

3.31 — dyfrakcja, ośrodki anizotropowe

J. Zawistowski, S. Przeździecki

JEDNOLITE ROZWIĄZANIE ASYMPTOTYCZNE  
ZAGADNIENIA DYFRAKCJI  
DLA LINIOWEGO  
ŹRÓDŁA KWADRUPOŁOWEGO

11/1983

P. 269

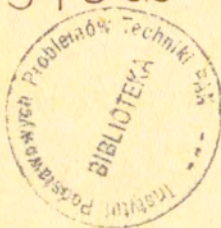


WARSZAWA 1983

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 stycznia 1983 r.

57026



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 170 egz. Ark.wyd.1,3. Ark.druk. 2,25.  
Oddano do drukarni w marcu 1983 r.  
Nr zamówienia 246/0/83 M-10.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8



Jacek Zawistowski  
Stanisław Przeździecki

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych  
IPPT PAN

JEDNOLITE ROZWIĄZANIE ASYMPTOTYCZNE ZAGADNIENIA  
DYFRAKCJI NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE W OŚRODKU JEDNO-  
OSIOWYM DLA FALI PROMIENIOWANEJ PRZEZ LINIOWE  
ŹRÓDŁO KWADRUPOLOWE

1. Wstęp

W pracy tej przedstawiamy jednolite, asymptotyczne rozwiązanie następującego zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie:

1. Ośrodek otaczający półpłaszczyznę jest jednoosiowo anizotropowy, opisany w odpowiednim układzie współrzędnych kartezjańskich  $(X_1, X_2, X_3)$  tensorami przenikalności elektrycznej i magnetycznej

$$(1) \quad \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_a \end{pmatrix} \quad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_a \end{pmatrix}$$

gdzie  $\epsilon_a \neq \epsilon$ ,  $\mu_a \neq \mu$ . Przez  $\underline{n}$  oznaczymy wektor wzdłuż wyróżnionej osi  $X_3$ .

2. Półpłaszczyzna dyfrakcyjna jest doskonale przewodząca i umieszczona prostopadle do wyróżnionej osi ośrodka ( $X_3 = 0$ ,  $X_2 \leq 0$ ).
3. Fala padająca jest promieniowana przez kwadrupolowe źródło liniowe równoległe do krawędzi półpłaszczyzny /zdefiniowane wzorami (7) i (8)/.

Niniejsza praca stanowi kolejny krok na drodze do uogólnienia skalarnej, jednolitej, asymptotycznej teorii dyfrakcji (UAT) na płaskich ekranach na przypadek dyfrakcji pól elektromagnetycznych w ośrodku jednoosiowym. W tym sensie jest ona kontynuacją prac [1-6]. Skalarne sformułowanie UAT na płaskich ekranach zostało przedstawione w pracach [7,8]. Ważnym, wcześniejszym krokiem w tym kierunku była praca [9].

Podstawową cechą sformułowanego zagadnienia jest jego istotnie wektorowy charakter tzn. jego rozwiązanie nie może być zredukowane do rozwiązań niezależnych zagadnień brzegowych dla równań cząstkowych drugiego rzędu. W pracy tej rozpatrywane zagadnienie sprowadzimy do problemów brzegowych dla dwóch różnych, niezwiązanych równań cząstkowych /bliskich równaniom Helmholtza/ z warunkami brzegowymi sprzegającymi rozwiązania tych równań.

Podobnie jak we wszystkich rozwiązanych dotychczas elektromagnetycznych zagadnieniach dyfrakcyjnych sprzężenie między obu występującymi modami fal ma najprostsz charakter. Jest to mianowicie sprzężenie czysto dyfrakcyjne /krawędziowe/ - nie występuje sprzężenie odbiciowe tzn. w przypadku dopełnienia półpłaszczyzny do pełnej płaszczyzny sprzężenie między modami znika.

Tak jak we wcześniejszych pracach [1-6] metoda konstrukcji rozwiązania polega na jego syntezie z odpowiednich rozwiązań pomocniczych zagadnień dyfrakcyjnych dla skalarnych potencjałów Hertza. Metoda ta została zaproponowana w pracy [10] przy konstrukcji rozwiązania ścisłego dla rozpatrywanego tam zagadnienia.

Najtrudniejszym elementem tej konstrukcji jest spełnienie warunku ostrza dla pól elektromagnetycznych stanowiących wektorowe rozwiązanie UAT. Analiza tego zagadnienia jest głównym tematem naszej pracy.



## 2. Skalarne potencjały Hertza

Podstawową rolę w matematycznym sformułowaniu rozpatrywanego zagadnienia spełniają skalarne potencjały Hertza, których własności określa następujące twierdzenie [10], [11] :

### Twierdzenie o podziale

Dowolne pole elektromagnetyczne  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$  spełniające jednorodne równania Maxwella /zależność od czasu harmoniczna  $e^{-i\omega t}$ /

$$(2) \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = i\omega \underline{\mu} \cdot \underline{H} \quad , \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = -i\omega \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}$$

w odpowiednio regularnym obszarze ośrodka jednoosiowego /określonym w [12] /, może być rozłożone na składowe TE:

$$\underline{E}^{TE}, \underline{H}^{TE} \quad \text{dla których} \quad \underline{E}^{TE} \cdot \underline{n} = 0$$

oraz na składowe TM:

$$\underline{E}^{TM}, \underline{H}^{TM} \quad \text{dla których} \quad \underline{H}^{TM} \cdot \underline{n} = 0$$

Każda z tych składowych może być wyrażona przez jedną z dwóch funkcji skalarnych spełniających równania drugiego rzędu /podobne do równań Helmholtza/.

Dla składowej TE mamy

$$(3a) \quad \underline{E}^{TE} = i\omega \underline{\mu} \underline{\nabla} \times \underline{u} \underline{n} \quad ,$$

$$(3b) \quad \underline{H}^{TE} = \underline{\mu} \underline{\mu}^{-1} \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{u} \underline{n} = \underline{\nabla} \frac{\partial}{\partial x_3} u + k_m^2 u \underline{n} \quad ,$$

gdzie magnetyczny potencjał Hertza  $u$  spełnia równanie

$$(4) \quad \Delta_m u + k_m^2 u = \Delta_t u + \frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + k_m^2 u = 0$$

zaś przyjęte oznaczenia są następujące

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad , \quad k_m^2 = \omega^2 \epsilon \mu_a \quad , \quad \Delta_m = \underline{\mu}^{-1} \underline{\nabla} \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{\nabla} \quad ,$$

$$\Delta_t = \nabla_t^2, \quad \underline{V}_t = \underline{V} - \underline{n} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Dla składowej TM mamy

$$(5a) \quad \underline{E}^{TM} = \epsilon \epsilon^{-1} \underline{V} - \underline{V} - v \underline{n} = \underline{V} \frac{\partial}{\partial x_3} v + k_e^2 v \underline{n},$$

$$(5b) \quad \underline{H}^{TM} = -i\omega \epsilon \underline{V} - v \underline{n},$$

gdzie elektryczny potencjał Hertza  $v$  spełnia równanie

$$(6) \quad \Delta_e v + k_e^2 v = \Delta_t v + \frac{\epsilon_n}{\epsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + k_e^2 v = 0$$

gdzie

$$k_e^2 = \omega^2 \epsilon_n \mu, \quad \Delta_e = \epsilon^{-1} \underline{V} \cdot \underline{\epsilon} \underline{V}$$

Przedstawiony w tym twierdzeniu podział pola elektromagnetycznego na składowe TE i TM wyrażone przez skalarne potencjały Hertza leży u podstaw stosowanej przez nas konstrukcji. Kwestia jak ogólna jest klasa pól elektromagnetycznych, które można wyrazić w formie (3) i (5) dyskutowana jest w [12]. Zgodnie z przedstawionymi tam wnioskami nasz przypadek spełnia wymagane założenia i możemy bez utraty ogólności poszukiwać pola rozproszonego za pośrednictwem potencjałów  $u, v$ .

Powyższy rozkład na składowe TE i TM wyrażone przez skalarne potencjały Hertza jest niejednoznaczny. Można go zmienić dodając do składowej TE /opisanej przez  $u$ / dowolne pole TEM tzn.  $\underline{E} \cdot \underline{n} = \underline{H} \cdot \underline{n} = 0$  /opisane przez  $u$ / i odejmując od składowej TM /opisanej przez  $v$ / to samo pole TEM /opisane przez  $v$ /, gdyż pole TEM jest jednocześnie typu TE i TM. Ta dowolność rozkładu leży u podstaw metody pomocniczych fal padających [10], z której skorzystamy przy konstrukcji rozwiązania.



### 3. Sformułowanie zagadnienia

Wybieramy prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich  $X_1, X_2, X_3$ , w którym tensory  $\underline{\epsilon}, \underline{\mu}$  dane są macierzami (1) zaś położenie półpraszczyny dyfrakcyjnej opisane jest zależnościami  $X_3 = 0, X_2 \leq 0$ . Wyróżniona oś ośrodka pokrywa się z osią  $X_3$ . Przyjmujemy, że ośrodek jest bezstratny oraz, że rozpatrywany układ równań Maxwella (2) jest eliptyczny. W rezultacie parametry  $\epsilon, \epsilon_a, \mu, \mu_a$  są rzeczywiste i dodatnie.

Założymy, że pole padające  $\underline{E}_1$  i  $\underline{H}_1$  jest rozwiązaniem układu równań Maxwella

$$(7) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = i\omega \underline{\mu} \cdot \underline{H} + i\omega q_m \underline{n}, \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = -i\omega \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}$$

z kwadrupolowym źródłem liniowym umieszczonym w  $(X_{20}, X_{30})$  o gęstości magnetycznego momentu kwadrupolowego

$$(8) \quad q_m = q e^{ik_m \alpha x_1} \underline{d} \cdot \underline{\nabla} \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30})$$

gdzie  $|\alpha| < 1$ ,  $\underline{d}$  - dowolny wektor jednostkowy prostopadły do osi  $X_1$ .

Magnetyczny potencjał Hertza  $u_{ai}$  odpowiadający polu padającemu  $\underline{E}_1, \underline{H}_1$  spełnia równanie

$$(9) \quad \Delta_m u_{ai} + k_m^2 u_{ai} = \Delta_\epsilon u_{ai} + \frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u_{ai} + k_m^2 u_{ai} = \\ = \mu^{-1} q e^{ik_m \alpha x_1} \underline{d} \cdot \underline{\nabla} \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30})$$

Zamiana zmiennych

$$(10) \quad x_{3m} = \mu^{-1/2} \mu_a^{-1/2} x_3$$

sprowadza nasz problem anizotropowy do izotropowego. Równanie (9) przechodzi w równanie Helmholtza w zmiennych  $X_1, X_2, X_{3m}$  i możemy natychmiast napisać jego rozwiązanie, które traktujemy jako zadaną falę padającą

$$(11) \quad u_{oi} = -\frac{i}{4} P e^{ik_m \alpha x_1} H_1^{(1)}(k_m z g_{ms}) \sin \phi$$

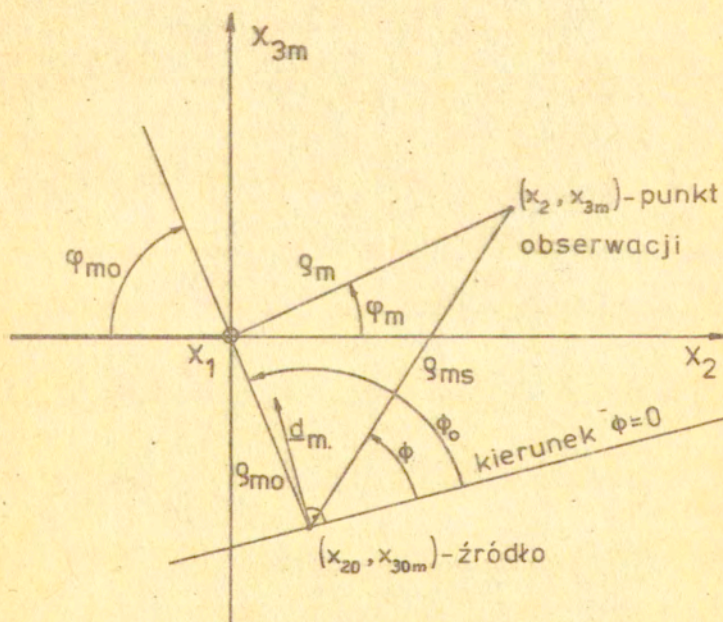
gdzie

$$P = q k_m z (\mu \mu_0)^{-1/2}, \quad z = (1 - \alpha^2)^{1/2},$$

$$g_{ms} = [(x_2 - x_{20})^2 + \mu \mu_0^{-1} (x_3 - x_{30})^2]^{1/2}.$$

Kąt  $\phi$  opisujący charakterystykę kątową źródła odmierzany jest między kierunkiem prostopadłym do wersora  $\underline{d}$  a promieniem wodzącym  $g_{ms}$ .

W zmiennych izotropowych /magnetycznych/  $X_1, X_2, X_3$  opisana sytuację fizyczną przedstawia rysunek



Rys.1. Przekrój w płaszczyźnie  $X_1 = \text{const.}$



gdzie

$$(12) \quad \begin{aligned} q_m &= (x_2^2 + x_{3m}^2)^{1/2}, & q_{m_0} &= (x_{20}^2 + x_{30m}^2)^{1/2}, \\ x_{30m} &= \mu^{1/2} \mu_a^{-1/2} x_{30}, & \underline{d}_m &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^{1/2} \mu_a^{-1/2} \end{pmatrix} \underline{d}, \\ x_2 &= q_m \cos \varphi_m, & x_{3m} &= q_m \sin \varphi_m, \\ x_{20} &= q_{m_0} \cos \varphi_{m_0}, & x_{30m} &= -q_{m_0} \sin \varphi_{m_0}, \end{aligned}$$

a kierunek  $\phi = 0$  jest zadany kątem  $\phi_0$  odmierzanym od granicy cienia.

Zatem

$$(13) \quad q_{ms} = [q_m^2 + q_{m_0}^2 - 2q_m q_{m_0} \cos(\varphi_m + \varphi_{m_0})]^{1/2}$$

Opisane wyżej źródło kwadrupolowe powstaje w wyniku różniczkowania  $\underline{d} \cdot \nabla$  źródła dipolowego analizowanego w pracy [5]. Podobna relacja dotyczy fal padających  $u_{01}$ . Rozważany uprzednio [5] przypadek fali padającej  $\sim H_n^{(4)}(k_m x_{Q_{ms}})$  jak i obecny  $\sim H_n^{(4)}(k_m x_{Q_{ms}}) \sin \phi$  są szczególnymi, najprostszymi przypadkami cylindrycznych fal padających. Dowolna cylindryczna fala padająca może być przedstawiona jako superpozycja multipoli

$$-\frac{i}{4} P e^{ik_m \alpha x_2} H_n^{(4)}(k_m x_{Q_{ms}}) \begin{pmatrix} \sin n \phi \\ \cos n \phi \end{pmatrix} \quad n=0,1,2,\dots$$

Zamiast badać osobno dwa niezależne kwadrupole  $H_n^{(4)}(k_m x_{Q_{ms}}) \sin \phi$ ,  $H_n^{(4)}(k_m x_{Q_{ms}}) \cos \phi$ , gdzie kąt  $\phi$  jest odmierzamy względem ustalonej osi (np.:  $x_2$ ) wystarczy zbadać (11) gdzie kąt  $\phi$  jest odmierzany od dowolnego kierunku, określonego przez kąt  $\phi_0$ /Rys.1/.

Aby problem wyznaczenia całkowitego pola  $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_S$ ,  $\underline{H} = \underline{H}_1 + \underline{H}_S$  był dobrze postawiony tzn., żeby rozwiązanie było jednoznaczne trzeba zadać odpowiednie warunki brzegowe. Rozwiązanie  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$  musi spełniać następujące

Warunki jednoznaczności:

1. Równania Maxwella (7)
  2. Warunek brzegowy  $\underline{E} \cdot \underline{n} = 0$  dla  $x_3 = 0, x_2 \leq 0$
  3. Warunek ostrza  $|\underline{E}|, |\underline{H}| = o(\varrho^{-1})$  dla  $\varrho = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0$
  4. Warunek wypromieniowania: pola  $\underline{E}, \underline{H}$  zależą analitycznie od  $k$  w pewnym otoczeniu interesującej nas wartości  $k$  i dla  $\text{Im}k > 0$  w tym otoczeniu zachodzi  $\underline{E}, \underline{H} \rightarrow 0$ , gdy  $\varrho \rightarrow \infty$ .
- W przypadku półprzestrzyny warunek ostrza  $|\underline{E}|, |\underline{H}| = o(\varrho^{-1})$  czyli  $|\underline{E}|, |\underline{H}| \sim \text{const} \cdot \varrho^{-1+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ , można dokładniej sprecyzować. Zgodnie z [13]  $\epsilon = 1/2$  tzn.

$$(14) \quad |\underline{E}|, |\underline{H}| \sim \varrho^{-3/2} \quad \text{dla } \varrho \rightarrow 0.$$

W języku potencjałów Hertza  $u = u_m + u_s, v = v_s$  powyższe warunki jednoznaczności przechodzą w

Warunki jednoznaczności dla potencjałów  $u, v$ :

1. Równania (9), (6), (4)
2. Warunek brzegowy

$$(15) \quad \underline{\nabla}_t \frac{\partial}{\partial x_s} v + i\omega \mu \underline{\nabla}_t u = u \underline{n} = 0 \quad \text{dla } x_3 = 0, x_2 \leq 0$$

3. Warunek ostrza

$$(16a) \quad u = C_m + o(\varrho^4), \quad v = C_e + o(\varrho^4) \quad (C_m, C_e \text{ stałe}) \quad \text{dla } \varrho \rightarrow 0$$

lub jak wiemy z (14)

$$(16b) \quad u = C_m + o(\varrho^{3/2}), \quad v = C_e + o(\varrho^{3/2}) \quad \text{dla } \varrho \rightarrow 0$$



#### 4. Warunek wybiegania

Eikonały fal dyfrakcyjnych  $u_s, v_s$  wzrastają wzdłuż promieni wychodzących z krawędzi ekranu [8].

Warunek wybiegania przedstawiliśmy w formie dostosowanej do poszukiwania rozwiązań asymptotycznych.

Warunek ostrza (16) wynika z warunku ostrza dla pól  $E, H$  oraz z faktu, że pola te wyrażają się przez potencjały przy pomocy dwukrotnego różniczkowania (3b) i (5a). Trzeba podkreślić, że skalarne sformułowanie UAT [7,8], na którym będziemy się opierali, zapewnia tylko spełnienie "skalarne" warunku ostrza

$$(17) \quad u, v = O(1) \quad \text{dla } \varrho \rightarrow 0$$

Zatem warunek (16) jest zbyt silny, niemożliwy do spełnienia w tym ujęciu. Sposób spełnienia tego pozornie zbyt silnego warunku zostanie wyjaśniony w dalszym ciągu pracy. Rozwiązanie naszego wektorowego problemu dyfrakcji /z "wektorowym" warunkiem ostrza (16) / złożymy z pomocniczych rozwiązań skalnych /ze "skalarnym" warunkiem ostrza (17) /. Wykorzystamy wspomnianą uprzednio metodę pomocniczych fal padających [10] związanych z niejednoznacznością podziału pola na składowe TE i TM.

Sens pomocniczych potencjałów, opisujących fikcyjne pola padające zostanie wyjaśniony niżej przy analizie rozprężonych warunków brzegowych.

#### 4. Rozprężone warunki brzegowe i pomocnicze fale padające

Warunek brzegowy (15) jest wyrażony dla całego pola - spręga oba mody TE i TM. Stosownie do przyjętej przez nas metody podziału pola na składowe TE i TM spróbujemy rozpręgać warunek brzegowy (15) na warunki osobne dla TE i dla TM.

Obliczając divergencję warunku (15) otrzymujemy

$$(18) \quad \Delta_t \frac{\partial v}{\partial x_s} = 0$$

zaś mnożąc (15) wektorowo przez  $\underline{n}$  i obliczając divergencję uzyskamy

$$(19) \quad \Delta_t u = 0$$

Z symetrii problemu widać, że zależność od  $X_1$  jest taka jak zadana dla źródła  $\exp(ik_m \alpha x_1)$ . Uwzględniając tę zależność w (18) i (19) otrzymujemy układ równań zwyczajnych na  $u$  i  $(\frac{\partial v}{\partial x_3})$  w zmiennej  $X_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} u - k_m^2 \alpha^2 u = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial v}{\partial X_3} \right) - k_m^2 \alpha^2 \left( \frac{\partial v}{\partial X_3} \right) = 0 \end{cases}$$

których całki ogólne przyjmują postać

$$(20a) \quad u = a_1 e^{-k_m \alpha X_2 + ik_m \alpha X_1} + a_2 e^{k_m \alpha X_2 + ik_m \alpha X_1}$$

$$(20b) \quad \frac{\partial v}{\partial X_3} = a_3 e^{-k_m \alpha X_2 + ik_m \alpha X_1} + a_4 e^{k_m \alpha X_2 + ik_m \alpha X_1}$$

Równania (20) stanowią warunki konieczne wynikające z (15). Nie są to jednak warunki wystarczające. Dla spełnienia (15) trzeba wstawiamy (20) do (15) /

$$(21) \quad a_3 = -\omega \mu a_1, \quad a_4 = \omega \mu a_2$$

Teraz (20) i (21) są równoważne (15). Związki (20) podobnie jak (15) odnoszą się do  $X_3 = 0$ . Występujące w nich wyrazy wykładnicze możemy zinterpretować jako ślad na półpłaszczyźnie  $X_3 = 0, X_2 \leq 0$  po pewnych falach padających, które spełniają rolę członów wymuszających analogicznych do  $u_{o1}$  w  $u = u_{o1} + u_s$  por. (20). Postaramy się odtworzyć zależność tych fal od  $x_3$ .

Zmierzamy do rozdzielenia warunku brzegowego na osobne warunki dla składowej TE i TM, więc występujące w (20) wyrazy wykładnicze też powinny odpowiadać składowym TE i TM. Ponieważ są one jednakowego typu w (20a) i w (20b) więc można to zrealizować gdy te fale padające będą typu TEM, co uzyskujemy wybierając zależność od  $X_3$  w postaci  $\exp(\pm ik x_3)$  - niejednoro-



dwie fale płaskie.

Postać poszukiwanych fal padających otrzymamy zastępując stałe  $a_1, a_2$  w (20) wyrażeniami /"wychodzimy poza" półpłaszczyznę  $x_3 = 0, x_2 \leq 0$ /

$$a_1 \rightarrow b_1 e^{ikx_3} + b_2 e^{-ikx_3}$$

$$a_2 \rightarrow b_3 e^{ikx_3} + b_4 e^{-ikx_3}$$

zaś  $a_3$  i  $a_4$  są wyznaczone przez (21).

Ponieważ  $\frac{\partial}{\partial x_3} e^{\pm ikx_3} = \pm ike^{\pm ikx_3}$ , więc (20) z uwzględnieniem (21) można zapisać w formie rozprężonej - osobno dla TE i TM:

$$(22a) \left( u + \sum_{n=0}^4 u_{ni} \right) = 0 \quad \text{dla } x_3=0, x_2 \leq 0$$

$$(22b) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v + \sum_{n=0}^4 v_{ni} \right) = 0 \quad \text{dla } x_3=0, x_2 \leq 0$$

gdzie niejednorodne fale płaskie  $u_{ni}, v_{ni}$  dane są wzorami

$$(23a) u_{ni} = b_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{(-1)^n k_m \alpha x_2} e^{(-1)^{\theta(n-3)} ikx_3}$$

$$(23b) v_{ni} = -i\sqrt{\mu/\epsilon} (-1)^n (-1)^{\theta(n-3)} b_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{(-1)^n k_m \alpha x_2} e^{(-1)^{\theta(n-3)} ikx_3}$$

$$n=1,2,3,4$$

gdzie  $\theta$  - funkcja Heaviside'a, tzn. dla  $n=3,4$  mamy  $e^{-ikx_3}$ . Warunki brzegowe (22) można spełnić dla obu znaków  $e^{\pm ikx_3}$  osobno. Wybieramy zależność  $e^{+ikx_3}$  tzn.

$$b_3 = b_4 = 0$$

gdyż dla naszych celów wystarczą, jak się okaże później, tylko cztery fale (23).

Oznaczając  $b_1 = A_1, b_2 = A_2$  dowolne amplitudy w (23) oraz korzystając ze związków

$$kx_3 = k_m x_{3m} = k_e x_{3e}$$

$$k_m = \sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} k_e$$

gdzie  $x_{3e} = \epsilon^{1/2} \epsilon_0^{-1/2} x_3$

możemy zapisać niejednorodne fale płaskie występujące w rozprężonych warunkach brzegowych (22) w postaci

$$(24a) \quad u_{ni} = A_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{-ik_m [(-1)^n \alpha x_2 - x_{3m}]}$$

$$(24b) \quad v_{ni} = -i(-1)^n \sqrt{\mu/\epsilon} A_n e^{i\sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} k_e \alpha x_1} e^{-ik_e [(-1)^n i\sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \alpha x_2 - x_{3e}]}$$

$$n=1,2$$

Udało się nam rozdzielić warunek brzegowy (15) na składowe TE i TM (22) ale "kosztem" pojawienia się oprócz fali padającej  $u_{oi}$  dodatkowych fal padających przedstawiających pola TEM opisane potencjałami (24). Pola TEM odpowiadające parom  $u_{ni}$ ,  $v_{ni}$  oraz  $u_{ni}$ ,  $v_{ni}$  znikają, gdyż  $v_{ni}$  opisuje to samo pole TEM /traktowane jako TM/ co  $u_{ni}$  /traktowane jako TE/ tylko z przeciwnym znakiem. Stąd określenia fikcyjne lub pomocnicze fale padające.

Sens rozdzielonych warunków brzegowych (22) można wyjaśnić następująco. Wyściłowy podział pola podyktowany falą padającą

$u_{oi}$

$$u = u_{oi} + u_s \longleftrightarrow TE$$

$$v = v_s \longleftrightarrow TM$$

przechodzi w podział

$$u + \sum_n u_{ni} \longleftrightarrow TE' = TE + TEM$$

$$v + \sum_n v_{ni} \longleftrightarrow TM' = TM - TEM$$



Przy czym mamy swobodę wyboru pola TEM /dowolne amplitudy  $A_n$ / istotną dla spełnienia warunku ostrza (16). Nie każdy podział TE + TM pozwala spełnić warunek ostrza dla każdego z modów TE i TM osobno. I tak wyjściowy podział pola nie pozwala na spełnienie warunku ostrza (16) dla składowej TE  $\rightarrow u = u_{01} + u_B$ , co zostanie przedstawione w punkcie 9, przy konstrukcji pomocniczego skalarne go rozwiązania UAT dla fali padającej  $u_{01}$ . Pojawia się tam konieczność uwzględnienia składowej TM powstającej w wyniku sprzężenia krawędziowego /dyfrakcyjnego/ z TE. Pojawiającą się w polu rozproszonym składową TM można traktować jako rezultat rozpraszania fikcyjnej fali padającej TEM traktowanej tu jako TM, opisanej potencjałami  $v_{ni}$  w warunkach (22). To pole TEM można wydzielić z pola padającego TE, w warunkach (22) opisujemy je teraz potencjałami  $u_{ni}$  jako składową TE /potencjały  $u_{ni}$  i  $v_{ni}$  przedstawiają to samo pole TEM z różnymi znakami/.

Pozostała część pola padającego TE' rozprasza się już tylko w modzie TE tzn. udaje się dla tego pola TE' spełnić osobno warunek ostrza (16).

Zatem analiza warunku brzegowego na ekranie zgodna z naszą metodą podziału pola na składowe TE i TM i rozwiązywania problemu dla każdej składowej osobno ujawniła ogólną strukturę rozpręganania tego warunku związaną z niejednoznacznością podziału na składowe TE i TM.

Wykorzystując tę swobodę podziału udaje się spełnić również warunek ostrza osobno dla TE i TM ale tylko przy odpowiednim podziale, który z góry nie jest oczywisty, a wyjściowy podział wyznaczony przez pole padające jest na ogół zły.

##### 5. Rozwinięcie asymptotyczne fali padającej

Korzystając z rozwinięcia asymptotycznego funkcji Hankela dla dużego argumentu [14]

$$H_n^{(1)}(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2iz)^\nu} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{\nu! \Gamma(n-\nu+1/2)}$$

i uwzględniając fak. . . w granicy  $k_m \rightarrow \infty$  mamy  $k_m \alpha q_{ms} \rightarrow \infty$ ,  
 gdyż w interesującym nas otoczeniu ostrza  $q_m \rightarrow 0 \Rightarrow q_{ms} \rightarrow q_{mo} \neq 0$ ,  
 możemy napisać falę padającą  $u_{o1}$  (11) w postaci

$$(25) \quad u_{o1} \underset{k_m \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{i}{2} P \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} e^{ik_m S_{mo}} k_m^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (ik_m)^{-\nu}$$

gdzie eikonał fali padającej

$$(26) \quad S_{mo} = \alpha x_1 + \alpha q_{ms}$$

zaś współczynniki

$$(27) \quad a_{\nu} = (-1)^{\nu} (2\alpha q_{ms})^{-\nu - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\nu! \Gamma(-\nu + \frac{3}{2})}$$

$$\cdot [ (2\alpha q_{mo}) \sin \phi_0 - (2\alpha q_m) \sin(\varphi_m + \varphi_{mo} + \phi_0) ]$$

Skorzystaliśmy tu z wyrażenia funkcji  $\sin \phi$  przez zmienne  
 cylindryczne  $q_m, \varphi_m$

$$(28) \quad \sin \phi = q_{ms}^{-1} [ q_{mo} \sin \phi_0 - q_m \sin(\varphi_m + \varphi_{mo} + \phi_0) ] ,$$

które wynika z twierdzenia sinusów dla kątów  $\varphi_m + \varphi_{mo}$  i  $\phi_0 - \phi$   
 - patrz rysunek 1 oraz z (13).

Zatem w stosunku do pracy [5] różnica polega na modyfikacji  
 współczynników  $a_{\nu}$ .

Dla zbadania warunku ostrza potrzebna jest znajomość  $u_{o1}$   
 dla  $q_m \rightarrow 0$ . W tym celu znajdziemy rozwinięcie Taylora  
 współczynników  $a_{\nu}$  względem  $q_m$  wokół  $q_m = 0$ . W [5] po-  
 sługując się rozwinięciem [14]

$$(29) \quad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} x^k + \dots$$



znaleźliśmy rozwinięcie  $g_{ms}$  danego wzorem (13)

$$(30) \quad g_{ms} = g_{mo} \left[ 1 - \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right) \cos(\varphi_m + \varphi_{mo}) + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right)^2 \frac{1}{2} \sin^2(\varphi_m + \varphi_{mo}) + \right. \\ \left. + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right)^3 \frac{1}{2} \cos(\varphi_m + \varphi_{mo}) \sin^2(\varphi_m + \varphi_{mo}) + \dots \right]$$

skąd na podstawie (29) mamy

$$(31) \quad g_{ms}^{-\nu - \frac{3}{2}} = g_{mo}^{-\nu - \frac{3}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right) (\nu + \frac{3}{2}) \cos(\varphi_m + \varphi_{mo}) + \right. \\ \left. + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right)^2 \frac{\nu + \frac{3}{2}}{2} ((\nu + \frac{3}{2}) \cos^2(\varphi_m + \varphi_{mo}) - 1) + \dots \right]$$

(31) pozwala napisać rozwinięcie dla współczynników  $a$ , przy  $g_m \rightarrow 0$

$$(32) \quad a_\nu = (-1)^\nu (2x g_{mo})^{-\nu - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{\nu! \Gamma(-\nu + \frac{3}{2})} \sin \phi_0.$$

$$\cdot \left[ 1 + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right) \left( 2(\nu + \frac{1}{2}) \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} - 2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 - (\nu + \frac{1}{2}) \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{g_m}{g_{mo}} \right)^2 \left( 2(\nu + \frac{3}{2})^2 \cos^4 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} - 4(\nu + \frac{3}{2}) \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2(\nu + \frac{3}{2})^2 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} + 2(\nu + \frac{3}{2}) \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\nu + \frac{3}{2})(\nu + \frac{1}{2})}{2} \right) + \dots \right]$$

6. Skalarne rozwiązanie UAT dla fali padającej  $u_{o1}$

Rozwiązanie skalarne  $u_o$  /pole TE/ dla fali padającej  $u_{o1}$  musi spełniać następujące

Skalarne warunki jednoznaczności:

1.  $u_o$  spełnia równanie (9)
2. Warunek brzegowy Dirichleta:  $u_o = 0$  dla  $X_3 = 0, X_2 \leq 0$
3. Warunek ostrza:  $u_o = 0$  (1) dla  $\varrho \rightarrow 0$
4. Warunek wybiegania: eikonał  $u_o - u_{o1}$  wzrasta przy oddalaniu się od krawędzi  $\varrho \rightarrow \infty$

Zgodnie z teorią przedstawioną w [7] i [8] jednolite, asymptotyczne rozwiązanie tak postawionego problemu budujemy wzdłuż promieni dyfrakcyjnych określających tzw. współrzędne promieniowe  $(\sigma, \varphi, \eta)$  - promienie są liniami współrzędnej  $\sigma$ . Zgodnie z [5] związek współrzędnych promieniowych /wyrażających geometrię problemu dyfrakcji - stożki Kellera/ ze współrzędnymi cylindrycznymi  $(\varrho_m, \varphi_m, X_1)$  jest następujący

$$(33) \quad \sigma = \frac{\varrho_m}{\alpha}, \quad \eta = X_1 - \frac{\varrho_m}{\alpha} \alpha, \quad \alpha = \cos \beta, \quad z = \sin \beta,$$

zaś kąt ugięcia  $\zeta$  z [8] dany jest jako

$$(34) \quad \zeta = \pi - \varphi_m - \varphi_{m0} \quad \text{skąd} \quad \sin \frac{\zeta}{2} = \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2},$$

oraz  $y$  z [8] wynosi

$$(35) \quad y = \sigma^{1/2} = \left(\frac{\varrho_m}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Zgodnie z [8] rozwiązanie UAT  $u_o$  wzdłuż promieni w otoczeniu krawędzi /do najbliższej kaustyki/ dane jest w postaci

$$(36) \quad u_o = U_o(\varrho_m, \varphi_m, X_1) - U_o(\varrho_m, 2\pi - \varphi_m, X_1)$$

gdzie dwuwartościowa funkcja  $U_o$  posiada rozwinięcie asymptotyczne



$$(37) \quad U_0 \underset{k_m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-i}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m \hat{S}_{m0}} k_m^{-1/2}$$

$$\cdot \left[ f(k_m^{1/2} \Theta_{m0}) \sum_{y=0}^{\infty} a_y (ik_m)^{-y} + ck_m^{-1/2} \sum_{y=0}^{\infty} B_y (ik_m)^{-y} \right]$$

Wielkości występujące w (37) są zdefiniowane następująco.  
Eikonał fali dyfrakcyjnej

$$(38) \quad \hat{S}_{m0} = \alpha x_1 + \alpha Q_{m0} + \alpha Q_m$$

parametr "detour"

$$(39) \quad \Theta_{m0} = (\hat{S}_{m0} - S_{m0})^{1/2} = (\alpha Q_{m0} + \alpha Q_m - \alpha Q_{m0})^{1/2}$$

gdzie gałąź pierwiastka wybieramy tak, by  $\operatorname{sgn} \Theta_{m0} = \operatorname{sgn} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}$

Całka Fresnela

$$f(x) = -ice^{-ix^2} \int_{-\infty}^x e^{it^2} dt$$

gdzie  $c = \pi^{-1/2} e^{i\pi/4}$

Współczynniki  $B_y$  wyznaczamy wzdłuż promieni z rekurencyjnych związków [8]

$$(40a) \quad B_y = \frac{1}{2y} \int_0^{\sigma} y \left[ -\Delta_m B_{y-1} + \frac{\Delta_m a_{y-1}}{2\Theta_{m0}} \right] d\sigma' + \frac{a_y}{2\Theta_{m0}} - \frac{a_y(0)}{2^{3/2} y \sin \beta \sin \zeta/2}$$

$$B_{-1} = 0$$

lub

$$(40b) \quad B_y = \frac{1}{2y} \int_0^{\sigma} y \left[ \Delta_m (\Theta_{m0} a_y - B_{y-1}) - \Theta_{m0} \Delta_m a_y \right] d\sigma'$$

Związek oznaczeń z pracy [8] z naszymi jest następujący

$$\Theta = \Theta_{m0}, \quad \hat{S} = \hat{S}_{m0}, \quad \Delta = \Delta_m, \quad \varphi = \varphi_m, \quad \varphi_0 = \varphi_{m0},$$

$$z_p = -\frac{i}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i3/4 \pi} a_p ,$$

$$v_p = -\frac{i}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i3/4 \pi} B_p .$$

Ogólna teoria [8] zapewnia dla jednolitego, asymptotycznego rozwiązania (36-37) spełnienie skalarnego warunku ostrza  $u_0 = 0(1)$  dla  $q \rightarrow 0$ , co jest dla naszych celów (16) niewystarczające. W związku z tym zbadamy zachowanie  $u_0$  dla  $q_m \rightarrow 0$ . Rachunki przeprowadzimy w trzech pierwszych rzędach rozwinięcia (37) tzn.  $(ik_m)^0$ ,  $(ik_m)^{-1}$ ,  $(ik_m)^{-2}$ . Do tego potrzebna jest znajomość rozwinięć dla  $q_m \rightarrow 0$   $\theta_{m0}$  oraz  $B_0$  i  $B_1$  z odpowiednią dokładnością.

### 7. Wielkości pomocnicze

W pracy [5] zostały znalezione rozwinięcia  $\theta_{m0}$  (39) oraz  $\theta_{m0}^{-1}$  dla  $q_m \rightarrow 0$  przy pomocy wzoru (29):

$$(41) \theta_{m0} = (2xq_m)^{1/2} \cos \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} \left[ 1 + \left( \frac{q_m}{q_{m0}} \right) \left( \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]$$

$$(42) \theta_{m0}^{-1} = \frac{(2xq_m)^{-1/2}}{\cos \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{q_m}{q_{m0}} \right) \left( -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{q_m}{q_{m0}} \right)^2 \left( -\frac{5}{8} \cos^4 \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} + \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right]$$

Z (41) i (32) otrzymujemy

$$(43) \theta_{m0} a_p = (-1)^p (2xq_m)^{-p-1/2} \frac{\Gamma(y+3/2)}{y! \Gamma(-y+3/2)} (2xq_m)^{1/2} \cos \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} \sin \Phi_0 .$$

$$\cdot \left[ 1 + \left( \frac{q_m}{q_{m0}} \right) \left( (2y+3/2) \cos^2 \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} - 2 \cos \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} \sin \frac{\Phi_m + \Phi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \Phi_0 - (y+1) \right) + \dots \right]$$



8. Obliczenie  $B_0$  i  $B_1$

Współczynnik  $B_0$  wyznaczymy ze wzoru (40a), który przyjmuje postać

$$(44) \quad B_0 = \frac{a_0}{2\theta_{m0}} - \frac{a_0(0)}{2(2\alpha Q_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}}$$

Wykorzystując rozwinięcia  $a_0$  (32) oraz rozwinięcia  $\theta_{m0}^{-1}$  (42) możemy napisać

$$B_0 = \frac{(2\alpha Q_m)^{-1/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \sin \phi_0}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right) \left( \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right)^2 \left( \frac{9}{2} \cos^4 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 6 \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{9}{2} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + 3 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 + \frac{3}{8} \right) + \dots \right] \cdot \\ \cdot \left[ 1 + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right) \left( -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right)^2 \left( \frac{5}{8} \cos^4 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right] - \frac{(2\alpha Q_m)^{-1/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \sin \phi_0}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} = \\ = \frac{(2\alpha Q_m)^{-1/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \sin \phi_0}{2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}} \cdot \\ \cdot \left[ 1 + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right) \left( \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_m}{Q_{m0}}\right)^2 \left( \frac{27}{8} \cos^4 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - 5 \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. - 3 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + 2 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 \right) + \dots \right]$$

Zatem

(45)

$$B_0 = (2\alpha Q_{mo})^{-3/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 - \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 \right) + \\ + (2\alpha Q_{mo})^{-5/2} (2\alpha Q_m)^{3/2} \left( \frac{27}{16} \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 - \frac{5}{2} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 + \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 \right) + \dots$$

Dokładność do  $\sim g_m^{3/2}$  jest potrzebna do wyznaczenia  $B_1$  z dokładnością do  $\sim g_m^{1/2}$ .

$B_1$  wyznaczymy z dokładnością do  $\sim g_m^{1/2}$ , gdyż nie będziemy obliczać  $B_2$  a do zbadania warunku ostrza w tym rzędzie dokładność ta wystarczy. W związku z tym wygodniejszy będzie wzór (40b), gdyż zgodnie z (32) i (41) wkład od wyrazu  $\theta_{mo} \Delta_m a_1$  jest już rzędu  $\sim g_m^{3/2}$  zaś wielkość  $(\theta_{mo} a_1 - B_0)$  i tak musimy obliczyć dla zbadania warunku ostrza w rzędzie  $(ik_m)^{-1}$ .

Zgodnie z (43) zachodzi

$$\theta_{mo} a_1 = -(2\alpha Q_{mo})^{-3/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \frac{3}{4} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 + \\ - (2\alpha Q_{mo})^{-5/2} (2\alpha Q_m)^{3/2} \left( \frac{21}{8} \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 \right) + \dots$$

co łącznie z (45) daje

(46)

$$(\theta_{mo} a_1 - B_0) = -(2\alpha Q_{mo})^{-3/2} (2\alpha Q_m)^{1/2} \sin \left( \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) + \\ - (2\alpha Q_{mo})^{-5/2} (2\alpha Q_m)^{3/2} \left( \frac{69}{16} \cos^3 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 - 4 \cos^2 \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 + \right. \\ \left. - 3 \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0 + \sin \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} \cos \phi_0 \right) + \dots$$



Zauważmy, że w (46) nie znika wkład rzędu  $\sim q_m^{1/2}$ .  
Wykorzystując związki

$$(47) \Delta_m = \frac{1}{q_m} \frac{\partial}{\partial q_m} \left( q_m \frac{\partial}{\partial q_m} \right) + \frac{1}{q_m^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

oraz

$$\frac{1}{q_m} \frac{\partial}{\partial q_m} \left( q_m \frac{\partial}{\partial q_m} \right) q_m^{1/2} = \frac{1}{4} q_m^{-3/2}$$

$$\frac{1}{q_m} \frac{\partial}{\partial q_m} \left( q_m \frac{\partial}{\partial q_m} \right) q_m^{3/2} = \frac{9}{4} q_m^{-1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_m^2} \sin \left( \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \phi_0 \right) = -\frac{1}{4} \sin \left( \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} + \phi_0 \right)$$

podobnie /czynnik  $-\frac{1}{4}$ / jest dla  $\sin \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}$  i  $\cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2}$ ,  
po prostych choć żmudnych rachunkach wyznaczamy

$$(48) \Delta_m (\theta_{m0} a_1 - B_0) = -(2x q_{m0})^{-5/2} (2x)^{3/2} q_m^{-1/2} \frac{15}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \phi_0 + \dots$$

Ponieważ  $q_m = x\sigma$ ,  $y = \sigma^{1/2} = \left(\frac{q_m}{x}\right)^{1/2}$  więc  $q_m^{-1/2} = x^{-1/2} \sigma^{-1/2}$   
i całkowanie w (40b) przebiega następująco

$$\frac{1}{2y} \int_0^\sigma y q_m^{-1/2} d\sigma' = \frac{x^{-1/2}}{2\sigma^{1/2}} \int_0^\sigma d\sigma' = 2^{-1} x^{-1/2} \sigma^{1/2} = (2x)^{-1} q_m^{1/2}$$

Uwzględniając (48) otrzymujemy

$$(49) B_1 = -(2x q_{m0})^{-5/2} (2x q_m)^{1/2} \frac{15}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \phi_0 + \dots$$

Korzystając z (43) mamy

$$\theta_{m0} a_2 = -(2x q_{m0})^{-5/2} (2x q_m)^{1/2} \frac{15}{32} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \phi_0 + \dots$$

co łącznie z (49) daje

$$(50) (\theta_{m0} a_2 - B_1) \sim q_m^{3/2}$$

tzn. zniósł się wyrazy  $\sim g_m^{1/2}$ .

### 9. Warunek ostrza

Zacznijemy od zbadania zachowania  $u_0$  (36) dla  $g_m \rightarrow 0$ .  
Ponieważ  $\theta_{m0} \sim g_m^{1/2}$  zgodnie z (41), więc wystarczy rozwinięcie Taylora całki Fresnela  $f(\cdot)$  z dokładnością do wyrazu liniowego

$$(51) \quad f(x) = \frac{1}{2} - icx + \dots$$

gdyż zgodnie z (16) "złe" w  $u_0$  są tylko potęgi niższe od  $g_m^{3/2}$ .

Wykorzystując (51) zgrupujemy w (37) wyrazy jednakowego rzędu w  $(ik_m)^{-\nu}$  mogące dać wkład  $\sim g_m^{1/2}$ ,

(52)

$$U_0 \sim -\frac{i}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i3/4\pi} e^{ik_m \hat{s}_{m0}} k_m^{-1} [k_m^{1/2} (\frac{1}{2} - ick_m^{1/2} \theta_{m0} + \dots)] \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (ik_m)^{-\nu} +$$

$$+ c \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} (ik_m)^{-\nu}] =$$

$$= \frac{1}{2} P \pi^{-1/2} e^{-i3/4\pi} e^{ik_m \hat{s}_{m0}} (ik_m)^{-1} [\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (ik_m)^{-\nu+1/2} +$$

$$- c \theta_{m0} a_0 (ik_m)^1 - c \sum_{\nu=0}^{\infty} (\theta_{m0} a_{\nu+1} - B_{\nu}) (ik_m)^{-\nu}] + \dots$$

Wyrazy połówkowego rzędu  $(ik_m)^{-\nu-1/2}$  w (52) nie dają zbyt osobliwych pól /istotne jest pole  $\underline{H}^{TE}$  - dwa różniczkowania/, gdyż rozwinięcie  $a_{\nu}$  (32) zawiera tylko całkowite potęgi  $g_m$  i różniczkowania  $\frac{\partial}{\partial g_m}$  nie mogą wyprodukować ujemnych potęg  $g_m$ . Można się o tym przekonać bezpośrednim rachunkiem.

Zatem wyrazy nie spełniające warunku ostrza mają postać



$$(53) U_0 \Big|_{\substack{q_m^{1/2} \\ (ik_m)^0}} \sim -\frac{C}{2} P\pi^{-1/2} e^{-i\frac{3}{4}\pi} e^{ik_m \hat{s}_{m0}} [\theta_{m0} a_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\theta_{m0} a_{\nu+1} - B_\nu) (ik_m)^{-\nu-1}]$$

czyli istotne jest zachowanie się dla  $q_m \rightarrow 0$  wielkości  $\theta_{m0} a_0$  oraz  $(\theta_{m0} a_{\nu+1} - B_\nu)$ .

Zerowy rząd  $(ik_m)^0$

Na podstawie (43) mamy

$$(54) \theta_{m0} a_0 = (2\pi q_{m0})^{-1/2} (2\pi q_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} \sin \phi_0 + \dots$$

Wtedy nie zanika wyraz  $\sim q_m^{1/2}$ .

Ponieważ

$$\cos \frac{\varphi_m + \varphi_{m0}}{2} - \cos \frac{2\pi - \varphi_m + \varphi_{m0}}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2}$$

więc (53) i (54) dają do  $u_0$  (36) wkład  $\sim q_m^{1/2}$  w zerowym rzędzie  $(ik_m)^0$ .

$$(55) U_0 \Big|_{\substack{q_m^{1/2} \\ (ik_m)^0}} = -CP\pi^{-1/2} e^{-i\frac{3}{4}\pi} e^{ik_m \hat{s}_{m0}} (2\pi q_{m0})^{-1/2} (2\pi q_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_{m0}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2} \sin \phi_0.$$

Tak jak zapowiadaliśmy nie można spełnić warunku ostrza (16) osobno dla składowej TE dla fali padającej  $u_{0i}$ .

Podobnie jak w pracy [5] wykorzystamy to pomocnicze skalarne rozwiązanie  $u_0$  /nie spełniające wektorowego warunku ostrza/ do syntezy wektorowego rozwiązania wykorzystując niejednoznaczność podziału pola na składowe TE i TM oraz pomocnicze potencjały omówione w punkcie 4. Do pola padającego TE generowanego przez  $u_{0i}$  dodamy pole TEM generowane przez  $u_{ni}$  (24a) tak je dobierając /amplitudy  $A_n$ /, by otrzymane dla  $u_{ni}$  rozwiązanie  $u_n$  zniósłoby złe zachowanie się jak  $\sim q_m^{1/2}$  w  $u_0$ . Jednocześnie to samo pole TEM trzeba odjąć od składowej TM pola padającego, która była równa zero. Pojawia się w ten sposób składowa TM w polu

padającym opisaną potencjałami  $v_{n1}$  (24b).

Przepiszemy pomocnicze fale padające  $u_{n1}$  (24a) w wygodnej do rozważań asymptotycznych postaci

$$(56) \quad u_{n1} = A_n e^{ik_m \alpha x_1} e^{-ik_m \alpha z_m \cos(\varphi_m + \varphi_{mn})} = A_n e^{ik_m S_{mn}}, \quad n=1,2$$

gdzie  $(-1)^n i \alpha = \alpha \cos \varphi_{mn}$ ,  $1 = \alpha \sin \varphi_{mn}$  - określają zespolone kąty padania, a eikonały fal  $u_{n1}$  mają postać

$$(57) \quad S_{mn} = \alpha x_1 - \alpha z_m \cos(\varphi_m + \varphi_{mn})$$

Postać pomocniczych fal padających (24a), (56) można odgadnąć bez analizy rozdzielonych warunków brzegowych [22] żądając, by  $u_{n1}$  było TEM względem  $X_3$  skąd  $u_{n1} \sim e^{\pm i k x_3}$  oraz  $\Delta_t u_{n1} = 0$  i zadając zależność od  $X_1$  /wzdłuż krawędzi ekranu/ zgodną ze źródłem.

Dla fal padających  $u_{n1}$  znajdujemy rozwiązanie skalarne problemu rozpraszania zgodnie z punktem 6. Dla niejednorodnych fal płaskich  $u_{n1}$  rozwiązanie  $u_n$  UAT pokrywa się ze ścisłym rozwiązaniem, które można otrzymać przez analityczne przedłużenie rozwiązania Sommerfelda.

Zgodnie z (36)

$$(58) \quad u_n = U_n(\varphi_m) - U_n(2\pi - \varphi_m)$$

gdzie

$$(59) \quad U_n = A_n e^{ik_m \hat{S}_m} f(k_m^{-1/2} \Theta_{mn})$$

zaś

$$\hat{S}_m = \alpha x_1 + \alpha z_m$$

oraz

$$(60) \quad \Theta_{mn} = (\hat{S}_m - S_{mn})^{1/2} = [\alpha z_m + \alpha z_m \cos(\varphi_m + \varphi_{mn})]^{1/2} = (2\alpha z_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2}$$



Rozwinięcie całki Fresnela (51) oraz postać  $\theta_{mn}$  (60) pozwalają podobnie jak dla  $U_0$  znaleźć wkład  $\sim q_m^{1/2}$

$$(61) \sum_{n=1}^2 U_n \Big|_{q_m}^{1/2} = -i c \sum_{n=1}^2 A_n e^{i k_m \hat{s}_m} k_m^{1/2} (2 x q_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2}$$

Uwzględniając

$$\cos \frac{\varphi_m + \varphi_{mn}}{2} - \cos \frac{2\pi - \varphi_m + \varphi_{mn}}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_{mn}}{2} \cos \frac{\varphi_m}{2}$$

otrzymujemy

$$(62) u_1 + u_2 \Big|_{q_m}^{1/2} = -2 i c e^{i k_m \hat{s}_m} k_m^{1/2} (2 x q_m)^{1/2} \cos \frac{\varphi_m}{2} (A_1 \cos \frac{\varphi_{m1}}{2} + A_2 \cos \frac{\varphi_{m2}}{2})$$

Żądając aby wkłady (55) i (62) się kompensowały dostajemy równanie na amplitudy  $A_n$

$$(63) A_1 \cos \frac{\varphi_{m1}}{2} + A_2 \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{i 3/4 \pi} (k_m x q_{mo})^{-1/2} e^{i k_m x q_{mo}} \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} \sin \Phi_0$$

Podobnie postępujemy dla fal padających  $v_{n1}$  (24b).

Przepisujemy je w postaci

$$v_{n1} = -i(-1)^n \sqrt{\mu/\epsilon} A_n e^{i\sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} k_e \alpha x_1} e^{i k_e y q_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en})} =$$

(64)

$$= -i(-1)^n \sqrt{\mu/\epsilon} A_n e^{i k_e S_{en}} \quad n = 1, 2$$

gdzie

$$x_{3e} = \epsilon^{1/2} \epsilon_a^{-1/2}, \quad q_e = (x_2^2 + x_{3e}^2)^{1/2}$$

$$x_2 = q_e \cos \varphi_e, \quad x_{3e} = q_e \sin \varphi_e$$

$$(-1)^n i \sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_a} \alpha = \gamma \cos \varphi_{en} \quad , \quad 1 = \gamma \sin \varphi_{en} \quad .$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{\epsilon}{\mu} \frac{\mu_0}{\epsilon_a} \alpha\right)^{1/2}$$

$$S_{en} = \sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_a} \alpha x_1 + \gamma Q_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en})$$

Rozwiązanie skalarnego problemu dyfrakcji według punktu 6 -  
teraz warunek brzegowy Neumanna, ze względu na związek  $\underline{E}_t$  z  $v_n$   
- wynosi

$$(65) \quad v_n = V_n(\varphi_e) + V_n(2\pi - \varphi_e)$$

gdzie

$$(66) \quad V_n = -i(-1)^n \sqrt{\mu/\epsilon} A_n e^{ik_e \hat{S}_e f(k_e^{1/2} \theta_{en})}$$

oraz

$$\hat{S}_e = \sqrt{\epsilon/\mu} \sqrt{\mu_0/\epsilon_a} \alpha x_1 + \gamma Q_e$$

(67)

$$\begin{aligned} \theta_{en} &= (\hat{S}_e - S_{en})^{1/2} = (\gamma Q_e - \gamma Q_e \cos(\varphi_e + \varphi_{en}))^{1/2} = \\ &= (2\gamma Q_e)^{1/2} \sin \frac{\varphi_e + \varphi_{en}}{2} \end{aligned}$$

Identycznie jak poprzednio znajdujemy wkład  $\sim g_m^{1/2}$

$$(68) \quad v_1 + v_2 \Big|_{g_m^{1/2}} = -2c e^{ik_e \hat{S}_e} k_e^{1/2} (2\gamma Q_e)^{1/2} \cos \frac{\varphi_e}{2} (-A_1 \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} + A_2 \sin \frac{\varphi_{e2}}{2})$$

Wkład ten musi znikać, gdyż nie innych składowych TM. Dostaje-  
my w ten sposób drugie równanie na amplitudy



$$(69) \quad -A_1 \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} + A_2 \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} = 0.$$

Widać dlaczego dla składowej TM potrzebne były dwie pomocnicze fale padające /aby mogła nastąpić wzajemna kompensacja/ czyli w całym problemie cztery fale (24).

Rozwiązanie równań (63) i (69) ma postać

(70)

$$A_1 = \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} A, \quad A_2 = \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} A$$

$$A = 2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{3}{4}\pi} e^{ik_m x_{Q_{mo}}} k_m^{-\frac{1}{2}} (2x_{Q_{mo}})^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{\varphi_{mo}}{2} \sin \phi_0}{\cos \frac{\varphi_{m1}}{2} \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} + \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} \sin \frac{\varphi_{e1}}{2}}$$

Rząd  $(ik_m)^{-1}$

Zgodnie z (46) mamy

$$(71) \quad (\Theta_{mo} a_1 - B_0) = -(2x_{Q_{mo}})^{-\frac{3}{2}} (2x_{Q_m})^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) + \dots$$

co łącznie z

$$\sin \left( \frac{\varphi_m + \varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) - \sin \left( \frac{2\pi - \varphi_m + \varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) = 2 \sin \left( \frac{\varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) \cos \frac{\varphi_m}{2}$$

daje na podstawie (53) i (36)

(72)

$$u_0 \Big|_{\substack{S_m \\ (ik_m)^{-1}}}^{\frac{1}{2}} = cP \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} e^{ik_m \hat{x}_{mo}} (2x_{Q_{mo}})^{-\frac{3}{2}} (2x_{Q_m})^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) \cos \frac{\varphi_m}{2} (ik_m)^{-1}$$

Powtarzamy procedurę z falami pomocniczymi identycznie jak w rzędzie zerowym

$$(73) \quad u'_{ni} = A'_n e^{ik_m S_{mn}}, \quad v'_{ni} = -i(-1)^n \sqrt{\mu/\epsilon} A'_n e^{ik_m S_{en}}$$

zmieniają się tylko amplitudy  $A_n \rightarrow A'_n$  w stosunku do (56) i (64). Oczekujemy, że zależność  $A'_n$  od  $k_m$  będzie inna niż  $A_n$ ;  $A_n \sim k_m^{-1/2}$  (70) więc teraz powinno być  $A'_n \sim k_m^{-3/2}$  aby rozwiązania  $u'_n$  i  $v'_n$  dawały wkład rzędu  $(ik_m)^{-1}$ .

Fale  $u'_{ni}$  prowadzą do wkładu  $(u'_1 + u'_2) \sim g_m^{1/2}$  (62) z zastąpieniem  $A_n \rightarrow A'_n$ . Żądanie kompensacji tego wkładu z (72) daje równanie

$$(74) \quad \begin{aligned} A'_1 \cos \frac{\varphi_{m1}}{2} + A'_2 \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} = \\ = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} (k_m \alpha_{g_{mo}})^{-1/2} e^{ik_m \alpha_{g_{mo}}} \sin \left( \frac{\varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right) (ik_m)^{-1} \end{aligned}$$

Natomiast fale  $v'_{ni}$  prowadzą do wkładu (68) z zamianą  $A_n \rightarrow A'_n$ , skąd odtwarza się równanie (69) ale dla  $A'_n$ , które łącznie z (74) daje

$$(75) \quad A'_1 = \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} A', \quad A'_2 = \sin \frac{\varphi_{e1}}{2} A'$$

$$A' = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} e^{ik_m \alpha_{g_{mo}}} k_m^{-3/2} (\alpha_{g_{mo}})^{-1/2} \frac{\sin \left( \frac{\varphi_{mo}}{2} + \phi_0 \right)}{\cos \frac{\varphi_{m1}}{2} \sin \frac{\varphi_{e2}}{2} + \cos \frac{\varphi_{m2}}{2} \sin \frac{\varphi_{e1}}{2}}$$

Rząd  $(ik_m)^{-2}$

Zgodnie z (50)  $(\theta_{m0} a_2 - B_1) \sim g_m^{3/2}$  czyli jak widać z (53) rozwiązanie  $u_0$  nie zawiera wyrazów  $\sim g_m^{1/2}$  w tym rzędzie. Zatem wektorowy warunek ostrza (16) jest spełniony przez skalarnie rozwiązanie  $u_0$  i niepotrzebne są potencjały pomocnicze.

Na podstawie analogii z pracą [5] przypuszczamy, że podobnie jest w wyższych rzędach  $(ik_m)^{-n}$ .

Zatem rozwiązania otrzymane przez złożenie



$$(76) \quad U = U_0 + U_1 + U_2 + U_1' + U_2'$$

oraz

$$(77) \quad V = V_1 + V_2 + V_1' + V_2'$$

gdzie  $u_0$  dane jest przez (36-37),  $u_n$  przez (58-59) oraz  $v_n$  przez (65-66) z amplitudami  $A_n$  z (70), natomiast  $u_n'$  przez (58-59) oraz  $v_n'$  przez (65-66) z zastąpieniem  $A_n \rightarrow A_n'$  (75), spełniają warunek ostrza (16) i stanowią rozwiązanie naszego wektorowego problemu dyfrakcji.

#### 10. Wnioski

Podobnie jak w pracy [5] udało się spełnić warunek ostrza dla jednolitego, asymptotycznego rozwiązania wektorowego zagadnienia dyfrakcji. Procedurę tę można przeprowadzać w każdym rzędzie rozwinięcia  $(ik_m)^{-\nu}$  niezależnie. Tak jak w [5] występuje kompensacja wkładów  $\sim g_m^{3/2}$  w wyższych rzędach rozwinięcia dla skalarnego rozwiązania  $u_0$  tzn.

$$(78) \quad (\theta_{m0} a_\nu - B_{\nu-1}) \sim g_m^{3/2} \quad \text{dla } \nu \geq 2$$

W odróżnieniu od [5] własność (78) zachodzi dopiero od rzędu  $(ik_m)^{-2}$ . Natomiast w [5] warunek (78) był spełniony już w rzędzie  $(ik_m)^{-1}$  tzn. dla  $\nu = 1$  i potencjały pomocnicze  $u_{n1}$ ,  $v_{n1}$  były potrzebne do spełnienia warunku ostrza tylko w rzędzie zerowym  $(ik_m)^0$ . W rozwiązaniach (76-77) potrzebne są dodatkowe potencjały pomocnicze  $u_{n1}'$ ,  $v_{n1}'$  do spełnienia warunku ostrza w rzędzie  $(ik_m)^{-1}$ .

Porównanie wyników tu przedstawionych z [5] i [4] pokazuje, że kompensacja członów  $\sim g_m^{3/2}$  na poziomie skalarnym (78) jest szczególnym zjawiskiem i klasa problemów dyfrakcyjnych, dla których zachodzi jest wąska.

## Literatura

1. S. Przeździecki: Ravnomiernoje asimptetičeskoje rešenje zadači difrakcji cilindričeskich elektromagnitnyh voľn na poľupľoskesti w odnoosno-anizotropnoj sredie. VI Vsiesojuzn.Simp.Difr. i Rasprostr. voľn. Moskva, Erevan 1973. Kniga I, str.204.
2. S. Przeździecki: Uniform asymptotic solution for electromagnetic diffraction of a line source field by a half-plane in a uniaxially anisotropic medium. Proc. V Colloq. Microwave Comm., Budapest 1974, Vol.III, str.ET-283.
3. S. Przeździecki: Uniform asymptotic solution for diffraction of a dipole field by a half-plane in a uniaxially anisotropic medium. URSI Symp.Electromagn.Wave Theory, London 1974, str.69.
4. S. Przeździecki, J. Zawistowski: Uniform asymptotic solution for electromagnetic diffraction of a plane wave by a plane screen in a uniaxial medium. Proc.VII Colloq. Microwave Comm., Budapest 1982.
5. J. Zawistowski: Warunek ostrza dla jednolitego asymptotycznego rozwiązania problemu dyfrakcji pola liniowego źródła na półpłaszczyźnie w ośrodku jednoosiowym. Prace IPPT 12/1982.
6. S. Przeździecki, B. Jaskorzyńska-Dziesiaszek, J. Zawistowski: Jednolite rozwiązanie asymptotyczne dla dyfrakcji na półpłaszczyźnie w ośrodku jednoosiowym. Fala padająca promieniowana przez źródło liniowe. Praca IPPT /w druku/.
7. R.M. Lewis, J. Boersma: Uniform asymptotic theory of edge diffraction. J.Math.Phys., 10, 1969, str.2291.
8. D.S. Ahluwalia, R.M. Lewis, J. Boersma: Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen. SIAM J.Appl. Math., 16, 1968, str.783.



9. P. Wolfe: Diffraction of a scalar wave by a plane screen. *SIAM J.Appl.Math.*, 14, 1966, str.577.
10. S. Przeździecki: Diffraction by a half-plane perpendicular to the distinguished axis of a uniaxially anisotropic medium. *J.Appl.Phys.*, 37, 1966, str.2768.
11. S. Przeździecki, R.A. Hurd: A note on scalar Hertz potentials for gyrotropic media. *Appl.Phys.*, 20, 1979, str.313.
12. S. Przeździecki, W. Laprus: On the representation of electromagnetic fields in gyrotropic media in terms of scalar Hertz potentials. *J.Math.Phys.*, 23, 1982, str.1708.
13. R. Mittra, S.W. Lee: Analytical techniques in the theory of guided waves, Macmillan Comp. 1971.
14. I.S. Gradsztejn, I.W. Ryżik: Tablicy integralow sum riadov i proizviedienii. *Gos.Ind.Fiz.Mat.Lit.*, Moskwa 1962.