COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXXI Année 1938 Classe III Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXXI 1938 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1938

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Józefa Filipowskiego

TREŚĆ ZESZYTU 1—3

TABLE DES MATIÈRES

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie
z dnia 25 stycznia 1938 r.

A. Tryboń.

O zbieżności odcinków szeregu potęgowego w obszarach leżących nazewnątrz koła zbieżności.

Przedstawił S. Mazurkiewicz dnia 25 stycznia 1938 r.

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej dowodzę metodą kategorii istnienia szeregów potęgowych zbieżnych w kole jednostkowym i mających własność następującą: dla każdego obszaru G jednospójnego i leżącego nazewnątrz koła jednostkowego i każdej funkcji $g(z)$ analitycznej i regularnej w G — można znaleść ciąg odcinków danego szeregu zbieżny w G do $g(z)$, przy czym zbieżność jest jednostajna na każdej domkniętej i ograniczonej podmnogości obszaru G.

A. Tryboń.

Über die Konvergenz von Abschnittsfolgen einer Potenzreihe in Gebieten, welche ausserhalb des Konvergenzkreises liegen.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 25 janvier 1938.

Ich werde hier das Problem der Konvergenz von Abschnittsfolgen einer Potenzreihe in Gebieten, welche ausserhalb des Konvergenzkreises liegen, mit der *Methode der Kategorie* im Funktionalraume behandeln [1]).

[1]) vrgl. Jentsch: Acta Math. 41, S. 263, sowie Mazurkiewicz: Fund. Math. XXVIII, S. 289-293 (im folgenden als M. zitiert), wo die Methode der Kategorie auf das Problem der Überkonvergenz angewendet wird.

1. Wir bezeichnen mit R_2 die komplexe Ebene, mit U das Innere des Einheitskreises.

Ist $\{G_n\}$ eine aufsteigende Folge von Gebieten und $G=\sum_{n=1}^{\infty} G_n$, so sagen wir dass $\{G_n\}$ *gegen G konvergiert* in Zeichen $G_n \to G$.

2. Ist G ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(G)$ die Menge aller in G regulären, analytischen Funktionen. $\mathfrak{A}(G)$ kann man wie folgt metrisieren [2]. Sei $z' \epsilon G$; $\lambda'=\varrho(z', R_2-G)$. Für $0<\lambda<\lambda'$ sei $G^*(\lambda)$ die Menge der $z \epsilon G$ für die:

$$(1) \qquad \varrho(z, R_2-G)>\lambda; \qquad |z-z'|<\frac{1}{\lambda}.$$

Sei $G(\lambda)$ diejenige Komponente von $G^*(\lambda)$, die z' enthält. $G(\lambda)$ ist beschränkt und einfach zusammenhängend; wenn $\lambda_1>\lambda_2$, so ist $\overline{G(\lambda_1)} \subset G(\lambda_2) \subset G$; wenn für die Folge $\{\lambda_i\}$ die Beziehungen $\lambda_i>\lambda_{i+1}$, $\lambda_i \to 0$ gelten so ist $G(\lambda_i) \to G$.

Wir setzen für $f, g \epsilon \mathfrak{A}(G)$:

$$(2) \qquad \sigma_G(f,0)=\operatorname*{Inf}_{\lambda}\,(\lambda+\sup_{z \epsilon G(\lambda)}|f(z)|)$$

$$(3) \qquad \sigma_G(f,g)=\sigma_G(f-g,0)$$

$\sigma_G(f,g)$ ist eine *Entfernung* und $\mathfrak{A}(G)$ ein metrischer, separabler, vollständiger Raum. Wenn $f, f_n \epsilon \mathfrak{A}(G)$, $n=1,2\ldots$ so bedeutet die Relation: $\sigma_G(f,f_n) \to 0$, dass f_n in G gegen f konvergiert und zwar gleichmässig in jeder beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge von G. Für $G=U$ setzen wir $z'=0$; dann ist die Metrik σ_U mit der von Kierst und Szpilrajn eingeführten Metrik [3] aequivalent.

3. Die Einführung der Metrik σ_G gestattet folgende, bequeme Formulierung des Runge'schen Satzes: *Sind $G_1, G_2 \ldots G_k$ — paarweise punktfremde, einfach zusammenhängende Gebiete, und ist $f_j \epsilon \mathfrak{A}(G_j)$, $j=1,2\ldots k$, so existiert eine Folge von Polynomen $\{g_n(z)\}$, $n=1,2\ldots$ derart dass*:

$$(4) \qquad \sigma_{G_j}(q_n, f_j) \to 0 \qquad j=1,2\ldots k.$$

[2] M. **2.** S. 289.

[3] Fund. Math. XXI, S. 281.

4. Wir formulieren noch folgenden (seinem Wesen nach bekannten) Hilfssatz. *Sei* $G_n \to G$, $f, f_k \in \mathfrak{A}(G)$, $k=1,2\ldots$ *Existiert für jedes* n *eine Teilfolge* $\{f_{k_j^{(n)}}\}$, $j=1,2\ldots$ *derart dass* $\sigma_{G_n}(f, f_{k_j^{(n)}}) \to 0$, *so existiert auch eine Teilfolge* $\{f_{k_j}\}$ *derart dass* $\sigma_G(f, f_{k_j}) \to 0$.

5. ***Satz I.*** *Sei* $\mathfrak{H}$ *die Menge aller* $f \in \mathfrak{A}(U)$ *mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Gebiet* G *welches einfach zusammenhängend ist und zu* U *punktfremd und zu jeder Funktion* $g \in \mathfrak{A}(G)$, *existiert eine Abschnittsfolge der Mac-Laurin'schen Reihe von* f, *welche in* G *gegen* g *konvergiert und zwar gleichmässig in jeder abgeschlossenen, beschränkten Teilmenge von* G. *Dann ist* $\mathfrak{H}$ *eine Residualmenge in* $\mathfrak{A}(U)$.

6. Sei $f \in \mathfrak{A}(U)$; wir bezeichnen mit $p^{(f)}(z)$ die Mac-Laurin'sche Reihe von f, mit $p_k^{(f)}(z)$, $k=0,1\ldots$ ihre Abschnitte, also:

$$p^{(f)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} z^s \tag{5}$$

$$p_k^{(f)}(z) = \sum_{s=0}^{k} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} z^s. \tag{6}$$

Sei $\mathfrak{P}(f)$ die Menge aller $p_k^{(f)}$. *Die Menge* $\mathfrak{H}$ *kann man definieren als die Menge aller* $f \in \mathfrak{A}(U)$ *mit der Eigenschaft, dass* $\mathfrak{P}(f)$ *für jedes der Bedingung* $GU=0$ *genügende einfach zusammenhängende Gebiet* G *in* $\mathfrak{A}(G)$ *dicht ist.*

7. Sei:

$$\{q_i(z)\} \qquad i=1,2\ldots \tag{7}$$

die Folge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten, und:

$$\{G_j\} \qquad j=1,2\ldots \tag{8}$$

eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten, welche folgende Eigenschaften besitzt: 1) es ist $G_j U=0$; 2) ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches der Bedingung $GU=0$ genügt, so enthält (8) eine gegen G konvergente Teilfolge. Eine solche Folge lässt sich in mannigfacher Weise konstruieren, z. B. kann man als (8) die Folge aller einfach zusammenhängenden Polygongebiete nehmen, welche zu U fremd sind und deren sämmtliche Eckpunkte rational sind.

Sei $\mathfrak{H}_{i,j,m,r}$, $i,j,m=1,2\ldots$; $r=0,1,2\ldots$ die Menge aller $f\in\mathfrak{A}(U)$ welche der Ungleichung genügen:

$$\sigma_{G_j}(q_i, p_r^{(f)})<\frac{1}{m}. \tag{9}$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{H}_{i,j,m}=\sum_{r=0}^{\infty}\mathfrak{H}_{i,j,m,r} \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}_{i,j}=\prod_{m=1}^{\infty}\mathfrak{H}_{i,j,m} \tag{11}$$

$$\mathfrak{H}^*=\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\mathfrak{H}_{i,j}. \tag{12}$$

Für ein festes r ist $p_r^{(f)}$ eine in Bezug auf f stetige Funktionaloperation in jedem Funktionalraum $\mathfrak{A}(G)$.[4]) Mit anderen Worten, zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G und jedem $\eta>0$ kann man ein $\mu>0$ so bestimmen, dass aus:

$$\sigma_U(f_1, f_2)<\mu, \qquad f_1, f_2\in\mathfrak{A}(U) \tag{13}$$

die Ungleichung:

$$\sigma_G(p_r^{(f_1)}, p_r^{(f_2)})<\eta \tag{14}$$

folgt. Also ist $\mathfrak{H}_{i,j,m,r}$ offen in $\mathfrak{A}(U)$; *daher ist* $\mathfrak{H}^*$ *ein* G_δ *in* $\mathfrak{A}(U)$. Sei $\eta>0$ und $h\in\mathfrak{A}(U)$. Nach dem Satz von Runge in der Formulierung von **3** kann man ein Polynom $v(z)$ bestimmen derart dass:

$$\sigma_U(v, h)<\eta, \tag{15}$$

$$\sigma_{G_j}(v, q_i)<\frac{1}{m}. \tag{16}$$

Sei s der Grad des Polynoms v. Dann ist $p_s^{(v)}=v$, also:

$$\sigma_{G_j}(p_s^{(v)}, q_j)<\frac{1}{m} \tag{17}$$

also $v\in\mathfrak{H}_{i,j,m,s}\subset\mathfrak{H}_{i,j,m}$. Daher ist $\mathfrak{H}_{i,j,m}$ dicht in $\mathfrak{A}(U)$ und *somit* $\mathfrak{H}^*$ *eine Residualmenge in* $\mathfrak{A}(U)$.

8. Sei $f\in\mathfrak{H}^*$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}^*$ die Menge der Polynome (7). Sind i,j fest, so existiert wegen $f\in\mathfrak{H}_{i,j,m}$, $m=1,2\ldots$ zu jedem m ein r_m derart dass:

$$\sigma_{G_j}(q_i, p_{r_m}^{(f)})<\frac{1}{m} \tag{18}$$

---

[4]) M. S. 291-292.

also ist im Raume $\mathfrak{A}(G_j)$ das Polynom q_i ein Haüfungspunkt der Menge $\mathfrak{P}(f)$. Also ist $\mathfrak{P}(f)$ dicht in $\mathfrak{P}(f)+\mathfrak{P}^*$. Da aber $\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{A}(G_j)$ dicht ist *so ist* $\mathfrak{P}(f)$ *in* $\mathfrak{A}(G_j)$ *dicht*.

Ist nun G ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, welches der Bedingung $GU=0$ genügt, und $g \epsilon \mathfrak{A}(G)$, so kann man zunächst eine Teilfolge $\{G_{j_k}\}$ von (8) so bestimmen dass $G_{j_k} \to G$. Dann ist $g \epsilon \mathfrak{A}(G_{j_k})$, also enthält die Folge $\{p_r^{(f)}\}$ eine Teilfolge $\{p^{(f)}_{r_n^{(k)}}\}$ für die:

(19) $$\sigma_{G_{j_k}}(g, p^{(f)}_{r_n^{(k)}}) \to 0.$$

Wegen (19) und **4** enthält $\{p_r^{(f)}\}$ eine Teilfolge $\{p^{(f)}_{r_n}\}$ für die:

(20) $$\sigma_G(g, p^{(f)}_{r_n}) \to 0.$$

Also ist $\mathfrak{P}(f)$ in $\mathfrak{A}(G)$ dicht, $f \epsilon \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^* \subset \mathfrak{H}$ und Satz I bewiesen.

9. Mit denselben Hilfsmitteln lässt sich auch der folgende, etwas weitergehende Satz beweisen.

Satz $I^{(a)}$. *Sei* $\mathfrak{H}^{(0)}$ *die Menge aller* $f \epsilon \mathfrak{A}(U)$ *mit der folgenden Eigenschaft: zu jeder Folge* $\{G_i\}$ *von einfach zusammenhängenden, untereinander und zu U punktfremden Gebieten, und zu jeder Folge* $\{g_i(Z)\}$, *wo* $g_i \epsilon \mathfrak{A}(G_i)$, *enthält die Folge* $\{p_r^{(f)}\}$ *eine Teilfolge* $\{p^{(f)}_{r_n}\}$ *die den Bedingungen genügt*:

(21) $$\sigma_{G_i}(p^{(f)}_{r_n}, g_i) \to 0$$

für jedes i. Dann ist $\mathfrak{H}^{(0)}$ *eine Residualmenge in* $\mathfrak{A}(U)$.

10. Wir werden noch einen Satz angeben, welcher eine von Bourion [5]) entdeckte Erscheinung betrifft.

Satz II. *Sei* $\mathfrak{B}$ *die Menge aller* $f \epsilon \mathfrak{A}(U)$ *mit der folgenden Eigenschaft: zu jeder auf der Kreislinie* $|z|=1$ *definierten und daselbst stetigen Funktion* $\varphi(z)$ *enthält die Folge* $\{p_r^{(f)}\}$ *eine Teilfolge, welche auf der Kreislinie* $z=e^{i\vartheta}$ *gegen* $\varphi(z)$ *konvergiert und zwar gleichmässig auf jedem Kreisbogen welcher den Punkt* $z=1$ *nicht enthält. Dann ist* $\mathfrak{B}$ *eine Residualmenge in* $\mathfrak{A}(U)$.

---

[5]) Bull. Sc. Math. LX (1936), S. 247-250.

Wir bezeichnen mit V_j das Gebiet: $1-\frac{1}{2j}<|z|<1+\frac{1}{2j}$; $-\frac{\pi}{2j}<\arg z<2\pi-\frac{\pi}{j}$, wo $j=1,2\ldots$ Sei $\mathfrak{B}_{i,j,r}$ die Menge aller $f\in\mathfrak{A}(U)$ für die:

$$\sigma_{V_j}(q_i, p_r^{(f)})<\frac{1}{j}. \tag{22}$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{B}^*=\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\mathfrak{B}_{i,j,r}. \tag{23}$$

Man kann, durch Überlegungen, welche denjenigen von **7** und **8** analog sind dass 1) $\mathfrak{B}^*$ eine Residualmenge in $\mathfrak{A}(U)$ ist, 2) dass $\mathfrak{B}^*\subset\mathfrak{B}$; beim Beweis von 2) stützt man sich auf den Satz von Hartogs[6]) dass auf einem einfachen Kurvenbogen jede stetige Funktion durch Polynome gleichmässig approximiert werden kann.

K. Borsuk.

O pewnych stałych związanych z klasami przekształceń sfery n-wymiarowej na siebie.

Komunikat przedstawiony dnia 25 stycznia 1938 r.

STRESZCZENIE.

Niech S_n będzie sferą euklidesową n-wymiarową o promieniu 1 i niech $\delta_{n,m}$ oznacza kres dolny liczb d takich, że istnieją przekształcenia ciągłe sfery S_n w siebie, których rząd (w sensie L. E. J. Brouwera) jest równy m, zaś średnice warstw (t. j. przeciwobrazów punktów) są $\leqslant d$. Wiadomo, że dla m parzystych jest $\delta_{n,m}=2$. Autor dowodzi, że dla m nieparzystych różnych od ± 1 zachodzi nierówność $\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}\leqslant\delta_{n,m}\leqslant 2\cos\frac{\pi}{2m}$.

---

[6]) Math. Ann. 98, S. 164-179.

K. Borsuk.

Sur certaines constantes liées avec les classes des transformations des surfaces sphériques en soi.

Note présentée dans la séance du 25 janvier 1938.

Soit S_n la surface sphérique n-dimensionnelle de centre 0 et de rayon 1, située dans l'espace euclidien R_{n+1} de dimension $n+1$. On sait[1]) que le degré d'une fonction continue φ transformant S_n en soi de manière que les images des points antipodiques (c. à d. des points de S_n dont la distance est égale à 2) sont antipodiques, est impair. Ce théorème se laisse aussi formuler comme il suit:

(1) *φ étant une transformation continue de S_n en soi telle que $\varphi(p) \neq (\varphi^*)$ pour tout couple p, p^* des points antipodiques de S_n, le degré de φ est impair.*

En effet, il suffit de poser

$$\varphi'(p) = \frac{\varphi(p) - \varphi(p^*)}{|\varphi(p) - \varphi(p^*)|}$$

pour tout $p \in S_n$, afin d'obtenir une transformation continue φ' de S_n en soi qui fait toujours correspondre aux points antipodiques des points antipodiques. Par conséquent le degré de φ' est impair. Or, pour tout $p \in S_n$, le produit scalaire $(\varphi(p)\,\varphi'(p))$ des vecteurs $\overrightarrow{0\varphi(p)}$ et $\overrightarrow{0\varphi'(p)}$ (c. à d. le cosinus de l'angle α entre ces vecteurs) est égal à

$$\frac{1}{|\varphi(p)-\varphi(p^*)|}\cdot[(\varphi(p)\,\varphi(p))-(\varphi(p)\,\varphi(p^*))] =$$
$$= \frac{1}{|\varphi(p)-\varphi(p^*)|}\cdot[1-(\varphi(p)\,\varphi(p^*))] > 0.$$

Par conséquent l'angle α est aigu, donc $|\varphi(p)-\varphi'(p)| < \sqrt{2} < 2$. Il en résulte [2]) que le degré de φ coïncide avec le degré de φ'; il est donc impair.

---

[1]) Voir mon travail: *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. 20 (1933), p. 177-190. Voir aussi le livre de MM. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Berlin 1935, p. 483.

[2]) Voir p. ex l. c. p. 179.

Désignons maintenant par $\delta_{n,m}$ la borne inférieure des nombres d tels que S_n admet une transformation continue φ de degré m dont toutes les *tranches* (c. à d. les ensembles de la forme $\underset{x}{E}[\varphi(x)=p]$) sont de diamètre $\leqslant d$. L'existence, pour toute transformation continue de S_n en soi de degré pair, des points antipodiques p, p^* satisfaisant à la condition $\varphi(p)=\varphi(p^*)$ entraîne:

(2) $\qquad \delta_{n,m}=2 \quad$ *pour tout* $n=0,1,2,\ldots$ *et tout* m *pair.*

Le problème de calculer $\delta_{n,m}$ pour les nombres m impairs reste ouvert dans le cas général. Nous ne savons le resoudre que dans le cas spécial $n=1$ (voir la formule (6)). Dans le cas général, nous allons donner seulement quelques inégalités (voir les formules (7) et (9)) qui conduisent à une évaluation assez exacte de $\delta_{n,m}$.

La transformation par l'identité étant de degré 1 et chacune de ses tranches ne contenant qu'un seul point, on a

(3) $\qquad \delta_{n,1}=0 \quad$ *pour tout* $n=0,1,\ldots$

En désignant par χ la transformation homéomorphe de S_n en soi de degré -1, on voit que, pour toute transformation continue φ de S_n en soi, les transformations $\varphi\chi$ et φ ont des degrés opposés et les mêmes tranches. Il en résulte que

(4) $\qquad \delta_{n,m}=\delta_{n,-m} \quad$ *pour tout* $n,m=0,1,2,\ldots$

Puis, on a l'inégalité

(5) $\qquad \delta_{n,m}\geqslant\delta_{n+1,m} \quad$ *pour tout* $n,m=0,1,2,\ldots$

Afin de démontrer cette inégalité, il suffit de prouver qu'il existe pour toute transformation continue φ de S_n en soi de degré m une transformation continue ψ de S_{n+1} en soi du même degré, pour laquelle la borne supérieure d_ψ des diamètres des tranches ne surpasse pas la borne supérieure d_φ des diamètres des tranches de la transformation φ. On parvient à une telle transformation ψ de la manière suivante:

Chaque point $p=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},x_{n+2})\in S_{n+1}$ est déterminé d'une manière univoque par ses „coordonnées géographiques", c. à d. par sa „latitude" $\lambda(p)=\arc\sin x_{n+2}$ et sa „longitude"

$\theta(p)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_{n+2}^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-x_{n+2}^2}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1-x_{n+2}^2}}\right)\epsilon S_n$, cette dernière n'étant définie que pour les points différents de deux „pôles" $p_+=(0,0,\ldots 0,1)$ et $p_-=(0,0,\ldots 0,-1)$ de S_{n+1}. En désignant par $[\lambda;\theta]$ le point de S_{n+1} de latitude λ et de longitude θ, posons:

$$\psi(p)=[\lambda(p);\ \varphi\theta(p)] \quad \textit{pour tout} \quad p\,\epsilon\, S_{n+1}-(p_+)-(p_-),$$
$$\psi(p_+)=p_+ \quad \text{et} \quad \psi(p_-)=p_-.$$

On voit sans peine que la fonction ψ ainsi définie transforme S_{n+1} en soi d'une manière continue et que son degré coïncide avec le degré de φ, c. à d. est égal à m. Si, en outre, $p=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+2})$ et $p'=(x_1',x_2',\ldots,x_{n+2}')$ sont deux points différents de S_{n+1}, l'égalité $\psi(p)=\psi(p')$ entraîne que $p,p'\,\epsilon\, S_{n+1}-(p_+)-(p_-)$ et qu'on a $\lambda(p)=\lambda(p')$, c. à d. $x_{n+2}=x_{n+2}'$ et $\varphi\theta(p)=\varphi\theta(p')$. Or, la distance de $\theta(p)$ et $\theta(p')$ ne surpasse pas d_φ, c. à d.

$$|\theta(p)-\theta(p')|=\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{x_i}{\sqrt{1-x_{n+2}^2}}-\frac{x_i'}{\sqrt{1-x_{n+2}'^2}}\right)^2\leqslant d_\varphi,$$

d'où

$$|p-p'|=\sum_{i=1}^{n+2}(x_i-x_i')^2=\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-x_i')^2=(1-x_{n+2}^2)\,|\theta(p)-\theta(p')|\leqslant$$
$$\leqslant(1-x_{n+2}^2)\,d_\varphi\leqslant d_\varphi.$$

La démonstration de l'inégalité (5) est ainsi terminée.
Nous allons démontrer à présent la formule suivante:

(6) $$\delta_{1,m}=2\cos\frac{\pi}{2m} \quad \textit{pour tout } m \textit{ impair.}$$

Le diamètre d'un polygone régulier de $|m|$ côtés (m impair) inscrit dans S_1 étant égal à $2\cos\frac{\pi}{2m}$, l'égalité (6) se laisse formuler aussi comme il suit:

(6') *Pour tout m impair, le nombre $\delta_{1,m}$ coïncide avec le diamètre d'un polygone régulier à $|m|$ côtés inscrit dans S_1.*

La circonférence S_1 peut être considérée comme l'ensemble de tous les nombres complexes z satisfaisant à la condition $|z|=1$.

Or, on obtient une transformation φ de S_1 en soi de degré m lorsque'on pose $\varphi(z) = z^m$. Cette transformation a pour tranches les systèmes des racines des équations de la forme $z^m = z_0 \in S_1$, c. à d. les systèmes des sommets de polygones réguliers à $|m|$ côtés. Par conséquent le nombre $\delta_{1,m}$ ne surpasse pas le diamètre d'un tel polygone. D'autre part, si φ est une transformation continue de S_1 en soi de degré impair m, alors l'acroissement de l'argument du nombre complexe $\varphi(z)$ pendant un parcours de S_1 par z dans le sens positif est égal à $2\pi m$. Ceci entraîne qu'il existe un intervalle de la forme $\frac{l}{|m|} \leqslant \theta \leqslant \frac{l+1}{|m|}$ sur lequel la fonction $g(\theta) = \varphi(e^{2\pi i\theta})$ prend comme valeur chaque point de S_1. Par conséquent, il existe un θ_0 tel que $\frac{l}{|m|} \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{l+1}{|m|}$ et que $\varphi(e^{2\pi i\theta_0}) = \varphi(e^{2\pi i\frac{2l+1+|m|}{2|m|}})$. Le point $e^{2\pi i\frac{2l+1+|m|}{2|m|}}$ étant antipodique au point $e^{2\pi i\cdot\frac{2l+1}{2|m|}}$, la distance entre $e^{2\pi i\theta_0}$ et $e^{2\pi i\frac{2l+1+|m|}{2|m|}}$ n'est pas inférieure à la distance entre $e^{2\pi i\frac{2l+1+|m|}{2|m|}}$ et $e^{2\pi i\frac{l}{|m|}}$, c. à d. elle est $\geqslant \left|e^{2\pi i\frac{1+|m|}{2|m|}} - 1\right| = 2\cos\frac{\pi}{2m}$.

Les relations (5) et (6) entraînent

(7) $\delta_{n,m} \leqslant 2\cos\frac{\pi}{2m}$ *pour tout m impair et n naturel.*

Nous allons montrer enfin que

(8) *Pour toute transformation continue de S_n en soi de degré $\neq \pm 1$ il existe des tranches dont le diamètre n'est pas inférieur à la longueur de l'arête a_{n+1} d'un simplexe régulier de dimension $n+1$ inscrit dans S_n* [3]).

La longueur de a_{n+1} étant égale à $\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$, le théorème (8) conduit à l'inégalité suivante

(9) $\delta_{n,m} \geqslant \sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$ *pour tout* $m \neq \pm 1$ *et n naturel.*

---

[3]) Comp. la Note de M. S. Eilenberg „*Sur les transformations à petites tranches*", Fund. Math., 30 (1938), p. 92-95. Il résulte d'un théorème général de cette Note qu'il existe une constante positive ε telle que, pour toute transformation continue de S_n en soi de degré $\neq \pm 1$, il existe des tranches de diamètre $\geqslant \varepsilon$.

Afin de prouver (8) et (9), admettons que φ est une transformation continue de S_n en soi dont toutes les tranches sont de diamètre $<\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$. Il est à démontrer que le degré de φ est égal à ± 1.

Le nombre $\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$ étant <2, on conclut de (2) que le degré de φ est impair. Il vient

$$\varphi(S_n) = S_n. \tag{10}$$

Le diamètre des tranches de φ étant $<\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$ et S_n étant compact, il existe[4]) un $\varepsilon>0$ tel que

$$|\varphi(p)-\varphi(p')| \leqslant \varepsilon \quad \textit{entraîne} \quad |p-p'| < \sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}. \tag{11}$$

Envisageons une décomposition simpliciale Σ de S_n en simplexes sphériques non dégénérés[5]) de diamètre $\leqslant \varepsilon$. En tenant compte de la formule (10), on peut faire correspondre à tout sommet a de Σ un point $\psi(a)$ arbitrairement choisi dans l'ensemble $\underset{p}{E}[\varphi(p)=a]$. Les simplexes de Σ ayant le diamètre $\leqslant\varepsilon$, il découle de (11) que la distance des points $\psi(a)$ et $\psi(a')$, correspondant aux sommets a et a'

---

[4]) Voir p. ex. la Note de M. S. Ulam et de moi *„Über gewisse Invarianten der ε-Abbildungen"*, Math. Ann. 108 (1933), p. 313.

[5]) Par *simplexe sphérique* $\sigma=\sigma(a_0, a_1, \dots, a_k)$ *aux sommets* $a_0, a_1, \dots, a_k$, j'entends la projection centrale (du centre 0) sur S_n d'un simplexe géométrique ordinaire $\Delta=\Delta(a_0, a_1, \dots, a_k) \subset R_{n+1}$ dont tous les sommets $a_0, a_1, \dots, a_k$ appartiennent à S_n et $0 \in R_{n+1}-\Delta$ (où, ce qui revient au même, $a_0, a_1, \dots, a_k$ appartiennent à une calotte de S_n de diamètre <2). Les projections $\sigma(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_l})$ des faces $\Delta(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_l})$ de Δ sont dites *faces du simplexe sphérique* σ. Il est clair que la dimension de $\sigma(a_0, a_1, \dots, a_k)$ ne surpasse pas k; lorsque elle est $<k$, le simplexe sphérique σ est dit *dégénéré*.

Le système $\Sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$ des simplexes sphériques n dimensionnels (non dégénérés) tel que $S_n=\sigma_1+\sigma_2+\dots\sigma_l$ et que la partie commune de deux simplexes σ_i et σ_j coïncide toujours avec le simplexe sphérique ayant comme sommets tous les sommets communs de σ_i et σ_j, est dit *décomposition simpliciale de S_n en simplexes sphériques*. Par les sommets de Σ, on entend les sommets des simplexes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$.

d'un des simplexes de Σ, est $<\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$. Il en résulte [6]) qu'il existe, pour tout simplexe sphérique $\sigma=\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de Σ, une calotte de S_n de diamètre <2 contenant tous les points $\psi(a_0), \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$. Cela veut dire que ψ fait correspondre aux sommets de $\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ les sommets d'un certain simplexe sphérique (dégénéré ou non) $\sigma(\psi(a_0), \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n))$. Ceci nous permet de prolonger simplicialement [7]) ψ sur chacun des simplexes de la décomposition Σ. On parvient ainsi à une transformation continue ψ de S_n en soi.

Ceci établi, nous allons prouver que

$$|\psi\varphi(p)-p|<2 \qquad \textit{pour tout} \quad p \in S_n. \tag{12}$$

Soit, en effet, $\sigma=\sigma(a_0, a_1 \ldots, a_n)$ l'un des simplexes sphériques de la décomposition Σ contenant $\varphi(p)$. Le diamètre de σ étant $\leqslant \varepsilon$ et $\psi(a_i)$ appartenant à l'ensemble $\underset{p}{\mathrm{E}}[\varphi(p)=a_i]$, on conclut de (11) que les distances mutuelles entre les points $p, \psi(a_0), \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$ sont $<\sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}}$ et par conséquent qu'il existe une calotte de diamètre <2 contenant tous ces points. Il en résulte que le point $\psi\varphi(p)$, comme appartenant au simplexe sphérique $\sigma(\psi(a_0), \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n))$, est aussi situé dans cette calotte. L'inégalité (12) est ainsi démontrée. Il en résulte [2]) que le degré de la transformation $\psi\varphi$ est égal au degré de la transformation par identité, c. à d. à 1. Par conséquent le degré de φ est, comme un diviseur de 1, égal à ± 1, c. q. f. d.

---

[6]) Voir C. Kuratowski, *Sur les transformations des sphères en des surfaces sphériques*, Fund. Math. 20 (1933), p. 206-7.

[7]) Soit $\sigma=\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ un simplexe sphérique (dégénéré ou non). Faisons correspondre à tout système $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ des nombres non négatifs dont la somme est égale à 1, la projection centrale $p_\sigma(b_0, b_1 \ldots, b_k) \in \sigma$ du centre barycentrique des masses $b_0, b_1, \ldots, b_k$ situées respectivement dans les sommets $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Il est clair que cette correspondance est continue et, dans le cas d'un simplexe non dégénéré, elle est biunivoque. Il en résulte qu'une transformation ψ définie dans les sommets d'un simplexe sphérique non dégénéré $\sigma=\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ et les transformant en sommets d'un autre simplexe sphérique (dégénéré ou non) $\sigma(\psi(a_0), \psi(a_1), \ldots, \psi(a_k))$ admet un prolongement simplicial sur σ, c. à d. un prolongement continu qu'on obtient en faisant correspondre à tout $p=p_\sigma(b_0, b_1, \ldots, b_k) \in \sigma$ le point $\psi(p)=p_{\sigma'}(b_0, b_1, \ldots, b_k) \in \sigma'$. On voit sans peine que les valeurs que ψ prend dans une face arbitraire de σ ne dépendent que de valeurs aux sommets de cette face.

Andrzej Mostowski.

O pojęciu zbioru skończonego.

Komunikat przedstawiony przez K. Kuratowskiego dnia 25 stycznia 1938 r.

STRESZCZENIE.

Autor wprowadza (w odniesieniu do pewnych sformalizowanych systemów logiki) pojęcie możliwej definicji zbioru skończonego wzgl. możliwego pewnika nieskończoności i dyskutuje warunki, jakie spełniać musi system logiki, aby istniała dla niego najmocniejsza definicja zbioru skończonego, wzgl. najsłabszy pewnik nieskończoności. Komunikat zawiera nadto dyskusję stosunków wynikania między kilkoma konkretnymi definicjami zbioru skończonego.

Andrzej Mostowski.

Über den Begriff einer endlichen Menge.

Vorläufige Mitteilung, vorgelegt von K. Kuratowski am 25 Januar 1938.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Zusammenfassung einiger metamathematischer Ergebnisse, die mit dem Endlichkeitsbegriff zusammenhängen. Die genaue Durchführung der Beweise wird an einer anderen Stelle veröffentlicht werden, hier sollen nur kurz die Probleme und deren Lösungen angegeben werden.

Als formales System, auf das sich die folgenden metamathematischen Behauptungen beziehen, wählen wir der Bestimmtheit halber das System S der Logik, das von Tarski formuliert wurde[1]; unsere Beweise lassen sich aber auf einige andere Systeme übertragen, wie es an den entsprechenden Stellen weiter unten bemerkt werden wird.

Wir schreiben kurz $\alpha \supset_M \beta$ (wobei α, β zwei Ausdrücke des Systems S sind und M eine Menge von solchen Ausdrücken bezeichnet), um auszudrücken, daß die Implikation:

$$\textit{aus } \alpha \textit{ folgt } \beta$$

[1]) Alfred Tarski. *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und ω-Vollständigkeit.* Monatshefte für Math. und Physik, 40. Band, S. 97—112 (1933).

aus den Grundsätzen des Systems S und den Sätzen der Menge M vermöge der in S angenommenen Schlußregeln ableitbar ist.

Gilt $\alpha \supset_M \beta$ und $\beta \supset_M \alpha$, so schreiben wir kurz $\alpha =_M \beta$.

Im System S lassen sich bekanntlich folgende Eigenschaften einer Menge X ausdrücken [2])

$\alpha^0(X)$: *X enthält gar kein Element*;

$\alpha^1(X)$: *X enthält genau ein Element*;

$\alpha^2(X)$: *X enthält genau zwei Elemente*;

. . . .

$\alpha^n(X)$: *X enthält genau n Elemente*;

. . . .

Im Zusammenhang damit lassen sich in S auch Sätze ausdrücken, die die Existenz von mindestens n verschiedenen Individuen behaupten ($n=1,2,3,\ldots$). Es sind dies Sätze von der Form

α^n : *es gibt ein X derart, daß $\alpha^n(X)$* $\qquad (n=1,2,3,\ldots)$.

Die Gesamtheit aller Sätze α^n ($n=1,2,3,\ldots$) bezeichnen wir mit M_ω.

Nun wird eine Aussagefunktion $\delta(X)$ von S mit einer freien Variablen „X" eine mögliche Endlichkeitsdefinition in Bezug auf eine Satzmenge M genannt, wenn für jede natürliche Zahl n die Formel $\alpha^n(X) \supset_M \delta(X)$ gilt. Anders ausgedrückt, gehört eine Aussage $\delta(X)$ der Klasse $\mathfrak{D}(M)$ aller möglichen Endlichkeitsdefinitionen in Bezug auf M dann an, wenn wir, von den Axiomen der Logik und Sätzen der Menge M ausgehend, zeigen können, daß alle Mengen von der Mächtigkeit n ($n=0,1,2,\ldots$) die durch $\delta(X)$ ausgedrückte Eigenschaft besitzen [3]).

---

[2]) Tarski, l. c. Definition 11. Es ist zu bemerken, daß wir hier, um die unnötigen Komplikationen zu vermeiden, das Zeichen „X" gleichzeitig als Bezeichnung einer Menge und einer Variablen des Systems S verwenden.

[3]) Der Name „mögliche Endlichkeitsdefinition" ist ziemlich schlecht gewählt, da die Klasse $\mathfrak{D}(M)$ außer den Aussagefunktionen, die, vom intuitiven Standpunkt aus betrachtet, wirklich eine Endlichkeitsbedingung ausdrücken, auch z. B. Aussagefunktionen $\delta(X)$ enthält, die besagen, daß die mit dem Symbol X bezeichnete Menge eine sehr große Mächtigkeit hat; freilich passt der Name „mögliche Endlichkeitsdefinition" zu solchen Aussagefunktionen nicht mehr, wir fanden aber keinen besseren Termin.

Eine Aussagefunktion $\alpha \epsilon \mathfrak{D}(M)$ wird **stärkste Endlichkeitsdefinition in Bezug auf** M genannt, wenn $\alpha \supset_M \beta$ für alle $\beta \epsilon \mathfrak{D}(M)$.

Fügen wir alle Sätze der Menge M zu den Grundsätzen des Systems S hinzu, so kann jede stärkste Endlichkeitsdefinition in Bezug auf M als beste Charakterisierung des Begriffes einer endlichen Menge angesehen werden, die im so gewonnenen System $S(M)$ ausgedrückt werden kann.

Es entsteht nun die Frage, für was für Mengen M es solche stärkste Endlichkeitsdefinitionen in Bezug auf M gibt. Diese Frage wird im folgenden Satz I teilweise gelöst:

I. *Ist M eine rekursive*[4]) *Menge von Sätzen und ist $M + M_\omega$ widerspruchsfrei, so gibt es keine stärkste Endlichkeitsdefinition in Bezug auf M.*

Diesem Satze zufolge, ist es unmöglich, in einem gewöhnlichen System der Logik, das mit dem *a*-Begriff der Folgerung [5]) ausgestattet ist (und insbesondere im System S selbst), den Begriff einer endlichen Menge formal so einzuführen, daß sich diese Definition mit der „unendlichen logischen Summe" aller Aussagen $\alpha^n(X)$ deckt, vorausgesetzt, daß sich in diesem System die nicht-Existenz von mehr als einer festen Zahl n von Individuen nicht beweisen läßt [6]). Wohl aber gibt es stärkste Endlichkeitsdefinitionen in Systemen, die mit einem *f*-Begriff der Folgerung [5]) versehen sind, wie aus folgendem Satz einleuchtet:

---

[4]) Vgl. K. Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* I. Monatshefte für Math. und. Phys., 38 Band, S. 173-198 (1931).

[5]) Frei gesprochen könnte man sagen, daß ein System der Logik mit einem *a*-Begriff der Folgerung ausgestattet ist, wenn man erstens von jedem Satz dieses Systems in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob er zu Axiomen des Systems gehört oder nicht und wenn man zweitens durch eine endliche Anzahl der Versuche immer erkennen kann, ob die einmalige Anwendung der Schlußregeln des Systems von den gegebenen Sätzen $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ zu einem gegebenen Satz ν führt oder nicht. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so sagt man, das betrachtete System habe einen *f*-Begriff der Folgerung. Systeme mit einem *a*-Begriff der Folgerung reichen zum formalen Aufbau der Mathematik vollkommen hin, theoretisch wichtiger sind aber Systeme mit einem *f*-Begriff der Folgerung. Man vergleiche dazu R. Carnap. *Logische Syntax der Sprache* (Wien, 1934), S. 123-128.

[6]) Dies ist die Lösung eines Problems, das mir von Tarski gestellt wurde.

II. *Bezeichnet M die Klasse aller wahren, bzw. aller in jedem Individuenbereich wahren Sätze*[7], *so ist die gewöhnliche Russell'sche Induktivitätsdefinition*[8] *die stärkste Endlichkeitsdefinition in Bezug auf M.*

Offen bleibt die eher philosophische als mathematische Frage, ob es aus Satz II folgt, daß der Russell'sche Endlichkeitsbegriff, der sich unter allen bisher vorgeschlagenen Endlichkeitsbegriffen zur praktischen Durchführung der Theorie der endlichen Mengen am besten bewährt hat[9], allen möglichen Endlichkeitsdefinitionen wirklich überlegen ist. Zur Beantwortung dieser Frage ist eine genaue Analyse der Voraussetzungen nötig, die dem Satz II zugrunde liegen. Es zeigt sich, daß Satz II seine Gültigkeit vor allem dem Umstand verdankt, daß das Metasystem (in dem Satz II bewiesen wurde) gewisse infinitistische Begriffe umfaßt. Wenn man aber das Metasystem verarmt hätte, indem man es einer analogen Umformung unterworfen hätte, die von der Sprache I von Carnap zur Sprache I_k führt[10], so würde sich in diesem vollkommen finitistischen Metasystem unser Satz II nicht mehr beweisen lassen.

Die Ergebnisse Rosser's[11] gestatten es, eine genauere Analyse der Struktur der Klasse $\mathfrak{D}(M)$ für den Fall einer rekursiven Satzmenge M anzugeben. Führen wir die Abkürzung $\alpha \supset_M^* \beta$ für den Ausdruck:

$$\alpha \in \mathfrak{D}(M) \text{ und } \beta \in \mathfrak{D}(M) \text{ und } \alpha \supset_M \beta \text{ und } \beta\, non \supset_M \alpha$$

ein, so gilt

---

[7] Diese beiden Mengen definiert Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. Studia Philosophica, 1. Band, S. 261-405 (1936).

[8] Eine Menge heißt induktiv, wenn sie zu jeder Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, die die leere Menge enthält und der Bedingung genügt: gehört X der Klasse $\mathfrak{K}$ an und entsteht Y aus X durch Hinzufügung eines einzigen Elements, so gehört auch Y der Klasse $\mathfrak{K}$ an. Vgl. B. Russell und A. N. Whitehead. *Principia Mathematica*. II. Band (zweite Auflage, Cambridge, 1927), *120.01 und *120.02. Die Definition von Russell und Whitehead läßt sich bekanntlich auch im System S ausdrücken; vgl. dazu Tarski, l. c.[1]), Definition 11[e]).

[9] Vgl. A. Tarski. *Sur les ensembles finis*. Fundamenta Mathematicae, 6. Band, S. 45-95 (1925).

[10] Vgl. Carnap, l. c.[5]), S. 147.

[11] Berkeley Rosser. *Extensions of some theorems of Gödel and Church*. The Journal of Symbolic Logic, 1. Band, S. 87-91 (1936).

III. *Ist M eine rekursive Satzmenge, so daß $M+M_\omega$ widerspruchsfrei ist, so sind folgende Aussagen richtig*:

a) *für jedes $\alpha \epsilon \mathfrak{D}(M)$ gibt es β, so daß $\beta \supset^*_M \alpha$;*

b) *für jedes $\alpha \epsilon \mathfrak{D}(M)$, das nicht aus M ableitbar ist, gibt es β, so daß $\alpha \supset^*_M \beta$;*

c) *wenn $\alpha \supset^*_M \beta$, so gibt es γ, so daß $\alpha \supset^*_M \gamma$ und $\gamma \supset^*_M \beta$.*

Dieser Satz ist einer übersichtlichen geometrischen Deutung fähig. Betrachten wir einerseits die Klasse $\mathfrak{D}(M)$, wobei wir aber zwei ihrer Elemente α, β als identisch ansehen, wenn $\alpha =_M \beta$ gilt und anderseits die Klasse K derjenigen Mengen, die in der bekannten diskontinuierlichen Menge C [12]) zugleich offen und abgeschlossen sind und den Anfangspunkt von C nicht enthalten; dann gilt

IV. *Ist M eine rekursive Satzmenge, so daß $M+M_\omega$ widerspruchsfrei ist, so ist die Relation $\supset^*_M$ in der Klasse $\mathfrak{D}(M)$ zur Relation der echten Inklusion in der Klasse K isomorph* [13]).

Die oben angegebenen Sätze I—IV lassen sich ohne Schwierigkeit (und manchmal auch mit beträchtlichen Vereinfachungen) auf andere Systeme der Logik bzw. Mengenlehre erweitern; sie können z. B. auf das System P von Gödel [4]) oder auf die axiomatische Mengenlehre von Zermelo [14]) bezogen werden.

---

[12]) Vgl. z. B. K. Kuratowski, *Topologie I,* (Warszawa, 1933), S. 79.

[13]) Satz IV hängt eng damit zusammen, daß die Relation der Inklusion in einem beliebigen abzählbaren Boole'schen Körper (und insbesondere die Folgebeziehung in logischen Systemen) zur Relation der Inklusion in einem Bereich der Mengen, die in C zugleich offen und abgeschlossen sind, isomorph ist. Vgl. M. H. Stone. *Application of the theory of Boole'an rings to general topology*. Trans. of the Amer. Math. Soc. 41. Band, S. 375-481 (1937) und A. Mostowski. *Abzählbare Boole'sche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik*. Fund. Math. 29. Band., S. 34-56 (1937).

[14]) Die originelle Axiomatik von Zermelo ist von ihm in seiner bekannten Abhandlung in Math. Annalen, Bd. 65 (1908) veröffentlicht worden. Seit dieser Zeit sind verschiedene Modifikationen dieser Axiomatik vorgeschlagen worden; man vergleiche dazu die bibliographischen Angaben in Fraenkel's *Einleitung in die Mengenlehre* (dritte Auflage, Berlin 1928) und P. Bernays, *A system of axiomatic set theory — part I.* The Journal of Symbolic Logic, 2. Band, S. 65-77 (1937).

Dem Begriff einer möglichen Endlichkeitsdefinition entspricht ein gewissermaßen dualer Begriff, nämlich der eines möglichen Unendlichkeitsaxioms in Bezug auf eine Satzmenge M. So wird nämlich ein Satz ζ (ohne freie Variablen) dann und nur dann genannt, wenn für jede natürliche Zahl n die Formel $\zeta \supset_M a_n$ gilt. Diese Definition läßt sich wie folgt umformen:

V. *Damit ζ ein mögliches Unendlichkeitsaxiom in Bezug auf eine Satzmenge M sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine mögliche Endlichkeitsdefinition $\delta(X)$ in Bezug auf M gibt, so daß*

$$\zeta \equiv_M (X)\{(x)\,[x \in X] \to \overline{\delta(X)}\}$$ [15]).

Wenn wir die Klasse aller möglichen Unendlichkeitsaxiome in Bezug auf M mit $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnen, gilt:

VI. *Ist M eine rekursive Satzmenge und ist kein Element von $\mathfrak{P}(M)$ eine Folge von $M + M_\omega$, so gibt es für jedes $\alpha \in \mathfrak{P}(M)$ ein $\beta \in \mathfrak{P}(M)$, so daß $\alpha \supset_M \beta$ und β non $\equiv_M \alpha$.*

Dieser Satz drückt die Tatsache aus, daß es grundsätzlich unmöglich ist, in Systemen $S(M)$, die sich aus S durch Hinzufügung einer rekursiven Menge M von neuen Axiomen gewinnen lassen, ein „schwächstes" Unendlichkeitsaxiom auszusondern[16]), es sei denn, es gibt ein Unendlichkeitsaxiom, das in $S(M)$ beweisbar ist (in welchem Falle dieses Axiom natürlich ein schwächstes Unendlichkeitsaxiom ist).

Im allgemeinen, hört Satz VI auf, für nicht rekursive Mengen wahr zu sein, was man am Beispiel der Menge aller Sätze, die in jedem Individuenbereich wahr sind [7]), leicht nachprüfen kann.

Auch die Sätze, die sich auf den Begriff eines möglichen Unendlichkeitsaxioms beziehen, können in anderen logischen Systemen bewiesen werden, allerdings nur unter der Voraussetzung, daß sich in diesen Systemen das Problem der Existenz unendlicher Mengen nach keiner Richtung hin entscheiden läßt [17]).

---

[15]) D. h. es läßt sich beweisen, daß ζ mit dem Satz äquivalent ist, der behauptet, daß die Allklasse die Bedingung $\delta(X)$ nicht erfüllt.

[16]) In der Ausdrucksweise von Tarski, *Grundzüge des Systemenkalküls*, Fundamenta Mathematicae, 25. Band, S. 504-524 (Definition 11) können wir auch sagen: *die Folge von Sätzen a_n ist im System $S(M)$ nicht konvergent.*

[17]) Hierher gehört z. B. die Zermelo'sche Axiomatik ohne Unendlichkeitsaxiom.

Alle bisherigen Ergebnisse wurden mit Hilfe der Gödel'schen Arithmetisierungsmethode [4]) gewonnen. Da im Gödel'schen System P im Gegensatz zum System S das Unendlichkeitsaxiom von vornherein angenommen wird, ist es nötig gewesen, die Gödel'schen Überlegungen ein wenig abzuändern, um sie dem System S anpassen zu können. Als Hauptaufgabe erweist sich dabei, den Satz V von Gödel [4]) auf Systeme ohne Unendlichkeitsaxiom zu übertragen. Es zeigt sich, daß es bei geeigneter Formulierung und Abschwächung der Behauptung dieses Satzes möglich ist, sein Gegenstück im System S zu beweisen.

Wir gehen jetzt zur Besprechung anderer Ergebnisse über, die sich auf einige spezielle Endlichkeitsdefinitionen beziehen. Außer dem oben erwähnten Russell'schen Begriff der Induktivität sind andere Endlichkeitsbegriffe vorgeschlagen worden, von denen die von Dedekind herrührende „Irreflexivität" am besten bekannt ist. Eine ganze Reihe von solchen Definitionen hat Tarski [9]) angegeben und dabei die Frage aufgeworfen, ihre gegenseitige Unabhängigkeit zu untersuchen. Die fünf Tarski'schen Definitionen können wir noch mit einer sechsten vervollständigen: eine Menge X wird nämlich dann als endlich im Sinne der Definition VI bezeichnet, wenn das kombinatorische Produkt $X \times X$ [18]) eine grössere Mächtigkeit hat, als die Menge X selbst.

Alle diese Definitionen lassen sich ohne Schwierigkeit in der Sprache des Systems S ausdrücken; wir gewinnen auf diese Weise sechs Aussagefunktionen (mit einer freien Variablen) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ [19]). Wir bezeichnen den Satz:

es gibt eine Menge, die die Eigenschaft δ_1 nicht hat

mit α^∞ [20]); M_∞ sei schließlich die Menge, welche aus dem Element α^∞ allein besteht. Es läßt sich dann folgender Satz beweisen:

---

[18]) Als kombinatorisches Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X und Y bezeichnet man die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei x zu X und y zu Y gehört. Die Bemerkung, daß Definition VI auch als eine mögliche Endlichkeitsdefinition angenommen werden kann, rührt von Tarski her.

[19]) δ_4 stellt eine Formalisierung der Dedekind'schen und δ_1 der Russell'schen Definition dar. δ_1 ist in der unter [1]) zitierten Arbeit Tarski's explizit angegeben worden (vgl. Def. 11[e]).

[20]) Es ist dies eine übliche auch in *Principia Mathematica* angenommene Formulierung des Unendlichkeitsaxioms.

VII. *Ist die Menge M_∞ widerspruchsfrei, so gilt keine von den Relationen:* $\delta_{i+1} \supset_{M_\infty} \delta_i$ *für* $i=1,2,3,4,5$.

Fügen wir aber das Auswahlaxiom zu den logischen Axiomen hinzu, so sind bekanntlich alle Definitionen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ miteinander äquivalent; insbesondere wurde die Äquivalenz von δ_1 und δ_4 mit Hilfe des Auswahlaxioms für Mengen zweiten Typus in Principia Mathematica [8]) *124.56 bewiesen. Aus VII (und der bekannten Bedingung $\delta_1 \supset_{M_\infty} \delta_3$) folgern wir also

VIII. *Ist die Menge M_∞ widerspruchsfrei, so ist das Auswahlaxiom für Mengen zweiten Typus keine Folgerung der logischen Grundsätze und des Satzes* α^∞.

Beim Beweis von VII erhalten wir noch ein ziemlich interessantes Nebenergebnis:

IX. *Ist die Menge M_∞ widerspruchsfrei, so ist die Aussage, die die Existenz einer unendlichen Menge (ersten Typus) mit unendlichem Komplement behauptet, aus M_∞ nicht ableitbar* [21]).

Die Sätze VII, VIII, IX beweist man mit Hilfe einer Methode, die mit der oft in axiomatischen Untersuchungen verwendeten Interpretationsmethode [22]) eng verwandt ist. Es besteht übrigens ein Zusammenhang zwischen den von uns verwendeten Methoden und den Ideen, die Fraenkel [23]) bei seinem Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den Axiomen der Mengenlehre entwickelt hat.

---

[21]) Das Problem der Unabhängigkeit dieses Satzes ist von Chwistek gestellt worden. Vgl. Leon Chwistek, *Granice Nauki* (polnisch, Warszawa-Lwów 1936), S. 138.

[22]) Vgl. Fraenkel, l. c. [14]), S. 341-343.

[23]) Vgl. A. Fraenkel. *Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.* Sitzungsb. d. Preuß. Akademie der Wiss., Phys. Math Klasse, S. 253-257 (1922) und desselben *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms.* The Journal of Symbolic Logic, 2. Band, S. 1-25 (1937). Der Fraenkel'sche Beweis, der zu verschiedenen Bedenken Anlaß gibt, ist in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von A. Lindenbaum und dem Verfasser bearbeitet worden. Die dort gewonnene verschärfte Fassung des Fraenkel'schen Beweises bringt es auch mit sich, daß die Gegenstücke der Sätze VII, VIII, IX in gewissen Systemen der axiomatischen Mengenlehre bewiesen werden können; nämlich in denjenigen Systemen, welche die Existenz einer unendlichen Menge, deren Elemente keine Mengen sind, nicht ausschließen.

L. Bruwier.

O tożsamości Eulera dla funkcji jednorodnych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dnia 25 stycznia 1938 r.

STRESZCZENIE.

Uogólniając pewne twierdzenie p. S. Gołąba (Spraw. Tow. Nauk. Warsz., 1932, str. 105—110) o funkcjach jednorodnych dwu zmiennych na funkcje jednorodne dowolnej ilości zmiennych, Autor otrzymuje twierdzenie następujące:

Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest jednorodna m-tego rzędu w otoczeniu pewnego punktu $x^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, $x_n^0 \neq 0$, i posiada w tym punkcie różniczkę zupełną względem $n-1$ pierwszych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, wówczas posiada w x^0 pochodne cząstkowe $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n$ względem wszystkich n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ i pochodne *k* spełniają znaną tożsamość Eulera dla funkcji jednorodnych.

L. Bruwier.

Sur l'identité d'Euler relative aux fonctions homogènes.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 25 Janvier 1938.

1. Une fonction réelle, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, de plusieurs variables réelles est, au point $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, homogène de degré m relativement à l'ensemble des variables x_j $(j=1, 2, 3, ... n)$ quand l'identité

$$f(tx_1^0, ..., tx_n^0) = t^m \cdot f(x_1^0, ..., x_n^0) \tag{1}$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de la variable t comprises dans un intervalle contenant le point $t=1$. La fonction est homogène au sens habituel si cet intervalle contient tous les nombres réels; elle est positivement homogène s'il comprend les seuls nombres positifs.

Une fonction est homogène dans un domaine si elle est homogène en tout point du domaine.

L'identité d'Euler

$$x_1^0 \frac{\partial f}{\partial x_1^0} + ... + x_n^0 \frac{\partial f}{\partial x_n^0} = m\, f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \tag{2}$$

est une conséquence immédiate de l'égalité (1), si l'on impose à la fonction homogène $f(x_1, \ldots, x_n)$ la condition d'être, au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, différentiable au sens de Stolz relativement à l'ensemble des n variables x_j[1]).

L'objet de la présente note est de montrer que l'identité d'Euler peut être établie dans l'hypothèse de la différentiabilité, au sens de Stolz, relativement à $(n-1)$ des variables contenues dans la fonction f, du moins si la n^e variable n'est pas nulle.

Dans le cas particulier d'une fonction de deux variables, $F(x,y)$, la différentiabilité de la fonction par rapport à l'une des variables, x par exemple, est une conséquence de l'existence de la dérivée partielle $F'_x(x,y)$. On obtient alors la proposition que Mr. Gołąb a démontrée dans les „Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" (année 1932, pp.105—110); la proposition de l'auteur cité ne s'étend pas aux fonctions de plus de deux variables (loc. cit. pp. 107—110); cela s'explique par le fait que l'existence des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables n'entraîne pas la différentiabilité, au sens de Stolz, par rapport à l'ensemble des variables.

2. *Théorème. Si la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est homogène dans un domaine contenant à son intérieur le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si elle est au point envisagé différentiable au sens de Stolz relativement aux $(n-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, si de plus le nombre x_n^0 n'est pas nul, la dérivée partielle première de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ relative à la variable x_n existe au point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0; x_n^0)$ et l'identité d'Euler*

$$\sum_{j=1}^{j=n} x_j^0 \frac{\partial f}{\partial x_j^0} = m \cdot f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \tag{3}$$

est vérifiée.

---

[1]) La fonction f est différentiable au sens de Stolz; par suite,

$$f(x_1^0 + hx_1^0, \ldots, x_n^0 + hx_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{j=1}^{n} hx_j^0 \frac{\partial f}{\partial x_j^0} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j hx_j^0$$

et les variables ε_j tendent vers zéro avec h.

A cause de l'homogénéité le premier membre est égal à

$$\{(1+h)^m - 1\} \cdot f(x_1^0, \ldots, x_n^0);$$

d'où, après division par h et pour $\lim h = 0$, l'identité à établir.

Démonstration. L'hypothèse relative à la différentiabilité signifie que la fonction de $(n-1)$ variables, $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^0)$ est différentiable au sens de Stolz, au point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$; si l'on désigne par la notation Δx_j^0 un accroissement infiniment petit attribué au nombre x_j^0 $(j=1,2,3,\ldots,n-1)$ l'accroissement subi par la fonction, à savoir

$$(4)\qquad \begin{aligned} &f(x_1^0+\Delta x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0+\Delta x_{n-1}^0; x_n^0)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)= \\ &=\Delta x_1^0 \frac{\partial f}{\partial x_1^0}+\ldots+\Delta x_{n-1}^0 \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}^0}+\varepsilon_1 \Delta x_1^0+\ldots+\varepsilon_{n-1} \Delta x_{n-1}^0, \end{aligned}$$

la lettre ε_j représente un infiniment petit relativement à l'ensemble des accroissements Δx_j^0 $(j=1,2,\ldots,n-1)$ ou bien zéro; d'une manière précise, à tout nombre positif ε' correspond un nombre positif η tel que l'inégalité $|\varepsilon_j|<\varepsilon'$ soit satisfaite dès que la somme $|\Delta x_1^0|+\ldots+|\Delta x_{n-1}^0|$ est inférieur à η.

Soit h un infiniment petit, différent de zéro; posons,

$$(5)\qquad \frac{1}{1+h}=1+r;$$

la variable r définie par la formule (5) est un infiniment petit différent de zéro et réciproquement si r tend vers zéro, sans s'annuler, h jouit de la même propriété.

La fonction f est, par hypothèse, homogène dans le voisinage du point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$; elle est donc homogène au point $[x_1^0(1+r), \ldots, x_{n-1}^0(1+r); x_n^0]$; d'où l'égalité,

$$\begin{aligned} &f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0+hx_n^0)= \\ &=f[x_1^0(1+r)(1+h), \ldots, x_{n-1}^0(1+r)(1+h); x_n^0(1+h)]= \\ &=(1+h)^m \cdot f(x_1^0+rx_1^0, \ldots, x_{n-1}^0+rx_{n-1}^0; x_n^0), \end{aligned}$$

puis la suivante,

$$\begin{aligned} &f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0+hx_n^0)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots; x_n^0)= \\ &=(1+h)^m\{f[x_1^0+rx_1^0, \ldots, x_{n-1}^0+rx_{n-1}^0; x_n^0]-f(x_1^0, x_2^0, \ldots; x_n^0)\}+ \\ &+\{(1+h)^m-1\}\cdot f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre peut être transformé au moyen de la formule (4) en faisant dans celle-ci Δx_j^0 égal à rx_j^0 $(j=1,2,\ldots,n-1)$; de plus le nombre x_0^n n'est pas nul en vertu de l'énoncé, et h tend vers zéro sans s'annuler; conséquemment,

$$x_n^0 \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0; x_n^0 + hx_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0)}{hx_n^0} =$$

$$(6) \qquad =(1+h)^m \cdot \frac{r}{h} \left\{ x_1^0 \frac{\partial f}{\partial x_1^0} + \ldots + x_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}^0} + \varepsilon_1 x_1^0 + \ldots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1}^0 \right\} +$$

$$+ \frac{(1+h)^m - 1}{h} \cdot f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Si l'on pose hx_n^0 égal à k, on constate que les variables h et k tendent simultanément vers zéro, sans s'annuler. Pour $\lim h = 0$, et conséquemment pour $\lim k = 0$, le rapport $\frac{r}{h}$ tend vers -1, d'après la formule (5); de plus la limite du quotient $[(1+h)^m - 1] : h$ est égale à m.

Par suite le second membre de la formule (6) a une limite déterminée quand l'accroissement k, égal à hx_n, attribué au nombré x_n^0 qui figure dans le premier membre tend vers zéro. Ce premier membre jouit de la même propriété et la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ possède une dérivée partielle première relative à la variable x_n et au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. De plus l'égalité

$$x_n^0 \frac{\partial f}{\partial x_n^0} = -x_1^0 \frac{\partial f}{\partial x_1^0} - \ldots - x_{n-1}^0 \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}^0} + mf(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

est vérifiée; l'identité (3), aussi.

R e m a r q u e: Quand le nombre x_n^0 est nul, le théorème est applicable à la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; 0)$; pour que l'identité d'E u l e r se maintienne il suffit alors, quand le nombre x_{n-1}^0 est différent de zéro, que la fonction de $(n-2)$ variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, 0)$ soit différentiable, au sens de S t o l z, relativement à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ et que de plus la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_n^0}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ existe. Plus généralement si les nombres x_j^0 $(j = p+1, p+2, \ldots, n)$ sont tous nuls et si le nombre x_p^0 est différent de zéro il suffit de supposer que la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}; x_p^0; 0, \ldots, 0)$ est différentiable et que les $(n-p)$ dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j^0} \qquad (j = p+1, \ldots, n)$$

existent.

Irena Chmielewska.

Badania nad barwnikiem czerwonych buraków.

Beta vulgaris L.

Przedstawił W. Lampe dnia 25 stycznia 1938 r.

Etude sur le colorant du betterave à salade.

Mémoire présenté par M. V. Lampé dans la séance de 25 janvier 1938.

STRESZCZENIE.

Opracowano metodę wyodrębniania i oczyszczania barwnika czerwonych buraków — betaniny — prostszą i dającą lepsze wyniki, niż sposób, opisany przez R. Willstättera i G. Schudel'a[1]). Polega ona zasadniczo na wytworzeniu trudno rozpuszczalnej w wodzie soli ołowiawej antocyjanu i następny rozkład jej metanolowym roztworem chlorowodoru.

Działaniem etanolu na otrzymany produkt wyodrębniono dwa glukozydy: jeden o zabarwieniu fioletowym, drugi czerwonym, przy czym drugi jest produktem przemiany pierwszego, zachodzącej w samej roślinie. Oba związki są monoglukozydami; duża zawartość procentowa azotu — do 7.3% — wskazuje na obecność związanej konstytucyjnie substancji azotowej, prawdopodobnie aminokwasu, odszczepiającego się podczas hydrolizy. Pod wpływem działania ługu barwnik ulega nieodwracalnej zmianie — powstają chlorowodorki o zabarwieniu pomarańczowo-brunatnym.

Hydroliza glukozydów metanolowym roztworem chlorowodoru doprowadziła do otrzymania metylowanych antocyjanidyn. Oczyszczenie ich przeprowadzono przy pomocy nierozpuszczalnych w wodzie pikrynianów. Aglukony mają zabarwienie fioletowe; w skład ch cząsteczki wchodzą dwa atomy azotu, dwie grupy o charakterze kwasowym, oraz prawdopodobnie dwie grupy hydroksylowe.

Dane te nie są zgodne z wynikami, opublikowanymi niedawno przez R. Robinsona i A. D. Ainley'a[2]), którzy przypisują aglukonowi barwnika wzór sumaryczny $C_{20}H_{19-23}O_7N_2Cl$ i budowę soli pięciohydroksyflawyliowej z przykondensowaną doń ornityną. Słusz-

[1]) Dys. G. Schudel'a, Zürich, 1918.

[2]) J. Chem. Soc. London 1937, 453.

ności hipotezy badaczy angielskich zaprzecza fakt istnienia w barwniku dwóch grup kwasowych, oraz nieobecność alifatycznej grupy aminowej.

Działanie $2n$ ługu sodowego na aglukony, oprócz zmydlenia grup estrowych powoduje zmianę, polegającą prawdopodobnie tylko na przegrupowaniu wewnętrznym: metylowane chlorowodorki produktów przemiany posiadają wyniki analiz niemal identyczne z odpowiednimi danemi dla antocyjanidyn.

Prowadzone obecnie w Zakładzie Chemii Organicznej U. J. P. prace nad barwnikami czerwonych buraków zmierzają: 1) do rozszczepienia pierścienia pyryliowego, a tym samym otrzymania produktów dalszej odbudowy, 2) do otrzymania syntetycznych soli aminoflawyliowych (praca p. L. Bajdzińskiej) i zbadania zachowania się ich wobec różnych czynników w celu porównania z barwnikami naturalnymi.

Praca ogłoszona zostanie w Rocznikach Chemii.

Zakład chemii Organicznej U. J. P. w Warszawie.

Posiedzenie

z dnia 16 marca 1938 r.

Adolf Lindenbaum i Andrzej Mostowski.

O niezależności pewnika wyboru i niektórych jego konsekwencji.

Przedstawił W. Sierpiński dnia 16 marca 1938 r.

STRESZCZENIE.

Autorowie poddają krytyce badania A. Fraenkla nad niezależnością pewnika wyboru i wymieniają osiągnięte przez nich wyniki z tego zakresu, stanowiące zarówno odpowiedzi na pytania, które postawił sobie Fraenkel, jak i na niektóre inne, związane z pojęciem skończoności.

Adolf Lindenbaum und Andrzej Mostowski.

Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Folgerungen.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 16 mars 1938.

Alle bisher bekannten Beweise der folgenden mengentheoretischen Aussagen **A—J** machen vom Auswahlaxiom Gebrauch:

A. *für jede Menge A, deren sämtliche Elemente disjunkte Mengen von der Mächtigkeit 2 sind, gibt es eine Auswahlmenge*[1]);

B. *jede Menge kann geordnet werden*;

C. *wenn es für jede Menge, deren Elemente endliche und zueinander fremde Mengen sind, eine Auswahlmenge gibt, so gibt es für jede abzählbare Menge, deren Elemente zueinander fremde Mengen sind, eine Auswahlmenge*;

[1]) D. h. eine Menge, die mit jedem Element von *A* genau ein gemeinsames Element hat.

D. *sind alle Elemente einer Menge A zueinander fremde Mengen, so enthält die Vereinigungsmenge von A eine mit A gleichmächtige Teilmenge*;

E. *jede unendliche Menge ist als Vereinigung zweier unendlicher und zueinander fremder Mengen darstellbar*;

F [2]. *jede Menge, die im Sinne der Definition II endlich ist, ist auch im Sinne der Definition I endlich*;

G. *jede Menge, die im Sinne der Definition III endlich ist, ist auch im Sinne der Definition II endlich*;

H. *jede Menge, die im Sinne der Definition IV endlich ist, ist auch im Sinne der Definition III endlich*;

J. *jede Menge, die im Sinne der Definition V endlich ist, ist auch im Sinne der Definition IV endlich.*

Der Frage der Unentbehrlichkeit des Auswahlaxioms in Beweisen einiger der obigen Sätze hat A. Fraenkel eine Reihe von Arbeiten [3]) gewidmet, wobei er seine Untersuchungen auf ein axiomatisches System $\mathfrak{U}_0$ der Mengenlehre bezog, das aus folgenden Axiomen besteht:

---

[2]) Die in Sätzen **F, G, H, J** vorkommenden Definitionen des Endlichkeitsbegriffes sind der Arbeit von Tarski: *Sur les ensembles finis*. Fund. Math. **6** (1924), S. 45—95 entnommen.

[3]) Die Arbeiten Fraenkels, die dieses Thema behandeln, sind folgende:

[1] *Der Begriff »definit« und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*. Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss. (1922), S. 253—257.

[2] *Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen*. Ibid. (1928), S. 90—91.

[3] *Sur une atténuation essentielle de l'axiome du choix*. C. R. (Paris) **192** (1931), S. 1072.

[4] *Über die Axiome der Teilmengenbildung*. Verh. Intern. Math. Kongr. Zürich **2** (1932), S. 341—342.

[5] *Sur l'axiome du choix*. Ens. Math. **34** (1935), S. 32—51.

[6] *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms*. Journal of Symb. Logic **2** (1937), S. 1—25.
Auch im Buche

[7] *Einleitung in die Mengenlehre*. (3. Aufl., 1928)

findet man Bemerkungen über die Frage der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms (S. 345 f.).

I. *Axiom der Bestimmtheit*;
II. *Axiom der Paarung*;
III. *Axiom der Vereinigung*;
IV. *Axiom der Potenzmenge*;
V. *Axiom der Aussonderung*;
VI. *Axiom des Unendlichen* [4]).

Als Axiom VI ist es dabei bequem, folgende Aussage anzunehmen: *es gibt eine mindestens abzählbare Menge, deren Elemente keine Mengen sind.*

Die Ergebnisse Fraenkels lauten folgendermaßen:

Die Aussagen **A., B., C.,** *sind im System* $\mathfrak{U}_0$ *nicht ableitbar.*

Der Beweis dieser metamathematischen Behauptung in der Form, wie er von Fraenkel dargestellt wurde, enthält ohne Zweifel eine wichtige und interessante Idee, kann aber, unserer Meinung nach, noch nicht als endgültig betrachtet werden, da eine gefährliche Verwechslung der metamathematischen und mathematischen Begriffe daran haftet.

Schwierigkeiten beginnen mit der von Fraenkel angenommenen Formulierung des Aussonderungsaxioms: es handelt sich nämlich um den Fraenkelschen Begriff der Funktion, bei dem man kaum entscheiden kann, ob er einen mathematischen oder metamathematischen Charakter haben soll [5]). Die so entstandene Verwirrung macht die weitere Konstruktion unklar: dies tritt besonders an der Stelle zu Tage, wo Fraenkel ein Modell für das System $\mathfrak{U}_0$ als einen Bereich definiert, der erstens gewisse Mengen enthält, deren Existenz in den Axiomen des Systems $\mathfrak{U}_0$ gefordert wird, und der zweitens in bezug auf gewisse Operationen abgeschlossen ist [6]). Die Möglichkeit, diese Operationen präzis auszudrücken, hängt sowohl von der angenommenen strengen Formalisierung des axiomatischen Systems $\mathfrak{U}_0$ als auch vom Reichtum des Systems der Mengenlehre, auf dessen Boden der Unabhängigkeitbeweis verläuft, ab [7]). Wir müssen hier zwei Varianten unterscheiden:

---

[4]) Vgl. Fraenkel [7], S. 274, 277, 278, 279, 285 f.

[5]) Vgl. Fraenkel [7], S. 286.

[6]) Vgl. Fraenkel [5], S. 43 und 49.

[7]) Es ist bei diesen Betrachtungen das deduktive System $\mathfrak{U}_0$ der Mengenlehre, das hier das Objekt der metamathematischen Untersuchung darstellt, von einer anderen Mengenlehre sorgfältig zu trennen, die als das Instrument der metamathematischen Analysis dient.

1°. Der Funktionsbegriff ist adäquat mit der üblichen intuitiven Bedeutung dieses Begriffes gefaßt. Dann läßt sich die Konstruktion von Fraenkel erst mit Hilfe des semantischen Begriffes

eine Menge erfüllt eine Aussagefunktion [8])

durchführen, was kompliziert ausfällt und die Heranziehung von sehr starken Mitteln erheischt.

2°. Der Funktionsbegriff ist so eng gefaßt, daß er sich ganz mit den Mitteln des axiomatischen Systems $\mathfrak{U}_0$ in endlich vielen Worten ausdrücken läßt. Dann ist zwar der Fraenkelsche Beweis durchführbar, ist aber nicht als eine vollständige Lösung der Frage zu betrachten.

Von dieser grundsätzlichen Unklarheit, die sich in allen hier besprochenen Arbeiten Fraenkels wiederholt, abgesehen, steckt noch im Unabhängigkeitsbeweis der Aussage **C** ein Fehler, der, wie es scheint, nicht leicht zu verbessern wäre: in [6] auf der Seite 23, Zeile 9 wird geschlossen, daß wenn $\mathfrak{P}$ eine Permutation ist und $\mathfrak{P}(t) \neq t$ für ein gewisses $t \in \tau$, so muß $\mathfrak{P}(t) \neq t$ für jedes $t \in \tau$ gelten, denn sonst — schreibt der Verfasser — „wäre der Durchschnitt $\mathfrak{P}(\tau) \cdot \tau \neq 0$ und da $\mathfrak{P}(\tau) \in T$ läge ein Widerspruch mit der Voraussetzung vor, wonach die Elemente von T zueinander fremd sind". Diese Überlegung ist gewiß nicht richtig, da $\mathfrak{P}(\tau)$ gleich τ sein kann [9]).

Wegen des Obengesagten haben wir (im Jahre 1935) die Fraenkelsche Methode einigen Veränderungen unterworfen, wo-

---

[8]) Über den Begriff des Erfülltseins gibt die Arbeit Tarskis: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. Studia Philosophica **1** (1936), S. 261—405, eine ausführliche Auskunft.

[9]) Es wäre auch leicht zu zeigen, daß der in [6], S. 3 definierte Bereich $\mathfrak{B}$ sicher Mengen enthält, die in bezug auf keine Zelle halbsymmetrisch sind. Man hat zu diesem Zweck eine Menge B zu betrachten, die auf folgende Weise aufgebaut wird: es sei zunächst A die Menge aller geordneten Paare $\langle a,b \rangle$, wo a,b zwei voneinander verschiedene Elemente derselben Zelle C_ν bedeuten und C_ν alle Zellen durchläuft. Die Menge A teilen wir nun in endliche und zueinander fremde Mengen ein, indem wir zwei Paare zu einer und derselben Menge dann rechnen, wenn diese sich ausschließlich durch die Anordnung ihrer Elemente unterscheiden. B ist nun die Menge aller so erhaltenen Teilmengen von A. Es ist klar, daß B dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; daraus folgt aber, daß es auch eine Auswahlmenge von B in $\mathfrak{B}$ geben muß und man stellt leicht fest, daß eine Auswahlmenge von B in bezug auf keine Zelle halbsymmetrisch ist.

durch wir (wie es uns scheint) einen ganz richtigen Beweis erhalten haben [10]).

Als Grundlage des Systems der Mengenlehre nehmen wir das Axiomensystem $\mathfrak{U}$ an, das in Hauptzügen dem Zermelo-Fraenkelschen System ganz ähnlich ist. Dem System $\mathfrak{U}$ gehören nämlich die oben angegebenen Axiome **I, II, III, IV** an, ferner das *Aussonderungsaxiom* und zwar in der Formulierung, die der unlängst von Quine veröffentlichten ganz ähnlich ist [11]), das *Ersetzungsaxiom* (das sich auf ähnliche Weise wie das Aussonderungsaxiom präzisieren läßt) und schließlich das *Unendlichkeitsaxiom*, z. B. in der ursprünglichen Zermeloschen Fassung [12]).

In bezug auf dieses System können wir folgende Behauptung beweisen:

Ist das System $\mathfrak{U}$ widerspruchsfrei, so ist keiner der Sätze **A., B., C., D., E., F., G., H., J.** *im System $\mathfrak{U}$ ableitbar* [13]).

Insbesondere *ist also die Identität der induktiven und der nichtreflexiven Kardinalzahlen* [14]) *ohne Auswahlaxiom nicht beweisbar.*

Die ausführliche Durchführung der Beweise mitsamt der genaueren Kritik des Beweises Fraenkels wird an einer anderen Stelle in nächster Zukunft veröffentlicht werden. Hier sei nur der Gedankengang des einfachsten Unabhängigkeitsbeweises für die Aussage **E** kurz angedeutet.

Zuerst stellen wir fest, daß das System $\mathfrak{U}$ auch dann widerspruchsfrei bleibt, wenn wir zu seinen Axiomen noch die Aussage:

es gibt eine unendliche Menge M, deren Elemente keine Mengen sind

hinzufügen.

---

[10]) Dieses Ergebnis wurde auf dem von A. Lindenbaum an der Universität Warschau geführten Kolloquium im Herbst 1935 behandelt und ausserdem von A. Mostowski am 10. I. 1936 auf der Sitzung der Warschauer Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

[11]) W. V. Quine: *Set theoretic foundations for logic*. Journal of Symb. Logic **1** (1936), S. 45 ff.

[12]) Vgl. etwa Fraenkel [7], S. 307.

[13]) Die Unabhängigkeit der Aussagen **A** und **B** wurde von den beiden Verfassern gemeinsam bewiesen. Weitere Ergebnisse, über **C**—**J**, rühren von A. Mostowski her. Vgl. A. Mostowski: *Über den Begriff einer endlichen Menge*. Dieser Band, S. 13 ff.; *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki*. Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Matem. **11** (1938).

[14]) Vgl. Fraenkel [7], S. 298 f.

Nach diesem vorbereitenden Schritt drücken wir (ganz in der Sprache des Systems $\mathfrak{U}$) folgende Relation aus:

$\theta(f,x)$: *die eineindeutige Abbildung f der Menge M auf sich selbst läßt die Menge x invariant.*

Bei der präzisen Formulierung dieser Aussagefunktion (worauf der Schwerpunkt des ganzen Beweises beruht) stützen wir uns auf die Theorie der Ordnungszahlen, die sich nach v. Neumann im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre durchführen läßt[15]), sowie auch auf die Möglichkeit, jeder Menge gewisse Ordnungszahl zuzuordnen: es wird dabei jedem Ding, das keine Menge ist, die Zahl 0, jeder Menge dagegen, deren sämtlichen Elementen Zahlen $<\xi$ zugeordnet wurden, höchstens die Zahl ξ zugeordnet.

Ist die Aussagefunktion $\theta(f,x)$ definiert, so ist es schon leicht einen Bereich $\mathfrak{B}$ anzugeben, worin alle Axiome des Systems $\mathfrak{U}$ erfüllt sind, die Aussage **E** aber nicht. Es genügt nämlich als $\mathfrak{B}$ den Bereich der Mengen x anzunehmen, für die es eine endliche Menge N gibt, derart, daß x in der Beziehung $\theta(f,x)$ zu jeder Funktion f steht, die M eineindeutig auf sich abbildet und alle Elemente von N festläßt[16]).

Wir bemerken noch zum Schluß, daß sich unser Beweis keineswegs auf das System $\mathfrak{U}'$ anwenden läßt, welches aus $\mathfrak{U}$ durch Hinzufügung des Satzes

(^{0}) *jedes Ding ist eine Menge*

entsteht[17]), daß es aber möglich ist, unsere Beweise mehreren anderen logischen bzw. mengentheoretischen Systemen (z. B. dem System der Principia Mathematica mit vereinfachter Typentheorie) anzupassen[18]).

---

[15]) Vgl. J. v. Neumann: *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Math. Zeitschrift **27** (1928), S. 669—752.

[16]) Die bloße Angabe eines Modells genügt für die Zwecke des Unabhängigkeitsbeweises nur dann, wenn das betrachtete System der Mengenlehre axiomatisierbar ist, d. h. sich auf eine endliche Anzahl der Axiome stützt. Ist das, wie z. B. im System $\mathfrak{U}$, nicht der Fall, so muß man noch einen Kunstgriff anwenden, um den Beweis zu vollenden. Wir gehen hier in diese Einzelheiten nicht näher ein.

[17]) Es wurde schon von A. Fraenkel hervorgehoben, daß das Problem der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms in Systemen, wo die Aussage (^{0}) zu Axiomen gerechnet wird, erhebliche Schwierigkeiten bietet. Vgl. Fraenkel [5], S. 41.

[18]) Vgl. A. Mostowski: a. a. O.[13]).

Alfred Tarski.

Uwagi w sprawie aksjomatyki algebry Boole'a.

Przedstawił J. Łukasiewicz dnia 16 marca 1938 r.

STRESZCZENIE.

Uwagi, podane w komunikacie, dotyczą ugruntowania algebry Boole'a (i pewnych systemów pokrewnych) na układach postulatów, zawierających znak inkluzji jako symbol pierwotny.

Alfred Tarski.

Einige Bemerkungen zur Axiomatik der Boole'schen Algebra.

Vorgelegt von J. Łukasiewicz am 16 März 1938.

Die Boole'sche Algebra kann bekanntlich auf Postulaten aufgebaut werden, in denen nur zwei Grundzeichen auftreten: ein Klassenzeichen „B" und ein Relationszeichen „$<$". „B" bezeichnet eine Menge (Klasse) von beliebigen Elementen $a,b,c...$ und „$<$" eine binäre Relation zwischen Elementen dieser Menge, die sog. Relation der Inklusion (die Formel „$a<b$" wird gelesen: „*a ist enthalten in b*").

Ein System von neun Postulaten, die diese Grundzeichen enthalten und zur Begründung der gewöhnlichen Boole'schen Algebra (d. i. der Theorie der sog. Boole'schen Ringe mit Einselement) hinreichen, wurde vor mehreren Jahren von Huntington veröffentlicht [1]). Ich möchte hier ein einfacheres Postulatensystem dieser Art angeben. Das System besteht aus fünf Sätzen, von denen die drei ersten bereits im System von Huntington vorkommen:

$\mathfrak{P}_1$. *Ist $a,b \in B$, $a<b$ und $b<a$, so ist $a=b$.*

$\mathfrak{P}_2$. *Ist $a,b,c \in B$, $a<b$ und $b<c$, so ist $a<c$.*

$\mathfrak{P}_3$. *Zu je zwei Elementen $a,b \in B$ gibt es ein Element $c \in B$ mit folgenden Eigenschaften*: (1) *$a<c$ und $b<c$*; (2) *ist $x \in B$, $a<x$ und $b<x$, so ist $c<x$.*

[1]) E. V. Huntington, Trans. Am. Math. Soc. 5, 1904, S. 297 (das zehnte Postulat von Huntington, demzufolge der »Bereich der Betrachtung« B mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, wird hier nicht berücksichtigt).

Um dem vierten Postulat eine durchsichtige Form zu geben, formulieren wir zunächst eine Hilfsdefinition:

Die Formel: (1) $a)(b$ *(in Worten: a und b sind disjunkt) drückt dasselbe aus wie die Bedingung*: (2) *ist* $x \epsilon B$, $x < a$ *und* $x < b$, *so ist* $x < y$ *für jedes* $y \epsilon B$.

$\mathcal{P}_4$. *Zu jedem Element* $a \epsilon B$ *gibt es ein Element* $b \epsilon B$ *mit folgenden Eigenschaften*: (1) $a)(b$; (2) *ist* $x \epsilon B$ *und* $a)(x$, *so ist* $x < b$; (3) *ist* $x \epsilon B$ *und* $x)(b$, *so ist* $x < a$.

$\mathcal{P}_5$. *Die Menge B enthält mindestens ein Element.*

Der Beweis, daß das System $[\mathcal{P}_1—\mathcal{P}_5]$ dem Huntingtonschen Postulatensystem äquivalent ist, macht keine Schwierigkeiten; die Ableitung der bekannten Sätze der Boole'schen Algebra aus den Postulaten $\mathcal{P}_1—\mathcal{P}_5$ ist überhaupt ganz einfach und erfordert vom Anfang an keine „Kunstgriffe".

Man verfährt etwa in folgender Weise. Aus $\mathcal{P}_4$ ergibt sich unmittelbar, daß die Relation $<$ reflexiv ist: es gilt $a < a$ für jedes $a \epsilon B$. Aus $\mathcal{P}_1$ ersieht man, daß es zu je zwei Elementen $a, b \epsilon B$ genau ein Element $c \epsilon B$ gibt, das die Bedingungen (1) und (2) des Postulates $\mathcal{P}_3$ erfüllt; dieses einzige Element c wird mit $a+b$ bezeichnet. Ebenso zeigt man, daß das Element b in $\mathcal{P}_4$ durch die Bedingungen (1)—(3) eindeutig bestimmt ist, und man bezeichnet es mit a'. Auf Grund von $\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_4$ werden leicht die Sätze der Kontraposition und des doppelten Komplements gewonnen. Das Produkt $a \cdot b$ wird durch die Formel $a \cdot b = (a' + b')'$ definiert; mit Hilfe der Kontrapositionssätze zeigt man, daß $c = a \cdot b$ den zu $\mathcal{P}_3$ (1), (2) dualen Bedingungen genügt. Man erhält ferner für beliebige $a, b \epsilon B$ die Formel: $a \cdot a' < b < a + a'$; mit Rücksicht auf $\mathcal{P}_5$ ergibt sich hieraus die Existenz des Null- und des Einselements. Die kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze für die Addition und die Multiplikation werden genau so wie auf dem Boden des Huntingtonschen Systems bewiesen usw. usw.

Manchmal ist es bequem, die Gleichheit in der Boole'schen Algebra von der logischen Identität zu unterscheiden und die Formel „$a = b$" als gleichbedeutend mit der Konjunktion „$a < b$ *und* $b < a$" zu definieren. Das System $[\mathcal{P}_1—\mathcal{P}_5]$ erfährt in diesem Fall eine Vereinfachung, da $\mathcal{P}_1$ wegfällt.

Durch geringe Modifikationen gewinnt man aus $[\mathcal{P}_1—\mathcal{P}_5]$ Postulatensysteme, die zur Begründung gewisser mit der gewöhnlichen

Boole'schen Algebra verwandter Disziplinen geeignet sind. Wir betrachten nämlich folgende Postulate:

$\mathfrak{P}_3'$. *Zu jeder Teilmenge A von B gibt es ein Element $a \in B$ mit folgenden Eigenschaften*: (1) $x < a$ *für jedes* $x \in A$; (2) *ist* $y \in B$ *und* $x < y$ *für jedes* $x \in A$, *so ist* $a < y$.

$\mathfrak{P}_4'$. *Zu je zwei Elementen $a, b \in B$ gibt es ein Element $c \in B$ mit folgenden Eigenschaften*: (1) $c < a$ *und* $b)(c$; (2) *ist* $x \in B$, $x < a$ *und* $b)(x$, *so ist* $x < c$; (3) *ist* $x \in B$, $x < a$ *und* $x)(c$, *so ist* $x < b$.

$\mathfrak{P}_5'$. *Es gibt ein Element $x \in B$, so daß $y < x$ für jedes $y \in B$.*

$\mathfrak{P}_3'$ ist offenkundig eine Verallgemeinerung von $\mathfrak{P}_3$; auch $\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_5'$ ergeben sich unmittelbar aus $\mathfrak{P}_3'$. Die Systeme $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3', \mathfrak{P}_4]$ und $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3', \mathfrak{P}_4']$ sind miteinander äquivalent und reichen zur Begründung der sog. erweiterten Boole'schen Algebra (d. i. der Theorie der absolut-additiven Boole'schen Ringe) hin[2]).

Das System $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4', \mathfrak{P}_5']$ ist mit $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_5]$ äquivalent. Das System $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4', \mathfrak{P}_5]$ dagegen ist logisch schwächer als diese beiden Systeme und bildet eine Grundlage nicht für die gewöhnliche, sondern für die sog. verallgemeinerte Boole'sche Algebra (die Theorie der beliebigen Boole'schen Ringe)[3]). Aus der Vergleichung der Systeme $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_5]$ und $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4', \mathfrak{P}_5']$ mit $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4', \mathfrak{P}_5]$ gewinnt man leicht gewisse metamathematische Sätze über die formale Beziehung der gewöhnlichen Boole'schen Algebra zu der verallgemeinerten Boole'schen Algebra; man ersieht z. B., daß jeder gültige Satz der ersten Disziplin durch eine gewisse Relativierung (auf deren genaue Beschreibung hier verzichtet wird) in einen gültigen Satz der zweiten Disziplin übergeht.

Wie leicht zu zeigen, sind in dem Postulatensystem $[\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_5]$ alle Postulate voneinander unabhängig; Postulat $\mathfrak{P}_2$ wird jedoch aus den übrigen Postulaten ableitbar, wenn man $\mathfrak{P}_3$ folgendermaßen modifiziert:

Zu je zwei Elementen $a, b \in B$ gibt es ein Element $c \in B$, so daß für jedes $x \in B$ die Formel: $c < x$ dann und nur dann gilt, wenn zugleich $a < x$ und $b < x$.

---

[2]) Vgl. meine Arbeit in Fund. Math. **24**, 1935, S. 177 ff., wo analoge Postulatensysteme angegeben sind.

[3]) Vgl. M. H. Stone, Journ. of Math. **57**, 1935, S. 721 f.; ein anderes Postulatensystem für die verallgemeinerte Boole'sche Algebra wurde von mir in C. R. Soc. Sc. Vars. **30**, 1937. Cl. III, S. 169 veröffentlicht.

Georges de Alexits.

O pojęciu odstępu w przestrzeniach abstrakcyjnych.

Przedstawił W. Sierpiński dnia 16 marca 1938 r.

Sur la notion d'écart dans les espaces abstraits.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 16 Mars 1938.

Les espaces abstraits dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire d'un écart jouent un rôle important dans les recherches topologiques modernes. En variant les conditions restrictives imposées à la notion d'écart, on obtient des types plus ou moins généraux d'espaces. Nous allons rechercher quelques propriétés de ces espaces, ayant égard aux rapports à d'autres catégories d'espaces, surtout ce qui concerne les espaces distanciés de M. Fréchet [1]).

Les espaces semi-distanciés.

1. Soit E un espace abstrait dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire d'un écart où le mot „écart" désigne un nombre pq assujetti aux conditions suivantes [2]):

1°. $pq=qp\geqslant 0$;

2°. *Les relations* $pq=0$ *et* $p=q$ *s'entraînent réciproquement.* La géométrie d'un tel espace diffère beaucoup de la géométrie des espaces distanciés; pour la rendre plus approchée de nos idées habituelles, il faut prétendre au moins que le dérivé de tout sous-ensemble de l'espace considéré soit fermé. M. Fréchet a démontré [3]) que cette propriété équivaut à la condition suivante:

3°. *Etant donné un point* p *et un nombre* $\varepsilon>0$, *il existe un nombre* $\gamma>0$ *tel que l'inégalité* $pq<\gamma$ *ayant lieu, il existe un nombre* $\delta>0$ *pour lequel l'inégalité* $qr<\delta$ *entraîne* $pr<\varepsilon$.

---

[1]) M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), p. 1-74.

[2]) M. Fréchet, l. c., p. 18.

[3]) M. Fréchet, *Relations entre la notion de limite et la distance.* Trans. Amer. Math. Soc. **19** (1918), p. 53-65.

2. Nous appellerons *espace semi-distancié* tout espace abstrait dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire d'un écart assujetti aux conditions 1°, 2°, 3°. L'ouvrage mentionné de M. Fréchet contient implicitement le résultat que *les espaces semi-distanciés sont équivalents aux espaces de Hausdorff*[4]) *dont les points d'accumulation peuvent être définis par l'intermédiaire d'un écart.*

3. Nous allons d'abord montrer que les espaces semi-distanciés jouissent d'une propriété familière dans la géométrie des espaces distanciés, mais qui cesse d'être exacte dans la plupart des espaces abstraits plus généraux que les espaces distanciés:

Tout sous-ensemble fermé F d'un espace semi-distancié est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

Désignons par $S(p,\varrho)$ le sphéroïde de centre p et rayon ϱ, c'est à dire l'ensemble des points q de l'espace considéré tels que $pq<\varrho$. Un espace semi-distancié étant équivalent à un espace de Hausdorff, il existe un ensemble ouvert $G_n(p)\subset S\left(p,\frac{1}{n}\right)$ comprenant p à son intérieur. Posons

$$G_n=\sum_{p\in F} G_n(p).$$

G_n étant la somme des ensembles ouverts $G_n(p)$, il est lui-même un ensemble ouvert. La relation suivante vaut par définition:

$$F\subset\prod_{n=1}^{\infty} G_n\subset\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{p\in F} S\left(p,\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

où le symbole $\prod$ désigne le produit de ses arguments. Soit q un point arbitraire de l'ensemble $\prod\sum S\left(p,\frac{1}{n}\right)$. Il existe, pour tout entier $n=1,2,\ldots$, un point q_n de F tel que q soit contenu dans le sphéroïde $S\left(q_n,\frac{1}{n}\right)$. L'écart qq_n tend, par conséquent, vers zéro; q est donc un point d'accumulation de l'ensemble F. Or F étant fermé, il contient tous ses points d'accumulation, q est donc un point de F. Comme q était un point arbitraire de l'ensemble $\prod\sum S\left(p,\frac{1}{n}\right)$, il en résulte

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{p\in F} S\left(p,\frac{1}{n}\right)\subset F. \tag{2}$$

[4]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig 1914), p. 213.

En comparant les relations (1) et (2), on obtient

$$F = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$$

où tous les ensembles G_n sont ouverts, ce qui était justement notre proposition.

Les conditions de continuité.

4. Désignons par $\overline{S}(p,\varrho)$ les sphéroïdes fermés de centre p et rayon ϱ, c'est à dire l'ensemble des points q tels que $pq \leqslant \varrho$. On est tenté d'attribuer un caractère spécial aux espaces dont les sphéroïdes $S(p,\varrho)$ sont des ensembles ouverts ou bien les sphéroïdes fermés $\overline{S}(p,\varrho)$ sont des ensembles fermés. On voit sans peine que ces propriétés sont équivalentes aux conditions suivantes portant directement sur la nature de l'écart:

3° a. *Etant donné un point p et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les inégalités $pq < \varepsilon$, $qr < \delta$ entraînent $pr < \varepsilon$.*

3° b. *Etant donné un point p et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les inégalités $pq > \varepsilon$, $qr < \delta$ entraînent $pr > \varepsilon$.*

5. On voit aisément que ces conditions sont, en quelque sorte, les plus faibles concernant la continuité de l'écart. En effet, désignons par $E \times E$ l'ensemble des couples de points (p,q) de l'espace E et définissons l'écart des points (p,q), (p',q') de $E \times E$ par la relation $\sqrt{(pp')^2 + (qq')^2}$. On peut considérer l'écart pq comme une fonction $f(p,q)$ de deux variables définie dans l'espace $E \times E$. Soit une de ces variables, par exemple p, un point fixe de E. L'ensemble des points q où la valeur de $f(p,q)$ reste inférieure à un nombre positif ϱ est l'ensemble $(p) \times S(p,\varrho)$. Si $S(p,\varrho)$ est ouvert, $(p) \times S(p,\varrho)$ l'est aussi; $f(p,q)$ est donc, pour tout point p fixe, une fonction semi-continue supérieurement de q. Soit, inversemet, $f(p,q)$ une fonction semi-continue supérieurement de q pour tout point p fixe; alors $(p) \times S(p,\varrho)$ est ouvert, $S(p,\varrho)$ l'est donc aussi. La symmétrie de la fonction $f(p,q) = pq$ entraîne des relations semblables, si q reste fixe et p varie. Nous avons donc obtenu le résultat suivant:

Pour que les sphéroïdes $S(p,\varrho)$ soient des ensembles ouverts, il faut et il suffit que l'écart pq soit une fonction semi-continue supérieurement en chacune des variables p,q.

6. On peut caractériser de la même manière les espaces dont les sphéroïdes fermés sont des ensembles fermés:

Pour que les sphéroïdes fermés $\overline{S}(p,\varrho)$ *soient des ensembles fermés, il faut et il suffit que l'écart pq soit une fonction semi-continue inférieurement en chacune des variables p,q.*

7. On appelle *espace régulier* un espace de Hausdorff dans lequel tout voisinage V_p d'un point arbitraire p comprend la fermeture $\overline{W}_p$ d'un voisinage W_p de p [5]).

Si les sphéroïdes fermés d'un espace semi-distancié E sont des ensembles fermés, E est un espace régulier.

En effet, E est, grâce au théorème de M. Fréchet mentionné au paragraphe **2**, un espace de Hausdorff; il reste a démontrer l'existence d'un voisinage W_p tel que $\overline{W}_p \subset V_p$, quel que soit le point p et son voisinage V_p. Soit, à cet but, $\varrho_1 > 0$ et tel que $S(p,\varrho_1) \subset V_p$; désignons par ϱ_2 un nombre positif arbitraire $< \varrho_1$. E étant un espace de Hausdorff, le sphéroïde $S(p,\varrho_2)$ comprend un voisinage W_p de p. En désignant par $\overline{A}$ la fermeture d'un ensemble quelconque A, on obtient

$$\overline{W}_p \subset \overline{\overline{S}(p,\varrho_2)}.$$

Or $\overline{S}(p,\varrho_2)$ est, d'après l'hypothèse, un ensemble fermé, c'est à dire $\overline{S}(p,\varrho_2) = \overline{\overline{S}(p,\varrho_2)}$. Nous sommes donc conduits à la relation

$$\overline{W}_p \subset \overline{S}(p,\varrho_2).$$

Vu que $\varrho_2 < \varrho_1$, il s'ensuit

$$\overline{S}(p,\varrho_2) \subset S(p,\varrho_1) \subset V_p,$$

par conséquent

$$\overline{W}_p \subset V_p,$$

c. q. f. d.

8. Ayant en vue les résultats des paragraphes **5** et **6**, on est tenté de restreindre encore les conditions 3°a et 3°b, en prétendant que l'écart *pq* soit une fonction continue en chacune des variables *p,q* ou même qu'il soit une fonction continue de deux variables. Ces propriétés sont exprimées par les conditions suivantes:

---

[5]) L. Vietoris, *Stetige Mengen.* Monatsh. Math. Phys. **31** (1921), p. 173-204.

3°c. *Etant donné un couple de points* (p,q) *et un nombre* $\varepsilon>0$, *il existe un* $\delta>0$ *tel que l'inégalité* $qq'<\delta$ *entraîne* $|pq-pq'|<\varepsilon$.

3°d. *Etant donné un couple de points* (p,q) *et un nombre* $\varepsilon>0$, *il existe un* $\delta>0$ *tel que les inégalités* $pp'<\delta$, $qq'<\delta$ *entraînent* $|pq-p'q'|<\varepsilon$.

Il est à remarquer qu'une fonction semi-continue supérieurement et inférieurement en chacune de ses variables est continue en chacune de ses variables et vice-versa. Il en résulte, grâce aux résultats des paragraphes **5** et **6**, que 3°c *est la condition nécessaire et suffisante pour que les* $S(p,\varrho)$ *soient ouverts et, en même temps, les* $\bar{S}(p,\varrho)$ *soient fermés.*

Équivalences topologiques.

9. Un espace de Hausdorff est *parfaitement sérparable*, s'il existe une famille dénombrable de voisinages équivalente à la famille donné d'avance [6]). Un espace semi-distancié est *distancié*, si l'écart pq satisfait à la condition [7])

3°e. $$pr+qr\geqslant pq.$$

Nous allons voir que, pour les espaces parfaitement séparables, 3°b équivaut à la condition 3°e:

Si les sphéroïdes fermés d'un espace E semi-distancié et parfaitement séparable sont des ensembles fermés, E est homéomorphe à un espace distancié.

En effet, E est, d'après le théorème démontré au paragraphe **7**, un espace régulier et parfaitement séparable. Il satisfait donc, en vertu d'un théorème de M. Tychonoff [8]), aux conditions dont Urysohn [9]) a reconnu la suffisance pour que E soit homéomorphe à un espace distancié.

---

[6]) F. Hausdorff, l. c., p. 263.

[7]) M. Fréchet, l. c.[1]), p. 30.

[8]) A. Tychonoff, *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn.* Math. Ann. **95** (1926), p. 139-142.

[9]) P. Urysohn, *Zum Metrisationsproblem.* Math. Ann. **94** (1925), p. 309-315.

10. Quoique la différence entre les espaces semi-distanciés dont les $S(p,\varrho)$ sont ouverts et les espaces dont les $\bar{S}(p,\varrho)$ sont fermés paraît être bien petite, ces deux catégories d'espaces sont essentiellement différentes. Soit, à titre d'exemple, E un plan où l'écart pq de deux points distincts $p=(x_1,y_1)$, $q=(x_2,y_2)$ est défini par la relation

$$pq=\begin{cases}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, & \text{si} \quad y_2 \neq 0;\\ \sqrt{(x_1-x_2)^2+y_1^2}, & \text{si} \quad x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ y_2=0,\\ 1, & \text{si} \quad x_1=0,\ y_1=0,\ x_2\neq 0,\ y_2=0.\end{cases}$$

E est un espace semi-distancié et parfaitement séparable, les sphéroïdes $S(p,\varrho)$ sont ouverts; mais on établit aisément la non-régularité de cet espace. Il n'existe donc, en vertu du théorème du paragraphe **7**, aucune homéomorphie entre E et un espace dont les $\bar{S}(p,\varrho)$ sont fermés.

11. Un espace abstrait est *compact* [10]), si tout son sous-ensemble infini donne lieu à au moins un point d'accumulation. Nous allons voir que, parmi les espaces compacts, il n'y a pas de différence topologique entre les conditions 3⁰d et 3⁰e:

Si l'écart d'un espace E semi-distancié et compact est assujetti à la condition 3⁰ d, *E est homéomorphe à un espace distancié.*

Il suffit de démontrer, en vertu d'un théorème de M. Wilson [11]), que l'espace E ne contient aucun point p, de sorte qu'on y puisse attacher deux suites de points $\{q_n\}$ et $\{r_n\}$ telles que $pr_n+q_nr_n\to 0$, tandis que pq_n reste supérieur à un nombre positif. Admettons, par impossible, que l'espace E ne possède pas cette propriété. Alors, on peut déterminer un point p, deux suites de points $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ et un nombre $\delta>0$, de sorte que

$$pq_n>\delta, \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{3}$$

$$pr_n+q_nr_n<\varepsilon, \qquad (n\geqslant n_\varepsilon), \tag{4}$$

quel que petit que soit $\varepsilon>0$, pourvu que n_ε soit assez grand. L'espace E étant compact, la suite $\{q_n\}$ contient une suite partielle $\{q_{k_n}\}$ convergente vers un point q. De même, on peut extraire de la suite $\{r_{k_n}\}$ une suite partielle $\{r_{k_{m_n}}\}$ convergente vers un point r.

[10]) M. Fréchet, l. c. [1]), p. 6.

[11]) A. W. Wilson, *On semi-metric spaces*. Amer. Journ. Math. **53** (1931), p. 361-373.

L'inégalité (4) entraîne les inégalités $pr_{k_{m_n}} < \varepsilon$, $q_{k_{m_n}} r_{k_{m_n}} < \varepsilon$, si $n \geqslant n_\varepsilon$. En appliquant la condition 3°d, on obtient donc

$$pr_{k_{m_n}} \to pr = 0, \qquad q_{k_{m_n}} r_{k_{m_n}} \to qr = 0.$$

Il en résulte: $p = r$ et $q = r$, donc $p = q$. Or, d'après l'inégalité (3) on a $pq_{k_n} \to pq \geqslant \delta > 0$, d'où $p \neq q$. Ainsi, nous sommes ramenés à une contradiction, ce qui montre l'incompatibilité des inégalités (3) et (4). Notre démonstration est, par conséquent, achevée.

Zygmunt Weyberg.

O pewnym glinokrzemianie wapniowym zawierającym brom.

Komunikat zgłoszony dnia 16 marca 1938 r.

Sur quelque alumosilicate calcaire contenant le brome.

Mémoire présenté à la séance du 16 mars 1938.

Praca wyjdzie w „Archiwum Mineralogicznym T. N. W.".
