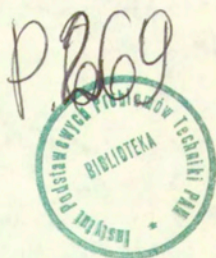
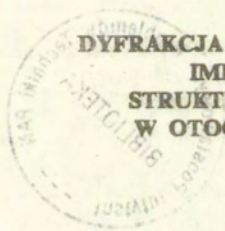


Halina Kudrewicz

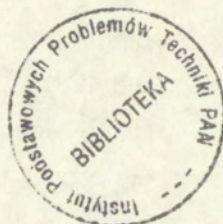
**DYFRAKcja NA PÓLPLASZCZYŹNIE
IMPEDANCYJNEJ,
STRUKTURA ROZWIĄZANIA
W OTOCZENIU KRAWĘDZI**

43/1990



WARSZAWA 1990

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 października 1989 r.



56804



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,0 Ark.druk. 1,25
Oddano do drukarni w listopadzie 1990r.
Nr zamówienia 368/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Halina Kudrewicz
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPT PAN

DYFRAKCJA NA POŁPŁASZCZYZNIE IMPEDANCYJNEJ,
STRUKTURA ROZWIĄZANIA W OTOCZENIU KRAWĘDZI.

W pracy zbadano strukturę rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej w otoczeniu krawędzi. Badane rozwiązanie otrzymano metodą Wienera-Hopfa. Podano rozwinięcie asymptotyczne w nieskończoności czynników faktoryzacji charakterystycznej funkcji problemu. W oparciu o te rozwinięcia skonstruowano rozwinięcia asymptotyczne w otoczeniu krawędzi prądu elektrycznego i magnetycznego na półpłaszczyźnie oraz rozwinięcie asymptotyczne składowych pola elektrycznego i magnetycznego w aperturze.

Wstęp.

Od 1952 roku [1] znane jest rozwiązanie dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej, ale całkowita postać tego rozwiązania jest trudna do analizy w otoczeniu krawędzi, gdzie jak wiadomo pole jest osobliwe. Określenie rodzaju osobliwości jest istotne dla numerycznych obliczeń, a także dla konstrukcji rozwiązania przy skośnym padaniu fali [2].

W przypadku półpłaszczyzny doskonale przewodzącej asymptotyczny szereg w jaki można rozwinąć składowe pola jest szeregiem potęgowym o ułamkowych potęgach. Wynika to między innymi stąd, że rozwiązanie można otrzymać przez rozdzielenie zmiennych w układzie cylindrycznym ξ , η i wyrazić przez funkcje Bessela argumentu ξ .

W przypadku półpłaszczyzny impedancyjnej jest inaczej. Warunki brzegowe nie pozwalają rozwiązać zagadnienia przez rozdzielanie zmiennych i wyrazić w terminach funkcji Bessela. Są też przesłanki wskazujące na to, że ciąg asymptotyczny, względem którego chcemy rozwinąć rozwiązanie nie może zawierać tylko funkcji potęgowych. Problem ten naświetlają prace [3], [4], [5] dotyczące dyfrakcji na półpłaszczyźnie rezystywnej nazywanej też

półpłaszczyzną półprzezroczystą [2]. W cytowanych pracach zastosowano ogólną metodę rozwinięcia rozwiązania równania z warunkami brzegowymi bez konstrukcji samego rozwiązania.

Niniejsza praca dotyczy asymptotycznej postaci rozwiązania skonstruowanego metodą Wienera-Hopfa. Wykorzystuje się rozwinięcie w nieskończoności jednostronnych transformat Fouriera budujących rozwiązanie. To pozwala na obliczenie początkowych wyrazów rozwinięcia przy krawędzi funkcji wyrażających prąd elektryczny i magnetyczny na półpłaszczyźnie.

Kluczem do tych rozwinięć jest rozwinięcie w nieskończoności czynników faktoryzacji funkcji charakterystycznej w równaniu Wienera-Hopfa. Korzysta się przy tym z twierdzenia łączącego zachowanie funkcji w zerze z zachowaniem ej transformaty Laplace'a w nieskończoności. Metoda daje także początkowe wyrazy rozwinięcia przy krawędzi pewnych kombinacji liniowych składowych pola elektrycznego i magnetycznego w aperturze.

We wszystkich rozwinięciach, oprócz funkcji potęgowych, występują wyrazy zawierające iloczyny funkcji potęgowej i logarytmu, co pozwala wnioskować, że i składowe pola rozwijają się względem tych samych funkcji. Takich rozwinięć należało oczekiwać w świetle wyżej cytowanych prac [3], [4] i [5].

Zastosowana metoda daje pełną informację o zachowaniu się prądów przy krawędzi półpłaszczyzny impedancyjnej i szybko prowadzi do jakościowej oceny zachowania się pola, ale nie daje współczynników rozwinięcia poszczególnych składowych tego pola.

1. Sformułowanie problemu dyfrakcyjnego

Na półpłaszczyznę impedancyjną umieszczoną jak na Rys. 1 pada elektromagnetyczna fala płaska pod kątem ϕ_0 , prostopadle do krawędzi.

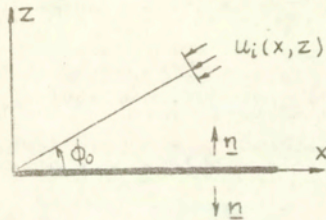
Na półpłaszczyźnie zadany jest warunek Leontowicza

$$(1.1) \quad \underline{n} \times \underline{E} = \eta Z [\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{H})]$$

gdzie \underline{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do półpłaszczyzny, skierowany do obszaru, w którym rozpatrywane jest pole, η jest bezwymiarowym parametrem impedancyjnym, Z - impedancją

falową próżni.

Zagadnienie jest harmoniczne w czasie. Zależność od czasu jest dana za pomocą czynnika $e^{-i\omega t}$, który będzie pomijany.



Rys. 1. Układ współrzędnych, półpłaszczyzna impedancyjna i padająca fala.

Zajmiemy się polem TM względem osi y, gdzie

$$(1.2) \quad \underline{E} = (0, E_y, 0) \quad , \quad \underline{H} = (H_x, 0, H_z)$$

Wtedy całe pole wyznacza składowa E_y , którą oznaczymy przez u .
Mamy

$$(1.3) \quad E_y = u \quad , \quad H_x = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Funkcja u spełnia równanie Helmholtza

$$(1.4) \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$u - i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } x > 0 \quad , \quad z = 0_+$$

(1.5)

$$u + i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } x > 0 \quad , \quad z = 0_-$$

Dla jednoznaczności rozwiązania nakładamy warunek na krawędzi i w nieskończoności. Żądamy żeby funkcja u była ograniczona oraz żeby pole dyfrakcyjne zawierało tylko fale wybiegające.

Padająca fala płaska ma postać

$$(1.6) \quad u_i(x, z) = e^{-ik(x \cos \phi_0 + z \sin \phi_0)}$$

Warunki brzegowe (1.5) powodują nieciągłość pola elektrycznego i magnetycznego.

Skok składowej E_y pola elektrycznego nazywamy prądem magnetycznym i oznaczamy:

$$(1.7) \quad E_y(x, 0_+) - E_y(x, 0_-) = I_1(x).$$

Skok składowej H_x pola magnetycznego nazywamy prądem elektrycznym i oznaczamy:

$$(1.8) \quad H_x(x, 0_+) - H_x(x, 0_-) = I_2(x).$$

2. Metoda rozwiązania

Całkowite pole jest sumą fali padającej i pola dyfrakcyjnego. Mamy zatem

$$(2.1) \quad u(x, z; \eta) = u_i(x, z) + u_s(x, z; \eta) = u_i + u_s$$

Parametr impedancyjny η wpływa w zasadniczy sposób na jakościowe własności rozwiązania, dlatego będziemy uwzględniali w zapisie zależność funkcji od tego parametru, podobnie jak we wzorze (2.1).

Zgodnie z (1.4), (1.5), (1.6) i (2.1) funkcja u_s spełnia równanie Helmholtza

$$(2.2) \quad \nabla^2 u_s + k^2 u_s = 0$$

z niejednorodnym warunkiem brzegowym

$$\begin{aligned}
 u_s - i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial z} &= -(1 - \eta \sin \phi_0) e^{-ikx \cos \phi_0} && \text{dla } x > 0, z = 0_+, \\
 u_s + i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial z} &= -(1 + \eta \sin \phi_0) e^{-ikx \cos \phi_0} && \text{dla } x > 0, z = 0_-,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

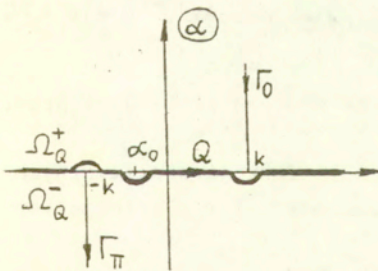
z warunkiem ograniczoności na ostrzu i warunkiem fali wybiegającej w nieskończoności.

Dla rozwiązania wykorzystamy ponadto warunki ciągłości funkcji u i jej pochodnej w aperturze

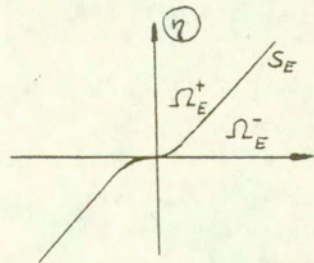
$$\begin{aligned}
 (u_i + u_s)_{z=0_-} &= (u_i + u_s)_{z=0_+} && \text{dla } x < 0, \\
 \frac{\partial (u_i + u_s)}{\partial z} \Big|_{z=0_-} &= \frac{\partial (u_i + u_s)}{\partial z} \Big|_{z=0_+} && \text{dla } x < 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Rozwiązania szukamy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 u_s(x, z; \eta) &= \int_Q A(\alpha, \eta) e^{i(\alpha x + \gamma z)} d\alpha && \text{dla } z \geq 0, \\
 u_s(x, z; \eta) &= \int_Q B(\alpha, \eta) e^{i(\alpha x - \gamma z)} d\alpha && \text{dla } z \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$



Rys. 2. Płaszczyzna α z cięciami Γ_0 , Γ_π i kontur całkowania Q .



Rys. 3. Płaszczyzna parametru impedancyjnego z linią S_E rozdzielającą płaszczyznę na dwie części Ω_E^+ i Ω_E^- .

gdzie $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, linia Q przebiega wzdłuż osi rzeczywistej na płaszczyźnie α z cięciami Γ_0 , Γ_{II} i omija charakterystyczne punkty $\alpha = k$, $\alpha = -k$ i $\alpha = \alpha_0$ jak na Rys. 2, przy czym przyjęto oznaczenie

$$(2.6) \quad \alpha_0 = -k \cos \phi_0$$

Gałąź funkcji γ jest określona w następujący sposób

$$(2.7) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad \gamma(0) = k.$$

Podstawiając (2.5) do (2.4) otrzymujemy następujące równania całkowe dla nieznanymi amplitud $A(\alpha, \eta)$ i $B(\alpha, \eta)$

$$(2.8) \quad \int_Q [A(\alpha, \eta) - B(\alpha, \eta)] e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \quad \text{dla } x < 0,$$

$$\int_Q i\gamma [A(\alpha, \eta) + B(\alpha, \eta)] e^{i\alpha x} d\alpha = 0, \quad \text{dla } x < 0.$$

Podstawiając (2.5) do (2.3) otrzymujemy

$$(2.9) \quad \int_Q (1 + \frac{\eta}{k}\gamma) A(\alpha, \eta) e^{i\alpha x} d\alpha = -(1 - \eta \sin \phi_0) e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0,$$

$$\int_Q (1 + \frac{\eta}{k}\gamma) B(\alpha, \eta) e^{i\alpha x} d\alpha = -(1 + \eta \sin \phi_0) e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0.$$

Oznaczmy przez Ω_Q^- obszar położony poniżej linii Q, a przez Ω_Q^+ obszar położony powyżej linii Q.

Przez $L(\alpha)$ będziemy oznaczali klasę funkcji analitycznych w obszarze Ω_Q^- , ciągłych w obszarze domkniętym i znikających w nieskończoności.

Przez $U(\alpha)$ będziemy oznaczali klasę funkcji analitycznych w obszarze Ω_Q^+ , ciągłych w obszarze domkniętym i znikających w nieskończoności.

Korzystając z własności transformat Fouriera rozwiązania równań (2.8), (2.9) zapiszemy w postaci

$$(2.10) \quad \begin{aligned} A(\alpha, \eta) - B(\alpha, \eta) &= L_1(\alpha, \eta), \\ \gamma [A(\alpha, \eta) + B(\alpha, \eta)] &= L_2(\alpha, \eta). \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{\eta}{k} \gamma\right) A(\alpha, \eta) &= \tilde{U}_1(\alpha, \eta) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \eta \sin \phi_0}{\alpha - \alpha_0} , \\ \left(1 + \frac{\eta}{k} \gamma\right) B(\alpha, \eta) &= \tilde{U}_2(\alpha, \eta) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + \eta \sin \phi_0}{\alpha - \alpha_0} , \end{aligned}$$

gdzie funkcje $L_1(\alpha, \eta)$ i $L_2(\alpha, \eta)$ należą do klasy $L(\alpha)$, natomiast funkcje $\tilde{U}_1(\alpha, \eta)$, $\tilde{U}_2(\alpha, \eta)$ należą do klasy $U(\alpha)$. Jak okaże się dalej, jest wygodnie wprowadzić jednostronne transformaty Fouriera

$$(2.12) \quad \mathcal{L}_+ [f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx ,$$

$$(2.13) \quad \mathcal{L}_- [f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\alpha x} dx ,$$

gdzie prawostronna transformata Fouriera $\mathcal{L}_+ [f(x)]$ jest funkcją analityczną w obszarze Ω_a^- , lewostronna transformata $\mathcal{L}_- [f(x)]$ jest funkcją analityczną w obszarze Ω_a^+ .

Ponieważ mamy

$$(2.14) \quad u(x, 0+) - u(x, 0-) = I_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \int_0^{\infty} L_1(\alpha, \eta) e^{i\alpha x} d\alpha & \end{cases}$$

funkcja $L_1(\alpha, \eta)$ jest prawostronną transformatą Fouriera prądu magnetycznego

$$(2.15) \quad L_1(\alpha, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I_1(x) e^{-i\alpha x} dx = \mathcal{L}_+ [I_1(x)] ,$$

Podobnie funkcja $L_2(\alpha, \eta)$ wyraża się przez prawostronną transformatę Fouriera prądu $I_2(x)$

$$(2.16) \quad L_2(\alpha, \eta) = \omega \mu \mathcal{L}_+ [I_2(x)] .$$

Natomiast funkcje $\tilde{U}_1(\alpha, \eta)$ i $\tilde{U}_2(\alpha, \eta)$ są lewostronnymi transformatami

$$(2.17) \quad \tilde{U}_1(\alpha, \eta) = \mathcal{L}^{-1} \left[u_s - i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial z} - (1 - \eta \sin \phi_0) e^{i \alpha_0 x} \right],$$

$$(2.18) \quad \tilde{U}_2(\alpha, \eta) = \mathcal{L}^{-1} \left[u_s + i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial z} - (1 + \eta \sin \phi_0) e^{i \alpha_0 x} \right].$$

Wróćmy do konstrukcji rozwiązania. Z zależności (2.10) wyrażamy nieznanne amplitudy $A(\alpha, \eta)$, $B(\alpha, \eta)$ za pomocą funkcji $L_1(\alpha, \eta)$ i $L_2(\alpha, \eta)$

$$(2.19) \quad A(\alpha, \eta) = \frac{1}{2} \left[L_1(\alpha, \eta) + \frac{1}{8} L_2(\alpha, \eta) \right],$$

$$B(\alpha, \eta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} L_2(\alpha, \eta) - L_1(\alpha, \eta) \right].$$

Wstawiając (2.19) do (2.5) otrzymujemy

$$(2.20) \quad u_s(x, z) = \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{8} L_2(\alpha, \eta) + \frac{z}{|z|} L_1(\alpha, \eta) \right] e^{i(\alpha x + \delta_1 z)} d\alpha.$$

Funkcje $L_i(\alpha, \eta)$ znajdujemy z równań Wienera-Hopfa. Jest to typowa procedura opisana dla tego problemu w [1] lub w [6]. Przytoczymy tutaj tylko główne wyniki potrzebne do dalszej analizy.

Równania Wienera-Hopfa otrzymane z (2.10) i (2.11) mają postać

$$(2.21) \quad \begin{aligned} U_1(\alpha, \eta) &= \delta K(\alpha, \eta) L_1(\alpha, \eta) - \frac{k \sin \phi_0}{\pi i (\alpha - \alpha_0)} \\ U_2(\alpha, \eta) &= K(\alpha, \eta) L_2(\alpha, \eta) + \frac{k}{\eta \pi i (\alpha - \alpha_0)} \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.22a) \quad \begin{aligned} U_1(\alpha, \eta) &= \frac{k}{\eta} \left[\tilde{U}_1(\alpha, \eta) - \tilde{U}_2(\alpha, \eta) \right], \\ U_2(\alpha, \eta) &= \frac{k}{\eta} \left[\tilde{U}_1(\alpha, \eta) + \tilde{U}_2(\alpha, \eta) \right], \end{aligned}$$

skąd mamy

$$(2.22b) \quad \tilde{U}_1(\alpha, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\eta}{k} \left[U_1(\alpha, \eta) + U_2(\alpha, \eta) \right],$$

$$\tilde{U}_2(\alpha, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\eta}{k} \left[U_2(\alpha, \eta) - U_1(\alpha, \eta) \right].$$

Funkcja $K(\alpha, \eta)$ jest charakterystyczną funkcją tego problemu i ma postać

$$(2.23) \quad K(\alpha, \eta) = \frac{k + \eta \delta}{\eta \delta} = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}.$$

Rozwiązując równania (2.21) otrzymujemy

$$(2.24) \quad L_1(\alpha, \eta) = \frac{k \sin \phi_0}{\pi i (\alpha - \alpha_0)} \frac{1}{\sqrt{k + \alpha_0}} \frac{1}{\sqrt{k - \alpha}} \frac{1}{K(\alpha_0, \eta)} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K_L(\alpha, \eta)},$$

$$(2.25) \quad L_2(\alpha, \eta) = - \frac{k}{\eta \pi i (\alpha - \alpha_0)} \frac{1}{K(\alpha_0, \eta)} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K_L(\alpha, \eta)},$$

oraz

$$(2.26) \quad U_1(\alpha, \eta) = - \frac{k \sin \phi_0}{\pi i (\alpha - \alpha_0)} \left[1 - \sqrt{\frac{k + \alpha}{k + \alpha_0}} \frac{K_U(\alpha, \eta)}{K_U(\alpha_0, \eta)} \right],$$

$$(2.27) \quad U_2(\alpha, \eta) = \frac{k}{\eta \pi i (\alpha - \alpha_0)} \left[1 - \frac{K_U(\alpha, \eta)}{K_U(\alpha_0, \eta)} \right].$$

Funkcje $K_L(\alpha, \eta)$ i $K_U(\alpha, \eta)$ są czynnikami faktoryzacji funkcji charakterystycznej $K(\alpha, \eta)$ na linii Q i wyrażają się wzorami

$$(2.28) \quad K_L(\alpha, \eta) = \exp \left\{ - \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega_Q^-$$

$$(2.29) \quad K_U(\alpha, \eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega_Q^+$$

Całkowa postać rozwiązania (2.20) jest trudna do analizy w otoczeniu punktu $x = 0$, $z = 0$, postąpimy zatem inaczej. Wykorzystamy jednostronne transformaty Fouriera $L_j(\alpha, \eta)$, $U_j(\alpha, \eta)$, $j = 1, 2$, rozwijając je w nieskończoności i stosując twierdzenie o związku asymptotycznego rozwinięcia funkcji w zerze i jej transformaty w nieskończoności. W pierwszej kolejności zajmiemy się czynnikami faktoryzacji.

3. Rozwinięcie asymptotyczne funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ i $K_U(\alpha, \eta)$ dla $\alpha \rightarrow \infty$

Funkcja $K_L(\alpha, \eta)$ określona wzorem (2.28) jest funkcją analityczną w obszarze Ω_Q^- , natomiast funkcja $K_U(\alpha, \eta)$ określona wzorem (2.29) jest funkcją analityczną w obszarze Ω_Q^+ . Każdą z nich można przedłużyć analitycznie względem α poszerzając dziedzinę przez odkształcenie linii całkowania; przez przesunięcie linii Q do obszaru Ω_Q^+ dla funkcji $K_L(\alpha, \eta)$, a do obszaru Ω_Q^- dla funkcji $K_U(\alpha, \eta)$.

W przypadku, gdy zera funkcji faktoryzowanej nie leżą na rozpatrywanej płaszczyźnie (dla $\eta \in \Omega_E^-$ wg [6]) przedłużenie funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ na całą płaszczyznę α z cięciem Γ_0 i przedłużenie funkcji $K_U(\alpha, \eta)$ na całą płaszczyznę z cięciem Γ_π wyraża się odpowiednio wzorami

$$(3.1) \quad K_L(\alpha, \eta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\ln K^*(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \notin \Gamma_0, \eta \in \Omega_E^-,$$

$$(3.2) \quad K_U(\alpha, \eta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pi} \frac{\ln K^*(t, \eta)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \notin \Gamma_\pi, \eta \in \Omega_E^-,$$

gdzie

$$(3.3) \quad K^*(\alpha, \eta) = \frac{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2} + k}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2} - k}$$

Kierunek całkowania wzdłuż linii Γ_0 i Γ_π pokazują strzałki na Rys. 2, obszar Ω_E^- jest pokazany na Rys. 3.

Szukamy rozwinięcia asymptotycznego funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ i $K_U(\alpha, \eta)$ dla $\alpha \rightarrow \infty$. Zajmiemy się funkcją $K_L(\alpha, \eta)$.

Ze wzoru (3.1) wynika, że istnieje taki obszar Δ na płaszczyźnie α , np. $\Delta = \Omega_Q^-$, że $K_L(\alpha, \eta) \rightarrow 1$ dla $\alpha \rightarrow \infty$ i $\alpha \in \Delta$, gdyż wyrażenie podcałkowe dąży do zera, gdy $(t - \alpha) \rightarrow \infty$. Zatem pierwszym wyrazem rozwinięcia asymptotycznego dla $\alpha \rightarrow \infty$ jest jedynka

$$(3.4) \quad K_L(\alpha, \eta) \sim 1 \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty \quad \text{w obszarze } \Delta$$

W całce (3.1) zmienna t jest zespolonym parametrem na linii całkowania. Można zauważyć, że wyrażenie podcałkowe dąży do zera, gdy $t \rightarrow \infty$ i $t - \alpha \neq 0$. Wtedy

$$(3.5) \quad K_L(\alpha, \eta) \sim 1 \quad \text{w obszarze } \alpha \notin \Gamma_0 \text{ dla } \alpha \rightarrow \infty.$$

Powstaje idea, żeby następane wyrazy rozwinięcia asymptotycznego funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ dla $\alpha \rightarrow \infty$ otrzymać rozwijając funkcję $\ln k^*(t, \eta)$ dla $t \rightarrow \infty$ i następnie całkując to rozwinięcie wyraz po wyrazie. Mamy

$$(3.6) \quad K^*(t, \eta) = \frac{\eta \sqrt{k^2 - t^2} + k}{\eta \sqrt{k^2 - t^2} - k} = 1 + \frac{2k}{\eta \sqrt{k^2 - t^2} - k}.$$

Podstawiając

$$(3.7) \quad \tau = \frac{k}{t}$$

otrzymujemy

$$(3.8) \quad K^*(t, \eta) = 1 + \frac{2\tau}{i\eta \sqrt{1-\tau^2} - \tau} = 1 - \frac{2i}{\eta} \tau - \frac{2}{\eta^2} \tau^3 - \\ - \frac{i}{\eta} \left(1 - \frac{2}{\eta^2}\right) \tau^5 + \frac{2}{\eta^2} \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right) \tau^7 + O(\tau^9).$$

Uwzględnienie pierwszego wyrazu rozwinięcia (3.8) w wyrażeniu podcałkowym (3.1) prowadzi do rozwinięcia (3.5). Dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia (3.8) prowadzą do wyniku

$$(3.9) \quad K_L(\alpha, \eta) = 1 - \frac{1}{\eta \pi} \frac{k}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cztery wyrazy rozwinięcia (3.8) prowadzą do następującego rozwinięcia funkcji $K_L(\alpha, \eta)$

$$(3.10) \quad K_L(\alpha, \eta) = a_{00} + a_{11} \frac{k}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + a_{10} \frac{k}{\alpha} + a_{22} \frac{k^2}{\alpha^2} \ln^2 \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + \\ + a_{21} \frac{k^2}{\alpha^2} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + a_{20} \frac{k^2}{\alpha^2} + a_{33} \frac{k^3}{\alpha^3} \ln^3 \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + \\ + a_{32} \frac{k^3}{\alpha^3} \ln^2 \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + a_{31} \frac{k^3}{\alpha^3} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right),$$

gdzie

$$(3.11) \quad a_{00} = 1, \quad a_{11} = \frac{1}{\eta \pi}, \quad a_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2 \pi^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{6} \frac{1}{\eta^3 \pi^3}$$

Wzorów na pozostałe współczynniki nie przytaczamy z powodu, który podamy niżej.

Jak łatwo sprawdzić, kolejne wyrazy rozwinięcia (3.10) tworzą ciąg asymptotyczny dla $\alpha \rightarrow \infty$ w płaszczyźnie α z cięciem Γ_0 . Można wysunąć następującą hipotezę:

Istnieje rozwinięcie asymptotyczne funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$ o postaci

$$(3.12) \quad K_L(\alpha, \eta) \sim \sum_{0 \leq m \leq n} a_{nm} \frac{k^n}{\alpha^n} \ln^m \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Dowodu nie udaje się przeprowadzić. Wykorzystanie kolejnych wyrazów rozwinięcia (3.8) do obliczenia całki, a następnie rozwinięcie funkcji wykładniczej (3.1) z uwzględnieniem wyrazów odpowiednio wyższych rzędów nie prowadzi do oczekiwanych rezultatów. Bowiem wraz z pojawieniem się współczynników przy następnych wyrazach rozwinięcia ulegają zmianie współczynniki poprzednio policzone przy wyrazach poprzedzających i proces ten jest nieskończony.

Niezmienione pozostają jedynie dwa pierwsze współczynniki a_{00} i a_{11} . Daje się też ustalić następująca formuła dla współczynników a_{nn}

$$(3.13) \quad a_{nn} = \frac{(a_{11})^n}{n!}.$$

Natomiast każdy z pozostałych wyrazów a_{nm} dla $m \neq n$ doznaje przyrostu w każdym kolejnym kroku, tak, że w efekcie wyraża się szeregiem nieskończonym, o którym nic nie daje się powiedzieć.

Niezależnie od wyżej przedstawionego sposobu, dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia (3.12) można otrzymać posługując się formalnym mnożeniem szeregów asymptotycznych.

Korzystając z następującej własności czynników faktoryzacji

$$(3.14) \quad K_U(\alpha, \eta) = K_L(-\alpha, \eta)$$

i przy założeniu dla $K_L(\alpha, \eta)$ rozwinięcia (3.12), możemy napisać dla $\alpha \rightarrow \infty$ $\alpha \notin \Gamma_\pi$

$$(3.15) \quad K_U(\alpha, \eta) \sim \sum_{0 \leq m \leq n} (-1)^n a_{nm} \frac{k^n}{\alpha^n} \ln^m \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right).$$

Mamy w otoczeniu linii Q

$$(3.16) \quad K(\alpha, \eta) = K_L(\alpha, \eta) K_U(\alpha, \eta) .$$

Funkcja $K(\alpha, \eta)$ określona wzorem (2.23) jest regularna w nieskończoności i rozwija się w szereg potęgowy, który jest jej szeregiem asymptotycznym

$$(3.17) \quad K(\alpha, \eta) = 1 - \frac{i}{\eta} \frac{k}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{i}{\eta} \frac{k^3}{\alpha^3} - \frac{i}{7} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{k^5}{\alpha^5} + \dots \quad \text{dla } |\alpha| > k.$$

Wstawiając do równości (3.16) rozwinięcia (3.12), (3.15) i (3.17), a następnie przyrównując współczynniki przy takich samych wyrażeniach otrzymujemy:

$$a_{00} = 1, \quad a_{11} = \frac{1}{\eta \pi}, \quad a_{nn} = \frac{(\alpha_{11})^n}{n!}$$

Wykorzystujemy przy tym rozwinięcie

$$(3.18) \quad \ln \frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{1 - \frac{\alpha}{k}} = i\pi + 2 \left[\frac{k}{\alpha} + \frac{1}{3} \frac{k^3}{\alpha^3} + \frac{1}{5} \frac{k^5}{\alpha^5} + \dots \right] \quad \text{dla } |\alpha| > k.$$

Niestety, podobnie jak w poprzedniej metodzie, pozostałe wyrazy a_{nm} , dla $n \neq m$ nie dają się obliczyć efektywnie. Otrzymuje się dla nich nieskończony układ równań.

Ostatecznie poprzestaniemy na dwóch wyrazach asymptotycznego rozwinięcia

$$(3.19) \quad K_L(\alpha, \eta) \sim 1 + \frac{1}{\eta \pi} \frac{k}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right)$$

dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$,

$$(3.20) \quad K_U(\alpha, \eta) \sim 1 - \frac{1}{\eta \pi} \frac{k}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right)$$

dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_\pi$.

4. Rozwinięcie asymptotyczne funkcji $L_j(\alpha, \eta)$, $U_j(\alpha, \eta)$.

W rozwiązaniu problemu dyfrakcyjnego biorą udział dwie prawostronne transformaty Fouriera i dwie lewostronne, opisane wzorami (2.24) - (2.27). Obliczymy kolejno ich rozwinięcia w nieskończoności.

Korzystając z asymptotycznego rozwinięcia funkcji $K_L(\alpha, \eta)$ mamy

$$(4.1) \quad \frac{1}{K_L(\alpha, \eta)} \sim 1 - \frac{1}{\eta \pi} \frac{k}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)$$

dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$.

Ponadto mamy

$$(4.2) \quad \frac{1}{\alpha - \alpha_0} = \frac{1}{\alpha} \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha} + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} + \dots \right] \quad \text{dla } |\alpha| > \alpha_0$$

oraz

$$(4.3) \quad \frac{1}{\sqrt{k - \alpha}} = -\frac{i}{\sqrt{\alpha}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\alpha} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{k^2}{\alpha^2} + \dots \right]$$

dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$

Wstawiając (4.1) - (4.3) do (2.24) otrzymamy dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$

$$(4.4) \quad L_1(\alpha, \eta) = \frac{a_1}{\alpha \sqrt{\alpha}} + \frac{a_2}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}}\right)$$

gdzie

$$(4.5) \quad a_1 = \frac{-k \sin \phi_0}{\pi \sqrt{k + \alpha_0}} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K(\alpha_0, \eta)}$$

$$(4.6) \quad a_2 = \frac{k^2 \sin \phi_0}{\eta \pi^2 \sqrt{k + \alpha_0}} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K(\alpha_0, \eta)}$$

Odpowiednio dla funkcji $L_2(\alpha, \eta)$ mamy rozwinięcie dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$

$$(4.7) \quad L_2(\alpha, \eta) = \frac{b_0}{\alpha} + \frac{b_1}{\alpha^2} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

gdzie

$$(4.8) \quad b_0 = -\frac{k}{\eta \pi i} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K(\alpha_0, \eta)},$$

$$(4.9) \quad b_1 = \frac{k^2}{\eta^2 \pi^2 i} \frac{K_L(\alpha_0, \eta)}{K(\alpha_0, \eta)},$$

Dla funkcji $U_1(\alpha, \eta)$ otrzymujemy ze wzorów (2.26) i (3.20) rozwinięcie asymptotyczne dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_0$

$$(4.10) \quad U_1(\alpha, \eta) = \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{C_2}{\alpha} + \frac{C_3}{\alpha \sqrt{\alpha}} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\kappa}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}}\right)$$

gdzie

$$(4.11) \quad C_1 = \frac{k \sin \phi_0}{\pi i} \frac{1}{K_V(\alpha_0, \eta) \sqrt{\kappa + \alpha_0}},$$

$$(4.12) \quad C_2 = -\frac{k \sin \phi_0}{\pi i},$$

$$(4.13) \quad C_3 = \frac{k^2 \sin \phi_0}{\eta \pi^2 i} \frac{1}{K_V(\alpha_0, \eta) \sqrt{\kappa + \alpha_0}}.$$

Dla funkcji $U_2(\alpha, \eta)$ otrzymujemy ze wzorów (2.27) i (3.20) rozwinięcie asymptotyczne dla $\alpha \rightarrow \infty$ w obszarze $\alpha \notin \Gamma_{\pi}$

$$(4.14) \quad U_2(\alpha, \eta) = \frac{d_0}{\alpha} + \frac{d_1}{\alpha^2} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\kappa}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right),$$

gdzie

$$(4.15) \quad d_0 = \frac{k}{\eta \pi i} \left(1 - \frac{1}{K_V(\alpha_0, \eta)}\right),$$

$$(4.16) \quad d_1 = \frac{k^2}{\eta^2 \pi^2 i} \frac{1}{K_V(\alpha_0, \eta)}.$$

Funkcje $L_1(\alpha, \eta)$ i $L_2(\alpha, \eta)$ opisują odpowiednio transformaty prądu magnetycznego i elektrycznego, wzory (2.15) i (2.16). Stąd mamy

$$(4.17) \quad I_1(x) = \mathcal{L}_+^{-1} [L_1(\alpha, \eta)],$$

$$(4.18) \quad I_2(x) = \frac{1}{\omega \mu} \mathcal{L}_+^{-1} [L_2(\alpha, \eta)],$$

gdzie symbol \mathcal{L}_+^{-1} oznacza transformatę odwrotną (wzór (2.14) dla prądu $I_1(x)$).

Ze wzorów (2.17), (2.18) oraz zależności (2.22) wnioskujemy że funkcje $U_1(\alpha, \eta)$ i $U_2(\alpha, \eta)$ wyrażają transformaty następujących funkcji:

$$(4.19) \quad U_1(\alpha, \eta) - \frac{k}{\pi i} \frac{\sin \phi_0}{\alpha - \alpha_0} = \frac{k}{\eta} \mathcal{L}_- [u_s(x, 0_+) - u_s(x, 0_-)] - \\ - i \mathcal{L}_- \left[\frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_+) + \frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_-) \right],$$

$$(4.20) \quad U_2(\alpha, \eta) + \frac{k}{\eta \pi i (\alpha - \alpha_0)} = \frac{k}{\eta} \mathcal{L}_- [u_s(x, 0_+) + u_s(x, 0_-)] - \\ - i \mathcal{L}_- \left[\frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_+) - \frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_-) \right].$$

Skorzystamy następnie z twierdzenia wiążącego asymptotyczne rozwinięcie funkcji w zerze z asymptotycznym rozwinięciem jej transformaty Laplace'a w nieskończoności. Nie przytaczając założeń podamy tezę, która brzmi:

Jeżeli funkcja $\psi(t)$ ma rozwinięcie

$$(4.21) \quad \psi(t) \sim \sum a_n \Psi_n(t)$$

do N-tego wyrazu, przy $t \rightarrow 0$, to jej transformata Laplace'a $\mathcal{L}[\psi(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt$ ma rozwinięcie

$$(4.22) \quad f(s) \sim \sum a_n g_n(s)$$

do N-tego wyrazu, jednostajnie względem $\arg s$, przy $s \rightarrow \infty$ w obszarze $0 < |s| < \infty$, $|\arg s| < \frac{\pi}{2} - \Delta$, gdzie

$$(4.23) \quad g_n(s) = \mathcal{L}[\Psi_n(t)].$$

Zauważmy dla naszych celów, że teza pozostaje prawdziwa jeżeli: 1^o dla prawostronnej transformaty Fouriera określonej wzorem (2.12) współczynniki a_n we wzorze (4.22) podzielimy przez 2π , a dla lewostronnej transformaty określonej wzorem (2.13) - podzielimy przez -2π , 2^o obrócimy obszar kątowy w którym istnieje rozwinięcie transformaty o kąt $\frac{\pi}{2}$; zgodnie ze wskazówkami zegara dla transformaty \mathcal{L}_+ , a przeciwnie - dla transformaty \mathcal{L}_- .

Z twierdzenia będziemy korzystali w drugą stronę, tzn. znając rozwinięcie transformaty w nieskończoności określimy rozwinięcie funkcji w zerze.

Korzystając z rozwinięcia (4.4) i zależności (4.17) otrzymamy następujące rozwinięcie funkcji wyrażającej prąd magnetyczny, dla $x \rightarrow 0_+$:

$$(4.24) \quad I_1(x) = 2\sqrt{\pi} a_1 \sqrt{x} + 4\sqrt{\pi} a_2 x \sqrt{x} \ln x + O(x\sqrt{x})$$

gdzie a_1 i a_2 są dane odpowiednio wzorami (4.5) i (4.6).

Korzystając z rozwinięcia (4.7) i zależności (4.18) otrzymamy następujące rozwinięcie funkcji wyrażającej prąd elektryczny, dla $x \rightarrow 0_+$:

$$(4.25) \quad I_2(x) = \frac{2\pi i}{\omega\mu} b_0 + 2\pi i b_1 x \ln x + O(x),$$

gdzie b_0 i b_1 są dane odpowiednio wzorami (4.8) i (4.9).

Rozwinięcia funkcji $U_1(\alpha, \eta)$ i $U_2(\alpha, \eta)$ prowadzą do rozwinięć pewnych funkcji w aperturze. Korzystając z (4.10) i (4.20) mamy dla $x \rightarrow 0_-$

$$(4.26) \quad u_s(x, 0) = \frac{1}{K_U(\alpha_0, \eta)} - \frac{1}{\eta \pi i} \frac{1}{K_U(\alpha_0, \eta)} x \ln x + O(x).$$

Korzystając z (4.14) i (4.19) mamy dla $x \rightarrow 0_-$

$$(4.27) \quad \frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0) = \frac{2k \sin \phi_0}{\pi \sqrt{i(k+\alpha_0)} K_U(\alpha_0, \eta)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} - \frac{2k}{\eta \sqrt{\pi}} \sqrt{x} \ln x \right] + O(\sqrt{x}).$$

Jeżeli wykorzystamy zależności (2.17) i (2.18), to otrzymamy następujące rozwinięcia w aperturze

$$(4.28) \quad u_s(x, 0_+) - \frac{i\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_+) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \sqrt{x} \ln x + O(\sqrt{x}),$$

$$(4.29) \quad u_s(x, 0_-) + \frac{i\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial z}(x, 0_-) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \sqrt{x} \ln x + O(\sqrt{x}),$$

gdzie stałe we wzorach (4.28) i (4.29) wyrażają się odpowiednio przez stałe występujące we wzorach (4.10) i (4.14).

Podsumowując można stwierdzić, że przedstawiona metoda ma następujące cechy:

1^o Szybko prowadzi do celu, gdy chodzi o zapostulowanie postaci i znalezienie początkowych wyrazów rozwinięcia w otoczeniu

krawędzi, funkcji wyrażających prąd magnetyczny i elektryczny na półpłaszczyźnie w zagadnieniu dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej.

- 2^o Daje jakościowy obraz, ale nie daje odpowiedzi na pytanie jak składowe pola zależą od kąta obserwacji.
- 3^o Pokazuje, że w zagadnieniach dyfrakcji, których rozwiązanie można otrzymać metodą Wienera-Hopfa, postać rozwinięcia asymptotycznego rozwiązania w otoczeniu krawędzi jest sterowana przez postać rozwinięcia asymptotycznego czynników faktoryzacji funkcji charakterystycznej w nieskończoności.

Literatura

- [1] T.B.A.SENIOR - Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. Proc.Roy.Soc.A 213 str. 436 (1951)
- [2] S.PRZEŹDZIECKI, Electromagnetic Diffraction by an Impedance Transition Half-Plane. - Proc. of the 1989 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, Stockholm, 91-93.
- [3] I.M.BRAVER, Kh.L.GARB, P.Sh.FRIDBERG, I.M.YAKOVER - O zachowaniu równań Maxwella w bliskości krawędzi półpłaszczyzny, na której zadano dwustronne warunki brzegowe typu impedancyjnego (po rosyjsku), DAN ZSRR, 1986, 286, No 5, 1092-1096, Fizyka Matematyczna.
- [4] IGOR M.BRAVER, PINCHOS Sh.FRIDBERG KHONA L.GARB, and IOSIF M.YAKOVER - The behavior of the Electromagnetic Field Near the Edge of a Resistive Half-Plane. IEE Trans.Antennas Propagat., Vol.AP-36, 1760-1768 (1988).
- [5] I.M.BRAVER, P.Sh.FRIDBERG, Kh.L.GARB, and I.M.YAKOVER Electromagnetic Field Near the Edge of a Perfectly Conducting Wedge and a Resistive Half-Plane. Proc.of the 1989 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, Stockholm 88-90.
- [6] H.KUDREWICZ - Diffraction by an impedance half-plane - dependence on the impedance parameter. Archives of Acoustics, w druku.
- [7] A.Erdelyi - Rozwinięcie asymptotyczne, PWN, Warszawa 1967.