

**Joanna Sokół-Supel**

**ANALIZA POKRYWY ZAMYKAJĄCEJ  
KOŁOWY ZBIORNIK  
WYPEŁNIONY CIECZĄ**

**1/1995**

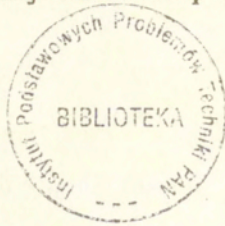
P. 269



**WARSZAWA 1995**

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 listopada 1994 r.



56608



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,50 Ark. druk. 2,0  
Oddano do drukarni w styczniu 1995 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul. Jasna 1

## Analiza pokrywy zamykającej kołowy zbiornik wypełniony cieczą

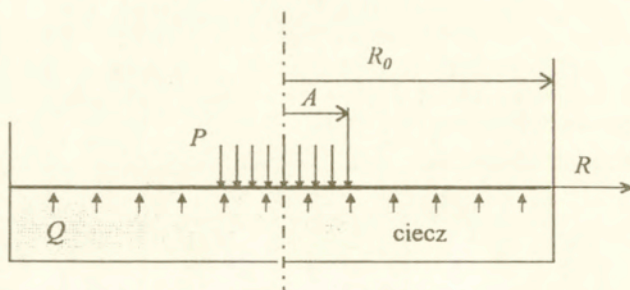
### 1. Wprowadzenie

Dotychczas jako model obliczeniowy pokrywy przyjmowano bądź płytę sprężystą, [2,3], bądź sztywno-plastyczną, [1,6]. W pracy przyjęto model płyty sprężysto-idealnie plastycznej jako bliższy rzeczywistości i pozwalający ocenić ugięcia płyty w trakcie całego procesu obciążania, tzn. do momentu osiągnięcia nośności granicznej.

Celem pracy jest podanie analitycznego pełnego opisu deformacji płyty w trakcie narastania obciążeń aż do częściowego lub całkowitego jej uplastycznienia.

Rozważa się sprężysto-plastyczną płytę o obrotowej symetrii geometrii i obciążenia, zamykającą zbiornik wypełniony cieczą idealną, rys.1. Płyta jest obciążana kwasi- statycznie.

Sprężyste rozwiązanie dla takiej płyty otrzymał Kerr, [2,3]. Nośność graniczną dla płyty swobodnie podpartej badali Hodge i Chang-Kuei Sun, [1], zaś Lance i Robinson dla płyty utwierdzonej, [6]. Do analizy płyty sprężysto-plastycznej zamykającej zbiornik z cieczą wykorzystano równania i metodę przedstawione przez autorkę dla płyt swobodnie leżących na sprężystym podłożu, [7,8,9].



Rys.1 Schemat obciążenia płyty zamykającej ciecz

W odróżnieniu od płyty swobodnie pływającej (leżącej na podłożu), w przypadku płyty zamykającej ciecz, bez możliwości jej swobodnego wypłynięcia, dodatkową niewiadomą jest ciśnienie cieczy na dolną powierzchnię płyty.

## 2. Założenia

W analizie przyjęto wszystkie założenia liniowej teorii sprężystości jak również teorii nośności granicznej płyt cienkich. Płyta uplastycznia się zgodnie z warunkiem plastyczności Treski. W dalszym opisie zastosowano następujące oznaczenia:

Wielkości zwymiarowane

$R$ [cm], $\theta$	- współrzędne biegunowe
$R_o$ [cm]	- promień płyty
$A$ [cm]	- promień strefy obciążonej
$R_p$ [cm]	- promień strefy uplastycznionej
$H$ [cm]	- grubość płyty
$\eta = 2R_o/H$	- smukłość płyty
$\nu$	- współczynnik Poisson'a
$E$ [daN/cm <sup>2</sup> ]	- moduł Young'a
$E_c$ [daN/cm <sup>2</sup> ]	- moduł sprężystości cieczy



$D$ [daNcm]	- sztywność płyty
$W$ $W_0$ [cm]	- ugięcie płyty, ugięcie w środku
$k$ [daN/cm <sup>3</sup> ]	- ciężar właściwy cieczy (wsp. podatności podłoża)
$kW$ [daN/cm <sup>2</sup> ]	- reakcja cieczy (podłoża)
$P$ [daN/cm <sup>2</sup> ]	- obciążenie równomiernie rozłożone
$\bar{P}$ [daN/cm]	- obciążenie liniowe
$P_T$ [N]	- obciążenie całkowite
$Q$ [daN/cm <sup>2</sup> = bar]	- ciśnienie cieczy
$M$ [daNcm/cm]	- obciążenie liniowe momentem
$M_r, M_\theta$ [daNcm/cm]	- moment radialny i obwodowy
$S$ [daN/cm]	- siła poprzeczna
$K_r, K_\theta$ [1/cm]	- składowe krzywizny
( $\cdot$ )	- oznacza prędkości zmiany odpowiedniej wielkości

#### Wielkości odniesienia

$L$ [cm]	- długość odniesienia
$L = \sqrt[3]{D/k}$	- dla płyty pływającej (na podłożu)
$L = R_0$	- dla płyty nie leżącej na podłożu
$M_0$ [daNcm/cm]	- plastyczny (graniczny) moment odniesienia

#### Wielkości bezwymiarowe

$$\rho = \frac{R}{L}, \quad \rho_0 = \frac{R_0}{L}, \quad a = \frac{A}{L}, \quad \rho_p = \frac{R_p}{L}$$

$$p = \frac{PL^2}{M_0}, \quad q = \frac{QL^2}{M_0}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{P}L^2}{M_0} \quad (2.1)$$

$$m_i = \frac{M_i}{M_0}, \quad i=r,\theta,0, \quad s = \frac{SL}{M_0}$$

$$w = \frac{D}{M_0 L^2} W, \quad \kappa_i = K_i \frac{D}{M_0}, \quad i = r, \theta$$

$$a) \frac{W}{L} = \frac{M_0 L}{D} w, \quad b) \frac{W}{H} = \frac{M_0 L^2}{DH} w, \quad c) \frac{WH}{L^2} = \frac{HM_0}{D} w \quad (2.2)$$

Wartość długości odniesienia dla płyt leżących na sprężystym podłożu wynika z przyjęcia, że  $kL^4/D = 1$ , co pozwala na sprowadzenie równania różniczkowego dla płyty sprężystej  $D \Delta^2 \Delta^2 W = P - kW$  do postaci  $\Delta^2 \Delta^2 w = (p - w)$  w zmiennych bezwymiarowych.

W teorii nośności granicznej, której rozwiązanie jest górną granicą rozwiązania sprężysto-plastycznego, przyjmuje się na ogół wielkości bezwymiarowe (2.1), zaś bezwymiarowe prędkości ugięć jako jedną z możliwości podanej w (2.2):

$$a) \frac{\dot{W}}{L} = \dot{w} \quad \text{wtedy} \quad \dot{\kappa}_i = L\dot{K}_i$$

$$b) \frac{\dot{W}}{H} = \dot{w} \quad \text{wtedy} \quad \dot{\kappa}_i = \frac{L^2}{H}\dot{K}_i$$

$$c) \frac{\dot{W}H}{L^2} = \dot{w} \quad \text{wtedy} \quad \dot{\kappa}_i = H\dot{K}_i$$

Dla uproszczenia analizy założono, że przekrój płyty jest całkowicie sprężysty lub całkowicie idealnie-plastyczny, co spełnione jest ściśle jedynie w przypadku płyt sandwiczowych, tzn. gdy moment graniczny i sztywność płyty są zadane w następujący sposób:

$$M_0^{\bar{}} = \sigma_0 T H_1 = M_{p.upl.}^{\bar{}} \quad \text{i} \quad D^{\bar{}} = \frac{E H_1^2 T}{2(1 - \nu^2)},$$

gdzie  $T$  jest grubością półki,  $H_1$  odległością między półkami, a  $M_{p.upl.}^{\bar{}}$  jest momentem sprężystym odpowiadającym pierwszemu uplastycznieniu w płycie. W rzeczywistości mamy przeważnie do czynienia z płytą o pełnym przekroju i następujących: momencie granicznym, momencie pierwszego uplastycznienia i sztywności:

$$M_0^{\circ} = \sigma_0 H^2 / 4, \quad M_{p.upl.}^{\circ} = \sigma_0 H^2 / 6 \quad \text{i} \quad D^{\circ} = \frac{E H^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Wobec powyższego nie można ustalić pełnej odpowiedniości pomiędzy tymi przekrojami, bo należałoby spełnić trzy równości:

$$D^{\bar{}} = D^{\circ}, \quad M_0^{\bar{}} = M_0^{\circ}, \quad M_{p.upl.}^{\bar{}} = M_{p.upl.}^{\circ},$$

a możemy spełnić tylko dwie z nich, mamy bowiem tylko dwa wolne parametry do wyznaczenia  $T$  i  $H_1$ . Przyjmijemy, że spełnione są równości

$D^{\bar{}} = D^{\circ}$ ,  $M_0^{\bar{}} = M_0^{\circ}$  stąd  $H_1 = 2H/3$  i  $T = 3H/8$ ; przy tak wyznaczonych wielkościach  $H_1$  i  $T$  wyniki liczbowe dla płyty sandwiczowej są takie same jak dla płyty pełnej o wysokości  $H$ .

W ogólnym przypadku na płytę zamykającą ciecz, poza obciążeniem zewnętrznym, działa równomierne ciśnienie  $Q$  (Prawo Pascala) oraz reakcja cieczy  $kW$ , gdzie  $W$  jest ugięciem płyty, a  $k$  podatnością cieczy, obie skierowane przeciwnie do obciążenia zewnętrznego.

Kerr wykazał, [3], że wpływ reakcji  $kW$  (the buoyancy) na wartości sił wewnętrznych i ugięcia w płycie sprężystej jest pomijalnie mały dla następujących zakresów parametrów układu "płyta-ciecz":

$0 < R_o/L < 2$  w przypadku cieczy nieściśliwej zamkniętej w zbiorniku,

$0 < R_o/L < 1$  w przypadku gdy ciecz ma swobodę wypływu.

Układ "płyta-zamknięta ciecz ściśliwa" zawiera się pomiędzy tymi przypadkami. Z drugiej strony, w pracach, [1,6], rozpatrujących analogiczne zadanie ale z płytą idealnie sztywno-plastyczną pominięto wpływ wyporu cieczy  $kW$  na wartość nośności granicznej, co jest oczywiste ponieważ bada się chwilę rozpoczęcia ruchu, tzn. gdy ugięcia są bliskie zeru. W warunkach laboratoryjnych wypór cieczy można zrównoważyć pokrywając płytę-próbkę cienką warstwą takiej samej cieczy.

W dalszym ciągu problem płyty zamykającej ciecz będziemy analizować pomijając wpływ wyporu  $kW$  na rozwiązanie tzn. w równaniach równowagi pominiemy w drugim członie składnik sumy  $kW$ . Równania różniczkowe i ich rozwiązania ogólne odpowiadające różnym strefom plastycznym zostały zebrane poniżej w rozdziałach 3 i 4.

### 3. Podstawowe równania problemu

Na podstawowe równania opisujące deformację płyty sprężysto plastycznej składają się:

równania równowagi

$$(s\rho)' + (p - q)\rho = 0, \quad (3.1)$$



$$(m_r \rho)' - m_\theta - s\rho = 0, \quad (3.2)$$

związki geometryczne

$$\kappa_r = -w'', \quad \kappa_\theta = -w'/\rho \quad (3.3)$$

spełniające prawo addytywności

$$\kappa_r = \kappa_r^e + \kappa_r^p, \quad \kappa_\theta = \kappa_\theta^e + \kappa_\theta^p \quad (3.4)$$

gdzie składowe sprężystej części krzywizny spełniają prawo Hooke'a

$$\kappa_r^e = \frac{1}{1-\nu^2}(m_r - \nu m_\theta), \quad \kappa_\theta^e = \frac{1}{1-\nu^2}(m_\theta - \nu m_r) \quad (3.5)$$

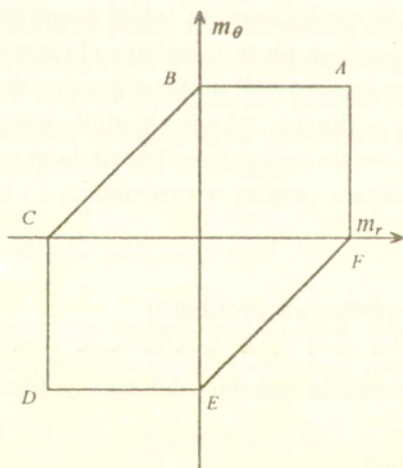
zaś składowe prędkości zmiany krzywizny plastycznej spełniają stowarzyszone prawo płynięcia

$$\dot{\kappa}_r^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_r}, \quad \dot{\kappa}_\theta^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial m_\theta}, \quad \lambda > 0 \quad (3.6)$$

przy powierzchni plastyczności Treski

$$F = \sup(|m_r|, |m_\theta|, |m_r - m_\theta|) = m_0 \quad (3.7)$$

pokazanej na rys.2.



Rys.2 Warunek plastyczności Treski



Dodatkowy warunek, który powierzchnia ugięcia płyty musi spełniać w przypadku gdy płyta zamyka ciecz bez możliwości jej wyciekania przyjmuje następującą postać:

$$\int \int_A W dA = \Delta V \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} W R dR d\theta = \Delta V \Rightarrow 2\pi \int_0^{R_0} W R dR = \Delta V \quad (3.8)$$

po podstawieniu  $W = wM_0L^2/D$  i  $R = \rho L$  otrzymujemy bezwymiarową zmianę objętości  $\Delta v = \Delta V D / M_0 L^4$  i równanie określające zmianę objętości cieczy w wersji bezwymiarowej przyjmuje postać:

$$\int_0^{\rho_0} w \rho d\rho = \frac{1}{2\pi} \Delta v \quad (3.9)$$

W przypadku cieczy nieściśliwej  $\Delta v = 0$ , dodatkowy warunek na obliczenie ciśnienia  $q$  w cieczy jest następujący

$$\int_0^{\rho_0} w \rho d\rho = 0 \quad (3.10)$$

Dla cieczy ściśliwej rozpatrzono dwa przypadki, pierwszy gdy ciśnienie w cieczy jest liniowo zależne od zmiany objętości cieczy i drugi gdy zmiana objętości cieczy jest nieliniową funkcją ciśnienia,  $\Delta V = f(Q)$ .

a) Ciśnienie w cieczy jest liniowo zależne od zmiany objętości cieczy, tzn.

$$Q = E_c \frac{\Delta V}{V_{pocz.}} \Rightarrow \Delta V = Q \frac{V_{pocz.}}{E_c} \quad (3.11)$$

gdzie  $E_c$  jest modulem sprężystości objętościowej zamkniętej w zbiorniku cieczy. Zamiast modułu  $E_c$  o wymiarze [daN/cm<sup>2</sup>] wprowadzono współczynnik ściśliwości  $\Phi = V_{pocz.}/E_c$  o wymiarze [cm<sup>5</sup>/daN], który jest wygodniejszy gdy nie jest znana początkowa objętość cieczy w zbiorniku, a tylko jej zmiana. Teraz

$$\Delta V = \Phi Q, \quad (Q = \frac{\Delta V}{\Phi}). \quad (3.12)$$

jeśli  $\Phi \Rightarrow 0$ , ( $E_c \Rightarrow \infty$ ) to ciecz jest nieściśliwa,

jeśli  $\Phi \Rightarrow \infty$ , ( $E_c \Rightarrow 0$ ) to  $Q \Rightarrow 0$ , (płyta zachowuje się tak jakby cieczy nie było).

Zmiana objętości w równaniu (3.9):

$$\frac{1}{2\pi} \Delta v = \frac{1}{2\pi} \Delta V \frac{D}{M_0 L^4} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \Delta v = \frac{1}{2\pi} Q \Phi \frac{D}{M_0 L^4}$$

stąd po podstawieniu  $Q = q M_0 / L^2$  otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi} \Delta v = \varphi q \quad \text{gdzie} \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \Phi \frac{D}{L^6}$$

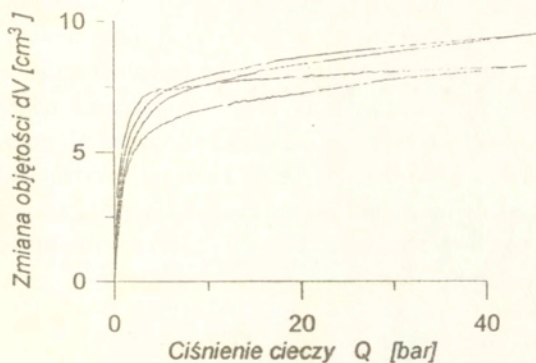
$\varphi$  jest bezwymiarowym współczynnikiem ściśliwości; ( $0 < \varphi < \infty$ ), czyli równanie (3.9) jest następujące

$$\int_0^{\rho_0} w \rho d\rho = \varphi q \quad (3.13)$$

Współczynnik  $\varphi$  musi być w zadaniu dany, ale można nadal nie wprowadzać do obliczeń wymiarów płyty. Praktycznie, przy  $\varphi > 3$  współczynnik ściśliwości  $\Phi$  jest tak duży, że płyta zachowuje się tak jakby cieczy nie było. (znaczące wartości ciśnienia w cieczy  $q$  otrzymuje się dla  $\varphi$  bliskich zero).

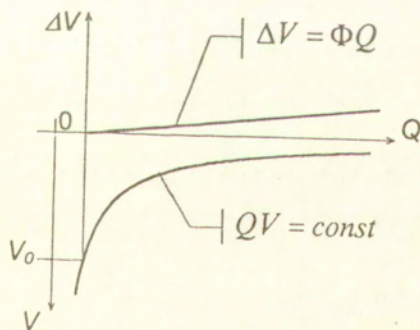
b) Ciecz ściśliwa gdy zmiana objętości jest nieliniową funkcją  $Q$ . Przedstawimy tu szczególny przypadek takiej funkcji, która opisuje zmianę objętości cieczy zaobserwowaną w doświadczeniu modelującym płytę zamykającą zbiornik wypełniony cieczą.

Ściśliwość urządzenia, nawet jeśli pomija się wpływ odkształcalności zbiornika, jest pochodną wielu czynników. Do najważniejszych należy zaliczyć ściśliwość cieczy i podatność uszczelki między dnem zbiornika a próbką oraz ściśliwość pęcherzyków powietrza, których w doświadczeniu trudno uniknąć.



Rys.3 Doświadczalna charakterystyka ścisłości cieczy

Otrzymane doświadczalnie zależności zmiany objętości cieczy od ciśnienia, rys.3, sugerują żeby zmianę objętości cieczy przedstawić jako sumę dwóch składników, rys.4.



Rys.4 Uproszczony opis ścisłości cieczy

Pierwszy liniowy względem ciśnienia,  $\Delta V_1 = \Phi Q$ , jest spowod-



wany ściśliwością cieczy oraz podatnością uszczelki. Składnik ten przy małych ciśnieniach ma niewielki wpływ na ściśliwość urządzenia. Drugi składnik opisuje ściśliwość pęcherzyków powietrza i ma znaczący wpływ tylko na początku procesu; przy założeniu, że doświadczenie wykonywane jest w stałej temperaturze, tzn.  $QV = const.$ , ma następującą postać:  $\Delta V_2 = V_o Q / (Q_o + Q)$ , gdzie  $V_o$  i  $Q_o$  są odpowiednio początkową objętością pęcherzyków powietrza w cieczy i początkowym ciśnieniem, a  $Q$  jest nadwyżką ciśnienia ponad początkowe. Całkowaną zmianę objętości cieczy, którą wprowadzamy do równania (3.8) można przedstawić jako następującą funkcję:

$$\Delta V = \Phi Q + V_o \frac{Q}{Q_o + Q} \quad (3.14)$$

#### 4. Równania różniczkowe i ich rozwiązania ogólne

Poniżej podano równania różniczkowe oraz ich rozwiązania ogólne opisujące proces deformacji płyty dla różnych stref sił wewnętrznych, które mogą pojawić się w płycie w trakcie narastania obciążeń.

##### 4.1 Rozwiązanie sprężyste

Zginanie części sprężystej płyty opisuje dobrze znane, [10], równanie różniczkowe

$$w^{IV} + \frac{2}{\rho} w^{III} - \frac{1}{\rho^2} w^{II} + \frac{1}{\rho^3} w^I = p - q \quad (4.1)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$w(\rho) = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \ln \rho + C_4 \ln \rho + \frac{p - q}{64} \rho^4 \quad (4.2)$$

$$w' = 2C_2 \rho + C_3 \rho (1 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho} + \frac{p - q}{16} \rho^3$$

Krzywizny, momenty zginające i siła poprzeczna są dane wyrażeniami:

$$\kappa_{\theta} = -2C_2 - C_3(1 + 2 \ln \rho) - C_4 \frac{1}{\rho^2} - \frac{p-q}{16} \rho^2$$

$$\kappa_r = -2C_2 - C_3(3 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho^2} - \frac{3(p-q)}{16} \rho^2$$

$$m_r = -2C_2(1+\nu) - C_3(3+\nu+2(1+\nu) \ln \rho) + C_4 \frac{1-\nu}{\rho^2} - \frac{(3+\nu)(p-q)}{16} \rho^2 \quad (4.3)$$

$$m_{\theta} = -2C_2(1+\nu) - C_3(1+3\nu+2(1+\nu) \ln \rho) - C_4 \frac{1-\nu}{\rho^2} - \frac{(1+3\nu)(p-q)}{16} \rho^2$$

$$s = -C_3 \frac{4}{\rho} - \frac{p-q}{2} \rho$$

Lewa strona wyrażenia (3.9) zapisuje się następująco

$$\int w \rho d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} + C_3 \rho^4 \left( \frac{\ln \rho}{4} - \frac{1}{16} \right) + C_4 \rho^2 \left( \frac{\ln \rho}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{p-q}{64} \frac{\rho^6}{6}, \quad (4.4)$$

gdy  $\rho = 0$  należy do części sprężystej płyty, stałe  $C_3 = C_4 = 0$ .

#### 4.2 Rozwiązania w strefach plastycznych.

Równania różniczkowe problemu i ich rozwiązania ogólne w strefach plastycznych, tzn., gdy wektor momentów porusza się po wieloboku plastyczności, rys.2, otrzymujemy analogicznie jak to zrobiono w pracach [7,8,9]. Pomijając wpływ podatności podłoża  $kW$  i dodając ciśnienie zamkniętej cieczy jako dodatkowe obciążenie zewnętrzne otrzymujemy w poszczególnych strefach:

STREFA AB(DE)

$$w^{IV} + \frac{2}{\rho} w^{III} = \frac{p-q}{(1-\nu^2)} \quad (4.5)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$w = C_1 + C_2 \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho \ln \rho + \frac{p-q}{72(1-\nu^2)} \rho^4 \quad (4.6)$$

$$w' = C_2 + 2C_3\rho + C_4(1 + \ln \rho) + \frac{p-q}{18(1-\nu^2)}\rho^3$$

Krzywizny, momenty zginające i siła poprzeczna:

$$\kappa_\theta = -C_2 \frac{1}{\rho} - 2C_3 - C_4 \frac{1}{\rho}(1 + \ln \rho) - \frac{p-q}{18(1-\nu^2)}\rho^2$$

$$\kappa_r = -2C_3 - C_4 \frac{1}{\rho} - \frac{p-q}{6(1-\nu^2)}\rho^2$$

$$m_\theta = \pm m_0 \quad (4.7)$$

$$m_r = \pm \nu m_0 - 2C_3(1-\nu^2) - C_4 \frac{1-\nu^2}{\rho} - \frac{p-q}{6}\rho^2$$

$$s = \mp \frac{m_0(1-\nu)}{\rho} - 2C_3 \frac{1-\nu^2}{\rho} - \frac{p-q}{2}\rho$$

Znaki górne w powyższych wyrażeniach odpowiadają strefie AB, a dolne strefie DE.

Lewa strona wyrażenia (3.9) dla strefy AB(DE)

$$\int w \rho d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^3}{3} + C_3 \frac{\rho^4}{4} + C_4 \rho^3 \left( \frac{\ln \rho}{3} - \frac{1}{9} \right) + \frac{p-q}{72(1-\nu^2)} \frac{\rho^6}{6}, \quad (4.8)$$

STREFA AB zawierająca  $\rho = 0$

$$w = C_1 + C_2\rho - \frac{m_0}{2(1+\nu)}\rho^2 + \frac{p-q}{72(1-\nu^2)}\rho^4 \quad (4.9)$$

$$w' = C_2 - \frac{m_0}{(1+\nu)}\rho + \frac{p-q}{18(1-\nu^2)}\rho^3$$

Krzywizny, momenty zginające i siła poprzeczna:

$$\kappa_\theta = -C_2 \frac{1}{\rho} + \frac{m_0}{(1+\nu)} - \frac{p-q}{18(1-\nu^2)}\rho^2$$

$$\kappa_r = + \frac{m_0}{(1+\nu)} - \frac{p-q}{6(1-\nu^2)}\rho^2$$



$$m_\theta = +m_0 \quad (4.10)$$

$$m_r = +m_0 - \frac{p-q}{6} \rho^2$$

$$s = -\frac{p-q}{2} \rho$$

Lewa strona wyrażenia (3.9)

$$\int w \rho d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^3}{3} - \frac{m_0}{8(1+\nu)} \rho^4 + \frac{p-q}{72(1-\nu^2)} \frac{\rho^6}{6} \quad (4.11)$$

STREFA BC(EF)

$$w^{IV} + \frac{2}{\rho} w^{III} - \frac{1}{\rho^2} w^{II} + \frac{1}{\rho^3} w^I = \frac{2(p-q)}{(1+\nu)} \quad (4.12)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$w = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \ln \rho + C_4 \ln \rho + \frac{p-q}{32(1+\nu)} \rho^4 \quad (4.13)$$

$$w' = 2C_2 \rho + C_3 \rho (1 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho} + \frac{p-q}{8(1+\nu)} \rho^3$$

Krzywizny, momenty zginające i siłę poprzeczną w strefie BC(EF) oblicza się według wzorów

$$\kappa_\theta = -2C_2 - C_3(1 + 2 \ln \rho) - C_4 \frac{1}{\rho^2} - \frac{p-q}{8(1+\nu)} \rho^2$$

$$\kappa_r = -2C_2 - C_3(3 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho^2} - \frac{3(p-q)}{8(1+\nu)} \rho^2$$

$$m_\theta = m_r \pm m_0 \quad (4.14)$$

$$m_r = \mp \frac{1}{2} m_0 - 2C_2(1+\nu) - 2C_3(1+\nu)(1 + \ln \rho) - \frac{p-q}{4} \rho^2$$

$$s = \mp \frac{1}{\rho} m_0 - C_3 \frac{2}{\rho} (1 + \nu) - \frac{p-q}{2} \rho$$

znak górny w wyrażeniach (4.14) odpowiada strefie plastycznej BC, a dolny strefie EF.

Lewa strona wyrażenia (3.9) dla strefy BC(EF) wynosi:

$$\int w \rho d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} + C_3 \rho^4 \left( \frac{\ln \rho}{4} - \frac{1}{16} \right) + C_4 \rho^2 \left( \frac{\ln \rho}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{p-q}{32(1+\nu)} \frac{\rho^6}{6}, \quad (4.15)$$

STREFA CD (FA)

$$w^{II} - \frac{1}{\rho} w^I = -\frac{p-q}{1-\nu^2} \rho^2 \quad (4.16)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$w = C_1 + C_2 \rho^2 - \frac{p-q}{8(1-\nu^2)} \rho^4 \quad (4.17)$$

$$w' = 2C_2 \rho - \frac{1}{2} \frac{p-q}{1-\nu^2} \rho^3$$

krzywizny, momenty zginające i siłę poprzeczną oblicza się zgodnie z wzorami

$$\kappa_\theta = -2C_2 + \frac{1}{2} \frac{p-q}{1-\nu^2} \rho^2$$

$$\kappa_r = -2C_2 + \frac{3}{2} \frac{p-q}{1-\nu^2} \rho^2$$

$$m_\theta = \mp \nu m_0 - 2C_2(1-\nu^2) + \frac{p-q}{2} \rho^2 \quad (4.18)$$

$$m_r = \mp m_0$$

$$s = \mp \frac{m_0(1-\nu)}{\rho} + 2C_2 \frac{1-\nu^2}{\rho} - \frac{p-q}{2} \rho$$

postać lewej strony warunku ścisłości cieczy (3.9) dla strefy CD wynosi

$$\int w \rho d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} - \frac{p-q}{8(1-\nu^2)} \frac{\rho^6}{6}, \quad (4.19)$$

Ze względu na warunek ściśliwości (3.9) wektor momentów w części uplastycznionej płyty, w porównaniu z płytą leżącą na podłożu lub podpartą tylko na brzegach, może poruszać się także po bokach DE i EF warunku plastyczności, rys.2.

## 5. Sposób rozwiązania

Aby otrzymać rozwiązanie konkretnego problemu brzegowego należy wyznaczyć stałe całkowania, granice stref plastycznych oraz nieznanne ciśnienie  $q$  w cieczy. Do tego celu wykorzystujemy odpowiednie warunki brzegowe i wymagania ciągłości na granicach poszczególnych stref. Poniżej podano warunki brzegowe dla trzech najczęściej spotykanych sposobów podparć; brzeg wolny w rozważanym problemie może być zrealizowany jedynie w przypadku płyty nadwieszanej.

Brzeg swobodnie podparty

$$w = m_r = 0, \quad (5.1)$$

Brzeg utwierdzony

$$w = 0 \text{ i } w' = 0 \quad \text{dla brzegu w strefie sprężystej} \quad (5.2)$$

$$w = 0 \text{ i } m_r = \mp m_0 \quad \text{dla brzegu w strefie plastycznej,} \quad (5.3)$$

Brzeg wolny

$$m_r = s = 0 \quad (5.4)$$

Warunki ciągłości na granicach poszczególnych stref

$$w] = w'] = m_r] = s] = 0. \quad (5.5)$$

Warunek ciągłości momentu obwodowego

$$m_\theta] = 0 \quad (5.6)$$

służą do określenia granic między poszczególnymi strefami sił wewnętrznymi. Do wyznaczenia ciśnienia cieczy  $q$  użyto równania ściśliwości.



W wyniku zastosowania odpowiednich warunków brzegowych i wymagań ciągłości otrzymujemy układy algebraicznych równań nieliniowych

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \quad (5.7)$$

gdzie  $\mathbf{x} = (C, q, \rho)$  jest wektorem niewiadomych o następujących składowych:  $C$  - stałe całkowania  $C_i$ , gdzie  $1 \leq i \leq 2 + 4(n - 1)$ ;  $n \geq 2$  jest liczbą pojawiających się stref w płycie,  $q$  - ciśnienie w cieczy,  $\rho$  - promienie stref  $\rho_j$ ,  $1 \leq j \leq n - 2$ ,  $\mathbf{p}$  jest wektorem danych, w naszym przypadku jest to obciążenie. Tylko promienie stref  $\rho_j$  wchodzi do układu równań  $F$  nieliniowo.

Żeby pokazać przykład układu równań (5.7) weźmy płytę utwierdzoną pod obciążeniem zewnętrznym  $p$  przyłożonym na powierzchni koła o promieniu  $a$  i zamykającą ciecz nieściśliwą. Płyta jest uplastyczniona na powierzchni koła o promieniu  $\rho_1 < a$ . Siły wewnętrzne w strefie plastycznej odpowiadają bokowi  $AB$  warunku plastyczności Treski. W płycie są trzy różne strefy sił wewnętrznych;  $n = 3$ . Układ równań (5.7) jest w tym przypadku następujący:

$$w(\rho_1)] = 0 \Rightarrow F_1 = C_1 + C_2\rho_1 - \frac{m_0}{2(1+\nu)}\rho_1^2 + \frac{p-q}{72(1-\nu^2)}\rho_1^4 - C_3 - C_4\rho_1^2 - C_5\rho_1^2 \ln \rho_1 - C_6 \ln \rho_1 - \frac{p-q}{64}\rho_1^4$$

$$w'(\rho_1)] = 0 \Rightarrow F_2 = C_2 - \frac{m_0}{(1+\nu)}\rho_1 + \frac{p-q}{18(1-\nu^2)}\rho_1^3 - 2C_4\rho_1 - C_5\rho_1(1+2\ln \rho_1) - C_6 \frac{1}{\rho_1} - \frac{p-q}{16}\rho_1^3$$

$$m_r(\rho_1)] = 0 \Rightarrow F_3 = m_0 - \frac{p-q}{6}\rho_1^2 + 2C_4(1+\nu) + C_5(3+\nu+2(1+\nu)\ln \rho_1) - C_6 \frac{1-\nu}{\rho_1^2} + \frac{(3+\nu)(p-q)}{16}\rho_1^2$$

$$s(\rho_1)] = 0 \Rightarrow F_4 = C_5 \frac{4}{\rho_1}$$

$$m_{\theta}(\rho_1)] = 0 \Rightarrow F_5 = m_0 + 2C_4(1 + \nu) + C_5(1 + 3\nu + 2(1 + \nu) \ln \rho_1) \\ + C_6 \frac{1 - \nu}{\rho_1^2} + \frac{(1 + 3\nu)(p - q)}{16} \rho_1^2$$

$$w(a)] = 0 \Rightarrow F_6 = C_3 + C_4 a^2 + C_5 a^2 \ln a + C_6 \ln a + \frac{p}{64} a^4 \\ - C_7 - C_8 a^2 - C_9 a^2 \ln a - C_{10} \ln a$$

$$w'(a)] = 0 \Rightarrow F_7 = 2C_4 a + C_5 a(1 + 2 \ln a) + C_6 \frac{1}{a} + \frac{p}{16} a^3 \\ - 2C_8 a - C_9 a(1 + 2 \ln a) - C_{10} \frac{1}{a}$$

$$m_r(a)] = 0 \Rightarrow F_8 = -2C_4(1 + \nu) - C_5(3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln a) \\ + C_6 \frac{1 - \nu}{a^2} - \frac{(3 + \nu)p}{16} a^2 + 2C_8(1 + \nu) \\ + C_9(3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln a) - C_{10} \frac{1 - \nu}{a^2}$$

$$s(a)] = 0 \Rightarrow F_9 = (C_9 - C_5) \frac{4}{a} - p \frac{a}{2}$$

$$w(\rho_0) = 0 \Rightarrow F_{10} = C_7 + C_8 \rho_0^2 + C_9 \rho_0^2 \ln \rho_0 + C_{10} \ln \rho_0 - q \frac{\rho_0^4}{64}$$

$$w^I(\rho_0) = 0 \Rightarrow F_{11} = 2C_8 \rho_0 + C_9 \rho_0(1 + 2 \ln \rho_0) + C_{10} \frac{1}{\rho_0} - q \frac{\rho_0^3}{16}$$

$$\int w p d\rho = 0 \Rightarrow F_{12} = C_1 \frac{\rho_1^2}{2} + C_2 \frac{\rho_1^3}{3} - \frac{m_0}{8(1 + \nu)} \rho_1^4 + \frac{p - q}{432(1 - \nu^2)} \rho_1^6 \\ + C_3 \frac{a^2 - \rho_1^2}{2} + C_4 \frac{a^4 - \rho_1^4}{4} + C_5 \left( \frac{a^4 \ln a - \rho_1^4 \ln \rho_1}{4} - \frac{a^4 - \rho_1^4}{16} \right) \\ + C_6 \left( \frac{a^2 \ln a - \rho_1^2 \ln \rho_1}{2} - \frac{a^2 - \rho_1^2}{4} \right) + \frac{p}{384} (a^6 - \rho_1^6) \\ + C_7 \frac{\rho_0^2 - a^2}{2} + C_8 \frac{\rho_0^4 - a^4}{4} + C_9 \left( \frac{\rho_0^4 \ln \rho_0 - a^4 \ln a}{4} - \frac{\rho_0^4 - a^4}{16} \right) \\ + C_{10} \left( \frac{\rho_0^2 \ln \rho_0 - a^2 \ln a}{2} - \frac{\rho_0^2 - a^2}{4} \right) - \frac{q}{384} (\rho_0^6 - \rho_1^6)$$

Jest to układ 12 równań algebraicznych nieliniowych ze względu na granicę strefy  $\rho_1$  i liniowych ze względu na pozostałe niewiadome: 10 stałych całkowania  $C_j$  i ciśnienie w cieczy  $q$ .

Do rozwiązania (5.7) zastosowano dwie metody numeryczne: metodę Newtona bezpośrednio rozwiązującą ten układ równań i metodę przyrostową (zbliżoną do metody sił korekcyjnych), [5], gdzie zamiast jednokrotnego rozwiązania wyjściowego układu nieliniowych równań algebraicznych rozwiązujemy wielokrotnie następujący układ liniowych równań algebraicznych

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \Delta \mathbf{p} = 0 \quad (5.8)$$

z odpowiednimi warunkami początkowymi i przy zmieniających się współczynnikami układu. W szczególnym przypadku gdy w płycie pojawiają się co najwyżej trzy strefy sił wewnętrznych, w tym jedna o określonym z góry promieniu wynikającym ze sposobu obciążenia, do wyznaczenia poza zmiennymi liniowymi jest tylko jedna granica strefy. Wtedy można zadanie odwrócić zakładając, że rozkład stref jest znany, zaś niewiadome jest obciążenie i do rozwiązania otrzymujemy liniowy układ równań.

Powyżej podane metody rozwiązania problemu zostały sformułowane w skończonych wielkościach sił i przemieszczeń i mogą być zastosowane jeśli w trakcie wzrastania obciążenia w żadnym z punktów płyty nie pojawią się odciążenia lokalne. Na ogół w płytach pod wpływem obciążeń wzrastających proporcjonalnie do jednego parametru lub w sposób zbliżony możemy się spodziewać, że odciążenia lokalnych nie będzie i proces deformacji traktuje się zwykle jako niezależny od czasu (holonomiczny). W takiej sytuacji, mimo że obciążenie zewnętrzne płyty i ciśnienie cieczy w zbiorniku nie wzrastają proporcjonalnie, znajduje się płyta zamykająca zbiornik aż do chwili gdy wewnątrz płyty powstanie załom. Wtedy dalszy wzrost obciążenia powoduje zwiększanie się kąta rozwarcia załomu i kurczenie się wcześniej uplastycznionej części płyty tzn. występuje lokalnie odciążenie (redystrybucja momentów). Do opisanego procesu deformacji podstawowe równania (3.1 - 3.7) należy sformułować w przyrostach. Równania w przyrostach, ich rozwiązania i wyrażenia na przyrosty odkształceń i sił wewnętrznych zostały zebrane



w tablicy 1. Aby wykorzystać do rozwiązania problemu przyrostowego warunki brzegowe i wymagania ciągłości (5.1 - 5.6) rozwinięto układ równań  $F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$  wokół wartości  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  w szereg Taylora:

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = F(\mathbf{x}; \mathbf{p}) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \Delta\mathbf{p} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}^2} (\Delta\mathbf{x})^2 + \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}^2} (\Delta\mathbf{p})^2 \right) + \dots \quad (5.9)$$

Ponieważ lewa strona i pierwszy składnik prawej strony równania są równe zeru, zaś czony nieliniowe odrzucamy jako wielkości niższego rzędu pozostaje do rozwiązania liniowy układ

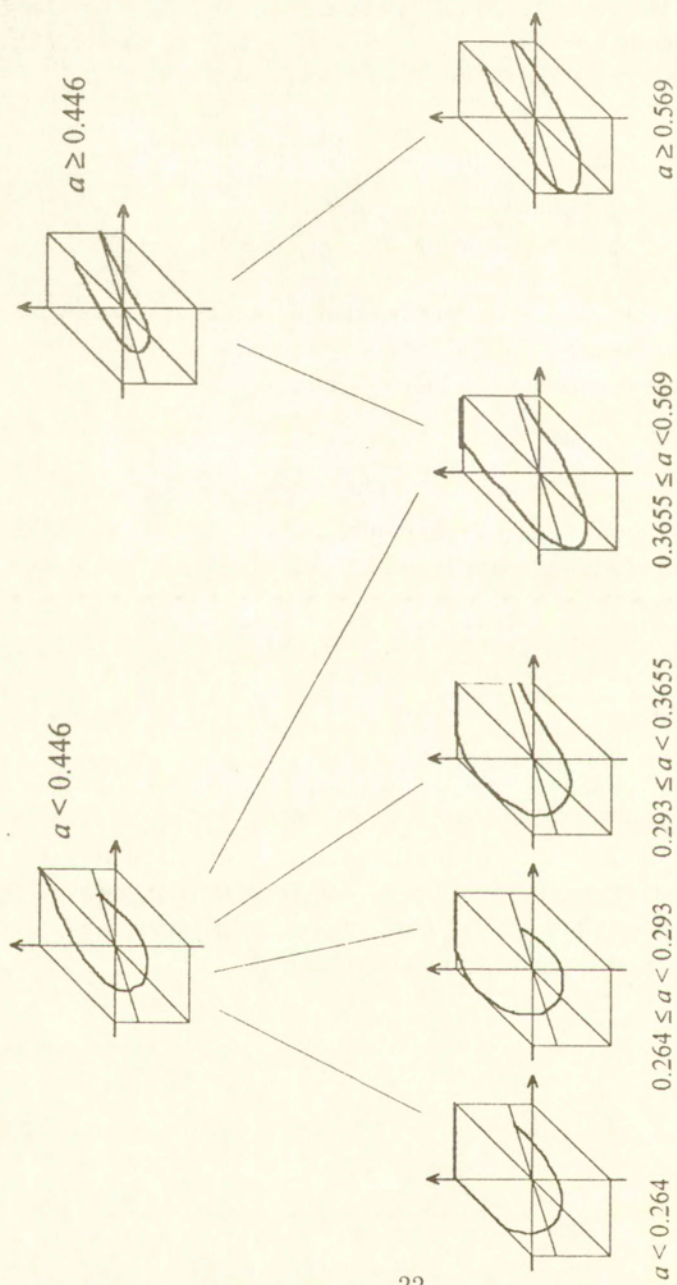
$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \Delta\mathbf{p} = 0 \quad (5.10)$$

względem przyrostów  $\Delta\mathbf{x}$  i przy założeniu, że dla  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$   $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) = 0$ . Z matematycznego punktu widzenia układ ten jest identyczny z układem równań (5.8).

## 6. Przykłady.

Dzięki otrzymanym rozwiązaniom analitycznym możemy śledzić proces deformacji płyty w zasadzie aż do całkowitego uplastycznienia. Okazuje się jednak, że dla płyt obciążonych na powierzchni koła o promieniu  $a < 0.3$ , ugięcia płyty, uplastycznionej dopiero w połowie, są tak duże, że przestaje obowiązywać teoria małych ugięć, przy założeniach której podane rozwiązania zostały otrzymane.

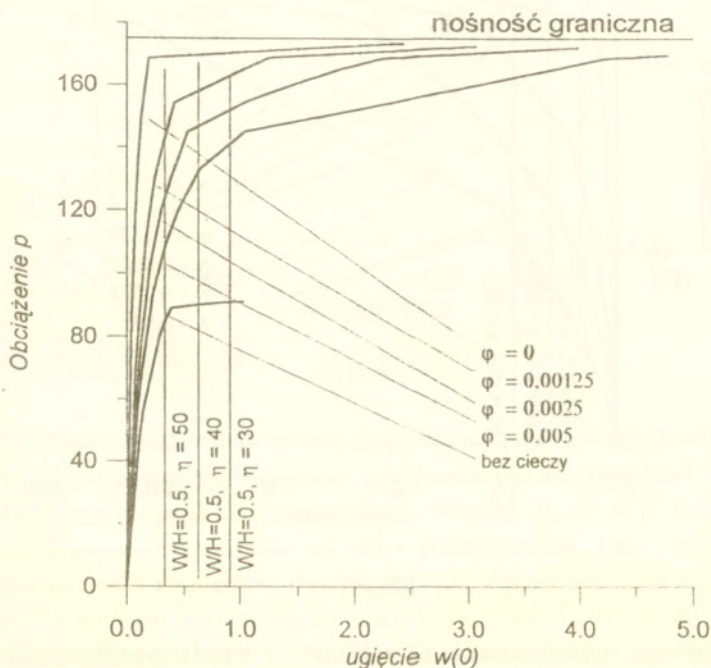




Rys. 5 Rozkład stref na początku uplastycznienia się uwierdzonej płyty zamykającej ciecz nieściśliwą

Rozwój stref plastycznych w płycie zależy od rozmiaru obciążonej powierzchni płyty (wielkość promienia  $a$ ) i od współczynnika ścisłości, w przypadku ścisłości liniowej; w przypadku ścisłości wg. nieliniowej funkcji ciśnienia  $f(Q)$  rozwój stref plastycznych zależy także od smukłości płyty  $\eta = 2R_o/H$ .

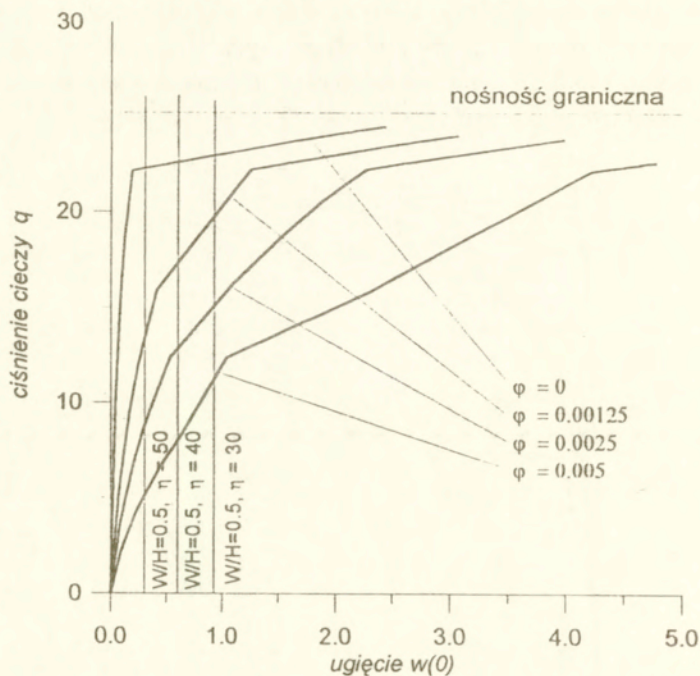
Dla utwierdzonej płyty, zamykającej ciecz nieściśliwą podano, w zależności od promienia strefy obciążonej, tylko początek uplastyczniania się płyty, rys.5. Rysunek daje pogląd jaka może być różnorodność rozkładu stref w płycie nawet w pierwszej fazie obciążania.



Rys.6

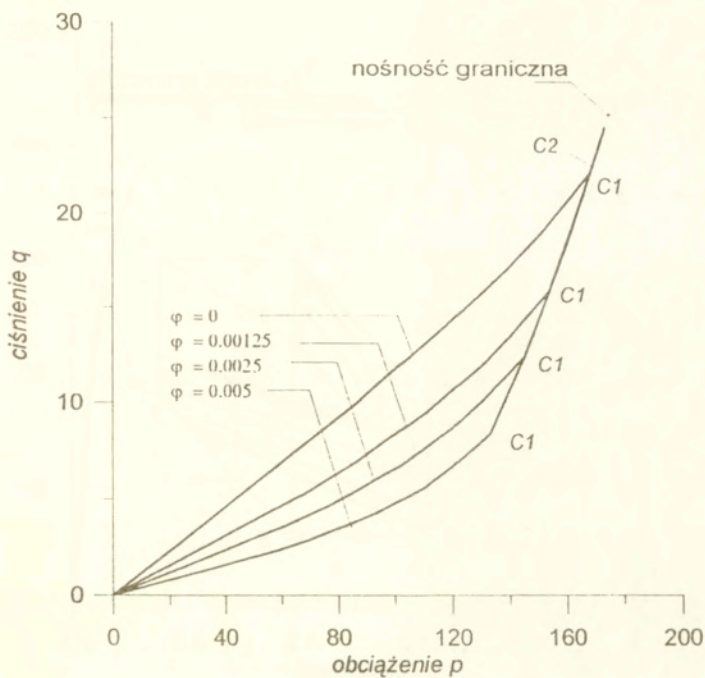
Na przykładzie płyty utwierdzonej na brzegach o promieniu strefy obciążonej  $a = 0.2$ , zamykającej ciecz ściśliwą, prześledzimy rozwój stref plastycznych wraz ze wzrostem intensywności obciążenia zewnętrznego.

Podstawowe wyniki przedstawiono na trzech wykresach  $p - w(0)$ , rys.6,  $q - w(0)$ , rys.7, i  $q - p$ , rys.8, dla czterech współczynników ściśliwości  $\varphi = 0, 0.00125, 0.0025, 0.005$ . Na rysunkach wyraźnie widać, że otrzymane rozwiązania asymptotycznie zbiegają do nośności granicznej odpowiedniej płyty zamykającej ciecz nieściśliwą.



Rys.7

Pierwsze uplastycznienie niezależnie od współczynnika ściśliwości cieczy występuje w środku płyty (punkt A na sześcioboku Treski). Następnie strefa plastyczna rozrasta się od środka w sposób ciągły opływając kolejne boki warunku plastyczności.

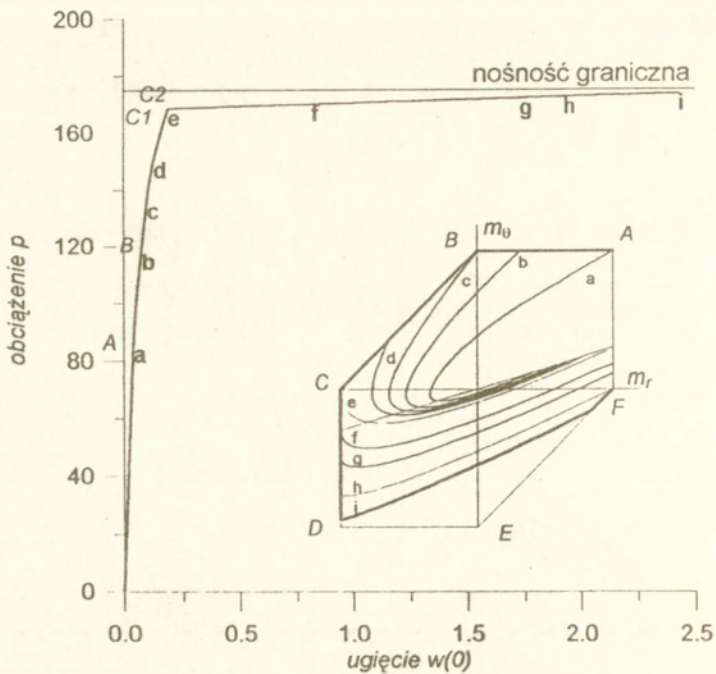


Rys.8

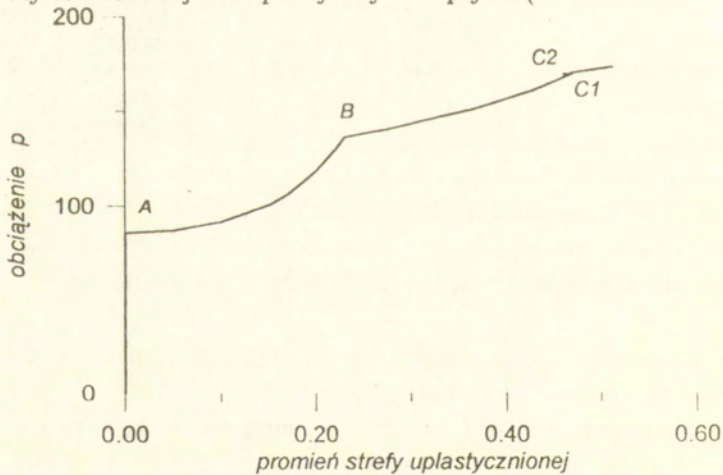
Profile momentów i zależność promienia strefy uplastycznionej od obciążenia zewnętrznego pokazane są odpowiednio na rysunkach 9a i 9b dla płyty zamykającej ciecz nieściśliwą. Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C(C1, C2)$  na krzywej odpowiadają narożom warunku plastyczności, tzn. obciążeniu dla którego profil momentów do nich dociera. Po dotarciu do naroża  $C$  (punkt  $C1$  na wykresie) następuje odciążenie lokalne; wyraźniej jest to widoczne dla cieczy ściśliwej, rys 10b. Dlaczego tak się dzieje tłumaczy rys.8.

W pierwszej fazie obciążania, aż do osiągnięcia przez strefę plastyczną naroża  $C$  warunku plastyczności (punkty  $C1$  na rys.8) ciśnienie cieczy i obciążenie wzrastają niemal proporcjonalnie do jednego parametru. W punkcie  $C1$  następuje skokowa zmiana współczynnika proporcjonalności.

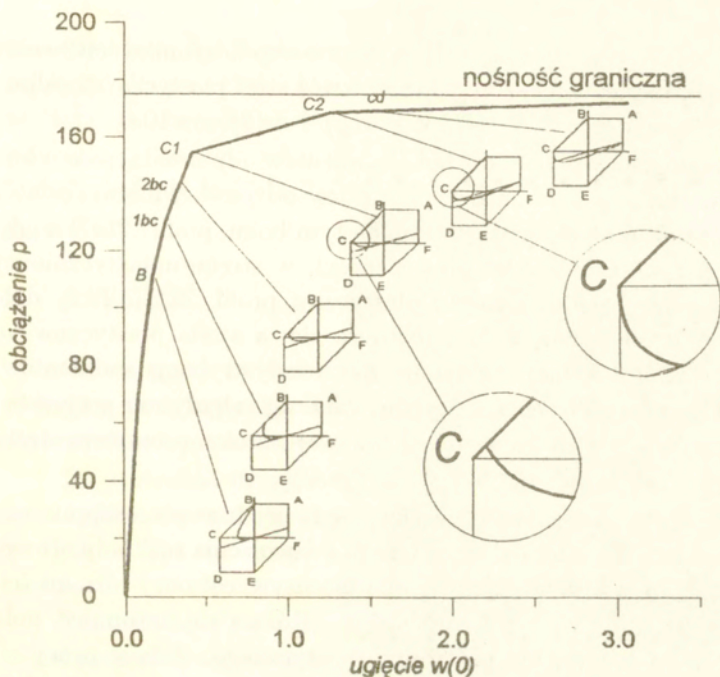




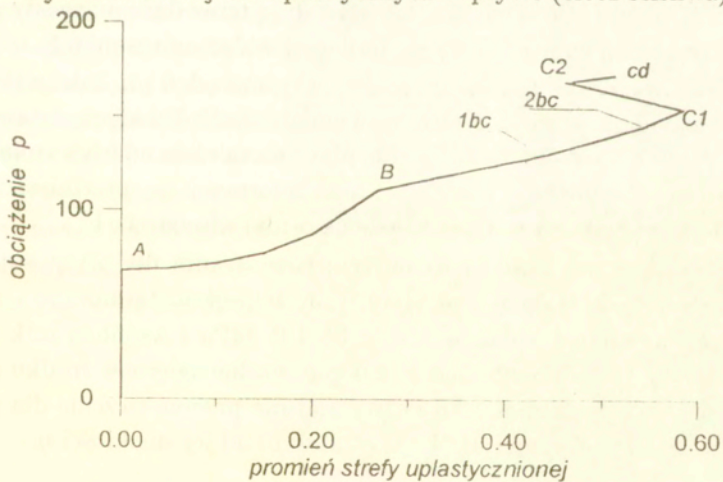
Rys.9a Rozwój stref plastycznych w płycie (ciecz nieściśliwa).



Rys.9b Zmiana promienia strefy uplastycznionej.



Rys.10a Rozwój stref plastycznych w płycie (ciecz ściśliwa).



Rys.10b Zmiana promienia strefy uplastycznienia.

Na przykładzie płyty zamykającej ciecz o współczynniku ściśliwości  $\varphi = 0.00125$  prześledzimy szczegółowo rozwój stref plastycznych odpowiadających fragmentowi  $BC1C2$  krzywej  $p - w(0)$ , rys.10a.

Po osiągnięciu w płycie rozkładu momentów odpowiadającemu bokowi  $BC$  warunku plastyczności, począwszy od pewnej intensywności obciążenia profil momentów zawija się na tym boku, profil "2bc", a gdy dotrze do naroża  $C$  warunku plastyczności, w strefie uplastycznionej płyty, powstaje obwodowy załom plastyczny, profil "C1". Przy dalszym wzroście obciążenia załom rozwiera się, a strefa plastyczna się cofa (odciążenie lokalne); następuje tzw. redystrybucja momentów. Od tego momentu obliczenia są wykonywane wg. algorytmu przyrostowego. Wyraźniej jest to widoczne na krzywej wzrostu promienia strefy plastycznej w zależności od obciążenia, rys.10b.

Strefa plastyczna cofa się do chwili gdy jej krawędź osiągnie naroże  $C$ , profil "C2". Dla dalszego wzrostu obciążenia rozkłady sił wewnętrznych odpowiadające tym samym intensywnościom i różnym ściśliwościom ciecz nie różnią się od siebie. Różnią się natomiast pola przemieszczeń i kąt rozwarcia załomu plastycznego. Bilans pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych jest w dalszym ciągu spełniony. Małe przyrosty obciążenia zewnętrznego wywołują teraz duże przyrosty przemieszczeń i ciśnienia w cieczy, co najlepiej widać na rysunku 8.

Wróćmy jeszcze raz do wykresów na rysunkach 6 i 7. Zależności  $p - w$  i  $q - w$  podano w wielkościach bezwymiarowych. Takie przedstawienie jest wygodne bo obejmuje wszystkie płyty niezależnie od ich wymiarów i stałych materiałowych. Wadą jest, brak informacji czy przemieszczenia spełniają przyjęte na wstępie założenie o małych ugięciach.

Zbadajmy wielkości ugięć w tym rozwiązaniu dla płyty stalowej o następujących stałych materiałowych: naprężenie graniczne -  $\sigma_0 = 210.2$  MPa, moduł Young'a  $E = 2.06 \cdot 10^5$  MPa i współczynnik Poisson'a  $\nu = 0.3$ . Jeśli przyjmiemy za dopuszczalne ugięcie w środku płyty rzędu jej połowy grubości, to bezwymiarowe przemieszczenie dla płyty z podanego wyżej materiału będzie zależało od jej smukłości  $\eta$ .

$$w = \frac{W}{H} \frac{4E}{3\sigma_0(1 - \nu^2)} \frac{1}{\eta^2}$$



Na rysunkach 6 i 7 pionowymi liniami zaznaczono graniczne wielkości ugięć dla smukłości  $\eta = 30, 40, 50$ . Wyniki dalszych obliczeń poza te linie, ze względu na przyjęte założenie małych ugięć mogą nie być poprawne. W przypadku najniższej smukłości  $\eta = 30$  i cieczy nieściśliwej, promień strefy uplastycznionej przy takim ograniczeniu wynosi  $\rho_p = 0.51$ .

## 7. Wnioski

Celem pracy było zbudowanie teoretycznego modelu dla stalowej pokrywy zamykającej kołowy zbiornik z cieczą, z uwzględnieniem plastycznych odkształceń pokrywy.

Do rozważań przyjęto sprężysto-plastyczny model materiału Tresca'i i obrotowo-symetryczną płytę cienką o dowolnych warunkach brzegowych. Ciecz w zbiorniku może mieć dowolną charakterystykę ściśliwości.

Zastosowanie tego modelu pozwoliło na otrzymanie zamkniętych rozwiązań równań różniczkowych opisujących zginanie płyty sprężysto-plastycznej i podanie metody rozwiązywania konkretnych zagadnień brzegowych (możliwość dokładnego opisu deformacji w trakcie narastania obciążeń, aż do częściowego lub całkowitego uplastycznienia).

Dodatkową korzyścią z przyjęcia modelu sprężysto-plastycznego w porównaniu z metodami nośności granicznej jest możliwość oceny ugięć płyty w każdej fazie uplastycznienia.

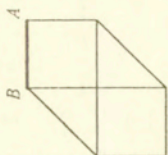
Uwzględnienie cieczy ściśliwej o dowolnej charakterystyce ściśliwości pozwala na uwzględnienie poza ściśliwością samej cieczy, także innych czynników. Ma to znaczenie przy weryfikacji wyników doświadczalnych, co będzie przedmiotem następnego analizy.

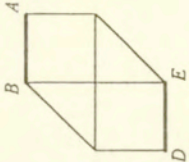
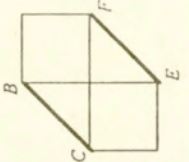
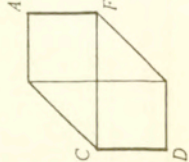


## Bibliografia

1. P.G.Hodge,Jr., Chang-Kuei Sun, Yield-point load of a circular plate sealing an incompressible fluid, *Int.J.Mech.Sci.*, **9**: 405-414, (1967)
2. A.D.Kerr, Bending of circular plates sealing an incompressible liquid, *J.Appl.Mech.*, *Trans.ASME* **32**, (Ser.E), No.3: 704-706, (1965)
3. A.D.Kerr, On plates sealing an incompressible liquid, *Int.J.Mech.Sci.*, **8**: 295-304, (1966)
4. A.D.Kerr, R.S.Becker, The stress analysis of circular plates sealing a compressible liquid, *Int.J.Mech.Sci.*, Pergamon Press Ltd., **9**: 719-726, (1967)
5. M.Kleiber, *Metoda Elementów Skończonych w Nieliniowej Mechanice Kontinuum*, PWN Warszawa-Poznań, 1985
6. R.H.Lance, D.N.Robinson, Plastic analysis of a plate sealing a fluid, *J.Eng.Mech.Div.*, *Proc.ASCE* **96**(EM 6): 1183-1194, (1970)
7. J.Sokół-Supel, Elastoplastic bending of plates resting on elastic subgrade under rotational symmetry conditions, *J.Struct.Mech.*, **13**, (3&4): 323-341, (1985)
8. J.Sokół-Supel, Bending of metallic circular plates resting on an elastic subgrade, *Ingenieur-Archiv*, **58**: 185-192, (1988)
9. J.Sokół-Supel, Elastoplastic plates resting unilaterally on elastic subgrade, *Mech.Struct.& Mach.*, **16**, (3): 335-357, (1988-89)
10. S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959

Tablica 1.

strefa	równanie różniczkowe	przyrosty sił wewnętrznych i przemieszczeń
sprężysta  $AB; \rho = 0 \in AB$ 	$\Delta w^{IV} + \frac{2}{\rho} \Delta w^{III} - \frac{1}{\rho^2} \Delta w^{II} + \frac{1}{\rho^3} \Delta w^I = \Delta p - \Delta q$ $\int \Delta w \rho dx = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} + C_3 \rho^4 \left( \frac{\ln \rho}{4} - \frac{1}{16} \right) + C_4 \rho^3 \left( \frac{\ln \rho}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Delta p - \Delta q}{384} \rho^6$	$\Delta w = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \ln \rho + C_4 \ln \rho + (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^4}{64}$ $\Delta w' = 2C_2 \rho + C_3 \rho (1 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho} + (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^3}{16}$ $\Delta m_r = -2C_2(1 + \nu) - C_3(3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln \rho) + C_4 \frac{1 - \nu}{\rho^2} - (\Delta p - \Delta q) \frac{3 + \nu}{16} \rho^2$ $\Delta m_\theta = -2C_2(1 + \nu) - C_3(1 + 3\nu + 2(1 + \nu) \ln \rho) - C_4 \frac{1 - \nu}{\rho^2} - (\Delta p - \Delta q) \frac{1 + 3\nu}{16} \rho^2$ $\Delta s = -C_3 \frac{4}{\rho} - (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho}{2}$
	$\Delta w^{IV} + \frac{2}{\rho} \Delta w^{III} = \frac{\Delta p - \Delta q}{1 - \nu^2}$ $\int \Delta w \rho dx = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^3}{3} + \frac{\Delta p - \Delta q}{432(1 - \nu^2)} \rho^6$	$\Delta w = C_1 + C_2 \rho + \frac{\Delta p - \Delta q}{72(1 - \nu^2)} \rho^4$ $\Delta w' = C_2 + \frac{\Delta p - \Delta q}{18(1 - \nu^2)} \rho^3$ $\Delta m_r = -(\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^2}{6}$ $\Delta m_\theta = 0$ $\Delta s = -(\Delta p - \Delta q) \frac{\rho}{2}$

<p>AB (DE)</p> 	$\Delta w^{IV} + \frac{2}{\rho} \Delta w^{III} = \frac{\Delta p - \Delta q}{1 - v^2}$ $\int \Delta w p d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^3}{3} + C_3 \frac{\rho^4}{4} + C_4 \rho^3 \left( \frac{\ln \rho}{3} - \frac{1}{9} \right) + \frac{\Delta p - \Delta q}{432(1 - v^2)} \rho^6$	$\Delta w = C_1 + C_2 \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho \ln \rho + \frac{\Delta p - \Delta q}{72(1 - v^2)} \rho^4$ $\Delta w' = C_2 + 2C_3 \rho + C_4(1 + \ln \rho) + \frac{\Delta p - \Delta q}{18(1 - v^2)} \rho^3$ $\Delta m_r = -2C_3(1 - v^2) - C_4 \frac{1 - v^2}{\rho} - (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^2}{6}$ $\Delta m_\theta = 0$ $\Delta s = -2C_3 \frac{1 - v^2}{\rho} - (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho}{2}$
<p>BC(EF)</p> 	$\Delta w^{IV} + \frac{2}{\rho} \Delta w^{III} - \frac{1}{\rho^2} \Delta w^{II} + \frac{1}{\rho^3} \Delta w' = (\Delta p - \Delta q) \frac{2}{1 + v}$ $\int \Delta w p d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} + C_3 \rho^4 \left( \frac{\ln \rho}{4} - \frac{1}{16} \right) + C_4 \rho^2 \left( \frac{\ln \rho}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Delta p - \Delta q}{192(1 + v)} \rho^6$	$\Delta w = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \ln \rho + C_4 \ln \rho + (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^4}{32(1 + v)}$ $\Delta w' = 2C_2 \rho + C_3 \rho (1 + 2 \ln \rho) + C_4 \frac{1}{\rho} + (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho^3}{8(1 + v)}$ $\Delta m_r = -2C_2(1 + v) - 2C_3(1 + v)(1 + \ln \rho) + C_4 \frac{1 - v}{\rho^2} - (\Delta p - \Delta q) \frac{1}{4} \rho^2$ $\Delta m_\theta = \Delta m_r$ $\Delta s = -2C_3 \frac{1 + v}{\rho} - (\Delta p - \Delta q) \frac{\rho}{2}$
<p>CD(AF)</p> 	$\frac{1}{\rho^2} \Delta w^{II} - \frac{1}{\rho} \Delta w' = -(\Delta p - \Delta q) \frac{1}{1 - v^2}$ $\int \Delta w p d\rho = C_1 \frac{\rho^2}{2} + C_2 \frac{\rho^4}{4} - \frac{\Delta p - \Delta q}{48(1 - v^2)} \rho^6$	$\Delta w = C_1 + C_2 \rho^2 - (\Delta p - \Delta q) \frac{1}{8(1 - v^2)} \rho^4$ $\Delta w' = 2C_2 \rho - (\Delta p - \Delta q) \frac{1}{2(1 - v^2)} \rho^3$ $\Delta m_r = 0$ $\Delta m_\theta = -2C_2(1 - v^2) + (\Delta p - \Delta q) \frac{1}{2} \rho^2$ $\Delta s = 2C_2(1 - v^2) \frac{1}{\rho} - (\Delta p - \Delta q) \frac{1}{2} \rho$