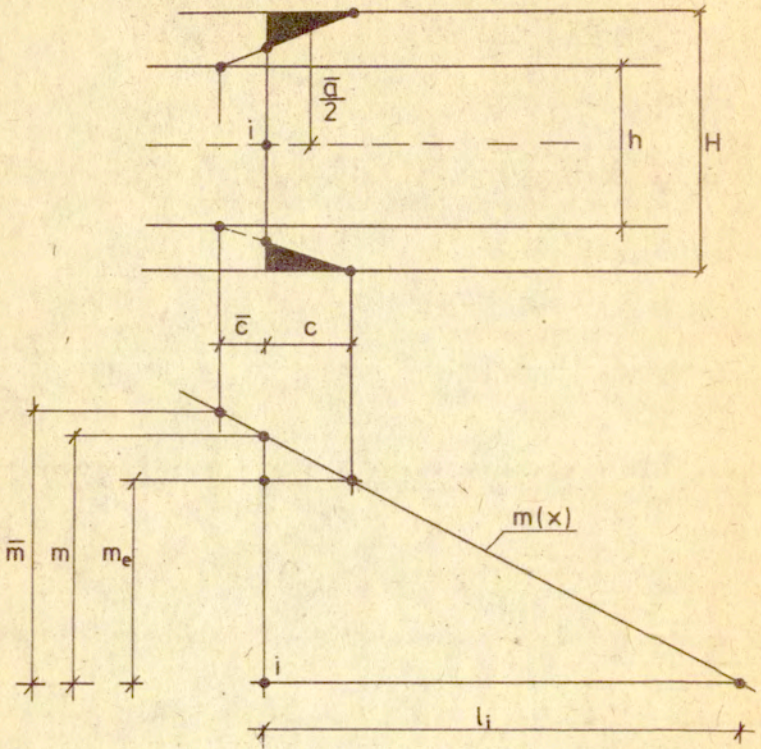
Z równań równowagi znajdujemy zależność M , a/ dla obu przypadków.

Przypadek a

$$M = \frac{1}{4} \sigma_0 B (H^2 - h^2) - \frac{1}{12 \cdot a} (a-h)^2 (2h+a) \sigma_0 \cdot B + \frac{1}{6a} b h^3 \sigma_0 \quad (I 8)$$

po przekształceniu otrzymujemy równanie trzeciego stopnia w postaci kanonicznej

$$a^3 + a \left(\frac{12M}{\sigma_0 B} - 3H^2 \right) + 2h^3 \left(1 - \frac{b}{B} \right) = 0 \quad (I 9)$$

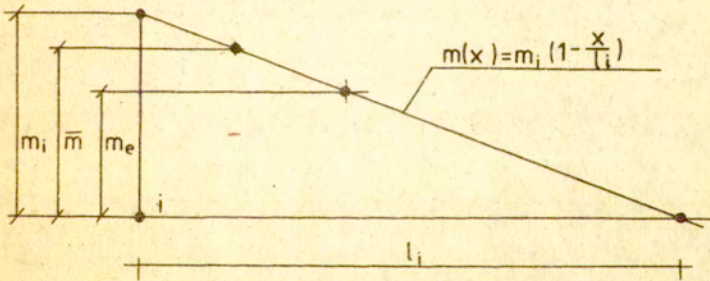
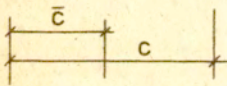
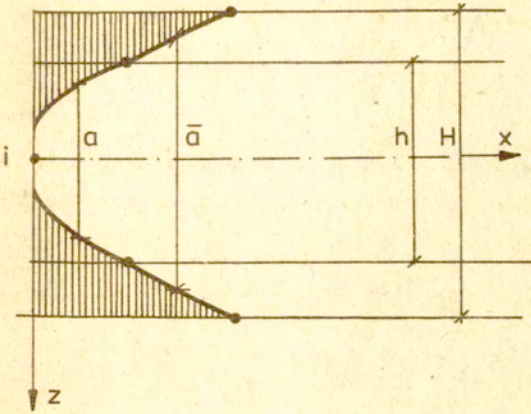


$$c = l_i \frac{m - m_e}{\bar{m}}$$

$$\bar{c} = l_i \frac{m - \bar{m}}{\bar{m}}$$

$$\bar{a} = \frac{H-h}{c-\bar{c}} (x-\bar{c}) + h$$

Rys. 12.



Rys. 13.

skąd otrzymujemy

$$\alpha = 2H \sqrt{1 - 8 \frac{M}{M_e} \frac{J}{BH^3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{\alpha^2 (\beta - 1)}{\sqrt{1 - 8 \frac{M}{M_e} \frac{J}{BH^3}}} \right] \quad (\text{I } 10)$$

Bezpośrednie wykorzystywanie powyższej zależności znacznie komplikuje obliczenia. Ponieważ dla zakresu momentów $m_e < m < \bar{m}$ wpływ uplastycznienia jest mały, dlatego też przyjmujemy liniowe aproksymacje dla kształtu strefy plastycznej jak na rys. I 2.

Podstawiając otrzymane zależności do /5/ otrzymamy następujące wyrażenie na zastępczy kąt obrotu plastycznego /wg II metody/.

$$\begin{aligned} \theta_{II}^* &= \frac{1}{m_i M_o} \frac{2B\sigma_o^2}{E} \int_0^c \int_{\frac{\bar{a}}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{2}{\bar{a}} \left(z - \frac{\bar{a}}{2} \right) dz dx = \\ &= \frac{\sigma_o^2 BH}{M_o E} \cdot \frac{1}{m_i} \left(\frac{H}{2} \int_0^c \frac{1}{\bar{a}} dx + \frac{1}{2H} \int_0^c \bar{a} dx - \int_0^c dx \right). \end{aligned} \quad (\text{I } 11)$$

po zcałkowaniu

$$\Theta_{II}^* = \frac{\sigma_0^2 BH}{M_0 E} \frac{L_i}{m_i^2} \left\{ \frac{\bar{m} - m_e}{2(1-\alpha)} \ln \left| \frac{\bar{m} - m_e}{\bar{m} + \alpha m - m - \alpha m_e} \right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{(1-\alpha)(m - m_e)}{\bar{m} - m_e} \left[\bar{m} - \frac{m}{2} - \frac{m_e}{2} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\bar{m} - m_e) \right] - (m - m_e) \right\} \quad (I 12)$$

w przypadku, gdy $m = \bar{m}$ t.j. następuje uplastycznienie całej półki

$$\Theta_{II}^*(m = \bar{m}) = \frac{\sigma_0^2 BH}{M_0 E} \frac{L_i}{m_i^2} \left\{ \frac{\bar{m} - m_e}{2(1-\alpha)} \ln \left| \frac{1}{\alpha} \right| + \frac{1}{4} (\alpha - 3) (\bar{m} - m_e) \right\} \quad (I 13)$$

b/ przypadek gdy rdzeń sprężysty obejmuje część środka rys. 1 b.

moment sprężysto - plastyczny wyraża się wzorem

$$M = M_0 - \frac{1}{12} \sigma_0 b a^2 \quad (I 14)$$

wzór /I 14/ traci ważność dla $a = h$, odpowiada temu moment \bar{M} , następuje wtedy uplastycznienie całych pasów.

Z zależności /I 14/ znajdujemy wysokość strefy sprężystej w środku

$$a = 2 \sqrt{\frac{3 W_{pl}}{b} (1 - m)} \quad (I 15)$$

W półce kształt strefy plastycznej jest aproksymowany linią prostą

$$\bar{a} = H \left[(1 - \alpha) \frac{x - \bar{c}}{c - \bar{c}} + \alpha \right] \quad (I 16)$$

Zastępczy kąt obrotu plastycznego Θ_{II}^* dla tego zakresu

zmian momentów będzie miał postać

$$\Theta_{II}^* = \frac{2}{m \cdot M_0} \int_0^{\bar{c}} \left[\frac{6_0^2 b}{E} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{z}{\frac{a}{2}} - 1 \right) dz + \frac{B 6_0^2}{E} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{z}{\frac{a}{2}} - 1 \right) dz \right] dx +$$

$$+ 2 \int_{\bar{c}}^c \frac{B 6_0^2}{E} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{z}{\frac{a}{2}} - 1 \right) dz dx.$$

(I 17)

Ostatecznie po scałkowaniu otrzymujemy:

dla $\bar{m} \leq m \leq 1$

$$\Theta_{II}^* = \frac{2 6_0 B H L i}{M_0 E} \cdot \frac{1}{m_i^2} \left\{ \frac{1}{4} (\beta \alpha^2 + 1 - \alpha^2) \frac{H}{\sqrt{\frac{3 W_{pL}}{b}}} \left(\sqrt{1 - \bar{m}} - \sqrt{1 - m_i} \right) + \right.$$

$$+ \frac{m_i}{2} (\alpha - 1 - \beta \alpha) \left(1 - \frac{\bar{m}}{m_i} \right) +$$

$$+ \frac{\beta}{H 3} \sqrt{\frac{3 W_{pL}}{b}} \left(\sqrt{(1 - \bar{m})^3} - \sqrt{(1 - m_i)^3} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{m} - m_e}{1 - \alpha} \right) \ln \left| \frac{1}{\alpha} \right| +$$

$$\left. + \frac{1}{8} (\bar{m} - m_e) (\alpha - 3) \right\}.$$

(I 18)

SPIS TREŚCI.

1. Wstęp.
 2. Pewne zależności podstawowe.
 3. Metoda skupionych obrotów zastępczych.
 4. Iteracyjna procedura określania momentów zginających w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych.
 4. 1. Przykład . Belka dwuprzęsłowa.
 5. Obliczanie ugięć sprężysto - plastycznych.
 5. 1. Przykłady.
 6. Wnioski końcowe.
 7. Literatura.
- Dodatek 1. Przekrój dwuteowy.