

3.32 — elektrodynamika
ośrodków zjonizowanych

Andrzej J. Turski

MODEL ZORZOWEJ
WARSTWY PODWÓJNEJ
UWZGLĘDNIAJĄCY DRGANIA
I PRZEJŚCIE DO CHAOSU
CZĘŚĆ II

20/1990

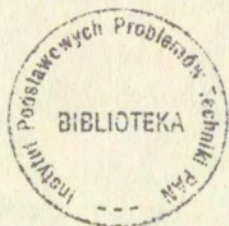
P.269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do redakcji dnia 30 stycznia 1990 r.



56811



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 0,9 Ark.druk.1,25

Oddano do drukarni w maju 1990 r.

Nr zamówienia 262/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

MODEL ZORZOWEJ WARSTWY PODWÓJNEJ UWZGLĘDNIAJĄCY
DRGANIA I PRZEJŚCIE DO CHAOSU

/Część II/

Streszczenie

Podaje się układ zastępczy dla warstwy podwójnej będący elektrycznym obwodem RLC z nieliniową pojemnością wzbudzony sygnałem okresowym, który jest wynikiem samowzbudzenia układu RLC z nieliniową rezystancją R. Podaje się wyniki pomiarowe dla odpowiedniego obwodu RLC wzbudzanego okresowo, tj. "drzewo" bifurkacji, dziwny atraktor i dwuparametryczny diagram bifurkacji.

Dla równań opisujących nieliniowy obwód RLC podaje się odwzorowanie punktowe Poincaré i przedstawia proces zwielokrotnienia okresu drgań i przejście do chaosu.

1. Wstęp

Jak dotychczas nie ma wiele wyników dotyczących procesów bifurkacji oraz deterministycznego chaosu dla wyładowań w plazmie gazowej. W kilku przypadkach obserwowano zjawisko samowzbudzeń drgań dla anomalnej przewodności plazmy półprzewodnika [1], [2], ale obserwacje przejścia do chaosu nie były tu notowane. Dopiero Held et al [3] określili zachowanie chaotyczne wzbudzeń półprzewodnikowej plazmy.

W tej części pracy przedstawiony zostanie okresowo wzbudzany obwód RLC symulujący zjawiska bifurkacji i przejście do chaosu. Obwód ten zawiera nieliniową pojemność odpowiedzialną za proces bifurkacyjny dla warstwy podwójnej oraz wyładowanie w lampie spektralnej. Modelowanie układów plazmowych z warstwą podwójną występujących w strefie zorzowej układami o stałych skupionych jest bardzo drastycznym uproszczeniem. Jak wiadomo takie układy

plazmowe są przestrzennie rozłożone i opisywane przez równanie różniczkowo-cząstkowe. Jednak przez odpowiedni dobór zastępczych układów o stałych skupionych można symulować wszystkie ważniejsze procesy bifurkacyjne i chaosu deterministycznego obserwowane doświadczalnie w układach plazmowych z warstwą podwójną. W rozdziale 3 przedstawione będą wyniki pomiarowe procesów bifurkacyjnych dla obwodu elektrycznego symulującego wyładowania z warstwą podwójną.

W rozdziale 4 przedstawimy punktowe odwzorowanie Poincaré dla równań obwodu zastępczego i omówimy wyniki numeryczne procesów bifurkacji i chaosu dla tych równań.

2. Obwód zastępczy dla warstwy podwójnej

W części I rozdz.4 omówiono układ zastępczy samowzbudzenia warstwy podwójnej. Obwód RLC sterowany był prądem stałym i główną rolę samowzbudzenia grała nieliniowa rezystancja. Nieliniowa pojemność była do pominięcia wobec wolnych w czasie zmian napięcia elektrycznego kondensatora. W przypadku pojawienia się wysoko-częstotliwości, samowzbudnych drgań o amplitudach znacznie mniejszych od składowej stałej prądu możemy zaniedbać nieliniowość rezystancji R i przyjąć, że najistotniejszym dla procesów dynamicznych obwodu jest nieliniowość pojemności.

Skok napięcia dla warstwy podwójnej i warstwy "przykatodowej" lampy wyładowczej związanych z rozdzieleniem ładunku jest jakościowo analogiczny do skoku napięcia na złączu półprzewodnikowej diody pojemnościowej. Przebiegi te zostały przedstawione na Rys.1. Takie spadki potencjału prezentuje nieliniową pojemność dla zmiennej składowej prądu. Zależność spadku potencjału od ładunku zgromadzonego w warstwie podwójnej przedstawiona jest na Rys.2. Pojemność nieliniowa, tj. zależna od napięcia zmiennego na warstwie wynosi

$$C(v) = \frac{dq(v)}{d(v)} \quad 2.1.$$

Rys.2(b) przedstawia drastycznie uproszczoną charakterystykę pojemności warstwy. Charakterystyka składa się z dwóch odcinków półprostych o różnym nachyleniu $1/C_1$ i $1/C_2$ i wspólnym punkcie.

Takie uproszczenie dynamiki układu zachowuje wszystkie istotne właściwości badanego procesu bifurkacji. Ostatecznie przyjmujemy obwód zastępczy dla warstwy podwójnej napędzanej stałym prądem w postaci obwodu RLC przedstawionego na Rys.3. Jest to obwód z nieliniową pojemnością $C(v)$ wzbudzany sygnałem okresowym, który jest wynikiem samowzbudzenia układu omówionego w części I. Tu rozważany układ jest dwuwymiarowy /2-D/ i nieautonomiczny. Jak stwierdzono ⁽⁴⁾, sinusoidalne źródło napięciowe może być zastąpione przez prostokątny sygnał napięciowy o okresie $T = 1/f$ bez zmiany struktury bifurkacji. Dynamika obwodu z Rys.3 przy nieliniowej pojemności danej Rys.2(b) jest opisana następującym układem równań:

$$L \frac{di}{dt} = -Ri - \begin{cases} \frac{q}{C_1} \text{ dla } q \geq 0 \\ \frac{q}{C_2} \text{ dla } q < 0 \end{cases} - E_0 + \quad /2.2/$$

$$+ \begin{cases} +E \text{ dla } nT \leq t < (n+\frac{1}{2})T \\ -E \text{ dla } (n+\frac{1}{2})T \leq t < (n+1)T \end{cases}$$

gdzie q - jest ładunkiem zgromadzonym na kondensatorze, i - jest prądem obwodu, R - jest rezystorem, a L - jest indukcyjnością i $C_1(C_2)$ - pojemnością kondensatora.

Analizę dynamiki obwodu zastępczego przeprowadzimy na drodze pomiarów bezpośrednich "drzewa" bifurkacji, atraktorów i diagramów bifurkacji dla odpowiedniego obwodu RLC gdzie nieliniowa pojemność warstwy podwójnej jest symulowana przez, odpowiednio dobraną diodę pojemnościową. Następnie podamy punktowe odwzorowanie Poincaré dla równań /2.2/ i przedstawimy wyniki numeryczne dla procesu bifurkacji tego układu.

3. Wyniki pomiarowe dla obwodu RLC

Procesy bifurkacji są intensywnie badane w ramach teorii obwodów z nieliniowymi elementami skupionymi. Dla demonstracji nieliniowej dynamiki warstwy podwójnej przedstawimy wyniki pomiarowe zaczerpnięte z pracy S.Tanaka et al. [4]. Wybrany tu

obwód elektryczny symuluje procesy bifurkacyjne występujące w układach plazmowych z warstwą podwójną. Rolę nieliniowej pojemności warstwy przejmuje dioda pojemnościowa 3CC13, a elementy obwodu z Rys.3 mają następujące wartości $R = 100\Omega$, $L = 2,5\text{mH}$, $f = \omega/\sqrt{2\pi} = 150\text{ kHz}$.

Rys.4 pokazuje diagram bifurkacji prądu - i w zależności od amplitudy E przyłożonego napięcia źródła, które wzrasta okresowo od 0 do 7,7 voltów. Okresowy sygnał E jest modulowany sygnałem o kształcie "piłoząbkowym" i amplitudzie 7,7 voltów. Znacznie łatwiej jest obserwować prąd niż ładunek kondensatora. Każdy punkt "drzewa bifurkacji" prezentuje wartość prądu - i wziętą po okresie podstawowym $T = 1/f$ sinusoidalnego źródła przy ustalonej amplitudzie E . Diagram z Rys.4 jest więc prezentacją punktowego odwzorowania Poincaré. Tak więc stosunkowo prosty elektroniczny układ pomiarowy pozwala na bezpośrednie rzucenie obrazu bifurkacji na ekran monitora. Należy tu podkreślić trzy następujące własności diagramu bifurkacji.

(i) Kolejność dużych okien okresowych, których okres wzrasta dokładnie o jeden gdy przesuwamy się z lewej do prawej strony diagramu, tzn. ze wzrostem amplitudy pobudzenia E . Znane są układy o tej własności, np. [5] i [6].

(ii) Okna okresowe przedzielone są przedziałami chaosu.

(iii) Na początku przedziału chaosu występuje wyraźne roz-dwojenie każdej gałęzi drzewa bifurkacji, tzn. podwojenie okresu. Rys.5. przedstawia dwu-wymiarowy przekrój Poincaré mierzony w płaszczyźnie napięciowo-prądowej diody pojemnościowej dla czterech wartości amplitudy sygnału E , tj. V_1 , V_2 , V_3 i V_4 . Wartości te są tak wybrane, że odpowiadają one czterem przedziałom chaosu. Przekroje Poincaré odpowiadające oknom okresowym, tj. dla $E = V'_1$, V'_2 , V'_3 i V'_4 składają się z izolowanych punktów zaznaczonych krzyżykami na Rys.5. Dla n -okresowego okna mamy n punktów. Powyższe przekroje przedstawiają chaotyczne zachowanie, a przebiegi z Rys.5 są dziwnymi atraktorami /strange attractors/.

Był również badany inny typ procesu bifurkacji dla wyższej częstotliwości sygnału pobudzającego. Na rys.6 pokazano jedno-parametryczny diagram prądu - i , przy zmianie pobudzenia E od 0 do 7,7 voltów dla częstotliwości $f = 245\text{ kHz}$. Inne parametry są jak w

przypadku z Rys.4. Zauważa się, że po osiągnięciu $E = 2$ volty, przedział chaosu przestaje rosnąć i zawęża się by ostatecznie przejść w dwuokresowy atraktor.

Doświadczalnie obserwowane zjawiska z Rys.4-6 mogą być znacznie bardziej jasno przedstawione przy pomocy dwu-parametrycznego diagramu bifurkacji w płaszczyźnie $[E, f]$ pokazanego na Rys.7. Diagram ten uwidacznia wpływ częstości sygnału pobudzającego na pojawiający się proces bifurkacji. Każda ciągła linia tego rysunku wskazuje granicę obszaru, idąc z lewej do prawej strony rysunku lub z dołu do góry, gdzie występuje wzrost okresu o jeden. Natomiast linia przerywana oznacza granicę obszaru, w którym występuje podwojenie okresu. Te rodzaje bifurkacji będą określone w rozdziale następnym w nawiązaniu do punktowego odwzorowania Poincaré. Linie pionowe na Rys.7 wyznaczają częstość pobudzenia $f = 150$ kHz /linia (a)/ i $f = 245$ kHz /linia (b)/ odpowiadające diagramom jedno-parametrycznym bifurkacji, tj. diagramom z Rys.4 i 6.

4. Odwzorowanie Poincaré

Dla uproszczenia zapisu równania /2.2/, wprowadza się następujące bezwymiarowe parametry:

$$q \leftarrow \frac{L_1 f^2}{E} q, \quad i \leftarrow \frac{L_1 f}{E} i, \quad t \leftarrow ft$$

$$k = \frac{R}{L_1 f}, \quad \alpha = \frac{1}{LC_1 f^2}, \quad \beta = \frac{1}{LC_2 f^2},$$

i wtedy równanie /2.2/ przyjmuje postać

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$\frac{di}{dt} = -ki - \left\{ \begin{array}{l} \alpha q \text{ dla } q \geq 0 \\ \beta q \text{ dla } q < 0 \end{array} \right\} - \frac{E_0}{E} + \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ dla } n \leq t < (n+\frac{1}{2}) \\ -1 \text{ dla } (n+\frac{1}{2}) \leq t < (n+1) \end{array} \right. \quad /4.1/$$

Drugi wyraz prawej strony drugiego równania można również zapisać w postaci

$$\left. \begin{array}{l} \alpha q \quad \text{dla } q \geq 0 \\ \beta q \quad \text{dla } q < 0 \end{array} \right\} = \frac{\alpha - \beta}{2} |q| + \frac{\alpha + \beta}{2} q \quad /4.2/$$

W części I tej pracy omówiliśmy metodę dyskretyzacji dla nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Efektywne wyznaczenie punktowego odwzorowania dla równania /4.1/ wymaga otrzymania rozwiązania dla tego równania w przedziale czasu /0,1/ przy wszystkich możliwych warunkach początkowych. Takie zadanie nie jest proste ale zostało wykonane dla równania /4.1/ i w tej pracy podamy gotowe wyniki w postaci punktowej 2-D mapy Poincaré;

$$x_{n+1} = y_n^{-1} + \begin{cases} a_1 x_n & \text{dla } x_n \geq 0 \\ -a_2 x_n & \text{dla } x_n < 0 \end{cases} \quad /4.3/$$

$$y_{n+1} = b x_n$$

Odwzorowanie to możemy zapisać w postaci,

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n) \quad /4.4/$$

gdzie F możemy przedstawić następująco

$$F_R(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} y_n^{-1} + a_1 x_n \\ b x_n \end{pmatrix}$$

$$F_L(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} y_n^{-1} - a_2 x_n \\ b x_n \end{pmatrix}$$

F - jest kawałkami - liniowe tylko z jednym punktem załamania.

Parametry równania /4.3/ wynoszą

$$a_1 = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2}, \quad b = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = \exp(-R/2Lf) \quad /4.5/$$

gdzie

$$\lambda_{1,2} = \frac{R}{2Lf} \pm \frac{1}{2f} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^2 - \frac{4}{LC_1} \right]^{1/2}$$

Natomiast parametr a_2 nie wyraża się w formie bezpośredniej zależności od parametrów obwodu, ponieważ zależy od wyboru

war. początk. dla /4.1/. Wartość a_2 może być tylko wyznaczona numerycznie.

Proste odwzorowanie /4.4/ prowadzi w zasadzie do wszystkich podstawowych zjawisk bifurkacji wyznaczonych eksperymentalnie dla symulacyjnego obwodu RL - dioda pojemnościowa C. Rys.8 przedstawia jedno-parametryczny diagram bifurkacji x dla $a_1 = 0,7$, $b = -0.13$ gdy a_2 zmienia się w zakresie

$$0 \leq a_2 \leq 20$$

Jak można zauważyć istnieje pełne podobieństwo diagramu z Rys.8 do diagramu z Rys.4, który otrzymano z bezpośredniego pomiaru. Natomiast Rys.9. pokazuje cztery atraktory w płaszczyźnie $/x, y/$ dla $a_2 = 1,7; 4,0; 8,0; i 18,0$. Również tu zauważamy jakościowe podobieństwo do wyników eksperymentalnych. Można również otrzymać przy pomocy numerycznych rachunków dwuparametryczne diagramy w płaszczyźnie $/a_1, a_2/$ dla różnych wartości b , które są analogiczne do diagramów w płaszczyźnie $/E, f/$ z Rys.7. Zarówno w płaszczyźnie $/a_1, a_2/$ jak i $/E, f/$ istnieją obszary gdzie występują bifurkacje polegające tylko na podwojeniu okresu, które są typowe dla 1-D odwzorowań, np. kaskada Feigenbauma oraz bifurkacje, dla których okres zwiększa się o jeden. Te obszary są w kierunku pionowym i poziomym naprzemiennie z bifurkacjami podwojenia okresu i bywają zwane bifurkacjami siodłowo-węzłowymi /saddle-mode bifurcation/, [7]. Jeżeli mamy odwzorowanie 2-D dane wyrażeniem $F/x; \lambda /$ gdzie λ jest parametrem i jeżeli x^* jest punktem stałym dla F to mogą wystąpić trzy przypadki, w których X^* nie jest hiperboliczny, a mianowicie

- | | |
|-------------------------------|--|
| (i) $(DF)_{(x^*, \lambda)}$ | posiada wartość własną równą +1 |
| (ii) $(DF)_{(x^*, \lambda)}$ | posiada wartość własną równą -1 |
| (iii) $(DF)_{(x^*, \lambda)}$ | posiada sprzężoną zespoloną parę wartości własnych o module 1. |

Zgodnie, np. z /7/ przypadki te nazywa się bifurkacją; /i/ siodłowo-węzłową, /ii/ podwajaniem okresu i /iii/ Hopfa.

5. Wnioski końcowe

Układy plazmowe z warstwą podwójną /W.P./ występujące w strefie zorzowej można najogólniej scharakteryzować jako układy przestrzenne, w których występuje skok potencjału elektrycznego o przebiegu pokazanym na Rys.1. Przez W.P-ą przepływa prąd elektryczny. Skok potencjału W.P. związany jest z odpowiednim rozdzieleniem ładunku jonów i elektronów. Jak wiadomo W.P-e wykazują anomalną i nieliniową rezystancję dla przepływu prądowego oraz nieliniową pojemność elektryczną, tzn. $V = V(q)$. Wraz z pojawieniem się W.P.-ych w strefie zorzy polarnej występują zjawiska drgań elektrycznych i promieniowanie elektromagnetyczne w szerokim zakresie częstotliwości, tj. 80-450 kHz. Promieniowanie to jest zwane zorzowym promieniowaniem kilometrowym /AKR - Aurora Kilometric Radiation/. Charakter widtowy tego promieniowania, którego największa gęstość energii skupiona jest w zakresie 180-250 kHz, jest zbliżony do drgań chaotycznych o charakterze przedstawionym w Części I tej pracy na Rys.4 (f). Brak jest jednak pomiarów, które pozwoliłyby na ustalenie rodzaju procesów bifurkacyjnych i przejść do chaosu. Takie pomiary przeprowadzono dla wyładowań w lampie spektralnej i wyniki tych pomiarów przedstawiono w części I tej pracy.

Układy plazmowe z W.P-ną są układami przestrzennymi opisywanymi równaniami różniczkowymi i całkowymi. Jeszcze nie są opracowane zagadnienia bifurkacji i przejście do chaosu dla tych równań.

W tej pracy wprowadzono uproszczenie polegające na symulacji układu plazmowego z W.P-ną nieliniowym obwodem elektrycznym o stałych skupionych. Nie można tu spodziewać się ilościowego opisu zjawiska, natomiast na podstawie symulacji W.P-ej nieliniową rezystancją - układ autonomiczny 2-D, a następnie nieliniową pojemnością - układ 2-D pobudzany okresowo, uzyskano bogaty obraz bifurkacji i przejścia do chaosu. Wymieniamy argumenty, które zdają się przemawiać za tym, że procesy tu przytoczone symulują procesy bifurkacyjne w układach plazmowych z W.P-ną:

/!/ Elementem nieliniowym może być tylko W.P-na. Charakterystyki nieliniowe wskazują, że dla prądu płynącego przez warstwę gra ona rolę nieliniowego oporu i nieliniowej pojemności przestrzennie rozłożonej ale na obszarze małym w stosunku do długości fali obser-

wowanych zjawisk. Jak wiadomo, takie układy zastępuje się układami o stałych skupionych.

/!!!/ Zachowanie się nieliniowej pojemności W.P-*ej* jest jakościowo podobne do półprzewodnikowej diody pojemnościowej. Pojemność tej diody jest wynikiem powstawania warstwy podwójnej złącza p-n.

/!!!/ Aczkolwiek nie dysponuje się obecnie zadawalającą ilością pomiarowych danych dotyczących procesów bifurkacyjnych dla układów plazmowych z W.P-*ą*, to te które przedstawiono w części I tej pracy wskazują na zadawalającą zgodność do do rodzaju pojawiających się bifurkacji /Hopfa, siódziowo-węziowa i Feigenbauma/ i drogi przejścia do chaosu.

Jednak pełniejsza dyskusja tego porównania będzie możliwa gdy takich wyników będzie więcej i prace eksperymentalne będą prowadzone właśnie pod kątem wyznaczenia typowych procesów bifurkacji i wyznaczenia atraktów dla chaosu deterministycznego w układach plazmowych.

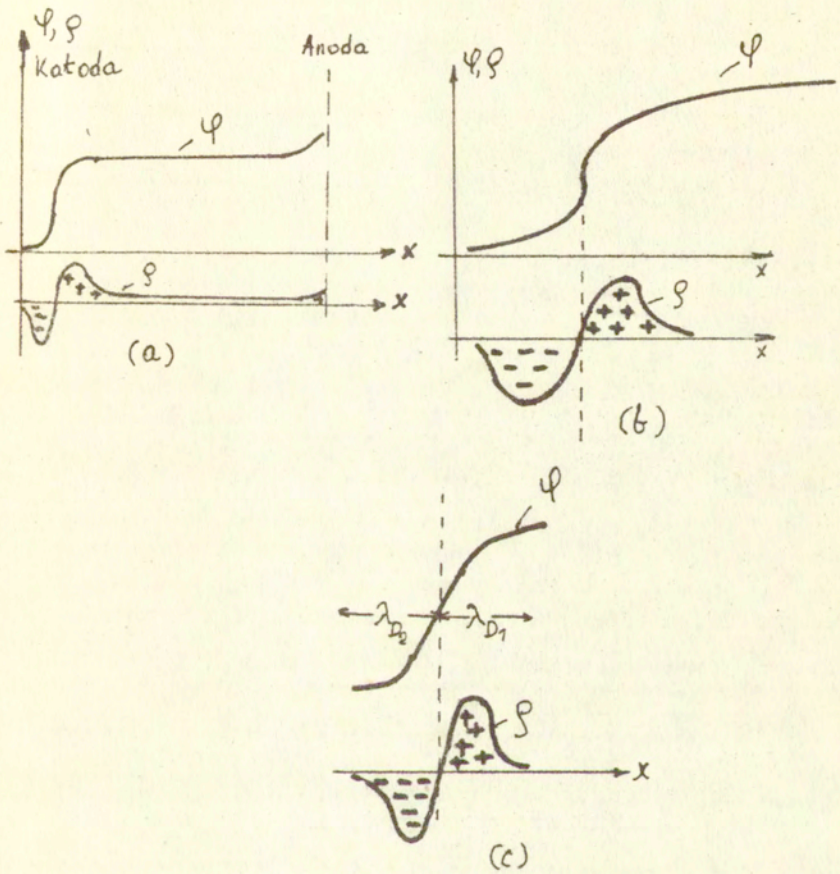
Wykaz literatury

- [1] J.Keizer - Special Topics in Electrochemistry, wyd.P.A.Rock, Elsevier, Amsterdam, 1977.
- [2] W.W.Woronow, Ju.S.Kuzmin - Fiz.Twierd.Tieła, Leningrad, vol.20, 1984, str. 224.
- [3] G.A.Held, C.Jeffries and W.Martenssen - Phys.Rev.Lett., vol.52, 1984, str.1037
- [4] S.Tanaka, T.Matsumoto and L.O.Chua - Physica 26D, 1987, str.317.
- [5] L.Q.Pei, F.Guo, S-X.Wu and L.C.Chua - Experimental confirmation of the period-adding route to chaos in a nonlinear circuit, IEEE Trans. CAS 33, 1986, str.438.
- [6] L.O.Chua, Y.Yao and Q.Yang - Devils staircase rout to chaos in a nonlinear circuit, - Int. J. of Circuit Theory and Appl. 14, 1986, str.315.

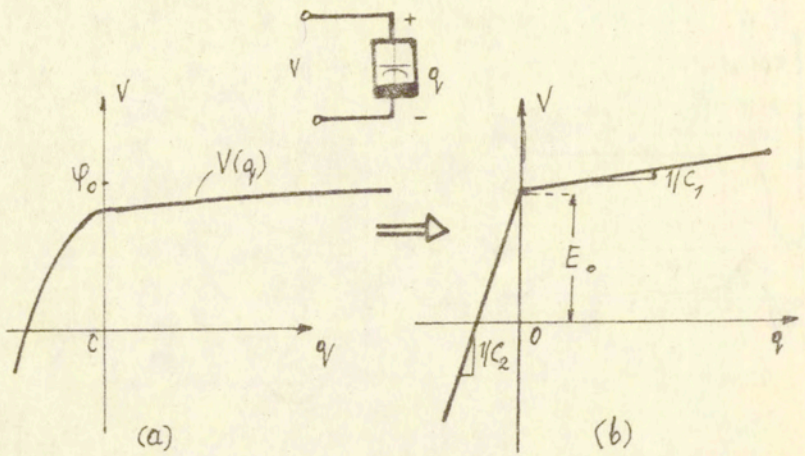
- [7] J.Guckenheimer and P.Holmes - Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer, New York, 1983.
- [8] A.J.Turski - Model zorzowej warstwy podwójnej uwzględniającej drgania i przejście do chaosu, ^(cz.1)Prace IPPT, No 38, 1989.

Spis rysunków

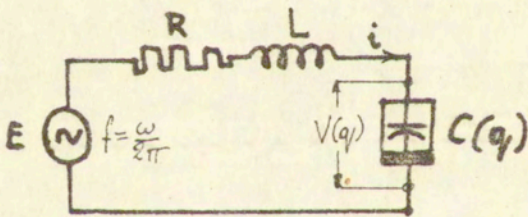
- Rys.1 Spadek potencjału φ i rozkład ładunku q .
- (a) w lampie wyładowczej,
 - (b) w warstwie podwójnej
 - (c) w złączu półprzewodnikowej diody pojemnościowej
- Rys.2 Charakterystyka nieliniowej pojemności
- (a) rzeczywisty przebieg na podstawie pomiarów
 - (b) przebieg drastycznie przybliżony ale bez zmiany obrazu bifurkacji
- Rys.3 Oscylacyjnie wzbudzony obwód RLC z nieliniową pojemnością
- Rys.4 Jedno-parametryczny diagram bifurkacji prądu i w zależności zmian amplitudy sygnału E od 0 do 7,7 voltów gdy $f = 150$ kHz.
- Rys.5 Dwu-parametryczne przekroje obrazu Poincaré /dziwne atraktory/ w płaszczyźnie napięciowo-prądowej dla
- (a) $E = 1,5$ V; (b) $E = 2,6$ V; (c) $E = 5,6$ V
 - (d) $E = 6,2$ V.
- Rys.6 Jedno-parametryczny diagram bifurkacji dla warunków jak z Rys.4, ale gdy $f = 245$ kHz
- Rys.7 Dwu-parametryczny diagram bifurkacji w płaszczyźnie $/E, f/$. Linia (a) odpowiada Rys.4, natomiast linia (b) odpowiada Rys.6.
- Rys.8. Jedno-parametryczny diagram bifurkacji x dla 2-D mapy gdy $0 \leq a_2 \leq 20$.
- Rys.9 Atraktory dla 2-D mapy Poincaré analogiczne do atraktorów z Rys.5.



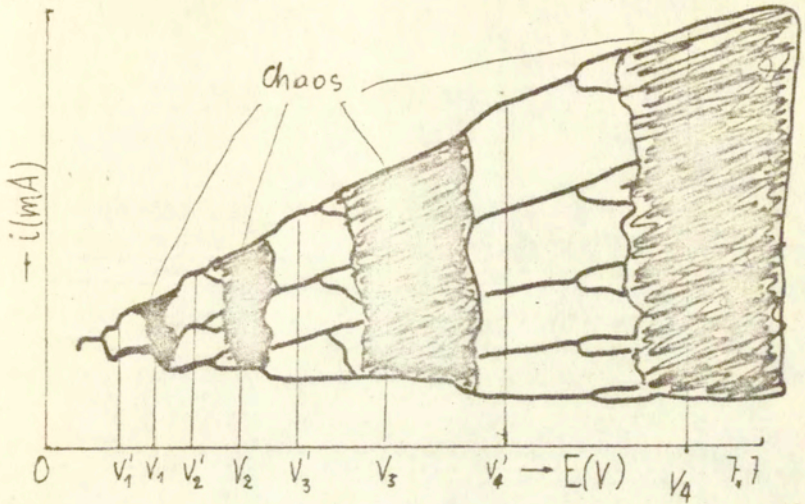
Rys. 1



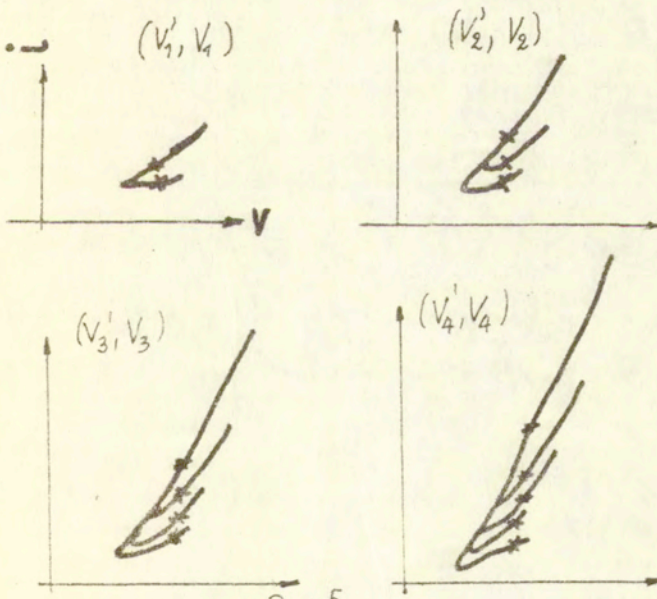
Rys. 2



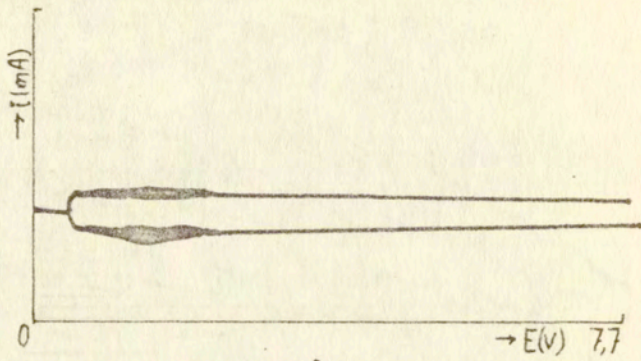
Rys. 3



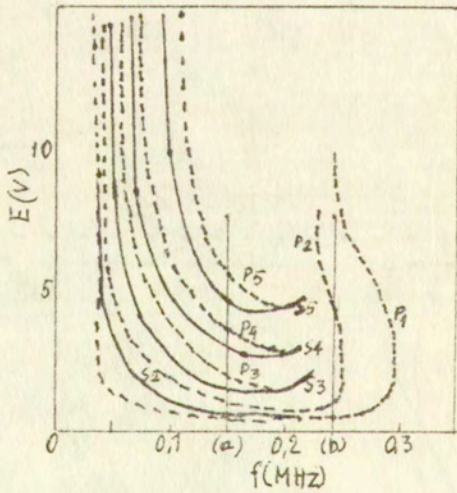
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

