

- 3.4.2. — fale w ciałach termosprężystych,
lepkosprężystych, pełzających
5.4.1. — termosprężystość

A. Galka, R. Wojnar

DYNAMICZNE NAPRĘŻENIA CIEPLNE
W PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ
WYWOŁANE PRZEZ IMPULS LASEROWY

25/1993

P.269



WARSZAWA 1993

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 maja 1993 r.



56665



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 2,5 Ark.druk. 3,0
Oddano do drukarni w maju 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Podziękowanie

Profesor Józef Ignaczak sformułował temat niniejszej pracy, udzielał nam na jej temat konsultacji oraz okazywał stałe nią zainteresowanie. Również Profesor Julian Deputat i Profesor Wincenty Pajewski udzielili nam konsultacji związanych z poruszoną tematyką. Składamy Im za to gorące podziękowanie.

DYNAMICZNE NAPRĘŻENIA CIEPLNE W PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ WYWOŁANE PRZEZ IMPULS LASEROWY

Streszczenie

W pracy niniejszej rozwiązaliśmy zadanie, którym zajmowała się przeszło 30 lat temu Walentyna I. Daniłowska w publikacjach [1-3]. Stosując *dynamiczną teorię naprężeń cieplnych* podała ona metodę rozwiązania jednowymiarowego zadania rozchodzenia się zaburzeń termosprężystych w półprzestrzeni, której cały brzeg został ogrzany impulsem promieniowania prostokątnym w czasie. Skorzystaliśmy z jej sformułowania zagadnienia oraz częściowo z metody rozwiązywania. Otrzymaliśmy jednak inny wynik niż ten, który podała Daniłowska. W rozwiązaniu Daniłowskiej były pewne pomyłki oraz drobne usterki w postaci błędów drukarskich. W pracy naszej podajemy postać analityczną rozwiązania, która ma prostą interpretację fizyczną. Podajemy również rozwiązania dla adiabatycznych i izotermicznych warunków brzegowych; przeprowadzamy dyskusję otrzymanych rozwiązań. Podajemy wykresy dla wybranych parametrów ośrodka. Ponadto rozważamy przypadek impulsu promieniowania o dowolnym schodkowym kształcie czasowym.

Gdy przyczyną zjawiska termosprężystego jest prostokątny w czasie impuls promieniowania, jakością analizy rozwiązania wykazuje, że dla ustalonego przekroju półprzestrzeni temperatura i naprężenie są ciągłe na osi czasu, zaś pochodne czasowe tych pól mają punkty nieciągłości. Dla impulsu o czasie trwania t_* , skok pierwszej pochodnej czasowej pola temperatury zachodzi w chwilach $t = 0$ i $t = t_*$; pochodna czasowa pola naprężenia jest nieciągła w chwili $t = t_*$ oraz $t = t_* + x/c_1$; przy tym c_1 oznacza szybkość fali dylatacyjnej.

Spis treści

1. Wstęp
 2. Przegląd literatury
 3. Cel i układ pracy
 4. Przyjęte symbole i jednostki
 5. Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych
 - 5.1 Przestrzenno czasowy kształt źródła; prostokątny w czasie impuls laserowy
 6. Pole temperatury
 7. Pole naprężenia
 8. Pole temperatury i naprężenia w przypadkach szczególnych
 - 8.1 Przypadek $\omega = h/k = 1, k \neq 1$
 - 8.2 Przypadek $\omega = h/k \neq 1, k = 1$
 - 8.3 Przypadek $\omega = 1, k = 1$
 - 8.4 Przypadek $\omega = \beta, k \neq 1$
 - 8.5 Zadanie izotermiczne ($h_2 = 0$ czyli $\omega \rightarrow \infty$)
 - 8.6 Zadanie adiabatyczne ($h_1 = 0$ czyli $\omega = 0$)
 9. Badanie ciągłości i gładkości rozwiązania
 10. Formuły obliczeniowe
 11. Wyniki obliczeń
 - 11.1 Granica wartości maksymalnych naprężenia przy $t \rightarrow \infty$
 12. Dowolny kształt impulsu laserowego
 - 12.1 Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych – przypadek dowolnego czasowego profilu źródła ciepła
 - 12.2 Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych w przestrzeni Laplace'a
 - 12.3 Rozwiązanie problemu w przestrzeni Laplace'a
 13. Pole temperatury i naprężenia dla dowolnego czasowego kształtu impulsu laserowego
 14. Schodkowy w czasie rozkład natężenia promieniowania laserowego
 15. Szczególne przypadki rozwiązania przy ogólnej zależności czasowej impulsu laserowego
 - 15.1 Przypadek izotermiczny
 - 15.2 Przypadek adiabatyczny
 - 15.3 Porównanie obu przypadków
- Zakończenie
Literatura

1. Wstęp

Działanie światła, ogólniej promieniowania elektromagnetycznego na ciało stałe prowadzi do różnorodnych zjawisk, które są przedmiotem badań optyki i fizyki ciała stałego. Bardzo ważne jest znaczenie tych badań dla różnych zastosowań technicznych, np. w układach sensorycznych, przy opracowywaniu nowych materiałów i przy kształtowaniu elementów konstrukcji *por.* [4-8].

Poniżej będziemy się zajmowali szczególnym przypadkiem charakterystyki wymienionych zjawisk, a mianowicie zagadnieniem reakcji półprzestrzeni sprężystej na impuls świetlny. Zagadnienie to badała Daniłowska w pracach [1 - 3]. Stanowi ono wystarczającą dla wielu zastosowań idealizację przebiegów cieplnych i mechanicznych w ośrodku ciągłym poddanym napromienianiu. W zagadnieniu tym zakłada się, że promieniowanie padające na półprzestrzeń ma rozkład jednorodny, a w opisie zamiany energii promieniowania na energię cieplną pomija się takie cechy emisji laserowej jak spójność i polaryzacja. Pozwala to traktować zadanie jako jednowymiarowe. Przyjmuje się ponadto założenia liniowej niesprężonej dynamicznej teorii termosprężystości, przedstawionej np. w rozdziale XII podręcznika Nowackiego [9]. Z dwu makroskopowych modeli oddziaływania światła z ciałem stałym, *powierzchniowego modelu pochłaniania* i *przestrzennego modelu pochłaniania*, przyjmujemy ten drugi zgodnie z cytowanymi pracami Daniłowskiej.

Przestrzenny model pochłaniania stosowany był także w szeregu innych, klasycznych już prac, *por.* Ready [4]. Model ten zakłada, że skutek termiczny działania impulsu laserowego na ośrodek jest równoważny działaniu przestrzennego źródła ciepła w tym ośrodku. Przestrzenny kształt takiego źródła dany jest przez prawo pochłaniania, zaś przebieg czasowy dany jest przez zależność impulsu promieniowania od czasu. Przyjmuje się więc w uproszczeniu, że 1° - impuls świetlny rozchodzi się w ośrodku natychmiast oraz 2° - energia świetlna przemienia się natychmiast w energię cieplną.

Aby uzasadnić, że założenie 1 jest wystarczająco dokładne dla naszych rozważań rozpatrzmy harmoniczną falę termiczną o częstotliwości ω i wektorze falowym k , a więc typu $\vartheta \sim \exp [i(\omega t - kx)]$ biegnącą w kierunku x w czasie t , zgodnie z równaniem przewodnictwa ciepła

$$(1.1) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0$$

gdzie $a = K/C_E$ jest dyfuzyjnością cieplną; przy tym K oznacza przewodnictwo cieplne, zaś C_E - ciepło właściwe (na jednostkę objętości). Po wstawieniu rozpatrywanego wyrażenia na ϑ do (1.1) znajdujemy

$$(1.2) \quad k^2 = - \frac{i \omega}{a}$$

skąd wynika, że k jest liczbą zespoloną

$$k = k_R + ik_I$$

przy czym

$$(1.3) \quad k_R^2 = k_I^2, \quad 2k_R k_I = -\frac{\omega}{a}$$

Z rozwiązania ostatniego układu dostajemy związek dyspersyjny

$$(1.4) \quad k_R = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

Kierując się zasadą zachowania energii przy wyciąganiu pierwiastka w (1.3), wybraliśmy znak *minus*

$$(1.5) \quad k_I = -k_R$$

znaczący zanikanie fali termicznej w miarę jej biegnięcia. Temperatura winna być opisana funkcją rzeczywistą, więc

$$(1.6) \quad \vartheta \sim e^{-k_R x} \sin(\omega t - k_R x)$$

Stąd prędkość fali termicznej wynosi, *por.* np. Werle [10]

$$(1.7) \quad c_T = \frac{\omega}{k_R} = \sqrt{2a\omega}$$

Widać, że zarówno współczynnik tłumienia fali termicznej dany przez k_R jak i jej prędkość rosną wraz z częstotliwością ω . Zgodnie z (1.6) amplituda sinusoidalnej fali termicznej zanika jak $\exp(-k_R x)$. Jej spadek do wartości rzędu $1/e$, po przebyciu drogi rzędu odległości międzywęzłowej ($d \approx 10^{-8}$ cm) wymaga spełnienia warunku

$$(1.8) \quad \sqrt{\frac{\omega}{2a}} d = 1$$

skąd

$$(1.9) \quad \omega = \frac{2a}{d^2}$$

Dla typowej dla metali wartości $a \approx 1 \text{ cm}^2/\text{s}$, (*por.* tabela 1) dostajemy

$$(1.10) \quad \omega \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

Odpowiadająca tej częstotliwości prędkość fali wynosi

$$(1.11) \quad c_T = \frac{2a}{d}$$

lub liczbowo

$$(1.12) \quad c_T \approx 2 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$$

co jest naogół wartością dwa rzędy wielkości mniejszą od prędkości grupowej światła w ośrodku, *por.* np. [11, 12]

$$(1.13) \quad v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}_{ph}$$

gdzie $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s jest prędkością światła w próżni, ω_{ph} jego częstością, zaś n współczynnikiem załamania. Dlatego prędkość impulsu laserowego w ośrodku można uważać za nieskończoną.

Tabela 1. Własności cieplne niektórych substancji

substancja	gęstość ρ g/cm ³	ciepło właściwe C_w cal/(gK)	przewodnictwo cieplne K cal/(s cm K)	$C_E = \rho C_w$ cal/(cm ³ K)	$a = K/C_E$ cm ² /s
glin	2,7	0,214	0,50	0,58	0,86
miedź	8,9	0,092	0,90	0,82	1,10
szkło	2,5	0,16	0,0025	0,40	0,006
złoto	19,3	0,031	0,70	0,60	1,2

Dodajmy, że wartość (1.10) jest znacznie zawyżona. Najwyższe częstości fal ultradźwiękowych (szacowane z warunku: długość fali = odległości międzywęzłowej)

$$\omega = \frac{c_1}{\lambda} = \frac{c_1}{d}$$

nie przekraczają 10^{13} Hz ($c_1 \approx 10^5$ cm/s, $d \approx 10^{-8}$ cm). Dla tych częstości prędkość c_T jest odpowiednio mniejsza

$$c_T \leq \sqrt{2 \cdot 10^{13}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a założenie 1 jest tym bardziej słuszne.

Co do założenia 2, oznacza ono, że zaniedbujemy czas potrzebny na wymianę energii świetlnej na cieplną, tzn. czas potrzebny na ustalenie się w ośrodku lokalnej równowagi termicznej. Potrzeba przynajmniej kilku zderzeń między elektronami i/lub fononami, na to by wokół danego punktu ośrodka wytworzył się taki stan i by do opisu otoczenia tego punktu można było korzystać z pojęcia temperatury. Czas między zderzeniami elektronów wynosi średnio 10^{-14} s, czas trwania najkrótszych impulsów laserowych jest 100 razy dłuższy, co stanowi uzasadnienie założenia 2.

Oba założenia pozwalają sprowadzić zagadnienie oddziaływania światła z ciałem stałym do zagadnienia termosprężystości z zadaniem źródłem ciepła.

Dalsze uproszczenie wynika z zastosowania teorii liniowej izotropowego i jednorodnego ośrodka, w której własności termiczne i sprężyste ośrodka pochłaniającego promieniowanie nie zależą od temperatury. Dzięki temu można doprowadzić rozwiązanie analityczne do postaci zamkniętej oraz przeprowadzić jakościowe i ilościowe zbadanie zjawiska.

2. Przegląd literatury

Wiele zjawisk przyrodniczych obserwowanych na Ziemi, w których zachodzi ruch mechaniczny, w tym także ruch falowy ma za swoją pierwotną przyczynę okresowe lub nieokresowe zmiany oświetlenia powierzchni naszej planety przez Słońce. Na związek przyczynowy między światłem a ruchem wskazuje starożytny mit o posągu Memnona w Egipcie. Posąg ten, każdego ranka, gdy padły nań tylko pierwsze promienie słoneczne wydawał miał dźwięk podobny do dźwięku szarpniętej struny, [13].

Systematyczne badania nad zamianą energii fal elektromagnetycznych, w szczególności świetlnych na energię fal mechanicznych sięgają lat osiemdziesiątych zeszłego stulecia. Wtedy m.in. Bell [14-16], a także Mercadier [17,18] zwrócili uwagę na fakt, że płytka wykonana praktycznie z dowolnego materiału ogrzana modulowanym źródłem światła wydaje słyszalny sygnał o częstości modulacji. Drgania płyty mają charakter kwazistatyczny, tzn. przy ich opisie człon inercjalny jest zaniedbywalny. Wspominamy o tych doświadczeniach dlatego, że ujawnia się w nich efekt termosprężysty. Współczesną teorię zjawiska, uwzględniającą wpływ nagrzewania warstwy powietrza nad płytką na efekt akustyczny podali Rosencwaig i Gersho w [19].

Podstawy teoretyczne do badań nad wywoływaniem fal mechanicznych przez elektromagnetyczne zostały podane dopiero w połowie naszego stulecia. Zawarte są one we wspomnianych już pracach Daniłowskiej [1-3], (praca [1] wyprzedza o 10 lat budowę pierwszego lasera), w pracy Ignaczaka [20] z 1957 r. (cytowanej w wielu publikacjach) oraz w nieco późniejszej pracy, której autorami byli Sternberg i Chakravorty, [21].

Daniłowska [1-3] ograniczając się do jednowymiarowych zadań termosprężystości wskazała na dynamiczny charakter odpowiedzi ośrodka na działanie impulsu świetlnego, tzn. na znaczenie członu inercjalnego w równaniu ruchu na przebieg zjawiska. W pracy [3] rozpatrzyła ona obciążenie cieplne półprzestrzeni prostokątnym w czasie impulsem świetlnym, który zanika zgodnie z wykładniczym prawem pochłaniania (*przestrzenny model pochłaniania*).

Ignaczak [20], uwzględniając człon bezwładnościowy podał wyrażenie na pole przemieszczenia i temperatury w półprzestrzeni sprężystej poddanej nagłemu ogrzaniu w jednym punkcie powierzchni swobodnej. Jest to więc przypadek, gdy silnie pochłaniane promienie świetlne nie wnikają w głąb ośrodka (*powierzchniowy model pochłaniania*).

Podobne zadanie, różniące się jedynie warunkami brzegowymi rozwiązały Sternberg i Chakravorty [21].

Publikacja Ignaczaka [20], miała duże znaczenie dla interpretacji wyników doświadczeń nad wytwarzaniem fal mechanicznych z pomocą impulsów świetlnych dużej mocy. O pierwszej obserwacji takiej fali doniósł w r. 1961 Michaels, w związku z badaniami prowadzonymi nad tzw. "kill-effectiveness" ekspozycji jądrowych, [22]. Fala naprężeniowa została wywołana przez impuls świetlny w pręcie metalowym. Źródłem światła było wyładowanie iskrowe pod wodą.

Przełomowe znaczenie dla rozwoju doświadczeń nad przetwarzaniem fal elektromagnetycznych w mechaniczne miała budowa laserowych źródeł światła. Pierwszy wykorzystał je do generacji fal sprężystych w ciele stałym White, [23,24], następnie Ready, [25] i Bechtel, [26], zaś rozwój badań nad tym zagadnieniem przypada na ostatnią dekadę, poczynając od pracy którą ogłosił Aindow ze współpracownikami, [27] w r.1981.

Specjalny kierunek tych badań stanowi wykorzystanie światła laserowego do wytwarzania fal powierzchniowych; tym zagadnieniem zajmowali się między innymi: Ash, Dieulesaint, Rakouth, Royer, White, Nakagawa, Kawanago, Jia, Shui, Faran, Dwayne Miller, Gracewski, Jarosz, Nakano i Nagai, [28-35]. Opracowania monograficzne interesującej nas dziedziny podali Sachse i Hsu oraz Hutchins, *por.* odpowiednio [36] oraz [37].

Równolegle do badań doświadczalnych kontynuowane były prace teoretyczne zmierzające do dokładniejszego opisu samego zjawiska przetwarzania energii. W ramach termodynamiki fenomenologicznej pracę na ten temat wykonał Tsui, [38]. Porównał on wpływ mechanicznego warunku brzegowego na rozwiązanie zadań typu Daniłowskiej i Sternberga. W skrajnych przypadkach wpływ ten jest istotny. Gournay, [39], zbadał przybliżone rozwiązanie zadania Daniłowskiej, słuszne w dużej odległości od ograniczonego obszaru. Nowacki i Raniecki, [40,41], podali rozwiązanie jednowymiarowego zagadnienia półprzestrzeni dla dowolnego warunku brzegowego narzuconego na pole temperatury, przy założeniu, że pole to opisane jest przez jednorodne różniczkowe równanie przewodnictwa ciepła. Rozwiązanie odnosi się więc do zadań, w których stosuje się powierzchniowy model pochłaniania (czyli gdy w półprzestrzeni nie występują źródła ciepła).

Dalsze badania teoretyczne zmierzały do budowy bardziej realistycznego modelu zagadnienia. Daniłowska i Shefter, [42], a potem Germanovich, Kill i Tsodokowa, [43,44] zastąpili jednorodną w przestrzeni wiązkę światła przez wiązkę o symetrii osiowej. Lee i Julien, [45], rozwiązali zadanie jednowymiarowe dla warstwy obciążanej termicznie przez promieniowanie okresowo zmienne. Timan i Fesenko, [46], wyznaczyli rozkład naprężeń w płycie tarczowej obciążonej rozkładem źródeł ciepła o symetrii osiowej.

W ostatnim dziesięcioleciu pojawiły się prace nad oddziaływaniem ośrodka materialnego z wiązką laserową, które wychodzą poza ramy termodynamiki klasycznej. Badania odpowiedzi półprzestrzeni na działanie takiej wiązki w ramach termosprężystości ze skończonymi prędkościami falowymi prowadzili Strikwerda i Scott, [47], Boyko, [48] oraz Ignaczak i Mrówka-Matejewska, [49].

Termosprężystość jest teorią makroskopową. Na ograniczenia jej zastosowań wynikające z ziarnistej struktury ośrodka wskazał Yilbas, [50]. Poza tę teorię wyszli Dharamsi i Hassam, [51]. Zwrócili oni uwagę na to, że przy wytwarzaniu najkrótszych impulsów akustycznych o czasie trwania nie większym od pikosekundy istotną rolę odgrywa zjawisko nietermiczne – fotostrykcja. Analiza mikroskopowa zjawisk w plazmie nad napromieniowaną powierzchnią metalową przeprowadzona jest w pracy [52].

3. Cel i układ pracy

Celem niniejszej pracy jest weryfikacja rozwiązania Daniłowskiej o termosprężystej reakcji półprzestrzeni na impuls promieniowania podanego w artykule [3], analiza jakościowa i ilościowa tego rozwiązania oraz jego rozszerzenie na przypadek dowolnej zależności impulsu promieniowania od czasu.

Termin *laser* używany jest w naszej pracy jako synonim określenia "źródło impulsów dużej mocy", ponieważ obecnie typowymi źródłami silnych impulsów są właśnie lasery. Piszemy o tym ponieważ takie podstawowe własności emisji laserowej jak spójność i polaryzacja promieniowania nie są brane przez nas pod uwagę.

Jak wspomniano we Wstępie, oddziaływanie samego promieniowania z ośrodkiem zajmującym półprzestrzeń opisane jest przez *wykładnicze prawo pochłaniania*, w którym jako stała materiałowa występuje współczynnik pochłaniania \bar{k} . Współczynnik ten jest w naszym zadaniu wielkością stałą; w ogólności zależy on jednak od różnych parametrów, między innymi od długości fali promieniowania.

Przyjmujemy *przestrzenny model pochłaniania*. Jak wiadomo, model ten zakłada, że skutek działania impulsu laserowego na ośrodek termosprężysty może być zastąpiony przez działanie źródła ciepła na ten ośrodek. Przestrzenny rozkład źródła dany jest przez prawo pochłaniania, zaś zależność rozkładu od czasu dana jest przez zależność impulsu świetlnego od czasu. W wyniku przyjętego założenia, oddziaływanie promieniowania z ciałem stałym może być badane z pomocą pojęć klasycznej termosprężystości.

Rozwiązanie w formie analitycznej podajemy w stosowanych w termosprężystości, charakterystycznych dla rozważanego ośrodka jednostkach Chadwicka-Sneddona, [53], zaś wykresy przebiegów sporządzamy w jednostkach Daniłowskiej, [3].

Szczegółowym zadaniem rozwiązywanym w niniejszej pracy jest wyznaczenie pola temperatury i naprężenia przy obciążeniu półprzestrzeni prostokątnym impulsem promieniowania, o początku w chwili $t = 0$ i czasie trwania t_0 , tj. o natężeniu danym przez funkcję

$$(3.1) \quad I = I(t) = I_0 [H(t) - H(t - t_0)]$$

gdzie I_0 jest stałą, zaś $H(t)$ jest skokową funkcją Heavyside'a

$$(3.2) \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Pokazujemy, że przy założeniu (3.1) dla ustalonego przekroju półprzestrzeni $x > 0$ zarówno pole temperatury jak i naprężenia jest ciągłą funkcją czasu; ponadto pokazujemy, że w tym przypadku pierwsza pochodna czasowa pola temperatury jest

nieciągła w chwilach: $t = 0$ i $t = t_*$. W chwili $t = t_*$ nieciągła jest również pochodna czasowa pola naprężenia. Ta ostatnia pochodna nieciągła jest także w chwili $t = t_* + x/c_1$. Przy tym x jest odległością od brzegu półprzestrzeni punktu, w którym rozważamy przebieg falowy, zaś c_1 jest szybkością dylatacyjnej fali sprężystej.

Chwila $t = t_* + x/c_1$ (lub w jednostkach Daniłowskiej $\tau = \tau_* + \xi/\beta$, gdzie $\beta = 1/\bar{k}$) jest zarazem tą chwilą czasu, w której (dla danego ośrodka) naprężenie osiąga swą wartość maksymalną. Ilościową analizę rozwiązania przeprowadzamy na drodze numerycznej i podajemy w postaci tablic i wykresów. W formułach rozwiązania grupujemy niektóre czony celem usunięcia pozornych osobliwości (typu nieskończoność minus nieskończoność) pojawiających się dla dużych czasów. Podstawową funkcją służącą do analizy rozwiązania jest funkcja

$$(3.3) \quad g(u) = e^{u^2} \operatorname{erfc} u \quad \text{dla } u > 0$$

Badamy szczególnie przypadki parametrów, dla których rozwiązanie podstawowe staje się osobliwe: $\omega = 1$ i $\omega = \beta$; przy tym $\omega = \bar{h}/\bar{k}$, $\bar{h} = \bar{h}_1/\bar{h}_2$, zaś \bar{h}_1 i \bar{h}_2 są to współczynniki charakterystyczne dla przyjętego cieplnego warunku brzegowego.

Pozostała część pracy jest poświęcona analizie pola temperatury i naprężenia wywołanych w półprzestrzeni impulsem promieniowania o dowolnej zależności od czasu. Dla podajemy ogólne rozwiązanie analityczne jednowymiarowych równań *dynamicznej teorii naprężeń cieplnych* oraz przeprowadzamy dyskusję tego rozwiązania dla izotermicznego i adiabatycznego warunku brzegowego.

4. Przyjęte symbole i jednostki

Poprzez symbole z kreskami u góry \bar{x} , \bar{t} oraz \bar{u} , \bar{S} i $\bar{\vartheta}$ oznaczamy odpowiednio położenie, czas oraz przemieszczenie, naprężenie i temperaturę względną wtedy, gdy pomiaru tych wielkości dokonujemy w metrycznym układzie jednostek. Podobnie w kreski u góry zaopatrzone są symbole natężenia światła \bar{I}_0 oraz współczynnika pochłaniania światła \bar{k} mierzone w tymże metrycznym układzie jednostek. Wyjątek stanowi tylko t_{zw} temperatura stanu naturalnego ośrodka T_0 , którą zapisujemy w układzie metrycznym bez górnej kreski.

Poprzez symbole bez kreski u góry, a więc przez x , t oraz u , S i ϑ jak również przez I_0 i k oznaczamy odpowiednie wielkości fizyczne w układzie jednostek Chadwicka-Sneddona, który zaraz wprowadzimy.

Wartości stałych materiałowych, za wyjątkiem wspomnianego już współczynnika pochłaniania \bar{k} zapisujemy w metrycznym układzie jednostek przez symbole bez kreski. A więc mamy: gęstość ośrodka ρ , moduły sprężystości Lamégo L i M , współczynnik

przewodnictwa ciepła K , liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej α_I oraz ciepło właściwe C_E (na jednostkę objętości) przy stałej objętości.

Wprowadzamy teraz jednostki długości i czasu charakterystyczne dla danego materiału. W układzie Chadwicka-Sneddona są one następujące, *por.* np. [53]

$$(4.1) \quad \overset{\vee}{x}_{CS} = \frac{a}{c_1}$$

$$(4.2) \quad \overset{\vee}{t}_{CS} = \frac{\overset{\vee}{x}_{CS}}{c_1} = \frac{a}{c_1^2}$$

gdzie

$$(4.3) \quad a = \frac{K}{C_E}$$

jest dyfuzyjnością cieplną, zaś

$$(4.4) \quad c_1 = \sqrt{\frac{L + 2M}{\rho}}$$

jest prędkością dylatacyjnej fali sprężystej w danym ośrodku.

Pozostałe jednostki to:

jednostka temperatury

$$(4.5) \quad \overset{\vee}{\vartheta}_{CS} = T_0$$

jednostka źródła ciepła

$$(4.6) \quad \overset{\vee}{r}_{CS} = (c_1 C_E)^2 \frac{T_0}{K} = C_E T_0 \frac{1}{\overset{\vee}{t}_{CS}}$$

jednostka ciśnienia

$$(4.7) \quad \overset{\vee}{s}_{CS} = \gamma T_0$$

gdzie

$$(4.8) \quad \gamma = (3L + 2M) \alpha_I$$

Jednostka temperatury (4.5) wprowadzona jest dosyć sztucznie, gdyż w równaniach dynamicznej teorii naprężeń cieplnych nie występuje temperatura stanu naturalnego T_0 .

Jednak do takiego samego układu równań termosprężystości (nie zawierającego współczynników materiałowych) co z wykorzystaniem jednostek (4.1 – 4.2) i (4.5 – 4.7) można dojść wykorzystując inny układ jednostek, w którym zatrzymujemy definicje (4.1 – 4.2) jednostek długości i czasu, zmieniamy zaś definicje pozostałych jednostek; teraz jednostka temperatury

$$(4.9) \quad \overset{\vee}{\vartheta}_G = \frac{\rho}{\gamma} c_1^2$$

jednostka źródła ciepła

$$(4.10) \quad \bar{\gamma}_G = \frac{\rho}{\gamma} \frac{C_E^2}{K} c_1^4$$

jednostka ciśnienia

$$(4.11) \quad \bar{\gamma}_G = \rho c_1^2$$

Daniłowska w pracy [3] zaproponowała jeszcze inny układ jednostek, w którym istotną rolę odgrywa współczynnik pochłaniania światła \bar{k} . Jednostką długości jest teraz

$$(4.12) \quad \bar{\chi}_D = \frac{1}{\bar{k}}$$

zaś jednostką czasu

$$(4.13) \quad \bar{t}_D = \frac{1}{a \bar{k}^2}$$

Jednostki Daniłowskiej wykorzystamy przy wykonywaniu wykresów rozwiązań.

W poniższej tabelce są podane różne jednostki długości i czasu charakterystyczne dla niektórych substancji.

Tabela 2. Jednostki charakterystyczne dla niektórych substancji

substancja	$a=K/C_E$ cm ² /s	c_1 10 ⁵ cm/s	$\bar{\chi}_{CS}$ 10 ⁻⁶ cm	\bar{t}_{CS} 10 ⁻¹² s	\bar{k} 1/cm	$\bar{\chi}_D$ cm	\bar{t}_D s
glin	0,86	5,1	1,7	3,3	$\approx 10^6$	$\approx 10^{-6}$	$\approx 1,2 \cdot 10^{-12}$
miedź	1,10	3,5	3,1	9,0	$\approx 10^6$	$\approx 10^{-6}$	$\approx 0,9 \cdot 10^{-12}$
szkło	0,006	5,5	0,01	0,02	$0,2 + 1,5$	$0,67 + 5$	$0,07 + 4,2 \cdot 10^3$
złoto	1,2	2,0	6,0	30,0	$8 \cdot 10^4$	$12,5 \cdot 10^{-6}$	$130 \cdot 10^{-12}$

5. Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych

Równania pola naszego problemu są, *por.* [9],

$$(5.1) \quad C_E \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} - K \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}_1^2} = \bar{r}$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial^2 \bar{S}_{11}}{\partial \bar{t}^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 \bar{S}_{11}}{\partial \bar{x}_1^2} = -\gamma \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial \bar{t}^2}$$

W równaniu (5.1) \bar{r} oznacza rozkład źródła ciepła wytworzonego przez impuls laserowy.

Odpowiednie warunki początkowe są

$$(5.3) \quad \bar{\vartheta}(\bar{x}_1, 0) = 0 \quad \text{dla } \bar{x}_1 > 0$$

$$(5.4) \quad \bar{S}_{11}(\bar{x}_1, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{S}_{11}}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{t}=0} = 0 \quad \text{dla } \bar{x}_1 > 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(5.5)_1 \quad \bar{h}_1 \bar{\vartheta} - \bar{h}_2 \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \bar{x}_1} = 0 \quad \text{gdzie } \bar{h} = \bar{h}_1/\bar{h}_2 > 0 \quad \text{oraz } \bar{x}_1 = 0, \bar{t} > 0$$

$$(5.5)_2 \quad \bar{\vartheta}(\bar{x}_1, \bar{t}) \rightarrow 0 \quad \text{dla } \bar{x}_1 \rightarrow \infty, \quad \bar{t} > 0$$

$$(5.6)_1 \quad \bar{S}_{11}(\bar{x}_1, \bar{t}) = 0 \quad \text{dla } \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{t} > 0$$

$$(5.6)_2 \quad \bar{S}_{11}(\bar{x}_1, \bar{t}) \rightarrow 0 \quad \text{dla } \bar{x}_1 \rightarrow \infty, \quad \bar{t} > 0$$

Dokonyjemy teraz podstawienia

$$(5.7) \quad \bar{x} = x \check{X}_{CS}, \quad \bar{t} = t \check{t}_{CS}$$

$$(5.8) \quad \bar{\vartheta} = \vartheta \check{\vartheta}_{CS}, \quad \bar{S}_{11} = S \check{S}_{CS}$$

$$(5.9) \quad \bar{r} = r \check{r}_{CS}$$

$$(5.10) \quad \bar{h}_1 = h_1, \quad \bar{h}_2 = h_2 \check{X}_{CS}$$

W rezultacie dostajemy następujące równania pola

$$(5.11) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = r$$

$$(5.12) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$$

do których dołączamy warunki początkowe

$$(5.13) \quad \vartheta(x, 0) = 0 \quad \text{dla } x > 0$$

$$(5.14) \quad S(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{dla } x > 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(5.15)_1 \quad h_1 \vartheta - h_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \text{gdzie } h = h_1/h_2 > 0 \quad \text{dla } x = 0, t > 0$$

$$(5.15)_2 \quad \vartheta(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \quad t > 0$$

$$(5.16)_1 \quad S(x, t) = 0 \quad \text{dla } x = 0, \quad t > 0$$

$$(5.16)_2 \quad S(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \quad t > 0$$

5.1 Przestrzenno-czasowy kształt źródła ciepła dla prostokątnego w czasie impulsu laserowego

Jak powiedziano we wstępie kształt impulsu laserowego wyznacza przestrzenno-czasowy rozkład źródła ciepła. Rozkład ten, zgodnie z [3] jest następujący

$$\bar{r} = \bar{I}(\bar{t}) e^{-\bar{k} \bar{x}}$$

gdzie

$$\bar{I}(\bar{t}) = \begin{cases} \bar{I}_0 & \text{dla } \bar{t}_* > \bar{t} > 0 \\ 0 & \text{dla } \bar{t} > \bar{t}_* \end{cases}$$

W chwili $\bar{t} = 0$ [sek] zostaje włączony impuls świetlny i trwa do chwili \bar{t}_* [sek].

Dokonując zamiany zmiennych (5.7) i (5.9) dostajemy

$$r = \frac{\bar{r}}{\bar{Y}_{CS}} = \frac{1}{\bar{Y}_{CS}} \bar{I}(\bar{t}) e^{-\bar{k} \bar{x}}$$

Ponadto definiujemy

$$t_* = \frac{\bar{t}_*}{v_{t_{CS}}}$$

oraz

$$I(t) = \frac{1}{Y_{CS}} \bar{I}(t v_{t_{CS}}) = \begin{cases} \frac{1}{Y_{CS}} \bar{I}_0 & \text{dla } t_* Y_{CS} > t Y_{CS} > 0 \\ 0 & \text{dla } t Y_{CS} > t_* Y_{CS} \end{cases}$$

Po oznaczeniu

$$I_0 = \frac{1}{Y_{CS}} \bar{I}_0, \quad k = \bar{k} Y_{CS}$$

mamy

$$(5.17)_1 \quad r = I(t) e^{-k x}$$

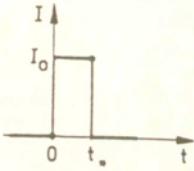
gdzie

$$(5.17)_2 \quad I(t) = \begin{cases} I_0 & \text{dla } t_* > t > 0 \\ 0 & \text{dla } t > t_* \end{cases}$$

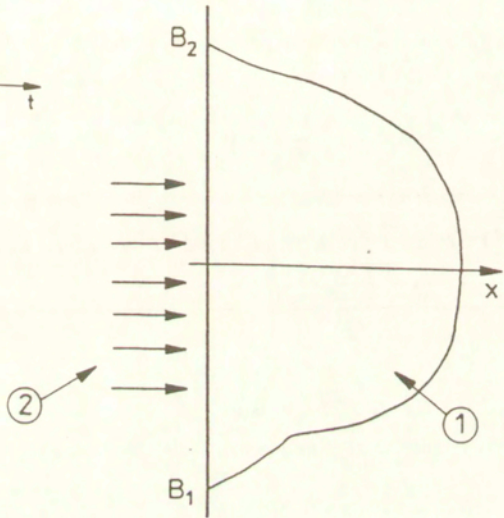
por. rys. 1.

Jeżeli stosujemy laser wysyłający impulsy pikosekundowe *tn.* $\bar{t}_* \sim 10^{-12}$ sek, zaś półprzestrzeń termosprężysta wykonana jest z metalu, wtedy (ponieważ dla metali Y_{CS} jest rzędu 10^{-12} sek - por. tabela 2), zatem $t_* \sim 1$; wartość $t_* = 1$ zostanie przyjęta dla obliczeń w rozdziale 11.

a)



b)



Rys. 1. Naświetlenie półprzestrzeni impulsem laserowym;

a) zależność impulsu laserowego od czasu

b) schemat rozważanego układu : ① półprzestrzeń sprężysta

i ② promieniowanie

6. Pole temperatury

Rozwiązanie równania pola temperatury, por. (5.11) i (5.17)

$$(6.1) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = I(t) e^{-k x}$$

gdzie $I(t)$ jest dane przez (5.17)₂, przy warunkach początkowo-brzegowych (5.13) i (5.15) znajdujemy metodą przekształceń Laplace'a. Przekształcone równanie pola jest

$$(6.2) \quad s\tilde{\vartheta} - \vartheta(0) - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_0}) e^{-k x}$$

gdzie $\vartheta(0)$ jest warunkiem początkowym danym przez (5.13). Przekształcony warunek brzegowy (5.15) ma postać

$$(6.3)_1 \quad h_1 \tilde{\vartheta} - h_2 \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

$$(6.3)_2 \quad \tilde{\vartheta}(x) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$s\tilde{\vartheta} - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = 0$$

jest

$$\tilde{\vartheta}_j = A e^{-\sqrt{s} x} + B e^{+\sqrt{s} x}$$

zaś rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$s\tilde{\vartheta} - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = a_0 e^{-k x} \quad \text{gdzie } a_0 = I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_0})$$

jest

$$\tilde{\vartheta}_N = a_0 \frac{e^{-kx}}{s - k^2}$$

Stąd rozwiązaniem równania (6.2) jest

$$\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}_j + \tilde{\vartheta}_N$$

to znaczy

$$\tilde{\vartheta} = A e^{-\sqrt{s} x} + B e^{+\sqrt{s} x} + I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_0}) \frac{e^{-kx}}{s - k^2}$$

Z warunku brzegowego (6.3)₁ stała $B = 0$ zaś z warunku brzegowego (6.3)₂

$$A = -I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_0}) \frac{1}{s - k^2} \frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{s}}$$

atem rozwiązaniem r-nia (6.2) przy warunkach (6.3) jest następujące

$$(6.4) \quad \tilde{\vartheta} = I_0 \frac{1 - e^{-st}}{s(s-k)^2} \left(e^{-kx} - \frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x} \right)$$

Załóżmy narazie, że $h_2 \neq 0$. Pamiętając, *por.* (5.15)₁, że

$$(6.5) \quad h = h_1/h_2$$

i oznaczając przez

$$(6.6) \quad \omega = h/k$$

mamy

$$\frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{s}} = k \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{s}}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(6.7) \quad \tilde{W}(x,s;c) = \frac{k^2 s}{(s^2 - c^2 k^2)(s - k^2)} e^{-kx} - \\ - \frac{k^3}{(s - c^2)(s - k^2)} \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x}$$

gdzie c jest stałą rzeczywistą. W szczególnym przypadku, dla $c = 0$ mamy

$$(6.8) \quad \tilde{W}(x,s;0) = \frac{k^2}{s(s - k^2)} \left(e^{-kx} - k \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x} \right)$$

Korzystając z powyższych oznaczeń nadajemy naszemu rozwiązaniu postać

$$(6.9) \quad \tilde{\vartheta}(x,s) = \alpha (1 - e^{-st}) \tilde{W}(x,s;0)$$

gdzie

$$(6.10) \quad \alpha = I_0/k^2$$

Retransformatą funkcji (6.8) jest, *por.* Dodatek A,

$$(6.11)_1 \quad W(x,t;0) = -\frac{1}{2} [E(x,t;-k) + \frac{\omega + 1}{\omega - 1} E(x,t;+k)] + \\ + \frac{\omega + 1}{\omega} E(x,t;0) + \frac{1}{\omega(\omega - 1)} E(x,t;h) + (e^{k^2 t} - 1) e^{-kx}$$

gdzie

$$(6.11)_2 \quad E(x,t;c) = \begin{cases} e^{c^2 t + cx} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + c\sqrt{t} \right) & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

przy tym

$$(6.11)_3 \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du$$

Zatem retransformatą wyrażenia (6.7) jest

$$(6.12) \quad \vartheta(x,t) = \alpha [W(x,t;0) - W(x,t-t_*;0)]$$

Jest to poszukiwane pole temperatury dla $h_2 \neq 0$.

6.1 Przypadki graniczne pola temperatury

6.1.1 Zadanie izotermiczne ($h_2 = 0$ czyli $\omega \rightarrow \infty$)

Przypuśćmy, że $h_2 = 0$. Wtedy zgodnie z (5.15)₁ na brzegu $x = 0$

$$(6.13) \quad \vartheta(0,t) = 0$$

a więc, zgodnie z (6.3)₁

$$(6.14) \quad \tilde{\vartheta}(0,s) = 0$$

Transformata rozwiązania naszego zadania jest wtedy

$$(6.15) \quad \tilde{\vartheta} = I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_*}) \frac{1}{(s - k^2)} (e^{-k x} - e^{-x\sqrt{s}})$$

Dokonując retransformacji znajdujemy

$$(6.16) \quad \vartheta(x,t) = \alpha [W_1(x,t;0) - W_1(x,t-t_*;0)]$$

gdzie

$$(6.17) \quad W_1(x,t;0) = -\frac{1}{2} [E(x,t;k) + E(x,t;-k)] + \\ + E(x,t;0) + (e^{k^2 t} - 1) e^{-k x}$$

Do tego samego wyrażenia dojdziemy bezpośrednio z wyrażenia ogólnego (6.12) przechodząc do granicy $\omega \rightarrow \infty$.

6.1.2 Zadanie adiabaticzne ($h_1 = 0$ czyli $\omega = 0$)

W zadaniu tym na brzegu $x = 0$

$$(6.18) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

więc również

$$(6.19) \quad \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} = 0$$

Transformata rozwiązana naszego zadania jest wtedy

$$(6.20) \quad \tilde{\vartheta} = I_0 \frac{1 - e^{-st}}{s(s-k)^2} \left(e^{-kx} - \frac{k}{\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x} \right)$$

Jej retransformata jest

$$(6.21) \quad \vartheta(x,t) = \alpha [W_A(x,t;0) - W_A(x,t-t_*;0)]$$

gdzie

$$(6.22) \quad W_A(x,t;0) = -\frac{1}{2} [E(x,t;k) - E(x,t;-k)] + \\ + E(x,t;0) + (e^{k^2 t} - 1) e^{-kx}$$

Do tego wyrażenia możemy dojść również z wyrażenia ogólnego (6.12) kładąc w nim $h = 0$ oraz przechodząc do granicy $\omega \rightarrow 0$.

7. Pole naprężenia

Bierzemy transformatę Laplace'a obu stron r-nia (5.12) i dostajemy

$$(7.1) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{S}}}{\partial x^2} - \left[-\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \Big|_{t=0} - s \mathfrak{S}(0) + s^2 \tilde{\mathfrak{S}} \right] = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} - s \vartheta(0) + s^2 \tilde{\vartheta}$$

Ponieważ zgodnie z warunkiem początkowym (5.13), równaniem dyfuzji ciepła (5.11) i postacią źródła (5.17)

$$(7.2) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} = I_0 e^{-kx}$$

zaś warunki początkowe na pole naprężeń są jednorodne, por. (5.14) więc mamy

$$(7.3) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{S}}}{\partial x^2} - s^2 \tilde{\mathfrak{S}} = s^2 \tilde{\vartheta} - I_0 e^{-kx}$$

Równanie jednorodne

$$(7.4) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{S}}}{\partial x^2} - s^2 \tilde{\mathfrak{S}} = 0$$

ma rozwiązanie ogólne

$$\tilde{\mathfrak{S}}_j = A e^{-sx} + B e^{+sx}$$

Równanie niejednorodne, które otrzymujemy z (7.3) po wstawieniu weń wyrażenia (6.4) jest postaci

$$(7.5)_1 \quad s^2 \tilde{\mathfrak{S}} - \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{S}}}{\partial x^2} = a e^{-kx} + b e^{-\sqrt{s}x}$$

gdzie

$$(7.5)_2 \quad a = I_0 \left(1 - s \frac{1 - e^{-st_0}}{s - k^2} \right), \quad b = I_0 s \frac{1 - e^{-st_0}}{s - k^2} \frac{h + k}{h + \sqrt{s}}$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja

$$\tilde{\mathfrak{S}}_N = \frac{a e^{-kx}}{s^2 - k^2} + \frac{b e^{-x\sqrt{s}}}{s^2 - s}$$

Rozwiązanie równania (7.3) jest więc postaci

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{S}}_j + \tilde{\mathfrak{S}}_N$$

Zauważamy jeszcze, że warunek brzegowy (5.16)₁ narzuca iż

$$A = - \frac{a}{s^2 - k^2} - \frac{b}{s^2 - s}$$

zaś warunek (5.16)₂ daje $B = 0$. Stąd, po skorzystaniu z formuł na a i b dostajemy następującą postać rozwiązania r-nia (7.3)

$$(7.6) \quad \tilde{\mathfrak{S}} = I_0 \left[\left(1 - s \frac{1 - e^{-st_0}}{s - k^2} \right) \frac{1}{s^2 - k^2} (e^{-kx} - e^{-sx}) + \frac{1 - e^{-st_0}}{s - k^2} \frac{1}{s - 1} \frac{h + k}{h + \sqrt{s}} (e^{-\sqrt{s}x} - e^{-sx}) \right]$$

Korzystając z definicji (6.7) możemy zapisać nasze rozwiązanie następująco

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \alpha \left\{ \frac{k^2}{s^2 - k^2} (e^{-kx} - e^{-sx}) + (1 - e^{-st_0}) [-\tilde{W}(x,s;1) + \tilde{W}(0,s;1) e^{-sx}] \right\}$$

lub po wprowadzeniu oznaczenia

$$(7.7) \quad \tilde{P} = \frac{1}{s^2 - k^2}$$

w postaci

$$(7.8) \quad \tilde{S} = \alpha \left\{ k^2 \tilde{P} (e^{-kx} - e^{-sx}) + \right. \\ \left. + (1 - e^{-s \cdot t}) [-\tilde{W}(x,s;1) + \tilde{W}(0,s;1) e^{-s x}] \right\}$$

Retransformatą funkcji \tilde{P} jest

$$(7.9) \quad P(t) = \begin{cases} \frac{sh(kt)}{k} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Z kolei retransformatą funkcji $W(x,s;c)$ jest

$$(7.10) \quad W(x,t;c) = e^{-k x} F(t;c) - \frac{1}{2} \frac{1+\omega}{\beta^2-1} \left[\frac{1}{\omega-\beta} E(x,t;c) + \frac{1}{\omega+\beta} E(x,t;-c) \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2-1} \left[E(x,t;-k) + \frac{\omega+1}{\omega-1} E(x,t;+k) \right] + \\ + \frac{\omega}{(\omega-1)(\omega^2-\beta^2)} E(x,t;h)$$

gdzie

$$(7.11) \quad F(t;c) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^2-1} [ch(ck t) + \beta sh(ck t) - e^{k^2 t}] & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

zaś

$$(7.12) \quad \beta = c/k$$

Zatem retransformatą wyrażenia (7.8) jest

$$(7.13) \quad S(x,t) = \alpha \{ - [W(x,t;1) - W(x,t;-1)] + \\ + W(0,t-x;1) - W(0,t-x;-1) + \\ + k^2 [e^{-k x} P(t) - P(t-x)] \}$$

Jest to poszukiwane pole naprężenia dla $h_2 \neq 0$. We wzorze (7.13) mamy wartość $c = 1$; dlatego, zgodnie z (7.12) wielkość β wynosi teraz

$$(7.14) \quad \beta = 1/k$$

8. Pole temperatury i naprężenia w przypadkach szczególnych

8.1 Przypadek $\omega = h/k = 1, k \neq 1$

Rozwiązania dane wzorami (6.12) i (7.13) wykazują osobliwość, gdy $\omega = 1$ bądź $\beta = 1$. Rozpatrzmy przypadek $\omega = 1, k \neq 1$ ($\beta \neq 1$). Rozwiązanie otrzymamy ze wzorów (6.12) i (7.13) przez przejście graniczne $\omega \rightarrow 1$, przy ustalonych $x, t, k, k \neq 1$. Wyrażenia $W(x,t,0)$ i $W(x,t,1)$ występujące we wzorach na temperaturę i naprężenie można przedstawić, dla $t > 0$, w postaci :

$$W(x,t,0) = (e^{k^2 t} - 1)e^{-kx} - \frac{1}{2} E(x,t,-k) + \frac{\omega + 1}{\omega} E(x,t,0) + \\ + \frac{2E(x,t,\omega k) - \omega(\omega + 1)E(x,t,k)}{2\omega(\omega - 1)}$$

$$W(x,t,1) = e^{-kx} F(t) - \frac{1}{2} \frac{1 + \omega}{\beta^2 - 1} \left[\frac{1}{\omega - \beta} E(x,t,1) + \frac{1}{\omega + \beta} E(x,t,-1) \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 - 1} E(x,t,-k) + \frac{(\omega + 1)(\omega^2 - \beta^2) E(x,t,k) + 2\omega(\beta^2 - 1)E(x,t,\omega k)}{2(\beta^2 - 1)(\omega - 1)(\omega^2 - \beta^2)}$$

gdyż $\omega k = h$, por. (6.6)

Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala można wyznaczyć granicę

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{2E(x,t,\omega k) - \omega(\omega + 1) E(x,t,k)}{2\omega(\omega - 1)} = \\ = (kx + 2k^2 t - 3/2) E(x,t,k) - \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{(\omega + 1)(\omega^2 - \beta^2)E(x,t,k) + 2\omega(\beta^2 - 1)E(x,t,\omega k)}{2(\beta^2 - 1)(\omega - 1)(\omega^2 - \beta^2)} = \\ = \frac{1}{(\beta^2 - 1)^2} \left[(1 - \beta^2)(kx + 2k^2 t) - \frac{3}{2} - \beta^2/2 \right] E(x,t,k) + \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}(\beta^2 - 1)} e^{-x^2/4t}$$

Przy obliczaniu granic wykorzystano tożsamość

$$E(x, t, \alpha l) = E(x l, t l, \alpha)$$

która jest prawdziwa dla każdego $l > 0$, oraz równość:

$$(8.1) \quad \frac{\partial E(x,t,\alpha)}{\partial \alpha} = \begin{cases} (x + 2\alpha t)E(x,t,\alpha) - \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$W_1(x,t;0) = \lim_{\omega \rightarrow 1} W(x,t;0)$$

$$W_1(x,t;1) = \lim_{\omega \rightarrow 1} W(x,t;1)$$

otrzymamy

$$W_1(x,t;0) = (e^{k^2 t} - 1) e^{-k x} + 2 E(x,t;0) - \frac{1}{2} E(x,t;-k) + \\ + (k x + 2 k^2 t - \frac{3}{2}) E(x,t;k) - \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)},$$

$$W_1(x,t;1) = e^{-k x} F(t;1) - \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[\frac{1}{1 - \beta} E(x,t;1) + \frac{1}{1 + \beta} E(x,t,-1) \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 - 1} E(x,t,-k) + \frac{1}{1 - \beta^2} (kx + 2k^2 t + \frac{1}{2} - \frac{2}{1 - \beta^2}) E(x,t,k) \\ - \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

Dla $t \leq 0$ funkcje $W_1(x,t;0)$ i $W_1(x,t;1)$ są równe zeru.

W rozważanym przypadku rozwiązanie ma postać :

$$\vartheta(x,t) = \alpha [W_1(x,t;0) - W_1(x,t-t_*;0)] \\ S(x,t) = \alpha \left\{ - W_1(x,t;1) + W_1(x,t-t_*;1) \right. \\ \left. + W_1(0,t-x;1) - W_1(0,t-t_*-x;1) \right. \\ \left. + k^2 [e^{-kx} P(t) - P(t-x)] \right\}.$$

8.2 Przypadek $\omega = h/k \neq 1$, $k = 1$

Wyrażenie $W(x,t;1)$ (por. 7.10) po podstawieniu $k = 1/\beta$ dla $t > 0$ ma postać

$$W(x,t;1) = e^{-k x} \lim_{k \rightarrow 1} F(t;1) + \frac{1}{2} \frac{\omega + 1}{\beta^2 - 1} \left[E(x,t;\frac{1}{\beta}) \frac{1}{\omega - 1} - \frac{1}{\omega - \beta} E(x,t;1) \right] + \\ + \frac{1}{2(\beta^2 - 1)} E(x,t;-\frac{1}{\beta}) - \frac{1 + \omega}{\omega + \beta} E(x,t,-1) + \frac{\omega}{(\omega - 1)(\omega^2 - \beta^2)} E(x,t;\omega)$$

Stosując regułę de l'Hospitala znajdujemy granice poszczególnych członów powyższego wyrażenia. I tak, człon pierwszy daje

$$\lim_{k \rightarrow 1} F(t;1) = e^{-x} \frac{1}{2} (sh t + t e^t)$$

czynnik nieoznaczony w członie drugim

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[\frac{1}{\omega - 1} E(x, t; \frac{1}{\beta}) - \frac{1}{\omega - \beta} E(x, t; 1) \right] = \\ = \frac{1}{2(\omega - 1)} \left[(x - 2t - \frac{1}{\omega - \beta}) E(x, t; 1) + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right] \end{aligned}$$

zaś czynnik nieoznaczony w członie trzecim

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[E(x, t; \frac{1}{\beta}) - \frac{1 + \omega}{\omega + \beta} E(x, t; -1) \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[(x - 2t - \frac{1}{\omega + 1}) E(x, t; -1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right] \end{aligned}$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\begin{aligned} W_2(x, t; 1) = \lim_{\beta \rightarrow 1} W(x, t; 1) = e^{-x} \frac{1}{2} (sh t + te^t) + \\ + \frac{1}{4} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \left[(x - 2t - \frac{1}{\omega - 1}) E(x, t; 1) + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right] + \\ + \frac{1}{4} \left[(x - 2t + \frac{1}{\omega + 1}) E(x, t; -1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right] + \frac{\omega}{(\omega - 1)^2(\omega + 1)} E(x, t; \omega) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} W_2(x, t; 0) = \lim_{\beta \rightarrow 1} W(x, t; 0) = \\ = e^{-x} (e^t - 1) + \frac{1 + \omega}{\omega} E(x, t; 0) - \frac{1}{2} E(x, t; -1) - \\ - \frac{\omega + 1}{2(\omega - 1)} E(x, t; 1) + \frac{1}{\omega(\omega - 1)} E(x, t; \omega) \end{aligned}$$

8.3 Przypadek $k = 1, \omega = 1$

Teraz

$$\begin{aligned} W_3(x, t; 0) = \lim_{\omega \rightarrow 1} W_2(x, t; 0) = \\ = e^{-x} (e^t - 1) + 2 E(x, t; 0) - \frac{1}{2} E(x, t; -1) + \\ + \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{1}{\omega - 1} \left[-\frac{\omega + 1}{2} E(x, t; 1) + \frac{1}{\omega} E(x, t; \omega) \right] \end{aligned}$$

Ostatni człon tego wyrażenia, po zastosowaniu reguły de l'Hospitala wynosi

$$E(x, t; 1) \left(x + 2t - \frac{3}{2} \right) - \frac{2k\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

Zatem

$$W_3(x,t;0) = e^{-x}(e^1 - 1) + 2 E(x,t;0) - \frac{1}{2} E(x,t;-1) + \\ + E(x,t;1) \left(x + 2t - \frac{3}{2}\right) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

Niech

$$W_3(x,t;1) = \lim_{\omega \rightarrow 1} W_2(x,t;1) .$$

Dokonyjemy teraz przejścia granicznego $\omega \rightarrow 1$ w wyrażeniu $W_2(x,t;1)$ z punktu 8.2 .

Poszczególne nieoznaczone człony tego wyrażenia mają następujące granice

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{1}{(\omega - 1)^2} \left\{ \frac{1}{4} (\omega + 1)[-(x + 2t)(\omega - 1) - 1]E(x,t;1) + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{\omega + 1} E(x,t;\omega) + \frac{(\omega^2 - 1)\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right\} = \\ \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{1}{2(\omega - 1)} \left\{ \frac{\omega}{\omega + 1} \left(x + 2\omega t + \frac{1}{\omega(\omega + 1)}\right) E(x,t;\omega) - \frac{1}{2} E(x,t;1)\left[(x + 2t)\omega + \frac{1}{2}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \left(\omega - \frac{2\omega}{\omega + 1}\right) \right\}$$

Granica ostatniego składnika przy $\omega \rightarrow 1$ wynosi

$$\frac{1}{4} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

zaś granica pierwszego składnika wynosi

$$\left[\frac{1}{8} (x + 2t + \frac{1}{2})^2 + t - \frac{1}{8}\right] E(x,t;1) - (x + 2t + \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

Ostatecznie dostajemy

$$W_3(x,t;1) = \frac{1}{16} \left[\left(x + 2t - \frac{3}{2}\right)^2 + t - 3 \right] E(x,t;1) + \\ + \frac{1}{4} \left(x - 2t + \frac{1}{2}\right) E(x,t;-1) + \frac{1}{2} e^{-x} (\operatorname{sh} t + t e^t) - \\ - \frac{1}{2} (x + 2t + 1) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)}$$

8.4 Przypadek $\omega = \beta$, $k \neq 1$

Osobliwość w rozwiązaniu (7.13) występuje także przy $\omega = \beta$; pamiętamy, że zarówno ω jak i β są dodatnie. ponieważ $\omega = h/k$, $\beta = 1/k$, por. odpowiednio wzory (6.6) i (7.14), więc przejście graniczne $\omega \rightarrow \beta$, oznacza

$$h/k \rightarrow 1/k \quad \text{czyli} \quad h \rightarrow 1$$

W wyrażeniu (7.10) na $W(x,t;c)$ (dla $\omega = \beta$) osobliwy jest składnik drugi i ostatni. Tworzą one razem różnicę, która dla $c = 1$ wynosi

$$R(x,t;1) = -\frac{1}{2} \frac{1+\omega}{\beta^2-1} \frac{1}{\omega-\beta} E(x,t;1) + \frac{\omega}{(\omega-1)(\omega^2-\beta^2)} E(x,t;h)$$

Zatem, po zastąpieniu ω i β przez ich związki z h i k mamy

$$R(x,t;1) = \frac{k^2}{(h-k)(h-1)} \left[-\frac{1}{2} E(x,t;1) + \frac{h}{h+1} E(x,t;h) \right]$$

lub

$$R(x,t;1) = \frac{L}{M}$$

gdzie

$$L = k^2 \left[-\frac{1}{2} E(x,t;1) + \frac{h}{h+1} E(x,t;h) \right]$$

$$M = (h-k)(h-1)$$

Iloraz $R = L/M$ przy $h \rightarrow 1$ jest nieokreślony, gdyż wtedy zarówno licznik jak i mianownik dążą do zera. Korzystamy z twierdzenia de l'Hospitala. Znajdujemy kolejno

$$\frac{\partial L}{\partial h} = k^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \frac{h}{h+1} \right) E(x,t;1) + \frac{k^2 h}{h+1} \frac{\partial}{\partial h} E(x,t;h)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=1} = k^2 \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x + t \right) E(x,t;1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

przy czym skorzystaliśmy ze związku (8.1) na pochodną funkcji E po parametrze; ponadto mamy

$$\frac{\partial M}{\partial h} \Big|_{h=1} = 1 - k$$

Zatem

$$R(x,t;1) \Big|_{h \rightarrow 1} = \frac{\partial L / \partial h}{\partial M / \partial h} \Big|_{h \rightarrow 1} = \frac{k^2}{1-k} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x + t \right) E(x,t;1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4t)} \right], \quad \text{dla } t > 0, k \neq 1$$

Wyrażenie (7.10) dla $\omega = \beta$, $c = 1$ i dla $k \neq 1$ przyjmuje postać

$$W_4 = e^{-k x} F(t;1) + \frac{1}{\beta(\beta-1)} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x + t \right) E(x,t;1) - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-x/(4t)} \right] + \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{2\beta} E(x,t;-1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2-1} [E(x,t;-k) + \frac{\beta+1}{\beta-1} E(x,t;+k)]$$

którą należy wstawić do wyrażenia (7.13) na naprężenie

dla $\omega = \beta$, $k \neq 1$, $t > 0$.

8.5 Zadanie izotermiczne ($h_2 = 0$ czyli $\omega \rightarrow \infty$)

W rozwiązaniu (7.13) zamiast funkcji $W(x,t;c)$ należy podstawić funkcję

$$W_1(x,t;c) = e^{-k x} F(t;c) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2-1} [-E(x,t;c) - E(x,t;-c) + E(x,t;k) + E(x,t;-k)]$$

8.6 Zadanie adiabatyczne ($h_1 = 0$ czyli $\omega = 0$)

W rozwiązaniu (7.13) zamiast funkcji $W(x,t;c)$ należy podstawić funkcję

$$W_A(x,t;c) = e^{-k x} F(t;c) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2-1} \left[\frac{1}{\beta} (E(x,t;c) - E(x,t;-c)) - E(x,t;k) + E(x,t;-k) \right]$$

9. Badanie ciągłości i gładkości rozwiązania

Zbadamy przy ustalonym x ciągłość pola temperatury i naprężenia względem zmiennej czasowej t .

Zauważamy, że występujące w rozwiązaniu funkcje $F(t;c)$ i $P(t)$ są funkcjami ciągłymi, *por.* odpowiednio wzory (7.11) i (7.9). Także funkcja $E(x,t;c)$ określona wzorem (6.11)₂ jest funkcją ciągłą dla $t = 0$ przy ustalonych: x, c (z tym, że $x \neq 0$).

Ponieważ

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E(x,t;c) = 0 = E(x,0;c)$$

więc jest ona również ciągła w punkcie $t = 0$. Zatem dla $x \neq 0$ funkcja $W(x,t;c)$ dana przez (7.10) jest funkcją ciągłą zmiennej t .

Oznaczmy przez $\|\varphi\|_{t=t_0}$ skok pewnej funkcji $\varphi(x,t;c)$ na osi czasu w punkcie $t = t_0$. Skok ten określony jest następująco

$$\|\varphi(x,t;c)\|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi(x,t;c) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi(x,t;c)$$

Ponieważ dla $x = 0$ mamy

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E(0,t;c) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} E(0,t;c) = 0$$

więc funkcja $E(0,t;c)$ zmienia się w punkcie $t = 0$ skokowo i

$$\|E(x,t;c)\|_{t=0} = 1.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \|W(0,t;c)\|_{t=0} &= -\frac{1}{2} \frac{1+\omega}{\beta^2-1} \left(\frac{1}{\omega-\beta} + \frac{1}{\omega+\beta} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2-1} \left(1 + \frac{\omega+1}{\omega-1} \right) + \frac{\omega}{(\omega-1)(\omega^2-\beta^2)} = 0 \end{aligned}$$

więc funkcja $W(0,t;c)$ jest funkcją ciągłą.

Reasumując stwierdzamy, że temperatura (6.12) i naprężenie (7.13) przy ustalonym x są funkcjami ciągłymi zmiennej czasowej t .

Zbadamy następnie przy ustalonym x ciągłość pochodnej czasowej pola temperatury i naprężenia. W tym celu wykorzystamy znane twierdzenie:

Jeżeli granica $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ istnieje, to istnieje również granica $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma \tilde{f}(\sigma)$, przy czym

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma \tilde{f}(\sigma), \quad s = \sigma + it$$

zaś $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ oznacza transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$.■

Ponieważ transformata pochodnej wiąże się z transformatą funkcji następująco

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0),$$

i ponadto $W(x,0;c) = 0$, więc zgodnie z (6.7) mamy

$$(9.1) \quad \mathcal{L}[W(x,t;c)] = \frac{k^2 s^3}{(s^2 - c^2 k^2)(s - k^2)} e^{-kx} - \frac{k^3 s^2 (\omega + 1)}{(s - c^2)(s - k^2)(h + \sqrt{s})} e^{-\sqrt{s}x}$$

Korzystając z przytoczonego wyżej twierdzenia możemy wyznaczyć granicę

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} W(x,t;c) &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left[\frac{k^2 \sigma^3}{(\sigma^2 - c^2 k^2)(\sigma - k^2)} e^{-kx} - \right. \\ &\left. - \frac{k^3 \sigma^2 (\omega + 1)}{(\sigma - c^2)(\sigma - k^2)(h + \sqrt{\sigma})} e^{-\sqrt{\sigma}x} \right] = k^2 e^{-kx}. \end{aligned}$$

Skoki pochodnej temperatury w punktach $t = 0$ i $t = t_*$ wynoszą:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \|\dot{\vartheta}(x,t)\|_{t=0} &= k^2 e^{-k x} \\ \|\dot{\vartheta}(x,t)\|_{t=t_*} &= -k^2 e^{-k x} \end{aligned}$$

Dla $t \neq 0$ i $t \neq t_*$ pochodna temperatury jest funkcją ciągłą. Z relacji (9.2) wnioskujemy, że przy ustalonym x wykres temperatury w punkcie $t = 0$ jest nachylony do osi Ox pod kątem którego tangens wynosi $\alpha k^2 e^{-kx}$, zaś z relacji (9.2)₂, że wykres ten załamuje się w punkcie $t = t_*$.

Funkcja $P(t)$ (por.(7.9)) posiada pochodną która jest ciągła dla $t \neq 0$. W punkcie $t = 0$ skok pochodnej wynosi

$$\|\dot{P}(t)\|_{t=0} = 1$$

Pochodna naprężenia (7.13) może mieć nieciągłość tylko w punktach $t = 0$, $t = x$, $t = x + t_*$. Skoki w tych punktach wynoszą

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \|\dot{S}(x,t)\|_{t=0} &= 0, & \|\dot{S}(x,t)\|_{t=x} &= 0 \\ \|\dot{S}(x,t)\|_{t=t_*} &= \alpha k^2 e^{-k x} \\ \|\dot{S}(x,t)\|_{t=x+t_*} &= -\alpha k^2 \end{aligned}$$

Pochodna pola naprężenia doznaje więc skoku w punktach: $t = t_*$ oraz $t = x + t_*$. Skoki te wynoszą odpowiednio $\alpha k^2 e^{-k x}$ oraz $-\alpha k^2$.

Wykres pola naprężenia jest styczny do osi Ox w punkcie $t = 0$. Załamuje się w punktach $t = t_*$ i $t = t_* + x$. Ponieważ dla ustalonego x , $x \neq 0$, skok drugiej pochodnej pola naprężenia w punkcie $t = 0$ wynosi

$$(9.4) \quad \|\ddot{S}(x,t)\|_{t=0} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^3 \mathfrak{S}(x,\sigma) = -\alpha k^2 e^{-k x}$$

i $\dot{S}(x,0) = 0$, więc w prawostronnym otoczeniu punktu $t = 0$ naprężenia są ujemne (por. rys.3a).

10. Formuły obliczeniowe

Bezpośrednie wykorzystanie wzorów (6.12) i (7.13) do wyznaczenia wartości liczbowych pola temperatury i naprężenia napotyka dla dużych wartości czasu t na trudności związane z obliczaniem funkcji wykładniczych. Pojawiają się wtedy wyrażenia typu "nieskończoność minus nieskończoność", które jednak przez odpowiednie zgrupowanie członów, mogą być usunięte. Ostatecznie dochodzimy do następującej formuły na pole

temperatury:

$$(10.1) \quad \vartheta(x,t) = \frac{I_0}{k^2} [T(x,t) - T(x,t - t_*) H(t - t_*)], \quad t \geq 0, x \geq 0$$

gdzie

$$(10.2) \quad T(x,t) = e^{-\zeta^2/(4\tau)} \left\{ \frac{\omega + 1}{\omega} g(u_0) + \frac{1}{\omega(\omega - 1)} g(u_3) - \frac{1}{2} \left[\frac{\omega + 1}{\omega - 1} g(u_3) + \begin{cases} g(u_4) & \text{dla } \tau \leq \frac{\zeta}{2} \\ -g(-u_4) & \text{dla } \tau > \frac{\zeta}{2} \end{cases} \right] \right\} + e^{\tau - \zeta} [1 - H(\tau - \frac{\zeta}{2})] - e^{-\zeta}$$

oraz por. (3.2),

$$H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tau \leq 0 \\ 1 & \text{dla } \tau > 0 \end{cases}$$

Wprowadzono tutaj jednostki Daniłowskiej

$$(10.3) \quad \tau = k^2 t, \quad \zeta = kx, \quad \tau_* = k^2 t_*, \quad \omega = h/k, \quad \beta = 1/k$$

Formuła na pole naprężenia ma postać:

$$(10.4) \quad S(x,t) = \frac{I_0}{k^2} \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta\tau) e^{-\zeta} [1 - H(\tau - \frac{\zeta}{2})] + \frac{1}{\beta} e^{-\beta\tau} \operatorname{sh}(\zeta) H(\tau - \frac{\zeta}{2}) + \Sigma(\zeta, \tau) - \Sigma(\zeta, \tau - \tau_*) H(\tau - \tau_*) \right\}$$

gdzie

$$(10.5) \quad \Sigma(\zeta, \tau) = \left\{ \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(e^{\tau - \zeta} [1 - H(\tau - \frac{\zeta}{2})] - (\operatorname{ch}(\beta\tau) + \beta \operatorname{sh}(\beta\tau)) e^{-\zeta} [1 - H(\tau - \frac{\zeta}{2})] + \frac{\omega + 1}{\omega + \beta} e^{\beta^2 \tau - \beta \zeta} H(\tau - \frac{\zeta}{2\beta}) H(\frac{\zeta}{\beta} - \tau) - \frac{1}{1 + \beta} e^{-\beta\tau} \operatorname{sh}(\zeta) H(\tau - \frac{\zeta}{2\beta}) + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\frac{\omega + 1}{\omega - \beta} g(u_1) + \frac{\omega + 1}{\omega + \beta} \begin{cases} g(u_2) & \text{dla } \tau \leq \frac{\zeta}{2\beta} \\ -g(-u_2) & \text{dla } \tau > \frac{\zeta}{2\beta} \end{cases} \right) - \frac{\omega + 1}{\omega - 1} g(u_3) - \begin{cases} g(u_4) & \text{dla } \tau \leq \frac{\zeta}{2} \\ -g(-u_4) & \text{dla } \tau > \frac{\zeta}{2} \end{cases} \right) - \frac{\omega}{(\omega - 1)(\omega^2 - \beta^2)} g(u_3) \right] e^{-\zeta^2/(4\tau)} \right\} H(\tau) + \left\{ \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[-\beta \frac{\omega + 1}{\omega^2 - \beta^2} g(u_6) + \frac{1}{\omega - 1} g(u_7) \right] + \frac{\omega}{(\omega - 1)(\omega^2 - \beta^2)} g(u_8) \right\} H(\tau - \frac{\zeta}{\beta})$$

Powyżej

$$(10.6) \quad g(u) = e^{u^2} \operatorname{erfc}(u), \quad u \geq 0$$

$$(10.7) \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du,$$

$$(10.8) \quad \begin{aligned} u_0 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}, & u_1 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \beta\sqrt{\tau}, \\ u_2 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \beta\sqrt{\tau}, & u_3 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}, \\ u_4 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}, & u_5 &= \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \omega\sqrt{\tau}, \\ u_6 &= \beta\sqrt{\tau - \zeta/\beta}, & u_7 &= \sqrt{\tau - \zeta/\beta}, & u_8 &= \omega\sqrt{\tau - \zeta/\beta}, \end{aligned}$$

11. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono wg formuł (10.1) i (10.4) na komputerze IBM PC-386 z wykorzystaniem programu *Mathematica*. W szczególności funkcję g liczono dwukrotnie : raz wg definicji (10.6) i podprogramów programu *Mathematica* i drugi raz wg aproksymacji (por. Korn [55]) :

$$(11.1) \quad g(u) = Aq + Bq^2 + Cq^3$$

gdzie

$$q = \frac{1}{1 + D u}$$

oraz

$$\begin{aligned} A &= 0,34802 \ 42 & B &= -0,09587 \ 98 \\ C &= 0,74785 \ 56 & D &= 0,47047 \end{aligned}$$

Wyniki wstępnych obliczeń nie odbiegały od siebie i w dalszym ciągu korzystaliśmy z definicji (10.6). Funkcja $g(u)$ przyjmuje wartość 1 w punkcie $u = 0$; wraz ze wzrostem u maleje dążąc do zera przy u zmierzającym do nieskończoności.

Na załączonych rysunkach 2-4 przedstawiliśmy wyniki obliczeń dla impulsu prostokątnego o czasie trwania $t_{\dot{u}} = 1/k^2$, co w jednostkach Daniłowskiej oznacza $\tau_{\dot{u}} = 1$.

Przyjęto współczynniki $k = 10$ oraz $h = 11/10$. Wartość k podana jest w jednostkach Chadwicka - Sneddon, por. (4.1); w układzie metrycznym mamy

$$\bar{k} \frac{1}{\text{cm}} = k \frac{1}{\text{\AA}}$$

Zgodnie z tabelką 2, str.14 dla metali $\text{\AA} \sim 10^{-6} \text{cm}$; zatem dla $k = 10/\text{\AA}$, $\bar{k} \sim 10^7/\text{cm}$;

dla metali z drugiej strony współczynnik pochłaniania $\bar{k} \sim 10^6/\text{cm}$; nasz przykład dotyczy zatem ośrodka o silniejszym pochłanianiu niż typowe metale.

Rys. 2 przedstawia zależność temperatury ϑ od czasu w wybranych punktach osi przestrzennej. Temperatura rośnie szybko po włączeniu impulsu laserowego. W chwili wyłączenia impulsu ($\tau = 1$) zależność wykazuje załamanie, zgodne ze wzorem (9.2)₂. Skok pochodnej w tej chwili jest tym mniejszy im dalej od powierzchni półprzestrzeni znajduje się wybrany punkt. Również maksimum temperatury pojawia się tym później im dalej od brzegu znajduje się punkt.

Rysunki 3a - 3c przedstawiają powstawanie fali naprężenia S w różnych przedziałach czasu :

Rys. 3a przedstawia S w prawostronnym otoczeniu $t = 0$ dla ustalonego przekroju x . Zgodnie ze wzorem (9.4) druga pochodna czasowa pola naprężenia w chwili początkowej jest ujemna, i to tym mniejsza im bliżej brzegu znajduje się rozważany przekrój.

Rys. 3b przedstawia S w czasie trwania impulsu laserowego. Widoczny jest skok pochodnej czasowej w chwili wyłączenia impulsu ($\tau = 1$), zgodnie ze wzorem (9.3)₂.

Rys. 3c przedstawia przebieg S po wyłączeniu impulsu laserowego. Naprężenie osiąga maksimum w chwili $\tau = \tau_* + \zeta/\beta$, w której zgodnie ze wzorem (9.3)₃ zachodzi skok pochodnej czasowej. Wraz z upływem czasu naprężenie zanika. W przedziale czasu ukazanym na rys. 3c krzywa dla przekroju $\xi = 2$ nie osiągnęła jeszcze maksimum.

Rys. 4 stanowi trójwymiarowy odpowiednik rys. 3a.

Rys. 5 (por. rys. 3c) podaje wartości ϑ i S w chwilach $\tau = \tau_* + \zeta/\beta$, dla wybranych wartości $\zeta > 0$. W chwilach tych naprężenie osiąga wartość maksymalną (dla danego ζ). Jest widoczne, że maksymalne wartości naprężenia rosną szybko wraz ze wzrostem ζ w przedziale $0 < \zeta < 2$, zaś dla $\zeta > 2$ ich wzrost jest powolny. Takiemu zachowaniu się pola naprężenia towarzyszy zanikanie pola temperatury.

11.1 Granica wartości maksymalnych naprężenia przy $t \rightarrow \infty$

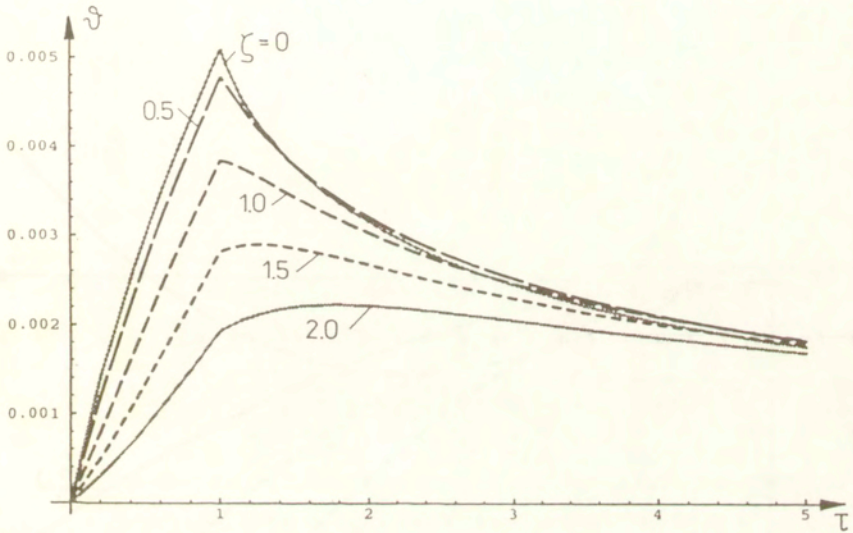
Granica wyrażenia (7.13) na naprężenia maksymalne (w punktach nieciągłości jego pochodnej czasowej) tzn. w punktach $x = t - t_*$ wynosi

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} S[\beta(\tau-1), \tau] = \alpha \left\{ \frac{1}{2\beta(1+\beta)} e^{-\beta} + \frac{1}{\beta^2-1} [-\beta \frac{\omega-1}{\omega^2-\beta^2} g(\beta) + \frac{1}{\omega-1} g(1)] + \frac{\omega}{(\omega-1)(\omega^2-\beta^2)} g(\omega) + \frac{\beta+2}{2(\beta+1)(\omega+\beta)} \right\}$$

Dla przyjętych w przykładzie wartości parametrów, $\omega = 0,11$, $\beta = 0,1$ mamy

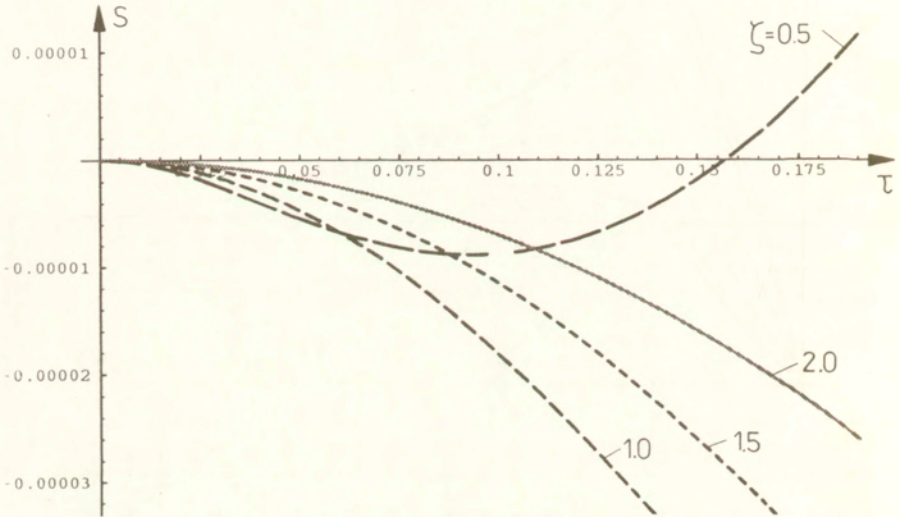
$$(11.2) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} S[\beta(\tau-1), \tau] = 5,03744 \alpha$$

(por. rys. 5).



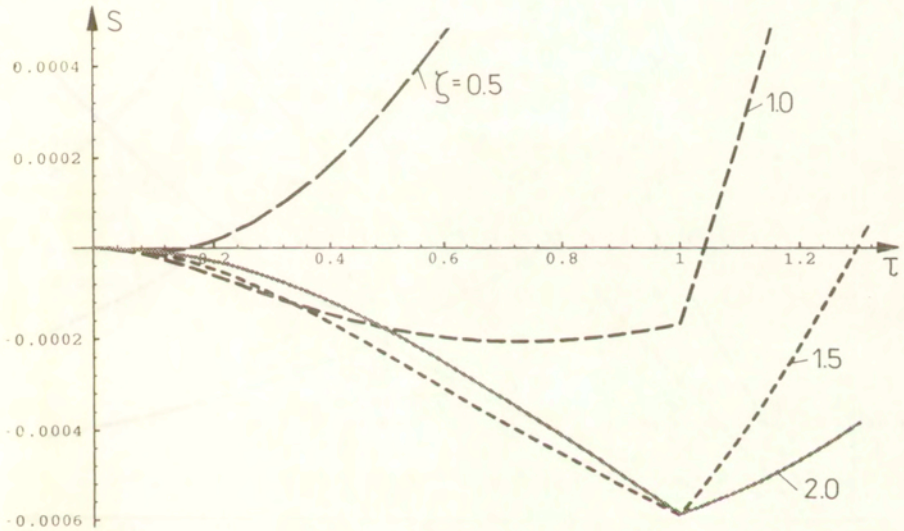
Rys. 2. Zależność temperatury od czasu τ dla różnych odległości ζ od brzegu półprzestrzeni. Czas trwania impulsu laserowego $\tau_0 = 1$; współczynnik wymiany ciepła $h = 1,1$; współczynnik pochłaniania światła laserowego $k = 10$ (tzn. $\beta = 0,1$); natężenie światła $I_0 = k^2$ (tzn. $\alpha = 1$).

Krzywa o największej wartości w punkcie $\tau = 1$ przedstawia czasowy przebieg temperatury w punkcie $\zeta = 0$ (brzeg półprzestrzeni); krzywe o mniejszych wartościach w punkcie $\tau = 1$ przedstawiają przebiegi czasowe temperatury kolejno w punktach $\zeta = 0,5 ; 1 ; 1,5$ i 2 .



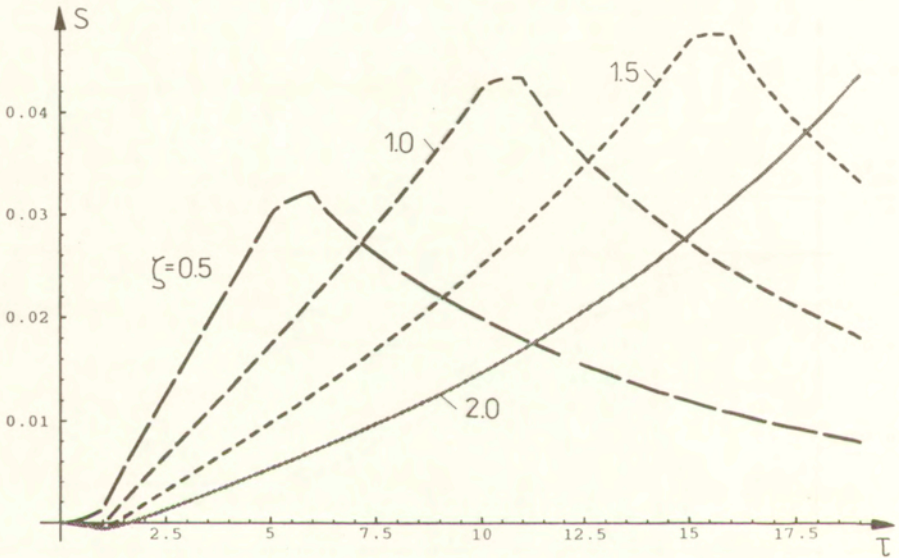
Rys. 3a. Zależność naprężenia od czasu τ na początku procesu, dla różnych odległości ζ od brzegu półprzestrzeni. Parametry układu oraz przypisanie oznakowania krzywych do punktów ζ przestrzeni jest takie jak na rys. 2. Nie podano przebiegu dla $\zeta = 0$, gdyż na brzegu wartość naprężenia wynosi zero.

Widać, że na początku procesu wartości naprężenia są ujemne i to tym bardziej im bliżej brzegu znajduje się rozważany punkt. Widać też, że im bliżej brzegu znajduje się rozważany punkt tym szybciej naprężenie zmienia znak na dodatni.



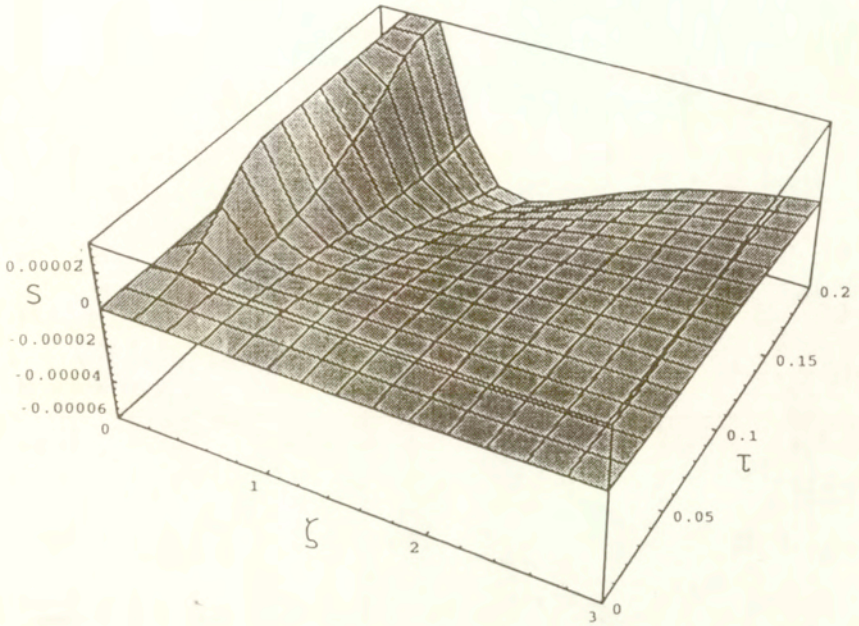
Rys. 3b. Zależność naprężenia od czasu τ dla czasów porównywalnych z czasem trwania impulsu świetlnego, dla różnych odległości ζ od brzegu półprzestrzeni. Parametry układu oraz oznakowanie krzywych takie jak na rys. 2.

W chwili wyłączenia impulsu ($\tau = 1$) zmienia się skokowo wartość pochodnej czasowej naprężenia.

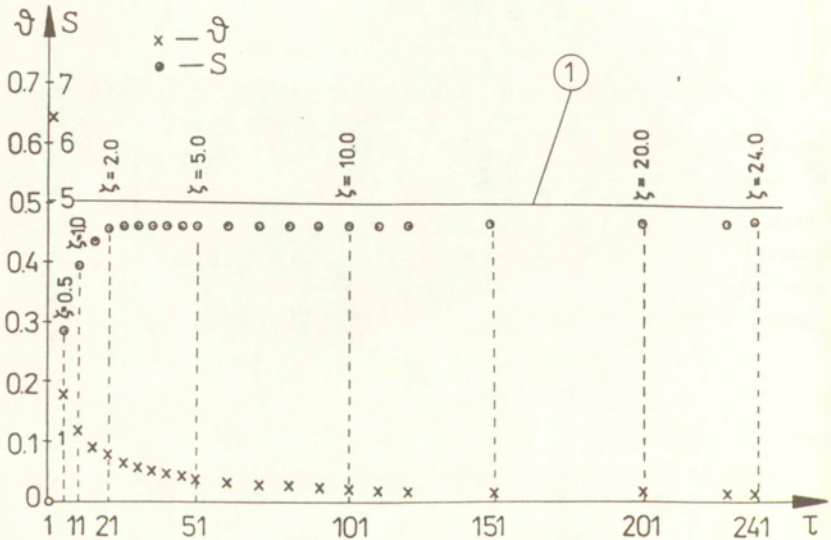


Rys. 3c. Zależność naprężenia od czasu τ po wyłączeniu impulsu świetlnego, dla różnych odległości ζ od brzegu półprzestrzeni. Parametry układu oraz oznakowanie krzywych takie jak na rys. 2.

Wartość maksymalną osiąga naprężenie, zależnie od odległości ζ od brzegu, w chwilach $\tau = \tau_* + \zeta/\beta$. Następuje wtedy załamanie wykresów (skok pochodnej czasowej) i zaczyna się zmniejszanie naprężenia.



Rys. 4. Przebieg czasoprzestrzenny naprężenia w początkowym okresie trwania impulsu świetlnego, (por. rys. 3a). Przedział zmiennej czasowej $\tau \in (0, 0.2)$, przedział zmiennej przestrzennej $\zeta \in (0, 3)$.



Rys. 5. Wartości temperatury ϑ i naprężenia S w chwilach $\tau = \tau_0 + \zeta/\beta$, dla wybranych wartości $\zeta > 0$. W chwilach tych naprężenie osiąga wartość maksymalną (dla danego ζ). Linia pozioma ① wyznacza wartość asymptotyczną maksymalnych wartości naprężenia, por. (11.2).

12. Dowolny kształt impulsu laserowego

Dotychczas przybliżaliśmy zależność czasową impulsu laserowego przez funkcję prostokątną

$$I = I(t) = I_0 [H(t) - H(t - t_1)]$$

Przypominamy, że I_0 jest natężeniem promieniowania laserowego, t_1 oznacza czas trwania impulsu, zaś

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

jest funkcją Heaviside'a.

Obecnie odступujemy od tego założenia dopuszczając dowolną zależność natężenia promieniowania I od czasu t . Podajemy rozwiązanie stowarzyszonego problemu początkowo-brzegowego dla tego ogólnego zadania i przeprowadzamy dyskusję rozwiązania przy izotermicznym i adiabatycznym warunku brzegowym.

12.1 Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych - przypadek dowolnego czasowego profilu źródła ciepła

Punktem wyjścia będą znowu r-nia (5.11-5.12), które dla porządku przypominamy

$$(12.1) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = r$$

$$(12.2) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$$

do których dołączamy warunki początkowe

$$(12.3) \quad \vartheta(x,0) = 0 \quad \text{dla } x > 0$$

$$(12.4) \quad S(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{dla } x > 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(12.5)_1 \quad h_1 \vartheta - h_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \text{gdzie } h = h_1/h_2 > 0 \quad \text{dla } x = 0, t > 0$$

$$(12.5)_2 \quad \vartheta(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, t > 0$$

$$(12.6)_1 \quad S(x,t) = 0 \quad \text{dla } x = 0, t > 0$$

$$(12.6)_2 \quad S(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, t > 0$$

Współczynniki h_1 i h_2 w r-niu (12.5)₁ spełniają warunek

$$(12.7) \quad h = h_1/h_2 > 0$$

Występujące po prawej stronie r-nia (12.1) źródło ciepła r ma następujący rozkład przestrzenno - czasowy

$$(12.8) \quad r = I(t) e^{-k x}$$

gdzie $I(t)$ oznacza natężenie promieniowania laserowego, zaś k współczynnik

pochłaniania światła (niezależny od położenia i czasu).

12.2 Równania dynamicznej teorii naprężeń cieplnych w przestrzeni Laplace'a

Przyjmujemy, tak jak w rozdziale 6 następującą definicję przekształcenia Laplace'a funkcji $f(t)$

$$(12.9) \quad \tilde{f}(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

przy czym

$$(12.10) \quad f(t) = 0 \quad \text{dla } t < 0 .$$

Po dokonaniu przekształcenia Laplace'a obu stron r-nia (12.1) dostajemy

$$(12.11) \quad s\tilde{\vartheta} - \vartheta(0) - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = I(s) e^{-k x}$$

gdzie $\vartheta(0)$ jest warunkiem początkowym na temperaturę, *por.* (2.3).

Przekształcony warunek brzegowy (12.5) ma postać

$$(12.12)_1 \quad h_1 \tilde{\vartheta} - h_2 \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

$$(12.12)_2 \quad \tilde{\vartheta}(x) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty$$

Po dokonaniu przekształcenia Laplace'a obu stron r-nia (12.2) i wykorzystaniu jednorodnych warunków początkowych (12.4) dostajemy

$$(12.13) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} - s^2 \tilde{\vartheta} = s^2 \vartheta - s \vartheta(0) - \dot{\vartheta}(0)$$

12.3 Rozwiązanie problemu w przestrzeni Laplace'a

Po uwzględnieniu warunku początkowego (12.3) otrzymujemy z r-nia (12.11) następującą postać równania na temperaturę

$$(12.14) \quad s\tilde{\vartheta} - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = \tilde{I}(s) e^{-k x}$$

i ma rozwiązanie ogólne

$$(12.15) \quad \tilde{\vartheta} = A e^{-\sqrt{s} x} + B e^{+\sqrt{s} x} + \tilde{I}(s) \frac{e^{-kx}}{s - k^2}$$

przy czym A i B są to stałe całkowania. Z warunków brzegowych (12.12)₂ i

(12.12)₁ stałe całkowania są

$$(12.16) \quad B = 0$$

$$(12.17) \quad A = - \frac{\Upsilon(s)}{s - k^2} \frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{s}}$$

Zatem

$$\vartheta = \frac{\Upsilon(s)}{s - k^2} (e^{-kx} - \frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x})$$

lub

$$(12.18) \quad \vartheta = \frac{\Upsilon(s)}{s - k^2} (e^{-kx} - k \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x})$$

gdzie

$$(12.19) \quad \omega = h/k$$

Zanim przejdziemy do równania (12.13) zauważamy, że

$$(12.20) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \vartheta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \vartheta(s) = \\ = \lim_{s \rightarrow \infty} \Upsilon(s) \frac{s^2}{s - k^2} (e^{-kx} - k \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{s}x}) = \\ = e^{-kx} \lim_{t \rightarrow 0} I(t) = e^{-kx} I(0)$$

A więc po uwzględnieniu jednorodnego warunku początkowego na temperaturę (12.3), równanie naprężeniowe (12.13) przyjmuje postać

$$(12.21) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - s^2 \xi = s^2 \vartheta - \vartheta(0)$$

gdzie odpowiednio ϑ i $\vartheta(0)$ są dane przez (12.18) i (12.20). Korzystając z wyrażeni (12.18) i (12.20) po prostych przekształceniach algebraicznych znajdujemy, że

$$(12.22) \quad -s^2 \vartheta + \vartheta(0) = a(s) e^{-kx} + b(s) e^{-x\sqrt{s}}$$

przy czym

$$(12.23) \quad a(s) = - \Upsilon(s) \frac{s^2}{s - k^2} + I(0)$$

$$(12.24) \quad b(s) = (\omega + 1) k \frac{s^2}{(s - k^2)(h + \sqrt{s})} \Upsilon(s)$$

Rozwiązanie ogólne równania (12.21) uwzględniające (12.6) i (12.22) przyjmuje postać

$$(12.25) \quad \xi = C e^{-sx} + \frac{a(s)}{s^2 - k^2} e^{-kx} + \frac{b(s)}{s^2 - s} e^{-x\sqrt{s}}$$

Z warunku brzegowego $\xi(x,s) = 0$ dla $x = 0$, por. (12.6), dostajemy

$$(12.26) \quad C = - \frac{a(s)}{s^2 - k^2} - \frac{b(x)}{s^2 - s}$$

Zatem transformata pola naprężenia jest

$$(12.27) \quad \mathfrak{S} = \frac{a(s)}{s^2 - k^2} (e^{-k x} - e^{-s x}) + \frac{b(s)}{s^2 - s} (e^{-x\sqrt{s}} - e^{-s x})$$

W szczególnym przypadku, gdy zależność czasowa impulsu laserowego jest prostokątna, por. (5.17), tzn. gdy

$$(12.28) \quad \tilde{Y}(s) = I_0 \frac{1}{s} (1 - e^{-s t_0})$$

transformaty pola temperatury i naprężenia, por. odpowiednio (12.18) i (12.27), przyjmują postać już podaną; por. (6.9) i (7.6)

13. Pole temperatury i naprężenia dla dowolnego czasowego kształtu impulsu laserowego

Oznaczmy

$$(13.1) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\omega + 1) k e^{-\sqrt{s} x}}{(s - k^2)(\sqrt{s} + h)} \right] = V(x, t)$$

$$(13.2) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{(s - k^2)(s^2 - k^2)} \right] = K(t)$$

$$(13.3) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\omega + 1) k e^{-\sqrt{s} x}}{(s - k^2)(\sqrt{s} + h)(s - 1)} \right] = M(x, t)$$

pamiętamy ponadto, że

$$(13.4) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - k^2} \right] = e^{k^2 t}$$

Stosujemy twierdzenie o odwracaniu iloczynu transformat do wyrażenia (12.18), uwzględniając związki (13.4) i (13.1), dostajemy

$$(13.5) \quad \vartheta(x, t) = \int_0^t I(t - \tau) [e^{-kx + k^2 \tau} - V(x, \tau)] d\tau$$

Podobnie, z wyrażenia (12.27) dostajemy

$$(13.6) \quad S(x, t) = - \int_0^t I(\tau) K(t - \tau) d\tau + \int_0^{t-x} I(\tau) K(t - x - \tau) d\tau + \int_0^t I(\tau) M(x, t - \tau) d\tau - \int_0^t I(\tau) M_1(t - x - \tau) d\tau + I(0) [e^{-k x} P(t) - P(t - x)]$$

Funkcje $V(x, t)$ w wyrażeniu na temperaturę (13.5) można wyznaczyć *explicite*.

Mianowicie

$$(13.7) \quad V(x,t) = \frac{1}{2} E(x,t;-k) + \frac{1}{2} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} E(x,t;k) - \frac{\omega}{\omega - 1} E(x,t;h)$$

gdzie $E(x,t;c)$ dane jest wzorem (6.11)₂. W ten sposób mamy wyznaczone pole temperatury $\vartheta(x,t)$.

Ponieważ, por. wzór (9.1),

$$\mathcal{L} [\dot{W}(x,t;c)] = \frac{k^2 s^2}{(s^2 - c^2 k^2)(s - k^2)} e^{-k x} - \frac{(\omega + 1) k^2 s}{(s - k^2)(\sqrt{s} + h)(s - c^2)} e^{-\sqrt{s} x}$$

więc

$$M(x,t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 e^{-k x}}{(s^2 - k^2)(s - k^2)} \right] - \frac{1}{k^2} \dot{W}(x,t;1)$$

czyli

$$(13.8) \quad M(x,t) = K(t) - \frac{1}{k^2} \dot{W}(x,t;1)$$

Funkcja $M_1(t)$ w wyrażeniu (13.6) zdefiniowana jest następująco

$$(13.9) \quad M_1(t) = M(0,t)$$

a zatem po wykorzystaniu (13.8) dostajemy

$$(13.10) \quad M_1(t) = K(t) - \frac{1}{k^2} \dot{W}(0,t;1)$$

Podstawiając (13.8) i (13.10) do (13.6) otrzymujemy wyrażenie na naprężenie $S(x,t)$

$$(13.11) \quad S(x,t) = -\frac{1}{k^2} \int_0^t I(\tau) \dot{W}(x,t-\tau;1) d\tau + \frac{1}{k^2} \int_0^{t-x} I(\tau) \dot{W}(0,t-x-\tau;1) d\tau + \\ + I(0) [e^{-kx} P(t) - P(t-x)]$$

lub po scałkowaniu przez części

$$(13.12) \quad S(x,t) = -\frac{1}{k^2} \int_0^t \dot{I}(\tau) W(x,t-\tau;1) d\tau + \frac{1}{k^2} \int_0^{t-x} \dot{I}(\tau) W(0,t-x-\tau;1) d\tau + \\ + I(0)[e^{-kx} P(t) - P(t-x) - W(x,t;1) + W(0,t-x;1)]$$

Przy tym funkcje $W(x,t;c)$ i $P(t)$ dane są odpowiednio wzorami (7.10) i (7.9). Zwracamy uwagę na to, że zgodnie z definicją funkcji W , druga całka w ostatnim wyrażeniu dla $x > t$ znika. Łatwo też sprawdzić, że jeśli funkcja $I(t)$ jest ciągła, to w punkcie $x = t$ nie ma skoku pochodnej czasowej naprężenia.

14. Schodkowy w czasie rozkład natężenia promieniowania laserowego

Całki występujące w formułach na temperaturę ϑ i naprężenie S , *por.* odpowiednio (13.5) i (13.11) można obliczyć *explicite* w przypadku schodkowego profilu czasowego promieniowania laserowego.

Przyjmujemy więc, że natężenie światła laserowego jest w czasie odcinkami stałe, *tzn.*

$$(14.1) \quad I(t) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i [H(t - t_i) - H(t - t_{i+1})]$$

gdzie I_i oznacza natężenie światła stałe w przedziale czasu (t_i, t_{i+1}) . Transformata tak przyjętego rozkładu jest następująca

$$(14.3) \quad \tilde{I}(s) = \mathcal{L}[I(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} I_i \frac{1}{s} (e^{-s t_i} - e^{-s t_{i+1}})$$

lub po oznaczeniu

$$(14.3) \quad a_i = I_i \frac{1}{s} (e^{-s t_i} - e^{-s t_{i+1}})$$

$$(14.4) \quad I(s) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

Korzystając z tego oznaczenia, po dokonaniu przekształcenia Laplace'a r -nia (12.1), z uwzględnieniem (12.8) i (14.1) dostajemy

$$(14.5) \quad s \tilde{\vartheta} - \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial x^2} = e^{-k x} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

Rozwiązanie ogólne tego równania, uwzględniające warunek znikania w nieskończoności pola temperatury, *por.* (12.12)₂ jest

$$(14.6) \quad \tilde{\vartheta} = A e^{-x \sqrt{S}} + \frac{1}{s - k^2} e^{-k x} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

gdzie stała A wyznaczona z warunku (12.12) jest

$$(14.7) \quad A = - \frac{h_1 + h_2 k}{h_1 + h_2 \sqrt{S}} \frac{1}{s - k^2} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

Zatem, po powołaniu się jeszcze na definicję (14.3) współczynników a_i dostajemy następującą postać transformaty pola temperatury

$$(14.8) \quad \tilde{\vartheta} = (e^{-kx} - k \frac{\omega + 1}{h + \sqrt{S}} e^{-x\sqrt{S}}) \frac{1}{s(s - k^2)} \sum_{i=0}^{n-1} I_i (e^{-s t_i} - e^{-s t_{i+1}})$$

lub z oznaczeniem (6.8)

$$(14.9) \quad \tilde{\vartheta}(x,s) = \frac{1}{k^2} \tilde{W}(x,s,0) \sum_{i=0}^{n-1} I_i (e^{-s t_i} - e^{-s t_{i+1}})$$

Tak więc, po powrocie do zmiennej czasowej

$$(14.10) \quad \vartheta(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i [W(x,t-t_i;0) - W(x,t-t_{i+1};0)]$$

gdzie

$$\alpha_i = I_i/k^2$$

zaś $W(x,t;0)$ dane jest wzorem (6.11).

W podobny sposób znajdujemy pole naprężenia

$$(14.11) \quad S(x,t) = k^2 [e^{-kx} P(t) - P(t-x)] \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i [-W(x,t-t_i;1) + W(x,t-t_{i+1};1) + W(0,t-t_i-x;1) - W(0,t-t_{i+1}-x;1)]$$

gdzie funkcja $W(x,t;c)$ dana jest wzorem (7.10), zaś funkcja $P(t)$ - wzorem (7.9).

Formuły (14.10) i (14.11) stanowią z jednej strony uogólnienie formuł odpowiednio (6.12) i (7.13) na problem reakcji półprzestrzeni termosprężystej z impulsem laserowym odcinkami stałym w czasie, z drugiej strony mogą być uważane za przybliżenie rozwiązań (13.5) i (13.11) podanych w niniejszym opracowaniu.

Zauważmy wreszcie, że korzystając ze wzoru

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (B_i - B_{i+1}) = \alpha_0 B_0 - \alpha_{n-1} B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i$$

w którym B_i są funkcjami dowolnymi, wzory (14.10) i (14.11) można przekształcić do postaci

$$(14.12) \quad \vartheta(x,t) = \alpha_0 W(x,t-t_0;0) + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) W(x,t-t_i;0) - \alpha_{n-1} W(x,t-t_n;0)$$

$$(14.13) \quad S(x,t) = k^2 [e^{-kx} P(t) - P(t-x)] \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i + \alpha_0 [-W(x,t-t_0;1) + W(0,t-t_0-x;1)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) [-W(x,t-t_i;1) + W(0,t-t_i;1) - \alpha_{n-1} [-W(x,t-t_n;1) + \alpha_{n-1} W(0,t-t_n-x;1)]$$

w których występują różnice współczynników α_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ zamiast różnic funkcji W .

15. Szczególne przypadki rozwiązania przy ogólnej zależności czasowej impulsu laserowego

15.1 Przypadek izotermiczny

Przypadek izotermiczny odpowiada wartości współczynnika $h_2 = 0$ w warunku brzegowym (12.5)₁. Oznacza to, że $h = h_1/h_2 \rightarrow \infty$ oraz, że $\omega = h/k \rightarrow \infty$. Wtedy pole temperatury

$$(15.1) \quad \vartheta_1(x,t) = \int_0^t I(t-\tau) [e^{-kx+k^2\tau} - V_1(x,\tau)] d\tau \text{ gdzie}$$

$$V_1(x,\tau) = \frac{1}{2} E(x,t;-k) + \frac{1}{2} E(x,t;k)$$

zaś pole naprężenia

$$(15.2) \quad S_1(x,t) = - \frac{1}{k^2} \int_0^t I(\tau) \dot{W}_1(x,t-\tau;1) d\tau + \\ + \frac{1}{k^2} \int_0^{t-x} I(\tau) \dot{W}_1(0,t-x-\tau;1) d\tau + I(0) [e^{-kx} P(t) - P(t-x)]$$

gdzie przy oznaczeniu $\beta = c/k$

$$W_1(x,t;c) = e^{-kx} F(t,c) - \frac{1}{2(\beta^2 - 1)} [E(x,t;c) + E(x,t;-c)] + \\ + \frac{1}{2(\beta^2 - 1)} [E(x,t;k) + E(x,t;-k)]$$

15.2 Przypadek adiabatyczny

Tym razem w warunku brzegowym (12.5)₁ kładziemy $h_1 = 0$, co daje $h = 0$, oraz $\omega = 0$. Dokonując przejścia granicznego $\omega \rightarrow 0$ w wyrażeniach (13.5) i (13.11) dostajemy

$$(15.3) \quad \vartheta_A(x,t) = \int_0^t I(t-\tau) [e^{-kx+k^2\tau} - V_A(x,\tau)] d\tau$$

gdzie

$$V_A(x,\tau) = \frac{1}{2} E(x,t;-k) - \frac{1}{2} E(x,t;k)$$

oraz

$$(15.4) \quad S_A(x,t) = - \frac{1}{k^2} \int_0^t I(\tau) W_A(x,t-\tau;1) d\tau + \\ + \frac{1}{k^2} \int_0^{t-x} I(\tau) W_A(0,t-x-\tau;1) d\tau + I(0)[e^{-kx} P(t) - P(t-x)]$$

gdzie

$$W_A(x,t;c) = e^{-kx} F(t,c) + \frac{1}{2(\beta^2 - 1)\beta} [E(x,t;c) - E(x,t;-c)] - \\ - \frac{1}{2(\beta^2 - 1)} [E(x,t;k) - E(x,t;-k)]$$

15.3 Porównanie obu przypadków

Zauważamy najpierw, że

$$V_A - V_I = -E(x,t;k)$$

Stąd

$$(15.5) \quad \vartheta_A - \vartheta_I = \int_0^t I(t-\tau) E(x,\tau;k) d\tau$$

Ponieważ

$$(15.6) \quad I \geq 0 \quad \text{oraz} \quad E \geq 0$$

dla wszystkich parametrów t, x, k więc

$$(15.7) \quad \vartheta_A - \vartheta_I \geq 0$$

co jest zrozumiałe, ponieważ półprzestrzeń o adiabatycznie izolowanym brzegu nie traci energii uzyskanej z promieniowania laserowego.

Jeśli chodzi o naprężenie, sytuacja jest bardziej złożona, gdyż

$$(15.8) \quad W_A - W_I = \frac{1}{1 - \beta^2} \left\{ E(x,t;k) - \frac{1}{2\beta} [(1 + \beta) E(x,t;c) + (\beta - 1) E(x,t;-c)] \right\}$$

co oznacza, że wyrażenie podcałkowe na różnicę $S_A - S_I$ zawiera składniki o różnych znakach, zaś wartość wkładu poszczególnych członów do całki zależy od wartości współczynnika $k = 1/\beta$.

Zakończenie

Otrzymane wzory analityczne na pole temperatury i naprężenia wywołane przez impuls laserowy pozwalają zbadać charakter zmian tych wielkości. W szczególności pozwalają one podać interpretację zjawisk termomechanicznych zachodzących w półprzestrzeni poddanej działaniu prostokątnego impulsu promieniowania.

Impuls świetlny w wyniku pochłonięcia przez ośrodek wypełniający półprzestrzeń wytwarza impulsowe źródła ciepła rozłożone w sposób ciągły w każdym punkcie półprzestrzeni i zanikające wykładniczo wraz z odległością od jej brzegu. Wskutek ogrzania przez te źródła ośrodek się rozszerza; wielkość rozszerzenia jest proporcjonalna do temperatury ośrodka w danym punkcie, a więc zmienia się od punktu do punktu, malejąc wraz z oddalaniem się od brzegu. Materiał w głębi półprzestrzeni jako mniej ogrzany, rozszerza się słabiej i przez to przeciwstawia się rozszerzaniu warstw ośrodka znajdujących się bliżej brzegu. Dlatego w pierwszej fazie impuls naprężenia jest ściskający i to tym bardziej, im bliżej brzegu znajduje się otoczenie rozważanego punktu.

Jednak fakt, że właśnie na samym brzegu półprzestrzeni nie ma sił zewnętrznych, powoduje spadek naprężenia (co do wartości bezwzględnej). Spadek ten ma charakter dynamiczny: wartość naprężenia przechodzi przez zero i to tym szybciej, im bliżej brzegu znajduje się rozważany punkt, by następnie przyjąć wartość dodatnią rosnącą w czasie. Wyłączenie źródła ciepła w chwili t_* przyspiesza jeszcze tempo tego wzrostu (skok pochodnej!). Kres temu wzrostowi kładzie antyimpuls naprężenia (tzn. naprężenie ujemne) wywołany przez spadek temperatury, który dociera do danego punktu po czasie $t_* - x$ (w jednostkach Chadwicka-Sneddona) lub po czasie $\tau_* - \zeta/\beta$ (w jednostkach Daniłowskiej). Od tej chwili następuje zanik naprężenia.

Przedstawione wyżej wyniki opisują powstawanie fal termosprężystych w wyniku działania impulsu lasertowego na ciało stałe, co ważne jest zarówno przy analizie działania niektórych układów sensorycznych jak i wytrzymałości samych prętów laserowych, *por.* Ready [5], Hesse [7]. Nadają się także do opisu ogrzewania laserem tarcz z ciała stałego, jeśli mogą być pominięte zjawiska topnienia, parowania i emisji elektronowej, *por.* Zimny [56].

Literatura

1. V.I. Daniłowska, *Temperaturnye napryazheniya w poluprostranstve, vznikayushchiye vsledstvie vnezapnogo nagreva granicy (Thermal stresses in an elastic halfspace due to a sudden heating of its boundary)*, in Russian, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika (П. М. М. - P.M.M.) (Appl.Math.Mekh.)* 14, 316-118 (1950)
2. V.I. Daniłowska, *Ob odnoy dinamicheskoy zadache termouprugosti (On a certain dynamic problem of thermoelasticity)*, in Russian, *P.M.M.* 16, 341-3 (1952)
3. V.I. Daniłowska, *Temperaturnoe pole i temperaturnoe napryazheniye (Temperature field and thermal stresses produced in elastic semi-space by a flux of radiation energy incident on the boundary of semispace)*, in Russian, *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 9 otdel. tekhn. nauk, mekh. i mash. N^o 3, pp. 129-132 (1959)
4. J.F. Ready, *Effects of high power laser radiation* Academic Press, New York 1971;
5. J.F. Ready, *Laser applications*, vol. 5, Academic Press, New York 1984
6. A.G. Grigor'antz, A.N. Safonov, *Osnovy lazernogo termouprochneniya splavov seriya knig Lazernaya tekhnika i tekhnologia*, kniga 6, Vysshaya shkola, Moskva 1988
7. St. Hesse, *Robotertechnik*, BI-Taschenlexikon, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1989
8. R. Domański, *Promieniowanie laserowe - oddziaływanie na ciało stałe*, WNT, Warszawa 1990
9. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970
10. J. Werle, *Termodynamika fenomenologiczna*, PWN Warszawa 1957
11. M. Suffczyński, *Elektrodynamika*, wyd. czwarte, PWN, Warszawa 1980
12. J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley, New York 1975
Elektrodynamika klasyczna, tłum. polskie PWN, Warszawa 1982
13. *Encyclopedia Britanica*, vol. 15, p. 233, W. Benton ed., Chicago 1959
14. A.G. Bell, *Amer. J. Sci.* 20, 305 (1880)
15. A.G. Bell, *Upon the production of sound by radiant energy*, *Phil. Mag.* 11, 510-528 (1881)
16. *Sur les expériences photophonique du professeur Alexander Graham Bell et de M. Summer Tainte*, note lue par M. Ant. Breguet, *C.R.A.S. (Paris)* 91, 595-598 (1880)
17. M.E. Mercadier, *Sur la radiophonie*, *C.R.A.S.(Paris)* 91, 929-931 (1880)
18. M.E. Mercadier, *Sur la radiophonie*, *C.R.A.S.(Paris)* 92, 409-412 (1881)
19. A. Rosencwaig and A. Gersho, *Theory of the photoacoustic effect with solids* *J. Appl. Phys.* 47, 64-69 (1976)
20. J. Ignaczak, *Thermal displacements in an elastic semi-space due to sudden heating of the boundary plane*, *Arch. Mech. Stos. Arch. of Mech.* 9, 395-416 (1957)
21. E. Sternberg, J.G. Chakravorty, *On inertia effects in a transient thermoelastic problem*, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 26, 503-509 (1959)

22. J.E. Michaels, *Thermal impact - the mechanical response of solids to extreme electromagnetic radiation*, Planetary and Space Sci. **7**, 427-433 (1961)
23. R.M. White, *Elastic wave generation by electron bombardment or electromagnetic wave absorption*, J. Appl. Phys. **34**, 2123-2124 (1963)
24. R.M. White, *Generation of elastic waves by transient surface heating*, J. Appl. Phys. **34**, 3559-3567 (1963)
25. J.F. Ready, *Effects due to absorption of laser radiation* J. Appl. Phys. **36**, 642-468 (1965)
26. J.H. Bechtel, *Heating of solid targets with laser pulses*, J. Appl. Phys. **46**, 1585-1593 (1975)
27. A.M. Aindow, R.J. Dewhurst, D.A. Hutchins and S.B. Palmer, *Laser - generated ultrasonic pulses at free metal surfaces*, J. Acoust. Soc. Am. **69**, 449-455 (1981)
28. E.A. Ash, E. Dieulesaint, H. Rakouth, *Generation of surface acoustic waves by means of c.w. laser*, Electronics Letters, **16**, 470-472 (1980)
29. D. Royer and E. Dieulesaint, *Analyse de la generation d'ondes de Rayleigh par effet photothermique* J. de Physique **44**,C6 79-83 (1983)
30. R.M. White, *Thermoelastic coupling to Lamb waves* 1986 IEEE, 1986 Ultrasonics Symposium, pp. 411-415
31. Y. Nakagawa and S. Kawanago, *Surface acoustic wave parametric generation with pumping of light* J. Appl. Phys. **61**, 1415-1421 (1987)
32. D. Royer, E. Dieulesaint, X. Jia and Y. Shui, *Optical generation and detection of surface acoustic waves on a sphere*, Appl. Phys. Lett. **52**, 706-708 (1988)
33. K.J. Faran, R.J. Dwayne Miller, S.M. Gracewski, *Analysis of surface wave generation by laser interference* Trans. ASME J. Appl. Mech. **57**, 415-418 (1990)
34. B.J. Jarosz, *Ultrasonic surface modes generated by laser pulses on duraluminium*, Ultrasonics **29**, 53-57 (1991)
35. H. Nakano and S. Nagai, *Laser generation of antisymmetric Lamb waves in thin plates*, Ultrasonics **29**, 230-234 (1991)
36. W. Sachse and N.N. Hsu, *Ultrasonic transducers for materials testing and their characterization* in: Physical Acoustics, ed. by W.P. Mason and R.N. Thurston, vol. XIV, pp. 277-406, Academic Press, New York 1979
37. D.A. Hutchins, *Ultrasonic generation by pulsed lasers*, in: Physical Acoustics, ed. by W.P. Mason and R.N. Thurston, vol. XIV, pp. 277-406, Academic Press, Boston 1988
38. Y.T. Tsui, *Problem in dynamic thermoelasticity*, J. Acoust. Soc. Am. J.A.S.A. **40**, 176-178 (1966)
39. L.S. Goumay, *Conversion of electromagnetic to acoustic energy by surface heating*, J.A.S.A. **40**, 1322-1330 (1966)
40. W.K. Nowacki, B. Raniecki, *Note on the propagation of thermoelastic and thermo-viscoelastic non coupled waves* in: Progress in Thermoelasticity VIIIth European Mechanics Colloq. Warszawa 1967, ed. W.K. Nowacki, pp. 145-157, PWN Warszawa 1969

41. W.K. Nowacki, B. Raniecki, *Note on the propagation of thermoelastic non coupled waves*, Proc. of Vibr. Probl. Warsaw 8, 129-143 (1967)
42. V.I. Danilovskaya, E.M. Shefter, *Thermal fields and stresses in elastic halfspace due to axisymmetric flux of radiation* (in Russian) Fizika i khimiya obrab. materialov, N^o 3, 13-19 (1969)
43. L.N. Germanovich, *O temperaturnykh napryazheniyakh v uprugom poluprostranstve s istochnikami tepla* (On thermal stresses in elastic halfspace with heat sources) in Russian, Izv. A N SSSR. MTT., N^o 1, 74-85 (1986)
44. L.N. Germanovich, I.D. Kill', N.S. Tsodokova, *On thermal stresses in halfspace heated by concentrated flux of energy* (in Russian) P.M.M. 52, 675-684 (1988)
45. Y.J. Lee, H.L. Julien, *Calculated temperature and stress distribution in the edge cladding of a pulsed-laser slab*, Trans. of the ASME J. Heat Transfer, 111, 243-248 (1989)
46. B.L. Timan, V.M. Fesenko, *Thermoelastic stresses in disk resulting from action of concentrated or cylindrical heat sources* (in Russian) Prikl. mekhanika, 25, 128-131 (1989)
47. J.C. Strikwerda, A.M. Scott, *Thermoelastic response to a short laser pulse*, J. Thermal Stresses 7, 1-17 (1984)
48. MS. Boyko, *Generalized dynamical problem of thermoelasticity for halfspace heated by laser radiation* (in Russian) P.M.M. 49, 470-475 (1985)
49. J. Ignaczak and Mrówka-Matejewska, *One-dimensional Green's function in temperature-rate dependent thermo-elasticity*, J. Thermal Stresses 13, 281-296 (1990)
50. B.S. Yilbas, *The validity of Fourier theory of radiation heating of metals*, Res Mechanica 24, 377-382 (1988)
51. A.N. Dharmasi, A.B. Hassam, *Production of pico and subpicosecond optoacoustic pulses*, J. Acoust. Soc. Am. 85, 1560-1568 (1989)
52. K. Makowski, *Determination of the nonequilibrium corrections to the laser sustained Ar-Al plasma parameters*, The Proc. of Third Polish-Japanese Joint Seminar on Modelling and Control of Electromagnetic Phenomena, April 19-21, 1993, Kazimierz Dolny, Poland
53. W. Nowacki, *Dynamic problems of thermoelasticity*, PWN Warsaw and Noordhoff Leyden, 1975
54. H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1947
55. G.A. Korn, Th.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Mc Graw-Hill, New York 1968
56. J. Zimny, *Teoretyczne i eksperymentalne badania zjawisk fizycznych w materiałach obrabianych laserowo* LBM Mechanika, z. 64, Politechnika Krakowska Zeszyt Naukowy Nr. 6, Kraków 1981