WŁASNOŚCI

I NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA WROŃSKIANÓW.

PODAŁ

S. DICKSTEIN.

Odbitka z I-go tomu „Prac matematyczno-fizycznych".

WARSZAWA.
W DRUKARNI JÓZEFA SIKORSKIEGO, WARECKA N. 14.
—
1888.

WŁASNOŚCI I NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA WROŃSKIANÓW.

PODAŁ

S. DICKSTEIN.

W historyi wyznaczników, pomiędzy matematykami, którym teorya ta już to powstanie, już to rozwój swój zawdzięcza [1]), pomijano dotąd nazwisko Hoene-Wrońskiego, lubo on jeszcze przed Cauchy'm[2]) używał w dziełach swoich wyrażeń wyznacznikowych, nazwanych przez siebie funkcyami *schin*, które stosował do wielu zagadnień analizy. Mimo dzieła Schweins'a[3]), zawierającego mnóstwo twierdzeń podanych przez Wrońskiego, mimo dzieła Montferriera [4]), streszczającego najważniejsze pomysły matematyczne naszego ziomka, uczeni o odkryciach Wrońskiego nie wiedzieli, i często

---

[1]) Co do historyi wyznaczników patrz Baltzer „Theorie und Anwendung der Determinanten", Wydanie czwarte, Lipsk 1875. ; Günther: „Lehrbuch der Determinanten, Handbuch für Studirende", Erlangen 1875; Władysław Trzaska (Kretkowski): „Krótkie wiadomości o wyznacznikach", (Przypisek do dzieła: „Zasady rachunku różniczkowego" W. Folkierskiego); M. A. Baraniecki „Teorya wyznaczników" Paryż, 1879. Określenie funkcyj *schin* podane na str. 473 tego dzieła, jest niedokładném.

[2] Cauchy'ego rozprawa „Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales etc." została przedstawioną Instytutowi w dniu 30 listopada 1812, gdy tymczasem Wrońskiemu nie był obcym ten przedmiot w pracy przedstawionéj Instytutowi w roku 1810 a wydanéj w 1812 p. t. „Refutation de la theorie des fonctions analytiques de Lagrange" gdzie znajdują się wzory zawierające funkcye *schin*. Podaję to na zasadzie twierdzenia samego Wrońskiego w późniejszém dziele: „Reforme absolue" (Tom I str. 305, Tom II, CXXII), poprzednio bowiem wymienionej rozprawy nie mam.

[3]) Schweins „Theorie der Differenzen und Differentiale, Heidelberg 1825. Dzieło to przepełnione jest wzorami i twierdzeniami Wrońskiego.

[4]) Montferrier. „Encyclopédie mathématique", Paryż. W czterech tomach, bez daty. Wyszło 1856—1859.

bardzo odkrywali to, co na wiele lat przedtém wprowadził do nauki Wroński. Tak się też stało z funkcyami *schin*. Własności tych wyrażeń różniczkowych zbadali Christoffel[1]), Frobenius[2]), Pasch[3]) a ważne ich znaczenie w teoryi równań różniczkowych wskazał Fuchs[4]). Wroński jednak był pierwszym, który te wyrażenia różniczkowe do matematyki wprowadził, niektóre ich własności określił i ważne zastosowania pokazał. Idąc więc za Muirem[5]) słusznie wyrażenia te, na cześć twórcy, nazwać należy *wrońskianami*. Zachowujemy tę nazwę, jakkolwiek brzmienie jéj niezupełnie zgadza się z duchem naszego języka. Matematycy niemieccy wrońskiany nazywają wprost „wyznacznikami funkcyj“ (Frobenius, Fuchs) lub wyznacznikami różniczkowemi (Thomé). [6])

W pracy niniejszéj zebraliśmy rozrzucone po dziennikach twierdzenia o wrońskianach i wskazaliśmy ważniejsze ich zastosowania.

I. Określenie i znakowania.

Wrońskianem n funkcyj $y_1, y_2, \ldots y_n$ zmiennéj x nazywamy wyznacznik postaci następującéj:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1^{(1)}, & y_2^{(1)} & \ldots\ldots & y_n^{(1)} \\ & & & \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, & y_1^{(1)} & \ldots & y_1^{(n-2)}, & y_1^{(n-1)} \\ y_2, & y_2^{(1)} & \ldots & y_2^{(n-2)}, & y_2^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n, & y_n^{(1)} & \ldots & y_n^{(n-2)}, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

gdzie:
$$y_k^{(l)} = \frac{d^l y_k}{dx^l}.$$

Wyznacznik ten oznaczać będziemy przez:

$$W_x(y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad {}^{7})$$

---

1) Christoffel: „Über die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen“, Crelle, 55.

2) Frobenius: „Über die Determinanten mehrerer Functionen einer Variabeln“ Crelle, 77.

3) Pasch. „Note über die Determinanten, welche aus Functionen und deren Differentialen gebildet werden“. Crelle, 80.

4) Fuchs. „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten“. Crelle, 66.

5) Muir. A treatise on the theory of determinants“. Londyn 1882, str. 224 — 227 i 230—234. Porównaj także: Mansion. „Resumé du cours d'analyse infinitesimale“. Paryż 1887, oraz E. West: „Exposé des méthodes générales de Hoene-Wronski“. Paryż 1886.

6) Thomé: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Crelle, 91.

7) Muir, l. c. str. 224,

Jeżeli nie ma potrzeby wyraźnego oznaczenia zmiennéj niezależnéj, pisać będziemy wprost:

$$W(y_1, y_2 \;.\;.\; y_n)$$

Inne oznaczenia, również używane są:

$$\sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2y_3}{dx^2} \;.\;.\;.\; \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

$$\left| y_1, \quad \frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_3}{dx^2} \;.\;.\;.\; \frac{d^{n-1}y_n}{dx^n} \right|,$$

$$\left| y_{1\,(0)}, y_{2\,(1)}\; y_{3(2)} \;.\;.\;.\; y_{n\,(n-1)} \right|,$$

gdzie:

$$y_{k\,(l)} = \frac{d^l y_k}{dx^l},$$

$$D(y_1, y_2 \;.\;.\;.\; y_n) \quad ^{1})$$

W r o ń s k i wyrażenia te oznaczał za pomocą litery hebrajskiej *szyn.*

$$ש \left(y \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2y_3}{dx^2} \;.\;.\;.\; \frac{d_{n-1}\, y_n}{dx^{n-1}} \right)$$

II. Własności wrońskianów funkcyj jednéj zmiennéj.

1. *Twierdzenie*:

$$W(y_1 y, y_2 y, \;.\;.\; y_n y) = y^n\, W(y_1, y_2 \;.\;.\;.\; y_n) \tag{1}$$

Dowód[2]). Wyznacznik.

$$y^n = \begin{vmatrix} y, & 0, & 0 & . & . & . & 0, 0 \\ y^{(1)}, & y, & 0 & . & . & . & 0, 0 \\ y^{(2)}, & 2y^{(1)}, & y & . & . & . & 0, 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ y^{(n-1)}, & (n-1)y^{(n-2)}, & \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\;\;2} y^{(n-3)} & . & . & & 0, 0 \end{vmatrix},$$

pomnóżmy przez wyznacznik:

$$W(y_1, y_2, \;.\;.\;.\; y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \;.\;.\;.\;. & y_{n-1}, & y_n \\ y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, \;.\;.\;.\;. & y_{n-1}^{(1)}, & y_n^{(1)} \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, \;.\;.\;. & y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

---

1) F r o b e n i u s, l. c.

2) Według F r o b e n i u s'a. Porówn. także H e s s e: „Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale". C r e l l e 54 (rok 1857) str. 249.

łącząc wiersze pierwszego z kolumnami drugiego. Wiersz k-ty iloczynu będzie oczywiście składał się z następujących n elementów:

$$y_1^{(k)}y + k y_1^{(k-1)} y^{(1)} + \frac{k(k-1)}{1 \, . \, 2} y_1^{(k-2)} y^{(2)} \dots + y_1 y^{(k)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n^{(k)} y + k y^{(k-1)} y^{(1)} + \frac{k(k-1)}{1 \, . \, 2} y_n^{(k-2)} y^{(2)} \dots + y_n y^{(k)}$$

t. j. z elementów:

$$(y_1 y)^{(k)}, (y_2 y^{(k)}) \dots (y_n y)^{(k)}.$$

szukany przeto iloczyn będzie wyznacznikiem:

$$\begin{vmatrix} y_1 \, y, & y_2 y, \dots & y_n y \\ (y_1 y)^{(1)}, & (y_2 y)^{(1)} \dots & (y_n y)^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1 y)^{k}, & (y_2 y)^{(k)} \dots & (y_n y)^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1 y)^{(n-1)}, & (y_2 y)^{(n-1)} \dots & (y_n y)^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

który oczywiście jest równy wrońskianowi

$$W(y_1 \, y, \, y_2 y, \dots y_n y),$$

co należało dowieść. [1])

Na podstawie tego twierdzenia dowodzą się z łatwością następujące własności:

$$W(y, y_1 y, y_2 y, \dots y_n y) = y^{n+1} \; W(y_1^{(1)} y_2^{(1)}, \dots y_n^{(1)})$$

$$W(y_1, y_2, \dots\dots y_n) = \frac{1}{y^{n+1}} \, W\left(y, y\int y_1 \, dx, y \int y_2 \, dx \dots y \int y_n \, dx\right) \quad (2)$$

2. Do funkcyj $y_1, y_2, \dots y_n$ zastosujmy podstawienia liniowe:

$$y_1 = a_{11} \, z_1 + a_{12} \, z_2 + \dots\dots + a_{1n} \, z_n$$

$$y_2 = a_{21} \, z_2 + b_{22} \, z_2 + \dots\dots + a_{2n} \, z_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = a_{n1} \, z_1 + a_{n2} \, z_2 + \dots\dots + a_{nn} \, z_n,$$

zakładając, że wyznacznik podstawienia

$$R = \Sigma \pm a_{11} \, a_{22} \dots a_{nn}$$

jest różny od zera i że $z_1, z_2, \dots z_n$ są funkcyami zmiennéj x. Wskutek tego podstawienia, wrońskian $W(y_1, y_2, \dots y_n)$ będzie równy wrońskianowi $W(z_1, z_2, \dots z_n)$ pomnożonemu przez wyznacznik podstawienia to jest:

$$W(y_1, y_2, \dots y_n) = R. \; W(z_1, z_2, \dots z_n)$$

---

[1]) Skomplikowany dowód tego samego twierdzenia dał prof. Żmurko w I-ym tomie „Pamiętnika Towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu", w artykule p. t.: „Dowód na twierdzenie Hessego o wyznaczniku funkcyjnym." Twierdzenie powyższe znajduje się u Baranieckiego l. c. st. 495.

W saméj rzeczy, z prawidła mnożenia wyznaczników i z powyższych równań liniowych, wynika bezpośrednio, że iloczyn wyznaczników:

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, .\ .\ .\ a_{nn}\, .\ \Sigma\, z_1\, z_2^{(1)}\, .\ .\ .\ z_n^{(n-1)}$$

równa się wyznacznikowi $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$. Jeżeli wyznacznik podstawienia liniowego równa się jedności (podstawienie *unimodularne* Sylvestra), wrońskian $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$ nie zmienia wartości.

3. *Twierdzenie.*

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2, \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots & y_n \\ y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, \ldots & y_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Dowód. [1]) Według znanego twierdzenia o różniczkowaniu wyznaczników, pochodna wyznacznika $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$ równać się będzie sumie n wyznaczników, które otrzymują się z danego, zastępując kolejno w wyznaczniku danym elementy wiersza pierwszego, drugiego i t. d. pochodnemi tych elementów. W uważanym przypadku wszystkie te wyznaczniki prócz n-go będą miały dwa wiersze identyczne, będą przeto tożsamościowo równemu zeru, wyznacznik zaś n-y będzie miał postać wskazaną na drugiéj stronie powyższego wzoru.

Jeżeli $w_1, w_2, \ldots w_n$ są minorami wyznacznika $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$, odpowiadającemi elementowi ostatniego wiersza, to:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n) = y_1^{(n-1)} w_1 + y_2^{(n-1)} w_2 + \ldots + y_n^{(n-1)} w_n,$$

na zasadzie przeto wzoru (3) będzie:

$$\frac{dW}{dx} = y_1^{(n)} w_1 + y_2^{(n)} w_2 + \ldots + y_n^{(n)} w_n$$

$$w_k = (-1)^{n+k} W(y_1\, y_2 \ldots y_{k-1}, y_{k+1} \ldots y_n) \qquad (4)$$

Z powyższego wynika, że wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots & y_n \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, \ldots & y_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(m)}, & y_2^{(m)}, \ldots & y_n^{(m)} \end{vmatrix}$$

dla $m < n - 1$ jest tożsamościowo zerem, dla $m = n - 1$ równa się wrońskianowi $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$, dla $m = n$ równa się pochodnéj tego wrońskianu.

---

[1]) Porówn. Baltzer, l. c. wyd. III-e str. 25; Inny dowód u Zajączkowskiego „Teorya Fuchs'a równań różniczkowych liniowych i jednorodnych", Pamiętnik Akad. Um. w Krakowie, tom XIII.

4. Na zasadzie znanéj własności wyznaczników mają miejsce następujące równania:

$$
\begin{aligned}
&y_1 \quad w_1 + y_2 \quad w_2 + \ldots + y_n \quad w_n = 0\\
&y_1^{(1)} \quad w_1 + y_2^{(1)} \quad w_2 + \ldots + y_n^{(1)} \quad w_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-2)} w_1 + y_2^{(n-2)} w_2 + \ldots + y_n^{(n-2)} w_n = 0\\
&y_2^{(n-1)} w_1 + y_2^{(n-1)} w_2 + \ldots + y_n^{(n-1)} w_n = W.
\end{aligned}
$$

Kładąc:

$$\frac{w_k}{W} = z_k,$$

możemy równania te napisać w formie następującej:

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_1 \quad z_1 + y_2 \quad z_1 + \ldots + y_u \quad z_n = 0\\
&y_1^{(1)} \quad z_1 + y_2^{(1)} \quad z_2 + \ldots + y_n^{(1)} \quad z_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-2)} z_1 + y_2^{(n-2)} z_2 + \ldots + y_n^{(n-2)} z_n = 0\\
&y_1^{(n-1)} z_1 + y_2^{(n-1)} z_2 + \ldots + y_n^{(n-1)} z_n = 1
\end{aligned}
\right\} \tag{5}
$$

gdzie:

$$z_k = (-1)^{n+k} \frac{W(y_1, y_2, \ldots y_{k-1}, y_{k+1} \ldots y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots y_n)} \tag{6}$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$s_{\alpha,\beta,} = y_1^{(\alpha)} z_1^{(\beta)} + y_2^{(\alpha)} z_2^{(\beta)} + \ldots + y_n^{(\alpha)} z_n^{(\beta)}, \tag{7}$$

możemy układ (5) przedstawić w postaci.

$$s_{0,0} = 0,\ s_{1,0} = 0 \ldots\ldots s_{n-2,0} = 0,\ s_{n-1,0} = 1 \tag{8}$$

Różniczkując którekolwiek z równań (8), np. równanie $s_{\mu,0} = 0$, względem x, otrzymujemy:

$$\frac{ds_{\mu,0}}{dx} = s_{\mu+1,0} + s_{\mu,1} = 0$$

Dla $\mu + 1 < n - 1$, $s_{\mu+1,0} = 0$, a więc $s_{\mu,1} = 0$
„ $\mu + 1 = n - 1$, $s_{\mu+1,0} = 1$, „ „ $s_{\mu,1} = -1$,

a zatém:

$$s_{\mu,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu < n-2 \\ -1 & „\ \mu = n-2 \end{cases}$$

Różniczkując drugi raz, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 s_{\mu,0}}{dx} = s_{\mu+2,0} + 2\, s_{\mu+1,1} + s_{\mu,2} = 0$$

Dla $\mu + 2 < n - 1$ będzie $s_{\mu+2,0} = 0$, $s_{\mu+1,1} = 0$, a więc $s_{\mu,2} = 0$
„ $\mu + 2 = n - 1$ „ $s_{\mu+2,0} = 1$, $s_{\mu+1,1} = -1$, „ „ $s_{\mu,2} = +1$.

a zatem.

$$s_{\mu,2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu < n-3 \\ +1 & \text{„ } \mu = n-3 \end{cases}$$

Postępując tym sposobem dalej, otrzymamy szereg równań:

$$\begin{array}{l} s_{0,1} = 0,\ s_{1,1} = 0,\ s_{2,1} = 0 \ldots s_{n-2,0} = 0,\ s_{n-2,1} = (-1)^1 \\ s_{0,2} = 0,\ s_{1,1} = 0 \ldots\ldots s_{n-4,0} = 0,\ s_{n-3,2} = (-1)^2 \\ s_{0,3} = 0,\ s_{1,3} = 0 \ldots\ldots s_{n-4,3} = (-1)^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{0,n-2} = 0,\ s_{1,n-2} = (-1)^{n-2} \\ s_{0,n-1} = (-1)^{n-1}. \end{array}$$

Równania, stojące w pierwszéj kolumnie, a mianowicie:

$$s_{0,1} = 0,\ s_{0,2} = 0 \ldots\ldots s_{0,\,n-1} = 0;\ s_{0,\,n-1} = (-1)^{n-1} \tag{8'}$$

stanowią układ następujący:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \quad y_2 + z_2 \quad y_2 + \ldots + z_n \quad y_n = 0 \\ z_1^{(1)} \ y_1 + z_2^{(1)} \ y_2 + \ldots + z_n^{(1)} \ y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{(u-2)} y_1 + z_2^{(n-2)} y_2 + \ldots + z_n^{(n-1)} y_n = 0 \\ z_1^{(n-1)} y_1 + z_2^{(n-2)} y_2 + \ldots + z_n^{(n-1)} y_n = (-1)^{n-1} \end{array}\right\} \tag{5'}$$

analogiczny z układem (5). Wynika stąd dla y_k wartość następująca:

$$y_k = (-1)^{k-1} \frac{W(z_1, z_2 \ldots z_{k-1}, z_{k+1} \ldots z_n)}{W(z_1, z_2 \ldots\ldots\ldots z_n)} \tag{6'}$$

Układ funkcyj $z_1, z_2, \ldots z_n$ nazywa się układem *dołączonym* względem układu $y_1, y_2, \ldots y_n$, i odwrotnie:

5. *Twierdzenie.*

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n)\ W(z_{k+1}, z_{k+2} \ldots z_n) = W(y_1, y_2, \ldots y_k) \tag{9}$$

Dowód. [1]) Wyznacznik:

$$W(y_1\, y_2 \ldots y_n = \left| \begin{array}{llllll} y_1, & y_2, & \ldots y_k, & y_{k+1}, & \ldots y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(k-1)}, & y_2^{(k-1)} & \ldots y_k^{(k-1)}, & y_{k+1}^{(k-1)}, & \ldots y_n^{(k-1)} \\ y_1^{(k)}, & y_2^{(k)}, & \ldots y_k^{(k)}, & y_{k+1}^{(k)}, & \ldots y_n^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots y_k^{(n-1)}, & y_{k+1}^{(n-1)}, & \ldots y_n^{(n-1)} \end{array} \right|$$

pomnóżmy przez wyznacznik $W(z_{k+1}, z_{k+2} \ldots z_n)$, przedstawiony jako wyznacznik n-go stopnia:

[1]) Według Frobenius'a l. c.

$$\begin{vmatrix} 1 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 \ldots\ldots 1, & 0 \ldots\ldots 0 \\ z_1 \ldots\ldots z_k, & z_{k+1} \ldots\ldots z_n \\ \cdots & \cdots \\ z_1^{(n-k-1)} \ldots z_k^{(n-k-1)} & z_{k+1}^{(n-k-1)} \ldots z_n^{(n-k-1)} \end{vmatrix}$$

Na zasadzie twierdzenia o mnożeniu wyznaczników, przy uwzględnieniu wzoru (7), otrzymujemy iloczyn w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} y_1 \ldots\ldots y_k & s_{0,0} \ldots\ldots s_{0,n-k-1} \\ \cdots & \cdots \\ y_1^{(k-1)} \ldots y_k^{(k-1)} & s_{k-1,0} \ldots s_{k-1,n-k-1} \\ y_1^{(k)} \ldots y_k^{(k)} & s_{k,0} \ldots s_{k,n-k-1} \\ \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} \ldots y_k^{(n-1)} & s_{n-1,0} \ldots s_{n-1,n-k-1} \end{vmatrix}$$

który, ze względu na wartości wyrażeń s, rozpada się na iloczyn dwóch wyznaczników stopnia k:

$$\begin{vmatrix} y_1 \ldots\ldots y_k \\ \cdots \\ y_1^{k-1} \ldots y_n^{(k-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{k,0} \ldots\ldots s_{k,n-k-1} \\ \cdots \\ s_{n-1,0} \ldots s_{n-1,n-k-1} \end{vmatrix}$$

Drugi z tych wyznaczników na mocy wzorów (8) i (8′), sprowadza się do pojedyńczego iloczynu:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} s_{n-1,0}\, s_{n-2,1} \ldots s_{k,n-k-1}$$

równego jedności, otrzymujemy przeto ostatecznie:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n).\; W(z_{k+1}, \ldots z_n) = W(y_1\, y_2 \ldots y_k)$$

co należało dowieść.

Kładąc w tym wzorze $k = 0$, mieć będziemy:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n).W(z_1, z_2, \ldots z_n) = 1 \tag{10}$$

Wzór ten wyraża, że wrońskian układu dołączonego jest odwrotnością wrońskianu układu danego.

Niechaj

$$\alpha\, \beta \ldots \mu, \nu \ldots \sigma$$

będzie pewną przemianą szeregu liczb:

$$1, 2 \ldots k, k+1 \ldots n,$$

będzie tedy na zasadzie wzoru (9)

$$W(y_\alpha, y_\beta, \ldots y_\mu) = \varepsilon\, W(z_\nu, \ldots z_\sigma).\, W(y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (11)$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ stosowne do tego, czy powyższe dwie przemiany należą do jednéj klasy czy do klas różnych.

Kładąc we wzorze (9) zamiast $z_{k+1}, \ldots z_n$ ich wartości

$$\frac{w_{k+1}}{W(y_1, y_2, \ldots y_n)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{w_n}{W(y_1, y_2, \ldots y_n)},$$

i uwzględniając, że na zasadzie wzoru (1):

$$W\left\{\frac{w_{k+1}}{W(y_1, \ldots y_n)} \cdot \qquad \frac{w_n}{W(y_1, \ldots y_n)}\right\} = \frac{1}{[W(y_1, \ldots y_n)]^{n-k+1}} W(w_{k+1}, \ldots w_n),$$

mieć będziemy:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_k) = \frac{W(w_{k+1}, \ldots w_n)\; W(y_1, y_2, \ldots y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots y_n)^{n-k+1}}, \text{ skąd}$$

$$W(w_{k+1}, \ldots w_n) = W(y_1, y_2, \ldots y_k)[W(y_1, y_2, \ldots y_n)]^{n-k} \qquad (12)$$

6. *Twierdzenie.* Jeżeli t jest funkcyą zmiennéj x, to:

$$W_x(y_1, y_2, \ldots y_n) = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} W_t(y_1, y_2, \ldots y_n) \text{ [1]} \qquad (13)$$

Dowód. Jeżeli zamiast zmiennéj x wprowadzamy zmienną t, to pochodne funkcyj $y_1, y_2, \ldots y_n$ w wrońskianie należy zastąpić wyrażeniami na drugich stronach poniższych równań:

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_k}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{d^2 y_k}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy_k}{dx}\,\frac{d^2 t}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 y_k}{dt^3} = \frac{d^3 y_k}{dt^3}\left(\frac{dt}{dx}\right)^3 + 3\,\frac{d^2 y_k}{dt^2}\,\frac{dt}{dx}\,\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{dy_k}{dt}\,\frac{d^3 t}{dx^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}}\left(\frac{dt}{dx}\right)^{n-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Łatwo zauważyć, że po wprowadzeniu tych wyrażeń, wyznacznik dany rozłożyć się daje na sumę wyznaczników, z których wszystkie, prócz jednego, są tożsamościowo równemi zeru. W wyznaczniku nierównym zeru wszystkie

[1]) Porówn. Muir l. c. str. 324.

elementy drugiego wiersza będą miały czynnik wspólny $\frac{dt}{dx}$, wszystkie elementy trzeciego wiersza czynnik $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$. i. t. d.; tym sposobem czynnik

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^{1+2+\ldots+n-1}=\left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

będzie można wyłączyć i wyznacznik dany przyjmie postać:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} W_t(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

co należało dowieść.

7. *Twierdzenie*:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n)$$
$$=W\{W(y_1, y_2, \ldots y_m, y_{m+1}), W(y_1, y_2, \ldots y_m, y_{m+2}) \ldots W(y_1, y_2, \ldots y_m, y_n)\} : [W(y_1, y_2, \ldots y_m)]^{n-m-1} \quad (14)$$

Dowód [1]) Kładąc we wzorze (1):

$$y^n W(y_1, y_2, \ldots y_n) = W(y_1 y, y_2 y, \ldots y_n y)$$

$y=\frac{1}{y_1}$, otrzymujemy po prawéj wrońskian

$$W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1} \ldots \frac{y_n}{y_1}\right),$$

który na zasadzie wzoru (2) równa się:

$$W\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right), \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right) \ldots \frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_1}\right)\right\}$$

Ponieważ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}(y_1 y_k^{(1)}-y_k y_1^{(1)})=\frac{1}{y_1^2} W(y_1, y_k)$$
$$k=2, 3 \ldots n,$$

będzie przeto:

$$\frac{1}{y_1^n} W(y_1, y_2, \ldots y_n)=\frac{1}{y_1^{2(n-1)}} W\{W(y_1, y_2), W(y_1, y_3), \ldots W(y_1, y_n)\}$$

a stąd:

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n) = \frac{1}{y_1^{n-2}} W\{W(y_1, y_2), W(y_1, y_3) \ldots W(y_1, y_n)\} \quad (15)$$

Stosując wzór (15) do $n-1$ funkcyj: $W(y_1, y_2)$, $W(y_1, y_3) \ldots W(y_1, y_3)$, mieć będziemy:

[1]) Według Frobeniusa.

$$W\{W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)\ \ldots\ W(y_1,y_n)\}$$

$$=\frac{1}{[W(y_1,y_2)]^{n-3}}W\Big\{W[W(y_1,y_2),W(y_1,y_3)],W[W(y_1,y_2),W(y_1,y_4)]\ldots W[W(y_1,y_2),W(y_1,y_n)]\Big\}$$

Lecz na zasadzie tegoż samego wzoru (15) będzie:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2,y_3) &= \frac{1}{y_1}W[W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)] \\ W(y_1,y_2,y_4) &= \frac{1}{y_1}W[W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_4)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W(y_1,y_2,y_n) &= \frac{1}{y_1}W[W(y_1,y_2),W(y_1,y_n)], \end{aligned} \tag{16}$$

podstawiając przeto wartości wyciągnięte z tych równań dla:

$$W[W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)],\ .\ .\ .\ W[(y_1,y_2),\ W(y_1,y_n)]$$

we wzór poprzedni, otrzymamy związek:

$$W\{W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)\ \ldots\ W(y_1,y_n)\}$$

$$=\frac{1}{[W(y_1,y_2)]^{n-3}}W\Big\{y_1\ W(y_1,y_2,y_3),\ y_1W(y_1,y_2,y_4)\ .\ .\ .\ y_1\ W(y_1,y_2,y_n)\Big\}$$

$$=\frac{y_1^{\,n-2}}{[W(y_1,y_2)]^{n-3}}W\Big\{W(y_1,y_2,y_3),\ W(y_1,y_2,y_4)\ .\ .\ .\ W(y_1,y_2,y_n)\Big\},$$

Po wprowadzeniu tego wyrażenia do wzoru (15), otrzymujemy związek:

$$W(y_1,y_2,\ldots y_n)=\frac{1}{[W(y_1,y_2)]^{n-3}}W\Big\{W(y_1,y_2,y_3),\ W(y_1,y_2,y_5)\ .\ .\ .\ W(y_1,y_2,y_n)\Big\}$$

Postępując w ten sposób daléj, dojdziemy z łatwością do wzoru (13), którego ogólność stwierdzić można, dowodząc, że jeżeli ma miejsce dla danéj wartości *m*, to musi być prawdziwym dla wartości *m* o jedność większéj.

Wzór (15) przedstawia jednę z najważniejszych własności wrońskianu.

8. *Twierdzenie.* Niechaj będą dane funkcye zmiennéj x:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ y_{n-2},\ y_{n-1},\ y_n.$$

Utwórzmy szereg pochodnych tych funkcyj i podzielmy każdą z nich przez pochodną pierwszéj funkcyi, to jest przez $y_1^{(1)}$, oznaczmy iloraz $\frac{y_k^{(1)}}{y_1^{(1)}}$ przez $y_{k,1}$, otrzymamy tym sposobem szereg:

$$1,\ y_{2,1},\ y_{3,1},\ .\ .\ .\ y_{n-2,1},y_{n-1,1},y_{n,1}$$

Z tym szeregiem postąpmy tak samo jak z szeregiem funkcyj danych, t. j. weźmy pochodną każdéj z nich, podzielmy każdą z pochodnych przez pochodną funkcyi $y_{2,1}$ to jest przez $y_{2,1}^{(1)}$, oznaczmy iloraz $\frac{y_{k,1}^{(1)}}{y_{2,1}^{(1)}}$ przez $y_{k,2}$, otrzymamy tym sposobem szereg:

$$0,\ 1,\ y_{3,2} \ldots y_{n-2,2}, y_{n-1,2}, y_{n,2}$$

Kolejne postępowanie w opisany wyżéj sposób, doprowadza do następujących szeregów funkcyj:

$$\begin{array}{llllll}
y_1 & y_2 & y_3 & \ldots y_{n-2}, & y_{n-1}, & y_n, \\
1, & y_{2,1} & y_{3,1} & \ldots y_{n-2,1}, & y_{n-1,1}, & y_{n,1}, \\
0, & 1, & y_{3,2} & \ldots y_{n-2,2}, & y_{n-1,2}, & y_{n,2}, \\
0, & 0, & 1 & \ldots y_{n-2,3}, & y_{n-1,3}, & y_{n,3}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & 0 & \ldots\ldots & 1, & y_{n,n-1} \\
0, & 0, & 0 & \ldots\ldots & 0, & y_{n,n} = 1
\end{array}$$

Funkcye $y_{n,m}$ wyrażają się w sposób następujący:

$$y_{n,m} = \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)} \ldots y_{m-1}^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)} \ldots y_{m-1}^{(1)}, y_m^{(1)})} \tag{17}$$

$$m = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Dowód. [1]) W saméj rzeczy:

$$y_{n,1} = \frac{y_n^{(1)}}{y_1^{(1)}}$$

$$y_{n,2} = \frac{y_{n,1}^{(1)}}{y_{2,1}^{(1)}} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_n^{(1)}}{y_1^{(1)}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2^{(1)}}{y_1^{(1)}}\right)} = \frac{y_1^{(1)} y_n - y_1^{(1)} y_1^{(1)}}{y_1^{(2)} y_2 - y_1^{(1)} y_2^{(2)}} = \frac{W(y_1^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}$$

$$y_{n,3} = \frac{y_{n,2}^{(1)}}{y_{3,2}^{(1)}} = \frac{d}{dx}\,\frac{W(y_1^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})} : \frac{d}{dx}\,\frac{W(y_1^{(1)}, y_3^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}$$

$$= \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_n^{(1)}) - (W y_1^{(1)}, y_n^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_3^{(1)}) - W(y_1^{(1)}, y_3^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}$$

$$= \frac{W\{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}),\ W(y_1^{(1)}, y_n^{(1)}\}}{W\{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}),\ W(y_1^{(1)}, y_3^{(1)}\}}$$

Stosując do ostatniego wyrażenia wzory (15), otrzymujemy:

---

[1]) Inny dowód tego wzoru u Mansion'a (Rapport sur un mémoire de M. Ch. Lagrange, 1884); nasz dowód opiera się na twierdzen u zasadniczém o wrońskianach.

$$y_{n,3} = \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})}$$

$$y_{n,4} = \frac{y_{n,3}^{(1)}}{y_{4,3}^{(1)}} = \frac{d}{dx}\,\frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})} : \frac{d}{dx}\,\frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_4^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})}$$

$$= \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_n^{(1)}) - W(y_1^{(1)}, y_3^{(1)}, y_n^{(1)}) \cdot \frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})}{W(y_2^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})\,\frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_4^{(1)}) - W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_4^{(1)}) \cdot \frac{d}{dx}\,W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})}$$

$$= \frac{\{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}),\; W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_n^{(1)})\}}{\{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}),\; W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_4^{(1)})\}}$$

Stosując do ostatniego wyrażenia twierdzenie wyrażone wzorem (12), otrzymamy w liczniku:

$$W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_n^{(1)}) \cdot [W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})]^2$$

w mianowniku:

$$W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)}) \cdot [W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})]^2$$

tak że:

$$y_{n,4} = \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)})}$$

Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy z łatwością do wzoru (16).

Dla $m = n - 1$,

$$y_{n,\,n-1} = \frac{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots\ldots y_{n-2}^{(1)}, y_n^{(1)})}{W(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots\ldots y_{n-1}^{(1)}, y_n^{(1)})} \tag{18}$$

Wzór (16) ma zastosowanie w teoryi rozwijania funkcyj według metod Hoene-Wrońskiego.

9. *Twierdzenie.* Jeżeli funkcye $y_1, y_2, \ldots y_n$ zmiennéj x są zależnemi od siebie w ten sposób, że pomiędzy niemi istnieje związek liniowy postaci:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0 \tag{19}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots a_u$ są ilościami stałemi, z których nie wszystkie są zerami, natenczas wrońskian tych funkcyj jest zerem; naodwrót, jeżeli

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \tag{20}$$

to pomiędzy funkcyami $y_1, y_2, \ldots y_n$ istnieć musi związek liniowy postaci (17).

Dowód. Okażemy najprzód pierwszą część twierdzenia. Różniczkując związek (17) kolejno n—1 razy, otrzymujemy układ równań:

$$a_1\, y_1^{(1)} + a_2\, y_2^{(1)} + \ldots + a_n\, y_n^{(1)} = 0$$
$$a_1\, y_1^{(2)} + a_2\, y_2^{(2)} + \ldots + a_n\, y_n^{(2)} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n y_n^{(n-1)} = 0$$

Rugując z równania h) i z $n-1$ równań tego układu n stałych $a_1, a_2 \ldots a_n$, otrzymujemy związek (20), co należało dowieść.

Twierdzenie odwrotne okazać można w sposób następujący:

Z równania (15) na zasadzie związku (18), otrzymujemy:

$$W\left\{W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)\ldots W(y_1,y_n)\right\} = 0$$

t. j. że wrońskian $n-1$ funkcyj

$$W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)\ \ldots\ W(y_1,y_n)$$

jest równy zeru. Jeżeli przeto założymy, że twierdzenie jest prawdziwém w przypadku $n-1$ funkcyj, to będziemy mogli napisać:

$$a_2\, W(y_1,y_2) + a_3\, W(y_1,y_3) + \ldots + a_n\, W(y_1,y_n) = 0$$

gdzie $a_2, a_3, \ldots a_n$ są stałemi dowolnemi.

Kładąc za $W(y_1,y_2),\ W(y_1,y_3)\ \ldots\ W(y_1,y_n)$ ich wartości podane w numerze poprzedzającym, możemy związek powyższy napisać tak:

$$a_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + a_3 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right) + \ldots + a_n \frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_1}\right) = 0,$$

a całkując to równanie, otrzymujemy:

$$a_2 \frac{y_2}{y_1} + a_3 \frac{y_3}{y_1} + \ldots + a_n \frac{y_n}{y_1} = -\, a_1$$

gdzie $-a_1$ jest stała całkowania. Ostatni związek sprowadza się do postaci:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0$$

t. j. do postaci (17). [1])

Dowiedliśmy zatém, że twierdzenie odwrotne, będąc prawdziwém dla $n-1$ funkcyj, musi być prawdziwém dla n funkcyj; ponieważ zaś prawdziwość jego 2-ch funkcyj jest widoczną, jest ono zatém ogólnie prawdziwém.

Twierdzenie to ma ważne znaczenie w teoryi równań różniczkowych.

---

[1]) Patrz inny dowód u Zajączkowskiego l. c. str. 9.

III. Wrońskiany funkcyj wielu zmiennych. [1])

10. Niechaj $f_1, f_2 \ldots$ będą funkcyami m zmiennych niezależnych $x_1, x_2 \ldots x_m$ i niechaj δf_k oznacza ilość określoną równaniem:

$$\delta f_k = q_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial f_k}{\partial x_2} + \ldots + q_m \frac{\partial f_n}{\partial x_m}, \tag{21}$$

gdzie $q_1, q_2 \ldots q_m$ są ilościami dowolnemi; niechaj daléj będzie:

$$\delta^2 f_k = \delta(\delta f_k),\ \delta^3 f_k = \delta(\delta^2 f_k) \text{ i t. d.} \tag{22}$$

Wrońskianem funkcyj $f_1, f_2 \ldots f_n$ względem zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_m$ nazywać będziemy wyznacznik następującéj postaci:

$$W(f_1, f_2 \ldots f_n) = \begin{vmatrix} f_1, & f_2, & \ldots & f_n \\ \delta f_1, & \delta f_2, & \ldots & \delta f_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{n-2} f_1, & \delta^{n-2} f_2, & \ldots & \delta^{n-2} f_n \\ \delta^{n-1} f_1, & \delta^{n-1} f_2, & \ldots & \delta^{n-1} f_n \end{vmatrix} \tag{23}$$

Z łatwością okazać można, że do wrońskianu (23) stosują się twierdzenia ustępu II-go, dowiedzione dla wrońskianu funkcyj jednéj zmiennéj. Twierdzenia te w przypadku obecnym wyrazić można za pomocą wzorów następujących:

Jeżeli f jest funkcyą tychże samych zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_m$, to:

$$W(f_1 f, f_2 f \ldots f_n f) = f^n\ W(f_1, f_2, \ldots f_n) \tag{24}$$

$$W(f, f_1 f, \ldots f_n f) = f^{n+1}\ W(\delta f_1, \delta f_2 \ldots \delta f_n) \tag{25}$$

$$\delta\ W(f_1, f_2, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} f_1, & f_2, & \ldots & f_n \\ \delta f_1, & \delta f_2, & \ldots & \delta f_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta^{n-2} f_1, & \delta^{n-2} f_2, & \ldots & \delta^{n-2} f^n \\ \delta^n f_1, & \delta^n f_2, & \ldots & \delta^n f_n \end{vmatrix} \tag{26}$$

Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ stanowią układ dołączony względem układu $f_1, f_2 \ldots f_n$ to:

$$W(f_1, f_2, \ldots f_n).\ W(\varphi_{k+1} \ldots \varphi_n) = W(f_1, f_2, \ldots f_k) \tag{27}$$

Jeżeli $\psi_{k+1}, \psi_{k+2} \ldots \psi_n$ są minorami wyznacznika $W(f_1, f_2, \ldots f_n)$ odpowiadającemi funkcyom $\varphi_{k+1} \ldots \varphi_n$, to na zasadzie wzoru (12)

$$W(\psi_{k+1}, \psi_{k+2} \ldots \psi_n) = W(f_1, f_2 \ldots f_k).\ [W(f_1, f_2 \ldots f_n)]^{n-k} \tag{28}$$

[1]) Pasch, Crelle l. c.

Wzorowi (14) dla funkcyi jednéj zmiennéj odpowiada wzór zupełnie analogiczny:

$$W(f_1 f_2 \dots f_m, f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n)$$
$$= W\left\{W(f_1,f_2\dots f_m,f_{m+1}), W(f_1,f_2\dots f_m,f_{m+2})\dots W(f_1,f_2\dots f_m,f_n)\right\} : [W(f_1,f_2\dots f_m)]^{n-m-1} \quad (27)$$

Wzór (17), zastosowany do przypadku niniejszego, przyjmie postać:

$$f_{n,m} = \frac{W(\delta f_1, \delta f_2, \delta f_3 \dots \delta f_{m-1}, \delta f_n)}{W(\delta f_1, \delta f_2, \delta f_3 \dots \delta f_{m-1}, \delta f_m)} \quad (29)$$

dla $m=n-1$ otrzymujemy wzór analogiczny z wzorem (18), a mianowicie:

$$f_{n,n-1} = \frac{W(\delta f_1, \delta f_2 \dots \delta f_{n-2}, \delta f_n)}{W(\delta f_1, \delta f_2 \dots \delta f_{n-2}, \delta f_{n-1})} \quad (30)$$

Do funkcyi f_{n-m} dochodzi się z szeregu

$$f_1, f_2 \dots f_n$$

przez kolejne wykonywanie działania δf i dzielenie, podobnie jak to miało miejsce w numerze 7-ym.

Jeżeli między funkcyami f_1 $f_2 \dots f_n$ istnieje związek liniowy postaci:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$$

gdzie $a_1, a_2, \dots a_n$ są ilościami stałemi, z których nie wszystkie są zerami, w takim razie:

$$W(f_1, f_2, \dots f_n) = 0$$

i odwrotnie: jeżeli ostatni wrońskian jest zerem, to pomiędzy funkcyami $f_1, f_2, \dots f_n$ zachodzić musi związek liniowy. Dowodzenie zupełnie analogiczne do dowodzenia w przypadku funkcyj jednéj zmiennéj.

Jeżeli wrońskian $W(f_1, f_2, \dots f_m)$ jest tożsamościowo zerem, to $W(f_1 \dots f_m, f_{m+1} \dots f_n)$ jest zerem; albo innemi słowy, jeżeli jedno z wyrażeń:

$$f_1, W(f_1,f_2), W(f_1,f_2,f_3) \dots\dots$$

staje się zerem, to stają się zerami wszystkie następne.

W saméj rzeczy, niechaj $W(f_1,f_2, \dots f_{m-1}) = 0$ nie będzie zerem, a $W(f_1,f_2, \dots f_{m-1}, f_m)$ staje się tożsamościowo zerem. Stosując wzór (27), mieć będziemy:

$$W(f_1 f_2 \dots f_{m-1}, f_m, \dots f_n) \cdot [W(f_1, f_2, \dots f_{m-1})]^{n-m}.$$
$$= W\{W(f_1,f_2, \dots f_{m-1}, f_m) \cdot W(f_1,f_2, \dots f_{m-1}, f_{m+1}) \dots\}$$

Ponieważ według założenia funkcya $W(f_1,f_2 \dots f_{m-1}, f_m)$ na stronie drugiéj ostatniego równania jest zerem, więc i ta strona jest tożsamościowo zerem; na stronie zaś pierwszéj czynnik drugi jest z założenia różny od zera, musi więc być czynnik pierwszy t. j.

$$W(f_1, f_2, \dots f_{m-1}, f_m \dots f_n)$$

być tożsamościowo zerem, co było do okazania.

IV. Zastosowania.

11. Wrońskiany, jak już wspomnieliśmy, mają ważne znaczenie w teoryi równań różniczkowych.

Niechaj będzie równanie różniczkowe n-go rzędu:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n y \tag{31}$$

którego współczynniki $p_1\ p_2 \dots p_n$ są funkcyami zmiennéj x, jednokształtnemi i ciągłemi wewnątrz pewnego pola T płaszczyzny x, za wyjątkiem skończonéj ilości punktów, w których funkcye te stają się nieciągłemi. Fuchs dowiódł, że w otoczeniu jakiegokolwiek punktu x_0, który nie jest punktem osobliwym, istnieje funkcya y skończona, jednokształtna i ciągła wewnątrz T, która czyni zadość równaniu (31) i taka, że dla $x = x_0$ funkcye:

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

przyjmują wartości dowolne.

Jeżeli każdy z punktów osobliwych otoczymy kołem dowolnie małém, to pozostała część obszaru T, którą nazwijmy T', jest powierzchnią wieloskładną, (według Riemanna), która za pomocą odpowiednich przekrojów, zamienić się daje na powierzchnią jednoskładną. Na téj ostatniéj otrzymamy funkcyą y zupełnie tak samo jak na obszarze T; ale jeżeli zmienna x wychodzi z obszaru powierzchni jednoskładnéj, przecinając jeden lub kilka przekrojów, to po powrocie do wartości zmiennéj, z której wyszliśmy, otrzymujemy dla funkcyi y i jéj pochodnych wartości różne od początkowych. Te znów wartości uważane za początkowe, wyznaczają nową funkcyą wewnątrz powierzchni jednoskładnéj, czyniącą zadość równaniu danemu (31). Tym sposobem z jednéj funkcyi otrzymać można nieskończenie wiele nowych funkcyj ciągłych i jednokształtnych, wewnątrz pola otrzymanego za pomocą przekrojów z powierzchni T' i czyniących zadość równaniu różniczkowemu danemu.

Dajmy na to, że funkcyom $y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ nadajemy w punkcie x_0 obszaru T' n różnych układów wartości, otrzymujemy tedy n całek szczególnych $y_1, y_2, \dots y_n$. Całki te wybieramy, co jest możliwém, tak, aby ich wrońskian $W(y_1, y_2, \dots y_n)$ był różny od zera dla $x = x_0$. Taki układ całek nazywa Fuchs *układem zasadniczym*, a funkcye $y_1, y_2, \dots y_n$ — jego *elementami*.

Twierdzenie. Wrońskian układu zasadniczego dla całéj powierzchni T' jest skończony i różny od zera.

W saméj rzeczy, jeżeli w wyrażeniu pochodnéj wrońskianu, to jest w wyznaczniku

$$W^{(1)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

w miejsce elementów ostatniego wiersza podstawimy ich wartości wyciągnięte z równania (31) t. j.

$$y_k^{(n)} = p_1 y_k^{(n-1)} + p_2 y_k^{(n-2)} + \dots + p_n y_k$$
$$k = 1, 2 \dots n$$

a następnie wyznacznik $W^{(1)}$ rozłożymy na sumę wyznaczników, to z łatwością otrzymamy:

$$W^{(1)} = p_1 . W$$

Całkując to równanie, mieć będziemy.

$$W = W_0 \, e^{\int p_1 \, dx} \tag{32}$$

gdzie W_0 przedstawia wartość wrońskianu W w punkcie x_0; ponieważ ta wartość jest z założenia różną od zera, ponieważ czynnik $e^{\int p_1 \, dx}$ tylko dla punktów osobliwych mógłby być zerem, a więc istotnie wewnątrz obszaru T' funkcya W musi być skończoną i różną od zera, co było do okazania.

Układ zasadniczy całek otrzymać można w sposób następujący:

Niechaj y_1 będzie całką szczególną równania (31); połóżmy

$$y = y_1 \int z \, dx,$$

to funkcya z czyni zadość równaniu różniczkowemu $n-1$-go rzędu.

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + q_2 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots + q_{n-1} z \tag{33}$$

w którém, jak to sprawdzić można [1]),

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 - n \frac{y_1^{(1)}}{y_1} \\ q_i &= \frac{1}{y_1} \left[-\tbinom{n}{i} y_1^{(1)} + p_1 \tbinom{n-1}{i-1} y_1^{(i-1)} + \dots + p_i y_1 \right] \end{aligned} \tag{34}$$

Niech z_1 będzie całka szczególna równania (33), to

$$y_2 = y \int z_1 \, dx$$

[1]) Porów. Zajączkowski l. c. str. 13

będzie drugą całką szczególną równania (31). Połóżmy w rownaniu (33)

$$z = z_1 \int u\,dx,$$

to funkcya u czynić będzie zadość równaniu różniczkowemu rzędu n—2-go:

$$\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} = r_1 \frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} + r_2 \frac{d^{n-4}u}{dx^{n-4}} + \ldots + r_{n-2}u \tag{35}$$

którego współczynniki $r_1, r_2, \ldots$ dają się wyznaczyć ze współczynników równania (33) za pomocą wzorów analogicznych do wzorów (34). Niechaj u_1 będzie całką szczególną równania (35), to

$$z_2 = z_1 \int u_1\,dx$$

będzie drugą całką szczególną równania (33), a

$$y_3 = y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx$$

trzecią całką szczególną równania (31). Postępując w ten sposób daléj, dojdziemy ostatecznie do równania różniczkowego rzędu pierwszego

$$\frac{dw}{dx} = tw$$

i otrzymamy m całek szczególnych równania (31). Aby dowieść, że całki te stanowią układ zasadniczy, t. j. że wrońskian ich nie jest zerem, dość wykazać, że nie może pomiędzy niemi zachodzić związek liniowy o współczynnikach stałych. Jeżeliby zachodził taki związek:

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx + c_3 y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx + \ldots + c_m y_1 \int z_1 dx \int u_1 dx \ldots \int w_1 dx = 0$$

to dzieląc obie strony przez y_1, różniczkując, dzieląc następnie przez z_1, różniczkując i t. d., otrzymalibyśmy szereg równań:

$$\begin{array}{l}
c_1 + c_2 \int z_1 dx + c_3 \int z_1 dx \int u_1 dx + \ldots + c_m \int z_1 dx \int u_1 dx \ldots \int w_1 dx = 0 \\
\qquad c_2 \qquad + c_3 \int u_1 dx + \ldots\ldots\ldots + c_m \int u_1 dx \ldots \int w_1 dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad c_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_m \int \ldots \int w_1\,dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_m = 0
\end{array}$$

stąd wynikłoby, że

$$c_1 = c_2 = \ldots c_m = 0$$

Twierdzenie. Wrońskian układu zasadniczego całek równania (31) daje się wyrazić przez całki $y_1, z_1, u_1, \ldots w_1$ przy pomocy następującego wzoru:

$$W = C y_1^n z_1^{n-1} u_1^{n-2} \ldots w_1 \tag{36}$$

gdzie C jest ilością stałą.

[1]) Porówn. Zajączkowski l. c. str. 14.

W samej rzeczy, jeżeli wrońskian układu zasadniczego całek równania (33) oznaczymy przez W_1, to na zasadzie wzoru (32) będzie.

$$W_1 = A_1 e^{\int q_1 dx}$$

gdzie A_1 jest ilością stałą. Z pierwszego z równań (32) mamy:

$$q_1 = p_1 - n\frac{d\log y_1}{dx};$$

wstawiając tę wartość we wzór poprzedni, otrzymujemy:

$$W_1 = C_1 y_1^{-n} W$$

gdzie C_1 jest ilością stałą.

Jeżeli W_2 jest wrońskianem układu zasadniczego całek równania (35) to w podobny sposób okazać można, że

$$W_2 = A_2 z_1^{-(n-1)} W_1 = C_2 y_1^{-n} z_1^{-(n-1)} W$$

gdzie A_2 i C_2 są stałemi.

Postępując w ten sposób daléj, dojdziemy do równania różniczkowego rzędu pierwszego, którego całką szczególną jest w_1; będzie tedy

$$w_1 = C_n y^{-n} z_1^{-(n-1)} u_1^{-(n-1)} \ldots W$$

skąd otrzymujemy dla W wartość zgodną z wzorem (36)

Wzór (36) ma zastosowanie w rachunku waryacyjnym. [1])

12. Niechaj $y, y_1, y_2 \ldots y_n$ oznaczają funkcye zmiennéj x, ciągłe i skończone wraz z pochodnemi od rzędu 1-go do n—1-go włącznie, wewnątrz pewnego obszaru, i niechaj funkcya y będzie związaną z funkcyami $y_1, y_2, \ldots y_n$ związkiem postaci:

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n \tag{37}$$

który ma miejsce dla wszystkich wartości zmiennéj x wewnątrz uważanego obszaru i w którym $a_1\ a_2 \ldots a_n$ są współczynnikami od x niezależnemi.

Jeżeli damy sobie wartości funkcyj $y, y_1 \ldots y_n$ i ich pochodnych od 1-ej do n—1-ej dla pewnéj wartości zmiennéj wewnątrz uważanego obszaru np. dla $x = x_0$, to można będzie wyznaczyć współczynniki $a_1, a_2 \ldots a_n$ w sposób następujący:

Oznaczmy przez $\eta, \eta^{(1)} \ldots \eta^{(n-1)}$ wartości funkcyi y i jéj pochodnych dla $x = x_0$, a przez $\eta_k, \eta_k^{(1)} \ldots \eta_k^{(n-1)}$ wartości funkcyi y_k i jéj pochodnych ($k = 1, 2 \ldots n$) dla $x = x_0$. Różniczkujemy równanie (37) $n-1$ razy względem x, i w otrzymanych równaniach połóżmy $x = x_0$, otrzymamy tedy szereg równań:

[1]) Hesse. Crelle, 54.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\eta = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \ldots + a_n \eta_n \\
\eta^{(1)} = a_1 \eta_1^{(1)} + a_2 \eta^{(1)} + \ldots + a_n \eta_n^{(1)} \\
\eta^{(2)} = a_1 \eta_1^{(2)} + a_2 \eta_2^{(2)} + \ldots + a_n \eta_n^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta^{(n-1)} = a_1 \eta_1^{(n-1)} + a_2 \eta_2^{(n-1)} + \ldots + a_n \eta_n^{(n-1)}
\end{array}
\right. \tag{38}
$$

Z n równań (38), w założeniu, że wielkości $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ nie są liniowo zależnemi, t. j. że wrońskian $W(\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n)$ jest różnym od zera, otrzymamy wyrażenia dla współczynników $a_1, a_2 \ldots a_n$ w formie następującéj:

$$
a_m = \frac{W(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1}, \eta, \eta_{m+1} \ldots \eta_n)}{W(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1}, \eta_m, \eta_{m+1} \ldots \eta_n)} \tag{39}
$$

$$
m = 1, 2 \ldots n.
$$

Wzór (39) daje możność przedstawienia funkcyi y za pomocą n funkcyj $y_1, y_2, \ldots y_n$ dla wszystkich wartości obszaru, wewnątrz którego uważane funkcye wraz ze swemi pochodnemi od pierwszéj do $(n-1)$-ej włącznie są ciągłemi i skończonemi.

Przejście od wzoru (37) do przypadku, w którym szereg funkcyj $y_1, y_2 \ldots$ jest nieskończonym, oznaczenie wyrazu dopełniającego podobnego szeregu, rozważenie warunków zboczności rozwinięcia i szczególnych jego przypadków — stanowić będzie przedmiot oddzielnéj pracy o *prawie najwyższem* Hoene-Wrońskiego, do którego właśnie prowadzi rozważanie rozwinięć nieskończonych formy (37).

Warszawa, w maju 1888 r.

Дозволено Цензурою, Варшава 1 Іюля 1888 г.

W drukarni Józefa Sikorskiego, Warecka 14.