

**SPRAWOZDANIA**  
z posiedzeń  
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO**  
**WARSZAWSKIEGO**

Wydział III  
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXXI 1938

Zeszyt 7—9



**WARSZAWA**  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZAŚLĲKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO  
1938

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF TORONTO  
130 St. George Street, Toronto, Ontario, Canada M5S 1A5  
Tel. (416) 978-2000

SPRAWOZDANIA  
z posiedzeń  
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO  
WARSZAWSKIEGO  
Wydział III  
nauk matematyczno-fizycznych  
Rok XXV 1938  
Zeszyt 7—8



DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO  
pod zarządkiem Józefa Filipowskiego

## TREŚĆ ZESZYTU 7—9

	Str.
<b>J. Gadomski.</b> <i>UY Virginis</i> i <i>UX Herculis</i> . . . . .	89
<b>L. Wertenstein</b> i <b>T. Lisieński.</b> O wytwarzaniu neutronów drogą naświetlania berylu promieniami gamma RaC i ThC'' . . . . .	97
<b>S. Mazur.</b> O zagadnieniu istnienia bazy przeliczalnej dla zbiorów liniowych przeliczalnych . . . . .	102
<b>G. de Alexits.</b> O strukturze krzywych regularnych . . . . .	104
<b>K. S. K. Iyengar.</b> O pierwszej i drugiej pochodnej symetrycznej funkcji ciągłej . . . . .	107
<b>A. J. Smith.</b> O rozkładach półciągłych krzywych i rozmaitości . . . . .	114
<b>W. Gorczyński.</b> O uprzywilejowanym charakterze usłonecznienia na wybrzeżu polskim (wraz z W. M. Gdańskiem) w porównaniu z innymi dzielnicami Polski . . . . .	139
<b>S. Zieleniewski.</b> O wiwianitach bagiennych niżu polskiego . . . . .	163
<b>A. Łazkiewicz.</b> O pirycie i hematycie z Rudek . . . . .	165

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
<b>J. Gadomski.</b> <i>UY Virginis</i> und <i>UX Herculis</i> . . . . .	89
<b>L. Wertenstein</b> et <b>T. Lisieński.</b> Sur la production de neutrons par irradiation du béryllium par les rayons $\gamma$ du RaC et du ThC'' . . . . .	98
<b>S. Mazur.</b> Sur le problème de l'existence d'une base dénombrable d'ensembles linéaires dénombrables . . . . .	102
<b>G. de Alexits.</b> Sur la structure des courbes régulières . . . . .	104
<b>K. S. K. Iyengar.</b> A note on the symmetric first and second mean derivatives of a continuous function . . . . .	108
<b>A. J. Smith.</b> On upper semi-continuous decompositions of curves and manifolds . . . . .	114
<b>W. Gorczyński.</b> The greater insolation of the maritime district of Poland (Dantzig included) as compared with other polish regions . . . . .	161
<b>S. Zieleniewski.</b> Sur les vivianites palustres de la plaine Polonaise . . . . .	163
<b>A. Łazkiewicz.</b> Sur la pyrite et l'hématite de Rudki (massif de Ste-Croix) . . . . .	165

UNIVERSITY OF WROCLAW

Faculty of Chemistry  
 Institute of Physical Chemistry  
 Department of Physical Chemistry  
 50-336 Wrocław, Poland  
 ul. Świdnicka 49  
 tel. (71) 37 51 23 44  
 fax (71) 37 51 23 44  
 e-mail: chem@rcin.org.pl

Department of Physical Chemistry  
 Faculty of Chemistry  
 University of Wrocław  
 ul. Świdnicka 49  
 50-336 Wrocław, Poland  
 tel. (71) 37 51 23 44  
 fax (71) 37 51 23 44  
 e-mail: chem@rcin.org.pl

Department of Physical Chemistry  
 Faculty of Chemistry  
 University of Wrocław  
 ul. Świdnicka 49  
 50-336 Wrocław, Poland  
 tel. (71) 37 51 23 44  
 fax (71) 37 51 23 44  
 e-mail: chem@rcin.org.pl

Department of Physical Chemistry  
 Faculty of Chemistry  
 University of Wrocław  
 ul. Świdnicka 49  
 50-336 Wrocław, Poland  
 tel. (71) 37 51 23 44  
 fax (71) 37 51 23 44  
 e-mail: chem@rcin.org.pl

Department of Physical Chemistry  
 Faculty of Chemistry  
 University of Wrocław  
 ul. Świdnicka 49  
 50-336 Wrocław, Poland  
 tel. (71) 37 51 23 44  
 fax (71) 37 51 23 44  
 e-mail: chem@rcin.org.pl

# SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

---

## Posiedzenie

z dnia 14 czerwca 1938 r.

(dalszy ciąg)

J. Gądomski.

## UY Virginis und UX Herculis.

Przedstawił prof. M. Kamiński dnia 14 czerwca 1938 r.

### Einleitung

Mit Unterstützung des Staatlichen Piłsudski-Fonds für Nationale Kultur in Polen, mit Hilfe des Ministeriums für Auswärtige Angelegenheiten, sowie des Rektors der Universität, gründete ich, als Adiunkt der Universitätssternwarte in Warschau, eine vorläufige Beobachtungsstation in Jugoslawien (Dalmatien) auf der Insel Šolta, in der Ortschaft Rogač ( $\varphi = +43^{\circ}24'$ ,  $\lambda = -1^{\text{h}}5^{\text{m}}, 2E$ )<sup>1)</sup>.

Die Beobachtungen wurden in 22 wolkenlosen Nächten in dem Zeitraum vom 29 Mai bis zum 11 Juli 1937 durchgeführt. Als Instrument diente ein älteres transportables Fernrohr von Prokesch in horizontaler Montierung (Objektivdurchmesser 12,5 cm, Brennweite 129,5 cm), das mir liebenswürdiger Weise von Prof. K. Graff in Wien geliehen wurde. Es war mit einem Graffschen Keilphotometer verbunden, das von mir aus Warschau mitgebracht wurde. Als Chronometer diente eine Omega-Taschenuhr, welcher an der Mehrzahl der Tage Mittags mit Hilfe des akustischen Zeitsignals in dem 17 km entfernten Hafen von Split kontrolliert wurde.

Beobachtungsprogramm umfasste einige Bedeckungssterne, die im Juni mit Hilfe des vorhandenen Fernrohrs am Beobachtungs-

---

<sup>1)</sup> Institut d'Astronomie Pratique de l'École Polytechnique de Varsovie. Publikation N° 17.

ort erreichbar waren, und zwar: RX, UX, AK Herculis, UY Virginis und Z Vulpeculae. Es wurden in den 6 Wochen insgesamt 1464 Keilablesungen erhalten, die stets am folgenden Tage mit Hilfe einer mitgebrachten Rechenmaschine berechnet wurden. Die Ergebnisse finden sich im Beobachtungszirkular d. Astron. Nachrichten: 1937, Nr 24, 26, 27, 28 und in den Astron. Nachrichten Nr 6296, 6302, 6331 abgedruckt.

Die folgende Bearbeitung enthält: 1) Eine Diskussion aller bis jetzt veröffentlichten Minima von UY Virginis, die zu einer Verkürzung der bisherigen Periode auf  $1/3$  führen, 2) die Messungen des Lichtwechsels von UX Herculis nebst einer photometrischen Lichtkurve, die bis jetzt in der Literatur noch gefehlt hat.

### Eichung des Keiles

Das Photometer wurde neuerdings ausgerüstet mit einem neuen Zeisschem Keil aus Neutralglass NG3 (Jenaer Glaswerk Schott & Gen. Jena, Liste 4777), einem Präzisionsampèremeter von Siemens & Halske, einem Widerstand mit kontinuierlicher Regulierung der Stärke des Stromes, einer Wolframglühlampe (Osram) von 3,5 Volt und 0,3 Amp. Als Stromquelle diente ein 4 Volt-Bleiakumulator der Firma „Varta“, der die ganze Zeit ohne Nachladen einwandfrei arbeitete.

Die Keilkonstante  $c$  wurde vorher auf der Warschauer Universitätssternwarte an 7 mondlosen Abenden in dem Zeitraume: 1935 Novem. 15 bis 1936 März 22 mit Hilfe von 302 Messungen der weissen Plejadensterne (Astron. Abhandl. d. Hamb. Sternwarte in Bergedorf, Bd II, Nr 3) bestimmt. Bei der Eichung des Keiles wurden die Helligkeiten der Plejadensterne graphisch für die differenzielle Extinktion des Abends in der Weise korrigiert, dass die Messungen immer mit demselben Stern begonnen und geschlossen und die Änderungen auf die Messungen proportional der Zeit verteilt wurden. Die Keilkonstante wurde dann für jeden Abend mit Hilfe der Gleichung:  $y=cx+d$  nach der Methode der kleinsten Quadraten analytisch bestimmt. Der Verlauf der Auslöschungskurve des Keiles bei beliebiger aber konstanter Skalenablesung des Ampèremeters erwies sich als geradlinig (Abbildung 1). Dagegen zeigte der Wert der Keilkonstante eine Abhängigkeit von der Ampèremeterskalenablesung, dh von der Farbe des künstlichen

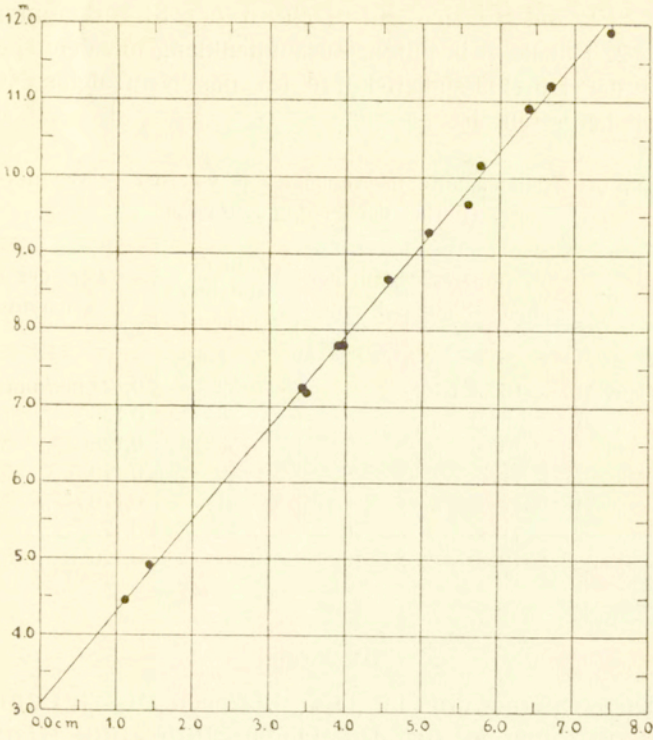


Abbildung 1. Eichung des Keiles mit Hilfe der weissen Plejadensterne 1936, März 22.

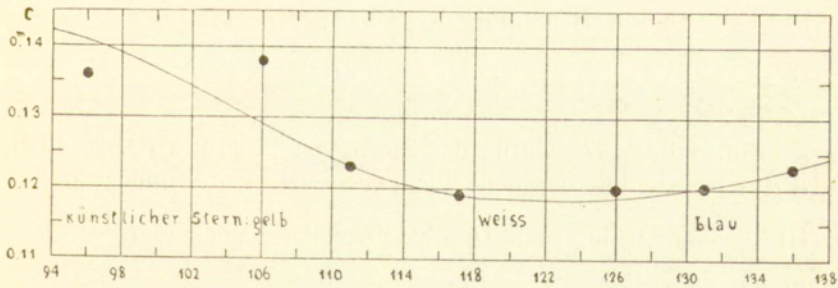


Abbildung 2. Verlauf der Keilkonstante in der Abhängigkeit von der Stärke des Glühens der Photometerlampe. Abszissenachse: Ablesungen der Ampèrerskala, von links nach rechts: schwaches, normales und starkes Glühen der Lampe.

1\*

Sternes. Er änderte sich entsprechend der Stromspannung (Abbildung 2, Tabelle I) in gutem Zusammenklang mit dem spektralen Verlauf der Durchlässigkeitskurve für das Neutralglas NG3, aus der Keil hergestellt ist.

I. Verlauf der Keilkonstante in Abhängigkeit von der Stärke des Glühens (Farbe) der Photometerlampe.

Abend	Ampère-meter-Skala	Zahl der Sterne	Zahl der Keilablesungen	Wert der Keilkonstante $c$ .
1935 Nov. 15	136,3 pars	7	32	0,123 mg/mm $\pm 0,003$
„ „ 18	96,0 „	8	36	0,136 „ $\pm 0,004$
1936 Febr. 10	106,0 „	7	33	0,138 „ $\pm 0,006$
„ März 17	117,1 „	8	40	0,119 „ $\pm 0,006$
„ „ 18	126,0 „	15	61	0,120 „ $\pm 0,003$
„ „ 21	111,0 „	10	43	0,123 „ $\pm 0,003$
„ „ 22	131,0 „	13	57	0,120 „ $\pm 0,002$

**UY Virginis**

Dieser Stern wurde im Jahre 1922 von Miss J. Cannon auf den Harvard-Platten aus den Jahren: 1915—1918 (Harv. Circ. Nr 231) als veränderlich entdeckt und als Algolstern erkannt. Die Veränderlichkeit wurde dann von Miss Carpenter und Miss Wells bestätigt. In dem „Katalog und Ephemeriden veränderlicher Sterne für 1923“ (Vierteljahrschrift d. A. G., Jahrgang 57) tritt UY Virginis zuerst mit den Elementen:

(I) Min. helioz. = J. D. 2421697,0 +  $1^d.998 \times E$   
auf.

Im Jahre 1925 wurde der Stern von F. Henz (B. Z. 1926, Nr 19) beobachtet, der neue Lichtwechselelemente, und zwar:

(II) Min. helioz. = J. D. 2424302,399 +  $1^d.99955 \times E$   
erhalten hatte.

Der Stern blieb dann 11 Jahre ganz in Vergessenheit. Erst 1936 und 1937 wurde er von neuem von F. Lause (A. N. 6307 u. 6318) und dem Unterzeichneten (A. N. 6296 u. 6331) verfolgt, der auf der Insel Šolta an 10 Abenden 192 Keilablesungen und



## II. Heliozentrische Minima vom UY Virginis.

B	$E_1$	$B-R_1$	$E_{II}$	$B-R_{II}$	$E_{III}$	$B-R_{III}$	$E_{IV}$	$B-R_{IV}$	$E_V$	$B-R_V$	Beobachter	Autorität
2424286,4	+1296	<sup>d</sup> -0,008	-8	<sup>d</sup> -0,003	-2005	<sup>d</sup> -0,329	-8	<sup>d</sup> -0,013	-24	<sup>d</sup> -0,014	Henz	B. Z. 1926, 19 u. Manuskript
288,423	+1297	+0,017	-7	+0,021	-2004	-0,300	-7	+0,011	-21	+0,010	"	"
302,387	+1304	-0,005	0	-0,012	-1997	-0,284	0	-0,012	0	-0,013	"	"
306,389	+1306	+0,001	+2	+0,009	-1995	+0,297	+2	-0,006	+6	-0,007	"	"
310,386	+1308	+0,002	+4	-0,011	-1993	-0,276	+4	-0,006	+12	-0,007	"	"
312,386	+1309	+0,004	+5	-0,011	-1992	-0,270	+5	-0,004	+15	-0,005	"	"
5622,698:	—	—	—	—	-1335	-0,279	—	(-0,511)	+481	-0,078:	Morgenroth	A. N. 6296 u. Manuskript
680,588:	—	—	—	—	-1306	-0,227	—	(-0,569)	+568	-0,136:	"	"
6065,545:	—	—	—	—	-1113	-0,189	—	(+0,734)	+2647	+0,076:	"	"
095,450:	—	—	—	—	-1098	-0,200	—	(+0,666)	+2692	+0,008:	"	"
113,401:	—	—	—	—	-1089	-0,198	—	(+0,633)	+2719	+0,024:	"	"
478,407:	+2393	+0,193	+1088	(-1,5)	-906	-0,168	+1089	-0,032	+3267	-0,021:	"	"
8285,500	—	—	+1992	(-3,1)	0	-0,001	—	(+0,688)	+5980	+0,043	Lause	A. N. 6318
297,465	—	—	+1998	(-3,1)	+6	-0,002	—	(+0,664)	+5998	+0,019	"	"
313,426	—	—	+2006	(-3,1)	+14	-0,003	—	(+0,640)	+6022	-0,005	"	"
634,510	+3472	+0,454	+2167	(-3,4)	+175	-0,011	+2168	+0,013	+6504	+0,036	"	"
636,520	+3473	+0,466	+2168	(-3,4)	+176	-0,005	+2169	+0,025	+6507	+0,048	"	"
638,504	+3474	+0,452	+2169	(-3,4)	+177	-0,006	+2170	+0,011	+6510	+0,034	"	"
660,465	+3485	+0,435	+2180	(-3,4)	+188	-0,017	+2181	-0,008	+6543	+0,015	"	"
664,429	+3487	+0,403	+2182	(-3,4)	+190	-0,008	+2183	-0,041	+6549	+0,018	"	"
684,384	+3497	+0,378	+2192	(-3,4)	+200	-0,003	+2193	-0,068	+6579	-0,044	"	"
690,397	+3500	+0,397	+2195	(-3,4)	+203	-0,033	+2196	-0,049	+6588	-0,026	"	"
692,365	+3501	+0,367	+2196	(-3,4)	+204	-0,006	+2197	-0,079	+6591	-0,056	"	"
692,430	+3501	+0,432	+2196	(-3,4)	+204	-0,071	+2197	-0,014	+6591	+0,009	Gadomski	A. N. 6296
694,341	+3502	+0,345	+2197	(-3,4)	+205	-0,012	+2198	-0,102	+6594	-0,078	Lause	A. N. 6318

13 Argelandersche Schätzungen erhielt. Die Minima dieses Sternes waren unterdessen verloren gegangen. Lause hat daher neue Elemente (A. N. 6307):

$$(III) \quad \text{Min. helioz.} = \text{J. D. } 2428285,501 + 1^d,99440 \times E$$

und der Verfasser (A. N. 6296):

$$(IV) \quad \text{Min. helioz.} = \text{J. D. } 2424302,399 + 1^d,9982 \times E$$

abgeleitet.

Gleichzeitig hat Morgenroth 5 Momente des verkleinerten Lichtes dieses Sternes, die er aus ca 100 Überwachungsplatten der Sonneberger Sternwarte aus den Jahren: 1929—31 erhalten hatte, veröffentlicht (A. N. 6296). Diese Beobachtungen konnte er aber weder mit Hilfe der Periode von Henz (II), noch mit Hilfe einer Halbierung derselben darstellen.

Zwecks Klarstellung der Angelegenheit stelle ich zunächst alle bis jetzt veröffentlichten Minima von UY Virginis zusammen (Tabelle II).

Aus den Zahlen der Tabelle II geht folgendes hervor: Die Lichtwechselelemente I, II, III und IV betreffen nur jedes dritte Minimum des Veränderlichen. Ausserdem weisen die  $B-R_I$ ,  $B-R_{III}$  und  $B-R_{II}$  einen systematischen Gang auf indem sie während der Beobachtungszeit bis zum 5-fachen der wahren Periode anwachsen. Aus den Epochen der Tabelle II, mit Ausnahme der 6 Sonneberger Momente die, aus Überwachungsplatten gewonnen, offenbar nur die verminderte Helligkeit des Sternes anzeigen, habe ich nun mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate folgende neuen Elemente erhalten:

$$(V) \quad \text{Min. hel.} = \text{J. D. } 2424302,40 (\pm 0^d,02) + 0^d,666063 (\pm 0^d,000003) \times E.$$

Aus obiger Bearbeitung ist ersichtlich, dass die Mehrzahl der Minima dieses Sternes verborgen bleibt, da  $2^d - 3 \times P = 0^d,0018$  ist, so dass während einer Opposition meistens nur jedes dritte Minimum für einen Beobachtungsort zugänglich ist. Zur Prüfung der Elemente (V) wäre die Veröffentlichung der sechs Momente des verminderten Lichtes dieses Sternes auf den Harvard-Platten aus den Daten: 1915 April 18, Juli 15, 1916 Juli 18, 20, 26 und 1918 April 13 (Harv. Cir. 231) wünschenswert.

### UX Herculis

Als Anschluss-Stern für diesen Veränderlichen diene BD +16° 3308 = 9<sup>m</sup>,22 (Harv. Ann. LXIII, 173), als Kontrollstern BD +16° 3313 = 8<sup>m</sup>,94 (Harv. Ann. LXIII, 173).

Die Tabelle III enthält die Ergebnisse der Messungen in chronologischer Folge, wobei  $n$  — die Zahl der Keilablesungen bezeichnet. Die Beobachtungen der Tabelle wurden mit Hilfe der Elemente von Kordylewski (AA c, II, 74):

$$\text{Min. } 2419876,466 + 1^d,548859 \times E$$

auf das Minimum  $E = +5708$  reduziert. Hieraus erhielt ich folgende Normalhelligkeiten (Tabelle IV) und die nachstehende Lichtkurve in der Nähe des Hauptminimums (Tabelle V, Abbildung 3):

IV. Normalhelligkeiten von UX Herculis.

Nr	Phase	n	Gewicht	Gr.	Nr	Phase	n	Gewicht	Gr.	Nr	Phase	n	Gewicht	Gr.
	2428...			<sup>m</sup>		2428...			<sup>m</sup>		2428...			<sup>m</sup>
1	717.1954	10	4	8.56	10	717.3327	15	11	9.59	19	717.4230	25	16	8.97
2	717.2137	15	8	8.59	11	717.3456	10	7	9.69	20	717.4377	20	15	8.88
3	717.2340	10	5	8.55	12	717.3548	11	5	9.81	21	717.4543	20	16	8.73
4	717.2508	10	6	8.63	13	717.3641	10	8	9.80	22	717.4745	30	21	8.61
5	717.2679	10	6	8.67	14	717.3702	10	6	9.81	23	718.0225	5	2	8.58
6	717.2828	14	6	8.92	15	717.3768	15	10	9.68	24	718.2013	5	2	8.79
7	717.2921	10	7	9.05	16	717.3829	20	12	9.52	25	718.6285	5	3	8.72
8	717.3118	13	8	9.24	17	717.3978	21	12	9.36	26	718.6891	5	3	8.61
9	717.3233	10	8	9.49	18	717.4090	20	12	9.24					

V. Lichtkurve von UX Herculis.

Phase	Gr.	Phase	Gr.
<sup>d</sup> 0.00	<sup>m</sup> 9.81	<sup>d</sup> ±0.07	<sup>m</sup> 8.96
±0.01	9.81	±0.08	8.84
±0.02	9.66	±0.09	8.74
±0.03	9.51	±0.10	8.66
±0.04	9.36	±0.11	8.60
±0.05	9.22	±0.12	8.58
±0.06	9.09	±0.13	8.58

III. Beobachtungen.

J. D. (M. Z. Gr. helioz.)	n	Gr.	Bemerk.	J. D. (M. Z. Gr. helioz.)	n	Gr.	Bemerk.
2428703.3774	5	<sup>m</sup> 9.42	1,2	2428717.4426	10	<sup>m</sup> 8.78	
.3868	5	9.63		.4562	10	8.77	
.3955	5	9.65		.4715	10	8.69	
.4070	5	9.64		.4847	10	8.52	
.4163	5	9.79	3,4				
.4257	5	9.73		720.3825	5	8.90	
.4351	5	9.66		.3908	4	8.96	13
.4462	5	9.64		.4062	8	9.15	1,3
.4563	5	9.42		.4179	5	9.35	
.4667	5	9.19		.4290	10	9.56	
.4746	5	9.10		.4418	5	9.76	
.4834	5	9.03	5	.4508	6	9.84	
.4913	5	9.02	6	.4606	5	9.87	
.4989	5	8.85	7	.4696	5	9.81	
.5080	5	8.77	8	.4804	5	9.68	
.5191	5	8.65		.4894	5	9.54	
.5264	5	8.59		.5040	10	9.45	9
.5309	5	8.68	9,4				
				723.3908	10	8.56	8,3
706.3695	5	8.68	2	.4098	10	8.56	
				.4294	10	8.55	
713.3759	5	8.58	10	.4462	10	8.63	8
				.4633	10	8.67	
717.3669	5	9.82	11	.4751	5	8.92	
.3742	5	9.72	12	.4875	10	9.05	9,5
.3819	5	9.65					
.3916	10	9.38	11	724.3967	5	8.79	
.4030	11	9.20					
.4162	10	9.04	5	725.3728	5	8.72	8
.4287	10	8.85					
				726.4334	5	8.61	

Bemerkungen: 1. Luft rein. — 2. Mondlicht stört. — 3. Luft sehr ruhig. — 4. Bilder vortrefflich. — 5. In der Nähe des Zeniths. Stellung des Beobachters schwierig. — 6. Mond bereits untergegangen. — 7. Himmelsgrund dunkel. — 8. Luft sehr rein. — 9. Stern weiter nicht verfolgbar (Gebäude stört). — 10. Zirruswolken. — 11. Bora. — 12. Bilder ruhig. — 13. In der Nähe Wolken.

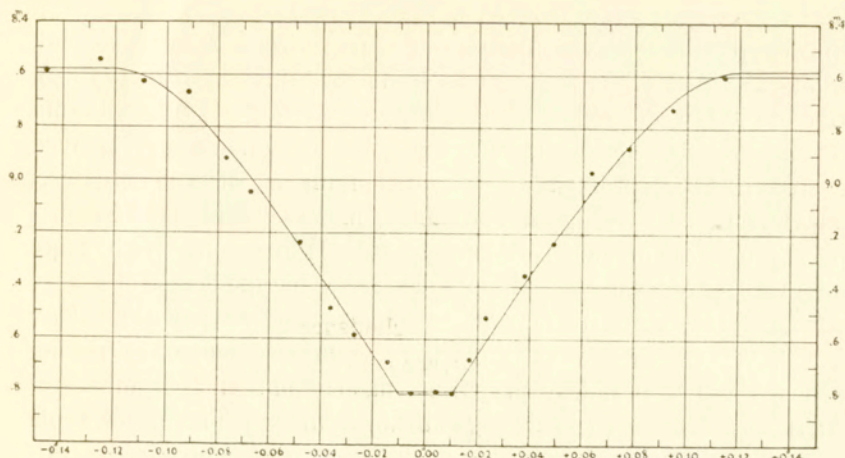


Abbildung 3. Lichtkurve und Normalhelligkeiten von UX Herculis.

Aus der Lichtkurve geht folgendes hervor:

Normalepoche: Min. helioz. 2428717,3598 (M. Z. Gr.)

$$E=+5708 \quad B-R=+0^d,0066,$$

$$M=8^m,62 \quad m=9^m,81 \quad m-M=1^m,19 \quad D=0^d,24 \quad d=0^d,02.$$

Der Verlauf der Lichtkurve im Hauptminimum ist symmetrisch.

Warszawa, Universitäts-Sternwarte  
1938 September.

L. Wertenstein i T. Lisiński.

### O wytwarzaniu neutronów drogą naświetlania berylu promieniami gamma RaC i ThC''.

Przedstawił S. Pieńkowski, dnia 14 czerwca 1938 r.

#### STRESZCZENIE.

Beryl naświetlany promieniami  $\gamma$  radu wysyła neutrony, powodujące caeteris paribus większą liczbę procesów  $(n, \gamma)$ , niż neutrony wytwarzane w berylu przez równoważny pod względem liczby czynnych fotonów preparat ThC''. Energia czynnych fotonów wynosi w pierwszym przypadku  $1.77 \cdot 10^6$  (pomijając niewielką liczbę fotonów o większej energii), w drugim przypadku  $2.6 \cdot 10^6$  eV. Ponieważ badana reakcja pochłania  $1.6 \cdot 10^6$  eV, można wspomniany

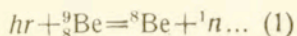
fakt tłumaczyć a) rezonansowym charakterem reakcji fotojądrowej, b) mniejszą prędkością neutronów z pierwszego źródła, co, jak wiadomo, idzie w parze ze zwiększoną wydajnością reakcji ( $n, \gamma$ ). Badano aktywację srebra neutronami z obu źródeł: 1) filtrowanymi, przez niewielką ilość parafiny (w celu otrzymania mierzalnych efektów), 2) rozproszonymi i zwolnionymi w wielkiej objętości parafiny (w celu wyrugowania w miarę możliwości wpływu prędkości początkowej neutronów). W przypadku 1) neutrony pochodzące od radu powodowały 1.75 razy większą, w przypadku 2) 1.4 razy większą aktywację, niż neutrony pochodzące od równoważnej ilości ThC''. Wynik ten dowodzi że większą wydajność neutronów pochodzących od radu należy przypisać, między innymi, ich mniejszej energii, zupełne rozwiązanie zagadnienia wymaga jednak porównania całkowitych liczb neutronów wytwarzanych przez oba źródła, nie zaś tylko koncentracji powolnych neutronów w określonym miejscu środowiska wodorowego (w miejscu, w którym odbywała się ekspozycja).

L. Wertenstein et T. Lisiński.

### Sur la production de neutrons par irradiation du beryllium par les rayons $\gamma$ du RaC et du ThC''.

Mémoire présenté par M. S. Pieńkowski, dans la séance du 14 juin 1938.

La réaction



où le noyau instable Be se scinde en deux particules  $\alpha$  (Paneth et Glückauf) n'est possible que si l'énergie quantique des rayons  $\gamma$  surpasse 1.6 Me. v. Cette réaction peut être provoquée par les rayons  $\gamma$  du RaC et ThC''. Dans le premier cas l'effet est dû surtout à la forte raie 1.77 Me. v. émise dans 25% des désintégrations de RaC, dans le deuxième cas la seule raie active est celle de 2.6 Me. v. émise dans chaque désintégration de ThC''. On peut se demander comment l'efficacité de la réaction (1) varie avec l'énergie quantique du rayonnement  $\gamma$ . Gentner<sup>1)</sup> a trouvé qu'à nombre de photons égal, les neutrons engendrés dans une masse donnée de

<sup>1)</sup> W. Gentner, C. R. 199, 1211, 1934.

béryllium par les rayons  $\gamma$  du RaC et ralentis dans la paraffine produisent une activation du type ( $n\gamma$ ) 1.6 fois plus grande que les neutrons produits par les rayons  $\gamma$  du ThC''. Un résultat analogue a été obtenu par Chadwick et Goldhaber<sup>1)</sup> et par Rotblat<sup>2)</sup>. Toutefois ces résultats ne signifient pas nécessairement que les rayons  $\gamma$  du ThC'' provoquent la réaction (1) avec une efficacité inférieure à celle des rayons  $\gamma$  du RaC. En effet, les données expérimentales ne concernent pas le nombre des neutrons, mais leur faculté d'exciter la radioactivité artificielle. Or ainsi que Chadwick et Goldhaber l'ont fait observer, les neutrons dus aux ThC'' sont plus rapides et par suite moins aptes à provoquer une réaction ( $n\gamma$ ) que les neutrons dus aux rayons  $\gamma$  de RaC. Dans ces conditions, les différences observées pourraient être attribuées plutôt aux propriétés des neutrons émis dans les deux cas qu'à une différence de l'efficacité spécifique des rayonnements  $\gamma$  en question.

Nous avons exécuté quelques expériences qui semblent confirmer ce point de vue. Nous avons disposé comme sources des rayons  $\gamma$ , d'une part d'une ampoule contenant 3.9 mg de Ra et d'autre part d'une préparation de mésothorium dont le rayonnement  $\gamma$  mesuré à travers 5 cm de plomb était équivalent à celui de 2 mg de radium. Le béryllium se trouvait dans un vase de laiton dont les parois latérales étaient des surfaces cylindriques coaxiales de 28 et de 65 mm. de diamètre et de 5 cm de hauteur, l'un ou l'autre tube émetteur des rayons  $\gamma$  était placé suivant l'axe et on pouvait au besoin disposer un écran absorbant entre ce tube et le béryllium. Le béryllium était pulvérisé et mélangé avec la paraffine en vue de faciliter le ralentissement des neutrons. Le vase en laiton était placé dans un bloc de paraffine mesurant 10×10×5 cm. Pour déceler les neutrons, on se servait d'une feuille d'argent de 0.1 mm d'épaisseur qui venait se placer dans l'espace cylindrique libre de manière à ce qu'elle restât appuyée contre la face intérieure du vase. Après une exposition de 2 minutes, on transportait la feuille sur un compteur de Geiger Müller et on mesurait son activité pendant 2 minutes. L'expérience consistait à comparer l'activation obtenue avec l'ampoule de radium comme source de rayons  $\gamma$  à celle obtenue avec le mésothorium. On a obtenu les

<sup>1)</sup> J. Chadwick et M. Goldhaber, Proc. Roy. Soc., A, 151, 479, 1935.

<sup>2)</sup> J. Rotblat, Spraw. T. N. W. XXX, 114, 1937.

résultats suivants (il s'agit des moyennes d'une série d'expériences pendant laquelle on a compté environ 20.000 impulsions):

Nombre d'impulsions (corrigé)		
en 2 min.		
Radium	42	
Mésothorium	12	Rapport Ra/MsTh = 3·5.

Les mesures comparatives du rayonnement  $\gamma$  de deux sources ayant montré que le radium émettait environ deux fois plus de photons susceptibles de traverser 5 cm de plomb que le mésothorium, nous voyons que dans les conditions de l'expérience, le mésothorium est  $3\cdot5/2=1\cdot75$  fois moins efficace que le radium en ce qui concerne les effets dus aux neutrons émis dans les deux cas. Or ces conditions étaient telles que le rendement de l'activation devait dépendre pour une grande part de la qualité des neutrons émis directement par la source, car la quantité de paraffine employée pour le ralentissement était petite et le récepteur placé tout contre la source recevait surtout les neutrons primaires non ralentis. Pour vérifier si la situation privilégiée du radium était réellement due à l'efficacité plus grande des neutrons produits par son rayonnement, nous avons tâché de nous placer dans des conditions aussi favorables que possible au ralentissement et à une distance de la source suffisante pour que l'effet des neutrons primaires soit négligeable. Nous avons entouré le bloc de paraffine, contenant le béryllium, d'une grande masse de paraffine de manière à réaliser un «*récepteur de gaz neutronique*» et avons disposé la lame d'argent à l'extérieur du bloc central, appuyée contre l'une de ses faces. Dans ces conditions nous avons obtenu les résultats suivants:

Nombre d'impulsions (corrigé)		
en 2 min.		
Radium	61·2	
Mésothorium	23	Rapport Ra/MsTh = 2·66.

On voit qu'en présence d'une grande masse de paraffine et à l'exclusion (approchée) de neutrons primaires, le rendement des rayons  $\gamma$  du mésothorium se trouve amélioré. Le rapport des efficacités des deux sources tombe à 1·33; il est toutefois supérieur, même dans ces conditions à l'unité.



On peut remarquer que nos expériences, tout en confirmant l'hypothèse de Chadwick et Goldhaber concernant le rôle de la vitesse des neutrons, ne suffisent pas cependant à déterminer directement le rapport des nombres de neutrons produits par les photons des sources étudiées et par conséquent à établir la relation cherchée entre l'énergie quantique des rayons  $\gamma$  et leur efficacité dans la réaction (1). On sait en effet que l'activation produite dans un milieu hydrogéné varie avec la distance du récepteur à la source suivant une loi différente pour des neutrons de vitesse initiale différente. La distance où les neutrons thermiques ou ceux de résonance acquièrent la plus grande concentration est d'autant plus petite que la vitesse initiale des neutrons est plus faible. Il se peut donc que nous nous trouvions dans le cas du radium à une distance où les neutrons étaient au maximum d'efficacité, tandis que cette distance n'étaient pas encore atteinte par les neutrons du mésothorium. Pour trancher cette question, il faudrait étudier dans les deux cas la distribution des neutrons au sein d'une grande masse de paraffine ou d'eau. Une expérience destinée à étudier cette distribution est en cours.

Nous avons cherché également à comparer approximativement les pouvoirs pénétrants des rayons  $\gamma$  responsables pour la production des neutrons dans les deux cas étudiés. Nous nous sommes servis à cet effet d'un cylindre de plomb de 22 mm. de diamètre, muni d'un orifice cylindrique suivant l'axe, de sorte que ce cylindre pouvait être placé pendant l'expérience d'activation dans le récipient contenant le béryllium. Les rayons  $\gamma$  devaient traverser 8 mm de plomb, avant de tomber sur le béryllium et on comparait l'activation produite avec ou sans écran de plomb par les neutrons dus aux rayons  $\gamma$  de RaC et de ThC''. On a trouvé que dans le premier cas l'absorption des rayons  $\gamma$  dans le plomb réduisait l'activation dans le rapport de 1:59:1, tandis que dans le cas des rayons  $\gamma$  de ThC'' la réduction correspondante était de 1:47:1. On peut comparer ce résultat à celui qu'on obtiendrait en se basant sur les coefficients d'absorption des rayons  $\gamma$  principalement actifs, c. à d. de la raie  $1.77.10^6$  e. v. de RaC et de la raie  $2.6.10^6$  e. v. de ThC''. Le calcul donne dans le premier cas, comme facteur d'affaiblissement, 1.53 et dans le deuxième cas 1.46. L'accord avec les nombres trouvés dans ce travail est satisfaisant.

## Posiedzenie

z dnia 18 października 1938 r.

Stanisław Mazur.

### O zagadnieniu istnienia bazy przeliczalnej dla zbiorów liniowych przeliczalnych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 18 października 1938 r.

Stanisław Mazur.

### Sur le problème d'existence d'une base dénombrable d'ensembles linéaires dénombrables.

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 18 octobre 1938.

$\Psi$  étant une famille donnée quelconque d'ensembles (formés d'éléments arbitraires), nous dirons avec M. Sierpiński que la famille  $\Psi$  possède une *base dénombrable*, s'il existe une famille  $\Phi$  d'ensembles (pas nécessairement contenue dans  $\Psi$ ), telle que tout ensemble de la famille  $\Psi$  est de la forme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= (E_1 + E_2 + \dots)(E_2 + E_3 + \dots)(E_3 + E_4 + \dots) \dots = \\ &= E_1 E_2 E_3 \dots + E_2 E_3 E_4 \dots + E_3 E_4 E_5 \dots + \dots, \end{aligned}$$

où  $E_n \in \Phi$  pour  $n=1, 2, 3, \dots$

En rapport avec un théorème de M. C. Burstin et un problème de M. Sierpiński<sup>1)</sup>, M. S. Ruziewicz a posé récemment le problème s'il existe une base dénombrable pour la famille  $\Psi$  de tous les ensembles linéaires dénombrables. Le but de cette Note

---

<sup>1)</sup> Fund. Math. 27, p. 293, problème 71.

est de démontrer que la réponse au problème de M. Ruziewicz est positive si l'on admet l'hypothèse du continu. Je démontrerai notamment (sans faire appel à l'hypothèse du continu) ce

**Théorème.** *Il existe une base dénombrable pour la famille de tous les sous-ensembles au plus dénombrables d'un ensemble de puissance  $\aleph_1$ .*

Démonstration. M. Sierpiński a démontré (en utilisant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'il existe un ensemble linéaire  $E$  de puissance  $\aleph_1$  jouissant de la propriété  $\lambda$  (c. à d. tel que tout sous-ensemble dénombrable de  $E$  est un  $G_\delta$  relativement à  $E$ )<sup>1)</sup>. Soit  $W$  un sous-ensemble dénombrable de  $E$  dense dans  $E$ .  $m$  étant un nombre naturel et  $w_1, w_2, \dots, w_n$  une suite finie quelconque d'éléments de  $W$ , désignons par  $Z(m; w_1, w_2, \dots, w_n)$  l'ensemble de tous les éléments  $x \in E$ , tels qu'on a pour un (au moins)  $k=1, 2, \dots, n$  l'inégalité  $|x - w_k| \leq 1/m$ . Je dis que la famille  $\Phi$  de tous les ensembles  $Z(m; w_1, w_2, \dots, w_n)$  (qui est évidemment dénombrable) est une base pour tous les sous-ensembles au plus dénombrables de  $E$ .

Soit, en effet,  $D \subset E$  et  $\overline{D} \leq \aleph_0$ . Nous pouvons donc poser  $D = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  (en répétant, s'il faut, le même élément, pour que la suite soit toujours infinie). L'ensemble  $E$  jouissant de la propriété  $\lambda$ , l'ensemble  $E - D$  est un  $F_\sigma$  relativement à  $E$ : il existe donc des ensembles  $F_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) fermés dans  $E$  et tels que

$$E - D = F_1 + F_2 + F_3 + \dots, F_n \subset F_{n+1} \text{ pour } n=1, 2, 3, \dots$$

Or, on voit sans peine qu'il existe, pour  $n$  naturel donné, les nombres naturels  $m_n, i_{n,1}, i_{n,2}, \dots, i_{n,n}$ , tels qu'en posant

$$Z_n = Z(m_n, w_{i_{n,1}}, w_{i_{n,2}}, \dots, w_{i_{n,n}})$$

on a  $x_k \in Z_n$  pour  $k=1, 2, \dots, n$  et  $Z_n F_n = 0$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = D$ .

Notre théorème se trouve ainsi démontré<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. et L. Varsovie* XXV, p. 104; v. aussi C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografie Matemat. t. III), Warszawa-Lwów 1933, p. 270.

<sup>2)</sup> En rapport avec notre théorème cf. la Note de M. W. Sierpiński dans *Fund. Math.* 31, p. 259-261.

Georges de Alexits.

### O strukturze krzywych regularnych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 18 października 1938.

Georges de Alexits.

### Sur la structure des courbes régulières.

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 18 octobre 1938.

Un théorème important<sup>1)</sup> nous apprend que les ensembles compacts et fermés de dimension positive contiennent un continu. Ce théorème est valable aussi pour les ensembles  $F_\sigma$ , mais il cesse d'être exact, si l'on considère des ensembles qui ne sont pas des  $F_\sigma$ . On connaît des  $G_\delta$  discontinus de toute dimension et MM. Knaster et Kuratowski<sup>2)</sup> ont démontré qu'il existent même des courbes régulières comprenant des sous-ensembles discontinus de dimension positive. Nous allons voir que, pour les sous-ensembles d'une courbe régulière quelconque, le théorème sur les  $F_\sigma$  reste encore exact, si l'on remplace les  $F_\sigma$  par des  $G_\delta$ . Après avoir établi ce fait, nous en tirerons quelques conséquences concernant la structure des courbes régulières.

**Théorème 1.** *K étant une courbe régulière et l'ensemble  $E \subset K$  un  $G_\delta$  de dimension positive, il existe un arc  $C$  compris dans  $E$ .*

Démonstration. D'après un théorème de M. Whyburn<sup>3)</sup>, tout sous-ensemble de dimension positive d'une courbe régulière contient un ensemble connexe comprenant plus d'un point. On peut donc affirmer l'existence d'un ensemble connexe  $A \subset E$  comprenant plus d'un point. Envisageons l'ensemble  $\bar{A}E$ ; celui-ci est évidemment un  $G_\delta$  comprenant plus d'un point.  $\bar{A}E$  étant un sous-ensemble connexe d'une courbe régulière, il est, en vertu d'un théorème de M. Wilder<sup>4)</sup>, localement connexe en sens strict.

<sup>1)</sup> S. Mazurkiewicz, Fund. Math. 3 (1922), p. 65.

<sup>2)</sup> B. Knaster et C. Kuratowski, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), p. 106.

<sup>3)</sup> G. T. Whyburn, Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), p. 85.

<sup>4)</sup> R. L. Wilder, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 15 (1929), p. 616.

On entend par cela que tout voisinage  $V$  d'un point arbitraire  $p \in \bar{A}E$  comprend un voisinage  $W$  de  $p$  tel que  $\bar{A}E \cdot W$  soit connexe. L'ensemble  $\bar{A}E$  possède donc les propriétés suivantes: 1<sup>o</sup>  $\bar{A}E$  est connexe; 2<sup>o</sup>  $\bar{A}E$  est localement connexe en sens strict; 3<sup>o</sup>  $\bar{A}E$  est un  $G_\delta$ ; 4<sup>o</sup>  $\bar{A}E$  comprend plus d'un point. Or M. Menger <sup>5)</sup> a démontré que ces quatre propriétés entraînent la propriété suivante: tout couple de points de l'ensemble  $\bar{A}E$  peut être lié par un arc compris dans  $\bar{A}E$ . C'était justement notre proposition.

Désignons par  $K^n$  l'ensemble des points de  $K$  dont l'ordre de ramification est  $\leq n$ . Du théorème précédent il résulte ce

**Corollaire 1.**  *$K$  étant une courbe régulière, l'ensemble  $K^n$  est au plus de dimension 0 ou bien il contient un arc.*

Nous appellerons le sous-ensemble non vide  $M$  de  $K$  un sous-ensemble constamment 0-dimensionnel de  $K$ , si,  $N$  étant un sous-ensemble 0-dimensionnel arbitraire de  $K$ , la somme  $M+N$  est de dimension 0. L'auteur a démontré <sup>6)</sup> que l'ensemble  $K^1$  des points finaux d'une dendrite  $K$  est constamment 0-dimensionnel. Le théorème 1 nous permet de généraliser cet énoncé pour les courbes régulières.

**Théorème 2.** *Le sous-ensemble  $K^1$  d'une courbe régulière  $K$  est constamment 0-dimensionnel ou vide.*

Admettons, en effet, qu'il existe un sous-ensemble 0-dimensionnel  $N$  de  $K$  tel que  $K^1+N$  ne soit pas de dimension 0; nous en déduirons une contradiction. Il est connu <sup>7)</sup> qu'il existe un sous-ensemble 0-dimensionnel  $B$  de  $K$  qui est un  $G_\delta$  et  $N \subset B$ . La somme  $K^1+B$  est un  $G_\delta$ , puisque  $K^1$  et  $B$  le sont aussi, et on a

$$\dim(K^1+B) \geq \dim(K^1+N) > 0.$$

$K^1+B$  contient donc, en vertu du théorème 1, un arc  $C$ . L'ensemble  $B$  étant 0-dimensionnel,  $BC$  est d'autant plus de dimension 0; il ne contient donc aucun continu. Or ce n'est pas pos-

<sup>5)</sup> K. Menger, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 212. V. aussi N. Aronszajn, Fund. Math. 15 (1930), p. 228 et C. Kuratowski, Fund. Math. 15 (1930), p. 301.

<sup>6)</sup> G. v. Alexits, Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), p. 410.

<sup>7)</sup> L. Tumarkin, Math. Ann. 98 (1928), p. 653.

sible, parce que  $K^1 C \subset C^1$ , c'est à dire  $BC \supset C - C^1$ ; par conséquent, l'ensemble  $BC$  comprend un sous-arc de  $C$ . Cette contradiction prouve l'absurdité de l'hypothèse  $\dim(K^1 + N) > 0$ , c. q. f. d.

*Problème.* Quelle est la plus grande classe de continus  $K$  dont  $K^1$  est constamment 0-dimensionnel ou vide?

Désignons par  $K_l$  l'ensemble des points de division locale du continu  $K$ . Il est connu <sup>8)</sup> que,  $K$  étant une courbe régulière, l'ensemble  $K - K_l$  est un  $G_\delta$  discontinu. Du théorème 1 il résulte donc ce

**Corollaire 2.**  $K$  étant une courbe régulière, l'ensemble  $K - K_l$  est au plus de dimension 0.

L'énoncé de ce corollaire se laisse encore préciser. Désignons à ce but par  $K^\omega$  l'ensemble de tous les points réguliers d'un continu péanien  $K$ .

**Théorème 3.**  $K$  étant un continu péanien, l'ensemble  $K^\omega \cdot (K - K_l)$  est au plus de dimension 0.

En effet, M. Whyburn <sup>9)</sup> a démontré que tout point isolé d'une coupure irréductible d'un continu péanien  $K$  est point de division locale de  $K$ . Soit donc  $p$  un point de l'ensemble  $K^\omega \cdot (K - K_l)$ . Comme  $p$  est un point régulier de  $K$ , il existe par définition une suite infinie  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  de voisinages arbitrairement petits du point  $p$  dont les frontières  $F(V_1), F(V_2), \dots, F(V_n), \dots$  ne contiennent qu'un nombre fini de points. Alors, il existent de voisinages arbitrairement petits de  $p$ :  $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ , ainsi que les frontières  $F(W_n) \subset F(V_n)$  soient des coupures irréductibles de  $K$ . L'ensemble  $F(W_n)$  ne comprend qu'un nombre fini de points; on peut donc appliquer le théorème précité de M. Whyburn; il en résulte  $F(W_n) \subset K_l$ . Tout point  $p \in K^\omega \cdot (K - K_l)$  possède donc des voisinages arbitrairement petits dont les frontières ne contiennent aucun point de  $K^\omega \cdot (K - K_l)$ ; l'ensemble  $K^\omega \cdot (K - K_l)$  est donc au plus de dimension 0.

Désignons par  $K_d$  l'ensemble des points de division d'un continu  $K$ . On peut construire toute sorte de continus cycliques

<sup>8)</sup> G. T. Whyburn, Math. Ann. 102 (1930), p. 313, 319 et 332.

<sup>9)</sup> G. T. Whyburn, l. c. <sup>8)</sup>, p. 331.

$K$  tels que  $\dim(K - K_d) = 0$ ; mais si l'on prétend que  $K - K_d$  soit un sous-ensemble constamment 0-dimensionnel de  $K$ , on peut énoncer ce

**Théorème 4.** *Pour que  $K - K_d$  soit un sous-ensemble constamment 0-dimensionnel du continu  $K$ , il faut et il suffit que  $K$  soit une dendrite.*

Supposons, en effet, que  $K$  ne soit pas une dendrite. Alors,  $K$  contient soit une circonférence topologique  $C_0$  soit un continu de convergence<sup>10)</sup>  $C_1$ . Il est connu<sup>11)</sup> que les ensembles  $C_0 \cdot K_d$  et  $C_1 \cdot K_d$  sont au plus dénombrables. Mais en les ajoutant à l'ensemble  $K - K_d$ , on obtient des ensembles de dimension positive à cause des inclusions

$$C_0 \subset K - K_d + C_0 \cdot K_d; \quad C_1 \subset K - K_d + C_1 \cdot K_d.$$

Ainsi, l'ensemble  $K - K_d$  ne serait pas constamment 0-dimensionnel; nous avons donc démontré que la condition de notre théorème est nécessaire. Pour démontrer sa suffisance, envisageons une dendrite  $K$ . M. Menger<sup>12)</sup> a démontré que, dans ce cas,  $K - K_d = K^1$ ; notre proposition résulte donc immédiatement du théorème 2.

<sup>10)</sup> C. Zarankiewicz, Fund. Math. 9 (1927), p. 134.

<sup>11)</sup> C. Zarankiewicz, l. c. <sup>10)</sup>, p. 139, 141.

<sup>12)</sup> K. Menger, Math. Ann. 96 (1927), p. 575.

K. S. K. Iyengar.

### O pierwszej i drugiej pochodnej symetrycznej funkcji ciągłej.

Przedstawił S. Saks na posiedzeniu dnia 18 października 1938.

STRESZCZENIE.

Praca zawiera nowe dowody podstawowych twierdzeń o pierwszej i drugiej pochodnej symetrycznej funkcji ciągłych oraz pewne uogólnienia i uzupełnienia niektórych z tych twierdzeń. Poza tym dla dowolnych funkcji mierzalnych udowodnione jest twierdzenie następujące: Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest skończona i mierzalna — lub ogólniej, jeżeli istnieje funkcja mierzalna i skończona  $F(x)$  taka że  $f(x) \leq F(x)$  — i jeżeli drugi symetryczny iloraz różnicowy  $[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]/h^2$  dąży jednostajnie (względem  $x$ ) do zera gdy  $h \rightarrow 0$ , wówczas funkcja  $f(x)$  jest liniowa.

2\*

K. S. K. Iyengar.

**A note on the symmetric first and second mean derivatives of a continuous function.**

Presented by S. Saks, 18 Octobre 1938.

1. The object of this paper is to show that by a method similar to that employed by G. C. Young in her paper "*Derivates and differential coefficients*" (*Acta Math.*, vol. 37, 1914, pp. 40-54) we can obtain (i) proofs of known theorems on the first and second symmetric mean derivatives, (ii) some new theorems. We shall adopt the following notation:

$$\begin{aligned} \overline{D}f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, & \underline{D}f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \\ \overline{D}^2 f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}, \\ \underline{D}^2 f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

The following results are obtained:

**Theorem I.** *If  $f(x)$  be continuous in  $a \leq x \leq b$ , there exists a non-enumerable set of pairs of points  $\xi_1, \xi_2$  ( $a < \xi_1, \xi_2 < b$ ) such that*

$$\overline{D}f(\xi_1) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \underline{D}f(\xi_2).$$

**Theorem II.** *If  $f(x)$  is continuous in  $(a, b)$  and if  $\overline{D}f(x) = 0$  in  $a \leq x \leq b$ , except at an enumerable set of points, then  $f(x) = \text{constant}$ <sup>1)</sup>.*

**Theorem III.** *If  $f(x)$  be continuous in  $a \leq x \leq b$  and  $a < c < b$ , there exist two points  $\xi_1, \xi_2$ , ( $a < \xi_1, \xi_2 < b$ ) such that*

$$\underline{D}^2 f(\xi_2) \geq - \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq \overline{D}^2 f(\xi_1)$$

(one half of the inequality being true if the function is semi-continuous).

Some notes on and deductions from Theorem III conclude the paper.

<sup>1)</sup> Theorem I is a generalisation of a theorem of Khintchine (*Fundam. Math.*, vol. 9, 1927, pp. 212—279, in part. p. 216); Theorem II generalises a result due to Mazurkiewicz (*Prace mat. fiz.*, vol. 28, 1917, pp. 79—85 (in Polish)).



2. Proof of Theorem I: Consider the function

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a} \{f(b) - f(a)\}.$$

Either  $\Phi(x) \equiv 0$ , or  $\Phi(x)$  has an upper bound  $M > 0$ , or a negative lower bound  $M' < 0$ . As the latter case is easily convertible to the former, we will consider the case where  $\Phi(x)$  has an upper bound  $M > 0$ . Let  $\Phi(\xi_0) = M$ ,  $a < \xi_0 < b$ .

Denote by  $\xi_1$  the upper bound of all  $x$  in  $(a, \xi_0)$  such that  $\Phi(\xi) \leq \eta$  in  $(a, x)$ , where  $0 < \eta < M$ . Then  $a < \xi_1 < \xi_0$  and

$$\Phi(\xi_1) = \eta \geq \Phi(\xi_1 - h) \quad \text{for } 0 < h < \xi_1 - a,$$

while for an infinite positive sequence  $h_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\Phi(\xi_1 + h_n) > \eta = \Phi(\xi_1),$$

$$\frac{\Phi(\xi_1 + h_n) - \Phi(\xi_1 - h_n)}{2h_n} > 0.$$

Hence

$$\overline{D} \Phi(\xi_1) \geq 0.$$

Again let  $\xi_2$  be the lower bound of all  $x$  such that  $\Phi(\xi) \leq \eta$  in  $(x, b)$ .

Then

$$\Phi(\xi_2 + h) \leq \Phi(\xi_2) = \eta \quad \text{for } 0 < h < b - \xi_2,$$

and for an infinite sequence  $h_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\Phi(\xi_2 - h_n) > \Phi(\xi_2) = \eta,$$

$$\frac{\Phi(\xi_2 + h_n) - \Phi(\xi_2 - h_n)}{2h_n} < 0;$$

hence

$$\underline{D} \Phi(\xi_2) \leq 0.$$

Thus, from these two results we get

$$\overline{D} f(\xi_1) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \underline{D} f(\xi_2).$$

Since corresponding to every  $\eta$ ,  $0 < \eta < M$ , there exists a pair of points  $(\xi_1, \xi_2)$ , it is obvious that the set of all pairs of points  $\xi_1, \xi_2$  is non-enumerable. Theorem I is therefore completely proved.

3. Deductions from Theorem I. (i) If the symmetric mean derivate of a continuous function is zero at all points, except at an enumerable set, then the function is a constant. (A simple proof of this theorem (Mazurkiewicz) in the case when  $Df=0$  at all points without exception, will be found in Chaundy's Differential Calculus.)

(ii) If the symmetric mean derivatives of two continuous functions are finite and equal at all points, with the possible exception of an enumerable set, then the two functions differ by a constant. These results are immediate corollaries from Theorem I.

4. Proof of Theorem II: We prove first the following:

(A) If  $\overline{D}f(x) \leq 0$  except at an enumerable set, then  $f(x)$  is a monotonic decreasing function.

For by Theorem I, in the interval  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 < x_2$ , there exists a point  $\xi_1$  not belonging to the exceptional set and such that

$$0 \geq \overline{D}f(\xi_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 < \xi_1 < x_2,$$

i. e.  $f(x_2) - f(x_1) \leq 0.$

We are now ready to prove Theorem II. We have

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2 \cdot \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{h}.$$

If therefore  $\overline{D}f(x) = 0$ ,  $f(x)$  is a decreasing function by (A), and so

$$f(x-h) \geq f(x),$$

$$\overline{D}^+ f(x) \geq 2\overline{D}f(x) = 0.$$

On the other hand, since  $f(x)$  is a decreasing function,  $\overline{D}^+ f(x) \leq 0$ . Hence, except at an enumerable set,

$$\overline{D}^+ f(x) = 0.$$

Therefore, by Scheffer's theorem,  $f(x)$  is a constant.

5. Proof of Theorem III: Consider the function

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a} \{f(b) - f(a)\} - Q(x-a)(x-b),$$

where  $Q$  is chosen so as to make  $\Phi(c) = 0$ ,  $a < c < b$ .

It is easily seen that

$$Q = -\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Then either  $\Phi(x) \equiv 0$ , or one of the following will be true:

- (i) there exists in  $(a, c)$  a maximum, and in  $(c, b)$  a minimum;
- (ii) there exists in  $(a, c)$  a minimum, and in  $(c, b)$  a maximum;
- (iii) there exist in  $(a, c)$ ,  $(c, b)$  maxima, and the point  $c$  is a minimum;
- (iv) there exist in  $(a, c)$ ,  $(c, b)$  minima, and the point  $c$  is a maximum.

In any case there exist two points  $\xi_1, \xi_2$ ,  $a < \xi_1, \xi_2 < b$ , at which  $\Phi$  is a maximum and a minimum, respectively.

At  $\xi_1$  we have

$$\frac{\Delta^2 \Phi(\xi_1)}{h^2} = \frac{\Phi(\xi_1+h) + \Phi(\xi_1-h) - 2\Phi(\xi_1)}{h^2} \leq 0,$$

i. e.

$$\overline{D}^2 \Phi(\xi_1) \leq 0.$$

Similarly at  $\xi_2$ ,

$$\underline{D}^2 \Phi(\xi_2) \geq 0.$$

Hence  $\underline{D}^2 f(\xi_2) \geq Q \geq \overline{D}^2 f(\xi_1)$ .

This proves Theorem III.

Note I. In case when  $f(x)$  is upper semi-continuous, we have  $\overline{D}^2 f(\xi_1) \leq Q$  only. Hence, if  $f(x)$  is upper semi-continuous and  $\overline{D}^2 f(x) \geq 0$ , then

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad a < c < b,$$

i. e.  $f(x)$  is a convex function in  $a < x < b$ , and hence continuous in  $a < x < b$ . (This proof is different from the one of this part of the theorem due to Verblunsky, *Quart. J.*, vol. 2, N<sup>o</sup> 6, 1931, p. 82.)

Note II. If  $f(x)$  be continuous in  $a \leq x \leq b$ , and  $\overline{D}^2 f = 0$  at every point in  $a < x < b$ , then  $f(x)$  is linear in  $(a, b)$ .

Note<sup>1)</sup> III. It is interesting to note that if for a function  $f$ , finite and measurable — or more generally, majorable by a finite measurable function  $F$  — we have  $D^2 f = 0$  at every point, and if the convergence of  $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{2}$  to zero is uniform in the neighbourhood of every point in  $a < x < b$ , then the function  $f(x)$  is linear in  $a < x < b$ .

Proof: We can assume that  $f(x)$  and  $F(x)$  are defined for all  $x$  and that  $[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]/h^2$  tends to 0 uniformly with  $h \rightarrow 0$ , for  $a \leq x \leq b$ .

1<sup>o</sup> We shall first prove that if  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  are arbitrary points in  $(a, b)$ , and  $(\beta - \alpha)/(\gamma - \alpha)$  is rational, then

$$(1) \quad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{f(\gamma) - f(\alpha)} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}.$$

Assume, to fix the ideas, that  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha < \gamma$ . Let

$$(2) \quad (\beta - \alpha) : (\gamma - \alpha) = m : n,$$

where  $m$  and  $n$  are positive integers. Let further

$$\delta = (\beta - \alpha)/m = (\gamma - \alpha)/n,$$

and let  $\varepsilon(\delta)$  be the upper bound of  $|f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)|/\delta^2$  for  $a \leq x \leq b$ . Writing, for short,  $\Delta_r = f(a+r\delta) - f[a+(r-1)\delta]$  we have  $|\Delta_r - \Delta_{r-1}| \leq \varepsilon(\delta) \cdot \delta^2$ , and consequently  $|\Delta_r - \Delta_1| \leq (r-1)\varepsilon(\delta) \cdot \delta^2$ , for  $r = 2, 3, \dots, m$ . Thus

$$|[f(\beta) - f(\alpha)] - m\Delta_1| = \left| \sum_{r=1}^m \Delta_r - m\Delta_1 \right| \leq \frac{m(m-1)}{2} \varepsilon(\delta) \cdot \delta^2 \leq \frac{m-1}{2m} \cdot (b-a)^2 \cdot \varepsilon(\delta),$$

and similarly

$$|[f(\gamma) - f(\alpha)] - n\Delta_1| \leq \frac{n-1}{2n} \cdot (b-a)^2 \cdot \varepsilon(\delta).$$

It follows that  $m\Delta_1 = f(\beta) - f(\alpha) + \varepsilon'$ ,  $n\Delta_1 = f(\gamma) - f(\alpha) + \varepsilon''$ , where  $|\varepsilon'| \leq (m-1)(b-a)^2 \varepsilon(\delta)/2m$ ,  $|\varepsilon''| \leq (n-1)(b-a)^2 \varepsilon(\delta)/2n$ . We have

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha) + \varepsilon'}{f(\gamma) - f(\alpha) + \varepsilon''} = \frac{m}{n} = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}.$$

Now if the integers  $m$  and  $n$ , subject to the condition (2), tend to infinity, then  $\delta$ , and consequently  $\varepsilon(\delta)$ ,  $\varepsilon'$ , and  $\varepsilon''$ , tend to 0, and the equation (1) follows.

<sup>1)</sup> Most of the Content of Note III is due to professor Saks.

2<sup>o</sup> As  $f(x) \leq F(x)$ , and  $F(x)$  is a finite measurable function, a measurable set  $X$  may be associated with almost every point  $x$  so that  $x$  is a point of density for  $X$  and so that  $f(x)$  has a finite upper bound on  $X$ . Let  $P$  denote the set of the points  $x$  in  $(a, b)$ , for each of which such a set  $X$  exists. We shall prove that for any two points  $u$  and  $v$  in  $P$  we have

$$(3) \quad \frac{f(u) - f(a)}{f(v) - f(a)} = \frac{u - a}{v - a}.$$

To this end, denote by  $U$  and  $V$  two measurable sets, for which  $u$  and  $v$  respectively are points of density and on which  $f(x)$  has a finite upper bound. Let  $\sigma$  be a positive number. We shall show that  $u$  is a point of dispersion for the set

$$(4) \quad E [x \in U; |f(x) - f(u)| \geq \sigma].$$

Consider, for instance, the set

$$E [x \in U; x > u; f(x) - f(u) \geq \sigma],$$

and suppose that it has a positive outer upper density at  $u$ . Then, for any positive integer  $N$ , we could determine two points  $x_1 \in U$ ,  $x_2 \in U$ , such that  $f(x_1) - f(u) \geq \sigma$  and  $x_2 - u = N \cdot (x_1 - u)$ . Thus, by what has been proved in 1<sup>o</sup>, we would have  $f(x_2) - f(u) \geq N\sigma$ . Since  $N$  is an arbitrary positive integer, this contradicts the fact that  $f(x)$  has a finite upper bound on  $U$ .

Hence,  $u$  is a point of dispersion for the set (4) and a point of density for the set  $U$ ; similarly  $v$  is a point of dispersion for  $E [x \in V; |f(x) - f(v)| \geq \sigma]$  and a point of density for  $V$ . Using these properties we can determine two sequences  $\{u_n\}$  and  $\{v_n\}$  of points such that (a)  $|f(u_n) - f(u)| < \sigma$ ,  $|f(v_n) - f(v)| < \sigma$ , for all  $n$ , (b)  $u_n \rightarrow u$ ,  $v_n \rightarrow v$ , (c)  $(u_n - a)/(v_n - a)$  is rational for all  $n$ . On account of what has been proved in 1<sup>o</sup>, it follows from (c) that

$$\frac{f(u_n) - f(a)}{f(v_n) - f(a)} = \frac{u_n - a}{v_n - a},$$

and consequently, in virtue of (a) and (b),

$$\frac{f(u) - f(a) + \sigma'}{f(v) - f(a) + \sigma''} = \frac{u - a}{v - a},$$

where  $|\sigma'| < \sigma$ ,  $|\sigma''| < \sigma$ . Since  $\sigma$  may have been fixed arbitrarily small, we obtain the equation (3).

Thus we have proved that  $f(x)$  is a linear function on  $P$ , i. e.  $f(x) = Ax + B$  for  $x \in P$ . In order to extend this equation to all the points in  $(a, b)$ , remark that with any point  $x$  in  $(a, b)$  a sequence  $\{h_n\}$  of positive numbers may be associated so that  $h_n \rightarrow 0$  and so that  $x \pm h_n \in P$  for  $n = 1, 2, \dots$ . Since then  $f(x \pm h_n) = A \cdot (x \pm h_n) + B$ , and since  $f(x + h_n) + f(x - h_n) - 2f(x) \rightarrow 0$ , it follows that  $f(x) = Ax + B$ . This completes the proof.

Adam J. Smith.

### O rozkładach półciąglych krzywych i rozmaitości.

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu w dniu 18 października 1938 r.

STRESZCZENIE.

W związku ze znanym twierdzeniem R. L. Moore'a o rozkładzie półciąglym powierzchni kuli, autor dowodzi pewnych twierdzeń, dotyczących hyperprzestrzeni rozkładu półciąglych continua lokalnie spójnych na continua nie rozcinające.

Adam J. Smith.

### On upper semi-continuous decompositions of curves and manifolds.

Presented by K. Kuratowski, 18 October, 1938.

Introduction. In this paper we consider certain spaces whose elements are the continua which constitute some upper semi-continuous collection in another space. Such spaces have been discussed by R. L. Moore, L. Vietoris, C. Kuratowski, W. Hurewicz, and J. H. Roberts<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> R. L. Moore: *Concerning upper semi-continuous collections of continua which do not separate a given continuum*, Proc. Nat. Acad. Sci., 10, 1924, 356-360; *Concerning upper semi-continuous collections of continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428; *Concerning upper semi-continuous collections*, Monatshefte für Math. und Physik, 36, 1929, 81-82; *Foundations of Point Set Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. XIII.

L. Vietoris: *Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam, 29, 1926, 443-453.

C. Kuratowski: *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fundamenta Mathematicae, 11, 1928, 169-185.

W. Hurewicz: *Über oberhalbstetige Zerlegungen von Punktmengen in Continua*, Fundamenta Mathematicae, 15, 1930, 57-60.

J. H. Roberts: *On a problem of C. Kuratowski concerning upper semi-continuous collections*, Fundamenta Mathematicae, 14, 1929, 96-102; *A non-dense plane continuum*, Bull. Amer. Math. Soc., 1931, 720-722.

A collection  $G$  of closed point sets is said to be upper semi-continuous provided it has the property that if  $P$  is a point set of the collection  $G$  and  $P_1, P_2, P_3, \dots$  is a sequence of point sets of  $G$ , and, for each  $n$ ,  $A_n$  and  $B_n$  are points of  $P_n$ , and the sequence  $A_1, A_2, A_3, \dots$  has a sequential limit point lying in  $P$ , then every infinite subsequence of  $B_1, B_2, B_3, \dots$  contains a subsequence having a sequential limit point that lies in  $P$ .

If  $S$  is a given space and  $G$  an upper semi-continuous collection of mutually exclusive closed subsets of  $S$ , filling up  $S$ <sup>1)</sup>, then we shall designate by  $S_G$  the space whose elements are the sets of the collection  $G$ , and in which the term limit element is defined as follows: if  $P$  is an element of the collection  $G$  and  $M$  is a subcollection of the collection  $G$ , the element  $P$  of  $S_G$  will be said to be a limit element of the subset  $M$  of  $S_G$  if and only if every open subset of  $S$  which contains  $P$  contains point sets of the collection  $M$  other than  $P$ .

We shall confine our attention in this paper to the case in which the point sets of the collection  $G$  are compact, proper sub-continua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ <sup>2)</sup>. It is easily seen that if  $S$  is a simple closed curve,  $S_G$  must be topologically equivalent to  $S$ . We shall show that if  $S$  is a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve<sup>3)</sup>, other than a simple closed curve, then there exists a  $G$  such that  $S_G$  is not topologically equivalent to  $S$ . We shall show also that if  $S$  is a compact, cyclically con-

<sup>1)</sup> A collection of mutually exclusive subsets of  $S$  is said to fill up  $S$  if every point of  $S$  belongs to some set of the collection.

<sup>2)</sup> The subset  $T$  of  $S$  is said to cut  $S$  if  $S - T$  is the sum of two mutually exclusive sets, neither of which contains a limit point of the other.

<sup>3)</sup> A connected space  $S$  is said to be cyclically connected if no point of  $S$  cuts  $S$ .

A space  $S$  is said to be one-dimensional if it has the following properties: if  $P$  is any point of  $S$  and  $D$  is any open subset of  $S$  which contains  $P$ , then there exists an open subset of  $D$  which contains  $P$  and whose boundary is totally disconnected; if  $P$  is any point of  $S$  there exists an open subset  $E$  of  $S$  which contains  $P$  and has the property that no open subset of  $E$  which contains  $P$  has a vacuous boundary. (A closed set is said to be totally disconnected if it does not contain any connected subset containing more than one point).

By a continuous curve we shall mean a connected metric space  $S$  having the property that if  $P$  is any point of  $S$ , then every open subset of  $S$  which contains  $P$  contains a connected open subset of  $S$  containing  $P$ .

nected, continuous curve which contains two mutually exclusive subcontinua, neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ , then there exists a  $G$  such that  $S_G$  is topologically equivalent to a regular curve<sup>1)</sup>.

R. L. Moore has shown that if  $S$  is the Euclidean plane or sphere, and  $G$  is any upper semi-continuous collection of mutually exclusive compact proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , then  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ . It can easily be seen that this theorem is not true of all two-dimensional manifolds<sup>2)</sup>.

We shall show, however, that if  $S$  is any two-dimensional manifold and the elements of  $G$  have the additional property that each of them belongs to some open subset of  $S$  which is topologically equivalent to the Euclidean plane, then  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ .

The author wishes to acknowledge his indebtedness to Professor J. R. Kline for his encouragement and assistance in the preparation of this paper.

*Lemma A.* If  $S$  is a compact continuous curve and if the subset  $H$  of  $S$  is the sum of a finite number of mutually exclusive continua, no one of which cuts  $S$ , then the number of components<sup>3)</sup> of  $S-H$  is finite.

<sup>1)</sup> By a regular curve is meant a compact continuum  $S$  which has the property that every two points of  $S$  are separated from each other in  $S$  by a finite set of points. (Two point sets  $A$  and  $B$  of a space  $S$  are said to be separated from each other in  $S$  by the subset  $T$  of  $S$  if  $S-T$  is the sum of two mutually exclusive sets, neither of which contains a limit point of the other, and such that one of them contains  $A$  and the other  $B$ ).

<sup>2)</sup> For example, if  $S$  is a torus and  $G$  is the collection of meridian circles on  $S$ , then  $S_G$  is a simple closed curve.

For the definitions and properties of two-dimensional manifolds used in this paper, see: O. Veblen, *Analysis Situs*, The Cambridge Colloquium, Part II; B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, 1923; I. Gawehn, *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen*, 98, 1928, 321-354.

In particular, we make use of the result of Miss Gawehn, who shows that a two-dimensional manifold can be characterized as a connected, completely separable space, which is locally a plane at each point.

<sup>3)</sup> By a component of a point set is meant a maximal connected subset of the set.



Proof. Assume that  $H$  and  $S-H$  each have more than one component, for otherwise the theorem is obviously true. Since  $H$  is the sum of a finite number of continua, it is closed. Hence, since  $S$  is a continuous curve, every component of  $S-H$  must be open. Then, since  $S$  is connected, each component of  $S-H$  must have on its boundary some point of  $H$ , and hence some point of some component of  $H$ . Let  $L$  be any component of  $H$ , and let  $D$  be any component of  $S-H$  having on its boundary a point of  $L$ . Then  $D$  must have on its boundary some point of  $S-(L+D)$ , for otherwise  $D$  and  $S-(L+D)$  would be mutually separated<sup>1)</sup>, which contradicts the hypothesis that  $L$  does not cut  $S$ . Hence  $D$  must have on its boundary some point of  $H-L$ . Hence, each component of  $S-H$  must have on its boundary points of at least two different components of  $H$ .

Since  $H$  is closed and has only a finite number of components, there exists a positive number  $d$  such that the distance between no two components of  $H$  is less than  $d$ . Since each component of  $S-H$  must have on its boundary points of at least two different components of  $H$ , then each component of  $S-H$  must contain at least one point whose distance from  $H$  is not less than  $\frac{d}{2}$ . Hence, there must exist a point set  $M$  such that each component of  $S-H$  contains one and only one point of the set  $M$ , and each point of  $M$  belongs to some component of  $S-H$ , and such that each point of  $M$  is at a distance from  $H$  of not less than  $\frac{d}{2}$ . If the number of components of  $S-H$  were infinite, then, since  $S$  is compact, the set  $M$  would have to have a limit point  $P$ . The distance of  $P$  from  $H$  could not be less than  $\frac{d}{2}$ , and hence  $P$  would have to belong to some component of  $S-H$ . Hence, some component of  $S-H$  would have to contain a limit point of a set of points no two of which belong to the same component of  $S-H$ . But this is impossible, since each component of  $S-H$  is open. Hence, the number of components of  $S-H$  must be finite.

---

<sup>1)</sup> Two sets are said to be mutually separated if neither contains a point or limit point of the other.

**Lemma B.** *If  $S$  is a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve, there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ .*

Proof. Let  $A$  and  $B$  be any two points of  $S$ . Let  $D$  be an open subset of  $S$ , containing  $A$ , but such that  $\bar{D}$  does not contain  $B$ . Since  $S$  is cyclically connected,  $S - A$  is connected, and hence there exists a continuum  $T$  which contains  $S - D$  but does not contain  $A$ . For each point  $P$  of  $T$  let  $D_P$  denote a connected open subset of  $S$ , containing  $P$ , but such that  $\bar{D}_P$  does not contain  $A$ , and such that the boundary of  $D_P$  is totally disconnected. By the Heine-Borel Theorem, there exists a finite subcollection of the collection  $\{D_P\}$  which covers  $T$ . Let  $H$  denote the sum of the point sets of this subcollection, together with their boundaries. Let  $K$  denote the component of  $S - H$  which contains  $A$ . Let  $M_1 = S - K$ , and let  $L$  denote the boundary of  $K$ .

The set  $M_1$  is equal to  $H$  plus some of the components of  $S - H$ . Hence, since  $H$  is a continuum and  $S$  is a continuous curve,  $M_1$  must be a continuum. Since  $K$  is a component of  $S - H$ ,  $K$  is connected, and hence  $M_1$  does not cut  $S$ . The set  $L$ , being the boundary of  $K$  is a subset of the boundary of  $H$ . But the boundary of  $H$  is a subset of the sum of the boundaries of the finite number of sets of the subcollection of the collection  $\{D_P\}$  whose sum defines  $H$ , and the boundary of each  $D_P$  is totally disconnected. Hence,  $L$  must be totally disconnected. Since  $S$  is a continuous curve and  $\bar{K}$  is a subcontinuum of  $S$  whose boundary is totally disconnected,  $\bar{K}$  is a continuous curve. The set  $L$  separates the two points  $A$  and  $B$  of the cyclically connected continuum  $S$ , and hence must contain more than one point. For each point  $Q$  of  $L$  let  $D_Q$  denote an open (relative to  $\bar{K}$ ) subset of  $\bar{K}$  such that:  $D_Q$  contains  $Q$ ; the diameter of  $D_Q$  is less than half the diameter of  $L$ ;  $B_Q = \bar{D}_Q - D_Q$  has no point in common with  $L$ . There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_Q\}$  which covers  $L$ . Let  $C$  denote the sum of the sets  $B_Q$  corresponding to this subcollection. Then  $C$  is closed and is a subset of  $K$ . The set  $C$  must separate two points of  $L$  in  $\bar{K}$ . For, since  $L$  is closed, there exist two points,  $E$  and  $F$ , of  $L$ , such that  $\text{dist.}(E, F) = \text{dia.}(L)$ . Among the sets  $B_Q$  whose sum defines  $C$ , there must exist one which is the boundary, in  $\bar{K}$ , of one of the sets  $D_Q$  which contains  $E$ . Since  $D_Q$  must be of dia-

meter less than  $\frac{1}{2}$  dist.  $(E, F)$ ,  $\bar{D}_Q$  cannot contain  $F$ , and hence  $B_2$  must separate  $E$  from  $F$  in  $\bar{K}$ . Since  $C$  contains  $B_Q$  but no point of  $L$ ,  $C$  must also separate  $E$  from  $F$  in  $\bar{K}$ .

There exists a subcontinuum  $U$  of  $K$  which contains  $C$ . Let  $M_2$  denote the set consisting of  $U$  together with all those components of  $\bar{K}-U$  which do not contain points of  $L$ . Then  $M_2$  is a continuum. Since  $M_2$  is a subset of  $\bar{K}$  and contains no point of  $L$ ,  $M_2$  must be a subset of  $K$ , and hence  $M_1 \cdot M_2 = 0$ . The set  $M_2$  contains  $C$ , which separates two points of  $L$  in  $\bar{K}$ . Hence  $M_2$ , which contains no point of  $L$ , must also separate two points of  $L$  in  $\bar{K}$ . Hence,  $K-M_2$  must have at least two components, and since the components of  $S-(M_1+M_2)$  are identical with the components of  $K-M_2$ ,  $S-(M_1+M_2)$  must have at least two components. Hence,  $M_1+M_2$  cuts  $S$ . Furthermore, since each component of  $K-M_2$  has on its boundary a point of the continuum  $M_1$ , the set  $S-M_2 = M_1+(K-M_2)$  must be connected, and hence  $M_2$  does not cut  $S$ . Hence  $M_1$  and  $M_2$  have the desired properties.

**Lemma C.** *Suppose that  $S$  is a compact continuous curve and that the subset  $H$  of  $S$  is the sum of a finite number of mutually exclusive continua, no one of which cuts  $S$ , but such that  $H$  does cut  $S$ , and suppose that no component of  $S-H$  cuts  $S$ . Let  $\varepsilon$  be any given positive number. Then there exists a subset  $K$  of  $S$  having the following properties:  $K$  is the sum of a finite number of mutually exclusive continua, no one of which cuts  $S$ ; no component of  $S-(H+K)$  cuts  $S$ ; every point of  $S-(H+K)$  is at a distance of less than  $\varepsilon$  from  $H$ ; every two components of  $H$  are separated from each other in  $S$  by  $K$ .*

*Proof.* By Lemma A, the number of components of  $S-H$  is finite. Let this number be  $m$ , and let the components of  $S-H$  be  $D_1, D_2, \dots, D_m$ . Since no component of  $H$  cuts  $S$ , but  $H$  does cut  $S$ , each  $D_i$  must have on its boundary points of at least two different components of  $H$ . Since  $H$  has only a finite number of components and each of them is closed, there exists a positive number  $d$  such that the distance between no two components of  $H$  is less than  $d$ . Let  $\eta$  be a positive number which is less than the smaller of the two numbers  $\varepsilon$  and  $\frac{d}{2}$ . Let  $T_i$  be the set of points  $P$  of  $D_i$  for which dist.  $(P, S-D_i)$  is greater than or equal to  $\eta$ . Then  $T_i$  is closed. Furthermore, since  $D_i$  must have on its boundary points of at least two of the components of  $H$ , and since the dis-

tance between any two components of  $H$  is greater than  $2\eta$ ,  $T_i$  is non-vacuous, and no two points from different components of  $H$  lie together in a connected subset of  $\bar{D}_i - T_i$ .

There exists a subcontinuum  $L_i$  of  $D_i$  which contains  $T_i$ . Let  $K_i$  denote the sum of  $L_i$  and all those components of  $\bar{D}_i - L_i$  which do not contain any points of  $S - D_i$ . Then  $K_i$  is a continuum. Since every component of  $\bar{D}_i - K_i$  contains a point of  $S - D_i$ , and since  $S - D_i$  is connected,  $S - K_i$  must be connected, and hence  $K_i$  does not cut  $S$ . Since  $K_i$  is a subset of  $D_i$  and contains  $T_i$ , then every point of  $D_i - K_i$  is at a distance of less than  $\varepsilon$  from  $S - D_i$ , and hence, since the boundary of  $D_i$  is a subset of  $H$ , every point of  $D_i - K_i$  is at a distance of less than  $\varepsilon$  from  $H$ . No two points from different components of  $H$  can lie together in a connected subset of  $\bar{D}_i - K_i$ . Since every component of  $D_i - K_i$  must have on its boundary both points of  $K_i$  and points of  $S - D_i$ , and since no component of  $D_i - K_i$  can have on its boundary points of two different components of  $H$ , then  $D_i - K_i$  must have at least two components. Since both  $K_i$  and  $S - D_i$  are connected, no component of  $D_i - K_i$  can cut  $S$ .

Hence, the set  $K = K_1 + K_2 + \dots + K_m$  has the desired properties.

**Lemma D.** *If  $G$  is a collection of mutually exclusive subcontinua of the compact continuum  $S$ , filling up  $S$ , and having the property that each two elements of  $G$  are separated from each other in  $S$  by some finite subcollection of  $G$ , then the collection  $G$  is upper semi-continuous, and  $S_G$  is a regular curve.*

Proof. Similar to the proof of Theorem 40, Chapter V, pages 367, 368, of R. L. Moore's Colloquium Lectures.

**Theorem 1.** *Let  $S$  be a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve having the property that if  $H$  and  $K$  are any two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ , then there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $H_1$  and  $K_1$ , such that: neither  $H_1$  nor  $K_1$  cuts  $S$ ;  $H_1$  contains  $H$ ;  $K_1$  contains  $K$ ; every component of  $S - (H + K)$  contains at least two components of  $S - (H_1 + K_1)$ . Then there exists an upper semi-continuous collection  $G$  of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and such that  $S_G$  is not topologically equivalent to  $S$ .*

**Lemma 1.** *Let  $S$  satisfy the conditions of Theorem 1. Then, if  $L$  and  $M$  are two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ , and if  $k$  is any positive integer and  $\varepsilon$  any positive number, there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $U$  and  $V$ , neither of which cuts  $S$ , and such that:  $L \cdot (\overline{S-U}) = 0$ ;  $M \cdot (\overline{S-V}) = 0$ ; every component of  $S-(L+M)$  contains more than  $k$  components of  $S-(U+V)$ ; no component of  $S-(U+V)$  is of diameter greater than  $\varepsilon$ .*

*Proof of Lemma 1.* By hypothesis, there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $L_1$  and  $M_1$ , such that: neither  $L_1$  nor  $M_1$  cuts  $S$ ;  $L_1$  contains  $L$ ;  $M_1$  contains  $M$ ; every component of  $S-(L+M)$  contains at least two components of  $S-(L_1+M_1)$ . Since  $L_1$  and  $M_1$  satisfy the conditions of the hypothesis, there must exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $L_2$  and  $M_2$ , such that: neither  $L_2$  nor  $M_2$  cuts  $S$ ;  $L_2$  contains  $L_1$ ;  $M_2$  contains  $M_1$ ; every component of  $S-(L_1+M_1)$  contains at least two components of  $S-(L_2+M_2)$ . By repeated use of the hypothesis in this way, we can show that there exist two sets of subcontinua of  $S$ ,  $L_1, L_2, \dots, L_k$  and  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , such that: no  $L_i$  nor  $M_i$  cuts  $S$ ;  $L_{i+1}$  contains  $L_i$ ;  $M_{i+1}$  contains  $M_i$ ;  $L_i \cdot M_i = 0$ ; every component of  $S-(L_i+M_i)$  contains at least two components of  $S-(L_{i+1}+M_{i+1})$ . Since every component of  $S-(L+M)$  contains at least two components of  $S-(L_1+M_1)$  and every component of  $S-(L_1+M_1)$  contains at least two components of  $S-(L_2+M_2)$ , then every component of  $S-(L+M)$  must contain at least four components of  $S-(L_2+M_2)$ . Proceeding similarly, we see that every component of  $S-(L+M)$  must contain at least  $2^k$  components of  $S-(L_k+M_k)$ . Hence, since  $2^k > k$ , every component of  $S-(L+M)$  must contain more than  $k$  components of  $S-(L_k+M_k)$ .

For each point  $P$  of  $L_k$  let  $D_p$  denote a connected open subset of  $S$ , containing  $P$ , such that  $\overline{D_p} \cdot M_k = 0$  and such that the boundary of  $D_p$  is totally disconnected. By the Heine-Borel Theorem, there exists a finite subcollection of the collection  $\{D_p\}$  which covers  $L_k$ . Let  $W$  denote the sum of the point sets of this subcollection. Then  $W$  is open,  $\overline{W}$  is a continuum, and the boundary of  $W$  is totally disconnected. Let  $U$  denote the sum of  $\overline{W}$  and those components of  $S-\overline{W}$  which contain no points of  $M_k$ . Then  $U$  is a continuum and the boundary of  $U$  is totally disconnected.

Let  $W_1 = S - U$ . Then  $W_1$  is that component of  $S - \bar{W}$  which contains  $M_k$ , and hence is connected. Since the boundary of  $W_1$ , which is the same as the boundary of  $U$ , is totally disconnected, and since  $S$  is a continuous curve,  $\bar{W}_1$  must be a continuous curve. Let  $B$  denote the boundary of  $W_1$ . For each point  $Q$  of  $B$  let  $D_Q$  denote an open (relative to  $\bar{W}_1$ ) subset of  $\bar{W}_1$  such that:  $D_Q$  contains  $Q$ ; the diameter of  $D_Q$  is less than  $\varepsilon$ ;  $B_Q = \bar{D}_Q - D_Q$  has no point in common with  $B$ ;  $\bar{D}_Q \cdot M_k = 0$ . There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_Q\}$  which covers  $B$ . Let  $C$  denote the sum of the sets  $B_Q$  corresponding to this subcollection. Then  $C$  is closed and is a subset of  $W_1$ . Since  $\bar{D}_Q \cdot M_k = 0$  for each set of the collection  $\{D_Q\}$ ,  $M_k$  must be a subset of some component of  $W_1 - C$ . Let  $T$  denote this component. Since the boundary of  $T$  is a subset of  $C$ ,  $T + C$  must be closed. Let  $D$  be any component of  $W_1 - C$  whose boundary contains a point of  $B$ . Then  $D$  must be a subset of some set of the collection  $\{D_Q\}$ , and hence must be of diameter less than  $\varepsilon$ .

There exists a subcontinuum  $W_2$  of  $W_1$  which contains  $T + C$ . Let  $V$  denote the sum of  $W_2$  and those components of  $W_1 - W_2$  whose boundaries do not contain points of  $U$ . Then  $V$  is a continuum. Since  $W_1 = S - U$  is connected,  $U$  does not cut  $S$ . Since  $U$  is connected and every component of  $W_1 - V$  has on its boundary a point of  $U$ ,  $V$  does not cut  $S$ . Since  $U$  contains  $W$  and  $W$  contains  $L$ , and  $W$  is open, then  $L \cdot (\overline{S - U}) = 0$ . Since  $V$  contains  $T$  and  $T$  contains  $M$ , and  $T$  is open, then  $M \cdot (\overline{S - V}) = 0$ . Since  $V$  is a subset of  $W_1 = S - U$ , then  $U \cdot V = 0$ . Since  $U$  contains  $L_k$  and  $V$  contains  $M_k$ , and since  $U \cdot V = 0$ , each component of  $S - (L_k + M_k)$  must contain at least one component of  $S - (U + V)$ ; and since every component of  $S - (L + M)$  contains more than  $k$  components of  $S - (L_k + M_k)$ , every component of  $S - (L + M)$  must contain more than  $k$  components of  $S - (U + V)$ . Every component of  $S - (U + V)$  must be a subset of some component of  $W_1 - C$  which has on its boundary a point of  $B$ , and hence must be of diameter less than  $\varepsilon$ . Hence,  $U$  and  $V$  have the desired properties.

Proof of Theorem 1. By Lemma B, there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $H$  and  $K$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ . By Lemma A, the number of components of  $S - (H + K)$  is finite. Let this number be  $k$ . Since  $H + K$  cuts

$S$ ,  $k$  is greater than 1. By Lemma 1, there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $H_1^1$  and  $K_1^1$ , such that: neither  $H_1^1$  nor  $K_1^1$  cuts  $S$ ;  $H_1^1 \cdot \overline{(S - H_1^1)} = 0$ ,  $K_1^1 \cdot \overline{(S - K_1^1)} = 0$ ; every component of  $S - (H_1^1 + K_1^1)$  contains more than  $k$  components of  $S - (H_1^1 + K_1^1)$ ; no component of  $S - (H_1^1 + K_1^1)$  is of diameter greater than 1. By repeated application of Lemma 1, we can show that there exist two infinite sequence of subcontinua of  $S$ ,  $H_1^1, H_2^1, H_3^1, \dots$ , and  $K_1^1, K_2^1, K_3^1, \dots$ , such that: no  $H_i^1$  or  $K_i^1$  cuts  $S$ ;  $H_i^1 \cdot \overline{(S - H_{i+1}^1)} = 0$ ;  $K_i^1 \cdot \overline{(S - K_{i+1}^1)} = 0$ ;  $H_i^1 \cdot K_i^1 = 0$ ; each component of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  contains more than  $k$  components of  $S - (H_{i+1}^1 + K_{i+1}^1)$ ; no component of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  is of diameter greater than  $\frac{1}{i}$ . Since no  $H_i^1$  or  $K_i^1$  cuts  $S$ , every component of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  must have on its boundary both a point of  $H_i^1$  and a point of  $K_i^1$ . Hence, each point of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  must be at a distance of not more than  $\frac{1}{i}$  from both  $H_i^1$  and  $K_i^1$ . Then every point of  $S$  which does not belong to any  $H_i^1$  and  $K_i^1$  must be a limit point of both  $H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \dots$  and  $K_1^1 + K_2^1 + K_3^1 + \dots$ . Hence

$$\overline{(H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \dots)} = S - (K_1^1 + K_2^1 + K_3^1 + \dots).$$

Let

$$S_1 = \overline{(H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \dots)}.$$

Since the sequence  $\{H_i^1\}$  is a monotonic sequence of connected sets,  $(H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \dots)$  must be connected, and hence  $S_1$  must be a continuum. Since the sequence  $\{K_i^1\}$  is a monotonic sequence of connected sets,  $K_1^1 + K_2^1 + K_3^1 + \dots = S - S_1$  must be connected, and hence  $S_1$  does not cut  $S$ . Since  $K_i^1 \cdot \overline{(S - K_{i+1}^1)} = 0$ , and since  $H_i^1 \cdot K_i^1 = 0$ , no point of any  $K_i^1$  can be a point or limit point of  $H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \dots$ , and hence  $S_1 \cdot K_i^1 = 0$  for every  $i$ . Since  $S_1$  contains  $H_i^1$ , every component of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  must contain at least one component of  $S - (S_1 + K_i^1)$ . Hence, since  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  has more than  $k$  components,  $S - (S_1 + K_i^1)$  must have more than  $k$  components. Since no component of  $S - (H_i^1 + K_i^1)$  is of diameter greater than  $\frac{1}{i}$ , no component of  $S - (S_1 + K_i^1)$  can be of diameter

greater than  $\frac{1}{i}$ . Since neither  $S_1$  nor  $K_i^1$  cuts  $S$ , each component of  $S - (S_1 + K_i^1)$  must have on its boundary both points of  $S_1$  and points of  $K_i^1$ .

Let  $H_i^2 = K_i^1$  and let  $K_1^2 = S_1$ . By repeated application of Lemma 1, we can show that there exist two infinite sequences of subcontinua of  $S$ ,  $H_1^2, H_2^2, H_3^2, \dots$ , and  $K_1^2, K_2^2, K_3^2, \dots$ , such that: no  $H_i^2$  or  $K_i^2$  cuts  $S$ ;  $H_i^2 \cdot \overline{(S - H_{i+1}^2)} = 0$ ;  $K_i^2 \cdot \overline{(S - K_{i+1}^2)} = 0$ ;  $H_i^2 \cdot K_i^2 = 0$ ; each component of  $S - (H_i^2 + K_i^2)$  contains more than  $k$  components of  $S - (H_{i+1}^2 + K_{i+1}^2)$ ; no component of  $S - (H_i^2 + K_i^2)$  is of diameter greater than  $\frac{1}{i}$ . Let  $S_2 = \overline{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dots)}$ . We can see as above that  $\overline{(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dots)} = S - \overline{(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + \dots)}$ , and that  $S_2$  is a continuum and does not cut  $S$ . Since  $S_1 = K_1^2$  is a subset of  $S - S_2$ , then  $S_1 \cdot S_2 = 0$ . Since  $S_2$  contains  $K_1^1$ , every component of  $S - (S_1 + K_1^1)$  must contain at least one component of  $S - (S_1 + S_2)$ , and each component of  $S - (S_1 + S_2)$  must be a subset of some component of  $S - (S_1 + K_1^1)$ . Hence, since  $S - (S_1 + K_1^1)$  has more than  $k$  components,  $S - (S_1 + S_2)$  must have more than  $k$  components. Since no component of  $S - (S_1 + K_1^1)$  is of diameter greater than 1, no component of  $S - (S_1 + S_2)$  can be of diameter greater than 1. Since  $S_2$  contains  $H_i^2$ , each component of  $S - (S_2 + K_i^2)$  must be a subset of some component of  $S - (H_i^2 + K_i^2)$ , and hence must be of diameter not greater than  $\frac{1}{i}$ . Since neither  $S_2$  nor  $K_i^2$  cuts  $S$ , each component of  $S - (S_2 + K_i^2)$  must have on its boundary both a point of  $S_2$  and a point of  $K_i^2$ .

By Lemma A, the number of components of  $S - (S_1 + S_2)$  is finite. Let this number be  $m_1 - 2$ , and let the components of  $S - (S_1 + S_2)$  be  $D_3, D_4, \dots, D_{m_1}$ . Let  $j$  be so large that  $\frac{1}{j}$  is less than the smaller of the two numbers  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{2} \text{dist.}(S_1, S_2)$ . Let  $D_n$  be any component of  $S - (S_1 + S_2)$ . The set  $D_n$  contains more than  $k$  components of  $S - (S_2 + K_j^2)$ , and each component of  $S - (S_2 + K_j^2)$  has on its boundary a point of  $S_2$ . Since each component of  $S - (S_1 + K_j^1)$



and each component of  $S-(S_2+K_j^2)$  is in diameter less than  $\frac{1}{2}$  dist.  $(S_1, S_2)$ , then the set of points of  $D_n$  which do not belong to any of the components of  $S-(S_1+K_j^1)$  or to any of the components of  $S-(S_2+K_j^2)$  is non-vacuous. It is also closed. Hence, there exists a subcontinuum  $F_n$  of  $D_n$  which contains all points of  $D_n$  which do not belong to any of the components of  $S-(S_1+K_j^1)$  or to any of the components of  $S-(S_2+K_j^2)$ . Let  $H_1^n$  denote the sum of  $F_n$  together with all components of  $D_n-F_n$  which do not have on their boundaries any points of  $S_1+S_2$ . Then  $H_1^n$  is a continuum. Each component of  $D_n-H_1^n$  must have on its boundary a point of  $S_1+S_2$ . Every component of  $D_n-H_1^n$  must be a subset of either some component of  $S-(S_1+K_j^1)$  or some component of  $S-(S_2+K_j^2)$ ; and every component of  $S-(S_1+K_j^1)$  and every component of  $S-(S_2+K_j^2)$  must contain some component of  $D_n-H_1^n$ . Hence,  $D_n-H_1^n$  must have more than  $k$  components each of which has on its boundary a point of  $S_1$ , and more than  $k$  components each of which has on its boundary a point of  $S_2$ . No component of  $D_n-H_1^n$  is of diameter greater than  $\frac{1}{2}$ .  $H_1^n$  does not cut  $S$ . Let

$K_1^n = S - D_n$ . Then  $K_1^n$  is a continuum and does not cut  $S$ , but  $H_1^n + K_1^n$  does cut  $S$ . By repeated application of Lemma 1 we can show that there must exist two infinite sequences of subcontinua of  $S$ ,  $H_1^n, H_2^n, H_3^n, \dots$ , and  $K_1^n, K_2^n, K_3^n, \dots$ , such that: no  $H_i^n$  or  $K_i^n$  cuts  $S$ ;  $H_i^n \cdot K_i^n = 0$ ;  $H_i^n \cdot (S - H_{i+1}^n) = 0$ ;  $K_i^n \cdot (S - K_{i+1}^n) = 0$ ; each component of  $S - (H_i^n + K_i^n)$  contains more than  $k$  components of  $S - (H_{i+1}^n + K_{i+1}^n)$ ; no component of  $S - (H_i^n + K_i^n)$  is of diameter greater than  $\frac{1}{i+1}$ .

Let  $S_n = \overline{(H_1^n + H_2^n + H_3^n + \dots)}$ . By the same methods used in establishing the similar properties of  $S_1$  and  $S_2$ , it can be shown that: the sets  $S_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots, m_1$ ) are all mutually exclusive; no  $S_n$  cuts  $S$ ; no component of  $S - (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{m_1})$  is of diameter greater than  $\frac{1}{2}$ ; if  $S_r + S_t$  cuts  $S$ , then  $S - (S_r + S_t)$  has more than  $k$  components.

By Lemma A, the number of components of

$$S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{m_1})$$

is finite. Let this number be  $m_2 - m_1$ , and let the components of  $S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{m_1})$  be  $D_{m_1+1}, D_{m_1+2}, \dots, D_{m_2}$ . By performing in each  $D_n$  ( $n = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$ ) a construction similar to that used in constructing  $S_n$  ( $n = 3, 4, \dots, m_1$ ) in  $D_n$  ( $n = 3, 4, \dots, m_1$ ), we can construct a set of subcontinua of  $S$ ,  $S_{m_1+1}, S_{m_1+2}, \dots, S_{m_2}$ , such that: the sets  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m_2$ ) are all mutually exclusive; no  $S_n$  cuts  $S$ ; no component of  $S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{m_2})$  is of diameter greater than  $\frac{1}{3}$ ; if  $S_r + S_t$  cuts  $S$ ,  $S - (S_r + S_t)$  has more than  $k$  components.

The process by which the sets  $S_n$  were constructed can be repeated indefinitely. Hence, we can show that there must exist an infinite sequence of subcontinua of  $S$ ,  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , having the following properties:  $S_i \cdot S_j = 0$ , ( $i \neq j$ ); for every  $\varepsilon > 0$  there exists a positive integer  $n$  so large that no component of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$  is of diameter greater than  $\varepsilon$ ; if  $S_r + S_t$  cuts  $S$ , then  $S - (S_r + S_t)$  has more than  $k$  components.

Let  $P$  be any point of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ . Let  $S_m$  be some continuum of the sequence  $S_1, S_2, S_3, \dots$ . There exists an integer  $n$  so large that no component of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$  is of diameter greater than  $\frac{1}{2} \text{dist.}(P, S_m)$ .

Let  $D$  be the component of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$  which contains  $P$ . Then  $D$  cannot have a point of  $S_m$  on its boundary. The set  $D$  must have on its boundary points of exactly two continua of the sequence  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , say  $S_r$  and  $S_t$ . Then  $S_r + S_t$  cuts  $S$ , and hence  $S - (S_r + S_t)$  must have more than  $k$  components, and hence more than 2 components. Let  $E$  be that component of  $S - (S_r + S_t)$  which contains  $S_m$ . Then, since each component of  $S - (S_r + S_t)$  must have on its boundary points both of  $S_r$  and  $S_t$ ,  $S - (E + D)$  must be connected. Since  $S_m$  does not cut  $S$ , each component of  $E - S_m$  must have on its boundary a point of  $S_r + S_t$ . Hence,  $S - (S_m + P)$  must be connected. Let  $P$  and  $Q$  be any two points of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ .

Let  $n$  be so large that no component of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$  is of diameter greater than  $\frac{1}{2}$  dist.  $(P, Q)$ . Then  $P$  and  $Q$  must lie in different components of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$ . Let  $D$  be that component of  $S - \sum_{i=1}^n S_i$  which contains  $P$ . Let  $S_r$  and  $S_t$  be those continua of the set  $S_1, S_2, \dots, S_n$  which contain boundary points of  $D$ . Then, since  $S - (S_r + S_t)$  must have more than 2 components, and since  $S$  is cyclically connected,  $S - (P + Q)$  must be connected.

Let  $G_1$  be the collection the elements of which are the continua of the sequence  $\{S_i\}$  and the points of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ . Since  $G_1$  does not contain more than a finite number of continua of diameter greater than any given positive number  $\varepsilon$ , the collection  $G_1$  must be upper semi-continuous. Furthermore, we have shown that the sum of no two elements of  $G_1$  of which one is a point of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$  can cut  $S$ , and that if the sum of the continua  $S_a$  and  $S_b$  cuts  $S$ ,  $S - (S_a + S_b)$  must have more than  $k$  components. Hence,  $G_1$  is an upper semi-continuous collection of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and having the property that if the sum of any two elements of  $G_1$  cuts  $S$ , it must divide  $S$  into more than  $k$  parts. Let  $G_2$  be the collection consisting of the continua  $H$  and  $K$  and the points of  $S - (H + K)$ . Then  $G_2$  is an upper semi-continuous collection of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and having the property that there exist two continua of the collection  $G_2$  whose sum divides  $S$  into more than  $k$  parts.

Hence,  $S_{G_1}$  contains a pair of elements whose sum divides it into exactly  $k$  parts, but  $S_{G_2}$  contains no pair of elements having this property. Hence,  $S_{G_1}$  and  $S_{G_2}$  cannot be topologically equivalent to each other, and hence either  $S_{G_1}$  is not topologically equivalent to  $S$  or else  $S_{G_2}$  is not topologically equivalent to  $S$ .

**Theorem 2.** *Let  $S$  be a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve, and suppose that there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $H$  and  $K$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ , and having the property that if  $H_1$  and  $K_1$  are*

any two mutually exclusive subcontinua of  $S$  containing  $H$  and  $K$  respectively and such that neither  $H_1$  nor  $K_1$  cuts  $S$ , then at least one component of  $S-(H+K)$  contains only one component of  $S-(H_1+K_1)$ . Then there exists an upper semi-continuous collection  $G$  of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and such that  $S_G$  is topologically equivalent to a simple closed curve.

Proof. By Lemma A,  $S-(H+K)$  has only a finite number of components. Let this number be  $m$ , and let the components of  $S-(H+K)$  be  $U_1, U_2, \dots, U_m$ . Suppose that, for each  $i=1, 2, \dots, m$  there exist two mutually exclusive subcontinua of  $S$ ,  $L_i$  and  $M_i$ , containing  $H$  and  $K$  respectively, such that neither  $L_i$  nor  $M_i$  cuts  $S$ , and such that  $U_i$  contains more than one component of  $S-(L_i+M_i)$ . Let  $L=H+\sum_{i=1}^m U_i L_i$  and let  $M=K+\sum_{i=1}^m U_i M_i$ . Then  $L$  and  $M$  are two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , containing  $H$  and  $K$  respectively, such that neither  $L$  nor  $M$  cuts  $S$ , and such that each component of  $S-(H+K)$  contains more than one component of  $S-(L+M)$ . But this contradicts the hypothesis. Hence, there exists a component  $D$  of  $S-(H+K)$  having the property that if  $H_1$  and  $K_1$  are any two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , containing  $H$  and  $K$  respectively, and such that neither  $H_1$  nor  $K_1$  cuts  $S$ , then  $D$  contains only one component of  $S-(H_1+K_1)$ .

Since  $H+K$  cuts  $S$ ,  $S-(H+K)$  has more than one component. Since neither  $H$  nor  $K$  cuts  $S$ , each component of  $S-(H+K)$  must have on its boundary both a point of  $H$  and a point of  $K$ , and hence  $S-D$  is a continuum. For each point  $P$  of  $H$  let  $D_p$  denote a connected open subset of  $S$ , containing  $P$ , of diameter less than  $\text{dist.}(H, K)$ , and such that the boundary of  $D_p$  is totally disconnected. There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_p\}$  which covers  $H$ . Let  $H_1$  denote the sum of the point sets of this subcollection, together with their boundaries. Let  $E$  denote the sum of  $H_1$  and all those components of  $S-H_1$  which do not contain  $K$ . Then  $E$  is a continuum, the boundary of  $E$  is totally disconnected, and  $E$  does not cut  $S$ . For each point  $Q$  of  $K$  let  $D_Q$  denote a connected open subset of  $S$ , containing  $Q$ , of diameter less than  $\text{dist.}(K, E)$ , and such that the boundary of  $D_Q$  is totally disconnected. There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_Q\}$  which covers  $K$ . Let  $K_1$  denote the sum of the point sets of this

subcollection, together with their boundaries. Let  $F$  denote the sum of  $K_1$  and all those components of  $S - K_1$  which do not contain  $E$ . Then  $F$  is a continuum, the boundary of  $F$  is totally disconnected,  $F$  does not cut  $S$ , and  $E \cdot F = 0$ .

Since  $E$  contains  $H$  and  $F$  contains  $K$ ,  $D$  must contain only one component of  $S - (E + F)$ . Let this component be  $D_1$ . Then, if  $L$  and  $M$  are any two mutually exclusive subcontinua of  $S$  containing  $E$  and  $F$  respectively and such that neither  $L$  nor  $M$  cuts  $S$ ,  $D_1$  must contain only one component of  $S - (L + M)$ . The boundary of  $D_1$  is totally disconnected and  $\bar{D}_1$  is a continuous curve. For each point  $R$  of the boundary of  $\bar{D}_1$  let  $D_R$  denote an open (relative to  $\bar{D}_1$ ) subset of  $\bar{D}_1$ , containing  $R$ , of diameter less than the smaller of the two numbers 1 and  $\frac{1}{2} \text{dist.}(E, F)$ , and such that  $B_R = \bar{D}_R - D_R$  has no point in common with the boundary of  $D_1$ . There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_R\}$  which covers the boundary of  $D_1$ . Let  $C$  denote the sum of the sets  $B_R$  corresponding to this subcollection. Then  $C$  is closed and is a subset of  $D_1$ . Every component of  $D_1 - C$  which contains a point of  $E + F$  must be a subset of some set of the collection  $\{D_R\}$ , and hence must be of diameter less than 1 and also less than  $\frac{1}{2} \text{dist.}(E, F)$ . Hence, no component of  $\bar{D}_1 - C$  contains both a point of  $E$  and a point of  $F$ . Let  $N$  denote the sum of  $C$  together with all those components of  $\bar{D}_1 - C$  which do not contain points of  $E + F$ . Then  $N$  is closed and is a subset of  $D_1$ . There exists a subcontinuum  $U$  of  $D_1$  which contains  $N$ . For each point  $T$  of  $U$  let  $D_T$  denote a connected open subset of  $D_1$ , containing  $T$ , and such that the boundary of  $D_T$  is totally disconnected. There exists a finite subcollection of the collection  $\{D_T\}$  which covers  $U$ . Let  $V$  denote the sum of the point sets of this subcollection together with their boundaries. Let  $S_1$  denote the sum of  $V$  together with all components of  $D_1 - V$  which do not contain points of  $E + F$ . Then  $S_1$  is a continuum, is a subset of  $D_1$ , and does not cut  $S$ . Every component of  $D_1 - S_1$  has on its boundary a point of  $E + F$  and is of diameter less than 1. No component of  $D_1 - S_1$  has on its boundary both a point of  $E$  and a point of  $F$ . The set  $S_1$  separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ . The boundary of  $S_1$  is totally disconnected.

Let  $W$  denote the sum of  $E$  and  $S_1$  together with all components of  $D_1 - S_1$  whose boundaries contain points of  $E$ . Then  $W$  is a continuum, and, since neither  $E$  nor  $S_1$  cuts  $S$ ,  $W$  does not cut  $S$ . Hence,  $W$  and  $F$  are two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , neither of which cuts  $S$ , containing  $E$  and  $F$  respectively. Hence  $D_1$  can contain only one component of  $S - (W + F)$ , and hence  $D_1 - S_1$  has only one component having on its boundary a point of  $F$ . Similarly we can show that  $D_1 - S_1$  has only one component having on its boundary a point of  $E$ . Let  $D_2$  and  $D_3$  denote the components of  $D_1 - S_1$ . Then neither  $D_2$  nor  $D_3$  cuts  $S$ , but both  $D_2$  and  $D_3$  do separate  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ . The set  $(D_1 + E + F) - D_2$  has only two components, and  $(D_1 + E + F) - D_3$  likewise has only two components. Let  $E_2$  and  $F_2$  denote the components of  $(D_1 + E + F) - D_2$  containing  $E$  and  $F$  respectively. Then, if  $L$  and  $M$  are any two mutually exclusive subcontinua of  $S$  containing  $E_2$  and  $F_2$  respectively and such that neither  $L$  nor  $M$  cuts  $S$ ,  $D_2$  contains only one component of  $S - (L + M)$ . The boundary of  $D_2$  is totally disconnected.

Hence, by means of the same process used to construct  $S_1$  in  $D_1$  we can construct, in  $D_2$ , a continuum  $S_2$  having the following properties:  $S_2$  does not cut  $S$ ; every component of  $D_2 - S_2$  has on its boundary a point of  $E_2 + F_2$ ;  $S_2$  separates  $E_2$  from  $F_2$  in  $D_2 + E_2 + F_2$ , and hence separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ ;  $D_2 - S_2$  has only two components; one of the components of  $D_2 - S_2$  has on its boundary a point of  $E_2$  and the other a point of  $F_2$ ; each component of  $D_2 - S_2$  is of diameter less than  $\frac{1}{2}$ ; the boundary of  $S_2$  is totally disconnected; neither component of  $D_2 - S_2$  cuts  $S$ ; each component of  $D_2 - S_2$  separates  $E_2$  from  $F_2$  in  $D_2 + E_2 + F_2$ , and hence separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ . By the same process we can construct a subcontinuum  $D_3$  of  $S_3$  having properties similar to those of  $S_2$  in  $D_2$ . Then  $S_1, S_2, S_3$  are three mutually exclusive subcontinua of  $D_1$  having the following properties: neither  $S_1, S_2$ , nor  $S_3$  cuts  $S$ ; each  $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ ; the boundary of each  $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) is totally disconnected;  $D_1 - (S_1 + S_2 + S_3)$  has exactly four components, say  $D_4, D_5, D_6, D_7$ ; no  $D_i$  ( $i=4, 5, 6, 7$ ) cuts  $S$ ; each  $D_i$  ( $i=4, 5, 6, 7$ ) separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ ;  $(D_1 + E + F) - D_i$  has exactly two components; each  $D_i$  ( $i=4, 5, 6, 7$ )

is of diameter less than  $\frac{1}{2}$ . By making use of the same process used in constructing  $S_1, S_2, S_3$  in  $D_1, D_2, D_3$  respectively, we can construct continua  $S_4, S_5, S_6, S_7$  in  $D_4, D_5, D_6, D_7$  respectively, having properties similar to those of  $S_1, S_2, S_3$ , and such that each component of  $D_1 - \sum_{i=1}^7 S_i$  is of diameter less than  $\frac{1}{3}$ .

This process can be repeated indefinitely. Hence, we can show that there exists an infinite sequence of mutually exclusive subcontinua of  $D_1, S_1, S_2, S_3, \dots$ , having the following properties: no  $S_i$  cuts  $S$ ; each  $S_i$  separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ ; for each  $n$ , each component of  $D_1 - \sum_{i=1}^{2^n - 1} S_i$  is of diameter less than  $\frac{1}{n}$ , and separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ , but does not cut  $S$ . Let  $P$  be any point of  $D_1 - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ . For each  $n$ ,  $P$  belongs to some component  $C_n$  of  $D_1 - \sum_{i=1}^{2^n - 1} S_i$ , and  $P$  is the common part of the sequence  $C_1, C_2, C_3, \dots$ . Hence, since  $C_i$  separates  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$  for each  $i$ ,  $P$  must separate  $E$  from  $F$  in  $D_1 + E + F$ . Since  $S$  is cyclically connected, no point of  $D_1 - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$  can cut  $S$ .

Let  $G$  be the collection whose elements are the continua  $S - D_1, S_1, S_2, S_3, \dots$ , and the points of  $D_1 - \sum_{i=1}^{\infty} S_i$ . Then  $G$  is an upper semi-continuous collection of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and such that  $S_G$  is topologically equivalent to a simple closed curve.

**Theorem 3.** *Let  $S$  be a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve, having the property that if  $G$  is any upper semi-continuous collection of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , then  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ . Then  $S$  is a simple closed curve.*

**Proof.** Follows immediately from Lemma B, Theorem 1, and Theorem 2.

**Theorem 4.** *Let  $S$  be a compact, cyclically connected, continuous curve, and suppose that  $S$  contains two mutually exclusive subcontinua, neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ . Then there exists an upper semi-continuous collection  $G$  of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and such that  $S_G$  is a regular curve.*

*Proof.* Let  $L$  and  $M$  be two mutually exclusive subcontinua of  $S$ , neither of which cuts  $S$ , but whose sum cuts  $S$ . Let  $H_1 = L + M$ . Since  $H_1$  cuts  $S$ ,  $S - H_1$  must have at least two components. Since neither  $L$  nor  $M$  cuts  $S$ , each component of  $S - H_1$  must have on its boundary both a point of  $L$  and a point of  $M$ . By Lemma C, there exists a subset  $H_2$  of  $S - H_1$  having the following properties:  $H_2$  is the sum of a finite number of mutually exclusive continua, no one of which cuts  $S$ ; no component of  $S - (H_1 + H_2)$  cuts  $S$ ; every two components of  $H_1$  are separated from each other in  $S$  by  $H_2$ ; every point of  $S - (H_1 + H_2)$  is at a distance from  $H_1$  of less than  $\frac{1}{2} \text{dist.}(L, M)$ . Similarly, by repeated application of Lemma C, we can show that there exists an infinite sequence of mutually exclusive subsets of  $S, H_1, H_2, H_3, \dots$ , having the following properties: for each  $n$ ,  $H_n$  is the sum of a finite number of mutually exclusive continua, no one of which cuts  $S$ ; no component of  $S - \sum_{i=1}^n H_i$  cuts  $S$ ; every two components of  $\sum_{i=1}^n H_i$  are separated from each other in  $S$  by  $H_{n+1}$ ; each point of  $S - \sum_{i=1}^{n+1} H_i$  is at a distance from  $\sum_{i=1}^n H_i$  of less than half of the smallest distance between any two components of  $\sum_{i=1}^n H_i$ .

Let  $D$  be any component of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ , and let  $P$  be any point of  $D$ . Let  $F$  be any component of  $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ . Let  $H_n$  be the set of the collection  $\{H_i\}$  of which  $F$  is a component. There exists an integer  $m$ , greater than  $n$ , and large enough so that no point of  $S - \sum_{i=1}^{m+1} H_i$  is at a distance from  $\sum_{i=1}^m H_i$  of less than  $\frac{1}{2} \text{dist.}(P, F)$ .



Then no component of  $S - \sum_{i=1}^{m+1} H_i$  which contains  $P$  can have on its boundary a point of  $F$ . Hence, since  $D$  must be a subset of some component of  $S - \sum_{i=1}^{m+1} H_i$ , no point of  $F$  can be a limit point of  $D$ . Hence, each component of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} H_i$  is closed, and is, therefore, a continuum. Furthermore,  $D$  and  $F$  are separated from each other in  $S$  by  $\sum_{i=1}^{m+1} H_i - F$ , and hence by a finite number of components of  $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ .

Let  $D$  be any component of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ , and let  $D_n$  be that component of  $S - \sum_{i=1}^n H_i$  which contains  $D$ . Then  $D$  is the common part of all the sets  $D_n$ , and hence, since no  $D_n$  cuts  $S$ ,  $D$  cannot cut  $S$ . Let  $E_1$  and  $E_2$  be any two components of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ . There exists an integer  $m$  so large that no point of  $S - \sum_{i=1}^{m+1} H_i$  is at a distance from  $\sum_{i=1}^m H_i$  of less than  $\frac{1}{2} \text{dist.}(E_1, E_2)$ . Then  $E_1$  and  $E_2$  are separated from each other in  $S$  by  $\sum_{i=1}^m H_i - (E_1 + E_2)$ , and hence by a finite number of components of  $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ .

Let  $G$  denote the collection of continua each of which is either a component of  $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$  or a component of  $S - \sum_{i=1}^{\infty} H_i$ . Then we have shown that any two components of  $G$  are separated from each other in  $S$  by a finite subcollection of  $G$ . Hence, by Lemma D, the collection  $G$  is upper semi-continuous and  $S_G$  is a regular curve.

**Corollary.** *Let  $S$  be a compact, cyclically connected, one-dimensional, continuous curve. Then there exists an upper semi-continuous collection  $G$  of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , no one of which cuts  $S$ , filling up  $S$ , and having the property that  $S_G$  is a regular curve.*

Proof. Follows immediately from Lemma B and Theorem 4.

**Lemma E.** Suppose that  $S$  is a continuum and that  $G$  is an upper semi-continuous collection of mutually exclusive compact subcontinua of  $S$ , filling up  $S$ , and having the following properties: (1) no continuum of the collection  $G$  cuts  $S$ ; (2) if  $P$  is any continuum of the collection  $G$  then there exists an open subset  $D_p$  of  $S$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Then if  $E$  is an open subset of  $S_G$  which is topologically equivalent to the Euclidean plane, the subset  $E^{* 1)}$  of  $S$  is topologically equivalent to the Euclidean plane.

*Proof.* Let  $\widehat{AB}$  denote any arc of  $E$ . There exists, by hypothesis, an open subset  $D_A$  of  $S$  which contains  $A$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Let  $C$  be any element, other than  $B$ , of the arc  $\widehat{AB}$ , and let  $\widehat{AC}$  denote the interval of  $AB$  having  $A$  and  $C$  as its endpoints. Suppose that there exists an open subset  $D_{AC}$  of  $S$  which contains the set  $\widehat{AC}^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Since  $D_{AC}$  is an open set and the collection  $\widehat{AB}$  of subcontinua of  $S$  is upper semi-continuous, then the set of elements of  $\widehat{AB}$  which lie entirely within  $D_{AC}$  forms an open (relative to  $\widehat{AB}$ ) subset of  $\widehat{AB}$ . Hence, there must exist an element  $F$  of  $\widehat{AB}$  which lies between  $C$  and  $B$  and such that  $\widehat{AF}^*$  lies entirely within  $D_{AC}$ .

Let  $Q$  be any element of  $\widehat{AB}$  other than  $A$  having the property that if  $L$  is any element of  $\widehat{AB}$  which lies between  $A$  and  $Q$ , then there exists an open subset  $D_{AL}$  of  $S$  which contains  $\widehat{AL}^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. There exists an open subset  $D_Q$  of  $S$  which contains  $Q$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. There exists an element  $M$  of  $\widehat{AB}$  which lies between  $A$  and  $Q$  and such that  $\widehat{MQ}^*$  lies entirely within  $D_Q$ . Let  $D_{AM}$  be an open subset of  $S$  which contains  $\widehat{AM}^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. There exists an open subset  $D_M$  of  $S$  which contains  $M$ , and is topologically equivalent to the Euclidean plane, and is a subset of both  $D_Q$  and  $D_{AM}$ . There exists an element  $N$  of  $\widehat{AB}$  which lies between  $M$  and  $Q$ , and such that  $\widehat{MN}^*$  lies entirely within  $D_M$ . There exists a simple closed curve  $J_1$  of  $D_{AM}$  which contains  $\widehat{AM}^*$  in its interior, but such that neither  $J_1$  nor its interior contains any point of  $\widehat{NQ}^*$ .

<sup>1)</sup> If  $H$  denotes a collection of point sets of the space  $S$ , then the symbol  $H^*$  will be used to designate the set of points of  $S$  which belong to elements of the collection  $H$ .

There exists a simple closed curve  $J_2$  of  $D_Q$  which has  $\widehat{NQ}^*$  in its interior, but such that neither  $J_2$  nor its interior contains any point of  $J_1$  plus its interior. Let  $I_1$  denote the interior of  $J_1$  and  $I_2$  the interior of  $J_2$ . There exists a simple closed curve  $J_3$  of  $D_M$  which has  $\widehat{MN}^*$  in its interior and such that, if  $I_3$  is the interior of  $J_3$ , then  $I_1 \cdot I_3$  is connected and  $I_2 \cdot I_3$  is connected. Then  $I_1 + I_2 + I_3$  is an open subset of  $S$  which contains  $\widehat{AQ}^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane.

By making use of the above results and applying the De-dekind cut properties of an arc, we can show that there exists an open subset of  $S$  which contains  $\widehat{AB}^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane.

Let  $J$  be any simple closed curve of  $E$  and let  $I$  be the interior of  $J$ . Then there exists an upper semi-continuous collection  $H$  of arcs of  $S_G$ , filling up  $J+I$ , and such that the collection  $H$  is an arc with respect to its elements. Now we have seen above that if  $AB$  is any arc of  $E$ , there exists an open subset of  $S$  which contains  $AB^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. By making use of the same process as above, using the arcs of the collection  $H$  as elements, we can show that there exists an open subset of  $S$  which contains  $(J+I)^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. If  $T$  is any open subset of  $E$  which contains  $J+I$ , then  $T^*$  is an open subset of  $E^*$ , and hence an open subset of  $S$ , and we can show that there must exist an open subset of  $T^*$  which contains  $(J+I)^*$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane.

Since  $E$  is topologically equivalent to the Euclidean plane, there exists an infinite sequence of simple closed curves of  $E$  such that each contains the preceding in its interior and such that  $E$  is the sum of their interiors. Hence, we see that  $E^*$  is the sum of a monotonic increasing sequence of sets, each of which is topologically equivalent to the Euclidean plane, and hence  $E^*$  itself must be topologically equivalent to the Euclidean plane.

**Theorem 5.** *Let  $S$  be a two-dimensional manifold, and let  $G$  be an upper semi-continuous collection of mutually exclusive compact proper subcontinua of  $S$ , filling up  $S$ , and having the following properties: (1) no continuum of the collection  $G$  cuts  $S$ ; (2) if  $P$  is any continuum of the collection  $G$ , then there exists an open subset*

$D_P$  of  $S$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane<sup>1)</sup>. Then  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ <sup>2)</sup>.

Proof. Let  $P$  be any continuum of the collection  $G$ , and let  $D_P$  be an open subset of  $S$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Since  $D_P$  is open and the collection  $G$  is upper semi-continuous, then the set  $T$  of elements of  $G$  which lie entirely within  $D_P$  forms an open subset of  $S_G$ . Since  $S$  is a manifold, it is a continuous curve, and hence  $S_G$  is also a continuous curve. Hence, there exists a connected open subset  $D$  of  $S_G$  which contains  $P$  and such that  $\bar{D}$  is a subset of  $T$ . Let  $H$  be the collection whose elements are the continua of the collection  $\bar{D}$  and the points of  $D_P - \bar{D}^*$ . Since  $\bar{D}^*$  is a closed subset of  $D_P$ , and the collection  $\bar{D}$ , being a subset of an upper semi-continuous collection, is itself upper semi-continuous, then the collection  $H$  is also upper semi-continuous. Since no continuum of the collection  $G$  cuts  $S$ , and since  $D_P$  is a connected open subset of  $S$ , then no continuum of the collection  $\bar{D}$  cuts  $D_P$ . And since  $D_P$  is topologically equivalent to the Euclidean plane, no point of  $D_P - \bar{D}^*$  cuts  $D_P$ . Furthermore, every continuum of the collection  $H$  is compact. Hence, by the theorem of R. L. Moore previously quoted, the collection  $H$  is topologically equivalent to the Euclidean plane. Hence, the collection  $D$ , which is an open subset of  $H$ , is topologically equivalent to an open subset of the Euclidean plane. Hence, there exists an open subset  $L_P$  of  $D$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Then, since  $D$  is an open subset of  $S_G$ ,  $L_P$  must be an open subset of  $S_G$ , and hence we have shown that there exists an open subset of  $S_G$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane. Hence,  $S_G$  is locally a plane at each point. Since  $S$  is a manifold, it is connected and completely separable. Hence  $S_G$  must also be connected and completely separable. Hence  $S_G$  is

1) If  $S$  is a two-dimensional manifold and  $P$  is a proper subcontinuum of  $S$  which does not cut  $S$ , then the statement that there exists an open subset of  $S$  which contains  $P$  and is topologically equivalent to the Euclidean plane is equivalent to the statement that the connectivity of  $S - P$  is equal to the connectivity of  $S$ .

2) By making use of Lemma E and well known properties of two-dimensional manifolds, it can easily be seen that if  $S$  is a two-dimensional manifold and  $G$  is an upper semi-continuous collection of mutually exclusive proper subcontinua of  $S$ , filling up  $S$ , such that  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ , then  $G$  must satisfy the conditions of Theorem 5.

a connected, completely separable space which is locally a plane at every point, and must therefore be a two dimensional manifold.

Since  $S_G$  is a two dimensional manifold, it can be triangulated. Let  $T_G$  be a triangulation of  $S_G$ . Denote the vertices of this triangulation by  $P_1, P_2, \dots$ . If there is a side of the triangulation  $T_G$  which has as its vertices the points  $P_i$  and  $P_j$ , denote this side by  $U_{ij}$ . If there is a triangle of  $T_G$  whose vertices are  $P_i, P_j, P_k$ , denote this triangle by  $V_{ijk}$ , and let  $I_{ijk}$  denote the interior of  $V_{ijk}$ . In each  $I_{ijk}$  let a point  $P_{ijk}$  be selected. If  $V_{ijk}$  and  $V_{lmn}$  have a side, say  $U_{rs}$ , in common, let the points  $P_{ijk}$  and  $P_{lmn}$  be joined by an arc  $A_{rs}$  lying in  $I_{ijk} + I_{lmn} + U_{rs} - (P_r + P_s)$ . This can be done in such a way that no two of the arcs  $A_{rs}$  thus constructed have, anything but one end point in common. Let  $M$  denote the sum of the arcs of the collection  $\{A_{rs}\}$ . Each component of  $S_G - M$  contains one and only one point of the collection  $\{P_i\}$ , and every point of the collection  $\{P_i\}$  belongs to some component of  $S_G - M$ . Let  $D_i$  denote that component of  $S_G - M$  which contains  $P_i$ . Then the collection  $\{\bar{D}_i\}$  is a collection of polygons having the following properties: the collection  $\{\bar{D}_i\}$  covers  $S_G$ ; no two polygons of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  have an interior point in common; each side of a polygon of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  is a side of exactly two polygons of this collection, which otherwise have no point in common; each vertex of a polygon of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  is the vertex of exactly three polygons of the collection such that each pair of these three polygons has in common a side containing this point, while the three polygons have only this point in common. The vertices of the polygons of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  are the points of the collection  $\{P_{ijk}\}$ , and the sides are the arcs of the collection  $\{A_{rs}\}$ . The polygons  $\bar{D}_i$  and  $\bar{D}_j$  have a side  $A_{ij}$  in common if and only if the points  $P_i$  and  $P_j$  are the ends of a side  $U_{ij}$  of the triangulation  $T_G$ .

For each  $i$ , let  $Q_i$  be a point of  $S$  belonging to the continuum  $P_i$ . If  $P_i$  and  $P_j$  are the ends of a side  $U_{ij}$ , then the polygons  $\bar{D}_i$  and  $\bar{D}_j$  have a side  $A_{ij}$  in common. Then the subset  $E_{ij}$  of  $S_G$ , consisting of the interior points of  $\bar{D}_i + \bar{D}_j$ , is topologically equivalent to the Euclidean plane, and hence, by Lemma E, the subset  $E_{ij}^*$  of  $S$  is topologically equivalent to the Euclidean plane. Hence, the points  $Q_i$  and  $Q_j$  can be joined by an arc  $B_{ij}$  lying in  $E_{ij}^*$ . This construction can be performed for each pair of points of the col-

lection  $\{Q_i\}$  for which the corresponding polygons of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  have a side in common, and can be done in such a way that no two arcs of the collection  $\{B_{ij}\}$  thus formed have anything but one endpoint in common. Let  $K$  denote the sum of the arcs of the collection  $\{B_{ij}\}$ . For each element  $P_{ijk}$  of the collection  $\{P_{ijk}\}$ , let  $F_{ijk}$  denote the interior of  $(\bar{D}_i + \bar{D}_j + \bar{D}_k)$ , where  $\bar{D}_i, \bar{D}_j, \bar{D}_k$  are the polygons of the collection  $\{\bar{D}_i\}$  which have the vertex  $P_{ijk}$  in common. Then  $F_{ijk}$  is topologically equivalent to the Euclidean plane, and hence, by Lemma E,  $F_{ijk}^*$  is topologically equivalent to the Euclidean plane. Making use of this fact, we can show that each component of  $S-K$  contains one and only one continuum of the collection  $\{P_{ijk}\}$ , and each continuum of the collection  $\{P_{ijk}\}$  belongs to some component of  $S-K$ . Let  $E_{ijk}$  denote that component of  $S-K$  which contains the continuum  $P_{ijk}$ . Then, again making use of the fact that each set of the collection  $\{F_{ijk}\}$  is topologically equivalent to the Euclidean plane, we can show that:  $E_{ijk}$  is topologically equivalent to the Euclidean plane; the boundary of  $E_{ijk}$  is a simple closed curve, and is equal to the sum of the arcs  $B_{ij}, B_{jk}$ , and  $B_{ki}$ ;  $\bar{E}_{ijk}$  and  $\bar{E}_{lmn}$  have an arc of the collection  $\{B_{ij}\}$  in common if and only if the triangles  $V_{ijk}$  and  $V_{lmn}$  have a side in common; the common part of two sets of the collection  $\{\bar{E}_{ijk}\}$  is either an arc of the collection  $\{B_{ij}\}$  or a point of the collection  $\{Q_i\}$  or is vacuous; every arc of the collection  $\{B_{ij}\}$  is on the boundary of exactly two sets of the collection  $\{E_{ijk}\}$ ; every point of the collection  $\{Q_i\}$  is on the boundary of a cyclically ordered set of sets of the collection  $\{\bar{E}_{ijk}\}$  such that the common part of any two successive sets is an arc of the collection  $\{B_{ij}\}$ , while the common part of any two which are not successive is simply the point  $Q_i$  itself; every point of  $S$  belongs to some set of the collection  $\{\bar{E}_{ijk}\}$ .

Hence the collection  $\{\bar{E}_{ijk}\}$  forms a triangulation of  $S$ . Let  $T$  denote this triangulation. Let the triangle  $E_{ijk}$  of the triangulation  $T$  of  $S$  correspond to the triangle  $V_{ijk}$  of the triangulation  $T_G$  of  $S_G$ . Then we have seen that this is a one-to-one correspondence, and has the property that two triangles of the triangulation  $T$  have a side in common if and only if the corresponding triangles of the triangulation  $T_G$  have a side in common. Hence  $S_G$  is topologically equivalent to  $S$ .

University of Pennsylvania,  
Philadelphia, Pa.

## Posiedzenie

z dnia 22 listopada 1938 r.

Władysław Gorczyński.

### O uprzywilejowanym charakterze usłonecznienia na wybrzeżu polskim (wraz z W. M. Gdańskiem) w porównaniu z innymi dzielnicami Polski.

(z 1 mapką polskich wybrzeży Bałtyku)

Z Gabinetu Aktynometrycznego Tow. Nauk. Warsz.

Komunikat zgłoszony dnia 2 listopada 1938 r.

#### SUMMARY

**The greater insolation of the maritime district of Poland  
(Dantzig included) as compared with other polish regions.**

#### WSTĘP.

Komunikat poniższy składa się ze wstępu i trzech rozdziałów: 1) usłonecznienie wybrzeży polskich, 2) o stosunkach zachmurzenia na wybrzeżu Polski, 3) wartości i sumy natężenia promieniowania słonecznego na wybrzeżu Bałtyku między Gdynią i Gdańskiem. Do tekstu dołączony jest wykaz bibliograficzny oraz mapka polskich wybrzeży Bałtyku.

Jak wynika z ośmiu zestawień tabelarycznych (tab. I—VIII) wszystkie trzy omówione elementy, składające się na klimat słoneczny w sensie fizyczno-meteorologicznym tego wyrazu, zgodnie stwierdzają, że:

a) Gdy w grudniu i w ogóle w miesiącach zimowych procent usłonecznienia jest mniej więcej taki sam na wybrzeżu jak i na nizinach Polski, to w miesiącach czerwcu, lipcu i sierpniu uwydatnia się silna przewaga bardziej usłonecznionego wtedy wybrzeża polskiego.

b) W przeciętnych rocznych ta przewaga wybrzeży wyraża się koło  $\frac{1}{2}$  godziny dziennie więcej (w przeciętnej z ogółu dni), co czyni w stosunku rocznym koło 180 godzin słonecznych na niekorzyść Warszawy. Z tej liczby już na trzy miesiące letnie wypada z górą 100 godzin.

c) Powyższe nadwyżki usłonecznienia stosują się do wybrzeży od Gdyni poprzez Orłowo Morskie do Gdańska, gdyż na półwyspie Helskim przewaga powyższa nieco spada (w samym Helu np. do połowy), zachowując bądź co bądź silną przewagę w ciągu lata w porównaniu z Warszawą i z nizinami Polski.

d) Stosunki zachmurzenia na całym wybrzeżu od Karwii do Helu i od Gdyni do Gdańska dają te same wyniki, co usłonecznienie mierzone heliografami.

e) Badania aktynometryczne, będąc w zgodzie z usłonecznieniem i zachmurzeniem, mają tę nieocenioną zaletę, że pozwalają ściślej tj. liczbowo ocenić nie tylko czas trwania insolacji, ale i natężenie oraz jakość promieniowania słonecznego, dochodzącego od słońca i drogą dyfuzji z całego sklepienia niebieskiego na ziemię.

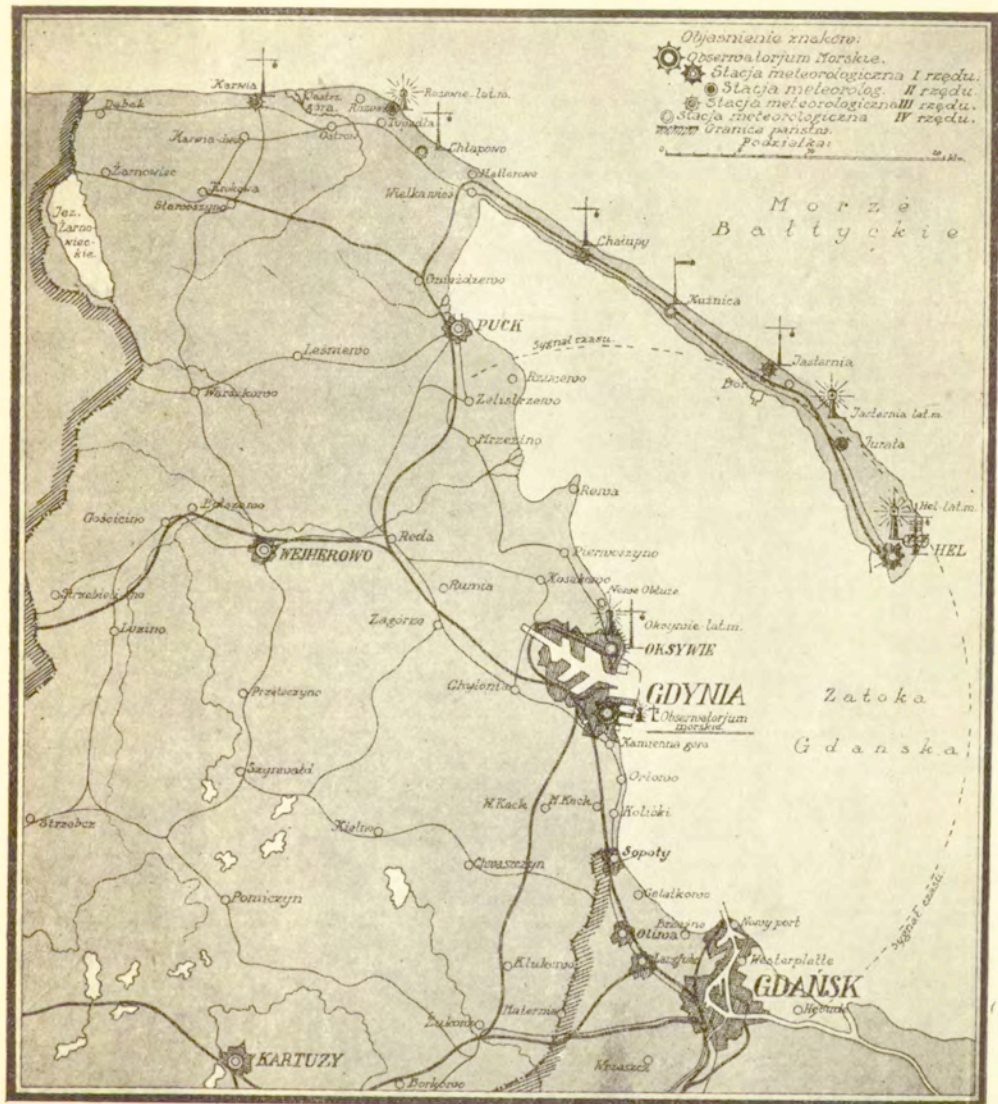
Zwłaszcza cenne są pomiary solarymetryczne do odczytań ocznych i do automatycznego otrzymywania krzywych solarygraficznych. Z porównania solarygramów wynika, że deficyt Warszawy pod względem liczby kalorii dochodzących do poziomej powierzchni ziemi wynosi 6% dla okresu rocznego. Główne różnice na korzyść wybrzeża w Gdyni lub Orłowie Morskim wypadają w czerwcu, lipcu i sierpniu, przy czym różnica w tych miesiącach wynosi około 8%. W porze zimowej Warszawa i w ogóle niż Polski dają pod względem usłonecznienia prawie tyleż, co i interesujące nas wybrzeże Bałtyku.

Orłowo Morskie (willa »Maciejka«), w październiku 1938 roku.

### **Usłonecznienie wybrzeży polskich.**

Zapoczątkowując serię komunikatów dotyczących klimatu wybrzeży polskich pod względem stosunków usłonecznienia, zachmurzenia i natężenia promieniowania słonecznego, rozpoczynamy od ogólnego omówienia panujących na polskim wybrzeżu Bałtyku stosunków tak zwanego klimatu słonecznego w porównaniu z innymi dzielnicami Polski. Bardziej szczegółowa dyskusja materiałów i tablic, zawartych w poniższym pierwszym artykule, będzie podana





Polskie wybrzeże Bałtyku. — Polish Sea shores (Baltic Sea).

(Klisza z Wiad. Met. P. I. M., 1935).



w komunikatach następnych, poświęconych omówieniu szeregu poszczególnych elementów klimatycznych, składających się na klimat słoneczny danego obszaru. Celem tej pracy, do której materiały są opracowywane przez autora od szeregu lat w Gabinetie Aktynometrycznym Tow. Nauk. Warsz., jest wydanie publikacji ogólnej, dotyczącej stosunków klimatu słonecznego na wybrzeżu Polskim na wzór poprzednich prac autora odnośnie do wybrzeży Śródziemnomorskich i innych mórz i krajów, gdzie autor prowadził pomiary klimatu słonecznego, a zwłaszcza książki wydanej w r. 1934 pt. *«Climat solaire de Nice et de la Côte d'Azur»*. Materiały w komunikacie powyższym i następnym opierają się z jednej strony na pomiarach własnych lub zapoczątkowanych przez autora lub jego współpracowników. Pomiary autora zaingurowane są od lata 1935 w sąsiedztwie Gdyni obecnej (w r. 1938 także w Orłowie Morskim), a także materiały dawne z okresu 1920—1926, w którym autor niniejszego, jako ówczesny dyrektor służby meteorologicznej w Polsce, urządził wraz z ś. p. L. Lorkiewiczem w Nowym Porcie pod Gdańskiem oddział meteorologii morskiej Państwowego Instytutu Meteorologicznego w Warszawie.

To pierwsze Polskie Obserwatorium Morskie w Nowym Porcie posiadało cały szereg przyrządów meteorologicznych, a także aparaty aktynometryczne. Pierwszym kierownikiem Obserwatorium w Nowym Porcie był od założenia w r. 1920 L. Lorkiewicz zmarły w r. 1925, a następnie znany z wielu prac aktynometrycznych dr E. Stenz; z Nowego Portu pod Gdańskiem Obserwatorium to zostało przeniesione w r. 1927 do Gdyni, gdzie wybudowany został osobny gmach na pomieszczenie Obserwatorium Morskiego P. I. M. W tym obszernym gmachu znajduje się wielki taras, gdzie dokonywują się od szeregu lat pomiary promieniowania słonecznego wraz z solarygrafami w charakterze samopisów.

Pomiary aktynometryczne, już zapoczątkowane w Nowym Porcie od 1921 r. zostały następnie kontynuowane przez powstałe koło 1930 r. Obserwatorium Wolnego Miasta Gdańska we Wrzeszczu, gdzie w tym czasie zaprowadzono serię pyrholiograficzną oraz solarymetryczną to jest promieniowania globalnego (od słońca i od całego nieba) padającego na poziomą powierzchnię ziemi.

Połączenie gdańskich serii aktynometrycznych z Wrzeszcza (Danzig-Langfuhr) i z Sopot (Zoppot) z danymi z wybrzeża polskiego (Gdynia i Orłowo Morskie) było wielce ułatwione tą oko-

licznością, że Obserwatorium gdańskie we Wrzeszczu posługiwało się w przeważnej części aparaturą według wzorów polskich sprowadzoną z Delft, gdzie wyrabiane są receptory do solarygrafów i solarymetrów, wprowadzonych przez autora i używanych od samego początku w Nowym Porcie i w Gdyni oraz w Warszawie.

A więc w konkluzji komunikat powyższy i następne z serii klimatu słonecznego wybrzeża polskiego oparte są z jednej strony na pomiarach solarymetrycznych dokonywanych przez autora i jego współpracowników w okolicach Gdyni oraz przez specjalistów Obserwatorium Morskiego, a z drugiej strony na materiałach drukowanych w rocznikach P. I. M. w Warszawie lub zebranych w obserwatoriach stacji podległych Państw. Instytutowi Meteorologicznemu w Warszawie (Gdynia, Hel, Puck i Rozewie). Na terytorium Wolnego Miasta Gdańska mieliśmy do rozporządzenia: 1) materiały Polskiego Obserwatorium Morskiego P. I. M. z Nowego Portu (pomiarzy z okresu od r. 1920 do chwili przeniesienia tej stacji do Gdyni), oraz 2) od r. 1930 z Gdańskiego Obserwatorium we Wrzeszczu, z której pomiarzy zostały ogłoszone dla lat 1930—1937 w »Veröffentlichungen des S. Observatoriums, Danzig-Langfuhr«.

### **Po omówieniu materiałów naukowych, przechodzimy do kwestii usłonecznienia wybrzeży polskich.**

Posiadamy na interesującym nas wybrzeżu bałtyckim następujące trzy serie pomiarów czasu trwania usłonecznienia mierzone przy pomocy heliografów. Są to: Hel, Gdynia i Gdańsk. Nie wdając się w szczegółową dyskusję tych pomiarów heliograficznych, co będzie treścią osobnego komunikatu, zaznaczamy odrazu, że w letniej połowie roku przewaga usłonecznienia akcentuje się bardzo wyraźnie.

Porównyując sześćioletnie dane Gdyni i Warszawy, otrzymujemy następujące wartości: (patrz tab. I., strona następna).

Podczas gdy w zimie usłonecznienie prawie nie różni się na wybrzeżu i w Warszawie, to w lecie otrzymujemy dużą przewagę wybrzeża. W czerwcu, lipcu i sierpniu miejscowości nad wybrzeżem polskim na przestrzeni od Gdyni do Gdańska otrzymują przeciętnie (w okresie 1932—1937) 1·3 godzin słonecznych na dobę więcej niż stolica Polski. W ten sposób okazuje się, że letnicy na wybrzeżu polskim zyskują przynajmniej po 2—3 dni więcej nieba całkowicie bezchmurnego, a w razie częściowego pokrycia nieba o wiele więcej.

Dla Gdyni dodano w tab. I (dla średnich dziennych w godzinach słonecznych efektywnie obserwowanych przez heliograf) lokalne poprawki na wpływ występujących od zachodu przeszkód; poprawki te wynoszą 0·3 godzin słonecznych średnio dla miesięcy wiosennych, 0·6 dla lata i 0·2 dla jesieni. Dla zimy poprawka lokalna nie była stosowana dla heliografu w Gdyni, gdyż wspomniane przeszkody nie zakrywają w tej porze promieni słonecznych.

Tab. I.

Przeciętne dzienne wartości czasu trwania usłonecznienia w godzinach dla 4 pór roku w okresie 6-letnim: 1932—1937.

Mean diurnal values in hours of the duration of bright sunshine. Mean for 4 seasons during the 6 years: 1932—1937.

Pory roku: Seasons:	XII. I. III.	III. IV. V.	VI. VII. VIII.	IX. X. XI.	I—XII
Hel	1·5	6·0	8·7	3·7	5·0
Gdynia	1·7	6·2	8·9	4·2	5·3
Gdańsk	1·8	6·2	8·9	4·2	5·3
Warszawa	1·7	5·7	7·6	3·6	4·65

Dodamy, że w lipcu 1938 r. ustawiono heliograf w Gdyni w nowym miejscu w obrębie górnego tarasu Obserwatorium, przez co wartości powyższych poprawek uległy zmianie.

Wreszcie nadmieniamy, że wspomniane poprawki lokalne należy odróżnić od czułości pasków heliograficznych, na których obserwuje się stale spóźnienie przy wschodzie słońca i wcześniejsze zanikanie śladów wypalania przed zachodem. Wartości tych poprawek zależą od czułości pasków; w ten sposób otrzymuje się opóźnienia od 30 minut do godziny tj. o tyle mniej jest widoczne wypalanie śladów na paskach heliograficznych mimo obecności słońca niezastłoniętego przez chmury lub przez opary nad horyzontem.

W przeciętnej rocznej i łącznie dla wschodu oraz zachodu słońca, różnica między długością astronomiczną dnia i obserwowanym na heliografie czasem trwania usłonecznienia wynosi razem około 1 godziny i trzech kwadransów. Stąd też pochodzą różnice między procentami usłonecznienia w zależności, czy wartości godzin słonecznych, efektywnie obserwowane przez heliograf, porównujemy

się z sumami astronomicznymi, czy też z sumami możliwymi uwzględniając, że należy od sum astronomicznych odjąć czas kiedy heliograf nie daje śladów mimo, że słońce świeci nad horyzontem. Nie wdając się w bliższe rozważanie tych stosunków, co odkładamy do osobnego komunikatu poświęconego jedynie usłonecznieniu, podamy tylko w krótkości że np. dla Warszawy średnia efektywnie obserwowana przez heliograf w okresie 1904—1909 była 4·72 godzin słonecznych w przeciętnej dla całego roku. Ponieważ astronomicznie można było osiągnąć dla okresu rocznego  $12\frac{1}{4}$ , więc stosunek tych dwóch liczb jest 39%. Tymczasem jeżeli się odliczy poprawkę średnią roczną 1·8 godzin na niewypalanie śladów przy wschodzie i zachodzie słońca, to otrzymamy na długość możliwą dla heliografu warszawskiego  $12\cdot25 - 1\cdot8 = 10\cdot45$  godzin, a więc wypadnie 45% zamiast 39%.

Dodamy wreszcie, że biorąc interwał tylko 6-godzinny (od 9 rano do 15 po poł.), otrzymuje się prawie tyle co i dla usłonecznienia w stosunku do czasu możliwego trwania. Dla uniknięcia trudności w porównywaniu i odczytywaniu pasków heliograficznych, które wymagają zmiennych poprawek dla wschodu i zachodu słońca i są zależne także od położenia heliograficznego, wybieramy tylko interwał ogólny (od 9 rano do 15 po poł.) w którym słońce jest w naszych szerokościach dostatecznie wysoko nad poziomem.

Z procentów usłonecznienia, podanych w tab. II dla tego interwału wynika że:

1) istnieje wyraźny przebieg roczny usłonecznienia względnego w % z tym, że dla półrocza letniego wynoszą przeciętnie ponad 60%, stopniowo zniżając się w półroczu zimowym. Minimum występuje w grudniu (okrągło 20%), a maximum występuje w czerwcu (około 68% dla wybrzeża). W Warszawie uwydatnia się dobitnie maximum wrześnieowe, które na wybrzeżu jest nieco mniej wyraźnie zaznaczone.

2) Gdy w grudniu i w ogóle w miesiącach zimowych procent usłonecznienia jest mniej więcej taki sam na wybrzeżu i na nizinach polskich, to w miesiącach czerwcu, lipcu i sierpniu uwydatnia się silna przewaga bardziej usłonecznionego wtedy wybrzeża polskiego.

3) W przeciętnych rocznych ta przewaga wybrzeża wyraża się około  $\frac{1}{2}$  godziny dziennie więcej, co czyni w stosunku rocznym

koło 180 godzin słonecznych w porównaniu z Warszawą. Z tego wypada w liczbach okrągłych na poszczególne miesiące na korzyść Gdyni—Orłowo Morskie—Gdańska: lato 100 godzin (lipiec koło 40, czerwiec i sierpień koło 30 godzin słonecznych dla każdego miesiąca), jesień i wiosna po 35 godzin, zima (styczeń i luty) tylko 10 godzin słonecznych na korzyść wybrzeża w porównaniu z Warszawą.

4) Powyższe nadwyżki usłonecznienia odnoszą się do wybrzeży od Gdyni do Gdańska, bo na półwyspie Helskim przewaga powyższa spada (np. w samym Helu do połowy), zachowując bądź co bądź silną dosyć przewagę w miesiącach letnich w porównaniu z Warszawą i nizinami Polski.

Tab. II.

Procenty usłonecznienia w ciągu 6 godzin (9<sup>h</sup>—15<sup>h</sup>).

Percentages of sunshine during 6 hours (9<sup>h</sup>—15<sup>h</sup>).

(Wraz z czasem astronomicznym godzin słonecznych — with the astronomical duration of sunshine).

Miesiące Months	Period: 1932/37				Period: 1928/37		Astronom. Durat.	
	Warsz.	Gdańsk	Gdynia	Hel	Warsz.	Gdynia	Warsz.	Gdynia
	%	%	%	%	%	%	Godz.	Hours
I	23	28	25	24	22	24	8·2	7·9
II	25	32	31	29	26	30	9·9	9·7
III	38	45	44	42	45	48	11·9	11·9
IV	54	56	57	56	51	54	13·9	14·1
V	65	62	61	63	62	62	15·7	16·1
VI	<b>67</b>	<b>68</b>	<b>69</b>	<b>68</b>	<b>66</b>	<b>67</b>	16·7	17·2
VII	56	65	65	62	56	63	16·2	16·7
VIII	58	64	64	62	56	63	14·6	14·9
IX	61	63	63	60	<b>58</b>	61	12·7	12·7
X	44	46	46	42	43	46	10·6	10·5
XI	26	31	33	29	25	31	8·8	8·5
XII	20*	17*	19*	16*	15*	17*	7·8	7·4
I/XII	45	48	48	46	44	48	12·3	12·3

Uwaga: Spółrzędne geograficzne (Coordinates):

Warszawa (Warsaw): Lat. N=52° 13' Long. E. Gr.=21° 3'

Gdynia-Port: „ 54° 31' „ „ „ 18° 34'

Gdańsk (Dantzig): „ 54° 23' „ „ „ 18° 32'

Hel (Hela): „ 54° 36' „ „ „ 18° 49'

Zauważymy, że podobne konkluzje o uprzywilejowanych stosunkach wybrzeża polskiego pod względem usłonecznienia wynikają z dawnych prac autora oraz E. Stenza i G. Hellmann'a (por. bibliografię). Widać to dobrze na mapkach usłonecznienia Polski podanych w r. 1913 przez autora i w r. 1931 przez E. Stenza. Podajemy odnośne liczby w tab. III. Powtarzamy tu słuszne uwagi E. Stenza, podane w »Kosmosie« (t. 55, r. 1930), z rozpatrywania mapek usłonecznienia dla Polski. W letniej i zimowej mapce widzimy zupełnie wyraźnie, że w lecie usłonecznienie wzrasta od Tatr ku Bałtykowi, w zimie zaś wręcz przeciwnie rośnie od Bałtyku ku Tatom. Według E. Stenza uprzywilejowanie Pomorza co do słońca o 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> godziny w stosunku do Podhala (Zakopane) objaśnia się niewątpliwie przyczynami klimatycznymi, przy czym nie należy zapominać o wpływie szerokości geograficznej, co sprawia, że dzień jest dłuższy w Gdyni w lecie, zaś krótszy w zimie w porównaniu z Zakopanem. Te wpływy astronomiczne oblicza E. Stenz na jedną godzinę.

To też nie należy się dziwić, że turyści i chorzy, którzy poszukują możliwie dużego usłonecznienia, podążają w miesiącach letnich na wybrzeże, zaś zimą do miejscowości górskich.

Tab. III.

Przeciętne wartości czasu trwania usłonecznienia w godzinach (średnie dzienne, S—suma roczna godzin słońca).

Mean values of sunshine duration (daily means in hours per seasons S—annual total of bright sunshine in hours).

	Lat. N.	Long. E.	XII—II	III—V	VI—VIII	IX—XI	S	Period
Kołobrzeg (Kolberg)	54·2	15·6	1·6	5·9	8·1	3·6	1742	1891/1910
Tczew (Dirschau)	54·1	18·8	1·8	5·4	7·7	3·5	1709	„
Warszawa	52·2	21·0	1·4	5·5	7·7	3·7	1662	„
Zakopane H=0·9 Km.	49·3	20·0	3·0	4·4	5·3	4·1	1512	„
Schneekoppe (H=1·6 Km.)	60·7	15·7	2·2	3·0	5·1	3·0	1315	1900/1915
Kiel	54·3	10·3	1·4	5·1	7·1	3·1	1534	1889/1915
Potsdam	52·4	13·1	1·8	5·3	7·1	3·3	1608	1893/1915



Na zaznaczenie zasługuje także fakt, że (jak widać w tab. III) stosunki usłonecznienia na wybrzeżu zachodnio-niemieckim w okolicach Kilonii nie wykazują w lecie uprzywilejowania pod względem przyrostu usłonecznienia w porównaniu z niziną niemiecką jak to wykazuje porównanie stacji: Kiel—Potsdam. Za to góry w Sudetach wykazują w zimie przyrost dni słonecznych, jednak w stosunku mniejszym niż dla Zakopanego.

W rozdziale następnym zobaczymy, że uprzywilejowane stanowisko wybrzeży bałtyckich w porównaniu z nizinami Polski, które tak dobitnie występuje dla Gdyni i Gdańska w porównaniu z Warszawą, wzrasta dalej jeszcze w kierunku wschodnich wybrzeży Bałtyku ku Kłajpedzie.

### **O stosunkach zachmurzenia na wybrzeżu Polski.**

W pracach o zachmurzeniu Polski (por. bibliografię), ogłoszonych w »Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego Warszawskiego« (VIII rocznik z r. 1915 i IX z r. 1916) były pomieszczone mapki dla roku i czterech jego pór obrazujące jego rozmieszczenie na terenie historycznej Polski, od Morza Bałtyckiego do Czarnego i od Inflant po Karpaty, wartości średnich zachmurzenia, oraz rozkładów na tym terytorium liczby dni pogodnych i pochmurnych w Polsce. Z mapek letnich oraz rocznych widać wyraźnie, że zachmurzenie średnie wybrzeży polskich i dalej w kierunku wschodnich wybrzeży Bałtyku (a także w kierunku wybrzeży Morza Czarnego) wykazuje zmniejszenie, a zarazem mniejsza się ilość dni pochmurnych, a zwiększają się liczby dni pogodnych. Natomiast w mapkach zimowych nie widać większych różnic między wybrzeżem a niziną Polski, natomiast w Tatrach i w ogóle w Karpatach występuje zmniejszenie się zachmurzenia.

W tab. IV podane są w wyciągu odpowiednie wartości przeciętne dla 25-letniego okresu (1886—1910), a także z ostatnich lat od r. 1930 do 1937, kiedy nowo zbudowane Obserwatorium Morskie w wielkim porcie polskim Gdyni umożliwia porównanie Gdyni i Gdańska z Warszawą.

Chociaż obserwacje stopni zachmurzenia odbywają się na oko i przeto nie mogą się odznaczać większą dokładnością, to jednak wyraźnie widać w tab. IV, że wybrzeża polskie i dalej na wschód ku Litwie i Inflantom wyróżniają się w miesiącach letnich mniejszym

Tab. IV.

Zachmurzenie wybrzeży polskich. — Cloudiness of polish shores.

Miesiące Months	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	IX	XII	I-XII
a) Zachmurzenie przeciętne w ‰. Period: 1930—1937. Mean cloudiness in percentages (0—100‰).													
Gdynia G	76	79	66	63	57	51*	61	59	58*	65	71	81	65
Gdańsk D (Dantzig)	74	79	65	65	58	53*	60	61	60*	65	73	82	66
Warszawa W (Warsaw)	77	80	67	67	58	56*	65	65	58*	69	76	82	68
W—G	1	1	1	4	1	5	4	6	0	4	5	1	3
b) Zachmurzenie przeciętne (Period: 1886—1910). Mean cloudiness (0—100‰)													
Kłajpeda (Memel) M	76	72	67	59	49	49*	52	55	54	67	79	81	63
Hel (Hela)	77	75	70	62	56	55*	57	58	57	69	79	83	66
Warszawa (Warsaw) W	76	74	68	65	59	59*	61	58	58	67	80	82	67
Odessa	77	76	74	59	52	52	40	32*	40	56	75	80	59
W—M	0	2	1	6	10	10	9	3	4	0	1	1	4
c) Liczby dni pochmurnych. Covered days ( $\geq 80\%$ ). Period: 1930—1937													
Gdańsk D (Dantzig)	17	17	12	9	7	6*	7	7	7	11	14	20	134
Warszawa (Warsaw) W	18	16	14	12	8	8*	11	10	10	14	17	20	158
W—D	1	—1	2	3	1	2	4	3	3	3	3	0	24

d) Liczby dni pochmurnych i pogodnych dla pór roku. Okres: 1886—1910. —  
Numbers of covered ( $\geq 80\%$ ) and clear days ( $\leq 20\%$ ) for seasons and year.  
Period: 1886—1910.

Pory Seasons	Dni pochmurne Covered days					Dni pogodne Clear days				
	XII—II	III—V	VI—VIII	IX—XI	I—XII	XII—II	III—V	VI—VIII	IX—XII	—XII
Kłajpeda (Memel) M	52	31	21	37	141	8	18	19	11	56
Hel (Hela) H	54	32	22	37	145	4	13	15	8	40
Warszawa (Warsaw) W	53	33	23	39	148	6	8	8	9	31
W—M	1	2	2	2	7	—2	—10	—11	—2	—25

Uwaga (Notice): Spółrzędne geograficzne. Coordinates for Kłajpeda (Memel):  
lat. = 55° 43'N, long. = 21° 8'E Gr., h = 8 m.

Tab. V.

Stopnie zachmurzenia w ‰ (0—100) dla r3znych typ3w klimatycznych.  
Degrees of nebulosity in ‰ (0—100) for various climatic regions.

	Lat. N.	Long. E.	I—XII	XII—II	III—V	VI—VIII	IX—XI
Gdynia	54 <sup>o</sup> .5	18 <sup>o</sup> .6	65	79	62	57	65
Warszawa	52 <sup>o</sup> .2	21 <sup>o</sup> .0	68	80	64	62	68
Berlin	52 <sup>o</sup> .6	13 <sup>o</sup> .4	64	74	61	58	64
Paris	48 <sup>o</sup> .8	2 <sup>o</sup> .5	60	69	57	52	59
Lyon	45 <sup>o</sup> .8	4 <sup>o</sup> .8	59	69	59	48	59
Ben Nevis (Szkocja)	56 <sup>o</sup> .8	5 <sup>o</sup> .1	84	88	81	84	84
Moskwa	55 <sup>o</sup> .8	37 <sup>o</sup> .6	77	84	72	66	84
Werchojańsk	67 <sup>o</sup> .5	133 <sup>o</sup> .9	49	31	45	67	53
Nice	43 <sup>o</sup> .7	7 <sup>o</sup> .3	41	43	49	30	42
Dubrownik	42 <sup>o</sup> .6	18 <sup>o</sup> .1	40	50	46	20	43
Malaga	36 <sup>o</sup> .7	4 <sup>o</sup> .5	32	39	40	13	35
Batawia (Jawa)	6 <sup>o</sup> .2	106 <sup>o</sup> .8	60	75	60	48	58
Phu-Lien (Tonkin)	20 <sup>o</sup> .8	106 <sup>o</sup> .6	70	78	80	69	55

Uwaga: Dane dla zachmurzeń, chociaŹ na og3ł wieloletnie, nie mogły być obliczone dla jednakowego okresu. — The values of nebulosity, mostly of several years, could not be established for the same period.

stopniem pokrycia nieba. Biorąc r3znicę mi3dzy Warszawą a Gdynią lub Gdańskiem (w okresie 1930—1937) i mi3dzy Warszawą a Kłajpedą (w latach 1886—1910), otrzymujemy nast3pujące rezultaty:

- a) Średnie stopnie zachmurzenia (skala 0—100):  
 na korzyść Gdyni w por3wnaniu z Warszawą  
 zima...1, wiosna...2, lato...5, jesień...3, (rok...3)  
 na korzyść Kłajpedy w por3wnaniu z Warszawą  
 zima...1, wiosna...6, lato...8, jesień...2 (rok...4)
- b) Liczba dni pochmurnych (z zachmurzeniem średnim powyŹej 8 w skali 0—10 lub 80%):  
 na korzyść Gdańska w por3wnaniu z Warszawą  
 zima...0, wiosna...6, lato...9, jesień...9, (rok...24 dni)

A więc Gdańsk wykazuje w przeciągu okresu rocznego (przebiegniętnie w ciągu 8 lat od r. 1930 do 1937) 24 dni pochmurnych mniej niż w Warszawie. Na ogólną liczbę 134 dni pochmurnych w ciągu okresu rocznego na wybrzeżu koło Gdańska, Sopot, Orłowa Morskiego i Gdyni, mamy nie wiele więcej niż 20% ogółu dni (czerwiec 6, lipiec do września po 7 dni) t. j. 27 dni w ciągu tych 4 miesięcy.

Różne dane o zachmurzeniu wybrzeża polskiego będą podane w osobnym komunikacie.

Na zakończenie ustępu o zachmurzeniu, zaznaczymy pokrótce, że klimat Polski należy do typu przejściowo-morskiego, który panuje niepodzielnie na terytorium Anglii, Francji północnej i środkowej, Niemiec i przyległych części Skandynawii.

Jak widzimy w tab. V, Paryż a nawet Lyon nie wiele się różni od Warszawy pod względem zachmurzenia, gdyż wszystkie te miejscowości należą do wspólnego typu przejściowo-morskiego (por. klasyfikację klimatów kuli ziemskiej w Bibliografii pod nr 10). Widzimy także w tab. V, że w okolicach okołorównikowych i międzyzwrotnikowych o charakterze tropikalnym (Jawa, Indochiny itd.) spotykamy zachmurzenia bardzo znaczne, nie ustępujące co do wielkości w Europie zachodniej i środkowej, jednak należące do zupełnie innego typu klimatycznego. Dużo mniejsze zachmurzenie ma typ śródziemnomorski (Riwieri francusko-włoska i dalmatyńska a zwłaszcza hiszpańska); najmniejsze zachmurzenie na kuli ziemskiej mają jednakowoż pustynie.

Co do Rosji (klimatyczny typ »skrajny« klasyfikacji dziesiątej), to posiada ona zachmurzenie bardzo duże na północy i w nizinie środkowej. Syberia wschodnia ma pogodne zimy a pochmurne lata.

W Europie rekord zachmurzenia ma Szkocja i Norwegia północna oraz przyległe wyspy na Atlantyku.

### **Wartości i sumy natężenia promieniowania słonecznego na wybrzeżu Bałtyku między Gdynią a Gdańskiem.**

Po ogólnej dyskusji stosunków usłonecznienia i zachmurzenia na wybrzeżu polskim Bałtyku, należy pokrótce rozpatrzeć także wartości i sumy natężenia promieniowania słonecznego. Element aktynometryczny stanowi zasadniczą postawę rozważań tzw. klimatu słonecznego danego terytorium, w naszym wypadku polskich wybrzeży Bałtyku. Oczywiście klimat słoneczny rozpatrujemy tu w sensie fizycznym a nie astronomicznym.

Jak się zdaje, na zajmującym nas wybrzeżu, a w szczególności w Gdańsku, nie były do r. 1920 przeprowadzane pomiary aktynometryczne a przynajmniej nie znamy w literaturze żadnej regularnej i większej serii gdańskiej natężenia promieniowania słonecznego. Dopiero po przyłączeniu terytorium Wolnego Miasta Gdańska do polskiego obszaru celnego i utworzeniu w porcie gdańskim rozmaitych urzędów i placówek polskich, rozwinęły się także badania odnośnych wybrzeży pod względem aktynometrycznym. Autor niniejszego, w charakterze ówczesnego dyrektora państwowej służby meteorologicznej w Polsce, założył w połowie 1920 r. Polskie Obserwatorium Morskie w Nowym Porcie pod Gdańskiem. Pierwszym kierownikiem tego Obserwatorium będącego oddziałem morskim Państwowego Instytutu Meteorologicznego w Warszawie, był przedwcześnie zgasły L. Lorkiewicz, który pełnił służbę aż do śmierci w r. 1926. Jego następcą był przez pewien czas dr Edward Stenz, zaś, w r. 1927 Obserwatorium w Nowym Porcie zostało przeniesione do Gdyni. Od 1920 r. w Nowym Porcie zainstalowana była seria aktynometrów, składająca się z elektrycznego pyrhelimetru kompensacyjnego systemu Angströma aktynometrów Chwolsona i Michelsona oraz innych, zwłaszcza typu termoelektrycznego.

Tutaj w Nowym Porcie autor niniejszego wypróbował w czasie okresowych inspekcji stacji i placówek meteorologicznych na wybrzeżu, nową serię aktynometrów termoelektrycznych z termoogniwami systemu Molla fabrykacji Zakładów Instrumentalnych Kipp (Delft), a zwłaszcza rurki pyrhelometryczne, pyrhelioграфы z galwanometrami samopiszzącymi systemu J. Richard w Paryżu i wreszcie od 1924 r. solarymetry i solaryграфы. Po przeniesieniu Polskiego Obserwatorium Morskiego z Nowego Portu pod Gdańskiem do nowo zbudowanego portu w Gdyni, także i ze strony gdańskiej podjęte zostały kroki ku kontynuowaniu serii aktynometrycznych. Od 1930 r. zostało zainstalowanych we Wrzeszczu szereg przyrządów aktynometrycznych do pomiarów bezpośrednich i samopiszzących. Jest rzeczą ważną i chwalebną, że Gdańskie Obserwatorium, kontynuując w ten sposób serię polską zapoczątkowaną w Nowym Porcie, zainstalowało praktycznie te same metody termoelektryczne, którą wprowadził autor niniejszego w Warszawie i na wybrzeżu. Jako receptor termoelektryczny, służący do rejestracji natężenia promieniowania słonecznego (pyrheliograficznego na powierzchnię prostopadłą i solarygraficznego tj. bezpośrednio od

słońca i rozproszonego przez atmosferę na poziomą powierzchnię), zastosowano w Obserwatorium Gdańskim termoożniwa z Delft wprowadzone do pomiarów aktynometrycznych przez autora.

Ta okoliczność wielce ułatwia porównanie serii aktynometrycznych z Nowego Portu i Gdyni z materiałami zebranymi w nowym obserwatorium pod Wrzeszczem (Danzig-Langfuhr).

Odkładając bliższe rozważania stosunków aktynometrycznych na wybrzeżu polskim wraz z Gdańskiem do osobnego komunikatu, ograniczymy się obecnie do paru wytycznych wartości obrazujących charakter przebiegu promieniowania słonecznego wybrzeży polskich w porównaniu z Warszawą.

Wspomnimy tutaj przede wszystkim o przebiegu maksymalnych wartości natężenia promieniowania słonecznego (Max.  $Q$  pyrh.) na powierzchnię normalną tj. prostopadle ustawioną względem promieni bezpośrednich idących ze słońca.

Jest to wartość charakterystyczna w przebiegu wartości aktynometrycznych, gdyż daje pojęcie o stopniu przepuszczalności warstw atmosfery dla promieni słonecznych.

Jak widać z tab. VI stosunki co do przepuszczalności atmosfery są dość jednostajne na nizinach i wybrzeżach Europy środkowej, a wybrzeże Bałtyku w okolicach Gdańska i Gdyni niewiele tylko się różni pod tym względem od Warszawy. Wszędzie wybija się w okresie rocznym maximum wiosenne (od marca do maja) i jesienne (we wrześniu) przepuszczalności powietrza dla promieniowania słonecznego, chociaż maximum jesienne wyraźniej wybija się w Warszawie niż na wybrzeżu.

Te podwójne maxima są niewątpliwie w związku ze zmniejszoną na wiosnę i w jesieni ilością pary wodnej w atmosferze ziemskiej i to nie tylko w dolnych ale i w górnych warstwach.

Promienie słoneczne, ogrzewając wtedy silniej w miarę wzniesienia się nad poziomem nie zostają tak silnie absorbowane przez parę wodną, jak to ma miejsce w miesiącach letnich.

W końcowych tab. VII i VIII podane są pokrótce rezultaty obliczeń sum solarymetrycznych, obrazujących stopień dopływu energii promieniowania słonecznego biegnącego bezpośrednio od słońca jak również rozproszonego przez całe sklepienie niebieskie i dochodzącego na  $\text{cm}^2$  poziomej powierzchni ziemi.

Te miesięczne sumy zostały otrzymane dla Gdyni z pomiarów solarymetrycznych, przy czym posługiwano się pomocniczo w wielu

Tab. VI.

Przebieg Max. Q według wartości bezpośrednio mierzonych pyrhelimetrem i niezredukowanych.

Highest monthly values (Max. Q pyr.) directly taken from the pyrhelimetric readings and not reduced. Radiation intensity in gr. cal., min. cm<sup>2</sup> (normal surface).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1) Nowy Port pod Gdańskiem. Danzig-Neufahrwasser.											
Seria Polska (Observatorium Morskie P. I. M. w Warszawie). Okres: 1920—1927.											
Polish Series (Polish Marine Observatory; local marine branch of the Central Meteorological Institute at Warsaw). Period: 1920—1927.											
1·11	1·30	1·35	<b>1·44</b>	1·42	1·40	1·37	1·38	<b>1·38</b>	1·32	1·21	1·00*
Max. Q=1·44 cal. 7. IV. 1925 (Measured by the staff of Polish Marine Observatory; L. Lorkiewicz, chief observer).											
2) Sopoty. Seria Gdańska Observatorium we Wrzeszczu: Okres 1928/37.											
Zoppot. Series of the free city of Dantzic (Danzig-Langfuhr). Period: 1928/37.											
1·19	1·33	1·38	1·43	<b>1·44</b>	1·43	1·40	<b>1·41</b>	1·39	1·31	1·19	1·05
Max. Q=1·44 cal. 13. V. 1935 (G. Frischmuth and others).											
3) Warszawa. Biuro Meteorologiczne przy Muzeum 1910/18 i Państw.											
Instytutu Met. 1919/30. — Warsaw. Meteor. Bureau 1910/18 and Centr. Met. Institute of Poland. 1919/30.											
1·21	1·42	<b>1·43</b>	1·43	1·42	1·38	1·38	<b>1·40</b>	1·39	1·40	1·34	1·26
Max. Q=1·43 cal. 10. III. 1928 (Wł. Gorczyński and others).											
4) Potsdam. Meteorol. Observat. Period: 1907—1924.											
1·30	1·33	<b>1·45</b>	1·44	1·44	1·44	1·37	1·37	<b>1·40</b>	1·39	1·32	1·16
Max. Q=1·45 cal. 19. III. 1924. (W. Marten).											
5) Slutzk near Leningrad. Met. Observ. Period: 1914—1926.											
1·09	1·26	1·41	<b>1·43</b>	1·40	1·41	1·38	1·35	1·34	1·28	1·12	0·96*
Max. Q=1·43 cal. 8. IV. 1926. (N. Kalitin).											
6) Helsinki. Period: 1922—1930.											
0·95	1·14	1·36	1·39	1·39	<b>1·405</b>	1·37	1·35	1·35	1·29	1·00	0·81
Max. Q=1·405 cal. 5. VI. 1928. (H. Lunelund).											

Tab. VII.

Sumy solarymetryczne (bezpośrednio od słońca i rozproszone z nieba) w kg cal. na cm<sup>2</sup> poziomej powierzchni, dla Gdyni, Gdańska i Warszawy.

Solarigraphic totals (directly from the sun and diffusely from the sky) for Gdynia, Dantzig, Hel (Hela) and Warsaw. Kg. cal. per cm<sup>2</sup> horizontal surface.

a) Gdynia-Port (Obserwatorium Morskie P. I. M.). — Gdynia, Polish harbour of Baltic Sea.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I-XII
1928	1·4	3·2	7·9	8·9	11·9	<b>14·6</b>	13·9	10·3	7·5	4·1	1·6	0·9*	86·2
1929	1·5	3·3	6·9	9·2	14·4	<b>14·8</b>	13·9	12·0	8·9	4·1	1·2	1·0*	91·2
1930	1·3	2·6	5·9	8·9	13·4	<b>17·5</b>	13·1	10·4	6·1	3·9	1·9	0·9*	85·9
1931	1·3	2·1	7·0	9·0	14·8	<b>15·1</b>	12·9	10·7	6·5	4·7	2·0	0·9*	87·0
1932	1·7	3·3	6·4	10·2	11·9	<b>15·4</b>	14·1	13·0	7·3	3·5	1·9	1·1*	89·8
1933	1·2	3·4	6·8	9·5	13·9	<b>15·8</b>	15·1	12·0	7·9	5·1	1·9	1·0*	93·6
1934	1·5	3·3	5·7	10·6	<b>15·8</b>	<b>15·8</b>	14·1	12·5	9·0	4·7	2·1	0·7*	95·8
1935	1·3	3·2	7·3	11·4	14·5	<b>15·3</b>	14·0	10·2	6·9	3·4	1·9	0·9*	90·3
1936	1·3	2·6	5·6	10·0	11·9	<b>14·1</b>	13·3	10·5	7·8	4·1	1·5	1·0*	83·7
1937	1·8	2·6	5·6	8·6	16·0	<b>16·6</b>	14·1	11·8	8·1	4·7	1·8	0·8*	92·5

b) Wartości średnie. — Mean values. 1928—1937.

Gdynia	1·4	3·0	6·5	9·6	13·9	<b>15·5</b>	13·9	11·3	7·6	4·2	1·8	0·9*	89·6
Warsaw	1·4	2·9	6·3	9·2	13·3	<b>14·0</b>	12·2	10·4	7·1	4·0	1·6	0·9*	83·3
Differ.	·0	·1	·2	·4	·6	1·5	1·7	·9	·5	·2	·2	·0	6·3

c) Wartości średnie. — Mean values. 1932—1937.

Gdynia	1·4	3·1	6·2	10·1	14·0	15·5	14·1	11·7	7·8	4·3	1·9	0·9*	91·0
Dantzig	1·6	3·1	6·2	10·0	13·9	<b>15·6</b>	14·1	11·8	8·0	4·2	1·7	1·0*	91·2
Hel	1·4	2·8	6·0	9·6	13·9	<b>15·2</b>	13·7	11·5	7·2	4·0	1·7	0·9*	87·9
Warsaw	1·5	3·0	6·0	9·6	13·9	<b>14·2</b>	12·8	10·9	7·4	3·9	1·6	1·0*	85·8

d) Odchylenia. — Differences. 1932—1937.

(G)=Gdynia, (D)=Dantzig (Gdańsk), (H)=Hel (Hela),  
(W)=Warszawa (Warsaw).

(G)—(D)	—·2	·0	·0	·1	·1	—·1	·0	—·1	—·2	·1	·2	—·1	—·2
(G)—(H)	·0	·3	·2	·5	·1	·3	·4	·2	·6	·3	·2	·0	3·1
(G)—(W)	—·1	·1	·2	·5	·1	<b>1·3</b>	<b>1·3</b>	·8	·4	·4	·3	—·1	5·2



miesiącach materiałami heliograficznymi<sup>1)</sup> odpowiednio przeliczonymi i zastosowanymi dla celów klimatyczno-aktynometrycznych.

Co do metod obliczania sum solarymetrycznych różne szczegóły i objaśnienia będą podane przez autora w osobnym komunikacie z cyklu opracowań stosunków klimatu słonecznego na wybrzeżu polskim.

Co do Helu, to obserwatorium tamtejsze nie posiada solarygrafu; odnośne średnie zostały otrzymane z wykazów heliograficznych przeliczonych według ekwiwalentów solarymetrycznych obliczonych dla Gdyni.

Co do sum solarymetrycznych dla Gdańska, to średnie z okresu 1932—1937 zostały wprost otrzymane z danych przyrządu samopiszącego. W latach ostatnich używano w Obserwatorium w Danzig-Langfuhr dla rejestracji receptor solarymetryczny nr 305 wyrobu firmy Kipp & Zonen w Delft.

Jak to było już poprzednio wspomniane solarymetry z Delft są stale używane w Warszawie i w Gdyni, a także były używane w r. 1927 w Nowym Porcie pod Gdańskiem w polskiej placówce meteorologii morskiej.

Z tab. VII wynika, że sumy solarymetryczne w kaloriach kilogramowych na cm<sup>2</sup> poziomej powierzchni ziemi są w lecie mniejsze w Warszawie niż w Gdyni lub Gdańsku, które to porty niewiele się od siebie różnią pod względem stosunków promieniowania słonecznego. Deficyt wynosi około 6% dla okresu rocznego przy czym w miesiącach zimowych Warszawa daje prawie to samo co wybrzeże. Główne różnice na niekorzyść Warszawy wypadają w czerwcu, lipcu i sierpniu przy czym w tych miesiącach różnica wynosi około 8%.

Co do półwyspu Helskiego, to stosunki usłonecznienia i promieniowania są tam mniej korzystne niż dla części wybrzeża od

---

<sup>1)</sup> Za pomoc w dostarczeniu materiałów heliograficznych i aktynometrycznych zebranych w Obserwatorium Morskim w Gdyni, wyrażam szczerą podziękę p. M. Żmijewskiemu, który na wiosnę 1938 r. odznaczony został przez Uniwersytet Wileński stopniem magistra za opracowanie stosunków dyfuzji w Gdyni.

Zarazem dziękuję p. Łucji Piskorskiej, asystentce Gabinetu Aktynometrycznego Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, za stałą pomoc w pracach aktynometrycznych na wybrzeżu a zwłaszcza za obliczenie wielu tabel rachunkowych.

Gdyni poprzez Orłowo Morskie do Gdańska, jednak i Hel korzystnie się odbija w porównaniu w półroczu letnim z Warszawą.

W końcowej tab. VIII podane jest porównawcze zestawienie stacji polskich (wraz z Gdańskiem) z paru miejscowościami na północy Europy oraz na południu, zwłaszcza z Niceą na Riwierze śródziemnomorskiej oraz na płaskowyżu meksykańskim, gdzie sta-

Tab. VIII.

Sumy solarymetryczne na poziomą powierzchnię ziemi.

Total amounts of sun and sky radiation. Kg. cal. per cm<sup>2</sup> of horizontal surface.

Lat. N.	Stacje Observing Stations	Sumy solaryg. Qsol (sun and sky)					Procenty sum rocznych (I-XII) Percentages of the annual totals				
					Pół- rocza	Half- year:	Pory roku		Seasons		
		I-XII	XII	VI	IV-IX	X-III	XII-II	III-V	VI-VIII	IX-XI	
		Kg. cal, cm <sup>2</sup>			%	%	%	%	%	%	
60·2	Helsinki	77	0·3	14·2	84	16	4	36	49	11	
59·7	Slutzk (Leningrad)	69	0·3	11·7	83	17	5	35	49	11	
54·6	Hel	87·9	1·4	15·2	81	19	5·8	33·6	46·0	14·6	
54·4	Gdańsk (Dantzig)	91·2	1·6	15·6	80·5	19·5	5·8	33·0	45·5	15·2	
54·5	Gdynia	91·0	1·4	15·5	80·5	19·5	5·9	33·3	45·4	15·4	
52·2	Warszawa	85·8	1·5	14·2	80	20	6·4	34·4	44·2	15·0	
48·8	Paris	98	2·0	14·7	75	25	9	33	41	17	
43·7	Nice	148	4·8	21·2	71	29	12	29	40	19	
19·4	Mexico D. F. (H = 2 km)	155	11·1	12·8	51	49	24	32	23	21	

Uwaga: Tylko stacje polskie (wraz z Gdańskiem) są dokładnie porównalne, gdyż są obliczone dla ściśle tego samego okresu: 1932—1937. Poza Polską okresy są różne. Dla Mexico D. F. (Tacubaya) maximum miesięczne przypada na maj (17·2 kg cal. w r. 1927) w końcu okresu zimowego suszy przed sezonem letnich deszczów tropikalnych.

Notice: Only the Polish stations (including Dantzig) are directly comparable being calculated for exactly the same period: 1932—37. For the other stations beyond Poland frontiers, the values could not be calculated for the period adopted for the Polish stations. As concerns Mexico D. F. (Tacubaya). The maximum monthly value is 17·2 kg cal. for month of May (1927 year), just before the rainy season.

raniem autora przeprowadzone zostały obszerne studia (w latach 1926—1928 w Meksyku, a w okresie 1928—1935 w Nicei) nad klimatem słonecznym.

Na półrocze letnie (kwiecień—wrzesień) wypada na nizinach Polski łącznie z wybrzeżami 80% rocznej sumy kalorii; z pozostałych 20% na półrocze zimowe wypada zaledwie 2% na grudzień, miesiąc najbardziej deficytowy pod względem ilości promieniowania.

Za to miesiące półrocza letniego, zwłaszcza od maja do sierpnia łącznie dają na wybrzeżu polskim okrągło następujące procenty: 11% kwiecień, 15% maj, 17% czerwiec, 15% lipiec, 13% sierpień, 9% wrzesień ogólnej sumy rocznej. Na północy Europy przewaga półrocza letniego jest jeszcze większa (80% dla Helsinek), gdy lato w kierunku ku południowi maleje (71% dla Nicei). Jednocześnie wzrastają silnie ku południowi sumy promieniowania w zimie, a zwłaszcza w grudniu.

### Bibliografia.

- 1) Wł. Górczyński: O insolacji ziem polskich. — Sur l'insolation de Pologne. T. I »Geografii Fiz. Z. P.« (Encykl. Polska), »Polska Akademia Umiejętności«, Kraków 1912.  
— Wartości pyrhelometryczne i sumy ciepła dla Warszawy według pomiarów w okresie 1901—1913. — Valeurs pyrhelométriques et les sommes d'insolation à Varsovie pendant la période 1901—1913. Wydawn. Tow. Warsz. Nauk. (Publications de la Société Scien. de Varsovie 4, pp. 1—35). (Résumé français 28—35), Warszawa 1913.
- 2) E. Stenz: O rozkładzie geograficznym usłonecznienia w Polsce. — Sur la distribution géographique de la durée l'insolation en Pologne. »Kosmos« T. 55, pp. 516—532, Lwów 1930.  
Por. tegoż autora: Natężenie promieniowania słonecznego i insolacja w Warszawie według pomiarów w okresie 1913—1918. — L'intensité de la radiation solaire et l'insolation à Varsovie pendant la période: 1913—1918. Odbitka z Rocznika P. I. M. Rok 1919. Extrait de l'Annuaire de l'Institut Central Météorologique de Pologne. Année 1919, 4, pp. 14—52 (Résumé français 40—52), Warszawa 1922.  
— Usłonecznienie Wielkopolski i Pomorza. »Kosmos«. Ser. A. Tom 53, Lwów 1928.  
— Z klimatologii polskiego wybrzeża Bałtyku. »Pam. Pol. Tow. Balneologiczne«, Kraków 1926.
- 3) G. Hellmann: Die Sonnenscheindauer in Deutschland, pp. 1—20, Preuss. Akad., Berlin 1922.

- 4) Wł. Gorczyński i W. Wierzbicka: O wartości średnich zachmurzenia w Polsce. — Valeurs moyennes du degré de nébulosité en Pologne. — O rozkładzie geograficznym dni pogodnych i pochmurnych w Polsce. — Sur les valeurs moyennes et sur la répartition géographique de jours sereins et couverts en Pologne. «Sprawozdanie Tow. Nauk. Warsz. C. R. de la Société des Sciences» (pp. 609—649), 1916 (pp. 135—185). Warszawa 1915.
- 5) Z. Kaczorowska: Warunki klimatyczne polskiego wybrzeża Bałtyckiego. — Les conditions climatiques du littoral polonais de la mer Baltique. «Wiad. Met. P. I. M.» pp. 63—73, Warszawa 1935.
- 6) K. Demel: Usłonecznienie i termika morza przy Helu. — La durée de l'insolation et la température des eaux cotières à Hel en 1932—1936. «Archiwum Hydrobiologii i Rybactwa». T. XI, pp. 83—95, Suwałki 1938.
- 7) Wł. Gorczyński: Classifications des climats (avec 6 figures). «Congrès International de Géographie à Varsovie. Comptes Rendus». T. II, pp. 252—268, Warszawa 1936.  
— Decimal scheme of world's climates with adaptation to Europe. «Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie». T. XXVII, Warszawa 1934. Por. także «Gerland's Beiträge zur Geophysik». B. 44, Heft 2, pp. 199—210, Leipzig 1935.
- 8) Wł. Gorczyński: Climat solaire de Nice et de la côte d'Azur. Ouvrage publié par l'Assotiation des Naturalistes de Nice et des Alpes Maritimes. Mémoire IV, pp. 1—208, 34 figures. Nice 1934.  
— Durée d'insolation et la nébulosité de Nice et de littoral méditerranéen. «Annales de l'Off. Météor. de la ville de Nice». T. III, pp. 1—40. Nice 1935.  
— O czasie trwania usłonecznienia wzdłuż wybrzeży Śródziemnomorskich. — The mean duration of bright sunshine along the mediterranean coasts «Bull. Int. de l'Acad. Polonaise des Sciences». (English text Summary in Polish and French) pp. 1—7, June 1935. Kraków 1935.  
— O rozkładzie stopni zachmurzenia wzdłuż wybrzeży Śródziemnomorskich. Mean duration of cloudiness along the mediterranean coasts. «Spraw. Tow. Nauk. Warsz. (Science Society)». T. XXVIII, Warszawa 1935.
- 9) G. Frischmuth: Beiträge zum Strahlungs-Klima von Danzig. Forschungsarbeiten. Danzig 1935.
- 10) M. Żmijewski: O wartościach dyfuzji według pomiarów w Obserwatorium Morskim w Gdyni. Praca magisterska przyjęta przez Uniwersytet S. B. w Wilnie (przygotowana do druku). Wilno 1938.
- 11) Wł. Gorczyński: a) Przyczynek do poznania wielkości promieniowania rozproszonego w bilansie ogólnym sum ciepła. — English Summary: Contribution to knowledge of diffuse radiation values in the general thermic balance of the earth. «Spraw. Tow. Nauk. Warszaw.», «C. R. de la Société des Sciences de Varsovie», pp. 1—11. Warszawa 1933.  
b) Gorczyński i Ostrowski: O wartościach rozproszonego promieniowania słonecznego dla Warszawy i niżu polskiego. — English Summary: Values of diffused sky radiation at Warsaw and in Central Poland. «Spraw. Tow. Nauk. Warsz.», «C. R. de la Société des Sciences de Varsovie», pp. 1—8. Warszawa 1933.

- c) Wł. Gorczyński: O związku między promieniowaniem rozproszonym nieba i stopniem usłonecznienia. — English Summary: Interdependence between the amount of diffuse sky radiation and the duration sunshine. *Ibidem*. T. XXVII, pp. 1—13. Warszawa 1934.
- d) Wł. Gorczyński: Solarigraphs as records for diffuse sky radiation. »*Vestnik C. fiasiatr. Spol.*«, pp. 1—8. Praha 1938.

Władysław Gorczyński.

**The greater insolation of the maritime district of Poland (Dantzig included) as compared with other polish regions.**

(From the Actinometrical Laboratory, Science Society, Warsaw).

SUMMARY.

The Polish text contains an introduction and three chapters: 1) the sunshine conditions of the Polish littoral (durations of hours of bright sunshine and corresponding percentages); 2) the mean cloudiness of stations situated on polish shores with the Hel-peninsula and the free city of Dantzig; 3) the amounts in calories of solar radiation (sun and sky) on the Baltic shores between the harbour of Gdynia and Dantzig.

We find, in Polish text, eight numerical tables (provided with English subtitles and with explanation in both languages) with corresponding values for Gdynia, Dantzig, Hel, Warsaw and some other stations.

Tab. I. Mean diurnal values (in hours) of the duration of bright sunshine. Period: 1932—1937.

Tab. II. Percentages of sunshine during 6 hours (9—15 h).

Tab. III. Mean values of sunshine duration (various periods).

Tab. IV and V. Mean cloudiness in percentages (0—100%).

Tab. VI. Highest monthly values (Max.  $Q$  pyr.) of the solar radiation intensity.

Tab. VII and VIII. Total amounts of sun and sky radiation in Kg. cal. per  $\text{cm}^2$  of horizontal surface (after solarigraphic records).

From all numerical values, summarized in the tables I—VIII we deduce:

1) In the summer months (June, July and August) the sunshine conditions of the Polish littoral accuse a strong preponderance in comparison with Warsaw and generally with low situated

stations of Central Poland. During winter time, the Polish shores show practically the same small values of sunshine duration as Warsaw (in winter the health-resorts in the Tatra mountains are the most sunny places in Poland).

2) Mean values of cloudiness, observed on Polish shores are in full accord with heliographic records.

3) The actinometric measurements show the same results but enable us, in the same time, to give a more exact numerical values for the comparison of solar climate between Warsaw and the both Baltic harbours of Gdynia and Dantzig. As results from the solarigraphic records obtained there, the annual deficit of Warsaw is in calories of 6% for solar radiation (sun and sky) of horizontal surface. The chief differences are obtained in summer (June, July and August show 8% in each month); in winter they are no differences between Warsaw and both harbours of Gdynia and Dantzig.

The meteorological data given in this paper, are obtained from the stations of the Central Meteorological Institute of Poland in Warsaw.

As concerns the Actinometry, I have at my disposal the following data:

A) Extensive series (1900—1938) of the actinometric data I have introduced in Warsaw.

B) Actinometric measurements (1920—1927) at Nowy Port (Danzig-Neufahrwasser) made in the Polish Marine Observatory, a local marine branch of the Central Meteorological Institute in Warsaw; in this Observatory I have introduced already in 1920 (in my quality of the acting director, in those times, of the Polish Meteorological Service) the first, so far as I know, regular series of pyr heliometric measurements and other solar radiation investigations; my first collaborator in the harbour of Dantzig was L. Lorkiewicz.

C) The pyr heliometric and solarimetric data and records obtained in the Marine Observatory in Gdynia (1928—1938) together with measurements made in the vicinity by the present author and his collaborators.

D) The actinometric data and records of solar radiation published by »St. Observatorium Danzig-Langfuhr« (series of the free city of Dantzig, period: 1931—1937).

It is worth while to note that the Dantzig-Observatory has adopted for actinometric purposes the termoelectric method I have

introduced and employed already at Warsaw, Nowy Port (Danzig-Neufahrwasser) and Gdynia; the observers of the free city of Dantzig have therefore facilitated my comparisons given in this paper.

In this first paper only few details could be given on different questions and components concerning the solar climate of Poland, but the present writer intends to publish in the future a series of papers concerning the various points and details of the solar climate of Polish shores.

---

Stanisław Zieleniewski.

### **O wiwianitach bagiennych niżu polskiego**

Przedstawił St. J. Thugutt dnia 22 listopada 1938 r.

### **Sur les vivianites palustres de la plaine Polonaise**

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 22 novembre 1938.

#### STRESZCZENIE.

Złoża wiwianitów bagiennych występują w postaci szaro niebieskich ziemistych żyłek, gniazd i wtrąceń w torfach i rudach żelaznych bagiennych.

Sposób tworzenia się tych złóż nie jest całkowicie wyjaśniony. Jest wszakże rzeczą pewną, że procesy sorbcji fizyczno-chemicznej humusowych kompleksów torfowych, umożliwiając koncentrację żelaza i pośrednicząc w wiązaniu się jego z organicznym kwasem fosforowym, odgrywają tu poważną rolę.

Wiwianit powstaje w niskich temperaturach i w środowisku uwodnionym. Udział biorą mikroorganizmy.

Złoża te nie są jednorodne. Obok mikrokrystalicznego wiwianitu (44—80%) spotykamy tam storfiałe szczątki roślinne, domieszki kwarcu, węglany manganu, wapnia i magnezu, rzadko kiedy zindywidualizowane różnorodne koloidalne fosforany żelazowe, wodorotlenki żelaza i bliżej nieokreślone związki żelazisto-krzemianowe.

Nieznany jest należycie związek, jaki zachodzi pomiędzy zmiennością składu chemicznego wiwianitów a ich własnościami fizycznymi. To zagadnienie podjął właśnie autor.

Próbki badane przez autora pochodzą z torfów okolic Kutna, z brzegów rzeczki Ochni i wsi: Wola Dzierlińska, Wola Tulnicka, Odolanów, Przygodzice, Zajęczi. Wszystkie próbki ujawniły ustrój krystaliczny. Wyosobnione przez odplawianie kryształki osiągały długość 2 mm. Postać miały pręcików lub klinowatych listewek, barwę czarniawą o połysku szklistym lub jedwabistym. Do pomiarów kryształy te się nie nadawały.

Gęstość oznaczono w czterobromku acetylenowym rozcieńczonym toluolem, posługując się wagą Westphala. Wskutek obecności wrostków wahania były duże: 2.589 zamiast 2.637—2.678 dla czystego wiwianitu.

Kąt osi optycznych duży  $73^{\circ}$ — $90^{\circ}$ . Łupliwość wyraźna || do (010) i bardzo słaba || do (100). Jednocześnie widoczne były dwa rodzaje spekań ukośnych || do stromych piramid. Brunatne wrostki ułożone były || do spekań ukośnych. Pleochroizm mocny. Kąt znikania światła na (010) bardzo mały, na (100)— $28^{\circ}$ — $30.5^{\circ}$ . Płaszczyzna osi optycznych  $\perp$  do płaszczyzny symetrii. Charakter optyczny dodatni. Oznaczone w jodku metylenu rozcieńczonym benzenem współczynniki załamania światła zmienne i zależne od stopnia utlenienia żelaza. Naogół wyższe niż w normalnych wiwianitach. Dwójłomność natomiast niższa  $n_{\gamma} - n_{\alpha} = 0.047 - 0.059$ .

Podczas rozcierania barwa ulega zmianie dzięki procesom utleniania. Również ulegają zmianie inne własności fizyczne.

Dla porównania był zbadany grubokrystaliczny wiwianit z Ibez Mine, Leadville, Colorado:  $7(\text{Fe}_3(\text{PO}_4)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}) \cdot 8\text{Fe}_2(\text{PO}_4)_2 + \text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 80\text{H}_2\text{O}$ .

W celu analizy odsiano szczątki torfowe, piasek oddzielono kwasem solnym, części organiczne wodą królewską, poczem stopiono wiwianit z sodą.

W celu oznaczenia żelaza dwuwartościowego, zamiast zwodnych metod kolorystycznych, zastosowano metodę potencjometryczną, gdyż w ten sposób było możliwe dokładne uchwycenie punktu zwrotnego reakcji chemicznej na drodze pomiaru elektrycznego pomimo obecności ciał humusowych. Posługiwano się metodą B. Kamińskiego. Jako elektroda wskaźnikowa służyła płytka platynowa, jako elektroda porównawcza — drut miedziany zanurzony w roztworze soli miedziowej o określonym stałym potencjale elektrycznym. Do pomiarów skoku potencjału służył galvanometr o czułości  $10^{-7}$  na jedną podziałkę wychylenia skali. Do analizy



rozpuszczono wiwianit w rozcieńczonym kwasie siarkowym na gorąco, w atmosferze bezwodnika kwasu węglowego.

Swoistości składu chemicznego odpowiadały swoiste własności optyczne. W rzędzie domieszek zauważono:  $\text{Fe}_2(\text{PO}_4)_2$ , limonit, węgiel, wodę. Najczystszy okazał się wiwianit z Przygodzic, zawierający prawie 80% czystego wiwianitu.

Trudną do określenia była rola wody: część jej należy do wiwianitu, część do limonitu i fosforanu żelazowego, część do szczątków roślinnych, do ciał humusowych, część była wchłonięta mechanicznie.

Stopniowa dehydratacja wykazała w temperaturze 80° 14%  $\text{H}_2\text{O}$ , potem szybkość dehydratacji malała, dopiero w 160° uległa przyspieszeniu. Kres jej był w 200° przy stracie 30·96%  $\text{H}_2\text{O}$ .

W okazy z Ibex Mine dehydratacja zaczyna się już w temperaturze 40° na dobre, w 100° maleje i nie kończy się nawet w 220°.

W 100° uchodzi 10·8%  $\text{H}_2\text{O}$ , czyli tyle, ile w wiwianicie normalnym. Jednocześnie z dehydratacją zmienia się barwa i inne własności fizyczne.

---

Antoni Łaskiewicz.

### **O pirycie i hematycie z Rudek**

Komunikat zgłoszony dnia 22 listopada 1938 r.

### **Sur la pyrite et l'hématite de Rudki (massif de Ste-Croix)**

Mémoire présenté à la séance du 22 novembre 1938.

Komunikat ukaże się w XV tomie »Archiwum Mineralogicznego«.