BOIS-REYMOND, D. TRIGONOMETRISCHEN REIHEN

Seminarjum historji ma-
tematyki, Nr 3

Dickstein

ZUR GESCHICHTE

DER

TRIGONOMETRISHEN REIHEN

EINE ENTGEGNUNG

VON

PAUL DU BOIS-REYMOND

TÜBINGEN
VERLAG DER H. LAUPP'SCHEN BUCHHANDLUNG.

PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA
4889

g. M. II 923

DRUCK VON H. LAUPP IN TÜBINGEN.

1.
Einleitung.

Unter dem Titel: Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen ist in jüngster Zeit die Dissertation eines Doctoranden an der philosophischen Facultät zu Göttingen erschienen und verbreitet worden, die, so weit sie meine Betheiligung an den Fortschritten jener Theorie anbelangt, zwar in einem Punkte Verständniss zeigt*), übrigens aber durch systematische Verschweigungen, weiter, indem sie eine längst von mir erledigte Streitfrage wieder hervorholt, um darin eine beschränkte Auffassung nachträglich zur Geltung zu bringen, endlich durch eine völlig sinnlose Bemängelung meines Integralbegriffs mich zwingt, ihren Aufstellungen, wohl bemerkt, nur wo sie gegen mich gerichtet sind, entgegenzutreten.

Freilich, stünde hinter der Schrift nur ihr Titel-Autor und wäre sie keine Dissertation, so könnte ich mir diese Mühe sparen. Man vermisst, wenn man sie zur Hand nimmt, sogleich jene Schärfe der Begriffe, jenes Zusammenwirken von

*) In der Frage nach den allgemeinsten Bedingungen, unter welchen die Coefficienten der trigonometrischen Reihe in die bekannte Integralform sich bringen lassen. Hr. O. Stolz hat indessen schon früher richtig erkannt, um was es sich handelt (Jahrbuch üb. d. Fortschr. d. Math., 1876, VIII, 128).

Freiheit und Vorsicht des Denkens, ohne welches man in diesem heiklen Gebiet nur zu leicht falsche Vorstellungen sich bildet und auf Irrwege geräth.

Um ein Beispiel von der Metaphysik der Dissertation zu geben, so stellt sie sich im Hinblick auf die sprungweisen Werthänderungen der Functionen die Frage: Was soll man verstehen unter: »Die trigonometrische Reihe stellt eine Function dar«? Die trigonometrische Reihe nimmt bekanntlich in den Sprungstellen den Mittelwerth der angrenzenden Werthe an. Die Functionen im Allgemeinen, die doch lediglich Vorschriften sind, durch welche den numerischen Werthen des Arguments numerische Werthe der Function zugeordnet werden, unterliegen überhaupt keiner Beschränkung, also auch nicht jener, in den Sprungstellen den Mittelwerth $\frac{1}{2}f(x+o)+\frac{1}{2}f(x—o)$ zu erhalten. Daraus ergiebt sich, dass eine Function, wenn sie in einem Intervall keine Sprungstelle hat, möglicherweise für jeden Punct dieses Intervalls durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann. Hat sie deren, so kann sie in den Sprungstellen nur dann dargestellt werden, wenn sie dort den Mittelwerth annimmt. Weiter lässt sich darüber natürlich Nichts sagen. Die Function ist, wie sie ist, und die Reihe auch. Eine Function, die nur in vereinzelten Puncten durch die Reihe nicht wiedergegeben wird, ist eben bis auf diese Puncte darstellbar. Eine durchweg unstetige Function wird z. B. in unzähligen Puncten darstellbar sein können, in unzähligen nicht. Das scheint sonnenklar. Der Dissertation genügt dies jedoch nicht, sondern sie macht Vorschläge (pag. 15), um der Darstellbarkeit der Functionen durch trigonometrische Reihen ein weiteres Gebiet zu eröffnen. Da an der Reihe Nichts zu ändern ist, so soll die Function sich fügen, und fortan den Sprungwerth stets an der vorschriftsmässigen Stelle tragen. Stellen wir uns aber vor, die wissenschaftliche Welt einer Epoche beschliesse wirklich, eine Zuordnung nur dann Function zu nennen, wenn der Sprungwerth an die vorgeschriebene Stelle gebracht ist, so dass alle Functionen, um als solche der Analysis angehören zu dürfen, diese Operation sich gefallen lassen müssen. Wenn nun aus dem so zugerichteten Calcül einmal eine Function hervorginge, bei welcher der Sprungwerth doch wieder an eine falsche Stelle käme, und wenn gerade dieser Sprungswerth es wäre, der das Problem löst, welche Verlegenheit! Entweder man renkt ihn vorschriftsmässig ein, dann ist die Lösung falsch, oder man lässt ihn gelten, dann ist das Princip durchbrochen.

Keineswegs spasshaft scheint es mir aber, dass die Dissertation, die eine historische sein will, hierbei noch obendrein auf Riemann sich beruft*).

Angesichts so merkwürdiger Reformvorschläge könnte ich, wie gesagt, die Angriffe jener Schrift auf sich beruhen lassen. Gewiss hat jeder publicirende Gelehrte auf eine Reihe von Fachgenossen Rücksicht zu nehmen, welche bei der mit jedem Tage mehr gebotenen Trennung der Forschungsrichtungen seinen Untersuchungen fremd bleiben und sich kein selbstständiges Urtheil darüber bilden können, an deren Achtung ihm jedoch viel gelegen ist. Sie würden sich indessen wohl sagen, dass in so abstracten Dingen die tiefere Einsicht an der Seite des Erfolges zu suchen ist, und würden in diesem Urtheil durch den zuversichtlich-absprechenden Ton der Schrift sich schwerlich beirren lassen.

Allein diese Schrift ist eben eine Dissertation, und tritt als solche mit einer gewissen Autorität auf. Hinter ihr

*) Riemann soll sich am Vorschlag der Dissertation betheiligen: gesammelte Schriften pag. 223.

steht eine sie mit ihrem Ansehen deckende und ihre Verbreitung zu erheblichem Theil übernehmende Behörde. Sie hat also gewissermassen amtlichen Charakter. Aus diesem Grunde pflegen Facultätsreferenten ihren Facultäten nicht gern Streitschriften über controverse Fragen zur Annahme zu empfehlen, geschweige Angriffsschriften, die gegen Professoren anderer Universitäten gerichtet sind.

Selbst wenn der Referent völlig im Rechte wäre, und die streitigen Behauptungen sich grosser Actualität erfreuten, so würde solcher Schritt noch immer höchst ungewöhnlich erscheinen. Man würde sich billig fragen, warum für die Veröffentlichung nicht ein neutraler Ort vorgezogen worden sei, und da man von dem Referenten doch wohl voraussetzen müsste, er werde nur im Einverständniss mit den Sachverständigen seiner Facultät*) und mit gutem Bedacht

---

*) Von Hrn. Prof. Amandus Schwarz, unter dessen Auspicien diese Dissertation veröffentlicht wurde, ist indessen vor deren Erscheinen eine ihren Inhalt betreffende Eröffnung an seine Fachgenossen in der Facultät nicht gemacht worden, wie diese Herren auf meine Anfrage mir mitzutheilen die Güte hatten. Auch wurde mir geschrieben, dass ihnen auf Grund der besonderen an ihrer Facultät bestehenden Einrichtungen keine Gelegenheit geboten war, vor dem Druck von der Arbeit Kenntniss zu nehmen.

Es sei mir gestattet, hier noch einmal zu betonen, wie bedenklich es ist, Dissertationen polemischen Charakters, besonders gegen Collegen gerichtete zuzulassen.

Der Angegriffene befindet sich offenbar in ähnlicher Lage, wie ein von Insulten durch die Tagespresse Betroffener, der nicht weiss, mit wem er es eigentlich zu thun hat, mit dem Sitzredacteur, dem Chefredacteur oder ihm bekannten Mitarbeitern des Blattes. Er wäre entschieden befugt, zunächst von der Facultät Erklärungen zu verlangen, die ihr doch immerhin peinlich sein müssten. Diese würde natürlich an ihren Berichterstatter sich halten, der ihr gegenüber verantwortlich ist. Die Facultät aus dem Spiele lassend, hat weiter der von einer Dissertation angegriffene Autor, selbst wenn es sich herausstellen sollte, dass der Titel-Autor auch intellectueller Urheber der Streitschrift ist, der Angriffsschrift zu dem nicht zu läugnenden Nachdruck einer Inauguraldissertation verholfen haben, so läge der Schluss nahe, dass ihr grosses Gewicht beizulegen sei. Kurzum es könnten Fachgenossen auf dergleichen Erwägungen hin die Aufstellungen jener Dissertation unbesehen für ebenso begründet halten, als sie es thatsächlich nicht sind. Und gerade dieser Umstand nöthigt mir eine Erwiderung ab, deren ich, schon um von meiner Zeit einen mir erspriesslicher scheinenden Gebrauch machen zu können, gern wäre überhoben gewesen.

Wie es nun eben geht, aus der kurzen Abfertigung, die ich zunächst beabsichtigte, wurden umständlichere Auseinandersetzungen; ich fand die Gelegenheit einladend, nachdem ich so lange Nichts über die Theorie der Darstellungen veröffentlicht, einen Ueberblick zu geben über meine bisherigen Untersuchungen in diesem Gebiet, die ich nun gleichsam aus der Ferne besser übersehen konnte, und namentlich die seither

---

doch ein volles Recht nicht allein gegen diesen, sondern auch gegen den Berichterstatter der Facultät sich zu wenden, der ja für die Dissertation eingetreten ist.

Ist die Dissertation vollends gegen einen Collegen gerichtet, und dieser benützte seine Stellung, um seinem Unmuth Luft zu machen, indem er z. B. gleichfalls ein Stück Tendenzgeschichte als Dissertation zuliesse, wie widerwärtig könnte ein solcher Streit ausarten!

Um nun zu meinem Fall zurückzukehren, so unterliegt es für mich keinem Zweifel, nach genauer Prüfung des Inhalts der Dissertation und nach Allem, was mir sonst über diese Angelegenheit zu Ohren gekommen ist, dass ich dem Titel-Autor Unrecht thun würde, wenn ich meine Vertheidigung gegen ihn, oder doch besonders gegen ihn richtete. Mitschuldiger ist er gewiss. Ich ziehe jedoch vor, die Autorfrage vor der Hand auf sich beruhen zu lassen, und da ich keinen andern Zweck habe, als den, mich meiner Haut zu wehren, so betrachte ich im Texte die Dissertation lediglich in abstracto als meinen Gegner, behandle sie also gleichsam als eine pseudonyme Schrift.

für die Darstellbarkeit der Functionen aufgefundenen Bedingungen zu erörtern. Ich hatte dergleichen Bedingungen in mehreren Abhandlungen mitgetheilt, mir eine eingehende Discussion des von Andern und von mir in dieser Richtung Entdeckten auf eine später zu veröffentlichende vollständige Darstellung der Theorie versparend. Dem nun greife ich hier ein wenig vor, indem ich schon jetzt eine kurze vergleichende Uebersicht über die Gültigkeitsbedingungen mittheile.

Eine ausführliche Critik der Dissertation liegt entfernt nicht in meiner Absicht. Viel weniger mühsam wäre es für mich, gleich selbst die Geschichte der Fourierschen Reihen zu schreiben. So verschieden ist meine Auffassung, dass ich fast keine Seite unterschreiben würde. Ich habe es hier, wie Eingangs bemerkt, nur mit ihren mich persönlich angehenden Verschweigungen und Angriffen zu thun.

Was jene anlangt, so stehen sie mit dem äusseren Plan der Geschichte in gewissem Zusammenhang. Auf ihn will ich zunächst etwas eingehen. Indem ich sodann die allgemeinen Grundzüge der Geschichte der trigonometrischen Reihen, wie sie meiner Vorstellung sich eingeprägt hat, zu entwerfen versuche, wird das System der Verschweigungen deutlich hervortreten.

2.

Allgemeine Grundzüge einer Geschichte der trigonometrischen Reihen.

Die Dissertation erzählt die Geschichte der trigonometrischen Reihen so, als ob es in ihrem Plane liege, sie vollständig zu sondern von der Theorie allgemeinerer analytischer Formen, mit denen sie jedoch im engsten Zusammenhang stehen, und deren mit keiner Sylbe Erwähnung geschieht.

Solche Trennung mag formal ausführbar, ja praktisch scheinen, in Wirklichkeit ist sie aber unnatürlich, und beeinträchtigt wahre Einsicht. Wer möchte z. B. die Topographie einer binnenländischen Provinz behandeln, als wäre sie eine Insel, unter systematischem Ausschluss ihrer Beziehungen zum Angrenzenden! Es müsste, um nur Eines zu erwähnen, ein Fluss, der die Grenze mehr als zweimal überschreitet, mehr als einmal unter den Flüssen der Provinz aufgezählt werden. So kann es auch nicht das richtige Verfahren sein, um den Entwickelungsgang der Theorie der trigonometrischen Reihen zu beschreiben, sie loszulösen von den grösseren Gebieten, zu denen sie gehört. Der allgemeine Begriff von darstellenden Formeln, welchen ich in mehreren Abhandlungen auszubilden bestrebt war, sollte gerade von höherem Standpunct aus einen besseren Einblick in den Inhalt der speciellen Formeln gewähren, wie es denn alltägliche Erfahrung ist, dass man das Besondere erst vom Allgemeinen aus richtig versteht.

An den trigonometrischen Reihen als solchen ist von Interesse, nur was aus ihrer eigenthümlichen Zusammensetzung entspringt. Was sie mit unzähligen anderen Formeln gemein haben, ist von Interesse eben für die gemeinsame Form, aber nicht für die trigonometrischen Reihen im Besondern. Eine weise Beschränkung ist es daher wohl kaum zu nennen, wenn man in einer Geschichte der Fourierschen Reihen sie von allem mit ihr Zusammenhängenden loslöst.

Ich vergass hervorzuheben, dass ich hier unter Geschichte nicht ein blosses Anführen der erschienenen Schriften und ihres Inhaltes verstehe, sondern jene durchleuchtete Schilderung der Fortentwickelung des wissenschaftlichen Gedankens, der, einem köstlichen Stoffe vergleichbar, zwar beständig durch die Arbeit der Forscher erzeugt wird, leider jedoch nur zu geringen Procenten in der verbrauchten Druckerschwärze enthalten ist. Ihn zu sammeln und in ein würdiges Gefäss zu füllen, ist die mühevolle und edle Aufgabe des Geschichtsschreibers.

Als Geschichtsschreiber der Fourierschen Reihen, würde ich, jenes Ziel verfolgend, zunächst zwei Aufgaben vor mir sehen. Einmal gälte es den geistigen Kampf der vor Fourierschen Epoche zu verstehen. Er setzt die Entdeckung des eigentlichen Wesens der darstellenden Formeln durch Fourier und ihre Ausdehnung auf andere Gebiete durch Laplace in das rechte Licht. Hiermit gelangt die physikalische Periode der Geschichte der darstellenden Formeln, wie man sie nennen kann, der Hauptsache nach zum Abschluss. Die Methoden sind gewonnen, sie werden weiter ausgebildet, auf neue Probleme angewandt, doch der Grundgedanke bleibt derselbe.

Die zweite Aufgabe ist die Schilderung der mathematischen Periode der Theorie. Ihr Ziel ist die streng logische Begründung der durch die Arbeiten der ersten Periode gewonnenen Formeln und Sätze. Sie wird nach einigen erfolgarmen Anläufen eröffnet durch Lejeune-Dirichlet, und führt durch zahlreiche Untersuchungen zur heutigen Lehre von den Darstellungsformeln. Bei der Geschichtsschreibung dieser zweiten Periode würde ich, wenn es sich nur um die Fourierschen Formeln handeln soll, dem oben Gesagten entsprechend, zu unterscheiden bestrebt sein zwischen dem was grösseren Classen darstellender Formeln angehört, und dem was den Fourierschen Darstellungen eigenthümlich ist.

Zum Letzteren gehören einmal die Untersuchungen, die sich mit dem Bau der Reihe rechts in:

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots \end{aligned}$$

und den aus ihr durch Integration und Differentiation entstehenden Reihen beschäftigen, dann aber die Untersuchungen, welche mehr der dargestellten Function $f(x)$ links in jener Formel gewidmet sind, also namentlich, wenn sie die Beziehungen zwischen der Summengrenze und den Coefficienten betreffen. Zwar lässt sich diese Eintheilung weder sachlich noch chronologisch völlig scharf durchführen, doch gewährt sie im Allgemeinen eine gute Uebersicht.

Ueber die gliedweise Integration besitzen wir nur die Riemannsche Habilitationsschrift, welche werthvolle dorthin gehörige Sätze enthält. Die durch einmalige Integration der trigonometrischen Reihen erhaltenen Reihen sind in der Literatur, so viel ich weiss, bis jetzt ohne Erörterung geblieben, und ich benütze den Anlass, um anzukündigen, dass ich über diesen Gegenstand gearbeitet habe, und zu mittheilenswerthen Ergebnissen gelangt bin. Er steht in enger Beziehung zum allgemeinen Problem über die gliedweise Integrirbarkeit der Reihen. Die angekündigten Resultate gelten, soweit sie trigonometrische Reihen betreffen, lediglich für Fouriersche Reihen*), oder doch für solche trigonometrische Reihen, deren Summe in einem Intervall integrirbar ist, die sich aber gleichfalls, wie ich bei dieser Gelegenheit fand und bereits veröffentlicht habe, in die Fouriersche Form bringen lassen.

In diesen Theil der Theorie gehört auch, was über die Differenzirbarkeit u. dergl. an den Tag gebracht ist, wobei aber ebenfalls Fouriersche Reihen zu Grunde gelegt werden, endlich auch die genauere Untersuchung ihrer Coefficienten.

Tritt nun weiter die darzustellende Function links in

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2y + \dots$$

in den Vordergrund, so bieten sich hier, wie in allen ähnlichen Fällen, zuerst die beiden Fragen dar: nach dem Bestimmtsein der Darstellung durch die darzustellende Function (was man auch wenig zutreffend Eindeutigkeit der Darstellung nennt) und nach der Beschaffenheit der Reihensumme $f(x)$,

---

*) Wir wollen auch hier vom allgemeinen Gebrauch uns nicht entfernen, indem wir unter trigonometrischen Reihen überhaupt Reihen der Form:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

verstehen, und sie Fouriersche Reihen nennen nur wenn bedeutet werden soll, dass die Coefficienten in die Form

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha), \quad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$$

gebracht sind (Abhandl. d. K. bayer. Akad. d. W. II. Cl. XII. Bd. II. Abth. pag. V.).

welche die oben angeführte Bestimmung der Coefficienten auf gewisse Integrale gestattet.

Was den Bericht über die einschlägigen Untersuchungen anlangt, so muss in ihm äusserst sachliche Strenge walten. Denn wir forschen hier weitab von den Strebungen der Praxis, welche aus diesen Subtilitäten für's Erste keinen Vortheil ziehen wird, ja zum Theil befinden wir uns auf metaphysischem oder wie man es jetzt nennt, metamathematischem Boden. Jedenfalls ist das Interesse an solchen Forschungen ein rein abstractes, und wenn über sie nicht völlig genau berichtet wird, so hat der Bericht keinen theoretischen Werth, und da er eben keinen practischen besitzt, so hat er gar keinen Werth. Der Historiker darf z. B. nicht übersehen, dass aus der Coefficientenbestimmung die Bestimmtheit der Darstellung nur bedingt folgt, da die Coefficienten-Integrale versagen, wenn $f(x)$ nicht integrirbar ist. Aus Hrn. G. Cantor's und meinen Untersuchungen ergiebt sich, dass hierauf in der That Rücksicht genommen werden muss. Gerade durch diese feineren Unterscheidungen wird die Forschung an die trigonometrischen Reihen gefesselt, während jene beiden Fragen bei unzähligen Reihen gestellt werden, und bei den meisten, wenn man eben von den feineren Unterschieden absieht, ein Gleiches sich ergiebt wie bei den trigonometrischen Reihen, dass es nämlich für ein und dieselbe Function nur eine Entwickelung nach einem gewissen Formelement giebt, und dass die Coefficienten durch gewisse Integrale über ein Intervall der dargestellten Function sich ausdrücken lassen.

Der dritte Hauptgegenstand der Forschung über die trigonometrischen Reihen ist die Frage, welche Eigenschaften eine Function besitzen müsse, um durch eine trigonometrische Reihe darstellbar zu sein, oder, richtiger ausgedrückt, welchen

Beschränkungen man zu diesem Zweck den allgemeinen Functionsbegriff unterwerfen müsse. Diese Frage zerfällt in eine allgemeinere, wo über die Function von vornherein Nichts vorausgesetzt ist, namentlich nicht ihre Integrirbarkeit, in welchem Falle die trigonometrische Reihe nicht in die Fourier'sche Form gebracht werden kann. Ausser einigen Stellen bei Riemann ist schwerlich über diesen allgemeinen Fall etwas an die Oeffentlichkeit gedrungen. Die bisherigen Untersuchungen über die Gültigkeit der trigonometrischen Entwickelung fassten das Problem enger auf und setzen vor allen Dingen die Integrirbarkeit der darzustellenden Function und die Fouriersche Form der Reihe voraus.

Der Zeit nach begann mit der Forschung über diesen Gegenstand die mathematische Periode der Entwickelung der Theorie, und zwar, wie angedeutet, mit Dirichlets berufener Note im IV. Bde des Crelleschen Journals im Jahre 1829. Das Ziel der Mathematiker war damals zwar zunächst zu beweisen, dass die Fouriersche Reihe gegen den Werth der darzustellenden Function convergirt, aber dies läuft wesentlich auf dasselbe hinaus, wie die Aufstellung von solchen Beschränkungen für die Function $f(x)$, unter denen sie entwickelbar ist, da ohne dergleichen Beschränkungen der Beweis eben nicht geführt werden kann.

Dirichlets Beschränkung, welche ich die Dirichletsche Bedingung genannt habe*), bestand darin, dass die Function in dem Intervall, in welchem sie darstellbar sein soll, nur eine endliche Anzahl Maxima besitzen dürfe. Längere Zeit war der mathematische Erkenntnisstrieb durch das Dirichletsche Resultat und den Weg, auf dem es erhalten wurde, befriedigt.

*) Borch. Journal, Bd. 79, pag. 33.

Erst 35 Jahre nach Erscheinen der Dirichletschen Note wird die Forschung über die Gültigkeitsbedingungen für die Fouriersche Darstellung wieder aufgenommen. Hr. Lipschitz untersucht, ob Dirichlets Bedingung, die offenbar nur eingeführt war, um das augenfälligste Ergebniss sogleich ausser Frage zu stellen, durch seine Analyse wirklich gefordert sei. Es ergiebt sich, dass Dirichlets Calcül dem Gebiet durch Fouriersche Reihen darstellbarer Functionen erheblich weitere Grenzen gestattet, als die von ihm aufgestellte Bedingung.

Die Arbeiten, durch welche sodann ich an diesen Forschungen mich betheiligte, hatten zunächst ganz andere Ziele. Die trotz seiner unvergleichlichen Feinheit immerhin besonders dem Docenten fühlbare Umständlichkeit des Dirichletschen Beweises, der geheimnissvolle Grenzfall der Fourierschen Reihen, den man die Fouriersche Formel nennt, welcher mir der Schlüssel zu der ganzen Theorie zu sein schien, worin ich mich denn auch nicht getäuscht habe, vor allen Dingen aber die Gewissheit, dass die Grenzausdrücke der Lösungen partieller Differentialgleichungen den Fourierschen Darstellungen ganz ähnliche Eigenschaften zeigen müssen, was in zahlreichen Einzelfällen schon bestätigt ist: Alles dies reizte mich, den tieferen Zusammenhang dieser analytischen Erscheinungen aufzusuchen, einfache und allgemeine Integralsätze als ihre gemeinsame Grundlage aufzudecken. Das Ergebniss war, dass die Fouriersche Darstellungsart, soweit Dirichlet ihr Strenge ertheilt hatte, ein sehr specieller Fall in der That höchst allgemeiner Integralsätze ist. Um den Beweis hierfür zu leisten, konnte ich mich nicht der Zerlegung bedienen, welche Dirichlet auf das Integral anwendet, in welches er die n ersten Glieder der Fourierschen Reihe zusammenfasst. Das neue Beweisverfahren, welches die allgemeinen Sätze heischten, nahm die Form eines neuen Mittelwerthsatzes an, von dem schon viel geschrieben worden ist, und den ich bei dieser Gelegenheit nachdrücklichst für mich in Anspruch nehme*).

Mit Hülfe dieses Satzes beweist man in wenigen Zeilen die allgemeinen Sätze, von denen der Dirichet'sche ein besonderer Fall ist, und zwar unter den nämlichen Bedingungen für die darzustellende Function, welche er zu Grunde legte, und die für die Anwendungen vorläufig genügen werden.

Mich fesselte aber die Theorie, und so sah ich kein anderes Ende des Nachdenkens über diesen Gegenstand vor mir, als bis ich in Betreff der Bedingungen für die Darstellbarkeit zu endgültigen Aufschlüssen über folgende Punkte gelangt sein würde. Es handelte sich um die Gültigkeitsbedingungen für die allgemeinen Formeln, welche den Fourierschen analog sind, und von den für diese im Besonderen geltenden. Hinsichtlich letzterer war die Hauptfrage, wo für sie die Grenze der Gültigkeit zu suchen sei, ob schon innerhalb der stetigen Functionen, oder in unserer Vorstellung entlegeneren Regionen der Functionenmannigfaltigkeit. Als letztes Ziel leuchtete mir die Aufstellung einer nicht allein ausreichenden sondern nothwendigen Bedingung für die Darstellbarkeit durch Fouriersche Reihen. Diese Probleme sind behandelt in einer Reihe von Arbeiten, wo sie zu gutem Ende geführt sind. Eine nothwendige Bedingung für die Darstellbarkeit durch Fouriersche Reihen habe ich allerdings nicht gefunden, aber ich habe an besonderen Functionsklassen gezeigt, was sie Alles leisten müsste, wodurch die Existenz einer solchen Bedingung in Frage gestellt ist.

*) Im Anhang erörtere ich diese Prioritätsfrage, um sie, wenn möglich aus der Welt zu schaffen.

Von diesen Untersuchungen ist in der Dissertation fast keine Erwähnung geschehen, sie hebt nur die Aufstellung stetiger doch nichtdarstellbarer Functionen hervor.

Der Umfang des Verschweigungsgebiets erscheint unter Voraussetzung zweier Motive vollkommen bestimmt. Es sind diese: Erstens trägt man Scheu, die Prioritätsfrage in Betreff des zweiten Mittelwerthsatzes zu berühren. Zweitens will man vermeiden, gegenüber den neuen Zeichen $\succ \backsim \prec$, und den daran sich knüpfenden Operationen Stellung zu nehmen. Das erste Motiv achte, das zweite begreife ich. Indessen würde unter solchen Umständen ein anderer Titel für die Dissertation sich empfohlen haben, etwa: »Fragmente einer Geschichte der Fourierschen Reihen« oder dergl.

Wie Eingangs bemerkt, erscheint es mir nützlich, schon bei dieser Gelegenheit die gerügte Lücke in der Geschichtsschreibung der Dissertation wenigstens zum Theil auszufüllen, indem ich die verschiedenen bis jetzt bekannten allgemeinen Gültigkeitsbedingungen für die Darstellbarkeit der Functionen vergleichend zusammenstelle. Denn weitere allgemeine Ergebnisse hinsichtlich der Bedingungen für die darzustellende Function scheinen weder für die allgemeinen Darstellungsformeln noch für die Fourierschen in naher Aussicht zu stehen.

Vorher jedoch will ich der Dissertation auf zwei ausdrücklich gegen mich gerichtete Angriffe antworten, die mir Gelegenheit zu Erörterungen von allgemeinerem Interesse bieten. Es handelt sich erstens wieder einmal um den Grenzwerth von Functionen zweier Veränderlichen, in dem vielerwogenen Falle, wo eine Function einer Veränderlichen als Grenze einer Reihe etc. dargestellt ist, und zweitens um den Begriff des bestimmten Integrals.

3.

Die Bedeutung von Grenzen unendlicher Operationen an Sprungstellen.

Ich hatte in meiner Abhandlung »Ueber die sprungweisen Werthänderungen der Functionen« die Frage erörtert, was alles unter einer als

$$lim_{\,h=\infty} f(x, h)$$

definirten Function $f(x)$ verstanden werden könne. Da x eine unbestimmte Grösse ist, so braucht man, während h zunimmt, x nicht fest sich zu denken, und so ist der allgemeinste Werthinbegriff von $lim_{\,h=\infty} f(x, h)$ für einen besonderen Werth $x=x_1$, das was ich mit $lim_{\,h=\infty,\ x=x_1} f(x, h)$ bezeichne, wo der $lim_{\,h=\infty,\ x=x_1}$ bedeutet, dass x und h sich gleichviel wie, entweder nacheinander oder nach irgend einem Gesetze gleichzeitig ihren Grenzwerthen nähern. Die Sprungstellen von $lim_{\,h=\infty} f(x, h)$ sind es, für welche ein Unterschied zwischen den verschiedenen Auffassungen des Limes von $f(x, h)$ sich zeigt. Ich habe es natürlich, so lange sich noch nicht eine der möglichen Auffassungen von $f(x)$ in der Wissenschaft festgesetzt hat, als Sache persönlichen Dafürhaltens hingestellt, welcher von den Auffassungen man den Vorzug geben will, und habe mich persönlich für die allgemeinste Auffassung $lim_{\,h=\infty,\ x=x_1} f(x, h)$ entschieden. Die

Gründe, welche ich für meine Wahl beibringe, sind, glaube ich, durchschlagend. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wird die Definition der Function $f(x)$, wie ich sie auffasse, ohne Zweifel die herrschende bleiben. Doch habe ich diese Dinge rein gegenständlich dargelegt, und sogar besonderer Vorsicht im Ausdruck mich befleissigt. Ich behandelte sodann einige an diese begrifflichen Unterscheidungen sich knüpfende Probleme. Hat man nämlich eine unendliche Operation, z. B. eine Reihe und ist eine Function als

$$lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} u(x)$$

definirt, so legt das Obige die Aufgabe nahe, mit Hülfe der Summe der Reihe $\sum_{1}^{\infty} u(x)$, wenn man sie bilden kann, auch den Limes:

$$\lim_{n=\infty,\, x=x_1} \sum_{1}^{n} u(x)$$

auszudrücken. Es ist dies ein Problem wie jedes andere, und ich gab eine allgemeine Formel, die es in vielen Fällen löst. Ich wendete sie auf die Fouriersche Formel, die Fouriersche Reihe und ein gewisses mit ihr verwandtes Integral an, für welches Hr. Prym die Aufgabe schon früher, aber von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen aus behandelt und in der seinen Zwecken entsprechenden Form gelöst hatte.

Ich hielt diese Sache für abgethan und ich meine auch, dass sie es ist. Widerspruch hatte sich nicht erhoben. Wogegen auch? Vielmehr las ich zustimmende Erwähnungen meiner Behandlung der Frage, und auch Unterhaltungen mit Fachgenossen konnten mich eines Anderen nicht belehren.

Die Dissertation greift mich nun dieser Untersuchung wegen an, indem sie offenbar zwei Dinge verwechselt. Wenn es sich blos um die Summe einer Reihe handelt, deren Glieder Functionen einer Veränderlichen sind, so wird allerdings Niemand etwas anderes darunter verstehen, als die Grenze der Summe der ersten n Glieder der Reihe für einen festen Werth des Arguments. Aber wenn man, wie oben erörtert, eine Function zu definiren hat, so kann man sie natürlich gleichfalls als Summe der Reihe in diesem gewöhnlichen Sinne ansehen, aber eben so gut als etwas Anderes, und es ist doch gewiss Sache der Convention, zu entscheiden, was sie, im Besonderen und im Allgemeinen, vorstellen soll. Ein Missverständniss, das ich mir kaum erklären kann, ist, dass ich irgendwo den Nachweis zu führen versucht, die Fouriersche Reihe stelle an der Unstetigkeitsstelle alle Werthe der Function zwischen den angrenzenden Werthen dar. Angesichts der Schärfe, mit der ich mich ausdrückte, lässt diese Behauptung blos die Deutung zu, dass der Verfasser die Abhandlung nur vom Hörensagen kennt, und entweder Missverstandenes gehört, oder Gehörtes missverstanden. Ich habe vielmehr den Nachweis wirklich geführt und nicht nur zu führen versucht, dass die Grenze der ersten n Glieder der Fourierschen Reihe bei gleichzeitiger Bewegung des Arguments diese Werthe annimmt.

Von der Formel

$$Lim_{n=\infty,\, x=x_1}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)d\alpha\right.$$

$$+\cos x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\alpha d\alpha+\cdots+\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha$$

$$\left.+\sin x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin\alpha d\alpha+\cdots+\sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{f(x_1+o) + f(x_1-o)\right\}$$

$$+ \left\{f(x_1+o) - f(x_1-o)\right\}. \quad Lim_{n=\infty,\, x=x_1} \int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{\alpha}$$

sage ich weiter wörtlich: sie »muss als die eigentliche Werthbestimmung der Fourierschen Reihe für Sprungstellen angesehen werden, da sie jeden Werth des Limes der Reihe liefert, wie man auch der Sprungstelle sich nähern und dazu die Gliederzahl unendlich werden lassen möge«. Gegen vorstehende Behauptung mit ihrer Begründung ist schwerlich etwas einzuwenden. Würde ich ohne nähere Erläuterung die Formel für die eigentliche Werthbestimmung der Fourierschen Reihe erklärt haben, wie die Dissertation es darstellt, so wäre dies allerdings eben so unwissenschaftlich, wie der Ukas, den sie gleich darauf erlässt: »Es darf keine andere Reihenfolge stattfinden als die, zuerst $x = x_1$ und dann $n = \infty$ zu setzen«. . . . Damit untersagt sie also ein für alle mal — wir vermögen keinen anderen Sinn in ihren Worten zu entdecken — ähnliche Formeln, wie die oben angeführte aufzusuchen. Sie verbietet also geradezu, gewisse Functionen aufzustellen, versucht mithin den Functionsbegriff zu beschränken. Die Functionen der Form $f(x) = lim_{n=\infty,\, \varepsilon=o} \sum_{p=1}^{p=n} u_p(x+\varepsilon)$ sind aus der Analysis verbannt, ganz ähnlich wie sie bereits vorschlug, (s. die Einleitung dieser Entgegnung) Functionen das analytische Bürgerrecht nur dann zu gewähren, wenn sie den Sprungwerth in der Mitte der Schwankung hätten.

Wie sich zeigt, wenn man weiter liest, erstreckt sich das Ausweisungsdecret der Dissertation allein auf jene Art gemischter Grenzen und nicht auf $f(x) = lim_{h=\infty,\, \varepsilon=o} F(x+\varepsilon, k)$ im Allgemeinen, denn zu Gunsten des von Hrn. Prym bei Gelegenheit einer partiellen Differentialgleichung behandelten Integrals:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2} = F(x, r)$$

wird eine Ausnahme gemacht. Seine gemischten Grenzwerthe $lim_{r=1,\, \varepsilon=o} F(x, r)$ sind gestattet. »Die Fouriersche Reihe convergirt aber durchaus nur gegen den Mittelwerth, da wir uns bei ihr nur im Gebiete einer Variabeln befinden«, fügt die Dissertation hinzu. Wenn es uns nun dennoch trotz dem Interdict gefällt, auch den Ausdruck $lim_{n=\infty,\, x=x_1} \sum_{p=1}^{p=n} u_p(x)$ zu untersuchen, weshalb ist dann n keine Variabele? Etwa weil sie nur in ganzen Zahlen wächst? Ja was hindert denn, sich n continuirlich wachsend zu denken, $\sum_1^n u_p$ aber immer nur um ein Glied zunehmend, so oft n eine ganze Zahl durchläuft, ähnlich wie die springenden Zeiger der Uhren ihren Weg während der stetig wachsenden Zeit zurücklegen?

Es ist jedenfalls ein seltsames Unterfangen, eine analytische Theorie, die bei innerer Folgerichtigkeit durch neue Aufgaben und Sätze nach aussen als leistungsfähig sich bewährt, in die Grenzen einer beschränkten und inconsequenten Doctrin zurückweisen zu wollen. Wenn die Doctrin gemischte Grenzwerthe von Reihen verwirft, wo denn innerhalb der unermesslichen Mannigfaltigkeit unendlicher Operationen gedenkt sie die Grenze zu ziehen, von welcher an sie der »sogenannten« Stetigvieldeutigkeit nach ihren Vorstellungen Existenzberechtigung einräumen darf?

Zum Integralbegriff.

Bei der Besprechung der Riemannschen Habilitationsschrift ist zuerst von deren allgemein-theoretischen Theil die Rede. Die Dissertation erwähnt vorübergehend, dass Riemann den Begriff des bestimmten Integrals definirt und untersucht, wann eine Function ein Integral besitzt. Dann wendet sie sich plötzlich gegen mich mit der Bemerkung: »Hr. Prof. P. du Bois-Reymond nimmt freilich in seinen Schriften über die Fourierschen Integrale wieder den Cauchyschen Standpunkt ein in Betreff der Definition des bestimmten Integrals, den Riemann wegen seiner Willkürlichkeit verwirft. Daher schreiben sich manche seiner von den gemeinhin angenommenen völlig abweichenden Resultate.« In der Anmerkung hierzu ist eine Auzahl Stellen aus meinen Abhandlungen angeführt, welche wohl das Urtheil im Texte bestätigen sollen.

Die Begriffsfestsetzung des bestimmten Integrals zerfällt in zwei Theile. Es ist erstens festzustellen, unter welchen Bedingungen das Integral existirt über ein Intervall genommen, in welchen die Function endliche Schranken nicht überschreitet, und zweitens ist der Begriff des bestimmten Integrals zurechtzulegen, falls im Integrationsintervall oder an den Grenzen Puncte vorkommen, bei der Annäherung an welche die Function nicht zwischen festen Grenzen eingeschlossen werden kann.

Was die erste Frage betrifft, so beschäftigt sich Cauchy, so viel ich weiss, mit ihr nicht weiter. Er denkt sich, wie zu seiner Zeit allgemein geschah, die Function stetig mit einzelnen Maximis und auch Unstetigkeiten. Meines Wissens rührt die erste Bemerkung, welche dem allgemeineren Functions- und Integralbegriff gewidmet ist, von Lejeune-Dirichlet her. Ich besprach sie kürzlich (Leipz. Ann. XVI Bd., 127 Anm.). In die Wissenschaft eingeführt wurde der erweiterte Integralbegriff durch die Art. 5 und 6 der Riemannschen Habilitationsschrift.

Die zweite Frage anlangend, so scheint hier in der That Cauchy zuerst genaue Begriffe geschaffen zu haben, indem er das bestimmte Integral, wenn $f(x)$ für $x = c$, wo $a < c < b$, unendlich wird, als

$$lim_{\varepsilon = 0,\ \varepsilon_1 = 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx$$

auffassen lehrte. Nachdem Riemann dies am Schlusse des Art. 4 der cit. Schrift gebührend hervorgehoben, fügt er hinzu, dass andere Festsetzungen von Cauchy über den Begriff des bestimmten Integrals in Fällen, wo es dem Grundbegriff nach ein solches nicht gibt . . . zur allgemeinen Einführung ihrer grossen Willkürlichkeit wegen kaum geeignet seien; womit natürlich die in jedem Lehrbuch an die vorstehende Cauchysche Begriffsfestsetzung sich anschliessenden Cauchyschen Hauptwerthe

$$lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b}$$

gemeint sind.

Da nun keine andere Stelle bei Riemann aufzufinden ist, auf welche die Dissertation bei ihrem über mich verhängten Tadel sich hat berufen können, so muss der meiner Schriften unkundige Leser schliessen, dass ich in Cauchyschen Hauptwerthen speculire. Allerdings kömmt gelegentlich deren einer bei mir vor, wo er jedoch ebenso am Platze ist, wie bei einer ähnlichen Gelegenheit ein solcher bei Riemann (Art. 12 der cit. Schrift). Die zum Beleg in der Anmerkung angeführten Stellen aus meinen Schriften haben aber mit den Cauchyschen Hauptwerthen gar Nichts zu schaffen. Mit Ausnahme einer Stelle (Leipz. Ann. VII, 257, Anm.), deren wenig geschickte Retorsion der Tadel der Dissertation wahrscheinlich ist, und die mit den Hauptwerthen gleichfalls ausser jeder Beziehung steht, betreffen sie Doppelintegrale.

Während Cauchy in seinen Untersuchungen über die intégrales singulières vom Integrationsgebiete des Doppelintegrals zwei sich kreuzende Streifen abtrennte, in welchen zugleich der Unendlichkeitspunct der Function liegt, habe ich vorgezogen, seine oben angeführte Auffassung des über einen, oder bis an einen Unendlichkeitspunct erstreckten einfachen Integrals, die von Niemand bemängelt wird, auf die Doppelintegrale auszudehnen, indem ich erst das Integral über ein Gebiet nahm, das zwar dem Gebiete des auszuwerthenden Integrals angehörte, den Unendlichkeitspunct aber nicht enthielt, und welches ich sodann in das erste übergehen liess. Dies ist die natürlichste und allgemeinste Vorstellung, welche hier möglich ist, die zu bekannten Methoden der Functionentheorie führt, und die dem correcten Grenzbegriff entspricht. Es ist eben durchaus nichts Willkürliches darin, Nichts worin ich der Analysis Zwang anthue, wie die Dissertation es einigemal versucht. Das ursprüngliche Gebiet ist rechteckig, mit dem Unendlichkeitspunct in einer der Ecken, und das sich ihm nähernde nehme ich, den besonderen mir vorliegenden Aufgaben entsprechend, ebenfalls rechteckig an, und mit einer Seite in eine Seite des ursprünglichen fallend, untersuche aber auch, zu welchen Ergebnissen die allgemeinere Annahme führt, wo die rechteckige Begrenzung des beweglichen Gebiets der des ursprünglichen nur parallel ist*).

Seit dem Erscheinen dieser Untersuchungen sind über zehn Jahre verflossen, ohne dass ich je ein Wort des Widerspruchs vernommen, wogegen mir öfters lebhafte Zustimmung ausgedrückt wurde. Es ist lediglich eine aus der Luft gegriffene Unwahrheit, dass manche meiner »Resultate« von den gemeinhin angenommenen völlig abweichen. Nicht ein Beispiel weiss ich dafür. Wobei ich übrigens zu Gunsten der Dissertation voraussetze, dass sie »Ansichten« oder »Anschauungsweisen« hat sagen wollen, denn ein Resultat ist richtig oder falsch, und ist keine Annahme.

Da aber die in Rede stehende interessante Phrase der Göttinger Inauguraldissertation meinen Integralbegriff als mit der Riemannschen Auffassung des bestimmten Integrals in Widerspruch stehend behauptet, so will ich auf diese Seite der Frage noch mit einigen Worten eingehen, die Gelegenheit benutzend, um einen kurzen Rückblick auf meine bisher veröffentlichten Untersuchungen über den Integralbegriff zu werfen.

Wenn ich den Riemannschen Standpunkt verlassen hätte, so könnte es sich doch nur um den Integralbegriff für zwischen endlichen Grenzen verharrende Functionen handeln: also um die Riemannsche Bedingung der Integrirbarkeit, dass die Summe der Theilintervalle mit den in ihnen vorhandenen grössten Werthunterschieden der Function multiplicirt, zugleich mit dem grössten der Theilintervalle die Null zur

*) Leipz. Ann. IV, 370.

Grenze hat. Sehen wir zu, ob ich mich dieser neuen Bedingung gegenüber abweisend verhalten habe.

Die Wahrheit ist, dass ich durch meine Beschäftigung mit den partiellen Differentialgleichungen, bei denen Integrale von voraussetzungslosen Functionen eine so bedeutende Rolle spielen, auch wenn ich nicht von je für den Integralbegriff mich interessirt hätte, mit Nothwendigkeit darauf hingewiesen werden musste, ihm die grösseste denkbare Allgemeinheit zu ertheilen. Als ich jene Riemannsche Bedingung kennen gelernt, leuchtete mir nach einigem Schwanken ein, dass sie das Non plus ultra der Allgemeinheit sei, und ich suchte und fand den Beweis dafür, dass wirklich jede Function, die ihr genügt, integrirbar ist, und jede integrirbare Function ihr genügt.

Ich äusserte mich sodann, es war in den sechziger Jahren, befreundeten Gelehrten gegenüber in dem Sinne, dass die seitherige Begründung der allgemeinen Principien und Methoden der Intgralrechnung ungenügend sei, und dass sie auf Grund des Riemannschen Criteriums neu durchgeführt werden müsste. Es wurde mir nur die Schwierigkeit eines solchen Unternehmens entgegengehalten. Da aber eine wirklich befriedigende Darstellung der Grössenbeziehungen, welche in den allgemeinen Sätzen der Integralrechnung enthalten sind, nur möglich ist, wenn deren Hauptbestandtheil, die zu integrirende Function, so unbeschränkt gelassen wird, wie es die Sätze gestatten, so schien mir die Wichtigkeit des Erfolgs den Kampf mit den Schwierigkeiten der Aufgabe zu lohnen.

Meine erste Mittheilung über diesen Gegenstand hatte ich einem Aufsatz über die Divergenz der Fourierschen Reihe eingefügt, an welchen sich Weiterungen knüpften, so dass ihre Veröffentlichung um ein paar Jahre verzögert wurde. Gleichwohl habe ich die Priorität in Bezug auf alle Sätze der neuen Integraltheorie: Der Beweis dafür, dass die neue Bedingung nothwendig und ausreichend ist; die Integrirbarkeit von Producten integrirbarer Functionen und die äusserste Erweiterung dieses Satzes; die allgemeinste Form, welche der Bedingung ertheilt werden kann hinsichtlich der Functionswerthunterschiede, mit denen die Theilintervalle zu multipliciren sind; die partielle Integration; der Fundamentalsatz der Integralrechnung; die Rolle, welche der allgemeine Integralbegriff in der Theorie der darstellenden Integrale und der trigonometrischen Reihen, und in der Variationsrechnung spielt, sind theils von mir zuerst theils nur von mir veröffentlicht.

Das Erwähnte nebst Manchem, was ich überging, und Mehrerem, was ich noch nicht zu veröffentlichen Musse und Gelegenheit fand, berechtigen mich schon heute zu erklären, dass mein ursprünglicher Plan, den allgemeinen Theil der Integralrechnung auf Grund des Riemannschen Criteriums neu aufzurichten, der Hauptsache nach durchgeführt ist, und ich werde dies in Bälde durch eine zusammenhängende Darstellung dieser Ergebnisse zeigen, wenn mir, der ich langsam arbeite, und häufig aufgehalten werde durch die dem Begründer einer Theorie eigene Aengstlichkeit, in dieser schreiblustigen Zeit nicht von minder bedächtigen Autoren zuvorgekommen wird.

Doch kehren wir von diesem *à propos* wieder zu dem Urtheil der Dissertation zurück. Ich bemerke, dass die eben namhaft gemachten Untersuchungen nicht etwa vergraben blieben, sondern gelesen, vielfach erwähnt, und verarbeitet wurden. Gleichwohl sagt sie, ich hätte statt des Riemannschen wieder den Cauchyschen Standpunkt eingenommen. Ich glaube der Schlüssel zu dieser Ungereimtheit und zu anderen ähnlichen ist:

Die Dissertation — wenn ich sie personificiren darf — könnte nicht bündiger, als durch diesen so naiven Griff nach den Hörnern des Stiers beweisen, dass sie von der Sache Nichts versteht. Ich gestehe, dass ihr überlegener Ton den Durchbruch dieser Erkenntniss eine Weile bei mir zurückgehalten hat. Aber was soll ich schliesslich mit dem besten Willen mir dabei denken, wenn ich z. B. lese (p. 23): »... Erfüllt die Function nicht mehr die Bedingung der Integrirbarkeit (eine Annahme, die aber Riemann (gesamm. Schr. p. 224) gar nicht macht), so haben die Integraltheoreme freilich ihren Sinn verloren; in diesem Falle aber haben wir überhaupt noch gar kein Mittel zur Untersuchung« (scilicet ob die Fouriersche Reihe convergirt oder divergirt). Zutreffender bemerkt Riemann, indem er a. a. O. jene Annahme ganz ausdrücklich macht, dass sodann schon die Fouriersche Coefficientenbestimmung nicht mehr anwendbar ist.

Ueber den Gültigkeitsbereich der Darstellungsformeln für beliebige Functionen.

Man wolle das unter dieser Ueberschrift Vorgeführte ansehen als einen Zusatz zum einer Abhandlung: Allgemeine Lehrsätze über den Gültigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen, Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38 sqq.

Es sollen in diesem Zusatz einige meiner dortigen Sätze sorgfältiger hergeleitet, und gegen andere zu gleichem Zwecke aufgestellte abgewogen werden, wie ich es denn namentlich am Schluss dieses Kapitels mir angelegen sein lasse, den gegenwärtigen Stand dieser Probleme und die Ziele meiner anderen einschlägigen Untersuchungen zu beleuchten.

1. Die Formeln, welche den Gegenstand der Untersuchung bilden. (Allgemeine Lehrsätze etc.)

Ich erinnere zunächst an die Fundamentalformeln der Theorie der darstellenden Integrale:

$$(A.)\quad lim \int_a^b d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = o\,, \quad o < a \leqq b.$$

$$(B.)\quad lim \int_o^a d\alpha f(\alpha)\varphi(a, h) = f(o)\ lim \int_o^a d\alpha\varphi(\alpha, h).$$

Das Zeichen *lim* stellt den Grenzwerth $h=\infty$ vor und $\varphi(x,h)$ ist so beschaffen, dass der *Limes* rechter Hand in (B.) von a unabhängig, endlich und bestimmt ist.

Die Formeln (A.) und (B.) bilden die Grundlage der zur Darstellung willkürlicher Functionen dienenden Formel:

$$\lim\int_A^B d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha-x,h) = f(x-o)\lim\int_{-a}^{o} d\alpha\varphi(\alpha,h)$$

$$+f(x+o)\lim\int_o^b d\alpha\varphi(\alpha,h),$$

wo beide Grenzwerthe rechts unabhängig von a und b, endlich und bestimmt sind, und $A<x<B$ ist.

Von Formel (A.) habe ich gezeigt (l. c. Art. 1), dass sie als ein Theorem der Integralrechnung von ungewöhnlicher Allgemeinheit sich erweist. Sie gilt nämlich stets, wenn für $a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq b$

$$\lim\int_{a_1}^{b_1} d\alpha\varphi(\alpha,h)=o$$

ist, $\varphi(\alpha,h)$ bei zunehmendem h eine endliche Grösse nicht überschreitet, und $f(x)$ integrirbar ist. Hiernach können wir ihre Theorie als erledigt ansehen, so dass die Untersuchung sich auf die Formel (B.) zu beschränken hat, deren Theorie namentlich hinsichtlich der Functionen $f(x)$, auf welche die Formel angewendet werden darf, die erheblichsten Schwierigkeiten darbietet.

Ich hatte in meiner ersten Arbeit über Darstellungen (Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört, Borch. Journ. Bd. 69) die allgemeine Formel (B.) bewiesen, unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ von $x = o$ an bis zu einem beliebig wenig von o verschiedenen Argument kein Maximum oder Minimum habe. Die Aufgabe war also, diese grosse Beschränkung so weit als möglich aufzuheben.

Mein erster Schritt in dieser Richtung (Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 4) bestand darin, dass ich eine Classe von Functionen $\varphi(x, h)$ ausschied, für welche die Integrirbarkeit von $f(x)$ und das Bestimmtsein von $f(o+o)$ ausreicht. Es waren die Functionen $\varphi(x, h)$, welche einen unbedingt convergenten Grenzwerth

$$lim \int_o^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

ergeben. So nannte ich diesen *Limes*, wenn

$$lim \int_o^a d\alpha \; mod \; \varphi(\alpha, h)$$

endliche Schranken nicht übersteigt, ohne dabei bestimmt sein zu brauchen.

Hier nun sehen wir uns unmittelbar vor den Gegenstand unserer Untersuchung gestellt, welcher ist, den Gültigkeitsbereich der Formel:

$$\text{(B.)} \quad lim \int_o^a d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = f(o) \quad lim \int_o^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

festzustellen, falls der Grenzwerth rechts zwar endlich und bestimmt und von a unabhängig aber *bedingt* convergent ist, d. h. wenn der Grenzwerth

$$lim \int_o^a d\alpha \; mod \; \varphi(\alpha, h)$$

unendlich gross ist, wie dies z. B. bei dem bekanntesten Beispiel $\varphi(x,h) = \frac{\sin xh}{x}$ zutrifft, wo

$$\int_0^a d\alpha \bmod \varphi(\alpha, h) = \int_0^{ah} d\alpha \frac{+\sqrt{\sin^2 \alpha}}{\alpha}$$

mit h logarithmisch unendlich wird.

Die Aufgabe ist daher zunächst für jede Function $\varphi(x, h)$, welche die Eigenschaft hat einen bedingt convergenten und von a unabhängigen Grenzwerth

$$\lim \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

zu ergeben, möglich weiteste Bedingungen für $f(x)$ zu finden, unter denen Gleichung (B,) stattfinden muss.

Diese Bedingungen werden voraussichtlich bei der grossen Unbeschränktheit der Function $\varphi(x, h)$ in demselben Maasse die Function $f(x)$ einschränken. Die weitere Aufgabe wird sein, angemessene Beschränkungen der Function $\varphi(x, h)$ aufzusuchen, welche $f(x)$ einen bezüglich weiteren Spielraum gewähren, und bei diesen Forschungen das Ziel im Auge zu behalten, dass man in der Richtung der bekannten und in den Anwendungen nützlichen besonderen Darstellungsformeln vordringe.

Wir stellen an die Spitze dieser Betrachtungen ein Paar Hülfssätze, die ich (Allgemeine Lehrs. Art. 8) des Näheren zu begründen nicht für nöthig hielt, hier indessen nicht unbewiesen lassen will, übrigens gegenwärtig auch wohl etwas schärfer zu fassen in der Lage bin.

2. Zwei Hülfssätze.

I. Eine stetige Function $f(x)$ lässt sich, wenn sie integrirbare Differentialquotienten hat*), in zwei andere $f_1(x)+f_2(x)$ spalten, deren erste nirgends abnimmt, und deren zweite nirgends zunimmt.

Denn es sei:

$$f(x) - f(\alpha) = \int_a^x f'(x) dx,$$

unter $f'(x)$ irgend einen Differentialquotienten von $f(x)$ verstanden.

---

*) Ueber die mögliche Beschaffenheit der Differentialquotienten einer stetigen Function $f(x)$ gilt Folgendes:

Eine stetige Function kann haben:

1. einen stetigen Differentialquotienten,
2. einen durchweg bestimmten eindeutigen, aber durchweg unstetigen Differentialquotienten,
3. irgendwie unstetige Differentialquotienten.

Vom zweiten Fall ist mir kein Beispiel in der Literatur vorgekom- Ich werde andeuten, wie man solches analytisch bilden könnte. Wenn man im Raum zwischen zwei sich in der Ordinate $x=x_1$ berührenden Curven eine von beiden Curven abwechselnd reflectirte Zickzacklinie von gleichen Neigungen beschreibt und deren Ecken abrundet, so ist ihr Differentialquotient ein durchweg bestimmter eindeutiger, im Punct $x=x_1$ unstetiger und auf die bekannte Weise lässt sich durch Summation einer geeigneten Folge von solchen Zickzacklinien entsprechenden Functionen eine Function bilden, deren Differentialquotienten in pantachischen Puncten unstetig sind.

Wenn wir nun im Texte den oder die Differentialquotienten integrirbar annehmen, so dürfen sie zu jeder der drei obigen Klassen gehören. Jedenfalls aber muss einer der äusseren Differentialquotienten von $f(x)$ integrirbar vorausgesetzt werden, in welchem Falle auch die weiterhin benützte Gleichung $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx$ statt hat. (Leipz. Ann. XVI. Bd. pag. 122.

Wir beginnen damit die Werthe von $f'(x)$ auszulassen, oder durch Null zu ersetzen, in denen diese Function für ein Argument x zugleich positive und negative Werthe besitzt; was wir wegen und unbeschadet der Integrirbarkeit thun dürfen. Alsdann zerlegen wir $f'(x)$ in zwei Functionen $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ von denen $f_1'(x)$ positiv und $= f'(x)$ oder Null ist je nachdem $f'(x)$ positiv oder negativ ist, $f_2'(x)$ negativ und $= f'(x)$ oder Null ist, je nachdem $f'(x)$ negativ oder positiv ist, wobei ich bemerke, dass, wenn $f'(x)$ unbestimmt ist, mit einem ihm gleichen Functionswerth $f_1'(x)$ oder $f_2'(x)$ ein solcher gemeint ist, der unbestimmt zwischen denselben Grenzen ist.

Nun besteht der wichtige Umstand, dass jede der Functionen $f_1'(x)$, $f_2'(x)$ für sich integrirbar ist. Denn im Intervall δ_p seien f'_{op} und f'_{up} resp. der grösste und der kleinste geometrische Werth von $f'(x)$, so ist wegen der Integrirbarkeit von $f'(x)$: $lim\ \Sigma\delta_p(f'_{op}-f'_{up}) = 0$. Ersetzt man nun z. B. f'_{up} durch Null, wo diese Grösse negativ ist, so muss *a fortiori* sein $lim\ \Sigma\delta_p(f'_{op}-f'_{up}) = 0$, also etc.

Bilden wir daher:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f_1'(\alpha)d\alpha + \int_a^x f_2'(\alpha)d\alpha$$

so ist $f(x)$ in der angezeigten Weise zerlegt, wenn wir

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}f(a) + c + \int_a^x f_1'(\alpha)d\alpha$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}f(a) - c + \int_a^x f_2'(\alpha)d\alpha$$

setzen, unter c irgend eine Grösse verstanden. Q. E. D.

II. Wenn eine Function $f(x)$ einen integrirbaren Differentialquotienten hat, und x bewegt sich von a bis X, so werden die resp. nirgend abnehmenden und nirgend zunehmenden Componenten $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von $f(x)$ dann zu endlichen Werthen $f_1(X)$ und $f_2(X)$ gelangen, wenn das Integral

$$\int_a^X f'(\alpha)d\alpha$$

unbedingt convergirt.

Denn dann ist convergent alles was aus dem Integral $\int_a^X f'(\alpha)d\alpha$ wird, wenn man darin beliebige Werthe von $f'(x)$ durch Null ersetzt.

3. II. Methode der Herleitung der Formel (B.).

Während die Art. 1. dieses Capitels erwähnte erste Methode unter Anwendung meines Mittelwerthsatzes auf das Integral $\int_a^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h)$ oder genauer auf seine beiden Theile $\int_a^\varepsilon + \int_\varepsilon^a$ zu der von mir nach Dirichlet benannten Bedingung für die Function $f(x)$ (keine unendliche Anzahl Maxima zu haben) führt, so gestattet die gleich anzugebende zweite Herleitung unter gewissen Bedingungen unendlich viele Maxima von $f(x)$, indem sie aber in anderer Beziehung $f(x)$ mehr einschränkt wie die Dirichletsche Bedingung, von dieser Function nämlich voraussetzt, dass sie einen Differentialquotienten hat.

Das Princip, nach welchem wir überhaupt neue Bedingungen finden, hier und bei der folgenden Herleitung III, ist dass wir die beliebig schwankende Function $f(x)$ auf Functionen zurückzuführen suchen, die nur in wachsendem oder abnehmendem Sinne sich ändern, wo dann die oben angedeuteten Methoden meiner ersten Untersuchung in Kraft treten.

Die II. Herleitung benützt die Hülfssätze wie folgt: Sobald in

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h)$$

erstens $f(x)$ einen integrirbaren Differentialquotienten hat, zweitens das Integral

$$\int_0 d\alpha f'(\alpha)$$

an der unteren Grenze absolut convergirt, lässt $f(x)$ sich in $f_1(x)+f_2(x)$ zerlegen, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ nur je in einem Sinne sich ändern. Und indem man auf die Integrale

$$\int_0^a d\alpha f_1(\alpha)\varphi(\alpha, h), \quad \int_0^a d\alpha f_2(\alpha)\varphi(\alpha, h)$$

die I. Herleitungsart (Art. 1.) anwendet, gelangt man wieder zu Formel (B.). Ich habe in einer späteren Untersuchung die eben erhaltene Bedingung auf besondere Fälle angewandt.

4. III. Herleitung von Formel (B.).

Die Specialisirung der Function $\varphi(x, h)$, welche den Anwendungen näher führt, besteht darin, dass $\varphi(x, h) = \frac{\psi(x, h)}{x}$ gesetzt wird, mit der Bestimmung, dass $\psi(x, h)$ auch für $h=\infty$ unter einer endlichen Grenze bleibt, und dass $\psi(x, h)$

bei endlichem h mit x verschwindet. Auf diese Beschränkungen führte eine Transformation des Integrals $\int_0^a d\alpha f(a)\varphi(\alpha, h)$ durch partielle Integration, bei welcher für $f(x)$ entsprechend weitere Bedingungen als bei der Herleitung II erhalten werden.

Wir transformiren nur den Theil $\int_0^\varepsilon$ des Integrals $\int_0^a$, ε beliebig klein, weil für $\lim \int_\varepsilon^a = o$ nach Art. 1. $f(x)$ ja überhaupt nur integrirbar zu sein braucht.

Es wird gesetzt:

$$\int_0^\varepsilon d\alpha f(x)\varphi(\alpha, h) = \varphi(\varepsilon, h) \int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) - \int_0^\varepsilon d\alpha \frac{\partial \varphi(\alpha, h)}{\partial \alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

alsdann führt man eine Hülfsfunction $\lambda(x)$ ein, die durch

$$x\lambda(x) = \int_0^x f(\alpha) d\alpha$$

gegeben ist, zerlegt $\lambda(x)$, unter der Voraussetzung dass $\lambda(x)$ einen integrirbaren Differentialquotienten hat in die nirgend abnehmenden resp. nirgend zunehmenden Componenten $\lambda(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)$ und transformirt vorstehende partielle Integration in:

$$\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = \lambda(o) \int_0^\varepsilon d\alpha \varphi(\alpha, h) + \Big(\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1(o)\Big) \Big[\xi\varphi(\xi, h) - \int_\xi^\varepsilon d\alpha \varphi(\alpha, h)\Big] + \Big(\lambda_2(\varepsilon) - \lambda_2(o)\Big) \Big[\xi_1\varphi(\xi_1, h) - \int_{\xi_1}^\varepsilon d\alpha \varphi(\alpha, h\Big]$$

$$+ \lambda(o)\, lim_{\varepsilon = o}\, \varepsilon\varphi(\varepsilon, h),$$

$$o \leqq \xi, \xi_1 \leqq \varepsilon.$$

Diese Umformung ist gezeigt: Allgemeine Lehrsätze etc. pag. 55 und 56. Lässt man h unendlich werden, so fällt man wieder auf Formel (B.).

Hier also ergiebt sich auf Grund der Hülfssätze für $f(x)$ die Bedingung, dass

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)\right) = \int_0^a d\alpha \left(\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)\right)$$

absolut convergent sei, da doch

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

mit $f(x)$ zugleich integrirbar ist.

Diese Bedingung ist ein wirklicher Fortschritt in der Theorie der darstellenden Integrale. Es ist die erste Bedingung, welche für die Darstellbarkeit der Function für einen besonderen Argumentwerth keinem noch so kleinen Intervall, dem er angehört, die Stetigkeit auferlegt.

Erinnert man sich, dass ein Integral

$$\int_0 d\alpha F(\alpha)\frac{t(\alpha)}{\alpha}$$

an der unteren Grenze absolut convergent ist, wenn $t(x)$ eine Function bezeichnet, die $\prec \tau(\alpha)$ ist, unter $\tau(x)$ die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz verstanden, während $F(x)$ nur unter einer endlichen Grenze zu bleiben braucht, so ergiebt sich leicht (Allgemeine Lehrsätze Art. 11) dass in

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \int_0^a d\alpha \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

die beiden Integrale rechts für sich absolut convergent sind, wenn $f(x)$ die Form

$$f(o) + t(x) F(x)$$

hat, wo $f(o)$ aus der Differenz der Integrale herausfällt. Es ist $t(x)$ z. B. $\frac{1}{(l\frac{1}{x})^{1+\nu}}$, $\frac{1}{l\frac{1}{x}\,(ll\frac{1}{x})^{1+\nu}}$, etc., ν beliebig klein aber $> o$. $F(x)$ braucht nur integrirbar zu sein.

Auf die Interpretation dieser dritten Bedingung gehe ich im Folgenden des Genaueren ein. Ihr Interesse tritt nämlich besonders hervor, wenn man sie mit der IV. nun zu besprechenden Bedingung vergleicht, und beider Vortheile und Wirksamkeitsbereich gegen einander abwägt.

5. VIte Ableitung der Formel (B.)

Die vierte Ableitung der Formel (B.) beschränkt die Function $\varphi(x, h)$ im Grunde nicht weiter als die dritte, sondern verlangt nur, unter Aufstellung unterscheidender Merkmale, zwei verschiedene Herleitungen. Bei einer späteren Gelegenheit werde ich dies ausführlich zeigen, während ich hier lediglich schon Veröffentlichtes eingehender zu erörtern mir zur Aufgabe gestellt habe *).

*) Hier will ich nur andeuten, dass man die bei dem von Dirichlet betrachteten Integral sich natürlich darbietende Zerlegung in abnehmende alternirende Theile auch bei dem allgemeinen Integral $\int_0^a \varphi(\alpha, h) d\alpha$ herstellen kann, indem man $\varphi(\alpha, h)$ in $\varphi_1(\alpha, h) + \varphi_2(\alpha, h)$ zerlegt, wo z. B. $\varphi_1(\alpha, h)$ positiv und gleich $\varphi(\alpha, h)$ oder Null ist. Jedes Integral für sich hat einen unendlichen Limes. Man kann sie daher und muss sie nun in Theilintegrale zerlegen, die ähnliche Eigenschaften wie die Dirichletschen zeigen.

Dieser vierten Ableitungsweise liegt der Dirichletsche Beweis der Formel (B.) (im Falle sie auf die Sinus-Cosinusreihe sich bezieht) mit seiner Erweiterung durch Hrn. Lipschitz zu Grunde. Hr. Lipschitz führte die Dirichletsche Analyse durch, unter Verzicht auf dessen erleichternde Voraussetzung, dass in Formel (B.) die Function $f(x)$ von o an nur abnimmt. Diese Annahme gestattete Dirichlet einen Theil des Integrals linker Hand in (B.) von vornherein ausser Betracht zu lassen. Setzt man aber von vornherein Nichts über die Function $f(x)$ voraus, so zeigt Hr. Lipschitz, dass die Formel (B.) erhalten wird, wenn über das Nullwerden von $f(x+\varepsilon)-f(x)$ geeignete Voraussetzungen gemacht werden. Darin, dass auf solche Weise, und im Allgemeinen in solcher Form Gültigkeitsbedingungen für die Darstellung der Functionen aufgestellt werden können, scheint mir das wissenschaftliche Interesse der Analyse des Hrn. Lipschitz zu liegen, während es mich minder wesentlich dünkt, dass er den langsamsten Grad der erforderlichen Abnahme von $f(x+\varepsilon)-f(x)$, der aus seinen Formeln geschlossen werden kann, nicht angab, auf den später Hr. U. Dini aufmerksam machte.

Worauf es aber ankommt, das ist, ob diese Bedingung eine Punctbedingung oder eine Streckenbedingung ist, was ich gleich näher erläutern will. Es handelt sich, um Missverständnissen vorzubeugen, für's Erste nur um Darstellung eines besonderen Functionswerthes, und nicht um die Darstellung einer Function in einem Intervall. Dann sei unter Punctbedingung eine solche verstanden, welche nur die Art der Annäherung der benachbarten Functionswerthe an den darzustellenden beschränkt, und die nämliche oder eine andere Beschränkung keinem Puncte seiner Umgebung auferlegt. Die Streckenbedingung enthält dagegen für alle Puncte eines, den darzustellenden Functionswerth übrigens beliebig eng einschliessenden Intervalls gleiche Vorschriften. Bei der Punctbedingung erfahren daher, wenn die Darstellbarkeit von $f(x)$ für $x = x_1$ geprüft werden soll, die x_1 benachbarten Functionswerthe keine anderen Beschränkungen, als die durch das Zeichen $\lim\limits_{x=x_1}$ möglicherweise bedingten *).

Eine Strecken- oder genauer Gebietsbedingung ist z. B. die für die Potenzreihen durch die Functionentheorie festgesetzte, desgleichen sind es auch die durch die Restausdrücke für die Taylorsche Reihe gegebenen Bedingungen.

Die aus der Analyse des Hrn. Lipschitz folgende Bedingung ist eine Streckenbedingung. Sie muss lauten: Wir setzen $f(x+\varepsilon) - f(x) = \rho(\varepsilon) f_1(x, \varepsilon)$. Wenn in einem den Punkt $x = x_1$ einschliessenden beliebig kleinen Intervall für jeden Werth von x die Grösse $f_1(x, \varepsilon)$ mit ε verschwindet, wenn sie ferner verschwindet, falls x gleichzeitig einem besonderen Werthe sich nähert, während ε unter jede Grenze sinkt: dann ist $f(x)$ für $x = x_1$ darstellbar. $\rho(\varepsilon)$ erweist sich gleich $\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$.

Die etwas zusammengesetzte Natur dieser Bedingung und ihre Beziehung zu der Bedingung, welche aus der III. Herleitung der Formel (B.) hervorgeht, werden wir gründlicher verstehen, wenn wir vorher einige bei der Beurtheilung der Stetigkeitseigenschaften der Functionen wesentliche Punkte uns überlegt haben.

*) Eine Bedingung kann übrigens auch gemischt, d. i. gleichzeitig Punct- und Streckenbedingung sein. In gewissem Sinne sind dies die Obigen auch, da die Function im Integrationsintervall integrirbar sein muss.

6. Ueber die Stetigkeit der Functionen.

Wenn die Function $f(x)$ die Bedingung

$$lim_{\varepsilon=o}(f(x)-f(x\pm\varepsilon))$$

in einem Puncte $x=x_1$ erfüllt, so heisst sie in diesem Puncte stetig, und wenn sie jene Bedingung für jeden Punct eines Intervalles erfüllt, so heisst sie in dem Intervall stetig. Hrn. Heine's Princip von der gleichmässigen Stetigkeit kann man auch so interpretiren, dass der Limes:

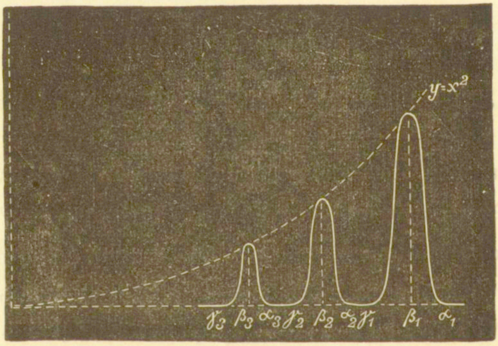
$$lim_{x=x_1,\,\varepsilon=o}(f(x)-f(x\pm\varepsilon))$$

innerhalb jeden Intervalles Null ist, in welchem die Function $f(x)$ stetig ist.

Fassen wir wieder einen Punct $x=x_1$ ins Auge, Wenn $f(x_1)-f(x_1+\varepsilon)$ sich auf die Form bringen lässt: $\rho(\varepsilon)f_1(x_1,\varepsilon)$, wo $\rho(\varepsilon)$ mit ε ohne Maxima verschwindet und $f(x_1,\varepsilon)$ nicht Null wird, aber unter einer endlichen Grenze bleibt, so heisse $\rho(\varepsilon)$ der Grad der Stetigkeit von $f(x)$ im Puncte $x=x_1$. Je kleiner die Null von $\rho(\varepsilon)$, desto höher sei der Stetigkeitsgrad (der übrigens an beiden Seiten von x_1 verschieden sein kann).

Nun ist auf Dieses zu achten: Es sei $\rho(\varepsilon)$ der Stetigkeitsgrad von $f(x)$ im Puncte $x=x_1$. Setzt man $f(x)-f(x+\varepsilon)=\rho(\varepsilon)f_1(x,\varepsilon)$, so kann, wenn ε und $x-x_1$ nach einem geeigneten Gesetz $\chi(\varepsilon,x)=0$ zugleich verschwinden, $f_1(x,\varepsilon)$ endlich bleiben, aber auch beliebig stark im Verhältniss zu $\rho(\varepsilon)$ unendlich werden. Man sieht dies geometrisch leicht ein, u. A. durch eine ähnliche Construction, wie die, mit der ich sogleich folgende wichtige Erweiterung vorstehender Bemerkung beweisen werde: Wenn in einem Intervall, in welchem die Function $f(x)$ stetig ist, $\rho(\varepsilon)$ deren niedrigsten Stetigkeitsgrad vorstellt, so kann dennoch $f_1(x, \varepsilon)$ in $\rho(\varepsilon)f_1(x,\varepsilon)=f(x)-f(x+\varepsilon)$ beliebig rasch im Verhältniss zu $\rho(\varepsilon)$ unendlich werden, falls x einzelnen Puncten x_1 sich nähert, während zugleich ε gegen die Null abnimmt.

Dass dies richtig ist, leuchtet ein, wenn man einen Blick auf die eine solche Function $f(x)$ darstellende ausgezogene Linie in folgender Figur wirft:



Die Function $f(x)$ ist die ausgezogene Linie über $\overline{\alpha_1\gamma_3}$, welche man sich mit unbegrenzt oft wiederkehrenden ähnlichen Maximis, wie die drei in der Figur angegebenen, in den Winkel zwischen der punctirten Kurve $y=x^2$ und der Abscissenaxe fortgesetzt zu denken hat. In den Strecken $\overline{\gamma_n\alpha_{n+1}}$ sei $f(x)$ Null, und sei durchweg stetig mit endlichem Differentialquotienten. Setzen wir nun $x=\beta_n$, $\varepsilon=\alpha_n-\beta_n$, so wird

$$f(x)-f(x+\varepsilon)=f(\beta_n)-f(\alpha_n)=f(\beta_n),$$

und ferner:

$$f(\beta_n)=\rho(\alpha_n-\beta_n)f_1(x, \varepsilon),$$

und es ist klar, dass welchen Stetigkeitsgrad man auch für ρ annehmen möge, wegen der Beziehungslosigkeit zwischen

β_n und $\alpha_n - \beta_n$ die Grösse $f_1(x, \varepsilon)$ beliebig stark unendlich werden kann, während β_n und $\alpha_n - \beta_n$ mit angemessener relativer Geschwindigkeit zugleich verschwinden. Ist, wie hier vorausgesetzt, die Function durchweg differenzirbar, so ist $\rho(\varepsilon) = \varepsilon$ ihr niedrigster Stetigkeitsgrad.

7. Ueber das Verhältniss zwischen den Bedingungen III. und IV.

Die Bedingung der absoluten Convergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

ist gemischter Natur. Bis zum Stetigkeitsgrade $\tau(\alpha)$ (Grenze zwischen Convergenz und Divergenz) ist sie reine Punctbedingung. Für niedere Stetigkeitsgrade scheint sie nur Streckenbedingung zu sein, wenigstens sind die etlichen besonderen Interpretationen jener allgemeinen Bedingung, welche mir bis jetzt gelungen, so beschaffen, dass sie Eigenschaften der Function in einem Intervall verlangen.

Handelt es sich zunächst um die Ergebnisse (Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 11) allgemeiner Natur, so ist, wie schon oben angeführt, jede Function für $x = o$ darstellbar, wenn $f(x) = \rho(x) f_1(x)$, wo $f_1(x)$ keiner anderen Beschränkung als der Endlichkeit und Integrirbarkeit unterliegt, also namentlich nicht stetig zu sein braucht, und der Grad $\rho(x)$ der Stetigkeit im Puncte $x = o \prec \tau(x)$ ist, daher also z. B.

$\rho(x) = \dfrac{1}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{1+\nu}}, \dfrac{1}{l\frac{1}{x}\left(l_2\frac{1}{x}\right)^{1+\nu}},$ etc. sein kann, wo ν beliebig klein.

Ich untersuchte dann weiter den Fall, wo in $\rho(x) = \frac{1}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu}}$ $\mu \overline{\overline{<}} 1$ gedacht wird, und fand, dass alsdann die Form

$$f(x) = \int_0^x \frac{d\alpha\lambda(\alpha)}{\alpha l^{1+\nu}\frac{1}{\alpha}} = \frac{\psi(x)}{l^{\nu}\frac{1}{x}}$$

stets darstellbar ist, indem $\lambda(\varepsilon)$ nur integrirbar zu sein braucht. Diese Bedingung auferlegt aber offenbar dem $\psi(x)$ Beschränkungen innerhalb einer Strecke, da $f(x)$ durch ein Integral dargestellt ist.

Mit dem Lipschitzschen Criterium lässt sich unseres nur vergleichen in Intervall $\prec \tau(\varepsilon)$ des Stetigkeitsgrades. Die Herleitung III der Formel (B.) verlangt, wie gesagt, nur, dass für den darzustellenden Functionswerth der Stetigkeitsgrad $\prec \tau(\varepsilon)$ sei, und lässt die Function übrigens bis auf die Integrirbarkeit unbeschränkt. Die Herleitung IV verlangt, dass der Stetigkeitsgrad $\prec \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ sei, legt aber der Function nicht allein Stetigkeit auf, sondern auch die besonders einschränkende Bedingung, dass, $f(x) - f(x \pm \varepsilon) = \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}} f_1(x, \varepsilon)$ gesetzt, für jeden Punct x_1 eines Intervalles $\lim_{x=x_1,\ \varepsilon=0} f_1(x, \varepsilon) = 0$ sei*).

Würden wir uns nun, nachdem wir obige aus der Herleitung III fliessende Punctbedingung entdeckt hätten, die fernere Aufgabe gestellt haben, eine Streckenbedingung mit etwaigen neu einzuführenden Beschränkungen für die Darstellbarkeit der Function $f(x)$ zu ermitteln, so wären

---

*) Man kann übrigens durch eingehende Prüfung der Forderungen der Herleitung IV. die Abhängigkeiten zwischen x und ε, für welche $\lim f(x, \varepsilon)$ verschwinden muss, zum Vortheil der Bedingung einschränken.

wir, da die Function $f(x)$ übrigens an Freiheit einbüsst, in vollem Rechte, zu erwarten, dass die ihr in Bezug auf den Stetigkeitsgrad auferlegte Beschränkung erleichtert werde, und würden es natürlich finden, dass für den Stetigkeitsgrad die Bedingung von $\prec\tau(\varepsilon)$ auf $\prec\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ herabginge.

Dies wohl überlegt, wird man es mit mir für zutreffend halten, wenn ich die Lipschitzsche Bedingung als eine Zusatzbedingung zur Herleitung III auffasse, welche letztere die weitaus umfassendere ist.

Die Bedingung der absoluten Convergenz des Integrals $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$ enthält, wie bemerkt, zwei Arten von Bedingungen für die Darstellung eines Functionswerthes je nachdem für diesen Werth der Stetigkeitsgrad $\prec\tau(\alpha)$ oder grösser als $\tau(\alpha)$ ist. Um sich diese beiden Arten durch einen Vergleich verständlicher zu machen, erinnere ich an die Convergenzbedingungen für ein Integral $\int_0^a \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} f(\alpha)d\alpha$. So lange $\rho(x) \prec\tau(\alpha)$, ist die Beschaffenheit von $f(\alpha)$, wenn diese Function nur integrirbar ist, gleichgültig. Sobald aber $\rho(\alpha)\succ\tau(\alpha)$ ist, muss $f(\alpha)$ besondere Eigenschaften besitzen, wenn das Integral convergent sein soll. Für das Intervall $\tau(\varepsilon)\prec\rho(\varepsilon)\prec\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ des Stetigkeitsgrades liefert sowohl Herleitung III als IV Bedingungsformen, die nicht ohne eingehende offenbar äusserst schwierige Untersuchungen sich vergleichen lassen werden. Darüber hinaus, also für $\rho(\varepsilon)\succeq\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ besitzen wir aber nur die aus III entspringenden Bedingungen, weshalb man mir um so mehr Recht geben wird, wenn ich oben die aus IV fliessende Bedingung als Zusatz zu III erklärte, der eben nur das Intervall $\tau(\varepsilon) \prec \rho(\varepsilon) \prec \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ betrifft, und, wie ich betonen muss, eine keineswegs leichte Anwendung versprechende Form besitzt.

Natürlich sind diese Betrachtungen sämmtlich hinterher angestellt, d. i. sie beleuchten und combiniren nachträglich die dem Spürsinn zur Beute gefallenen Sätze. Bei einem derartigen Gewirr verschlungenster Beziehungen möchte kein Verstand von vornherein das leitende Princip zu erkennen vermögen. So ist es wohl möglich, dass fernere Entdeckungen den von mir eben dargelegten Sachverhalt theilweise verschieben, wenn z. B. für das Intervall $\tau(\varepsilon) \prec \rho(\varepsilon) \prec \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ des Stetigkeitsgrades einfachere Bedingungen als die aus der III. oder der IV. Ableitung folgenden, z. B. einfache Punctbedingungen gefunden würden, nach denen ich viel geforscht habe. Vor der Hand aber liegen die Dinge so, wie sie von mir dargestellt wurden.

Falls es sich um die Frage handelt, unter welchen Umständen eine Function für alle Puncte eines Intervalls darstellbar sei, so werden die Punctbedingungen natürlich zu Streckenbedingungen. Hier bietet aber die Bedingung III für den Stetigkeitsgrad $\prec \tau(\alpha)$ wiederum den Vortheil, dass man bei der Untersuchung von $f_1(x, \varepsilon)$ in $f(x) - f(x \pm \varepsilon) = \rho(\varepsilon) f_1(x, \varepsilon)$ das Argument x fest lassen darf, während ε abnimmt. Sie verlangt dann jedoch die Stetigkeit von $f(x)$ im ganzen Intervall.

8. V. Beschränkung des Problems über die Darstellbarkeit einer Function durch Fourier-sche Reihen.

Aus dem oben Besprochenen geht Eines unzweifelhaft hervor: dass nämlich alle jene allgemeinen Bedingungen mit Ausnahme der einen aus III. für den Stetigkeitsgrad $\prec\tau(\alpha)$ folgenden, so einfach ihr Ausdruck auf den ersten Blick auch erscheinen mag, ihrer wahren Natur nach sehr verwickelt sind. Zwar kann man Gleiches auch von den Restbedingungen für die Taylorsche Reihe sagen. Trotz den neueren Untersuchungen über die Darstellung von Differentialquotienten unbestimmt hoher Ordnung wird Jeder, der in der Lage war, wirklich von den Restausdrücken Gebrauch zu machen, mir bestätigen, dass mit ihnen zur Zeit noch nicht viel anzufangen ist, und dass sie schon bei überraschend einfachen Functionen hoffnungslos versagen.

Um so nützlicher und nothwendiger müssen dem, welcher Verständniss und Interesse für Probleme dieser Gattung besitzt, speciellere Untersuchungen erscheinen, die sich zur Aufgabe stellen, einmal Functionsklassen von vielleicht dem Ausdruck nach längeren, im Wesen aber einfacheren Eigenschaften zu beschreiben, die darstellbar sind, anderseits aber Functionsklassen zu entdecken und zu untersuchen, welche nicht darstellbar sind. Dergleichen Nachforschungen werden uns viel näher an die gesuchten Grenzdistricte zwischen Darstellbarkeit und Nichtdarstellbarkeit führen, als jene oben durchgesprochenen allgemeinen Bedingungen, auf welche ich kein übermässiges Gewicht lege, wenn ich sie auch keineswegs für überflüssig halte. Von solchen Erwägungen ausgehend, habe ich meine »Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln« und andere ähnliche Ziele verfolgende Arbeiten durchgeführt.

Ihr Grundgedanke ist folgender:

Während bei den bisherigen Untersuchungen über die Darstellbarkeit der Functionen — wenn wir der Einfachheit halber annehmen, es handele sich um die Darstellung von $f(x)$ für $x=o$ und es sei $f(o)=o$ — der Function $f_1(x)$ in $f(x) = \rho(x) . f_1(x)$ keine Aufmerksamkeit geschenkt wurde, der Stetigkeitsgrad $\rho(x)$ vielmehr allein über die Darstellbarkeit entscheiden sollte: so scheint es die natürliche Fortsetzung dieser Untersuchungen zu sein, nun besondere Annahmen über $f_1(x)$ zu machen, und die dadurch erhaltenen Functionen auf ihre Darstellbarkeit zu untersuchen. Da für die Theorie nur solche Functionen Interesse haben, die in der Umgebung des darzustellenden Punctes unendlich viele Maxima besitzen, so wird man für $f_1(x)$ Functionen wählen, die bei verschwindendem x mit unendlich vielen Maximis unbestimmt werden, und hier ist wieder die nächstliegende, einfachste und analytisch zugänglichste Annahme, zu setzen $f_1(x) = \cos \psi(x)$ wo $\psi(x)$ mit $\frac{1}{x}$ unendlich wird. So wurde denn diese Function $f(x) = \rho(x) \cos \psi(x)$ der Gegenstand meiner ferneren Arbeiten.

Es sind zwei Hauptannahmen über $\psi(x)$ möglich. Erstens $\psi(x)$ wird ohne Maxima unendlich, zweitens mit Maximis. Beide Fälle untersuchte ich auf das eingehendste. Ich fand im ersten Falle u. A., dass für irgend einen Stetigkeitsgrad $\rho(x)$ die Function $f(x) = \rho(x) \cos \psi(x)$ stets darstellbar ist, und bei der Untersuchung des zweiten Falles kamen die langer Ungewissheit und allgemein herrschenden Vorurtheilen ein Ende bereitenden stetigen nicht darstellbaren Functionen zum Vorschein, durch welche die Bedeutung der Fourierschen Reihen in der Analysis unstreitig eine wesentliche Verschiebung erfuhr.

Die Untersuchung der Function $f(x) = \rho(x) \cos \psi(x)$ im Falle $\psi(x)$ keine Maxima hat, war identisch mit der Auffindung sämmtlicher Grenzwerthe:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(a) \sin h\alpha d\alpha,$$

ein ziemlich zusammengesetztes Grenzproblem, welches ich indessen *ad assem* erledigt habe.

Seine vollständige Lösung verlangt den Limes des Integrals für jedes Unendlichwerden von $\psi(x)$ und $\sigma(x)$, und sie ist von mir in einer Tabelle zusammengestellt worden. Diese Lösung einmal gefunden, war bequeme Gelegenheit zur Vergleichung der verschiedenen bis dahin für die Darstellbarkeit aufgestellten Bedingungen geboten, die ich denn auch nicht unbenützt liess. Diese Vergleichung, eine Ausdehnung jener Grenzaufgabe, und wohl nicht uninteressante Folgerungen aus dem Obigen, wie z. B. dass

$$\lim \int_0^a d\alpha \left[\frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha} \right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

ist, während $\lim_{\alpha = 0} \frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, dass also die Fouriersche Reihe auch versagen kann, indem sie convergirt, wo sie divergiren sollte, bilden den Schluss dieser Mittheilung, soweit sie ausführlich ist. Es knüpft sich an diese Grenzwerthbestimmung noch die Frage, welche allgemeinen Darstellbarkeitsbedingungen daraus hervorgehen, und auch in dieser Richtung habe ich die Untersuchung fortgeführt, allein ich zog vor, eben weil ich auf die allgemeinen Bedingungen weniger Werth legte, meine Ergebnisse nur auszugsweise in einem Anhang einzufügen.

Ich habe dies Alles nicht etwa ungeordnet dem Leser vorgelegt, sondern mit vorangeschickten Inhaltsangaben und eingetheilt in Capitel und Artikel mit ausführlichen Ueberschriften, kurz die ganze Darstellung erfreut sich gewiss einer Uebersichtlichkeit, wie sie leider nicht gewöhnlich ist und für die ich eher Anerkennung erwartet hätte. Wenn die Inauguraldissertation trotzdem urtheilt, dieser Theil der Untersuchung scheine zu keinen »greifbaren« Resultaten zu führen, so bleibt wohl kaum für eine andere Vermuthung Raum, als dass sie entweder urtheilt ohne die Arbeit zu kennen, oder dass es ihr am geeigneten Organ zum Greifen gebricht.

Für eine solche Annahme spricht auch eine andere Stelle, wo sie von dem zweiten Theil der Abhandlung sagt, »in einer weitläufigen Abhandlung« würden von mir »verwickelte Bedingungen« aufgestellt, »unter denen die Fouriersche Reihe, welche sonst die stetige Function darstellt, an einzelnen Stellen nicht mit den Functionswerthen übereinstimmt«. Meine Abhandlung enthalte allerdings ein erstes Beispiel für eine in einem Punct nicht darstellbare Function, die Dissertation werde aber statt dessen ein anderes zwar formal in dem Meinigen enthaltenes aber in der Anlage und im Beweise einfacheres mittheilen. Diese Bemerkungen, welche den zweiten Theil der Untersuchung betreffen, in welchem ich $\psi(x)$ mit unendlich vielen Maximis behaftet voraussetze, zeigen nur, dass ich für den Autor der Dissertation noch nicht weitläufig genug war.

Erstens das Beispiel anlangend, so bemerke ich, dass ich keines habe geben wollen, sondern dass ich lediglich die Untersuchung des Limes:

$$\lim_{h=\infty}\int_o^a d\alpha\rho(\alpha)\cos\psi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

fortgesetzt habe unter jener weiteren Annahme über $\psi(x)$. Ich habe Vorschriften für die Aufeinanderfolge der Maxima von $\psi(x)$ und für das Nullwerden von $\rho(x)$ aufgesucht, damit der Limes divergent sei, ich habe ferner den höchsten Stetigkeitsgrad bestimmt, von welchem an schon Divergenz auftreten kann, und habe schliesslich, was durchaus nicht überflüssig war, festgestellt, dass diese Divergenzerscheinungen auch auftreten können, wenn die Function $\psi(x)$ mit allen ihren Differentialquotienten stetig ist.

Bezüglich der Functionen ρ und ψ, welche für $x=o$ divergente Entwickelungen von $\rho(x)\cos\psi(x)$ geben, ging ich von der einfachst denkbaren Hypothese über $\psi(x)$ aus. Ich nahm zunächst eine polygonale Linie an, deren Ordinaten $\psi(x)$ darstellen. Sie verläuft über dem Intervall $o \ldots a = x_0$, welches in die gegen Null abnehmenden Theile $\triangle_1 = x_0 - x_1$, $\triangle_2 = x_1 - x_2$, etc., getheilt ist, der Art, dass sie im Intervall $\triangle_p$ den Werth $h_p x$ hat, wo $h_\infty = \infty$. Ich finde alsdann folgende Bedingungen dafür, dass $\rho(x)\cos\psi(x)$ für $x = o$ nicht darstellbar sei. Erstens für $\rho(x)$ gilt die Ungleichheit:

$$1 > \rho(x) \gtrsim \frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{x}}}$$

Dann für die h_p und x_p hat man, wenn

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p}$$

$$x_{p-1} - x_p = u_{p-1} x_p$$

gesetzt wird, die Bedingung, dass $\lim u_p = \infty$ und dass v_p das Glied einer absolut convergirenden Reihe sei (Art. 39). Dies also sind die »verwickelten« Bedingungen, welche die Dissertation allein meinen kann, denn andere habe ich nicht abgeleitet.

Der Nachweis, dass die Function $\psi(x)$ in der für $x=o$ nicht darstellbaren Function $\rho(x) \cos \psi(x)$ nicht nothwendig jene polygonale Gestalt haben müsse, sondern mit allen Differentialquotienten stetig sein könne, wie endliche Functionen, liess sich freilich nicht einfach führen. Hier war also noch etwas zu leisten, und zwar nicht etwa wieder, wie es in der Dissertation geschieht, eine zahlentheoretische Function zusammenzusetzen, sondern eine analytische Function in endlicher Form auszusinnen. Es scheint aber, dass dies mir überlassen bleibt.

Das Beispiel der Dissertation ist keineswegs einfacher und auch nicht einmal kürzer, wie die Construction der Art. 35, 36, 37 meiner Abhandlung. Ebenso ausführlich gerechnet, würde es erheblich länger sein, auf alle Fälle dürfte es, weil einen speciellen Fall herausgreifend, weniger geeignet sein, über das Wesen der nichtdarstellbaren Functionen Licht zu verbreiten, wie meine Construction, welche innerhalb der zu Grunde gelegten Functionsform $\rho(x) \cos \psi(x)$ die Allgemeinheit thunlich wahrt. Eine Verbesserung ist daher das neue Beispiel wohl nicht.

Ich habe zwei Arten nichtdarstellbarer Functionen angegeben, die eine, von welcher oben die Rede war, die andere in einem Nachtrage zu der besprochenen Abhandlung. Bei beiden Aufstellungen war es ein Hauptziel, den höchsten Stetigkeitsgrad zu finden, bei dem bereits Nichtdarstellbarkeit eintritt. Beide Functionsformen ergaben $\rho(\varepsilon) = \dfrac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ *). Allein

*) Die zweite Form anlangend, so ist der Nachweis, dass der Stetigkeitsgrad einer nicht darstellbaren Function $f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x +$

es ist nach dem Obigen wohl möglich, dass bei einem Stetigkeitsgrad $\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}} \succ \rho(\varepsilon) \succ \tau(\varepsilon)$ auch schon Nichtdarstellbarkeit stattfindet, falls in $f(x)-f(x\pm\varepsilon)=\rho(\varepsilon)f_1(x,\varepsilon)$ der $\lim_{x=x_1,\,\varepsilon=0} f_1(x,\varepsilon)$ nicht Null ist, ein Problem, auf dessen Lösung ich, wie schon angedeutet, einige Mühe, jedoch erfolglos verwendete.

Schluss.

Das wenig anmuthende Geschäft, welches mir durch die Verbreitung einer in unserer Dissertationsliteratur ihres Gleichen schwerlich besitzende Schrift auferlegt wurde, scheint

---

$\varkappa_2 \sin h_2 x + \ldots$ bis zu $\frac{1}{l\frac{1}{x}}$ hinaufsteigen kann (Leipz. Ann. X, 443) durch folgenden zu ersetzen. Lassen wir den durch $h_p x_p = \pi$ bestimmten Puncten x_p Werthe der Form: $\varkappa_1 \sin h_1 x_p + \varkappa_2 \sin h_2 x_p + \ldots + \varkappa_{p-1} \sin \varkappa_{p-1} x_p + \sum_p^{\infty} \varkappa_q$ entsprechen, so ist leicht zu sehen, dass $f(x_p)$ nicht darüber ist. Wir nehmen weiter an $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} = o$, so können wir, wenn wir x_p durch $\frac{\pi}{h_p}$ ersetzen, annehmen, dass dem x_p der Werth $\sum_p^{\infty} \varkappa_q \overset{\backsim}{>} f(x_p)$ entspricht. Nun haben wir zwischen $\varkappa_p$ und h_p die Beziehung $\varkappa_p l h_p \underset{\backsim}{>} 1$, und wir wählen das untere Zeichen. In $f(x_p) \underset{\backsim}{<} \sum_p^{\infty} \varkappa_q$ ist $\varkappa_q$ durch h_q zu ersetzen und h_q durch x_q. Das Glied der Reihe $\sum_p^{\infty} \frac{1}{lh_q}$ können wir aber zunächst leicht so bestimmen, dass ihre Gesammtsumme mit wachsendem p nicht langsamer Null wird als ihr erstes Glied. Sie braucht hierzu nur eine geometrische Reihe zu sein. Setzen wir z. B. $h_p = e^{e^p}$, so ist $\sum_p^{\infty} \frac{1}{lh_q} \backsim \frac{1}{lh_p}$ und $\varrho(x_p) \backsim \frac{1}{l\frac{1}{x_p}}$.

bis auf Weiteres erledigt. In ihren Angriffen erkenne ich ebensoviel Beweise für die Begriffslosigkeit ihres Verfassers. Nun fällt, wenn man sie durchblättert, sogleich auf, dass sie zu erheblichem Theil Mittheilungen aus Vorlesungen des Hrn. A. Schwarz bringt, wesshalb man schliessen möchte, auch die gegen mich gerichteten Ergüsse seien aus einer ähnlichen Quelle geschöpft, eine Ansicht, die Vertreter findet. Sollte diese Vermuthung richtig sein, so würde mir das Vorgehen des Hrn. A. Schwarz in doppelter Beziehung tadelnswerth erscheinen. Einmal wäre es nicht ritterlich, sich hinter seinen Knappen zu verbergen, und ihn statt sich selbst in die Pfanne hauen zu lassen. Dann aber sind die Angriffe nicht gehauen und nicht gestochen, sondern sind allgemeiner, oberflächlicher Natur, und gestatten nicht die übliche Abwehr. Sie erheischen, wie man im Obigen gesehen, vielmehr gleichfalls einen allgemeinen, und leider zeitraubenden Wiederherstellungsprocess.

Gerade dies hebe ich hervor, weil ich gegen sachgemässe Kritik durchaus nicht abweisend mich verhalte. Im Gegentheil. Ich habe in verhältnissmässig kurzer Zeit ziemlich viel über Gegenstände der allgemeinen Functionentheorie veröffentlicht, und war zum Theil gezwungen, meine Aufsätze schneller erscheinen zu lassen, als mir lieb war, theils *pour prendre date*, und mir nicht, wie es schon einige Mal geschah, in wichtigen Dingen, die ich schon längere Zeit auf Lager hatte, ohne die letzte Hand an sie zu legen, zuvorkommen zu lassen, theils gelegentlich auch, weil amtliche Arbeit binnen Kurzem anhaltendes Nachdenken über so subtile Gegenstände, welche keine andere Beschäftigung neben sich dulden, unmöglich machen musste.

Wie leicht also können nebensächliche Irrthümmer, vor denen die Besten nicht sicher sind, in meinen Schriften untergelaufen sein! Wo ich dergleichen bemerkte, habe ich sie, wenn etwas darauf ankam, bei nächster Gelegenheit verbessert. Nichts könnte mir erwünschter sein, als auf Ungenauigkeiten aufmerksam gemacht zu werden, die ich übersehen hätte.

Um dergleichen handelt es sich aber in diesem Falle ganz und gar nicht, sondern offenbar nur um wissenschaftlich unfruchtbare Kundgebungen von Gelehrtenmissgunst. Und wenn die Dissertation vollends es sich herausnimmt, meine analytischen Grundvorstellungen anzufechten, so kann ich des Eindrucks mich nicht erwehren, als ob ein Fährmann, der gelernt hat am gespannten Seil seinen Nachen über den Fluss zu führen, in den Principien der Seemannskunst es besser wissen wollte, wie ein Kapitän, der gewohnt ist, auf der tückischen Salzflut seinen Weg zu finden.

Anhang.

In seinen *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* erwähnt Hr. Ulisse Dini, der in seiner Vorrede zu diesem Werke angiebt, dass er sich von Hrn. A. Schwarz Rath erholt habe, lediglich Hrn. Weierstrass als Urheber des bisher mir zugeschriebenen Mittelwerthsatzes:

$$\int_a^l \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x) dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x) dx, \; a \leqq \xi \leqq b,$$

wo $\varphi(x)$ eine im Intervall $a \ldots b$ entweder nur wachsend oder nur abnehmend sich ändernde Function, $f(x)$ irgend eine im selben Intervall integrirbare Function vorstellt.

Auf meine briefliche Anfrage, wieso dies geschehe, gab er mir die Auskunft, dass er bis zum Drucke seines Werkes diese Dinge nur aus Hrn. Thomä's »Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale« gekannt habe, wo in einer Anmerkung die Sache ungefähr so dargestellt sei, wie bei ihm zu lesen. Es scheint ihm sonach über Hrn. Thomä's Richtigstellung *) seiner Anmerkung nichts mitgetheilt worden zu

---

*) Die betreffende Stelle bei Hrn. Thomä (*Schlömilch's Zeitschrift etc. XX, 475*) lautet: ». . . Die Sache verhält sich jedoch so, dass Hr. Weierstrass diesen Satz mittels partieller Integration, also unter wesentlichen Beschränkungen hergeleitet und in Vorlesungen angewen-

sein. Hr. U. Dini hatte die Güte hinzuzufügen, dass er inzwischen eines Anderen belehrt worden sei, und seine Angabe bei nächster Gelegenheit corrigiren werde. Ich habe bis jetzt eine solche Correctur nirgend gedruckt gesehen. Aber gleichviel, ich kann ihm aus seinem irrthümlichen Citat keinen Vorwurf machen, da ich aus eigener Erfahrung weiss, wie schwer es ist, wenn man nicht eine sehr vollständige und bequem zugängliche Bibliothek benützen kann, und vielleicht keines häufigen Verkehrs mit Fachgenossen sich erfreut, auch nur in der inländischen Literatur Nichts zu übersehen, was auf den besonderen Gegenstand, den man gerade behandelt, Bezug hat, geschweige in einer so ausgedehnten ausländischen, wie es für Hrn. U. Dini die deutsche ist.

Hinsichtlich obigen Mittelwerthsatzes scheint es mir aber an der Zeit, der so geschaffenen Verwirrung durch Darstellung des historischen Sachverhalts, wenn möglich, ein Ende zu machen.

Thatsache ist, dass ich meiner Abhandlung: *Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört, Borch. Journ. Bd. 69, § 3*, den Satz zuerst in seiner vollen Allgemeinheit streng bewiesen, und mit Darlegung seiner Hauptanwendungsweise veröffentlicht habe, und dass er, wie der Erfolg zeigt, durch diese Abhandlung in die Wissenschaft eingeführt worden ist.

Mir selbst erzählte sodann Hr. Weierstrass, während

---

det hat, ohne dass hiervon Hr. du Bois-Reymond Kenntniss hatte. Zudem hat Hr. du Bois-Reymond jenen Satz von den beschränkenden Bedingungen befreit, und ihm so erst die Bedeutung gegeben, die er jetzt hat.«

meine Abhandlung unter der Presse war, dass er den Satz bei Gelegenheit einer Ausdehnung der Fourier'schen Formel, die jedoch der meinigen an Allgemeinheit nachstehe, gefunden, und später in Vorlesungen von ihm Gebrauch gemacht habe.

Ferner hat Hr. Darboux mich auf einen Aufsatz des Hrn. Ossian Bonnet aus dem Jahre 1849 (*Remarques sur quelques intégrales définies, Liouv. Journ. XIV, 1849, p. 249*) aufmerksam gemacht, in welchem bereits ein wichtiger besonderer Fall des Satzes angegeben und angewendet ist. In der allgemeinen Formel:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x) dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x) dx, \; a \leqq \xi \leqq b,$$

ist die Funclion φ nicht stetig vorausgesetzt, und es kann daher falls z. B. $\varphi(b) > \varphi(a)$, $\varphi(a)$ durch jeden Werth $< \varphi(a)$ und $\varphi(b)$ durch jeden Werth $> \varphi(b)$ ersetzt werden, ohne dass ξ das Intervall $a \ldots b$ verlässt. Desgleichen, wenn $\varphi(b) < \varphi(a)$, kann etc. Nehmen wir $\varphi(b) < \varphi(a)$ und positiv an, und ersetzen $\varphi(b)$ durch Null, so folgt:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x) dx, \; a \leqq \xi \leqq b,$$

welches der Satz des Hrn. O. Bonnet ist*). Hr. O. Bon-

*) Hr. O. Bonnet schliesst den Satz aus dem III. der allgemeinen Reihensätze, die Abel in der Einleitung zu seiner Abhandlung über die binomische Reihe mittheilt (Crelle's Journ. I, 314). Hr. O. Bonnet giebt dem Satze die Form: Wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ irgend welche Zahlen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ aber positive, abnehmende Zahlen sind, und

$$A < a_1 + a_2 + \ldots a_p < B, p = 1, 2, \ldots n,$$

so ist auch $\varepsilon_1 A < \varepsilon_1 a_1 \; \varepsilon_2 a_2 + \ldots \varepsilon_p a_p < \varepsilon_1 B, \; p = 1, 2, \ldots n.$

Der erwähnte Abelsche Satz ist ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, den ich in meinem Antrittsprogramm pag. 2 mitgetheilt habe, welcher lautet: Wenn die Unterschiede $v_p - v_{p+1}$ gleichzeitig entweder nicht negativ oder nicht possitiv sind, während über die u_p nichts vorausgesetzt wird, so hat man:

net wendet ihn mit vollem Erfolge an auf das Integral:

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\varphi(x)dx,$$

wenn $\varphi(x)$ der Dirichletschen Bedingung genügt, um dessen Grenze für $n=\infty$ zu finden, womit bekanntlich die Gültigkeit der Fourier'schen Darstellungsformeln dargethan ist. Von hervorragendem Nutzen ist der von Hrn. O. Bonnet bemerkte Satz für $b=\infty$:

$$\int_a^\infty \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq \infty,$$

wie er selbst a. a. O., und später auch Hr. H. Weber*) gezeigt hat.

Aus dem Satze des Hrn. O. Bonnet kann man den allgemeineren Mittelwerthsatz, wie folgt, zurückerhalten. Es werde in:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b,$$

wo also $\varphi(x)$ positiv sein muss und nirgend zunehmen darf, eingesetzt: $\varphi(x) = \Phi(b) - \Phi(x)$, so darf $\Phi(x)$ nicht abnehmen, aber die Beschränkung hinsichtlich des Zeichens fällt fort, und man fällt auf die Gleichung:

$$\int_a^b \Phi(x)f(x)dx = \Phi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \Phi(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b.$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = v_1\left\{u_1 + u_2 + \ldots u_r + \Theta u_{r+1}\right\}$$
$$+ v_n\left\{(1-\Theta)u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots + u_n\right\},\ o \leqq \Theta \leqq 1.$$

Der Abelsche Satz folgt hieraus, wenn man die v_p und $v_p - v_{p+1}$ nicht negativ annimmt, das Glied hinzufügt: $u_{n+1}v_{n+1}$, und $v_{n+1} = o$ setzt.

*) Ueber einige bestimmte Integrale, Borch. Journ. LXVIII, 231.

Setzt man jetzt $\Phi(x) = \Psi(a) - \Psi(x)$, so darf $\Psi(x)$ nirgend zunehmen, ebenfalls ohne Beschränkung des Zeichens, und man fällt auf die nämliche Gleichung:

$$\int_a^b \Psi(x) f(x) dx = \Psi(a) \int_a^\xi f(x) dx + \Psi(b) \int_\xi^b f(x) dx, \; a \leqq \xi \leqq b.$$

Somit ergiebt sich, dass diese Formel stets gilt, wenn nur die in $f(x)$ multiplicirte Function entweder nirgend wächst oder nirgend abnimmt.

Obschon der Satz des Hrn. O. Bonnet ein anderer ist, als der obige Mittelwerthsatz und sich zu ihm wie ein specieller Fall verhält, so habe ich doch geglaubt hier seiner gedenken zu müssen, weil er in der That bei geschickter Anwendung dieselben Dienste leistet, wie der allgemeine Satz.

Dies das Historische über den Satz. Um nun auf die Prioritätsfrage einzugehen, so meine ich erstens, dass eine Vorlesungsmittheilung nicht als eine authentische Publication angesehen werden kann. Ich bekenne mich zu dieser Ansicht, obschon, wenn die gegentheilige Oberhand gewinnen würde, ich einen wohlbegründeten Prioritätsanspruch u. A. auf gewisse heut zu Tage viel genannte Principien erheben könnte. Einmal aber sind die Berichte der Zuhörer häufig ungenau, ja widersprechend. Beispielsweise habe ich gerade über jene Weierstrass-sche Mittheilung so Verschiedenartiges gehört, dass ich mir heute noch kein Bild von ihr machen kann. Sodann ist billig zu bedenken, dass ein Autor, der, die Nützlichkeit eines Resultats erkennend, es dem gesammten fachgenössischen Publicum durch eine gedruckte Mittheilung zur Verfügung stellt, gegen einen anderen, der sich mit einer gelegentlichen mündlichen Mittheilung begnügt, ganz unverdient benachtheiligt wäre, weil die Fertigstellung eines gedruckten Aufsatzes manchmal viel Zeit erfordert.

Wenn ein Gelehrter sich auf eine derartige mündliche Mittheilung eines wichtigen Resultats beschränkt, so wird man schliessen, entweder, dass er dessen Bedeutung nicht voll erkannt, oder, dass ihm aus irgend welchen Gründen Nichts daran liegt, es ordentlich zu publiciren. In letzterem Falle schuldet ihm aber die Wissenschaft sicherlich keinen Dank für seine Entdeckung.

Zweitens glaube ich, dass wenn man hinsichtlich der Priorität nicht an gedruckte Publicationen sich hält, es namentlich sehr schwer sein wird, historisch festzustellen, bei wem zuerst ein neuer Gedanke die Schwelle des Bewusstseins überschritten hat. In dieser mir aufgedrungenen Vertheidigung meines wohlerworbenen Eigenthums glaube ich anführen zu dürfen, dass ich schon im Besitz des Satzes war, als ich am Ende meines Königsberger Aufenthalts (in den fünfziger Jahren) mich längere Zeit mit Mittelwerthen beschäftigte, wie meinen Freunden aus jener Zeit bekannt ist. Ich kann actenmässig beweisen, dass der Satz in meinen damaligen Rechnungen figurirt. Freilich gestehe ich gern, dass ich diesen besonderen Satz aus dem Gesicht verloren. Aber als ich nach einem Hülfssatze forschte, der zum Beweise der verallgemeinerten Fourierschen Formel geeignet wäre, erinnerte ich mich wohl, dass dergleichen Sätze existiren, so dass ich sehr bald den richtigen Weg einschlug.

Es kommt mir natürlich nicht bei, in Frage zu stellen, dass Hr. Weierstrass den Satz mit allen seinen Beziehungen genau gekannt habe, als ich ihn veröffentlichte. So wenig zweifele ich daran, dass ich es im Gegentheil befremdlich finden würde, wenn ein Mann, wie er, bei seinen tiefen und umfassenden Forschungen in der Functionenlehre ein für sie so unentbehrliches Hülfsmittel übersehen hätte.

Allein darauf kommt es bei der Feststellung, wem die Geschichte der Wissenschaft das Erstlingsrecht der Entdeckung zuerkennen soll, durchaus nicht an. Hier kann gerechter Weise nur entscheidend sein, wer zuerst den Satz, befriedigend bewiesen, unter Klarlegung seiner wahren Bedeutung, dem allgemeinen Gebrauch übergeben hat.

In diesem Sinne glaube ich den Mittelwerthsatz als mir angehörig in Anspruch nehmen zu sollen.
