

COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE  
XXXI Année 1938      Classe III      Fascicule 4—6

---

**SPRAWOZDANIA**  
z posiedzeń  
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO**  
**WARSZAWSKIEGO**

Wydział III  
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXXI 1938

Zeszyt 4—6



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z WSPÓŁUDZIAŁANIEM MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1938

DRUKARNIA UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO  
pod zarządem Józefa Filipowskiego

<http://rcin.org.pl>

## TREŚĆ ZESZYTU 4—6

	Str.
L. Jeśmanowicz. O jednoznaczności szeregów Schlömilcha . . . . .	43
St. J. Thugutt. O składzie chemicznym pewnych minerałów meteorytu łowickiego . . . . .	59
S. Jaskólski. Badanie składników nieprzeźroczystych meteorytu łowickiego w świetle odbitym . . . . .	61
W. Lampe i M. Trenknerówna. Syntezy pewnych oksypochodnych kumaryno- $\alpha$ -karbonylo-cynamoilometanu . . . . .	63
M. Kołaczowska. Badania mikroskopowe meteorytu łowickiego . . . . .	65
W. Wawryk. Z petrografii piaskowca żurawińskiego . . . . .	66
R. Kozłowski. Tymczasowe wiadomości o graptolitach z tremadoku Polski i o ich teoretycznym znaczeniu . . . . .	69
W. Bargieł i L. Wertenstein. Porównanie neutronów otrzymywanych z berylu działaniem promieni $\alpha$ i jego pochodnych, oraz promieni $\gamma$ z $RaC$ . . . . .	70
L. Wertenstein i W. Bargieł. Porównanie mechanizmu zwalniania neutronów otrzymywanych z berylu przez promienie $\alpha$ i promienie $\gamma$ z $RaC$ . . . . .	82
St. J. Thugutt. O zachowaniu się leucytu pod wpływem kwaśnego siarczanu potasowego w roztworze wodnym . . . . .	85
J. Cichocki. Próba oznaczenia zawartości radu w meteorycie łowickim . . . . .	87

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
L. Jeśmanowicz. Sur l'unicité des séries de Schlömilch . . . . .	43
St. J. Thugutt. Hauptbestandteile des Meteorits von Łowicz in chemischer Beziehung . . . . .	60
S. Jaskólski. Untersuchung undurchsichtiger Bestandteile des Meteorits von Łowicz im auffallenden Lichte . . . . .	62
W. Lampe et M. Trenknerówna. Les synthèses de quelques oxydérivés du coumarine- $\alpha$ -carbonil-cinnamoilméthane . . . . .	63
M. Kołaczowska. Mikroskopische Untersuchung des Meteorits in Łowicz . . . . .	66
W. Wawryk. Etude pétrographique sur les gès de Żurawno . . . . .	67
R. Kozłowski. Informations préliminaires sur les Graptolithes du Tremadoc de la Pologne et sur leur portée théorique . . . . .	69
W. Bargieł et L. Wertenstein. Comparaison des neutrons produits dans le béryllium par les rayons $\alpha$ et par les rayons $\gamma$ du $RaC$ . . . . .	70
L. Wertenstein et W. Bargieł. Comparaison du mécanisme du ralentissement des neutrons produits dans le béryllium par les rayons $\alpha$ et les rayons $\gamma$ z $RaC$ . . . . .	82
St. J. Thugutt. Über die Einwirkung wässriger saurer schwefelsaurer Kalilösung auf Leucit . . . . .	86
J. Cichocki. Versuch einer Bestimmung des Radiumgehaltes im Meteorit von Łowicz . . . . .	87



**SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ  
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO**  
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

---

**Posiedzenie**

z dnia 28 kwietnia 1938 r.

L. Jeśmanowicz.

**O jednoznaczności szeregów Schlömilcha.**

Komunikat przedstawiony przez p. A. Zygmunda dnia 28 kwietnia 1938 r.

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej dowodzi się twierdzenia, iż każdy zbiór jednoznaczności dla szeregów trygonometrycznych o współczynnikach zmierzających do zera jest również zbiorem jednoznaczności dla szeregów Schlömilcha o współczynnikach spełniających odpowiednie warunki. Dowód wykorzystuje pewne równanie całkowe, którego szczególny przypadek był rozważany przez Schlömilcha.

L. Jeśmanowicz.

**Sur l'unicité des séries de Schlömilch.**

Mémoire présenté par M. A. Zygmund dans la séance du 28 avril 1938.

I

Ce travail est consacré au problème en partie résolu par M. A. Zygmund dans la publication „Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux, II”<sup>1)</sup>, où l'auteur considère les séries de Schlömilch d'ordre zéro et convergentes vers zéro. Le but de ce travail se réduit ainsi à l'extention du résultat obtenu par M. Zygmund aux séries de Schlömilch d'ordre arbitraire et convergentes vers une fonction qui satisfait à quelques conditions d'intégrabilité.

---

<sup>1)</sup> Zygmund [2].

La façon dont les séries de Schlömilch se comportent n'étant pas trop différente de celle des séries de Bessel, nous nous sommes servis des méthodes qui sont utilisées par M. Zygmund pour résoudre le problème analogue pour les séries de Bessel. En outre nous avons fait usage de la théorie de la multiplication formelle des séries trigonométriques que l'on peut trouver dans la première partie du travail mentionné de M. Zygmund<sup>1)</sup>.

D'autre part nous avons emprunté quelques idées au travail de M. R. G. Cooke „On the theory of Schlömilch series”<sup>2)</sup>; en particulier nous en avons tiré presque toutes les formules pour les fonctions de Bessel et de Struve.

## II

1. Nous appelons *série de Schlömilch* toute série de la forme:

$$(1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m J_\nu(mx) + b_m \mathbf{H}_\nu(mx)}{(\frac{1}{2}mx)^\nu},$$

où  $J_\nu(x)$  et  $\mathbf{H}_\nu(x)$  désignent respectivement les fonctions de Bessel et de Struve d'ordre  $\nu$ ; sur  $\nu$  on a la restriction suivante:

$$(2) \quad |\nu| < \frac{1}{2}.$$

Les fonctions mentionnées peuvent être définies par la formule<sup>3)</sup>:

$$(3) \quad \frac{x^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^{\pi/2} e^{ix \sin \varphi} \cos^{2\nu} \varphi \, d\varphi = J_\nu(x) + i \mathbf{H}_\nu(x).$$

Il est commode d'introduire la fonction:

$$(4) \quad V_\nu(x) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^{\pi/2} e^{ix \sin \varphi} \cos^{2\nu} \varphi \, d\varphi.$$

On a évidemment:

$$V_\nu(0) = 1, \quad V_\nu(-x) = \bar{V}_\nu(x),$$

$$\frac{J_\nu(x)}{(\frac{1}{2}x)^\nu} = \frac{V_\nu(x) + V_\nu(-x)}{2}, \quad \frac{\mathbf{H}_\nu(x)}{(\frac{1}{2}x)^\nu} = \frac{V_\nu(x) - V_\nu(-x)}{2i}.$$

<sup>1)</sup> Zygmund [1].

<sup>2)</sup> Cooke [1].

<sup>3)</sup> Watson [1] 48 (5); 328 (1).

En posant

$$(5) \quad c_m = a_m - ib_m, \quad c_{-m} = \bar{c}_m, \quad c_0 = 0,$$

nous pouvons écrire la série (1) sous la forme complexe

$$(6) \quad \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_\nu(mx) \quad (c_0=0),$$

où l'on ne considère que les sommes partielles symétriques.

Quant aux propriétés de la fonction  $V_\nu(x)$  il est facile de vérifier les deux formules récurrentes (où  $K$  est une constante arbitraire)

$$(7) \quad \frac{d}{dx} x^{2\nu+2} V_{\nu+1}(Kx) - 2x^{2\nu+1} V_\nu(Kx) = 0,$$

$$(8) \quad \frac{2}{K^2} \frac{d}{dx} V_\nu(Kx) + x V_{\nu+1}(Kx) = \frac{1}{K} \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} + \nu)}$$

et de prouver que  $V_\nu(x)$  satisfait à l'équation différentielle:

$$(9) \quad y'' + \frac{2\nu+1}{x} y' + y = \frac{1}{x} \cdot \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)}.$$

2. Pour les fonctions de Bessel et de Struve on a les expressions asymptotiques (pour  $x \rightarrow +\infty$ )

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos z + \frac{1-4\nu^2}{8x} \sin z + \frac{\alpha_\nu(x)}{x^2} \right\},$$

$$H_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin z - \frac{1-4\nu^2}{8x} \cos z + \frac{\beta_\nu(x)}{x^2} \right\} + \frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} + \xi_\nu(x) x^{\nu-3},$$

où  $z = x - \pi\nu/2 - \pi/4$  et  $\alpha_\nu(x)$ ,  $\beta_\nu(x)$  et  $\xi_\nu(x)$  sont bornés pour  $x > \varepsilon$  avec leurs premières dérivées. Nous avons ainsi pour la fonction  $V_\nu(x)$  et pour  $x \rightarrow +\infty$  l'expression suivante:

$$(10) \quad V_\nu(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}x)^{-\nu-\frac{1}{2}} \left\{ e^{iz} + \frac{1-4\nu^2}{8xi} e^{iz} + \frac{\gamma_\nu(x)}{x^2} \right\} + \frac{1}{x} \cdot \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} + \delta_\nu(x) x^{-3},$$

où  $\gamma_\nu(x)$  et  $\delta_\nu(x)$ , ainsi que  $\gamma'_\nu(x)$  et  $\delta'_\nu(x)$ , sont bornés en module pour  $x > \varepsilon$ . En particulier:

$$(11) \quad V_\nu(x) = O(x^{-\nu-\frac{1}{2}}).$$

3. Dans la suite nous aurons besoin de l'équation intégrale dans laquelle la fonction  $f(x)$  est supposée partout dérivable et  $F(x)$  est la fonction cherchée:

$$(12) \quad f(x) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} \int_0^{\pi/2} F(x \sin \varphi) \cos^{2\nu} \varphi \, d\varphi, \quad |\nu| < \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier immédiatement que la solution de cette équation est de la forme:

$$(13) \quad F(x) = f(0) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1} \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu} \varphi \{f(x \sin \varphi) - f(0)\}].$$

En comparant les formules (4) et (12) nous concluons de (13) que l'on a l'identité:

$$(14) \quad e^{ix} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1} \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu} \varphi V_\nu(x \sin \varphi)].$$

Il suffit de dériver la relation (14) et d'appliquer l'équation différentielle (9) pour obtenir la formule<sup>1)</sup>

$$(15) \quad \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi V_\nu(x \sin \varphi) \, d\varphi,$$

valable pour  $|\nu| < \frac{1}{2}$ .

4. Considérons la série (6) uniformément convergente dans l'intervalle  $(-\pi, \pi)$  vers une fonction  $f(x)$ . L'expression

$$(16) \quad \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi f(x \sin \varphi)$$

est alors intégrable dans l'intervalle  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Nous avons ainsi:

$$(18) \quad f(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_\nu(mx).$$

Si dans l'égalité (18) nous posons  $x \sin \varphi$  au lieu de  $x$  et si nous multiplions ses termes par  $\sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi$  et intégrons terme

<sup>1)</sup> Comparer Cooke [1] p. 208.



à terme dans  $(0, \pi/2)$ , nous obtiendrons — en vertu de (15) —

$$(19) \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^{\pi/2} f(x \sin \varphi) \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m (e^{imx} - 1)}{imx},$$

où toujours  $c_0 = 0$ . En posant

$$(20) \quad \Phi(x) = \int_0^{\pi/2} f(x \sin \varphi) \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi \, d\varphi,$$

nous trouvons — la série (19) étant une série trigonométrique — les formules pour les coefficients<sup>1)</sup>:

$$(21) \quad c_m = \frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x \Phi(x) e^{-imx} \, dx$$

$$(22) \quad -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{im} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x \Phi(x) \, dx.$$

5. S'il existe une fonction  $f(x)$  telle que les coefficients de la série (6) soient donnés par les formules (21), nous appellerons cette série le développement de Fourier-Schlömilch de  $f(x)$ . Dans le cas où les coefficients  $c_m$  sont arbitraires nous appellerons la série (6) tout simple — série de Schlömilch.

### III

1. Pour les séries de Fourier-Schlömilch M. Cooke<sup>2)</sup> a démontré que leurs coefficients sont  $o(m^{\frac{1}{2}+\nu})$ . D'autre part nous pouvons énoncer le

**Lemme I.** *Si la série de Schlömilch (6) est convergente dans un ensemble de mesure positive, intérieur à l'un des intervalles  $(-\pi, 0)$  ou  $(0, \pi)$ , ses coefficients sont  $o(m^{\frac{1}{2}+\nu})$ .*

Pour la démonstration il suffit d'écrire la série (6) sous la forme (1) et puis, en se servant des formules asymptotiques pour

<sup>1)</sup> Comparer Cooke [1] p. 209.

<sup>2)</sup> Cooke [1] p. 211.

les fonctions  $J_\nu(x)$  et  $H_\nu(x)$  d'appliquer le même raisonnement qui donne la proposition bien connue de Cantor-Lebesgue pour les séries trigonométriques <sup>1)</sup>.

2. La série de Fourier-Schlömilch de  $f(x)$  se comporte — ce qui résulte des raisonnements de M. Cooke <sup>2)</sup> — d'une façon complètement analogue au développement de  $f(x)$  en série de Fourier. Quant aux séries de Schlömilch nous avons le

**Lemme II.** Soit  $g(x)$  une fonction de période  $2\pi$  et continue avec quelques-unes de ses dérivées dans l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ ; alors la série

$$\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_\nu(mx) g(x) \quad (c_0=0)$$

est uniformément équiconvergente dans chacun des intervalles  $(-\pi+\delta, -\delta)$  ou  $(\delta, \pi-\delta)$ ,  $\delta > 0$ , avec une série trigonométrique

$$\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m e^{imx}$$

à coefficients tendants vers 0, sous les deux conditions sur les coefficients  $c_m$ :

$$1^0 \quad c_m = o(m^{\frac{1}{2}+\nu})$$

$$2^0 \quad \text{la série } -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{im} = \sum_1^{+\infty} \frac{b_m}{m} \text{ est convergente.}$$

Démonstration <sup>3)</sup>. Considérons par exemple l'intervalle  $(\delta, \pi-\delta)$ . En nous servant de la formule asymptotique pour la fonction  $V_\nu(x)$  nous pouvons écrire formellement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum c_m V_\nu(mx) g(x) &= \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} g(x) \left[ \sum c_m m^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{iz_m} + \right. \\ &+ \frac{1-4\nu^2}{8xi} \sum c_m m^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{iz_m} + \frac{1}{x^2} \sum c_m m^{-2\nu-\frac{5}{2}} \gamma_\nu(mx) \left. \right] + \\ &+ \frac{g(x)}{x} \cdot \frac{2i}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} \sum \frac{c_m}{m} + \frac{g(x)}{x^3} \sum c_m \delta_\nu(mx) m^{-3}, \end{aligned}$$

où  $z_m = mx - \pi\nu/2 - \pi/4$ .

<sup>1)</sup> Voir p. ex. Zygmund [3], p. 267.

<sup>2)</sup> p. 213.

<sup>3)</sup> Comparer la démonstration du lemme analogue pour les séries de Legendre, Zygmund [1].

Posons pour simplifier l'écriture:

$$g_1(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} g(x), \quad g_2(x) = \frac{1-4\nu^2}{8xi} g_1(x)$$

$$g_3(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{g(x)}{x^2}, \quad g_4(x) = -\frac{g(x)}{x} \cdot \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)},$$

$$g_5(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

Nous aurons alors:

$$\frac{1}{2} \sum c_m V_\nu(mx) g(x) = g_1(x) \sum c'_m e^{imx} + g_2(x) \sum c''_m e^{imx} +$$

$$+ g_3(x) \sum \frac{c''_m}{m^2} \gamma_\nu(mx) + g_4(x) \sum \frac{c_m}{im} +$$

$$+ g_5(x) \sum c_m^{(\nu)} \frac{\delta_\nu(mx)}{m^3} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5.$$

où:

$$c'_m = o(1), \quad c''_m = o(m^{-1}), \quad c'''_m = o(1), \quad c_m^{(\nu)} = o(1).$$

Il est évident que les fonctions  $g_i(x)$  se comportent régulièrement dans l'intervalle  $(\delta, \pi - \delta)$ . Désignons par  $\lambda_i(x)$  les fonctions de période  $2\pi$  qui sont suffisamment régulières et égales à  $g_i(x)$  dans ces intervalles. De la théorie de la multiplication formelle des séries trigonométriques il résulte que les séries  $S_1$  et  $S_2$  sont uniformément équiconvergentes dans les intervalles mentionnés avec les produits formels:

$$\mathfrak{S}[\lambda_i(x)] \sum c_m^{(i)} e^{imx}, \quad i=1,2$$

où  $\mathfrak{S}[\lambda]$  désigne le développement de  $\lambda(x)$  en série de Fourier. La fonction  $\gamma_\nu(x)$  étant bornée en module pour  $|x| > \varepsilon$ , la série

$$h(x) = \sum \frac{c_m}{m^2} \gamma_\nu(mx)$$

est absolument convergente. De plus — la fonction  $h(x)$  pour  $|x| > \varepsilon$  vérifie la condition de Lipschitz avec un exposant positif<sup>1)</sup>.

Autrement dit — il existe une fonction  $h^*(x)$  continue et de période  $2\pi$  qui coïncide avec  $h(x)$  dans l'intervalle  $(\delta, \pi - \delta)$  et telle que  $\mathfrak{S}[h^*(x)]$  converge uniformément; l'équiconvergence de la série  $S_3$  avec une série trigonométrique est donc démontrée. Dans les cas des séries  $S_4$  et  $S_5$  la démonstration — en vertu de l'hypothèse 2<sup>o</sup> — ne présente aucune difficulté.

<sup>1)</sup> Voir le raisonnement analogue chez Zygmund [1], p. 122.

IV

1. Nous dirons que les coefficients  $c_m$  de la série de Schlömilch satisfont à la condition (S), si l'on a:

$$1^0 \quad c_m = o(m^{\nu + \frac{1}{2}}),$$

$$2^0 \quad \text{la série } -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{m i} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m} \text{ est convergente.}$$

2. Si toute série de Schlömilch à coefficients  $c_m$ , satisfaisant à la condition (S), sommable vers zéro par un procédé de sommation  $M$  en dehors d'un ensemble  $E$  situé dans  $(-\pi, \pi)$ , est une série de Fourier-Schlömilch, nous appellerons  $E$  un ensemble d'unicité du type  $U_M$  pour les séries de Schlömilch.

Si dans cette définition nous remplaçons la condition de sommabilité vers zéro par celle de sommabilité vers une fonction arbitraire et finie  $f(x)$  où  $t^{2\nu+1}f(t)$  est intégrable dans  $(-\pi, \pi)$ , l'ensemble  $E$  sera nommé un ensemble d'unicité du type  $U'_M$ .

Si enfin la fonction vers laquelle la série de Schlömilch est sommable est finie et satisfait seulement à la condition  $x^{2\nu+1}f(x) \geq \varphi(x)$ , où  $\varphi(x)$  est intégrable dans  $(-\pi, \pi)$ , l'ensemble  $E$  sera nommé  $U''_M$ <sup>1)</sup>.

**3. Théorème I.** Toute ensemble  $U_M$  pour les séries trigonométriques à coefficients  $o(1)$  est un  $U_M$  pour les séries de Schlömilch à coefficients qui satisfont à la condition (S).

Ce théorème est démontré par M. Zygmund dans le cas particulier où  $\nu=0$  et  $b_m=0$ . Il découle immédiatement du théorème suivant:

**Théorème II.** Toute ensemble  $U'_M$  pour les séries trigonométriques est un  $U'_M$  pour les séries de Schlömilch dont les coefficients satisfont à la condition (S).

Démonstration. Supposons que la série (6) à coefficients  $c_m = o(m^{\frac{1}{2} + \nu})$  et tels que la série  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m}$  est convergente est sommable par un procédé  $M$  en dehors de  $E$ , où  $E$  est  $U'_m$  pour les

<sup>1)</sup> Ces définitions analogues à celles des ensembles  $U_M, U'_M, U''_M$  pour les séries trigonométriques coefficients tendant vers zéro (cf. Zygmund [1], [2]).

séries trigonométriques, vers une fonction  $f(x)$  telle que  $x^{2\nu+1}f(x)$  est intégrable dans  $(-\pi, \pi)$ . Nous allons démontrer que (6) est une série de Fourier-Schlömilch c'est-à-dire que ses coefficients sont donnés par les formules (21). Nous avons donc

$$(23) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{M}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_\nu(mx) \\ x^{2\nu+1}f(x) &= \frac{M}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_\nu(mx) x^{2\nu+1}. \end{aligned}$$

En vertu du lemme II la série (23) est uniformément équiconvergente avec une série trigonométrique (à coefficients tendant vers 0) dans chacun des intervalles  $(-\pi + \delta, -\delta)$  et  $(\delta, \pi - \delta)$ . Mais les séries trigonométriques à coefficients  $o(1)$  sommables en dehors d'un ensemble du type  $U'_M$ , situé dans un intervalle  $(a, b)$ , vers une fonction intégrable peuvent être intégrées terme à terme à l'intérieur de  $(a, b)$  et les séries intégrées sont uniformément convergentes dans l'intervalle  $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , vers l'intégrale indéfinie de cette fonction. Il est donc permis d'intégrer la série (23) terme à terme dans l'intervalle  $(x_0, x)$  où  $0 < x_0 < x < \pi$ . En nous servant de la formule (7) nous aurons

$$(24) \quad \int_{x_0}^x t^{2\nu+1}f(t) dt = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m x^{2\nu+2} V_{\nu+1}(mx) - C_1$$

Pour vérifier que la série

$$C_1 = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m x_0^{2\nu+2} V_{\nu+1}(mx_0)$$

est convergente, il suffit de multiplier les deux membre de (24) par  $x^{-2\nu-1}$  et d'intégrer l'expression obtenue dans  $(x_0, x)$ ; en vertu de (8) on a

$$(25) \quad \begin{aligned} & \int_{x_0}^x u^{-2\nu-1} du \int_{x_0}^u t^{2\nu+1}f(t) dt = \\ & = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \left[ \frac{1}{m} \frac{2xi}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)} - \frac{2}{m^2} V_\nu(mx) \right]_{x_0}^x - \frac{C_1(x^{-2\nu} - x_0^{-2\nu})}{2\nu}. \end{aligned}$$

Les séries  $\sum \frac{c_m}{m^2} V_\nu(mx)$  et  $x \sum \frac{c_m}{mi}$  étant convergentes les deux premiers membres de (25) sont bornés, d'où résulte que la série  $C_1$  est convergente. On peut donc écrire au lieu de (24):

$$(26) \quad \int_0^x t^{2\nu+1} f(t) dt = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m V_{\nu+1}(mx) x^{2\nu+2} - C.$$

Nous prouverons dans un instant que  $C=0$ . Multiplions les membres de (26) par  $x^{-2\nu-1}$  et intégrons terme à terme dans  $(x, \pi)$ :

$$(27) \quad \int_x^\pi u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{2\nu+1} f(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \sum \frac{c_m}{m^2} V_\nu(mx) + \frac{C_0 x}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} - \frac{Cx^{-2\nu}}{2\nu} + D_1$$

où nous avons posé:

$$(28) \quad \frac{C_0}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{im} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m}.$$

Les constantes  $C$  et  $D_1$  étant finies nous pouvons écrire (27) sous la forme:

$$(29) \quad \int_0^x u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{2\nu+1} f(t) dt = \\ = -\frac{1}{2} \sum \frac{c_m}{m^2} V_\nu(mx) + \frac{C_0 x}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} - \frac{Cx^{-2\nu}}{2\nu} + D.$$

Nous appliquerons maintenant un lemme<sup>1)</sup> de M. Zygmund démontré pour les séries de Bessel; mutatis mutandis on peut le formuler pour les séries de Schlömilch sous la forme suivante:

*Si  $\alpha_m = o(m^{-\frac{3}{2}})$ , la somme de la série  $\sum \alpha_m V_\nu(mx)$  pour  $x \rightarrow +0$  est de la forme  $K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$ , où  $K$  désigne une constante.*

Nous avons donc de (29) (si  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ ) et de (27) (si  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ) que

$$(30) \quad o(x^{-2\nu}) = K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu}) + \frac{C_0 x}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} - \frac{Cx^{-2\nu}}{2\nu} + D,$$

pour  $x \rightarrow +0$ . Soit  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ; on en déduit que  $C=0$ .

<sup>1)</sup> Zygmund [2] p. 78.

Dans le cas  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$  nous avons  $K+D=0$ , ce qui nous donne

$$\frac{C}{2\nu} = o(1) + o(x^{\nu+\frac{1}{2}}) + \frac{C_0 x^{2(\nu+\frac{1}{2})}}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}$$

d'où  $C=0$ . D'après tout cela (en nous bornant pour simplicité au cas  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ ) nous avons:

$$(31) \quad \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{m^2} V_\nu(mx) = \\ = - \int_0^x u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{2\nu+1} f(t) dt + \frac{C_0 x}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} + D$$

où en général  $D$  est différent de 0. Cette formule, qui a été démontrée pour  $0 \leq x \leq \pi$ , reste vraie pour  $-\pi \leq x \leq 0$ . Il est facile de vérifier que dans le cas de l'uniforme convergence de la série (6) on a:

$$(32) \quad D = \frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{m^2} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2}.$$

Posons

$$(33) \quad g(x) = \int_0^x u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{2\nu+1} f(t) dt,$$

$$(34) \quad \Psi(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi g(x \sin \varphi) d\varphi.$$

En vertu de l'uniforme convergence de la série (31) on a d'après les formules (21) pour  $c_m \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\nu-\frac{1}{2}) / im^3$  l'expression

$$\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} dx \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1} \varphi \cos^{-2\nu} \varphi \left\{ -g(x \sin \varphi) + \frac{C_0 x \sin \varphi}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)} + D \right\} d\varphi \\ = - \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \Psi(x) dx - \frac{(-1)^m}{mi} C_0 - 2D \Gamma(\nu+1) (-1)^m.$$

Donc

$$(35) \quad \frac{c_m}{m^2} + \frac{(-1)^m}{mi} C_0 + 2D \Gamma(\nu+1) (-1)^m = \\ = - \frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu-\frac{1}{2})} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \Psi(x) dx.$$

Il nous reste à analyser le dernier membre dans (35). Dans ce but introduisons une fonction  $G(x)$  qui satisfait à l'équation connue

$$(36) \quad g(x) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} G(x \sin \theta) \cos^{2\nu} \theta \, d\theta,$$

où  $g(x)$  est donné par (33). D'après la formule (13) la fonction  $G(x)$  est de la forme:

$$(37) \quad G(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi g(x \sin \varphi)].$$

La régularité de la fonction  $G(x)$  nous permet de la développer en série de Fourier uniformément convergente dans  $(-\pi, \pi)$ :

$$(38) \quad G(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{inx},$$

où comme toujours:  $A_{-n} = \bar{A}_n$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\nu+1)} \Psi(x) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi/2} g(x \sin \varphi) \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} G(x \sin \theta \sin \varphi) \cos^{2\nu} \theta \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} \theta \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-inx \sin \varphi \sin \theta} \right] d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi \, d\varphi \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \int_0^{\pi/2} e^{-inx \sin \varphi \sin \theta} \cos^{2\nu} \theta \, d\theta \right] = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}{2} V_\nu(nx \sin \varphi) \right] d\varphi = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos^{-2\nu}\varphi V_\nu(x \sin \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{e^{inx} - 1}{inx} \end{aligned}$$



ou

$$(39) \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \Psi(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{e^{inx}-1}{inx}.$$

Mais les  $A_n$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $G(x)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\Gamma(\nu+1)A_n &= \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\Gamma(\nu+1) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} G(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi g(x \sin \varphi)] dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \left\{ \left[ -\frac{e^{-inx}}{in} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi g(x \sin \varphi)] \right]_{-\pi}^{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in} \frac{d}{d\varphi} \left[ \sin^{2\nu}\varphi \frac{d}{dx} g(x \sin \varphi) \right] dx \right\} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \left\{ -\frac{(-1)^n}{in} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi \{g(\pi \sin \varphi) - g(-\pi \sin \varphi)\}] \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in} \frac{d}{d\varphi} \left[ x^{-2\nu-1} \int_0^{x \sin \varphi} t^{2\nu+1} f(t) dt \right] dx \right\} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \left\{ -\frac{(-1)^n}{in} \frac{d}{d\varphi} \left[ \sin^{2\nu}\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dx} g(x \sin \varphi) dx \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{-inx}}{in} \sin^{2\nu+1}\varphi \cos \varphi f(x \sin \varphi) dx \right\} = \\ &= -\frac{(-1)^n}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x \Phi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{-inx}}{in} \Phi(x) dx, \end{aligned}$$

où  $\Phi(x)$  est donné, par (20). En particulier

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(\nu+1)A_0 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(\nu+1) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) dx = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi g(x \sin \varphi)] dx = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \left\{ \left[ x \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu}\varphi g(x \sin \varphi)] \right]_{-\pi}^{\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{d}{d\varphi} \left[ \sin^{2\nu}\varphi \frac{d}{dx} g(x \sin \varphi) \right] dx \right\} = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu+1}\varphi} \left\{ \pi \frac{d}{d\varphi} [\sin^{2\nu+1}\varphi \{g(\pi \sin \varphi) + g(-\pi \sin \varphi)\}] - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{d}{d\varphi} \left[ x^{-2\nu-1} \int_0^{x \sin \varphi} t^{2\nu-1} f(t) dt \right] dx \right\} = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^{2\nu-1}\varphi} \left\{ \pi \frac{d}{d\varphi} \left[ \sin^{2\nu}\varphi \left\{ \int_0^{-\pi} \frac{d}{dx} g(x \sin \varphi) dx + \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} g(x \sin \varphi) dx \right\} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin^{2\nu+1}\varphi \cos \varphi f(x \sin \varphi) dx \right\} = \\
 &= \pi \int_0^{-\pi} x \Phi(x) dx + \pi \int_0^{\pi} x \Phi(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \Phi(x) dx = \\
 &= 2 \int_{-\pi}^0 \frac{-\pi-x}{2} x \Phi(x) dx + 2 \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} x \Phi(x) dx = \\
 &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(x) x \Phi(x) dx
 \end{aligned}$$

où nous avons désigné par  $\lambda(x)$  une fonction égale à  $\frac{-\pi-x}{2}$  dans l'intervalle  $(-\pi, 0)$  et à  $\frac{\pi-x}{2}$  dans  $(0, \pi)$ . En tenant compte de (35) nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{c_m}{m^2} + \frac{(-1)^m}{mi} C_0 + 2D\Gamma(\nu+1)(-1)^m = \\ & = -\frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \Psi(x) dx = \\ & = -\frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \cdot \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \left[ \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{e^{inx}-1}{inx} \right] dx = \\ & = -im\Gamma(\nu+1) \left[ -\frac{(-1)^m}{mi} A_0 + \frac{A_m}{im} \right] = \\ & = -\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \left[ -2(-1)^m \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(x)x\Phi(x) dx - \frac{(-1)^m}{im} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) dx + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{im} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \Phi(x) dx \right], \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} \frac{c_m}{m^2} &= \frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{-imx}}{m^2} \Phi(x) dx - \\ & - \frac{(-1)^m}{mi} \left[ C_0 - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) dx \right] + \\ & + (-1)^m \left[ \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(x)x\Phi(x) dx - 2D\Gamma(\nu+1) \right] \end{aligned}$$

ou autrement:

$$\begin{aligned} (40) \quad c_m &= \frac{im}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-imx} \Phi(x) dx + \\ & + 2mi \left[ \frac{C_0}{2} - \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) dx \right] + \\ & + 2m^2(-1)^m \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(x)x\Phi(x) dx - D\Gamma(\nu+1) \right]. \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse  $c_m = o(m^{\frac{1}{2} + \nu})$ . Le premier terme du second membre de (40) étant le coefficient de Fourier-Schlömilch d'une fonction intégrable est  $o(m^{\nu + \frac{1}{2}})$ . Nous trouvons donc:

$$(41) \quad \frac{C_0}{2} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) dx$$

$$(42) \quad \Gamma(\nu + 1)D = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(x)x\Phi(x) dx$$

et les coefficients  $c_m$  s'expriment-ils par les formules (21).

Il est facile d'établir le sens de deux relations (41) et (42). D'après la relation (28):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) dx$$

ce qui est en accord avec la formule (22).

D'autre part on sait que:

$$\lambda(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

Nous deduisons alors de (42)

$$\begin{aligned} D\Gamma(\nu + 1) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x\Phi(x) \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} \right] dx = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx \Phi(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2}. \end{aligned}$$

Le résultat obtenu coïncide donc avec la formule (32). Ces remarques achèvent la démonstration.

**Théorème III.** *Tout ensemble E situé dans  $(-\pi, \pi)$  qui est  $U''_M$  pour les séries trigonométriques l'est aussi pour les séries de Schlömilch dont les coefficients vérifient la condition (S).*

Démonstration. Les raisonnements analogues à ceux dont nous avons fait usage dans la démonstration du théorème II nous donnent:

$$(43) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{m^2} V_\nu(mx) = - \int_x^\pi u^{-2\nu-1} du \int_u^\pi t^{2\nu+1} f(t) dt + Ax + Bx^{-2\nu} + C.$$

Nous avons dit déjà que le premier membre dans (43) est de la forme  $K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$  pour  $x \rightarrow +0$ . Si  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ , il résulte de (43) que  $t^{2\nu+1}f(t)$  est intégrable dans  $(0, \pi)$ . La même conclusion est valide pour l'intervalle  $(-\pi, 0)$ . Les conditions du théorème II vérifiées la série (6) est celle de Fourier-Schlömilch. Si dans le cas  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  la fonction  $t^{2\nu+1}f(t)$  n'était pas intégrable, on aurait:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_x^\pi t^{2\nu+1} f(t) dt = +\infty$$

et le second membre dans (43) serait d'ordre plus élevé que  $x^{-2\nu}$ , d'où contradiction.

#### Travaux cités

- R. G. Cooke [1] „On the theory of Schlömilch series“. Proceedings of the London Mathematical Society, 1928, vol. 28.  
 G. N. Watson [1] „Theory of Bessel Functions“, 1922.  
 A. Zygmund „Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux“  
 [1] Studia Mathematica, vol. 11, 1930. [2] Prace Matematyczno-Fizyczne 1932, vol. 39. [3] Trigonometrical Series (Monografie Matematyczne, V), Warszawa 1935.

St. J. Thugutt.

#### O składzie chemicznym pewnych minerałów meteorytu łowickiego.

Komunikat przedstawiony dnia 28 kwietnia 1938 r.

#### STRESZCZENIE.

W rzędzie głównych składników meteorytu łowickiego widzimy: kamacyt, oliwin, bronzyt, diopsyd i anortyt.

W żelazie meteorycznym znaleziono: 91.09<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Fe, 8.51<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Ni, 0.50<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Co. Pozostałość nierozpuszczalna w chlorowodorze wyniosła 0.53<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, w czym 0.38<sup>0</sup>/<sub>0</sub> SiO<sub>2</sub>.

Żeby otrzymać materiał do analizy chemicznej przydatny, wypadło krzemiany wybierać ręką pod lupą dwuokularową.

- I. Anortyt.  $n_{\beta}=1.579$ . Kąt zaćmienia na (010) =  $-40^{\circ}15'$ .  
Stosunek An:Ab:Or = 90.02:9.13:1.59.
- II. Oliwin. c. wł. = 3.4065;  $1.684 > n_{\beta} > 1.67$ .
- III. Bronzyt.  $1.695 > n_{\beta} > 1.689$ .
- IV. Diopsyd.  $1.684 > n_{\beta} > 1.677$  (z domieszką bronzytu).

	I	II	III	IV
SiO <sub>2</sub>	46.14	39.82	51.82	49.19
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	} 33.32	0.86	—	0.99
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>		—	—	—
FeO	—	17.97	16.50	19.31
MnO	—	ślady	1.06	—
CaO	18.78	—	0.97	2.24
MgO	0.36	41.98	30.13	28.90
Na <sub>2</sub> O	1.12	—	—	—
K <sub>2</sub> O	0.28	—	—	—
	<u>100.00</u>	<u>100.63</u>	<u>100.48</u>	<u>100.63</u>

St. J. Thugutt.

**Hauptbestandteile des Meteorits von Łowicz in chemischer Beziehung.**

Note présentée à la séance du 28 Avril 1938.

ZUSAMMENFASSUNG.

Die Analyse des meteorischen Eisens ergab: 91.09<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Fe, 8.51<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Ni, 0.50<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Co. 0.53<sup>0</sup>/<sub>0</sub> blieben in Salzsäure ungelöst, darin 0.38<sup>0</sup>/<sub>0</sub> SiO<sub>2</sub>.

Die Zahlenergebnisse der Analysen von Anorthit, Olivin, Bronzit und Diopsid sind im polnischen Text angeführt.

Stanisław Jaskólski.

**Badanie składników nieprzeźroczystych meteorytu łowickiego  
w świetle odbitym.**

Przedstawił St. J. Thugutt dnia 28 kwietnia 1938 r.

STRESZCZENIE.

Po krótkim megaskopowym opisie meteorytu łowickiego podał autor opis żelaza meteorycznego i jego składników badanych w świetle odbitym bez zastosowania czynników trawiących. Potem porównał strukturę meteorytu z strukturą minerałów nieprzeźroczystych przy i bez użycia czynników trawiących. Wreszcie zwrócił uwagę na ustrój kory zewnętrznej.

Żelazo meteoryczne okazało się kamacytem z małą tylko domieszką tenitu i plesytu. Figur Widmannstättena był brak zupełny. W układzie F. Berwertha byłyby to heksaedryt granokamacytowy.

Pośród bardzo nierównomiernie rozłożonych składników ubocznych wymienić należy: szrajbersyt, chromit, troilit, ilmenit i pewien nieznany dotąd minerał. Strukturę meteoryt ujawnia po części ziarnistą, po części kulistą, emulsyjną. Można też było wyróżnić struktury zniekształcone i ślady struktur eutektycznych. Co do kolejności krystalizacji poszczególnych składników żelazistych, to pierwszy wydzielił się kamacyt, po nim tenit, ostatnim był wreszcie plesyt.

Na pierwotnej powierzchni meteorytu występują dwa rodzaje nierówności: 1) drobne gruzelkowate wypukłości, powstałe na skutek wtórnej przemiany powierzchni w związku z podniesioną temperaturą; 2) palczaste większe zagłębienia (piezoglypty) pochodzenia zapewne pozaziemskiego. Temperatura, którą osiągnął meteoryt w przelocie przez atmosferę, oceniona została na 680—700° C, czyli że nie mogła wiele przekroczyć temperatury przemiany żelaza  $Fe_{\gamma} \rightleftharpoons Fe_{\alpha}$  przy zawartości niklu w granicach 8—10%.

Stanisław Jaskólski.

**Untersuchung undurchsichtiger Bestandteile des Meteorits von Łowicz im auffallenden Lichte.**

Mémoire présentée par M. St. J. Thugutt à la séance du 28 avril 1938.

ZUSAMMENFASSUNG.

Nach kurzer megaskopischer Beschreibung des in Polen bei Łowicz am 12 März 1935 niedergefallenen Mesosiderits charakterisierte der Verf. das Nickeleisen und seine Begleiter mikroskopisch, zuerst ohne Anwendung jeglicher Ätzmittel. Dann verglich er die Struktur des Meteorits mit den Strukturen undurchsichtiger Minerale und zwar bei und ohne Anwendung von Ätzmitteln. Schliesslich lenkte er seine Aufmerksamkeit auf die äussere Meteoritrinde.

Das Nickeleisen erwies sich als brecciöser Kamazit, dem nur kleine Mengen von Taenit und Plessit beigemischt waren. Widmannstättensche Figuren fehlten. Nach festgestellten Kennzeichen wäre der Meteorit als körniger Granokamazit-Hexaedrit aufzufassen.

Unter den ungleichmässig verteilten Akzessorien sah man den Schreibersit neben spärlichem Chromit, Troilit, Ilmenit und einem näher nicht bestimmbarern Minerale. Die Struktur des Meteorits ist z. T. körnig, z. T. emulsionsartig. Auch deformierte Emulsionsstrukturen wurden im Eisen des Meteorits nachgewiesen. Beim Kristallisationsprozesse als erster wurde Kamazit ausgeschieden, ihm folgte der Taenit und als letzter schied sich der Plessit aus.

Auf der Meteoritoberfläche sind Ausbuchtungen sekundärer Natur neben grösseren Vertiefungen gewiss ausserirdischer Herkunft (Piezoglypten) zu sehen. Unmittelbar unter der Schmelzrinde fanden Umkristallisationen im festen Zustande statt. Die Temperatur, zu welcher der Meteorit in der Atmosphäre erhitzt wurde, liess sich auf 680—700° C abschätzen. Nämlich der Umwandlungspunkt von  $Fe_{\gamma} \rightleftharpoons Fe_{\alpha}$  wurde hierbei nicht überschritten.



## Posiedzenie

z dnia 17 maja 1938 r.

W. Lampe i M. Trenknerówna.

### Syntezy pewnych oksypochodnych kumaryno- $\alpha$ -karbonylo-cynamoilometanu.

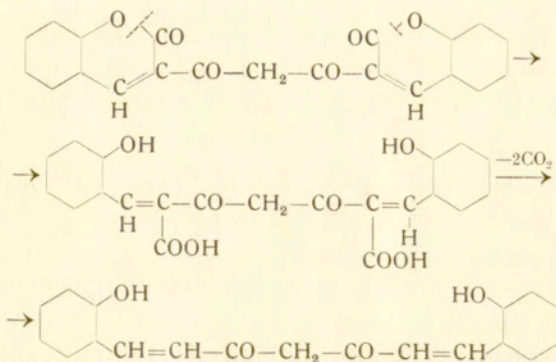
Przedstawił W. Lampe dnia 17 maja 1938 r.

### Les synthèses de quelques oxydérivés du coumarine- $\alpha$ -carbonil-cinnamoylméthane.

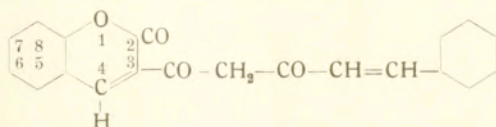
Mémoire présenté par M. V. Lampé dans la séance de 17 mai 1938.

#### STRESZCZENIE.

W Zakładzie Chemii Organicznej Uniwersytetu prowadzone są od paru lat badania nad zachowaniem się  $\beta$ -dwuketonów, — zawierających pierścień kumarynowy, — względem różnych czynników chemicznych rozszczepiających układ  $\alpha$ -pyronowy. Studia te zmierzają do wypracowania nowej syntezy oksypochodnych dwucynamoilometanu; przypuszczalny jej przebieg zachodziłby w myśl wzorów następujących:



Badania nad rozszczepieniem dwu (kumaryno- $\alpha$ -karbonylo)-metanu [W. Lampe i M. Trenknerówna Roczn. Chem. 14, 1231 (1934)] nie dały wyników dodatnich. Podczas gdy zasady, używane zwykle jako podstawowy czynnik do odbudowywania kumaryny, działają przede wszystkim rozkładająco na łańcuch  $\beta$ -dwuketonowy, to inne substancje, jak  $\text{PCl}_5$  lub  $\text{SOCl}_2$  — w stosowanych przez nas warunkach — nie zmieniają wcale związku. Ponieważ w pochodnych kumaryny posiadających ujemne podstawniki, ugrupowanie  $\alpha$ -pyronu o wiele łatwiej ulega rozszczepieniu, niż w kumarynie [Ber. 22, 1706 (1889)], opracowaliśmy, — korzystając ze współpracownictwa kilku dyplomantów Zakładu — syntezę nie tylko kumaryno- $\alpha$ -karbonylo-cynomoilometanu



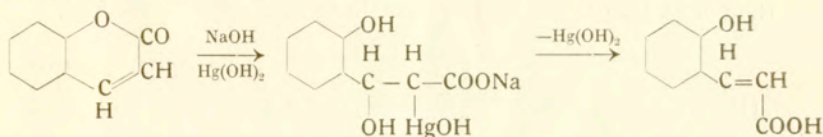
związku krystalizującego się w żółtych pryzmatycznych igłach o. t. t. 193—194<sup>0</sup>, ale i pewnych oksypochodnych tej substancji macierzystej. Posługiwaliśmy się metodą, polegającą na: 1) działaniu chlorku odpowiedniego kwasu karbometoksy-kumarynokarbonowego na sól cynamoiloacetonu i 2) odszczepieniu w powstałym produkcie kondensacji grupy karbometoksylowej. Powstałe dzięki temu związki są zabarwione dość silnie i wykazują niżej podane cechy charakterystyczne

Współpracownik	Pochodna subst. macierzystej	Barwa	Temp. top. związku
H. Zglińska	8-oksy-	cytr.-żółte igły	229—230 <sup>0</sup>
B. Sikorski	7-oksy-	żółte pryzm. igły	242 <sup>0</sup>
H. Mogilnicki	6-oksy-	brązowożółte igły	246—247 <sup>0</sup>
H. Pisanecka	7, 8-dwuoksy-	złocistożółte igielki	244 <sup>0</sup>
J. Mańkowski	6, 7-dwuoksy-	pomar.-żółte igielki	252 <sup>0</sup>

Wbrew oczekiwaniom zbudowane przez nas oksypochodne okazały się połączeniami trwałymi i nie dały się przekształcić w oksypochodne dwucynomoilo-metanu.

Pomimo niepomyślnego wyniku prób dotychczasowych zamierzamy przeprowadzić nowe poszukiwania i zastosować sposób, opisany przez badaczy indyjskich Seshadri i Suryaprakasa Rao

[Chem. Zentr. 1937, I, 2757] a polegający na działaniu HgO i ługiem w temp. normalnej. Przebieg reakcji, w zastosowaniu do kumaryny, uzmysławiają wzory:



Tlenek rtęci dodaje się do podwójnego wiązania w położeniu cis, po czym — gdy nastąpiła transformacja geometryczna — odszczepia się HgO samorzutnie od kwasu, występującego obecnie w odmianie trans.

Praca ogłoszona zostanie w „Rocznikach Chemii”.

Warszawa. Uniwersytet. Zakład Chemii Organicznej.

Maria Kołaczkowska.

### Badania mikroskopowe meteorytu łowickiego.

Przedstawił St. J. Thugutt dnia 17 maja 1938 r.

#### STRESZCZENIE.

Autorka zajęła się na wstępie obliczeniem wzajemnego stosunku składników metalicznych do krzemianów w meteorycie, gdy wiadoma jest waga okazu, jego ciężar właściwy i objętość. Potem badała budowę meteorytu i kolejność wydzielania się składników ze stopu i ich cechy optyczne.

Plagioklas, zdradzający budowę pasową, wykazywał zaćmienie faliste i zawierał obok wrostków troilitu szczególne rurkowate twory złożone z anizotropowej substancji zapewne też plagioklazowej. Trafiały się pośród skaleni trojaki zespolone według praw: karlsbadzkiego, albitowego i Roc Tourné. Oliwiny odznaczały się wysokimi barwami interferencyjnymi i cechą optyczną ujemną. Optycznie ujemny bronzyt wykazywał łupliwość tylko jednokierunkową.

Promienie Röntgena wywoływały fosforescencję zieloną. Promienie pozafioletowe, przynajmniej w sposób widoczny, nie oddziaływały wcale.

Maria Kołaczowska.

**Mikroskopische Untersuchung des Meteorits von Łowicz.**

Note présentée par M. St. J. Thugutt à la séance du 17 Mai 1938.

ZUSAMMENFASSUNG.

Die Verfasserin stellte sich zunächst die Aufgabe das gegenseitige Mengenverhältnis von Eisen zu den Silikaten im Meteorit zu berechnen, wenn das sp. Gew. und der Inhalt eines abgewogenen Handstückes desselben bekannt ist. Dann untersuchte sie die Struktur des Meteorits, die Reihenfolge der Ausscheidung der einzelnen Bestandteile aus der Schmelze und ihre optische Eigenschaften.

Die Plagioklaskristalle wiesen Zonenbau auf und löschten das Licht wellig aus. Ausser reichlichem Troilit führten dieselben charakteristische röhrenförmige anisotrope Feldspateinschlüsse. Es fanden sich darunter nach dem Karlsbader-, Albit- und Roc Tourné-Gesetz verzwillingte Drillinge. Der Olivin war durch hohe Interferenzfarben und negativen optischen Charakter ausgezeichnet. Der optisch negative Bronzit war nur in einer Richtung spaltbar.

Die Röntgenstrahlen führten nach 10-sekundiger Einwirkungsdauer grüne Phosphoreszenz herbei. Die ultravioletten Strahlen waren ohne Wirkung.

---

Włodzimierz Wawryk.

**Z petrografii piaskowca żurawieńskiego.**

Przedstawił St. J. Thugutt dnia 17 maja 1938 r.

STRESZCZENIE.

Należące do senonu piaskowce żurawieńskie zajmują obszar  $25 \times 9$  km. Petrograficznie zbadano dwa profile: holeszowski i kozarski. Makroskopowo można było wyróżnić kilka typów: piaskowce rozsypliwe, małoźwięzłe, zwięzłe i skrzemieniałe. W piaskowcu rozsypliwym stwierdzono na drodze mikroskopowej obecność kwarcu, węglanu wapniowego (pochodzenia organicznego albo też krystalicznego w postaci kalcytu), glaukonitu, limonitu i chalcedonu.

W odmianie małozięzłej występuje kalcyt, kwarzec (z wrostkami rutyłu i cyrkonu), drobnoziarnisty chalcedon, glaukonit i limonit. W piaskowcu zwięzłym o lepszemu wapiennym jest obecny chalcedon, limonit obok śladów glaukonitu, plagioklazu i mikroklinu. Piaskowiec skrzemieniały z otoczką chalcedonową zawiera opal, kalcyt, limonit i glaukonit. Występujące tam krzemienie złożone były przeważnie z kwarcu z lepszem wapniowo-chalcedonowym.

Kwarc z konturami postrzępionymi jest pochodzenia obcego i już jako taki dostał się do basenu sedymentacyjnego. Minerale rzadkie w rodzaju ilmenitu, magnetytu, cyrkonu, rutyłu, turmalinu, staurolitu, cjanitu obok niewielkich ilości granatu, miki i sillimanitu pochodzą również ze złoża wtórnego.

W celu bliższego poznania natury rozlicznych typów piaskowca wykonano 19 analiz chemicznych.

Podczas krzemienia piaskowca lepsze wapienne zostało wypłukane, miejsce jego zajął kwarzec i chalcedon. Źródłem krzemionki były po części igły gąbek, okrzemki i radiolarie, po części skoagulowana krzemionka pochodzenia ziemnego.

Włodzimierz Wawryk.

### **Étude pétrographique sur les grès de Żurawno.**

Note présentée par M. St. J. Thugutt à la séance du 17 mai 1938.

#### **RÉSUMÉ.**

Le grès de Żurawno, d'âge crétacé, occupe une extension d'environ 25 km. Pour faire une étude pétrographique l'auteur a pris des échantillons à Holeszów et à Kozara. Quant à la structure macroscopique de ces grès, on en a distingué plusieurs variétés: grès très incohérents, peu compacts, compacts et silicifiés. Les analyses chimiques ont établi que les roches étudiées se composent pour la plupart de silice et de carbonate de chaux et on y trouve très peu d'alcalis et d'argile. En ce qui concerne les autres minéraux on rencontre dans les coupes minces des roches étudiées des traces de plagioclase et de microcline, de la glauconie généralement avec des traces de transformation, de la limonite, de l'opale et de la calcédoine. Celle-ci est très abondante dans les parties

silicifiées. Les minéraux denses sont représentés surtout par des oxydes de fer et de titane, puis par le zircon, la tourmaline, le rutile, la staurolite. On y trouve aussi des traces de cyanite, de sillimanite et de mica. Les parties silicifiées doivent leur origine à la silification du grès ayant primitivement un ciment calcaire. La silice qui a produit les parties silicifiées est soit d'origine organique (spicules des Eponges), soit inorganique (déposée en même temps que les matériaux clastiques).

---

## Posiedzenie

z dnia 14 czerwca 1938.

Roman Kozłowski.

### Tymczasowe wiadomości o graptolitach z tremadoku Polski i o ich teoretycznym znaczeniu.

Komunikat zgłoszony dnia 14 czerwca 1938 r.

### Informations préliminaires sur les Graptolithes du Tremadoc de la Pologne et sur leur portée théorique.

Note présentée dans la séance du 14 juin 1938.

#### STRESZCZENIE.

Autor przedstawił główne wyniki swych badań nad graptolitami, wydobytymi przezeń ze skały chalcedonowej wieku górno-tremadockiego, występującej w miejscowości Wysoczki pod Bogorią, w Górach Świętokrzyskich.

Badania te, poza tym że dały możliwość opisanie licznych nowych gatunków i ustanowienia nowych rodzajów, rodzin i rzędów, pozwoliły, dzięki wyjątkowo sprzyjającemu stanowi zachowania materiału, wyświetlić szereg problemów z dziedziny morfologii, histologii i ontogenezy graptolitów. Wreszcie dały one możliwość lepszego niż dotychczas zrozumienia natury tych wygasłych zwierząt, które, zdaniem autora, muszą być wydzielone z typu jamochłonów, do którego zazwyczaj są dotąd zaliczane, i umieszczone w grupie *Hemichorda*, obok dziś żyjących *Pterobranchia*.

Notatka wstępna o tych wynikach ogłoszona zostanie w „Annales Musei Zoologici Polonici” za rok 1938, monografia zaś szczegółowa w „Palaeontologia Polonica”.

W. Bargieł i L. Wertenstein.

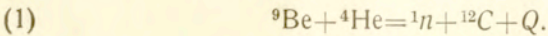
**Porównanie neutronów otrzymywanych z berylu działaniem promieni  $\alpha$  i jego pochodnych, oraz promieni  $\gamma$  RaC.**

Przedstawił S. Pieńkowski dnia 14 czerwca 1938 r.

**Comparaison des neutrons produits dans le béryllium par les rayons  $\alpha$  et par les rayons  $\gamma$  du RaC.**

Mémoire présenté par M. S. Pieńkowski à la séance du 14 juin 1938.

1. Zderzenia cząstek  $\alpha$  z jądrami berylu powodują, jak wiadomo, reakcję jądrową



Ilość  $Q$  wydzielonej energii jest bardzo znaczna, zgodnie z przyjętymi obecnie wartościami mas atomowych mamy:

$${}^9\text{Be} = 9,01504, \quad {}^4\text{He} = 4,00389, \quad {}^{12}\text{C} = 12,00398, \quad {}^1_0\text{n} = 1,00897,$$

$$\text{a zatem } Q = 0,00598 = 5,57 \cdot 10^6 \text{ ew.}$$

Jeżeli energia kinetyczna cząstki  $\alpha$  wynosi  $E_\alpha$ , neutron wraz z jądrem węgla posiadają energię  $E_\alpha + Q = E_1$ . W przypadku gdy jądro węgla nie powstaje w stanie pobudzonym,  $E_1$  jest to suma energii kinetycznych neutronu i jądra węgla. Energia kinetyczna neutronu jest zależna od kąta między kierunkami prędkości neutronu oraz cząstki  $\alpha$ , i osiąga wartość największą gdy te oba kierunki są zgodne. W źródłach neutronów utworzonych z radonu zmieszanego z berylem cząstki  $\alpha$  pochodzą od Rn, RaA, RaC',  $E_\alpha$  wynosi:

$$\text{Rn: } E_\alpha = 5,488 \cdot 10^6 \text{ ew.}; \quad E_1 = 11,038 \cdot 10^6 \text{ ew.}$$

$$\text{RaA: } E_\alpha = 6 \cdot 10^6 \text{ ew.}; \quad E_1 = 11,57 \cdot 10^6 \text{ ew.}$$

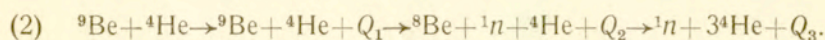
$$\text{RaC': } E_\alpha = 7,683 \cdot 10^6 \text{ ew.}; \quad E_1 = 13,253 \cdot 10^6 \text{ ew.}$$

Stosując zasadę zachowania pędu znajdujemy, że maksymalna energia neutronu wynosi w tych trzech przypadkach  $10,76 \cdot 10^6$  ew.,  $11,38 \cdot 10^6$  ew. i  $12,93 \cdot 10^6$  ew. Średnia energia neutronów ze źródła „radon-beryl” jest jednak znacznie mniejsza od  $10 \cdot 10^6$  ew. W istocie cząstki  $\alpha$  tracą prędkość przenikając do ziarn berylu; część neutronów pochodzi zatem od cząstek  $\alpha$ , których energia



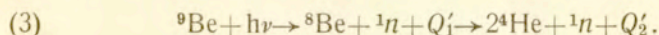
jest mniejsza od podanych wartości. Ponadto podane wyniki rachunku dotyczą tylko neutronów wybiegających w kierunku ruchu cząstek  $\alpha$ ; neutrony wysyłane skośnie posiadają mniejszą energię. Wreszcie jądro  $^{12}\text{C}$  powstaje znacznie częściej w stanie pobudzonym niż w normalnym. Znamy trzy stany pobudzenia, których energia  $E_w$  wynosi 6,7; 4,2;  $2,5 \cdot 10^6$  ew. Energia kinetyczna po zderzeniu wynosi ogólnie biorąc  $E_\alpha + Q - E_w$ , jest zatem najczęściej znacznie mniejsza od obliczonej energii maksymalnej. Możemy przyjąć, że średnia energia kinetyczna neutronów powstających w reakcji (1) jest zbliżona do  $5 \cdot 10^6$  ew.

Obok reakcji (1) zachodzi jednak również inna reakcja (2), zbadana w ostatnich czasach przez Bjergergo<sup>1)</sup>. Ta reakcja odbywa się w kilku etapach; pierwszy jest to rozproszenie niesprężyste cząstek  $\alpha$ . „Złożone jądro”  $^{13}\text{C}$  (Bohr) powstające po wchłonięciu cząstki  $\alpha$  przez jądro berylu rozpada się z powrotem na jądro berylu oraz cząstkę  $\alpha$ ; cząstka  $\alpha$  wybiega jednak ze znacznie zmniejszoną energią, jądro zaś pozostaje w stanie silnego pobudzenia. W tym stanie  $^9\text{Be}$  jest nietrwale i rozpada się z kolei na neutron i  $^8\text{Be}$ . Wreszcie jądro  $^8\text{Be}$  jest nietrwale nawet w stanie normalnym i rozszczepia się na dwie cząstki  $\alpha$ . Przebieg reakcji (2) możemy zatem przedstawić w następujący sposób:



Na podstawie wartości mas atomowych wyliczamy  $Q_3 = -0,00171 = -1,52 \cdot 10^6$  ew.; reakcja (2) jest zatem w odróżnieniu od (1) endoergiczna (t. j. pochłania energię). Neutrony powstające w tej reakcji są znacznie powolniejsze od neutronów biorących początek w reakcji (1); ich średnia energia jest mniejsza od  $1 \cdot 10^6$  ew. Rozkład energii jest ciągły.

2. Neutrony powstają również wskutek działania promieni  $\gamma$  na beryl. Ten „efekt fotojądrowy” przedstawiamy wzorem:



Jak wynika z wartości mas atomowych, reakcja może zachodzić tylko wtedy ( $Q'_2 > 0$ ), gdy energia fotonu jest większa od  $1,59 \cdot 10^6$ . Jeżeli źródłem promieni  $\gamma$  jest rad w równowadze z Rn. RaA, RaB

<sup>1)</sup> T. Bjerger, Proc. Roy. Soc. 164, 257, 1938.

i RaC, czynne promienie  $\gamma$  mogą pochodzić tylko od RaC; widmo tego pierwiastka zawiera 2 prążki o energii 1,761 i  $2,198 \cdot 10^6$  ew. wystarczającej dla spowodowania reakcji (3). Jak widać  $Q$  wynosi najwyżej  $0,5 \cdot 10^6$  ew. Ponieważ znaczna część tej energii zostaje zużyta jako energia kinetyczna cząstek  $\alpha$ , przeto neutron posiada małą energię, zapewne rzędu wielkości  $0,1 \cdot 10^6$  ew.

3. Z tych rozważań wynika, że „fotoneutrony” utworzone za pomocą promieni  $\gamma$  są znacznie powolniejsze od „ $\alpha$ ” neutronów powstających w zderzeniu cząstek  $\alpha$  z jądrami berylu. Ta różnica powinna znaleźć wyraz w przebiegu zwalniania neutronów w środowisku zawierającym wodór (np. w parafinie). Jak wiadomo w następstwie wielkiej liczby kolejnych zderzeń z protonami neutrony osiągają równowagę cieplną z otoczeniem. Liczba zderzeń potrzebna do osiągnięcia tego stanu jest oczywiście tym większa, im większa jest energia początkowa neutronu; to samo stosuje się do liczby zderzeń potrzebnej do tego aby energia neutronu zmniejszyła się aż do pewnej określonej wartości  $E$ . Należy przeto oczekiwać, że utrata energii fotoneutronów prowadząca bądź do stanu równowagi cieplnej, bądź do danej (małej) wartości  $E$  wymagać będzie znacznie mniejszej liczby zderzeń, niż to ma miejsce w przypadku „ $\alpha$ ” neutronów.

Jeżeli neutrony przebiegają przez płytkę parafinową określonej, niezbyt wielkiej grubości, to liczba zderzeń z protonami jest zależna od wielkości drogi swobodnej. Ponieważ ta wielkość jest rosnącą funkcją energii neutronu, przeto w tych samych warunkach fotoneutrony powinny ulec większej liczbie zderzeń niż  $\alpha$ -neutrony, względna liczba neutronów, które po przejściu przez płytkę osiągnęły daną wartość energii  $E$  będzie znacznie większa w pierwszym niż w drugim przypadku.

Praca nasza miała na celu sprawdzenie tych przypuszczeń. Wyznaczyliśmy względną ilość neutronów ciepłych (t. j. posiadających równowagę cieplną z otoczeniem) oraz neutronów o określonej energii odpowiadającej poziomom rezonansowym srebra i rodu, powstających po przejściu fotoneutronów oraz  $\alpha$ -neutronów przez płytki parafinowe określonej grubości.

Jako źródła fotoneutronów używaliśmy prostopadłościennego pudełka cynkowego o rozmiarach  $5 \times 5 \times 5$ , wypełnionego berylem i zaopatrzonego w rurkę cylindryczną, której oś przechodziła przez

środku przeciwległych podstaw i w której umieszczono preparat radu w postaci 8 rurek platynowych (uprzejmie wypożyczonych przez Instytut Radowy Marii Skłodowskiej-Curie) zawierających razem 50 mg Ra pierwiastka. Źródłem  $\alpha$ -neutronów była mieszanina berylu i radu. Do aparatury służącej do oczyszczania radonu przylutowano pionową rurkę o średnicy 6 mm oddzieloną przewężeniem i wypełnioną bardzo drobno sproszkowanym berylem na długości ok. 2 cm. W ustawioną w ten sposób ampulkę wtłaczano oczyszczony radon. Czynność tę powtarzano co kilka dni, tak iż ilość radonu była periodyczną i dobrze znaną funkcją czasu.

W celu wyznaczenia ilości zwolnionych neutronów posługiwaliśmy się promieniotwórczością wzbudzoną w rodzie (44 sek.) oraz w srebrze (22 sek i 138 sek.). Aktywowane płytki srebrne posiadały rozmiary  $5 \times 7 \times 0,02$  cm, płytki rodowe  $2,5 \times 3,5 \times 0,02$  cm. Dwuminutowa ekspozycja dawała w płytkach obu rodzajów efekty tego samego rzędu wielkości. Dla wyróżnienia trzech badanych grup neutronowych mianowicie neutronów cieplnych (grupa C), neutronów grupy rezonansowej rodu (grupa D), oraz grupy rezonansowej srebra (grupa A), wyznaczyliśmy w przypadku (C) różnicę aktywności otrzymanej drogą ekspozycji bezpośredniej oraz ekspozycji poprzez ekran z kadmu o grubości 0,5 mm; w przypadku (D) różnicę aktywności otrzymanej z użyciem ekranu z kadmu oraz ekranu podwójnego utworzonego z płytki kadmowej i z warstwy boru zawierającej  $150 \text{ mg/cm}^2$ , w przypadku (A) różnicę aktywności otrzymanej z użyciem ekranu z kadmu, oraz ekranu podwójnego utworzonego z płytki kadmowej i płytki srebrnej o grubości 0,3 mm.

Dla otrzymania neutronów należących do badanych grup przepuszczaliśmy neutrony wytworzone przez opisane źródła przez płasko równoległe płytki parafinowe o grubości 0,5 i 1 cm. Te płytki były umieszczane w odległości 3 cm od preparatu radu (równoległe do rurki mosiężnej R), oraz poziomo ponad rurką z radonem w odległości 3 cm od jej środka. Należy jednak zaznaczyć, że zwolnienie przebiega w obu przypadkach w różny sposób, gdyż fotoneutrony powstają mniej więcej równomiernie we wszystkich punktach masy berylowej, znaczna liczba neutronów pada zatem na płytkę parafinową tworząc z normalną kąt bardzo zbliżony do prostego, gdy tymczasem  $\alpha$ -neutrony przenikają do tej płytki pod mniejszym kątem padania i przebiegają krótszą drogę w parafinie.

Mamy zatem do czynienia z trzema aż czynnikami, które powinny spowodować większą wydajność produkcji powolnych neutronów w przypadku fotoneutronów niż  $\alpha$ -neutronów 1) średnia energia początkowa mniejsza; 2) długość swobodnej drogi mniejsza; 3) średnia długość drogi przebytej w parafinie większa.

Doświadczenia wykonywano w ten sposób, że aktywowane płytki umieszczano w dokładnie określonych położeniach na ekranach absorpcyjnych lub na płycie z cynku, który nie pochłania powolnych neutronów, i eksponowano je w ciągu 1 minuty; po czym zwijano je w kształt cylindrów o średnicy nie wiele większej od średnicy liczników Geigera i nakładano na licznik. Liczenie trwało 1 minutę; początek liczenia przypadał w 20 sekund po zakończeniu ekspozycji. Z obserwowanej liczby impulsów  $N/\text{min}$  wyliczano liczbę rzeczywistą na podstawie znanego wzoru  $N = N_0 e^{-N_0 \tau}$  gdzie  $\tau$  wyrażone w minutach jest to „czas martwy” w ciągu którego układ wzmacniający, który w początku odstępu  $\tau$  otrzymał impuls, nie jest zdolny do zarejestrowania następnego impulsu. Stałą  $\tau$  wyznaczono za pomocą osobnych doświadczeń, wynosiła ona  $8,3 \cdot 10^{-4}$  min.

Opisane pomiary nie wystarczają do obliczenia względnych ilości zwolnionych neutronów, t. j. stosunku liczby neutronów badanych grup utworzonych w opisanych warunkach do całkowitej liczby neutronów wysyłanych przez źródło. W celu otrzymania tej ostatniej liczby eksponowaliśmy płytki „zanurzone w środowisku wodorowym”, t. j. umieszczone wewnątrz parafiny wypełniającej znaczną objętość. Odległość płytek od źródeł była taka sama jak w poprzednich doświadczeniach, ponieważ jednak aktywności były wielokrotnie większe, przeto stosowano płytki mniejszych rozmiarów i umieszczano je między płytkami kadmowymi, przez co eliminowano najsilniej działającą grupę C. Za pomocą osobnych doświadczeń wykonanych ze słabszymi źródłami w dokładnie tych samych warunkach wyznaczyliśmy względne „liczebności” grup C, A i D, t. j. aktywacje pochodzące od tych grup zarówno w przypadku fotoneutronów jak i  $\alpha$ -neutronów. Na podstawie pomiarów porównawczych z użyciem płytek normalnych rozmiarów wyznaczyliśmy współczynniki przez które należało mnożyć aktywność małych płytek, aby wyniki otrzymane przy zupełnym zwolnieniu neutronów można było porównywać z wynikami dotyczącymi częściowych zwolnień.

W poniższej tabelce podajemy wartości aktywacji srebra i radu pochodzącej od grup C i A (srebro) oraz C i D (rod) otrzymanej wewnątrz wielkiego bloku parafinowego przy użyciu  $\alpha$ -neutronów oraz fotoneutronów. W pierwszym przypadku do doświadczenia wzięto 45 milicurie radonu, w drugim 50 mg radu.

Receptor.	Grupa	Rod. <sup>2)</sup>		Srebro	
		C	D	C	A
$\alpha$ , Radon	45 mc	11500	1600	3360	467
$\gamma$ , Rad	50 mg	2280	288	876	146

Tabela wskazuje, że aktywacja rodu ciepłymi neutronami pochodzącymi od radonu jest 5 razy większa niż przy użyciu fotoneutronów, natomiast srebro aktywuje się pod działaniem ciepłych neutronów tylko 3,85 razy silniej w przypadku  $\alpha$ -neutronów niż fotoneutronów. Ta niezgodność tłumaczy się tym, że użyte w doświadczeniach tego typu blaszki srebrne miały znacznie większe rozmiary niż płytki z rodu, wskutek czego wynik pomiaru był do pewnego stopnia zależny od rozmieszczenia neutronów ciepłych w parafinie.

Przyjmując, że stosunek aktywacji srebra i rodu ciepłymi neutronami pochodzącymi z obu źródeł równa się w przybliżeniu średniej wartości otrzymanej drogą aktywacji srebra i rodu t. j.

$$\frac{3.85+5}{2}=4,42,$$

możemy obliczyć stosunek wydajności obu źródeł. Zgodnie z wzorami podanymi przez Fermi'ego i Amaldi'ego <sup>3)</sup>, aktywacja ciepłymi neutronami cienkiego receptora o masie  $m$  wyrobionego z materiału, którego masowy współczynnik absorpcji w przypadku ciepłych neutronów wynosi  $K$ , równa się:

$$A=q\tau VmK$$

gdzie  $q$  jest to liczba prędkich neutronów wytworzonych w jednostce czasu i objętości,  $\tau$  średni czas życia ciepłych neutronów w parafinie,  $V$  średnia arytmetyczna prędkość.  $q$  jest to wielkość pomocnicza nie posiadająca określonego znaczenia, natomiast całka  $4\pi \int r^2 q dr = Q$  rozciągnięta na dostatecznie wielką objętość w para-

<sup>2)</sup> Aktywność odniesiona do rozmiarów płytki 5×7 cm.

<sup>3)</sup> E. Amaldi, E. Fermi, La Ricerca Scient. Ser. II Ann. VII Vol. I, N° 11-12.

finie oznacza całkowitą liczbę prędkich neutronów wytworzonych przez źródło w jednostce czasu. Mamy zatem  $Q = \frac{1}{\tau V m K} \cdot 4\pi \int A \cdot r^2 \cdot dr$ , wartość zaś tej ostatniej całki możemy otrzymać badając aktywację receptora w różnych odległościach  $r$  od źródła. Krzywa  $A = F(r)$  została wyznaczona najpierw w doświadczeniach Amaldi'ego i Fermi'ego, następnie zaś w bardzo dokładnej pracy Frischa, Halbana, Kocha <sup>4)</sup>, zarówno w przypadku  $\alpha$ -neutronów radonu jak i fotonęutronów pochodzących od promieni  $\gamma$  RaC. Posługując się tą krzywą możemy obliczyć stosunki  $A_0/4\pi \int A r^2 dr$ , gdzie  $A_0$  jest to aktywacja receptora umieszczonego w danej określonej odległości  $r_0$  od źródła. W naszych doświadczeniach  $r \sim 3$  cm; dokładne określenie odległości jest niemożliwe ze względu na znaczne rozmiary receptora, oraz źródeł neutronów. Kładąc  $Q_{Rn}$ ,  $Q_{Ra}$  jako liczby neutronów wytworzonych przez równoważne źródła  $\alpha$  i  $\gamma$ ,  $A_{Rn}$  i  $A_{Ra}$  jako aktywacje cieplnymi neutronami w obu przypadkach mamy:

$$\frac{Q_{Rn}}{Q_{Ra}} = \frac{\int A_{Rn} r^2 dr}{\int A_{Ra} r^2 dr} = \frac{A_{0,Rn}}{A_{0,Ra}} \left( \frac{A_{0,Ra}}{\int A_{Ra} 4\pi r^2 dr} \right) \cdot \left( \frac{\int A_{Rn} 4\pi r^2 dr}{A_{0,Rn}} \right).$$

Z pracy Frischa, Halbana i Kocha (krzywa  $A$ , rys. 4, wyliczamy

$$\frac{A_{0,Ra}}{\int A_{Ra} 4\pi r^2 dr} = \frac{1}{2100}, \quad \frac{A_{0,Rn}}{\int A_{Ra} 4\pi r^2 dr} = \frac{1}{6075}$$

i wreszcie

$$\frac{Q_{Rn}}{Q_{Ra}} = \frac{5 \cdot 6075}{2100} = 14.45.$$

Kładąc  $Q_{Rn} = 27000s$ , gdzie  $s$  jest to ilość radonu w milicurie, otrzymujemy  $Q_{Ra} = 1870s$ . Preparat użyty w naszych doświadczeniach zawierający  $s = 50$  mg wysłała przeto 93500 neutronów w sekundzie. Należy zaznaczyć, że podane obliczenia są tylko przybliżone, gdyż układ przestrzenny był inny w naszym doświadczeniu niż w pracy Frischa, Halbana i Kocha.

<sup>4)</sup> O. R. Frisch, H. Halban, J. Koch., Dansk. Videnskab. XV, 10, 1937.

Reakcja fotojądrowa w berylu zachodzi pod działaniem najtwardszych promieni  $\gamma$  RaC, mianowicie prążków 1,7 oraz 2,2 Mew. Liczba fotonów należących do pierwszego z tych prążków wynosi 0,25 na jedną przemianę atomu od RaC, liczba fotonów drugiego prążka — 0,074. Stąd wynika, że 1 milicurie RaC daje  $9,62 \cdot 10^6$  fotonów zdolnych do wywoływania reakcji fotojądrowej. W warunkach naszego doświadczenia na każdy foton przypada  $\frac{1870}{9,62 \cdot 10^6} = 1,945 \cdot 10^{-4}$  neutronów. Na tej podstawie możemy wyliczyć przekrój czynny berylu w badanej reakcji. Przeciętna długość drogi jaką przebiegały fotony w berylu wynosiła 3 cm, prawdopodobieństwo wywołania efektu równało się zatem  $3DN\sigma/A$ , gdzie  $D$  — gęstość,  $A$  — ciężar atomowy,  $\sigma$  — szukany przekrój czynny berylu,  $N$  — liczba Avogadry, mamy zatem:

$$3DN\sigma/A = 1,945 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma = 1,945 \cdot 10^{-4} \cdot 3 / 6 \cdot 10^{23} \cdot 0,64 = 1,52 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

Z bardziej dokładnych pomiarów Frischa, Halbana i Kocha wynika nieco inna wartość przekroju czynnego  $\sigma$ , mianowicie:  $2,7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ . Sądzymy, że ta wartość jest poprawniejsza od naszej i będziemy posługiwali się przy dalszych obliczeniach odpowiednio powiększoną wartością  $Q_{Ra}$  mianowicie  $1870s \cdot 2,7 / 1,5 = 3370s = 168500$ .

Głównym celem naszej pracy było stwierdzenie, jaki ułamek liczby neutronów wysyłanych przez porównywane przez nas źródła zamienia się po przejściu przez ciekłą warstwę parafiny w neutrony grup C, D, A. Ponieważ doświadczenie daje bezpośrednio tylko liczbę impulsów dawanych w określonych warunkach w liczniku Geigera przez aktywowane płytki ze srebra lub rodu, przeto należało wyznaczyć współczynnik pozwalający obliczyć na podstawie tych danych liczbę neutronów danego typu padających w jednostce czasu na użyty receptor. Możemy to uczynić w następujący sposób. Biorąc pod uwagę wielkość kąta brylowego, w którym licznik chwyta elektrony pochodzące od preparatu, wydajność licznika, wreszcie pochłanianie neutronów w aktywowanej płytce oraz w ściankach licznika, znajdujemy, że licznik rejestruje tylko 0,016 całkowitej liczby elektronów wysyłanych przez nasze preparaty, musimy przeto po pierwsze mnożyć otrzymane liczby impul-

sów przez 62,5. Następnie należy na podstawie liczby elektronów wysyłanych w przeciągu 2 minut (t. j. podczas notowania impulsów) obliczyć liczbę elektronów wysyłanych w sekundzie w chwili zakończenia aktywacji i zredukować tę ostatnią liczbę do wartości  $P$ , odpowiadającej aktywacji „nasyconej”, t. j. największej jaką można otrzymać w danych warunkach drogą przedłużenia ekspozycji. Rachunek tego rodzaju łatwo jest wykonać w przypadku rodu, którego aktywność wobec krótkiej ekspozycji pochodziła praktycznie biorąc tylko od radiorodu o okresie  $T=44$  sek. Niech będzie  $t_1$  trwanie ekspozycji,  $t_2$  odstęp czasu między końcem ekspozycji i początkiem pomiarów,  $t_3=t_1$ =trwanie pomiaru,  $R$  liczba elektronów odpowiadająca zarejestrowanej liczbie impulsów.

$$\text{Mamy } R=P(1-e^{-\lambda t_1})^2 e^{-\lambda t_2}/\lambda.$$

Wobec tego, że  $\lambda=\frac{0,69}{44}$  sek<sup>-1</sup>,  $t_2$  zaś w naszych doświadczeniach wynosiło 20 sek, znajdujemy

$$R=P(1-e^{-0,94})^2 e^{-0,32}/\lambda=P \cdot 0,27 \cdot 44/0,69=17,1 P; \quad P=0,0585R.$$

W przypadku srebra rachunek jest nieco bardziej skomplikowany ze względu na obecność dwóch ciał o okresach 22 sek i 2,3 min. W tym przypadku musimy rozróżnić działanie neutronów ciepłych oraz neutronów grupy A wytwarzających praktycznie biorąc tylko radiosrebro o okresie 22 sek.

I. Neutrony ciepłe. Oznaczając przez  $R$  liczbę elektronów odpowiadającą liczbie impulsów zarejestrowanych w ciągu 1 minuty, przez  $P_1$  i  $P_2$  liczbę elektronów wysyłanych w sekundzie pod działaniem neutronów ciepłych przez każdy z radioizotopów w stanie równowagi, będziemy mieli:

$$R=P_1(1-e^{-\lambda_1 t_1})^2 e^{-\lambda_1 t_2}/\lambda_1+P_2(1-e^{-\lambda_2 t_1})^2 e^{-\lambda_2 t_2}/\lambda_2$$

gdzie

$$\lambda_1=0,69/22=1/32 \text{ sek}^{-1}; \quad \lambda_2=0,69/138=1/200 \text{ sek}^{-1}$$

czyli

$$R=P_1 \cdot 32(1-e^{-1,88})^2 \cdot e^{-0,63}+P_2 \cdot 200(1-e^{-0,3})^2 e^{-0,1} \\ =P_1 32 \cdot 0,70 \cdot 0,532+P_2 \cdot 200 \cdot 0,068 \cdot 0,904=11,9P_1+12,24P_2.$$

Kładąc  $P_1=3P_2$  ponieważ neutrony ciepłe wytwarzają *ceteris paribus* trzy razy więcej radiosrebra o okresie 22 sekundy niż o okresie 138 sek. znajdujemy:

$$R=48P_2, \quad P_2=R/48, \quad P_1=R/16=0,0625R.$$



Jeżeli zatem liczby impulsów dawanych przez rod i srebro wynoszą  $I_{Rh}$  i  $I_{Ag,C}$ , mamy

$$P_{Rh} = 62,5 \cdot 0,0585 I_{Rh} = 3,65 I_{Rh}$$

oraz

$$P_{Ag,C} = 62,5 \cdot 0,0625 I_{Ag,C} = 3,9 I_{Ag,C}.$$

II. Neutrony grupy A. W tym przypadku możemy położyć  $P_2 = 0$  i otrzymamy:  $R = 11,9 P_1$ ,  $P = 62,5 I_A / 11,9 = 5,26 I_A$ .

Liczby  $P$  elektronów wysyłanych w jednostce czasu w ekspozycji nasyconej są to zarazem liczby neutronów pochłanianych w jednostce czasu przez receptory. Aby na tej podstawie obrachować liczbę neutronów padających na receptory musielibyśmy znać nie tylko współczynnik pochłaniania, lecz również kątowy rozkład neutronów. Ten rozkład może być obliczony teoretycznie w przypadku „gazu neutronowego” wypełniającego znaczną objętość środowiska wodorowego, nie możemy jednak przewidzieć jaki będzie ten rozkład w przypadku, gdy neutrony przechodzą przez niewielkie grubości parafiny. Łatwo obliczyć, że gdyby kąty padania posiadały rozkład zgodny z prawem kosinusów, wówczas dostatecznie cienka płytka płasko równoległa pochłaniałaby dwa razy więcej niż w przypadku prostopadłej do niej wiązki równoległej. Rozkład podług prawa cosinusów reprezentuje pewien przypadek krańcowy, nie popełnimy jednak wielkiego błędu podważając w obliczeniach współczynnik absorpcji. W tym założeniu liczbę  $\nu$  neutronów ciepłych padających na receptor wyliczamy za pomocą wzoru

$$\nu = P / 2\mu\varrho d, \quad \text{gdzie } \varrho \text{ jest to gęstość, } d \text{ — grubość płytki}$$

Jako współczynnik absorpcji  $\mu$  obieramy w rodzie  $0,72 \text{ cm}^2/\text{g}$ , w srebrze —  $0,22 \text{ cm}^2/\text{g}$ , czyli połowę współczynnika absorpcji ciepłych neutronów obróconej na wytwarzanie radiosrebra o okresie 22 sek. Współczynnik dzielimy przez 2 dlatego, że izotop 109, z którego powstaje to radiosrebro, jest zawarty w ilości ok. 50%.

Ten sposób liczenia stosuje się, rzecz prosta, tylko do neutronów ciepłych, których współczynnik absorpcji w receptorach jest niewielki. Co się zaś tyczy pochłanianych selektywnie neutronów  $A$  i  $D$ , możemy położyć  $\nu_{A,D} = P_{A,D}$ .

W doświadczeniach naszych badaliśmy powstawanie neutronów ciepłych oraz grup  $A$  i  $D$  po przejściu przez płytki parafi-

nowe grubości 5 i 10 mm. Wyniki doświadczeń są zebrane w tablicy. W pierwszej i piątej kolumnie są podane wyznaczone doświadczalnie liczby impulsów, druga i szósta kolumna zawierają zredukowane do nasyconych ekspozycji liczby  $P$  elektronów, w trzeciej i siódmej znajdują się liczby  $\nu$  neutronów należących do badanych grup, wreszcie w czwartej i ósmej znajdują się stosunki  $\nu/\omega N$  tych liczb do liczby neutronów  $\omega N$  wysyłanych przez źródło w kącie bryłowym  $\omega$ , pod którym receptor jest widziany ze źródła.

TABLICA

płytkaparafinowa	Grupa	$\alpha$ -neutrony			$10^3\nu/\omega N$	fotoneutrony			
		$I$	$P$	$\nu$		$I$	$P$	$\nu$	$10^3\nu/\omega N$
5 mm Rod.	C	—	—	—	—	—	—	—	—
	D	—	—	—	—	4,6	16,8	16,8	0,59
	C	41	149,6	485	2,38	35	127,5	414	14,6
	D	41	149,6	149,6	0,73	20	73	73	2,55
5 mm Srebro	C	—	—	—	—	—	—	—	—
	A	5,6	29,4	29,4	0,14	11	57,8	57,8	2,04
	C	9	35	371	1,82	8	31,2	331	11,57
	A	23	121	121	0,593	24,5	129	129	4,08

Powyższe wyniki są to średnie otrzymane z wielkiej liczby pomiarów; badane aktywności były słabe i dawały liczby impulsów nieznacznie tylko przekraczające bieg własny licznika Geigera. Chociaż dokładność wyników jest niewielka, możemy jednak wyciągnąć z nich niektóre interesujące wnioski.

1. Wszystkie badane grupy występują po przejściu przez daną warstwę parafiny w większej ilości w przypadku fotoneutronów niż w przypadku  $\alpha$ -neutronów. Pomijając pewne rozbieżności, które można położyć na karb błędów doświadczalnych, stosunek liczebności wszystkich grup jest w przybliżeniu jednakowy i wynosi ok. 6. Fakt ten musimy przypisać znacznej wydajności reakcji (2). Gdybyśmy bowiem mieli do czynienia tylko z reakcją (1), wówczas  $\alpha$ -neutrony posiadałyby średnią energię wynoszącą ok.  $4 \cdot 10^6$  ew. t. j. 20—40 razy większą od energii fotoneutronów, średnią zaś drogę swobodną w parafinie ok. 3 razy dłuższą. Stosunek liczeb-

ności grup w obu przypadkach musiałby być zatem wielokrotnie większy od 6, zapewne rzędu 100. Jeżeli jednak, jak to znajduje Bjerger, promienie  $\alpha$  wytwarzają drogą reakcji (2) znaczną liczbę (ok. 0,9 całkowitej ilości) neutronów, których średnia energia jest rzędu wielkości kilkuset tysięcy elektronowoltów, a zatem zaledwie kilka razy większa od energii foneutronów, wówczas łatwo zrozumieć dlaczego mechanizm zwalniania w parafinie neutronów obu rodzajów nie różni się tak znacznie jak to mogłoby się wydawać na podstawie reakcji (1).

2. Proces zwalniania neutronów jest w obu badanych przypadkach analogiczny i jest następstwem zderzeń wielokrotnych. W istocie względna liczba neutronów o energii zawartej między  $E$  i  $E+\Delta E$  powstających w jednym zderzeniu wynosi  $\Delta E/E_0$ , gdzie  $E_0$  jest to energia początkowa; ponieważ zaś szerokość przedziału  $\Delta E$  jest we wszystkich badanych grupach mniejsza od 1 ew., przeto pojedyncze zderzenia mogą dostarczać tylko znikomo małej liczby neutronów „powolnych”. Względna liczba neutronów należących do którejkolwiek z tych grup powinna być mniejsza od  $10^{-6}$ , gdy tymczasem ułamki otrzymane doświadczalnie są co najmniej rzędu  $10^{-3}$ . Stwierdzenie wielokrotnych zderzeń należy, rzecz prosta, przypisać okoliczności, iż płytki użyte do zwalniania posiadały dosyć znaczne rozmiary ( $10 \times 10$  cm) w kierunku prostopadłym do grubości. W celu zmniejszenia efektu wielokrotnych zderzeń do możliwych granic wykonaliśmy pewną liczbę doświadczeń, w których neutrony wychodzące z rurki z radonem przechodziły przez przylegającą do niej warstwę parafiny wyciętą w cylindrze o średnicy 28 mm, długości 30 mm; warstwa ta ważyła tylko 7 g, t. j. jedenaście razy mniej niż płytka parafinowa użyta w opisanych doświadczeniach. Jest rzeczą uderzającą, że nawet w tych warunkach stwierdziliśmy powstawanie powolnych neutronów (grup C i A) w ilości tylko trzy razy mniejszej niż w doświadczeniach wykonanych z dużą płytką. Fakt ten nasuwa przypuszczenie, że nawet w pojedynczych zderzeniach powstaje znacznie więcej powolnych neutronów niż to wynikałoby z ogólnie przyjętej teorii zderzeń neutronów z protonami. Dla rozstrzygnięcia tej sprawy byłoby rzeczą konieczną wykonać doświadczenie w takich warunkach aby zderzenia wielokrotne były niemożliwe, t. j. z użyciem warstwy parafiny, której rozmiary byłyby we wszystkich kierunkach małe wobec długości swobodnej neutronów w parafinie; doświadczenie

to jednak wymagało by, ze względu na małość spodziewanych efektów, źródła neutronów wielokrotnie potężniejszego od tego, którym rozporządzaliśmy (co najmniej 500 mc).

3. Ilości neutronów grup *D* i *A* powstających wskutek zwolnienia neutronów w cienkiej warstwie parafiny są w grubym przybliżeniu jednakowe, natomiast ilość neutronów pochłanianych przez kadm jest znacznie większa niż neutronów *D* i *A*. Fakt ten tłumaczy się niewątpliwie tym, że neutrony *C* pochłaniane przez kadm obejmują nie tylko neutrony „cieplne”, lecz należą do przedziału, którego szerokość energetyczna jest zbliżona do 1 elektrowolta, gdy tymczasem selektywna absorpcja grup *D* i *A* dotyczy przedziału o szerokości energetycznej rzędu niewielkiego ułamka elektrowolta.

---

L. Wertenstein et W. Bargiel.

**Porównanie mechanizmu zwalniania neutronów otrzymywanych z berylu przez promienie  $\alpha$  i promienie  $\gamma$  z  $RaC$ .**

Przedstawił S. Pieńkowski dnia 14 czerwca 1938 r.

**Comparaison du mécanisme du ralentissement des neutrons produits dans le béryllium par les rayons  $\alpha$  et les rayons  $\gamma$  du  $RaC$ .**

Mémoire présenté par M. S. Pieńkowski à la séance du 14 juin 1938.

RESUMÉ.

Les auteurs ont comparé la formation par ralentissement dans des couches minces de paraffine des neutrons des groupes *C* (absorbés par le cadmium), *D* (absorbés selectivement par le rhodium) et *A* (absorbés selectivement par l'argent), à partir des neutrons produits dans le béryllium par les rayons  $\alpha$  et par les rayons  $\gamma$  du  $RaC$ . La source de neutrons était constituée dans le premier cas par un tube rempli de béryllium finement pulvérisé et contenant environ 45 millicuries de radon, dans le deuxième cas par 50 mg de Ra, contenus dans des tubes de platine entourés d'environ 80 g de béryllium. La section efficace du béryllium pour la production des photoneutrons a été trouvée égale à  $1,5 \cdot 10^{-27}$  cm<sup>2</sup>, nombre peu différent de celui trouvé par Frisch, Halban et Koch ( $2,7 \cdot 10^{-27}$  cm<sup>2</sup>). Les neutrons émanés de ces sources traversaient une couche de paraffine de 5 mm ou de 10 mm d'épaisseur et tombaient sur une lame de rhodium ou d'argent dont l'activité après

une exposition de 1 minute était suivie pendant 1 minute au moyen d'un compteur Geiger-Müller. Les activations dues au groupe C étaient déterminées par élimination de ce groupe au moyen d'un écran de cadmium. Le groupe D pouvait être éliminé à l'aide d'un écran additionnel de bore et pour étudier le groupe A on se servait d'une lame d'argent de 0,3 mm d'épaisseur. Les résultats exprimés d'abord en nombre d'impulsions étaient transformés en nombre de neutrons de divers groupes tombant par unité de temps sur les lames activées, au moyen d'un calcul dans lequel on a tenu compte des coefficients d'absorption des neutrons dans les récepteurs, de l'efficacité du compteur, de l'absorption des électrons et de la durée de l'exposition, aussi bien que de la période pendant laquelle on a compté les impulsions. On calculait ensuite les nombres relatifs des neutrons de chaque groupe en divisant les nombres absolus par le nombre de neutrons émis par les sources. Les résultats sont représentés dans le tableau suivant où  $I$  est le nombre d'impulsions enregistrées en 1 min.,  $P$  le nombre absolu des neutrons absorbés par les récepteurs,  $\nu$  le nombre des neutrons tombant sur les récepteurs,  $\nu/\omega N$  le nombre relatif des neutrons de chacun des groupes étudiés.  $\omega$  est l'angle solide sous lequel le récepteur est vu de la source.

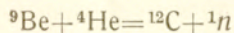
TABLEAU

Epaisseur de paraffine	Groupe	$\alpha$ -neutrons			photoneutrons				
		$I$	$P$	$\nu$	$10^3\nu/\omega N$	$I$	$P$	$\nu$	$10^3\nu/\omega N$
5 mm Rhod.	C	—	—	—	—	—	—	—	—
	D	—	—	—	—	4,6	16,8	16,8	0,59
	C	41	149,6	570	3,01	35	127,5	486	17
	D	41	149,6	149,6 <sup>1)</sup>	0,79	20	73 <sup>1)</sup>	73 <sup>1)</sup>	2,55
5 mm Argent	C	—	—	—	—	—	—	—	—
	A	5,6	29,4	29,4 <sup>1)</sup>	0,16	11	57,8 <sup>1)</sup>	57,8 <sup>1)</sup>	2,04
	C	9	35	35	1,96	8	31,2	331	11,57
	A	23	121	121 <sup>1)</sup>	0,64	24,5	29 <sup>1)</sup>	129 <sup>1)</sup>	4,08

<sup>1)</sup> On a admis, avec une précision suffisante pour ce genre d'expériences que les neutrons des groupes A et D ont été absorbés totalement dans les récepteurs correspondants.

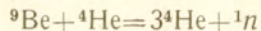
Les effets mesurés ont été faibles, aussi la précision des résultats est médiocre. On peut néanmoins en dégager quelques conclusions intéressantes.

1. La numérosité relative de tous les groupes formés après passage des neutrons dans 1 cm de paraffine est en moyenne 6 fois plus grande dans le cas des photoneutrons que dans le cas des neutrons produits par les rayons  $\alpha$ . Ce rapport est considérablement inférieur à celui qu'on pourrait prévoir en comparant les énergies et les parcours libres dans la paraffine des neutrons de  $10^6$  ev. produits par les rayons  $\gamma$  et des neutrons rapides produits par les rayons  $\alpha$  dans la réaction bien connue



dont l'énergie moyenne est voisine de  $4.10^6$  ev.

On peut en conclure que parmi les neutrons produits par les rayons  $\alpha$  la majorité doit posséder des énergies peu supérieures à l'énergie des photoneutrons. Ces neutrons prennent sans doute origine dans la réaction



qui doit donner une distribution continue en énergie avec maximum au voisinage de  $10^6$  ev.

2. L'efficacité du ralentissement dans des couches relativement minces de paraffine est très considérable et ne peut être expliquée, à la base de la théorie usuelle des chocs entre protons et neutrons, qu'en admettant qu'une fraction du nombre total des neutrons, de l'ordre de  $10^{-3}$ , subit des nombreux chocs successifs dans la paraffine. Cette dispersion multiple devrait être fonction rapidement croissante du volume de la paraffine. Or en employant des diffuseurs de très petit volume (pesant environ 7 g au lieu de 70 g dans les expériences précédentes) nous avons trouvé que le nombre de neutrons  $C$  n'était diminué que dans le rapport de 3:1. Ce résultat conduit à des doutes concernant la validité de la théorie généralement admise des chocs entre neutrons et protons. Pour trancher cette question, il faudrait étudier le ralentissement des  $\alpha$  neutrons en se servant d'un diffuseur suffisamment petit pour qu'on puisse être assuré que les neutrons subissent la dispersion simple (single scattering); cette expérience est cependant difficilement réalisable, car pour obtenir des effets mesurables il faudrait employer des sources extrêmement puissantes.

3. Les groupes *D* et *A* se développent d'une manière tout à fait comparable. Le groupe *C*, bien que le plus lent, présente une prépondérance bien marquée sur les autres groupes. Ces résultats s'expliquent aisément en admettant que la numérosité des groupes, dans les premières étapes de leur développement, dépend surtout de la largeur de l'intervalle énergétique représenté par le groupe. Cette largeur est en effet voisine de 1 ev. dans le cas des neutrons *C* absorbés par le cadmium, tandis qu'elle n'est qu'une fraction d'électronvolt dans le cas des neutrons absorbés selectivement par le rhodium et l'argent.

---

St. J. Thugutt.

### O zachowaniu się leucytu pod wpływem kwaśnego siarczanu potasowego w roztworze wodnym.

Komunikat przedstawiony dnia 14 czerwca 1938 r.

#### STRESZCZENIE.

2 g leucytu rzymskiego poddano działaniu 570 cm<sup>3</sup> 0.29<sup>0</sup>/<sub>0</sub>-go wodnego roztworu kwaśnego siarczanu potasowego w temperaturze 226—235<sup>0</sup> C. Po upływie 97 godzin trzecia część leucytu uległa rozkładowi na alunit, siarczan potasu i krzemionkę, podczas gdy pozostałe <sup>2</sup>/<sub>3</sub> części przeobraziły się, po utracie małej ilości krzemionki i po zastąpieniu  $\pm$ <sup>1</sup>/<sub>7</sub> cz. K<sub>2</sub>O przez wodę, w utwór natury łuszczkowej, częściowo tylko rozpuszczalny w chlorowodorze i barwiący się z błękitem metylenowym na kolor szafirowy, z rodaminą na kolor różowy. W tych samych warunkach towarzyszący łuszczkowi alunit żadnej nie podlegał zmianie.

Prawie że identyczny z powyższym produkt przeobrażenia leucytu otrzymałem, działając nań wodą przekroploną<sup>1)</sup>. Analogiczne zjawiska zachodzą również w przyrodzie, jak to stwierdził G. Bischof<sup>2)</sup>, badając skały leucytowe z Rieden.

---

<sup>1)</sup> St. J. Thugutt. Archiwum Mineralogiczne 11 (1935) 144.

<sup>2)</sup> J. Roth. Chemische Geologie 1 (1879) 157.

W kwaśno reagującym roztworze znaleziono: 0.46238 g  $\text{SiO}_2$ , 1.29418 g  $\text{K}_2\text{SO}_4$  i 0.1415 g  $\text{SO}_3$ .

- I. Skład mieszaniny złożonej z alunitu i z produktu natury lyszczykowej.
- II. Alunit obliczony w stosunku 11.54<sup>0</sup>/<sub>0</sub>  $\text{SO}_3$ .
- III. Produkt lyszczykowy.
- IV. Stosunki cząsteczkowe tegoż.

	I	II	III	IV
$\text{SiO}_2$	37.60	—	37.60	3.74
$\text{Al}_2\text{O}_3$	28.06	11.01	17.05	1.00
$\text{K}_2\text{O}$	16.80	3.39	13.41	0.85
$\text{SO}_3$	11.54	11.54	—	—
$\text{H}_2\text{O}$	6.36	3.89	2.47	0.82
	<u>100.36</u>	<u>29.83</u>	<u>70.53</u>	

St. J. Thugutt.

### Über die Einwirkung wässriger saurer schwefelsaurer Kalilösung auf Leucit.

Note présentée à la séance du 14 juin 1938.

#### ZUSAMMENFASSUNG.

2 g Leucit aus der Umgegend von Rom wurden bei 226—235° C der Einwirkung von 570 cm<sup>3</sup> 0.29<sup>0</sup>/<sub>0</sub>-iger wässriger  $\text{KHSO}_4$  Lösung ausgesetzt. Nach 97 stündiger Einwirkung obiger Lösung bildete sich ein Gemenge von 1/3 Alunit (II) und von 2/3 kaliglimmerartigem Silikat (III). N<sup>o</sup> I ist das Gemenge beider Stoffe und N<sup>o</sup> IV sind die Molekularverhältnisse der im N<sup>o</sup> III eigenschlossenen Bestandteile.

Die Lösung reagierte stark sauer und enthielt 0.46238 g  $\text{SiO}_2$ , 1.29418 g  $\text{K}_2\text{SO}_4$  neben 0.1415 g  $\text{SO}_3$ .

Der Analyse N<sup>o</sup> III entsprechende Stoffe wurden in der Natur angetroffen<sup>1)</sup> und auch künstlich bei der Einwirkung von destilliertem Wasser auf Leucit von Vesuv erhalten<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> G. Bischof in J. Roth's Chemische Geologie 1 (1879) 157.

<sup>2)</sup> St. J. Thugutt, Archiwum Mineralogiczne 11 (1935) 144.



J. Cichocki.

**Próba oznaczenia zawartości radu w meteorycie łowickim.**

Przedstawił St. Pieńkowski dnia 14 czerwca 1938 r.

STRESZCZENIE.

Badano aktywność meteorytu łowickiego z pomocą metody licznika Geigera-Müllera i przez porównanie z wzorcami o znanej zawartości radu skonstatowano, że zawartość względna radu w meteorycie jest mniejsza od  $10^{-12}$ . W celu powiększenia dokładności oznaczenia aktywności meteorytu stosowano komorę jonizacyjną i posługując się wzorcem potasowym wyznaczono granicę zawartości radu w meteorycie łowickim, ustalając ją na  $10^{-13}$ .

J. Cichocki.

**Versuch einer Bestimmung des Radiumgehaltes im Meteorit von Łowicz.**

Note présenté par M. S. Pieńkowski à la séance du 14 juni 1938.

ZUSAMMENFASSUNG.

Es wurde die Aktivität des Meteorits von Łowicz mit dem Geiger-Müllerschen Zählrohre gemessen. Durch den Vergleich mit einer Substanz von bekanntem Radiumgehalt wurde festgestellt, dass der relative Gehalt an Radium im Meteorit kleiner ist als  $10^{-12}$ . Um die Genauigkeit der Aktivitätsbestimmung zu vergrößern wurde noch die Ionisationskammer benutzt. Als Vergleichsubstanz diente das Chlorkalium. Die obere Grenze des Radiumgehaltes belief sich alsdann auf  $10^{-13}$ .





