SPRAWOZDANIA TNW. WYDZ. III

30

1937

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXX Année 1937 Classe III Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXX 1937 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1937

Druk i Litogr. Jan Cotty
w Warszawie, Kapucyńska 7.

TREŚĆ ZESZYTU 1—3.

TABLE DES MATIÈRES 1—3

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie *)

z dnia 27 października 1936 r.

H. Milicer-Grużewska

O prawdopodobnej aproksymacji funkcji skończonej liczby momentów zmiennych równoważnych.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu w dniu 27 października 1936 r.

On the probable error of a function of a finite number of equivalent variables [1]).

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 27 Octobre 1936.

Introduction. The theorems of the probable constant and mean errors of a function of a finite number of moments of independent variables [2]) are extended here to the equivalent variables [3]): $(x_1, x_2, \ldots)$ *i. e.* $E\left[x_{l_1}^{\nu_1} x_{l_2}^{\nu_2} \ldots\ldots x_{l_i}^{\nu_i}\right] = M_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_i}$ $(i = 1,2, \ldots, l_1, l_2, \ldots l_i$ — are different). We shall consider the selected variables: $x_1, x_2, \ldots x_n$, their empirical moments:

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} x_l^{\nu_i} = m_{\nu_i}^{(n)}, \quad i = 1,2, \ldots k \tag{1}$$

and the function of these moments $f(m_{\nu_1}^{(n)}, m_{\nu_2}^{(n)}, \ldots m_{\nu_k}^{(n)})$

*) Rękopis został przedstawiony w kwietniu 1937 r.

1) Communicated on the 4-th section of the International Mathematical Congress in Oslo, 1936.

2) H. Milicer-Grużewska „An empirical curve and its generalization" C. R. d. l. Soc. d. Sc. et. d. Let. de Varsovie 1935.

3) B. de Finetti „Sui numeri aleatori equivalenti" R. d. Reale Accademia Nationale d. Lincei. 1933.

Put

(2) $$(m^{(n)}_{\nu_1},\ m^{(n)}_{\nu_2}, \dots\ m^{(n)}_{\nu_k}) = (m^{(n)})$$

(2') $$(M_2^{\nu_1/2},\ M_2^{\nu_2/2}, \dots\ M_2^{\nu_k/2}) = (\sigma)$$

(3) $$M_{2\nu_i} - M_{\nu_i \nu_i} = \sigma^2_{\nu_i},\ i = 1,2, \dots k$$

(4) $$\delta_i = m^{(n+q)}_{\nu_i} - m^{(n)}_{\nu_i},\ i = 1,2, \dots k$$

(5) $$\delta f(m^{(n,q)}) = f(m^{(n+q)}) - f(m^{(n)})$$

R^k — the space of moments $m^{(n)}_{\nu_i}$, $i = 1,2, \dots k$, $n = 1,2, \dots\dots$ Consider the following conditions.

(B_1) All partial derivates of the first order of the function $f(x)$ are in the space R^k continuous and bounded.

(B_2) All partial derivates of the second order of the function $f(x)$ are represented in the point (σ) by an absolutely convergent Maclaurin series, and are continuous and bounded in the space R^k.

(B_3) $$|M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_i}| \leq C M_2^{\frac{\nu_1+\nu_2 \dots + \nu_i}{2}} = C \sigma_1^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_i};\ i = 1,2 \dots$$

where C is a positive constant [4]).

Theorem. *If the condition* (B_1) *is fulfilled then* $E[\delta f(m^{(n,q)})]^2 = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ *and* $E\,|\delta f(m^{(n,q)})| = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [5]).

Theorem II. *If the conditions* (B_2) *and* (B_3) *are fulfilled then* $E[\delta f(m^{(n,q)})] = 0\left(\frac{1}{n}\right)$.

Remark 1. These theorems are true for the function of a finite number of moments of pairs of equivalent variables ($x_1\, y_1$; $x_2\, y_2, \dots$) i. e. of variables for which $E[x^{\nu_1}_{l_1}\, y^{\mu_1}_{l_1}\, x^{\nu_2}_{l_2}\, y^{\mu_2}_{l_2} \dots \dots x^{\nu_i}_{l_i}\, y^{\mu_i}_{l_i}] = M_{\nu_1 \mu_1 \nu_2 \mu_2 \dots \nu_i \mu_i}$ ($i = 1,2, \dots$; $l_1, l_2, \dots, l_i$ are different). The same theorems will hold good with regard to every polynomial of finite number of empirical moments.

---

[4]) i. c. the moments verify prof. Edgeworth's conditions: since we can suppose $M_1 = 0$; v. A. L. Bowley „Elements of Statistics" p. 297.

[5]) In Oslo was communicated the theorem II only and in a less general aspect.

The proof is analogous to that of my paper quoted above. Some modifications and abbreviations of this method make it possible to prove the theorems on the probable errors of the function of a finite number of moments of independent variables under more general hypothesis. The simplification refered to has been achieved by the application of inequality of Schwarz. My attention to the possibility of applying was drawn by Professor S. Mazurkiewicz. I am happy to express to Professor Mazurkiewicz my thanks both for his comments and for reading through this work.

§ 1. *Proof of the theorem I.*

Put

(6) $$m_{\nu_i}^{(n)} = U_i, \quad i = 1,2,\dots k$$

(6′) $$(\Theta_1 U_1, \Theta_2 U_2, \dots \Theta_k U_k) = (U'), \quad 0 \leq \Theta_i \leq 1, \; i = 1,2,\dots k$$

(7) $$\delta f^{(n,q)} = \Delta.$$

It follows from the condition (B_1), the notations (4), (5), (6), (6′) and (7):

(8) $$\Delta = \sum_{i=1}^{k} f'_{U_i}(U')\,\delta_i$$

(8′) $$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^{k} f'_{U_i}(U')\,f'_{U_j}(U')\,\delta_i\,\delta_j$$

and

(9) $$|f'_{U_i}(U')| \leq A_i, \quad i = 1,2,\dots k$$

where A_i are positive constants.

But

(10) $$E\,|\delta_i| \leq \sqrt{E(\delta_i^2)}$$

(10′) $$E\,|\delta_i\,\delta_j| \leq \sqrt{E(\delta_i^2)\,E(\delta_j^2)}, \quad i, j = 1,2,\dots k$$

and [6])

---

[6]) See B. de Finetti loc. cit. p. 203.

$$(11) \qquad E(\delta_i^2) = \frac{q\,\sigma^2_{\nu_i}}{n(n+q)}\,,\ i = 1,2\ldots k.$$

We deduce from (8), (8′), (9), (10), (10′) and (11)

$$(12) \qquad E\,|\Delta| \leq \sqrt{\frac{q}{n(n+q)}} \sum_{i=1}^{k} A_i\ \sigma_{\nu_i}$$

$$(12') \qquad E(\Delta^2) \leq \frac{q}{n(n+q)} \sum_{i,\,j=1}^{k} A_i\ A_j\ \sigma_{\nu_i}\ \sigma_{\nu_j}$$

This proves the theorem I.

§ 2. *Proof of the theorem II.*

It may be proved, following *B*. de Finetti's method of computing the mathematical expectations of empirical moments of equivalent variables, that if $f(m^{(n)})$ is a polynomial than $E[\delta f^{(m,\,n)}] = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ and $E[\delta f^{(m,\,n)}]^2 = 0\left(\frac{1}{n}\right)$. If $f(m^{(n)})$ is not a polynomial but a function that accomplishes the conditions (B_2) and (B_3) the proof of the theorem II is as follows. According to the hypothesis (B_2) and notations (6), (6′) and (7) we may write

$$(13) \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{k} f'_{U_i}(U)\ \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{k} f''_{U_i\,U_j}(U')\ \delta_i\ \delta_j\,,$$

$$(13') \qquad |f''_{U_i\,U_j}(U')| \leq A_{i,\,j}\,, \quad i, j = 1,2,\ldots k,$$

where $A_{i,\,j}$ are positive constants. It is then

$$(14) \quad E\,|f''_{U_i\,U_j}(U')\ \delta_i\,\delta_j\,| \leq A_{i,\,j}\ \sqrt{E(\delta_i^2)\,E(\delta_j^2)}\,,\ i,\ j = 1,2,\ldots k.$$

It follows from (11), (13), (13′) and (14) that

$$(15) \qquad E(\Delta) = \sum_{i=1}^{k} E[f'_{U_i}(U)\ \delta_i] + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

We shall prove that

$$(16) \qquad E[f'_{U_i}(U)\ \delta_i] = 0\left(\frac{1}{n}\right),\ i = 1,2,\ldots k.$$

Denote by $W_i^l(U)$ the l—th differential polynomial of the function $f'_{U_i}(U)$ at the point zero. Write:

$$(17)\quad W_i^l(U) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 0}^{l} a_{i_1, i_2, \ldots i_k} U_1^{i_1} U_2^{i_2} \ldots U_k^{i_k}, \; i_1 + i_2 \ldots + i_k = l,$$

where $a_{i_1, i_2, \ldots i_k}$ are constants, and $i = 1,2,\ldots k$, $l = 0,1,2,\ldots,$ and

$$(18)\qquad \mathfrak{W}_i^l(U) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 0}^{l} |a_{i_1, i_2, \ldots i_k} U_1^{i_1} U_2^{i_2} \ldots U_k^{i_k}|,$$

$$(19)\qquad f'_{U_i}(U) = \sum_{l=1}^{\infty} W_i^l(U)\,^{*})$$

$$(20)\qquad f''_{U_i U_j}(U) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial W_i^l(U)}{\partial U_j}, \; i, j = 1,2,\ldots k$$

$$(21)\quad \mathfrak{F}_{i,j}(\sigma) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathfrak{W}_i^l(U)}{\partial |U_j|} \right]_{(\sigma)}, \; i, j = 1,2,\ldots k.$$

The series (21) is convergent according to the hypothesis (B_2), and we shall have:

$$(22)\quad E[f'_{U_i}(U)\,\delta_i] = \sum_{l=1}^{\infty} E[W_i^l(U)\,\delta_i], \; i = 1,2,\ldots k$$

after we have shewn that the series

$$(23)\qquad \sum_{l=1}^{\infty} E\,|\mathfrak{W}_i^l(U)\,\delta_i|$$

is convergent [7]).

---

*) $E[W_i^0 \delta_i] = f'_{U_i}(0)\; E(\delta_i) = 0, \; i = 1,2,\ldots k.$

[7]) V. A. Kolmogoroff „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Berlin, 1933.

We shall prove that

$$(24) \qquad \sum_{l=n}^{\infty} E\,|\mathfrak{W}_i^l(U)\,\delta_i| = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

and

$$(25) \qquad \sum_{l=1}^{n-1} E\,[W_i^l(U)\,\delta_i] = 0\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$$

The expression (16) follows from the expressions (24) and (25).

Proof of ihe expression (24).

Put

$$(26) \qquad \frac{\partial\,\mathfrak{W}_i^l(U)}{\partial\,|U_j|} = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 0}^{l-1} \alpha_{i_1, i_2, \ldots i_k}\,|U_1^{i_1}|\,|U_2^{i_2}|\ldots|U_k^{i_k}|,$$

where

$$(26') \qquad i_1 + i_2 + \ldots + i_k = l - 1, \quad \alpha_{i_1, i_2, \ldots i_k} \geq 0$$

$$(27) \qquad V_i = m_{\nu_i}^{(n+q)}, \qquad i = 1,2,\ldots k,$$

and write:

$$(28) \qquad \sum_{j=1}^{k} E\left[\,|U_j|(|U_i| + |V_i|)\,\frac{\partial\,\mathfrak{W}_i^l(U)}{\partial\,|U_j|}\right] =$$

$$= l\,E\,[(|U_i| + |V_i|)\,\mathfrak{W}_i^l(U)], \quad l = 1,2,\ldots$$

It follows from (26), (27) and the inequality of Schwarz

$$E\left[\,|U_j|\,(|U_i| + |V_i|)\,\frac{\partial\,\mathfrak{W}_i^l(U)}{\partial\,|U_j|}\right] \leq$$

$$(29) \qquad \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 0}^{l-1} \alpha_{i_1, \ldots i_k}\Big\{[E(U_j^2\,U_i^2\,U_1^{2i_1}\ldots U_k^{2i_k})]^{1/2} +$$

$$+ [E(V_i^2\,U_j^2\,U_1^{2i_1}\ldots U_k^{2i_k})]^{1/2}\Big\}$$

and from (1), (6), (26′) and (27)

$$(30) \quad E(U_j^2\,U_i^2\,U_1^{2i_1}\ldots U_k^{2i_k}) = \frac{1}{n^{2(l+1)}} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_{2(l+1)} = 1}^{n} E\,(x_{j_1}^{\mu_1}\,x_{j_2}^{\mu_2}\ldots x_{j_{2(l+1)}}^{\mu_{2(l+1)}})$$

$$E\,(V_i^2\,U_j^2\,U_1^{2i_1}\ldots U_k^{2i_k}) = \frac{1}{(n+q)^2\,n^{2l}} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n+q} \sum_{j_3, j_4 \ldots j_{2(l+1)} = 1}^{n} E\,(x_{j_1}^{\mu_1}\,x_{j_2}^{\mu_2} \ldots x_{j_{2(l+1)}}^{\mu_{2(l+1)}})$$

where

(30′) $\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_{2(l+1)} = 2\,(\nu_j + \nu_i + \nu_1\,i_1 + \nu_2\,i_2 \ldots + \nu_k\,i_k).$

We deduce from (B_3), (26), (28), (30) and (30′)

(31′) $$l\,E\,[(\,|\,U_i\,| + |\,V_i\,|\,)\,\mathfrak{W}_i^l\,(U)] \leq 2\,C \sum_{j=1}^{k} \sigma_1^{\nu_i + \nu_j} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{W}_i^l\,(U)}{\partial\,|\,U_j\,|} \right)_{(\sigma)}$$

The expression (24) follows from (B_2), (4), (6), (21), (27) and (31).

Proof of the expression (25)

According to (17) we wright

(32) $$E\,\{\delta_i\;W_i^l\,(U)\} = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 0}^{l} a_{i_1, i_2, \ldots i_k}\,E\,(\delta_i\;U_1^{i_1}\;U_2^{i_2} \ldots U_k^{i_k}),$$

where

(32′) $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = l,\; l = 1, 2, \ldots (n-1),\; i = 1, 2, , \ldots k.$

We deduce the expression (25) from (18), (28), (32), (B_2) and (33):

(33) $$E\,[\,\delta_i\;U_1^{i_1}\;U_2^{i_2} \ldots U_k^{i_k}] = 0\left(\frac{1}{n}\right)\,l\;\sigma_1^{\nu_1 i_1 + \nu_2 i_2 + \ldots + \nu_k i_k}$$

Proof of the expression (33).

It follows from (1) and (4)

(34) $$\delta_i = \frac{1}{n+q}\,[x_{n+1}^{\nu_i} + x_{n+2}^{\nu_i} + \ldots + x_{n+q}^{\nu_i} - \frac{q}{n}\,(x_1^{\nu_i} + x_2^{\nu_i} + \ldots x_n^{\nu_i})]$$

and from (1), (6) and (34) that

(35) $$E\,[\,\delta_i\;U_1^{i_1} \ldots U_k^{i_k}] = \frac{1}{(n+q)\,n^l}\;E\left\{\prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} x_s^{\nu_t}\right)^{i_t}\right.$$

$$\left.\left[\sum_{s=n+1}^{n+q} x_s^{\nu_i} - \frac{q}{n}\sum_{s=1}^{n} x_s^{\nu_i}\right]\right\}$$

But:

$$(36) \qquad \prod_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} x_s^{\nu_t}\right)^{i_t} = \sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} C_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$$

where

$$(37) \qquad \beta_s = \sum_{t=1}^{k} \nu_t \lambda_{s,t}$$

and $\lambda_{s,t}$ are positive integers or zero, such that:

$$(38) \qquad \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s,t} = i_t\,; \quad \sum_{s=1}^{n} \beta_s = \sum_{t=1}^{k} \nu_t\, i_t$$

$C_{\beta_1\ldots\beta_n}$ are positive constants and:

$$(39) \qquad \sum_{\beta_1\ldots\beta_n} C_{\beta_1\ldots\beta_n} = n^l$$

It follows from (32′), (38) that the number of positive β_s is not greater than l. Hence for each system $\beta_1\ldots\beta_n$:

$$(40) \qquad x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} = x_{\gamma_1}^{\beta'_1} x_{\gamma_2}^{\beta'_2}\ldots x_{\gamma_r}^{\beta'_r} \qquad r \leqq l$$

$$(40') \qquad (\gamma_1 \ldots \gamma_r) \subset (1,2\ldots n).$$

It results:

$$(41) \qquad E\,[\,\delta_i\, u_1^{i_1} u_2^{i_2}\ldots u_k^{i_k}\,] =$$

$$= \frac{1}{(n+q)\,n^l} \sum_{\beta_1\ldots\beta_n} C_{\beta_1\ldots\beta_n} E\left\{x_{\gamma_1}^{\beta'_1}\ldots x_{\gamma_r}^{\beta'_r}\left[\sum_{s=n+1}^{n+q} x_s^{\nu_i} - \frac{q}{n}\sum_{s=1}^{n} x_s^{\nu_i}\right]\right\}$$

But:

$$(42) \qquad E\,(x_{\gamma_1}^{\beta'_1}\ldots x_{\gamma_r}^{\beta'_r} x_s^{\nu_i}) = M_{\beta'_1\ldots\beta'_r,\,\nu_i}$$

if s is Different from $\gamma_1\ldots\gamma_r$, and:

$$(43) \qquad E\,(x_{\gamma_1}^{\beta'_1}\ldots x_{\gamma_r}^{\beta'_r} x_s^{\nu_i}) = M_{\beta'_1\ldots\beta'_t+\nu_i\ldots\beta'_r}$$

if $s = \gamma_t$, $t = 1,2\ldots r$.

Hence from (B_3),

(44) $$\left| E \left\{ x_{\gamma_1}^{\beta_1'} \ldots x_{\gamma_r}^{\beta_r'} \left[\sum_{s=n+1}^{n+q} x_s^{\nu_i} - \frac{q}{n} \sum_{s=1}^{n} x_s^{\nu_i} \right] \right\} \right| =$$

$$= q \left| \left\{ M_{\beta_1' \ldots \beta_r', \nu_i} \left(1 - \frac{n-r}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{r} M_{\beta_1' \ldots \beta_t' + \nu_i \ldots \beta_r'} \right| \right\}$$

$$\leqq \frac{2\,q\,l}{n}\, C\, \sigma_1^{\nu_1 i_1 + \ldots + \nu_k i_k + \nu_i}$$

and from (39), (41), (44):

(45) $$| E\,(\delta_i\, u_1^{i_1} \ldots u_k^{i_k}) | \leqq \frac{2\,l}{n}\, C\, \sigma_1^{\nu_1 i_1 + \ldots + \nu_k i_k + \nu_i}$$

what proves the inequality (33).

Posiedzenie
z dnia 19 stycznia 1937 r.

W. Sierpiński.

Przekształcenia ciągłe, a przekształcenia z pomocą funkcyj ciągłych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 19 stycznia 1937 r.

W. Sierpiński.

Les transformations continues et les transformations par fonctions continues.

Présenté dans la séance du 19 janvier 1937.

Théorème 1 (resp. 2). *Si l'ensemble linéaire H de dimension* 0 *est une image continue (resp. continue et biunivoque) de l'ensemble linéaire E de dimension* 0, *il existe une fonction continue d'une variable réelle, $\psi(x)$, et un ensemble linéaire T homéomorphe de E, tels que la fonction ψ transforme (resp. transforme d'une façon biunivoque) l'ensemble T en l'ensemble H.*

Démonstration. M étant un ensemble linéaire de dimension 0 (c'est-à-dire ne contenant aucun intervalle), il existe, comme on sait, une transformation homéomorphe (même à l'aide d'une fonction monotone) de l'ensemble de tous les nombres réels en l'ensemble de tous les nombres réels intérieurs à l'intervalle (0,1) qui transforme l'ensemble M en un ensemble de nombres irrationnels. Il en résulte tout de suite qu'il suffit de démontrer nos théorèmes dans le cas où les ensembles E et H sont des ensembles de nombres irrationnels de l'intervalle (0,1).

On peut, comme on sait, définir une „courbe" continue de Peano

(1) $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \text{ où } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

remplissant le carré K $[0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ de manière que les points (x, y) du carré K aux deux coordonnées irrationnelles soient des points *simples* (et non pas multiples) de la courbe (1), c. à. d. qu'il existe un nombre réel unique t pour lequel $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. Telles sont p. e. les „courbes remplissant le carré" définies en effet par G. Peano et par M. D. Hilbert.

Soit maintenant H un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle (0,1) qui est une image continue (resp. continue et biunivoque) d'un ensemble E de nombres irrationnels de l'intervalle (0,1). Il existe donc une fonction $f(x)$ définie et continue dans E qui transforme (resp. transforme d'une façon biunivoque) l'ensemble E en H. Les points de l'ensemble plan

(2) $$Q = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\, [x \varepsilon E,\ y = f(x)]$$

ont donc les deux coordonnées irrationnelles.

Posons

(3) $$T = \underset{t}{\mathrm{E}}\, [0 \leqslant t \leqslant 1,\ (\varphi(t), \psi(t)) \varepsilon Q].$$

La fonction $f(x)$ étant continue dans E, l'ensemble (2) est homéomorphe à l'ensemble E. Or, les points de l'ensemble Q étant (d'après $f(E) = H$) des points simples de la courbe (continue et bornée) (1), on voit sans peine que les formules (1) établissent une homéomorphie entre l'ensemble (linéaire) T et l'ensemble (plan) Q. L'ensemble T est donc homéomorphe à l'ensemble E.

Je dis que

(4) $$\psi(T) = H.$$

En effet, si $t \varepsilon T$, on a, d'après (3), $(\varphi(t), \psi(t)) \varepsilon Q$, donc d'après (2): $\varphi(t) \varepsilon E$ et $\psi(t) = f(\varphi(t))$, d'où $\psi(t) \varepsilon f(E) = H$. On a donc $\psi(T) \subset H$.

D'autre part, si $y \varepsilon H$, il existe, d'après $H = f(E)$ un nombre x de E (et, dans le cas où la fonction $f(x)$ transforme d'une façon biunivoque E en H, un nombre x unique de E), tel que $y = f(x)$. D'après la propriété de la courbe (1) (x et y étant des nombres irrationnels de (0,1)), il existe un nombre t unique de l'intervalle (0,1), tel que $\varphi(t) = x$ et $\psi(t) = y$. Comme $x \varepsilon E$ et $y = f(x)$, on a donc, d'après (2)

$$(\varphi(t), \psi(t)) = (x, y) \varepsilon Q,$$

donc, d'après (3): $t \varepsilon T$ et $y = \psi(t) \varepsilon \psi(T)$. La formule $y \varepsilon H$ donne donc $y \varepsilon \psi(T)$, d'où $H \subset \psi(T)$.

La formule (4) est ainsi établie et, dans le cas où la fonction $f(x)$ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en H, à tout nombre y de H correspond un nombre x unique de E, tel que $y = f(x)$ et un nombre t unique de T, tel que $y = \psi(t)$, ce qui prouve que la fonction ψ transforme alors d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble H.

La fonction ψ et l'ensemble T satisfont ainsi aux conditions du théorème 1 (resp. 2).

Les théorèmes 1 (resp. 2) sont ainsi démontrés.

Corollaire 1 (resp. 2). *Si F est une famille d'ensembles linéaires qui est un invariant topologique* (c'est-à-dire qui contient tout ensemble linéaire homéomorphe d'un ensemble qu'elle contient) *et qui contient tout ensemble linéaire qui est une somme ou une différence de deux ensembles dont un appartient à F et l'autre est au plus dénombrable, alors les images continues (resp. continues et biunivoques) des ensembles de la famille F coïncident avec les ensembles linéaires qu'on obtient en transformant (resp. en transformant d'une façon biunivoque) les ensembles de la famille F par les fonctions continues d'une variable réelle.*

Sophie Piccard

Rozwiązanie zagadnienia p. Ruziewicza z teorji stosunków dla liczb kardynalnych $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 19 stycznia 1937 r.

Sophie Piccard

Solution du problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 19 janvier 1937.

M. S. Ruziewicz a posé le problème suivant: *E étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal $< \mathfrak{m}$ et R une relation entre les éléments de l'ensemble E, telle qu'il existe, pour tout élément x de E, moins que $\mathfrak{n}$ éléments y de E*

pour lesquels on a $x R y$, existe-t-il toujours un sous-ensemble H de E de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R (c'est-à-dire qu'on n'a ni $x R y$, ni $y R x$ pour $x \varepsilon H$ et $y \varepsilon H$)?

J'ai démontré récemment que *la réponse au problème de M. Ruziewicz est positive pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ régulier*[1]. Le but de cette Note est de prouver que *la réponse au problème de M. Ruziewicz est positive pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$.*

Lemme. Quels que soient les nombres cardinaux infinis $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ qui satisfont aux inégalités $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_2$ étant régulier, si A est un ensemble de puissance $\mathfrak{m}_1$, B un ensemble de puissance $\mathfrak{m}_2$ et R une relation entre les éléments de $A + B$, telle que quel que soit l'élément x de cet ensemble, l'ensemble $V(x) = \underset{y}{E}\,(y \varepsilon A + B, x R y)$ est de puissance $< \mathfrak{n}$ et si deux éléments distincts de l'ensemble $A + B$ ne sont liés par la relation $x R y$ que si $x \varepsilon B$, $y \varepsilon A$, il existe un sous-ensemble M de A, de puissance $< \mathfrak{m}_1$, et un sous-ensemble B_1 de B, de puissance $\mathfrak{m}_2$ tels que si l'on pose $A_1 = A - M$, aucun couple d'éléments distincts de l'ensemble $A_1 + B_1$ n'est lié par la relation R.

D é m o n s t r a t i o n. Quel que soit l'elément x de A, posons $Z(x) = \underset{y}{E}\,(y \varepsilon B, y R x)$. Pour établir notre lemme, il suffit de montrer qu'il existe un sous-ensemble M de A, de puissance $< \mathfrak{m}_1$ et tel que l'ensemble

$$B_1 = B - \sum_{x \varepsilon A - M} Z(x) \text{ est de puissance } \mathfrak{m}_2.$$

Supposons le contraire et admettons que quel que soit le sous-ensemble M de A_1 de puissance $< \mathfrak{m}_1$, l'ensemble $B - \sum_{x \varepsilon A - M} Z(x)$ est de puissance $< \mathfrak{m}_2$.

Soit γ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}_1$ et soit

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots a_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \gamma)$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de A.

[1]) *Fundamenta Mathematicae* **29**, p.

Posons $A_0 = A$ et, pour tout nombre ordinal $\alpha \geq 1$ et $< \gamma$, posons $A_\alpha = \{a_\xi\}$ $(\xi > \alpha)$.

On voit immédiatement que $\prod_{\alpha<\gamma} A_\alpha = 0$.

Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \gamma$, l'ensemble $A - A_\alpha$ est de puissance $< \mathfrak{m}_1$. Donc, en vertu de notre hypothèse, la puissance de l'ensemble $B - \sum_{x \varepsilon A_\alpha} Z(x)$ est $< \mathfrak{m}_2$, quel que soit $\alpha < \gamma$.

Comme $\mathfrak{m}_2$ est régulier, on a $\overline{\overline{\sum_{\alpha<\gamma}\Big[B - \sum_{x \varepsilon A_\alpha} Z(x)\Big]}} < \mathfrak{m}_2$.

Or, je dis que l'on a

(2) $$B = \sum_{\alpha<\gamma}\Big[B - \sum_{x \varepsilon A_\alpha} Z(x)\Big].$$

En effet, il est clair que

(3) $$B \supset \sum_{\alpha<\gamma}\Big[B - \sum_{x \varepsilon A_\alpha} Z(\lambda)\Big].$$

Montrons que l'on a aussi l'inclusion inverse.

Soit p un élément quelconque de B. Si p n'appartenait pas au second membre de (2), il devrait exister, pour chaque indice $\alpha < \gamma$, au moins un élément y_α de l'ensemble A_α, tel que $p R y_\alpha$. Envisageons la suite transfinie

(4) $$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\omega, y_{\omega+1}, \ldots, y_\alpha, \ldots \; (\alpha < \gamma)$$

Comme p est un élément de B, il résulte de nos prémisses que $\overline{\overline{V(p)}} < \mathfrak{n}$. Ainsi, la suite (4) contient moins de $\mathfrak{n}$ termes distincts. Il doit donc exister au moins un élément y de $A_0 = A$ qui figure $\mathfrak{m}_1$ fois dans la suite (4). Soit y un tel élément. Alors, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \gamma$, il doit exister un nombre ordinal $\xi > \alpha$ et $< \gamma$, tel que $y_\xi = y$, γ étant le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}_1$.

Or, comne $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_\alpha \supset \ldots$, $(\alpha < \gamma)$, il en résulte que $y \subset \prod_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, ce qui est impossible puisque $\prod_{\alpha<\gamma} A_\alpha = 0$.

On est ainsi conduit à une contradiction et, par suite, p appartient nécessairement au second membre de (2). Cela étant quel que soit l'élément p de B, on a bien

(5) $$B \subset \sum_{\alpha < \gamma} \Big[B - \sum_{x \varepsilon A_\alpha} Z(x) \Big].$$

De (3) et (5) résulte l'égalité à démontrer (2). Or, l'égalité (2) est impossible, puisque $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{m}_2$, tandis qu'au second membre de (2) figure un ensemble de puissance $< \mathfrak{m}_2$. Donc la supposition qu'il n'existe aucun sous-ensemble M de A, de puissance $< \mathfrak{m}_1$ et tel que $\overline{\overline{B - \sum_{x \varepsilon A - M} Z(x)}} = \mathfrak{m}_2$ est fausse et notre lemme est démontré.

Théorème. Quel que soit le nombre cardinal $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, où α est un nombre ordinal de seconde classe ($\omega \leqslant \alpha < \Omega$) et quel que soit le nombre cardinal $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, si E est un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et R une relation entre les éléments de E, telle que quel que soit l'élément x de E, l'ensemble $V(x) = \underset{y}{E}\,(y \varepsilon E, x R y)$ est de puissance $< \mathfrak{n}$, il existe un sous-ensemble H de E, de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation R.

Démonstration. Vu notre résultat antérieur, nous pouvons supposer que $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal non régulier $< \aleph_\Omega$. Il existe donc une suite *dénombrable* de nombres cardinaux croissants $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{m}_3 < \ldots$, dont chacun est inférieur à $\mathfrak{m}$ et tels que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots$ En outre, on peut toujours choisir les nombres cardinaux $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ de façon que chacun de ces nombres soit $> \mathfrak{n}$ et $\geqslant \aleph_0$ et que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, l'on ait $\mathfrak{m}_n = \aleph_{\alpha_n}$, ou α_n est un nombre ordinal $< \alpha$ de première éspèce.

Soit, à présent, E un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ qui satisfait aux conditions de notre théorème.

D'après la remarque précédente, nous pouvons toujours décomposer E en une suite dénombrable de sous-ensembles disjoints deux à deux

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots,$$

tels que $\overline{\overline{E}}_n = \mathfrak{m}_n = \aleph_{\alpha_n} > \mathfrak{n}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots.)$, la suite des nombres ordinaux croissants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, dont chacun est $< \alpha$ et qui ont pour limite α, ne contenant que des nombres ordinaux de premiére espéce.

Comme $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}_n$ quel que soit $n = 1, 2, 3 \ldots$, et que $\mathfrak{m}_n$ n'est pas une somme de $< \mathfrak{m}_n$ nombres cardinaux $< \mathfrak{m}_n$, il existe, en vertu du théorème que j'ai démontré ailleurs[1]), pour tout ensemble E_n un sous-ensemble H_n de cet ensemble, tel que $\overline{\overline{H_n}} = \mathfrak{m}_n$ et qu'aucun couple d'éléments distincts de H_n n'est lié par la relation R. Nous obtenons ainsi la suite dénombrable $H_1, H_2, \ldots$, de sous-ensembles, disjoint deux à deux, de E jouissant des propriétes que nous venons de signaler.

Comme $\overline{\overline{H_1}} = \mathfrak{m}_1$ et que $\overline{\overline{V(x)}} < \mathfrak{n}$, quel que soit $x \varepsilon E$, donc aussi quel que soit $x \varepsilon H$, on a $\overline{\overline{\sum_{x \varepsilon H_1} V(x)}} \leqslant \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2$.

Donc $\overline{\overline{H_2 - \sum_{x \varepsilon H_1} V(x)}} = \mathfrak{m}_2$.

Soit à présent n un nombre entier quelconque > 1. L'ensemble $H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}$ est de puissance $\mathfrak{m}_{n-1}$ et, comme $\overline{\overline{V(x)}} < \mathfrak{n}$ quel que soit $x \varepsilon H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}$, on a

$$\overline{\overline{\sum_{x \varepsilon H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}} V(x)}} \leqslant \mathfrak{m}_{n-1} < \mathfrak{m}_n .$$

Donc

$$\overline{\overline{H_n - \sum_{x \varepsilon H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}} V(x)}} = \mathfrak{m}_n .$$

Posons $P_1 = H_1$ et, en général, pour tout entier $n > 1$, posons

$$P_n = H_n - \sum_{x \varepsilon H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}} V(x) .$$

Comme nous venons de voir, $\overline{\overline{P_n}} = \mathfrak{m}_n$.

Donc $\overline{\overline{P_1 + P_2 + \ldots}} = \mathfrak{m}$.

En outre, si x et y sont deux éléments distincts de l'ensemble $P_1 + P_2 + \ldots$, tels que $x R y$, il doit exister deux nombres entiers distincts n_1 et $n_2 > n_1$, tels que $x \varepsilon P_{n_2}$, $y \varepsilon P_{n_1}$.

Posons $P_1 = P_1^0$.

[1]) Loc. cit.

Quel que soit le nombre entier $n > 1$, les deux ensembles P_1^0 et P_n satisfont aux condition du lemme. Il existe donc un sous-ensemble $M_n^{(1)}$, de puissance $< \mathfrak{m}_1$, de P_1^0 et un sous-ensemble $P_n^{(1)}$, de puissance $\mathfrak{m}_n$, de P_n, tels qu'aucun couple d'elements distincts de l'ensemble $P_1^0 - M_n^{(1)} + P_n^{(1)}$ n'est lié par la relation R.

Comme le nombre cardinal infini $\mathfrak{m}_1$ est $> \mathfrak{n}$ et $\geqslant \aleph_0$ et comme $\mathfrak{m}_1$ n'est pas une somme de moins de $\mathfrak{m}_1$ nombres cardinaux dont chacun est $< \mathfrak{m}_1$, l'ensemble $R_1 = \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}$ est de puissance $< \mathfrak{m}_1$ et l'ensemble $Q_1 = P_1^0 - R_1$ est de puissance $\mathfrak{m}_1$. Or, quel que soit l'élément y de cet ensemble, il n'existe aucun élément x de l'ensemble $P_2^{(1)} + P_3^{(1)} + \ldots$, tel que xRy.

Soit, à présent, n un nombre entier quelconque > 1 et supposons que nous avons déjà défini un sous-ensemble R_{n-1} de $P_{n-1}^{(n-2)}$, de puissance $< \mathfrak{m}_{n-1}$, ainsi qu'un sous-ensemble $P_k^{(n-1)}$ de $P_k^{(n-2)}$, pour tout nombre entier $k \geqslant n$, de façon que $\overline{\overline{P_k^{(n-1)}}} = \mathfrak{m}_k$ et que, quel que soit l'elément y de l'ensemble $P_{n-1}^{(n-2)} - R_{n-1}$, il n'existe aucun élément x de l'ensemble $P_n^{(n-1)} + P_{n+1}^{(n-1)} + \ldots$, tel que xRy.

Les ensembles $P_n^{(n-1)}$ et $P_k^{(n-1)}$ satisfont aux conditions du lemme, quel que soit l'entier $k > n$. Il existe donc, pour tout $k > n$, un sous-ensemble $M_k^{(n)}$, de puissance $< \mathfrak{m}_n$, de $P_n^{(n-1)}$ et un sous-ensemble $P_k^{(n)}$, de puissance $\mathfrak{m}_k$ de $P_k^{(n-1)}$, tels qu'aucun couple d'éléments distincts de l'ensemble $P_n^{(n-1)} - M_k^{(n)} + P_k^{(n)}$ n'est lié par la relation R.

Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k^{(n)}$ et $Q_n = P_n^{(n-1)} - R_n$.

L'ensemble R_n est de puissance $< \mathfrak{m}_n$, donc $\overline{\overline{Q_n}} = \mathfrak{m}_n$ et quel que soit l'élément y de l'ensemble Q_n, il n'existe aucun élément x de l'ensemble $P_{n+1}^{(n)} + P_{n+2}^{(n)} + \ldots$, tel que xRy.

Cela étant quel que soit l'entier $n > 1$, posons

$$H = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$$

L'ensemble H est évidemenent de puissane $\mathfrak{m}$. Or, je dis qu'ancun couple d'éléments distincts de H n'est lié par la relation R. En effet, soient x et y deux élements distincts quelconques de H. S'il existe un indice $n \geqslant 1$, tel que $x \varepsilon Q_n$, $y \varepsilon Q_n$ comme $Q_n \subset H_n$, on ne saurait avoir ni $x R y$, ni $y R x$. Supposons, à présent, qu'il existe deux nombres entiers distincts n_1 et n_2, tels que $x \varepsilon Q_{n_1}$, $y \varepsilon Q_{n_2}$. Soit, p. e., $n_2 > n_1$. Comme $Q_{n_1} \subset P_{n_1}$ et $Q_{n_2} \subset P_{n_2}$, on ne saurait avoir $x R y$. D'autre part, comme $Q_{n_1} \subset P_{n_1}^{(n_1-1)}$ et $Q_{n_2} \subset P_{n_2}^{(n_1)}$, on ne saurait avoir $y R x$. Le raisonnement est tout à fait analogue se l'on suppose que $n_2 < n_1$. Le sous-ensemble H de E satisfait donc notre théorème qui, de ce fait, est démontré.

Stanisław Ruziewicz.

Uogólnienie kilku twierdzeń równoważnych hipotezie continuum.

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 19 stycznia 1937 r.

Stanisław Ruziewicz.

Généralisation de quelques théorèmes équivalents à l'hypothèse du continu.

Présenté dans la séance du 19 janvier 1937.

Le fait qu'un théorème T est équivalent à l'hypothèse du continu peut être exprimé de la façon suivante: „Pour que le théorème T soit vrai, il faut et il suffit qu'on ait $2^{\aleph_0} = \aleph_1$". En éconçant ainsi les propositions du livre de M. Sierpiński „*Hypothèse du continu*" [1]) qui y sont désignées par P_1 (p. 9), P_2 (p. 11), P_6 (p. 23), P_8 (p. 25), P_{8a} (p. 28) ainsi que le théorème de ma Note „*Sur une proposition équivalente à l'hypothèse du continu*" (C. R. Soc. Sc. Varsovie, XXVII, Cl. III, 1934) que je désigne par P, je tacherai ici de généraliser ces théorèmes aux théorèmes analogues concernant les ensembles infinis de puissances quelconques, de sorte que leur démonstration n'exige aucune hypothèse. Je désignerai ces théorèmes généralisés respective-

[1]) Monografie Matematyczne, t. IV, Warszawa-Lwów 1934.

ment par Q_1, Q_2, Q_6, Q_8, Q_{8a} et Q. Leurs démonstrations ne seront qu'une modification legère et parfois une repetition textuelle des démonstrations des théorèmes primitifs. Ces derniers s'obtiendrant des théorèmes généralisés (concernant les nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$) en posant $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{n} = \aleph_1$. Or, en posant $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_\alpha}$, $\mathfrak{n} = \aleph_{\alpha+1}$, nous obtiendrons les théorèmes qui seront vrais dans ce et seulement dans ce cas si l'hypothèse de Cantor sur les alephs est vraie.

Théorème Q_1. *Soit M un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$. L'inégalité $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le carré combinatoire $M \times M$ soit une somme de deux ensembles dont l'un est de puissance $< \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est de puissance $< \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.*

J'ai donné ailleurs [1]) la démonstration de ce théorème, ainsi que de son corollaire Q_2 qu'on obtient en posant $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, $\mathfrak{n} = \aleph_{\beta+1}$:

Théorème Q_2: *M etant un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$, l'inégalité $\alpha \leqslant \beta + 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le carré combinatoire $M \times M$ soit une somme de $\aleph_\beta$ courbes.*

Théorème Q_3. *Pour qu'un ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ soit une somme d'ensembles croissants de puissances $< \mathfrak{n}$, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$*

Démonstration: 1) *La condition est suffisante.* Supposons que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ et soit μ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$. Soit

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \ldots,\ x_\xi, \ldots (\xi < \mu)$$

une suite transfinie du type μ formée de tous les éléments de l'ensemble M.

Posons, pour $\alpha < \mu$:

$$E_\alpha = \{x_\xi\}_{\xi < \alpha}$$

— ce seront des ensembles croissants de puissances $< \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, donc de puissances $< \mathfrak{n}$ et on a évidemment

$$M = \sum_{\alpha < \mu} E_\alpha .$$

1) Publ. math. Univ. Belgrade V, p. 5.

2) *La condition est nécessaire.* Supposons qu'on a $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Soit N un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{n}$, et soit F la famille d'ensembles croissants satisfaisant aux conditions du théorème Q_3. Pour tout elément x de l'ensemble M il existe donc un ensemble $D(x)$ de puissance $< \mathfrak{n}$ appartenant à la famille F et tel que $x \varepsilon D(x)$. Posons

$$S = \sum_{x \varepsilon N} D(x)$$

— ce sera un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$, en tant qu'une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides de puissances $< \mathfrak{n}$.

Soit x_0 un élément quelconque de M. L'ensemble $D(x_0)$ étant de puissance $< \mathfrak{n}$, il existe dans l'ensemble S (qui est de puissance $\mathfrak{n}$) un élément y, tel que y non $\varepsilon D(x_0)$. Or, comme $y \varepsilon S$, il existe un élément x de N, tel que $y \varepsilon D(x)$. Les ensembles de la famille F étant croissants, on a soit $D(x) \subset D(x_0)$, soit $D(x_0) \subset D(x)$. Si $D(x) \subset D(x_0)$, la formule $y \varepsilon D(x)$ donne $y \varepsilon D(x_0)$, contrairement à la définition d'élément y. On a donc $D(x_0) \subset D(x) \subset S$, donc $x_0 \varepsilon S$; x_0 pouvant être un élément arbitraire de M, cela donne $M \subset S$, ce qui est impossible, si $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, puisque $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$.

Le théorème Q_3 est ainsi démontré.

Théorème Q. *Pour qu'un ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ contienne une famille de sous-ensembles de puissances $< \mathfrak{n}$ telle que toute somme de $\mathfrak{n}$ ensembles de cette famille est égale à M, il faut et il suffit qu'il soit $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$.*

Démonstration. 1) *La condition est suffisante.*

Supposons que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. En désignant par μ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$, rangeons les éléments de l'ensemble M en une suite transfinie du type μ,

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\omega, \ldots,\ x_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \mu).$$

Posons, pour $\alpha < \mu$:

$$E_\alpha = \{x_\xi\}_{\xi < \alpha}.$$

On a donc $\overline{\overline{E}}_\alpha < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$.

La famille F formée de tous les ensembles E_α, où $\alpha < \mu$, est donc une famille d'ensembles de puissances $< \mathfrak{n}$.

Soit Φ une famille quelconque de puissance $\mathfrak{m}$ d'ensembles de la famille F. On a donc

$$\Phi = \{E_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\mu},$$

où $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\mu}$, est une suite croissante de nombres ordinaux $<\mu$.

Soit $x \varepsilon M$. Il existe donc un nombre ordinal $\lambda<\mu$, tel que $x = x_\lambda$. Or, il résulte de la définition des ensembles E_α que $x_\lambda \varepsilon E_\alpha$ pour $\alpha > \lambda$. La suite $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\mu}$ étant croissante, on a $\alpha_\xi \geqslant \xi$ pour $\xi<\mu$. Comme $\lambda<\mu$, il existe un nombre ordinal η, tel que $\lambda<\eta<\mu$, donc aussi $\lambda<\alpha_\eta<\mu$. On a donc $x_\lambda \varepsilon E_{\alpha_\eta}$, donc

$$x \varepsilon \sum_{\xi<\mu} E_{\alpha_\xi}.$$

Chaque somme des ensembles distincts de la famille F, dont l'ensemble de termes est de puissance $\mathfrak{m}$ contient donc tous les éléments de l'ensemble M. Comme $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, il en résulte que notre condition est suffisante.

2) *La condition est nécessaire.* Soit F une famille de sous-ensembles de l'ensemble M qui satisfait aux conditions du théorème Q: tout somme S formée de $\mathfrak{n}$ termes qui sont des ensembles de la fa-ensemble de la famille F est donc de puissance $<\mathfrak{n}$ Toute somme S formé de $\mathfrak{n}$ termes qui sont des ensembles de la famille F est donc de puissance $\leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$. La somme S devant contenir tous les éléments de l'ensemble M, on a donc $\mathfrak{n}^2 \geqslant \mathfrak{m}$, ce qui donne, vu que $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, c. q. f. d.

Théorème Q_8. *Soit Φ une famille de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$ de sous-ensembles d'un ensemble infini M, telle que M n'est pas une somme de moins que $\mathfrak{n}$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble de puissance $< \mathfrak{n}$. Alors, pour que l'ensemble M contienne un sous-ensemble N de puissance $\mathfrak{n}$ qui a avec tout ensemble de la famille Φ moins que $\mathfrak{n}$ éléments communs, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$.*

Démonstration. 1) *La condition est suffisante.*

Admettons que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $\overline{\overline{M}}$. Rangeons tous les éléments de M en une suite transfinie du type φ,

$$(1) \quad x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1}, \ldots,\ x_\alpha,\ \ldots \quad (\alpha<\varphi)$$

Soit $\mathfrak{l}$ la puissance de la famille Φ: on a donc $\mathfrak{l} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Soit λ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{l}$. Rangeons les ensembles de la famille Φ en une suite transfinie du type λ:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1} \ldots, E_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \lambda).$$

Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \lambda$, et supposons définis tous les éléments p_ξ, où $\xi < \alpha$: soit P_α leur ensemble. D'après $\alpha < \lambda$ on a $\overline{\overline{P_\alpha}} < \mathfrak{l} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ don $\overline{\overline{P_\alpha}} < \mathfrak{n}$. Posons

$$S_\alpha = \sum_{\xi \leqslant \alpha} E_\xi:$$

c'est donc une somme de moins que $\mathfrak{l}$, donc de moins que $\mathfrak{n}$ ensembles de la famille Φ: d'après $\overline{\overline{P_\alpha}} < \mathfrak{n}$ et d'après la condition du théorème Q_8 on a donc $M \neq P_\alpha + S_\alpha$ et, puisqu'on a, d'après la definition des ensembles P_α et S_α, $P_\alpha + S_\alpha \subset M$, on trouve $M - (P_\alpha + S_\alpha) \neq 0$. Nous définirons p_α comme le premier terme de la suite (1) qui est un élément de l'ensemble $M - (P_\alpha + S_\alpha)$.

La suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et tous leur éléments sont distincts.

Soit N l'ensemble de tous les éléments de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ Soit $E_\varkappa$ (où $\varkappa < \lambda$) un ensemble quelconque de la famille Φ. D'après la définition de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ on a pour $\alpha < \lambda$:

$$p_\alpha \,\varepsilon\, M - (P_\alpha + S_\alpha),$$

donc p_α non $\varepsilon\, S_\alpha$ pour $\alpha < \lambda$, donc, les ensembles S_α étant croissants, p_α non $\varepsilon\, S_\varkappa$ pour $\varkappa \leqslant \alpha < \lambda$, donc, à plus forte raison, p_α non $\varepsilon\, E_\varkappa$ pour $\varkappa \leqslant \alpha < \lambda$. Les termes de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ qui sont éléments de $E_\varkappa$ ont donc nécessairement des indices $\xi < \varkappa$, et, comme $\varkappa < \lambda$, leur ensemble est de puissance $< \mathfrak{l}$, donc $< \mathfrak{n}$.

$E_\varkappa$ étant un ensemble quelconque de la famille Φ, on voit que l'ensemble N jouit de la propriété exprimée dans l'énoncé du théorème Q_8.

2) *La condition est nécessaire.* Admettons, pour démontrer, qu'on a $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{p}$ le nombre cardinal qui suit immé-

diatement $\mathfrak{n}$: nous aurons donc $\mathfrak{n} < \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}$. Soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{p}$: en désignant par π le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{p}$, rangeons les éléments de l'ensemble M en une suite transfinie du type π:

$$(2) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \pi).$$

Posons

$$E_\alpha = \{x_\xi\}_{\xi < \alpha} \text{ pour } \alpha < \pi.$$

Soit Φ la famille formée de tous les ensembles E_α, où $\alpha < \pi$. On a donc $\overline{\overline{\Phi}} = \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}$, et, comme $\mathfrak{p}$ est le nombre cardinal qui suit immédiatement $\mathfrak{n}$, tout ensemble de la famille Φ est de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$. Toute somme de moins que $\mathfrak{n}$ ensembles de la famille Φ est donc de puissance $\leqslant \mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ et elle reste encore de puissance $\leqslant \mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ si l'on augmente d'un ensemble de puissance $< \mathfrak{n}$. Une telle somme ne peut donc pas donner l'ensemble M et la famille Φ satisfait aux conditions du théorème Q_8. Ce théorème supposé vrai, il existe donc un sous-ensemble N de M de puissance $\mathfrak{n}$ qui a avec tout ensemble de la famille Φ moins que $\mathfrak{n}$ éléments communs. Or, nous pouvons regarder les éléments de l'ensemble N comme termes d'une suite transfinie

$$(3) \qquad x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_\omega}, x_{\alpha_{\omega+1}}, \ldots, x_{\alpha_\xi}, \ldots$$

extraite de la suite (2).

Je dis qu'il existe un indice $\gamma < \pi$ plus grand que chacun des indices α_ξ des termes de la suite (3). En effet, si un tel indice γ n'existe pas, il existe pour tout nombre ordinal $\alpha < \pi$ un terme x_{α_ξ} de la suite (3), tel que $\alpha \leqslant \alpha_\xi$, ce qui donne $E_\alpha \subset E_{\alpha_\xi}$. Or, alors la somme

$$(4) \qquad E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{\alpha_3} + \ldots + E_{\alpha_\omega} + E_{\alpha_{\omega+1}} + \ldots + E_{\alpha_\xi} + \ldots$$

contient la somme $\sum\limits_{\alpha < \pi} E_\alpha$ qui coïncide évidemment avec l'ensemble M. Or, la puissance de l'ensemble de termes de la somme (4) est $\mathfrak{n}$ et chaque terme de cette somme est un ensemble de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$: la somme (4) est donc un ensemble de puissance $\mathfrak{n} < \mathfrak{p} = \overline{\overline{M}}$, et l'ensemble M ne peut pas être contenu dans la somme (4).

Il existe donc un indice $\gamma < \pi$, tel qu'on a pour tout terme x_{α_ξ} de la suite (3) l'inégalité $\alpha_\xi < \gamma$. Or, on a alors la formule $N \subset E_\gamma$ et, vu que $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$, l'ensemble N a avec l'ensemble E_γ de la famille Φ $\mathfrak{n}$ éléments communs, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse qu'on a $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ implique donc une contradiction.

Le théorème Q_8 est ainsi démontré.

Pareillement on démontre le

Théorème $Q_{8}\alpha$. L'inégalité $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que la proposition suivante soit vraie: Soit P une propriété de sous-ensembles d'un ensemble M assujettie aux conditions:

1) $\boldsymbol{P}$ est une propriété héréditaire [1])

2) Toute somme de moins que $\mathfrak{n}$ ensembles jouissant de la propriété P jouit de cette propriété.

3) Tout ensemble formé d'un seul élément de l'ensemble M jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$.

4) Il existe une famille Φ de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$ de sous-ensembles de l'ensemble M jouissants de la propriété $\boldsymbol{P}$ et telle que tout sous-ensemble de M jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$ est contenu dans un au moins des ensembles de la famille Φ,

alors tout sous-ensemble E de M qui ne jouit pas de la propriété $\boldsymbol{P}$ contient un sous-ensemble N de puissance $\mathfrak{n}$ qui a moins que $\mathfrak{n}$ éléments communs avec tout ensemble jouissant de la propriété $\boldsymbol{P}$.

---

[1]) Une propriété d'ensembles est dite *héréditaire* si elle appartient à tout sous-ensemble d'un ensemble qui en jouit.

S. Mazurkiewicz.

O aproksymowaniu funkcyj ciagłych zmiennej rzeczywistej przez sumy częściowe szeregu potęgowego.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 19 stycznia 1937 r.

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej dowodzę metodą kategorji w pewnej przestrzeni funkcyjnej — następującego twierdzenia: istnieje szereg potęgowy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ taki, że każda funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$ ciągła w przedziale $0 \leqq x \geqq 1$ i znikająca dla $x = 0$, da się w tym przedziale jednostajnie aproksymować z dowolną dokładnością przez sumy częściowe tego szeregu.

S. Mazurkiewicz.

Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par les sommes partielles d'une série de puissances.

Note présentée dans la séance du 19 janvier 1937.

1. Le but de cette note est la démonstration du théoréme suivant[1]).

Théorème. *Il existe une série de puissances* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ *telle que toute fonction* $f(x)$ *de variable réelle* x, *continue pour* $0 \leqq x \leqq 1$ *est la limite uniforme d'une suite de sommes partielles de la série* $f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$.

Il suffit evidement de démontrer le théorème pour les fonctions $f(x)$ telles que $f(0) = 0$. *La démonstration s'obtiendra par la considération d'un certain espace fonctionnel.*

2. z designera une variable complexe, x une variable réelle, $F^{(r)}(z)$ désignera pour $r = 0$ la fonction $F(z)$.

---

[1]) Ce théorème a été démontré par une autre méthode par MM. Pál et Fekete, comp. *Pal:* Tôhoku Math. J. 5 (1914) p. 8—9 et 6 (1914/5) p. 42—43.

3. Soit U l'intérieur du cercle $|z+1|<1$. Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de fonctions $F(z)$, $z \varepsilon U$, qui possédent les propriétés suivantes:

A_1) $F(z)$ est holomorphe dans U.

A_2) pour $r=0,1...$ $F^{(r)}(z)$ admet ume extension sur $\overline{U}$, que nous désignerons par $\overline{F^{(r)}}(z)$. [1])

A_3) $\overline{F}(0)=0$.

On voit que si $F \varepsilon \mathfrak{A}$, alors $F^{(r)}$ posséde les propriétés A_1), A_2).

4. Désignons pour toute fonction F possédant les propriétés A_1), A_2) par $\|\overline{F}\|$ la *norme* de $\overline{F}$ dans $\overline{U}$ c. à. d.

$$(1) \qquad \|\overline{F}\| = \operatorname{Max} |\overline{F}(z)| \qquad z \varepsilon \overline{U}$$

et définissons dans $\mathfrak{A}$ une *distance* $\mu(F, G)$ par la formule:

$$(2) \quad \mu(F,G) = \operatorname{Inf}\left[\frac{1}{m} + \sum_{r=0}^{m} \|\overline{F^{(r)}} - \overline{G^{(r)}}\|\right]; \quad m=1,2...; \ F, G \varepsilon \mathfrak{A}$$

On voit facilement que pour $F, F_k \varepsilon \mathfrak{A}$ la relation $\mu(F,F) \to 0$ est equivalente à l'ensemble des relations: $\|\overline{F^{(r)}} - \overline{F^{(r)}}\| \to 0$, r $=0, 1, 2\ldots$ elle exprime donc la convergence uniforme dans $\overline{U}$ de $\overline{F_k^{(r)}}$ vers $F^{(r)}$ pour $r=0, 1\ldots$

5. $\mathfrak{A}$ *est un éspace complet.* Soit $F_k \varepsilon \mathfrak{A}$, $k=1, 2\ldots$ et $\lim\limits_{j,k\to\infty} \mu(F_j, F_k)=0$. Il en résulte l'ensemble des relations $\lim\limits_{j,k\to\infty} \|\overline{F_j^{(r)}} - \overline{F_k^{(r)}}\| = 0$, $r=0, 1, 2\ldots$ Donc les fonctions continues dans $\overline{U}$: $\overline{F_k^{(r)}}$ convergent uniformément dans $\overline{U}$ vers les fonctions continues G_r. Soit $G(z)=G_0(z)$ pour $z \varepsilon U$. $G(z)$ est alors holomorphe pour $z \varepsilon U$ et l'on aura:

$$(3) \qquad G_r(z) = \lim_{k\to\infty} F_k^{(r)}(z) = G^{(r)}(z) \qquad z \varepsilon U, \ r=0, 1...$$

Donc $G_r(z)=\overline{G^r}(z)$, $z \varepsilon U$, $r=0, 1\ldots$ Pour $r=0$ et $z=0$ on a:

$$(4) \qquad \overline{G}(0) = G_0(0) = \lim_{k\to\infty} \overline{F_k}(0) = 0$$

[1]) c. à. d. $\overline{F^{(r)}}(z)$ est continue pour $z \varepsilon \overline{U}$ et $\overline{F^{(r)}}(z) = F^{(r)}(z)$ pour $z \varepsilon U$.

Donc G posséde les propriété A_1), A_2), A_3), ce qui démontre nôtre assertion.

6. $\mathfrak{A}$ *est un espace séparable.* Désignons respectivement par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1$ les ensembles de polynomes à coefficients rationnels, satisfaisant à A_3) et de fonctions holomorphes dans un cercle $|z+1| < \varsigma$, où $\varsigma > 1$, satisfaisant à A_3). On a:

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \tag{5}$$

Si F_k, $F \varepsilon \mathfrak{A}_1$, alors la convergence uniforme de F_k vers F dans un cercle de centre -1 et de rayon >1 entraîne $\mu(F, F_k) \to 0$. Il en resulte immédiament que $\mathfrak{P}$ est dense dans $\mathfrak{A}_1$ (dans le sens determiné par la metrique μ).

Soit $F \varepsilon \mathfrak{A}$. Posons:

$$F_\lambda(z) = F\left(\frac{z-\lambda}{1+\lambda}\right) - F\left(\frac{-\lambda}{1+\lambda}\right) \qquad \lambda > 0 \tag{6}$$

F_λ est holomorphe pour $|z+1| < 1+\lambda$ et $F_\lambda(0) = 0$, donc $F_\lambda \varepsilon \mathfrak{A}_1$. On a:

$$F_\lambda^{(r)}(z) = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^r F^{(r)}\left(\frac{z-\lambda}{1+\lambda}\right) \qquad r = 1, 2 \dots \tag{7}$$

$$\|\overline{F^{(r)}} - F_\lambda^{(r)}\| \leqq \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^r \underset{z \varepsilon \overline{U}}{Max} \left| F^{(r)}\left(\frac{z-\lambda}{1+\lambda}\right) - \overline{F^{(r)}}(z) \right| + \tag{8}$$

$$+ \|\overline{F^{(r)}}\| \left\{1 - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^r\right\} + \left| F\left(\frac{-\lambda}{1+\lambda}\right) \right| \longrightarrow 0$$

pour $\lambda \to 0$, $r = 0, 1, 2 \dots$ Donc $\lambda \to 0$ entraîne $\mu(F_\lambda, F) \to 0$. Donc $\mathfrak{A}_1$ est dense dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{P}$ *est dense dans* $\mathfrak{A}$, ce qui démontre nôtre assertion.

7. Soit $F \varepsilon \mathfrak{A}$. Désignons par $P_n^F(z)$ le polynome:

$$P_n^{(F)}(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\overline{F^{(r)}}(0)\, z^r}{r\,!} \tag{9}$$

Supposons $F_k \varepsilon \mathfrak{A}$, n — fixe. La relation $\mu(F, F_k) \to 0$ entraîne pour $r = 1, 2 \dots n$: $F_k^{(r)}(0) \to F^{(r)}(0)$, donc la convergence uniforme de $P_n^{(F_k)}(z)$ vers $P_n^{(F)}(z)$ dans tout ensemble fermé et borné. Il en résulte l'énoncé suivant. *Soit n — fixe,* $\beta < 0$, $Q(z)$ *un polynome; l'ensemble de* $F \varepsilon \mathfrak{A}$ *qui satisfont à l'inégalité*:

$$(10) \qquad | P_n^{(F)}(x) - Q(x) | < \beta \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

est ouvert dans $\mathfrak{A}$.

8. Rangeons en une suite infinie $\{Q_k(z)\}$, $k = 1, 2...$ tous les polynomes de $\mathfrak{P}$. Désignons pour $k, m, n = 1, 2...$ pour $\mathfrak{B}_{k,m,n}$ l'ensemble des fonctions $F \varepsilon \mathfrak{A}$, qui satisfont à l'inegalité:

$$(11) \qquad | P_n^{(F)}(x) - Q_k(x) | < \frac{1}{m} \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

Posons:

$$(12) \qquad \mathfrak{B}_{k,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{k,m,n}$$

$$(13) \qquad \mathfrak{B} = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{k,m}$$

D'aprés 7 $\mathfrak{B}_{k,m,n}$ sont ouverts dans $\mathfrak{A}$ donc $\mathfrak{B}$ *est un* G_δ dans $\mathfrak{A}$. Soit maintenant $F_1 \varepsilon \mathfrak{A}$, $\eta > 0$, k, m — fixes. D'après 6 nous pouvons determiner un polynome $R(z)$ tel que:

$$(14) \qquad \mu(F_1, R) < \frac{1}{2} \eta$$

On a: $R(0) = Q_k(0) = 0$, donc nous pouvons determiner un nombre λ tel que: $0 < \lambda < 1$ et:

$$(15) \qquad | R(z) | < \frac{1}{3m} > | Q_k(z) | \qquad | z | \leqq \lambda$$

D'après 6 nous pouvons determiner un $\alpha > 0$ tel que pour tout polynome $S(z)$ l'inégalité:

$$(16) \qquad |R(z) - S(z)| < \alpha \qquad |z+1| \leqq 1+\lambda$$

entraîne $\mu(R, S) < \frac{1}{2}\eta$, donc d'après (14):

$$(17) \qquad \mu(F_1, S) < \eta$$

Les cercles: $|z+1| \leqq 1+\lambda$, $|z-1| \leqq 1-\lambda$ n'ont en commun que le point $z=\lambda$. Donc d'après un théorème de Walsh[1]), il existe un polymone $R_1(z)$, satisfaisant au conditions:

$$(18) \qquad |R(z) - R_1(z)| < \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{1}{3\,m}\right) \qquad |z+1| \leqq 1+\lambda$$

$$(19) \qquad |R_1(z) - [Q_k(z) - Q_k(\lambda) + R(\lambda)]| < \frac{1}{3\,\mathrm{m}} \qquad |z-1| \leqq 1-\lambda$$

$$(20) \qquad R_1(0) = R(0) = 0$$

L'inegalité (18) entraîne:

$$(21) \qquad \mu(F_1, R_1) < \eta$$

D'autre part il resulte de (15), (18), (19)

$$(22) \qquad |R_1(z) - Q_k(z) < |R_1(z) - R(z)| + |R(z) + Q_k(z) > \frac{1}{m} \qquad |z| \leqq \lambda$$

$$(23) \qquad |R_1(z) - Q_k(z)| < \frac{1}{3m} + |Q_k(\lambda)| + |R(\lambda)| < \frac{1}{m} \qquad |z-1| \leqq 1-\lambda$$

Donc:

$$(24) \qquad |R_1(x) - Q_k(x)| < \frac{1}{m} \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

D'aprés (20) on a: $R_1 \varepsilon \mathfrak{A}$. Désignons le degré de R_1 par s. On aura:

$$(25) \qquad R_1 = P_s^{(R_1)}$$

---

[1]) Walsh: *Amer. Trans.* 30 p. 473 Theorem III.

Donc, d'après (24):

$$(26) \qquad \left|P_s^{(R_1)}(x) - Q_k(x)\right| < \frac{1}{m} \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

Donc $R_1 \varepsilon \mathfrak{B}_{k,m,s} \subset \mathfrak{B}_{k,m}$. L'inegalité (21) montre que $\mathfrak{B}_{k,m}$ est dense dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{B}$ *est un résiduel dans* $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{B} \neq 0$.

9. Soit maintenant $F \varepsilon \mathfrak{B}$. Posons $a_r = \dfrac{F^{(r)}(0)}{r!}$, $r = 1, 2\ldots$ Soit f une fonction continue de x dans l'intervalle: $0 \leqq x \leqq 1$ et supposons que $f(0) = 0$. D'aprés le théorème de Weierstrass il existe une suite d'indices k_j, $j = 1, 2\ldots$ telle que $Q_{k_j}(x) \to f(x)$ uniformément pour $0 \leqq x \leqq 1$. Comme $F \varepsilon \mathfrak{B}_{k,m}$, $k, m = 1, 2\ldots$ on aura en particulier $F \varepsilon \mathfrak{B}_{k_j, j}$, donc à tout j correspond un n_j tel que $F \varepsilon \mathfrak{B}_{k_j, j, n_j}$. Donc:

$$(27) \qquad \left|P_{n_j}^{(F)}(x) - Q_{k_j}(x)\right| < \frac{1}{j} \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

$$(28) \qquad \left|P_{n_j}^{(F)}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{j} + \left|f(x) - Q_{k_j}(x)\right| \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

Donc: $P_{n_j}^{(F)}(x) = \sum_{r=1}^{n_j} a_r x^r \to f(x)$ uniformément pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Le théoreme est ainsi démontré.

Si l'on suppose f réelle on peut supposer que les a_r sont réels. En effet s'il n'en etait pas ainsi on pourrait remplacer chaque a_r par sa partie réelle.

Warszawa 6.I.1937.

Edwin W. Miller

O pewnej własności rodzin zbiorów.

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu dn. 19 stycznia 1937 r.

Autor zajmuje się rodzinami zbiorów o następującej własności B: rodzina zbiorów posiada własność B, jeśli istnieje zbiór, który z każdym zbiorem, należącym do tej rodziny, posiada element wspólny, jednak żadnego z tych zbiorów nie zawiera w całości.

Edwin W. Miller (Ann Arbor)

On a property of families of sets.

Introduction. *A family of infinite sets will be said to possess property B if there exists a set which contains at least one element of each set of the family but does not exhaust any set of the family.*

Any family of mutually exclusive infinite sets, it is clear, possesses this property. On the other hand, not all families of infinite sets possess the property. A simple example is the family of all infinite subsets of any infinite set.

In another paper[1]) I have indicated the importance of property B in the theory of connected sets. The present paper will be chiefly concerned with property B itself rather than its applications. Extensive use will be made of the axiom of Zermelo.

If A denotes any collection of objects, we shall denote the cardinal number of A by $\overline{\overline{A}}$. Likewise if α is an ordinal number, we shall denote the cardinal number corresponding to α by $\overline{\alpha}$. If p is a transfinite cardinal, we shall denote by Ω_p the smallest ordinal to correspond to p. Finally, if A denotes a family of sets, we shall denote by (A) the set which is the sum of the sets of the family A.

We shall have occasion to use an important result due to F. Bernstein. This result (in modified form) is the following theorem.

---

[1]) Concerning biconnected sets, Fund. Math. 29. This paper will be referred to hereafter as C. B. S.

Theorem of Bernstein[1]. Any family F of infinite sets S possesses property B if $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{F}}$ for every set S of F.

A stronger result has been obtained by Sierpiński.

Theorem of Sierpiński. Let F be a family of sets such that $\overline{\overline{F}} = p$ where p is a transfinite cardinal. If $\overline{\overline{S}} \geqslant p$ for every set S of F, then there exists a family G of mutually exclusive sets such that $\overline{\overline{G}} = p$ and every set of G has p elements in common with every set of F.

Corollary. If M is a plane connected set, and if every M boundary (defined as in C. B. S.) has the power c, then M is the sum of c mutually exclusive connected sets each of which is dense in M.

The proof of this corollary follows the lines of the proof of theorem 2 in C. B. S. The theorem of Sierpiński is used in place of the theorem of Bernstein.

§ 1.

It will be observed that the theorems of Bernstein and Sierpiński are concerned with families F such that $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{F}}$ for every set S of F. In this section we shall consider the case in which $\overline{\overline{S}} = p$ for every set S of F, where p is a transfinite cardinal $< \overline{\overline{F}}$.

Theorem 1. Let F be a family of sets such that for every set S of F we have $\overline{\overline{S}} = p$ where p is a transfinite cardinal. If every infinite subset of (F) contains a finite set which is contained in at most p sets of F, then F has property B.

Proof. The theorem is true in the case where $\overline{\overline{F}} \leqslant p$, by Bernstein's theorem. We will prove by induction[2] that the theorem holds true in general.

Let F be any family of sets satisfying the conditions of the theorem and let us put $\overline{\overline{F}} = q$, where $q > p$. We will assume that the theorem holds true for any family of sets which has a power $< q$ and proceed to show that the theorem holds true for F.

---

[1]) See C. B. S. for references in connection with this theorem and the following one.

[2]) Since we employ the axiom of Zermelo, we have the theorem that every transfinite cardinal is an aleph, so that the principle of transfinite induction applies.

Let us arrange the sets of F in a well ordered series of type Ω_q:

$$S_1,\ S_2, \dots\ S_\alpha, \dots \qquad \alpha < \Omega_q.$$

Consider the set S_1. It is clear that there are only p finite subsets of S_1 since $p^n = p$ for any natural number n, and $p.\ \aleph_0 = p$. It follows readily from the hypothesis of our theorem that there are exactly p finite subsets K of S_1 such that each set K is contained in at most p sets of F. Let us denote by A_1 the family of all sets S of F which contain at least one such finite subset K of S_1. We have $\overline{\overline{A}}_1 \leqq p$. We next define the family A_2 of sets S of F on the basis of the set (A_1) in precisely the same way as we defined A_1 on the basis of the set S_1. In general, we define the family of sets A_n (for $n \geqq 2$) on the basis of the set (A_{n-1}) in the manner indicated. We now define F_1 as the family of sets $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. It is easily shown that $\overline{\overline{F}}_1 \leqq p$.

Now let us suppose that we have defined families F_α of sets of F for all $\alpha < \beta$ where β is any ordinal $< \Omega_q$. Let S denote the first set of our well ordered series which is not a set of any of the families F_α for $\alpha < \beta$. We now define the family F_β on the basis of the set $\sum_{\alpha<\beta} (F_\alpha) + S$ in the same way as we defined F_1 on the basis of S_1. We notice in the first place that $F_\alpha \subset F_\beta$ for every $\alpha < \beta$. We will show that $\overline{\overline{F}}_\beta \leqq p\,\overline{\beta}$. We have of course $\overline{\overline{F}}_1 \leqq p \cdot 1$. Let us assume that for every $\alpha < \beta$ we have $\overline{\overline{F}}_\alpha \leqq p.\,\overline{\alpha}$. It follows that $\overline{\overline{F}}_\alpha \leqq p.\,\overline{\beta}$ for any $\alpha < \beta$. Therefore, $\overline{\overline{\sum (F_\alpha) + S}} \leqq p.\,\overline{\beta}^2 = p.\,\overline{\beta}$. Then, from the way in which F_β was defined on the basis of $\sum_{\alpha<\beta} (F_\alpha) + S$, it follows that $\overline{\overline{F}}_\beta \leqq p.\,\overline{\beta}$. Thus by transfinite induction we have this result for every $\beta < \Omega_q$. Therefore for all such β we have $\overline{\overline{F}}_\beta < q$. Finally, we may notice that if S is any set of F, there exists an ordinal $\beta < \Omega_q$ such that S is a set of F_β.

Now consider the families of sets

$$F_1, F_2 - F_1, \dots F_\beta - \sum_{\alpha<\beta} F_\alpha, \dots \qquad \beta < \Omega_q .$$

Let us denote them in the order named as

$$G_1, G_2, \dots G_\beta, \dots \qquad \beta < \Omega_q .$$

Consider G_β. It will be proved that any set of G_β has at most a finite number of elements in common with $\sum_{\alpha<\beta} (G_\alpha)$. Assume the contrary and let S denote any set of G_β which has infinitely many elements in common with $\sum_{\alpha<\beta} (G_\alpha)$. Then the infinite set S contains a finite set K which is contained in at most p sets of F. Since the sets (F_α) are monotonic increasing, there is an ordinal $\alpha' < \beta$ such that $(F_{\alpha'})$ contains K. Then, from the definition of $F_{\alpha'}$, it is clear that S is a set of $F_{\alpha'}$. Then clearly it is not a set of G_β, contrary to our supposition. It has been shown then, that any set of G_β, with $\beta < \Omega_q$, has at most a finite set of elements in common with $\sum_{\alpha<\beta} (G_\alpha)$. Now for every $\beta < \Omega_q$ delete from each set of G_β the finite set of elements it has in common with $\sum_{\alpha<\beta} (G_\alpha)$. The family of sets corresponding to G_β and so obtained will be denoted by H_β. Since every set of H_β has the power p and since $\overline{\overline{H_\beta}} < q$, there exists (by our assumption that the theorem holds true for any family which has a power $< q$) a set M_β such that $M_\beta \subset (H_\beta)$, has an element in common with each set of H_β, and does not exhaust any set of H_β. But $(H_\alpha) . (H_\beta) = 0$ if $\alpha \neq \beta$ and each set of F contains a set of some family H_β. It is therefore clear that $\sum_{\beta<\Omega_q} M_\beta$ contains an element of each set of F but does not exhaust any set of F.

As a special case of theorem 1 we have the following theorem.

Theorem 2. Let F be a family of sets such that for every set S of F we have $\overline{\overline{S}} = p$ where p is a transfinite cardinal. If n is a fixed positive integer, and if every set of n elements of (F) belongs to at most p sets of F, then F has property B.

Corollary. If the condition concerning n in theorem 2 be replaced by the condition that the common part of any collection of p sets of F consists of at most n points, then F has property B.

Proof: Since the common part of any collection of p sets of F consists of at most n points, it follows that any set of $n+1$ points of (F) is contained in less than p sets of the family. Accordingly, theorem 2 applies and F has property B.

In this connection the following question is of interest. Does F necessarily possess property B if the condition in theorem 2 concerning n be replaced by the condition that the common part of any collection of p sets of F is *finite*? We will show that this question is to be answered in the negative. In fact we will prove the following theorem.

Theorem 3 [1]. If $\overline{\overline{D}} = \aleph_0$, then there exists a family F of subsets of D each of which has the power $\aleph_0$ and which are such that 1) any two sets of F have at most a finite number of elements in common; and 2) F fails to possess property B.

Proof: We first express D so that $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n + \ldots$ where $\overline{\overline{D_n}} = \aleph_0$ and $D_i . D_j = 0$ if $i \neq j$. The set K of all sequences $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, where $x_n \varepsilon D_n$, has the power c. Since the set of all increasing sequences of natural numbers $(n_1, n_2, \ldots n_j, \ldots)$ has the power c, the same is true of the set L of all sequences of the form $(2^{n_1}, 2^{n_1} + 2^{n_2}, \ldots, 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_j}, \ldots)$. There exists then a $1-1$ correspondence T between the sequences of K and the sequences of L.

Now let $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ represent any particular sequence of K, and $y = (2^{n_1}, 2^{n_1} + 2^{n_2}, \ldots, 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_j}, \ldots)$ represent the sequence of L corresponding to x in virtue of T. Let us now form the subset of D consisting of the elements $x_{2^{n_1}}, x_{2^{n_1}+2^{n_2}}, \ldots, x_{2^{n_1}+\ldots+2^{n_j}}, \ldots$ It is to be understood that these elements are chosen from the particular sequence x under discussion. Let W designate the family of all such subsets

[1] The method employed in the proof of this theorem is based on a procedure due to Sierpiński, *Hypothèse du Continu*, p. 34.

of D determined by corresponding sequences x and y of K and L respectively. We now define F as the family of all sets of W together with all the sets D_n. Clearly each set of F has the power $\aleph_0$.

As for 1), we have in the first place that any two sets D_n have no elements in common. In the second place, any set of W, from its very construction, has at most one element in common with any D_n. Lastly, any two sets of W have at most a finite number of elements in common, since for sufficiently large i and j the subscript $2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_i}$ must differ from the subscript $2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_j}$. Now let M be any subset of D which contains an element of each set of F. Then M contains an element x_n from each set D_n. But the sequence $x=(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ determines a set of W and therefore of F all of whose elements are elements of the sequence x. This set is accordingly a subset of M, and (2) is proved.

Now theorem 3 is equivalent to the statement that if F is a family of sets each of power $\aleph_0$, and if every subset of (F) of power $\aleph_0$ is contained in at most one set of F, then F need not have property B. The same conclusion holds, *a fortiori*, if the words „one set of F“ are replaced by „$\aleph_0$ sets of F“. In other words, theorem 1 cannot be generalized in this direction.

§ 2.

We shall now consider briefly the case of a family F of infinite sets which do not all have the same power. The consideration of this case is bound up with the following question. If the families F_1 and F_2 each possess property B, under what circumstances will the family $F=F_1+F_2$ possess property B? That this will not be the case under all circumstances is clear from the following example. Let D_1 and D_2 be two sets such that $\overline{\overline{D_1}}=\overline{\overline{D_2}}=\aleph_0$ and $D_1 . D_2=0$. Let us arrange the elements of D_1 and D_2 in sequences.

$$D_1: a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$
$$D_2: b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$$

Denote by G the family of all infinite subsets of D_1. Now denote by F_{1n} the family of sets obtained by adjoining to each set of G the element b_n. Now put $F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}$. The family F_1 obviously possesses property B. Let F_2 denote the family of all infinite subsets of D_2 which contain the element b_1. It is clear that F_2 possesses property B. It is easily proved, however, that $F = F_1 + F_2$ does not possess property B.

Among the theorems which can be proved in the present connection, the two which follow are perhaps of special interest.

Theorem 4. If p and q are transfinite cardinals, and if F_1 is a family of p sets of power p and F_2 is a family of q sets of power q, then $F = F_1 + F_2$ possesses property B.

Theorem 5. Let F_1 be a family of p sets of power p. Let F_2 be any family of mutually exclusive infinite sets. Then $F = F_1 + F_2$ has property B.

Proof: Let G denote the family of sets obtained by replacing each set T of F_2 by a subset of T of power $\aleph_0$. It is clear that it will be sufficient to prove that the family $F_1 + G$ possesses property B.

Case 1. Let us assume $p = \aleph_0$. Then at most $\aleph_0$ sets of G contain elements of (F_1), since $\overline{\overline{(F_1)}} = \aleph_0$. Let us denote the family of all these sets of G by H. Then $F_1 + H$ is a family of power $\aleph_0$ of sets of power $\aleph_0$. Hence, by Bernstein's theorem there is a subset M_1 of $(F_1 + H)$ which contains an element of each set of $F_1 + H$ and exhausts no set of $F_1 + H$. Now let M_2 be a set obtained by choosing exactly one element from each set of the family $G - H$. The existence of the set $M_1 + M_2$ implies that $F_1 + G$ has property B.

Case 2[1]. Let us assume that $p > \aleph_0$. Arrange the sets of F_1 in a well ordered series of type Ω_p:

$$S_1,\ S_2,\ \ldots\ S_\alpha,\ \ldots \qquad \alpha < \Omega_p\,.$$

Choose two elements a_1 and b_1 from S_1, such that a_1 and b_1 are distinct and do not belong to the same set T of G. This is possible since $\overline{\overline{S}} = p$ and $\overline{\overline{T}} = \aleph_0$ for each set T of G. Now choose

[1] The method of proof used in case 2 is based on the procedure of Bernstein.

two elements a_2 and b_2 of S_2, such that (1) a_2 and b_2 are distinct, and are distinct from both a_1 and b_1, (2) a_2 and b_2 do not belong to the same set T of G, and neither a_2 nor b_2 belongs to the same set T of G as either a_1 or b_1. In general, if β is any ordinal $< \Omega_p$, choose two elements a_β and b_β from S_β, such that (1) a_β and b_β are distinct, and are distinct from all elements a_α and b_α for $\alpha < \beta$, (2) a_β and b_β do not belong to the same set T of G, and neither belongs to the same set T of G as any a_α or b_α for $\alpha < \beta$. That the elements a_β and b_β can be so chosen is clear from the following considerations. We have, on the one hand, $\overline{\overline{S}}_\beta = p$. On the other hand, $\overline{\overline{\sum_{\alpha<\beta} (a_\alpha + b_\alpha)}} < p$, and the set which is the sum of all sets T of G which have an element in common with $\sum_{\alpha<\beta} (a_\alpha + b_\alpha)$ has a power $< p$.

Now denote $\sum_{\alpha<\Omega_p} a_\alpha$ by A, and denote by M a set obtained by selecting exactly one element from each set of G in such a way that $M \cdot \sum_{\alpha<\Omega_p} b_\alpha = 0$. The set $A + M$ obviously contains an element of each set of $F_1 + G$. It does not exhaust any set of G since it contains at most two elements of any set of G. But also it cannot exhaust any set S_α of F_1, since it does not contain the element b_α. Therefore $F_1 + G$ has property B.

Edward Szpilrajn

O zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 19 stycznia 1937 r.

WSTĘP.

Temat niniejszej pracy wiąże się z następującymi trzema faktami:

1. klasy zbiorów „mierzalnych" (w tym czy innym znaczeniu) względem różnych „miar" — nie są identyczne;

2. mierzalność (L) (zbiorów resp. funkcyj) nie jest niezmiennikiem różnych operacyj, jak np. homeomorfizmy, superpozycje, etc;

3. mierzalność (L) przedstawia szereg analogij z własnością Baire'a (w znaczeniu szerszym) [1]).

W związku z tym nasuwają się zagadnienia zbadania

1) klasy zbiorów resp. funkcyj, które byłyby „mierzalne" względem wszelkich „miar";

2) klasy zbiorów resp. funkcyj (w przestrzeni euklidesowej), które pozostawałyby mierzalne (L) po dokonaniu różnych operacyj;

3) klasy zbiorów resp. funkcyj, która mogłaby być uważana za analogiczną do klasy zbiorów resp. funkcyj posiadających bezwzględną własność Baire'a (czyli t. zw. własność Baire'a w znaczeniu węższym).

Na pytania te otrzymujemy w niniejszej pracy łączną odpowiedź.

Obrawszy, jako punkt wyjścia, skończone nieujemne funkcje przeliczalnie addytywne zbioru borelowskiego (potrzebne twierdzenia dotyczące tych funkcyj zebraliśmy w § 1), definiujemy klasę zbiorów i funkcyj *bezwzględnie mierzalnych* (§ 2). Okazuje się, że

1] klasa zbiorów bezwzględnie mierzalnych jest identyczna z klasą zbiorów mierzalnych (w znaczeniu Carathéodory'ego)

---

[1]) Sierpiński [1] chap. III; Kuratowski [1], str. 58; Szpilrajn [2], [4], [5].

względem każdej *Massfunktion* Carathéodory'ego, jako też z klasą zbiorów mierzalnych względem każdej *Inhaltsfunktion* Hahna[1]) (6.5);

2] bezwzględna mierzalność zbiorów resp. funkcyj jest niezmiennikiem operacji (A) (2.2(ii)), homeomorfizmu uogólnionego (2.5 (v)), mnożenia kartezjańskiego (2.6), superpozycji (2.4 (v)), etc; w szczególności klasa zbiorów bezwzględnie mierzalnych pokrywa się z klasą zbiorów, których każdy obraz zawarty w przestrzeni euklidesowej, otrzymany przez homeomorfizm uogólniony, jest mierzalny (L) (4.2);

3] klasa zbiorów resp. funkcyj bezwzględnie mierzalnych może być uważana za analogiczną do klasy zbiorów resp. funkcyj o bezwzględnej własności Baire'a (choć naogół zachowuje się w sposób bardziej regularny[2])).

Klasa zbiorów bezwzględnie mierzalnych, umieszczonych na linii prostej, jest identyczna z klasą zbiorów, które Ławrentiew nazwał *doskonale mierzalnymi* (t. j. zbiorów, które są mierzalne (L) wraz ze wszystkimi liniowymi obrazami homeomorficznymi— por. 4.2 (iii)); twierdzenia przezeń udowodnione[3]) są szczególnymi przypadkami twierdzeń pracy niniejszej.

Zajmujemy się również zbiorami, których wszystkie podzbiory są bezwzględnie mierzalne, a które nazywamy zbiorami *bezwzględnie zerowymi* (§ 3). Klasa ta posiada szereg własności analogicznych do klasy zbiorów zawsze I kategorii (3.1 (i)). Dowód istnienia zbioru nieprzeliczalnego bezwzględnie zerowego zawdzięczamy p. Sierpińskiemu[4]). Na zbiorach bezwzględnie zerowych znikają wszelkie miary, przyjmujące wartości skończone; należy jednak zaznaczyć, że np. miara liniowa zbiorów płaskich może na nich (przy założeniu hipotezy continuum) przyjmować wartości nieskończone (5.2 (ii)).

Badanie zbiorów bezwzględnie zerowych wiąże się z t. zw. *ogólnym zagadnieniem miary*; podajemy poniżej łatwy dowód

---

[1]) Carathéodory [1], str. 238; Hahn [1], str. 444.

[2]) W. Sierpiński udowodnił za pomocą hipotezy continuum, że bezwzględna własność Baire'a nie jest niezmiennikiem mnożenia kartezjańskiego, superpozycji, etc. Por. Sierpiński [1], str. 71 i 75.

[3]) Lavrentieff [1], str. 156—160.

[4]) Sierpiński—Szpilrajn [1], str. 257. Wcześniej uzyskał ten rezultat p. Poprużenko przy pomocy hipotezy continuum; por. Szpilrajn [5], str. 311 i 307.

twierdzenia Banacha—Kuratowskiego—Ulama[1]), które dotyczy tego zagadnienia (3.4).

Stwierdźmy na koniec, że dowody niektórych twierdzeń o zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych otrzymuje się przez modyfikacje znanych rozumowań, dotyczących innych klas zbiorów i funkcyj (w szczególności dowodów podanych w książce Kuratowskiego)[2]). Można było wskutek tego pewne dowody pominąć (2.7).

Terminy i oznaczenia. *Przestrzeniami* nazywać będziemy wyłącznie przestrzenie metryczne, ośrodkowe i nieprzeliczalne. Oznaczać je będziemy: X, Y, Z. Przez *zbiory* rozumieć będziemy stale (z wyjątkiem 3.4) tylko podzbiory takich przestrzeni.

Dla $E \subset X$ oznaczamy przez $c_E(x)$ *funkcję charakterystyczną* zbioru E, t. j. kładziemy $c_E(x) = 1$ dla $x \varepsilon E$, $c_E(x) = 0$ dla $x \varepsilon X - E$.

Dla każdej funkcji f określonej na zbiorze E i dla zbioru $A \subset E$ oznaczamy przez $f \mid A$ funkcję g określoną wyłącznie dla $x \varepsilon A$ przez równość $g(x) = f(x)$. Podobnie dla funkcji zbioru φ określonej dla zbiorów $E \varepsilon \mathbf{K}$, oraz dla klasy $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}$, oznaczamy przez $\varphi \mid \mathbf{Q}$ funkcję ψ określoną wyłącznie dla $E \varepsilon \mathbf{Q}$ wzorem: $\psi(E) = \varphi(E)$.

Rzeczywista funkcja zbioru $\varphi(E)$, określona dla zbiorów klasy $\mathbf{K}$, zwie się *przeliczalnie addytywną*, gdy relacje: $E_1 + E_2 + \ldots = E_0$; $E_n \varepsilon \mathbf{K}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$ oraz $E_j \cdot E_k = 0$ dla $0 < j < k$ pociągają za sobą: $\varphi(E_0) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) + \ldots$ Funkcja $\varphi(E)$ nazywa się *ciągłą* w punkcie p, jeśli $(p) \varepsilon \mathbf{K}$ i $\varphi[(p)] = 0$.

Przez $[a, b]$ oznaczamy przedział $a \leqslant x \leqslant b$; kładziemy dalej $\mathcal{J} = [0,1]$. $\mathcal{J}^n$ oznacza n-tą potęgę kartezjańską zbioru $\mathcal{J}$ czyli kostkę podstawową przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej $\mathcal{E}^n$. Przestrzeń Hilberta oznaczamy przez $\mathcal{H}$, a zbiór tych jej punktów, które posiadają jedynie skończoną liczbę współrzędnych $\neq 0$ — przez $\mathcal{H}_0$. Zbiór, który nie ma skończonego wymiaru (w znaczeniu Brouwera-Mengera-Urysohna) zwie się *wymiaru przeliczalnego*, gdy jest sumą ciągu zbiorów 0-wymiarowych; w przeciwnym razie jest *wymiaru nieprzeliczalnego* ($\mathcal{H}_0$ jest wymiaru przeliczalnego, a $\mathcal{H}$ wymiaru nieprzeliczalnego)[3]).

$\mathbf{B}(X)$ oznaczać będzie klasę zbiorów borelowskich w przestrzeni X; podobnie $\boldsymbol{B}(X, Y)$ oznacza klasę funkcyj f mierzalnych (B), przekształcających X na podzbiór przstrzeni Y (t. j. takich, że jeżeli G jest zbiorem otwartym w Y, to $f^{-1}(G) \varepsilon \mathbf{B}(X)$). Zbiór (przestrzeń) E taki, że $E \varepsilon \mathbf{B}(Z)$ gdzie Z jest przestrzenią zupełną, zwie się *bezwzględnie borelowski* (symbolicznie: $E \varepsilon \mathbf{B}$). Przekształcenie wzajemnie jednoznaczne f zbioru A na zbiór B takie, że $f \varepsilon \boldsymbol{B}(A, B)$ i $f^{-1} \varepsilon \boldsymbol{B}(B, A)$, zwie się *homeomorfizmem uogólnionym*.

---

[1]) Dowód ten zawarty był w pracy: Sierpiński—Szpilrajn [1], str. 256—259.

[2]) Kuratowski [1], §§ 26–28; por. także Szpilrajn [6].

[3]) Hurewicz [1].

Najmniejsza klasa podzbiorów przestrzeni $Z \varepsilon \mathbf{B}$, zawierająca $\mathbf{B}(Z)$, zamknięta ze względu na operacje uzupełnienia i przekształceń ciągłych, zwie się klasą zbiorów *rzutowych* (przestrzeni Z).

Zbiór który nie zawiera żadnego podzbioru doskonałego nosi nazwę *całkowicie niedoskonałego*. Zbiór $E \subset X$ posiada *własność Baire'a w X* (w znaczeniu szerszym), gdy jest kształtu $E = G - K_1 + K_2$, gdzie G jest zbiorem otwartym w X, a K_1 i K_2 — zbiorami I kategorii w X. Zbiór $E \subset Z \varepsilon \mathbf{B}$ posiada *bezwzględną własność Baire'a* (czyli własność Baire'a w znaczeniu węższym), gdy dla każdego zbioru doskonałego $P \subset Z$ zbiór EP posiada własność Baire'a w P (w znaczeniu szerszym). Zbiór $N \subset Z \varepsilon \mathbf{B}$, który jest I kategorii na każdym zbiorze doskonałym $P \subset Z$ zwie się *zawsze I kategorii*.

Symbole *inf* i *sup* oznaczają odpowiednio kres dolny i górny. Dla zbioru $E \subset \mathcal{E}^n$ oznaczamy przez $m(E)$ jego miarę zewnętrzną (n—wymiarową) Lebesgue'a.

Następujące terminy i oznaczenia określone są w tekście pracy:

§ 1. MIARA. ZBIORY I FUNKCJE MIERZALNE.

1.1 **Miara i zbiory mierzalne. Definicje.** Każdą nieujemną, skończoną, przeliczalnie addytywną funkcję $\mu(B)$ zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$ nazywamy *miarą w przestrzeni X*. Zbiór $E \subset X$ jest *mierzalny względem* μ (symbolicznie: $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$) gdy istnieją zbiory $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ i $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ takie, że

$$(*) \quad B_1 \subset E \subset B_2 \quad \text{i} \quad \mu(B_1) = \mu(B_2).$$

Kładziemy wtedy $\mu(E) = \mu(B_1)$, *rozszerzając* w ten sposób miarę na wszystkie zbiory względem niej mierzalne (liczba $\mu(E)$ nie zależy — jak łatwo stwierdzić — od wyboru zbiorów B_1 i B_2).

Klasę zbiorów $N \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ takich, że $\mu(N) = 0$ oznaczamy przez $\mathbf{N}(\mu)$.

Miara Lebesgue'a $m(B)$ (n-wymiarowa) zbiorów $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{E}^n)$ jest miarą w znaczeniu wyżej podanym, przy czym klasa $\mathbf{M}(m)$ pokrywa się z klasą zbiorów mierzalnych (L).

Założenie skończoności miary jest dla dalszych rozważań nader istotne. Przyjęta definicja mierzalności nie byłaby właściwa dla miar, przyjmujących wartości nieskończone, a nawet przy innych określeniach mierzalności wiele z twierdzeń wysłowionych w § 1 nie zachodzi np. dla miary liniowej podzbiorów kwadratu $\mathcal{I}^2$ [1]).

1.2 **Zbiory miary zero i zbiory mierzalne.** Z definicji miary na zbiorach mierzalnych wynika natychmiast, że

(i) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ *potrzeba i wystarcza, by istniał zbiór* $B \supset E$ *taki, że* $B \varepsilon \mathbf{B}(X) . \mathbf{N}(\mu)$.

Przeliczalna addytywność miary μ na zbiorach borelowskich w X pociąga za sobą dla każdego ciągu zbiorów $B_n \varepsilon \mathbf{B}(X)$:

$$\mu(B_1 + B_2 + \ldots) \leqslant \mu(B_1) + \mu(B_2) + \ldots$$

skąd — wobec (i) — otrzymujemy łatwo:

(ii) *Jeżeli* $N_n \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ $(n = 1,2,\ldots)$ *to* $N_1 + N_2 + \ldots \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$.

Okażemy dalej, że

(iii) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *potrzeba i wystarcza, by był postaci* $E = B + N$ (*a także*: $E = B - N$), *gdzie* $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$, *a* $N \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ [2]).

Konieczność. Gdy $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, to dla pewnych zbiorów $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$, $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ zachodzi warunek (*) (1.1), a więc $E = B_1 + (E - B_1) = B_2 - (B_2 - E)$. Ponieważ $B_2 - B_1 \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$, więc $E - B_1 \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ i $B_2 - E \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$.

Wystarczalność. Niech $E = B_1 + N$ (lub $E = B_2 - N$) gdzie $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ (lub $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$), a $N \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$. Niech dalej — wobec (i) — B będzie nadzbiorem dla N takim, że $B \varepsilon \mathbf{B}(X) . \mathbf{N}(\mu)$. Kładąc $B_2 = B_1 + B$ (lub $B_1 = B_2 - B$), stwierdzamy, że spełniony jest warunek (*) (1.1).

Z (iii) oraz (ii) wynika natychmiast, że

(iv) *Jeżeli* $M_n \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *dla* $n = 1,2,\ldots$ *to* $M_1 + M_2 + \ldots \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *oraz* $M_1 - M_2 \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

(v) *Jeżeli dla zbioru E oraz zbiorów:* $B_1 \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *i* $B_2 \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *zachodzą warunki* (*) (1.1), *to* $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

---

[1]) Por. np Szpilrajn [3], str. 4 i 2.

[2]) Zaznaczmy, że każdy zbiór mierzalny względem miary μ jest sumą zbioru F_σ (w X) i zbioru miary μ zero (jako też różnicą zbioru G_δ w X i zbioru miary μ zero). Dla dowodu należałoby przeprowadzić rozumowania analogiczne do odpowiednich dowodów dla miary Lebesgue'a, lub też oprzeć się na pewnych twierdzeniach dotyczących funkcyj Carathéodory'ego (por. 6.2, warunek (5'), oraz 6.3 (iii)).

(vi) *Jeżeli* $M_n \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, *to*

$$\mu(M_1 + M_2 + \ldots) \leqslant \mu(M_1) + \mu(M_2) + \ldots;$$

a jeśli ponadto zbiory M_n *są rozłączne, to*

$$\mu(M_1 + M_2 \ldots) = \mu(M_1) + \mu(M_2) + \ldots$$

1.3 Operacje na miarach.

(i) *Niech* $\{a_n\}$ *będzie ciągiem liczb dodatnich, a* $\{\mu_n\}$ *ciągiem miar w* X, *przy czym* $\sum_n a_n \mu_n(X) < \infty$. *Połóżmy* $\mu(B) = \sum_n a_n \mu_n(B)$ *dla każdego* $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$. *Teza:* μ *jest miarą w* X *i przy tym:*

$$\mathbf{M}(\mu) = \prod_n \mathbf{M}(\mu_n) \qquad \mathbf{N}(\mu) = \prod_n \mathbf{N}(\mu_n).$$

Dowody nie nastręczają trudności; zajmiemy się jedynie wykazaniem, że jeżeli $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ to $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$. Istnieją bowiem wówczas zbiory $B_n \varepsilon \mathbf{B}(X)$ i $B_n^* \varepsilon \mathbf{B}(X)$ takie, że

$$B_n \subset E \subset B_n^* \text{ i } \mu_n(B_n) = \mu_n(B_n^*).$$

Kładąc $B = B_1 + B_2 + \ldots$ i $B^* = B_1 B_2 \ldots$, otrzymujemy

$$B \subset E \subset B^* \text{ i } \mu(B) = \mu(B^*),$$

a zatem $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

(ii) *Założenia:* $X \subset Y$; μ *jest miarą w* X; $\nu(B) = \mu(BX)$ *dla każdego* $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$. *Teza:* ν *jest miarą w* Y.

(iii) *Założenia:* $X \varepsilon \mathbf{B}(Y)$; μ *jest miarą w* Y; $\nu = \mu \mid \mathbf{B}(X)$. *Teza:* ν *jest miarą w* X.

Dowody nie przedstawiają żadnych trudności.

Twierdzenie (iii) można uogólnić, jak następuje:

(iv) *Założenia:* $X \subset Y$; μ *jest miarą w* Y; *funkcja* ν *określona jest dla każdego* $A \varepsilon \mathbf{B}(X)$ *wzorem:* $\nu(A) = \inf \mu(B)$, *gdzie* B *przebiega zbiory klasy* $\mathbf{B}(Y)$, *zawierające* A. *Teza:* ν *jest miarą w* X.

Niech więc B będzie sumą ciągu zbiorów rozłącznych $B_n \varepsilon \mathbf{B}(X)$. Istnieje ciąg zbiorów rozłącznych $B_n^* \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ takich, że $B_n^* X = B_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Połóżmy $B^* = B_1^* + B_2^* + \ldots$

Niech będzie $\eta > 0$. Istnieje $B^0 \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ taki, że

$$(*) \qquad B \subset B^0 \subset B^*$$

$$(^*_*) \qquad \nu(B) + \eta > \mu(B^0).$$

Ze względu na (*) mamy $B^0 B_n^* \supset B_n$ a zatem

$$\mu(B^0) = \mu(B^0 B_1^*) + \mu(B^0 B_2^*) + \ldots \geqslant \nu(B_1) + \nu(B_2) + \ldots$$

więc, według ($^*_*$),

$$(^*{}_*{}^*) \qquad \nu(B) + \eta \geqslant \nu(B_1) + \nu(B_2) + \ldots$$

Z drugiej istnieje dla $n = 1,2, \ldots$ zbiór $A_n \supset B_n$ borelowski w Y, taki, że $\mu(A_n) \leqslant \nu(B_n) + \eta/2^n$. Kładąc $A = A_1 + A_2 + \ldots$ otrzymujemy:

$$\nu(B) \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots \leqslant \eta + \nu(B_1) + \nu(B_2) + \ldots,$$

a więc, wobec ($^*{}_*{}^*$) i dowolności liczby $\eta > 0$, mamy

$$\nu(B) = \nu(B_1) + \nu(B_2) + \ldots \qquad \text{c. b. d. o.}$$

1.4 **Miara ciągła.** *Niech μ będzie miarą w X, a D zbiorem jej punktów nieciągłości. Teza:* 1° *Zbiór D jest najwyżej przeliczalny.* 2° *Funkcja, określona dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$ wzorem $\overline{\mu}(B) = \mu(B - D)$ jest miarą ciągłą w X.* 3° $\mathbf{M}(\mu) = \mathbf{M}(\overline{\mu})$.

1° Jest to wniosek z addytywności i skończoności funkcji μ.

2° Funkcja $\overline{\mu}$ jest miarą w X na podstawie 1.3 (iii) oraz 1.3 (ii). Ciągłość jej wynika z definicji zbioru D.

3° Połóżmy $\overline{\overline{\mu}}(B) = \mu(BD)$ dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$. Mamy więc stale:

$$(^*) \qquad \mu(B) = \overline{\mu}(B) + \overline{\overline{\mu}}(B).$$

Funkcja $\overline{\overline{\mu}}$ jest miarą w X (1.3 (ii)). Dla każdego zbioru $E \subset X$ mamy $E = (E - D) + ED$, przyczem $E - D \subset X - D$, a zbiór ED jest najwyżej przeliczalny, a zatem $E - D \varepsilon \mathbf{N}(\overline{\overline{\mu}})$ i $ED \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, skąd: $E \varepsilon \mathbf{M}(\overline{\overline{\mu}})$. Z równości (*) i twierdzenia 1.3 (i) otrzymujemy $\mathbf{M}(\mu) = \mathbf{M}(\overline{\mu})$.

1.5 **Ciągłość jednostajna.** *Niech μ będzie miarą ciągłą w X. Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że jeśli $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$ i $\delta(B) < \eta$ to $\mu(B) < \varepsilon$.*

Dowód tego twierdzenia, prosty w przypadku przestrzeni X zwartej[1]), przeprowadził w przypadku ogólnym p. Saks[2]).

1.6 **Operacja (A).** Niech $u = \{M_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ będzie układem określającym zbiorów mierzalnych względem miary μ, E — jądrem tego układu, a E_ξ $(0 \leqslant \xi < \Omega)$ składowymi zbioru E ze względu na układ u. Hausdorff wykazał (uogólniając twierdzenie Se-

---

[1]) Por. np. Poprougénko [1], th. IV.

[2]) Por. Szpilrajn [5], str. 309.

liwanowskiego i Sierpińskiego dotyczące miary Lebesgue'a) [1]), że

(i) *Jeżeli miara* μ *jest ciągła na* E, *to istnieje liczba* $\alpha < \Omega$ *taka, że* $\mu\left(\sum_{\xi > \alpha} E_\xi\right) = 0$.

Wobec mierzalności względem μ poszczególnych składowych E_ξ, otrzymuje się stąd (przy czym warunek ciągłości może być pominięty dzięki 1.4):

(ii) *Wynik operacji* (A), *wykonanej na zbiorach mierzalnych względem* μ, *jest zbiorem mierzalnym względem* μ.

Ponieważ z definicji mierzalności wynika, że $\mathbf{B}(X) \subset \mathbf{M}(\mu)$, więc z (ii) otrzymujemy:

(iii) *Jeżeli zbiór* A *jest analityczny w* X, *to* $A \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *i* $X - A \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

1.7 **Zbiory mierzalne miary dodatniej.** *Niech* μ *będzie miarą w przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$, *ciągłą na zbiorze* $M \varepsilon \mathbf{M}(\mu) - \mathbf{N}(\mu)$. *Teza*: 1° *M zawiera zbiór doskonały* P. 2° *M zawiera zbiór* $R \,\overline{\varepsilon}\, \mathbf{M}(\mu)$.

Punkt 1° można wzmocnić, jak następuje: 3° *M zawiera zbiór doskonały* $P_0 \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$.

1° Z ciągłości funkcji μ oraz 1.2 (ii) i (iii) wynika, że zbiór M zawiera zbiór borelowski nieprzeliczalny, a więc również zbiór doskonały P.

2° Rozkładamy zbiór M na dwa zbiory całkowicie niedoskonałe. Gdyby były one mierzalne względem μ, to — wobec 1° — jeden z nich musiałby zawierać zbiór doskonały, co dałoby nam sprzeczność.

3° Weźmy pod uwagę zbiór analityczny nieborelowski A zawarty w P. Mamy: $A \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ (1.6 (iii)), a zatem $A = B + N$, gdzie $B \varepsilon \mathbf{B}$, a $N \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ (1.2 (iii)). Zbiór N jest nieprzeliczalnym zbiorem analitycznym, zawiera więc zbiór doskonały P_0. Oczywiście $P_0 \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$ [2]).

---

[1]) Hausdorff [1], str. 242; Sélivanowski [1]; Sierpiński [3]; Szpilrajn [4].

[2]) Dowód powyższy można zmodyfikować, zastępując zbiór analityczny nieborelowski przez zbiór G_δ nie będący F_σ i opierając się na twierdzeniu wysłowionym na str. 43, odsyłacz [2]).

1.8 **Funkcje mierzalne.** Niech μ będzie miarą w X. Funkcja $f(x)$ przekształcająca przestrzeń X na podzbiór przestrzeni Y zwie się *mierzalną względem* μ (symbolicznie: $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$), gdy dla każdego zbioru G otwartego w Y mamy $f^{-1}(G) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$. Wynika stąd łatwo, że

(i) *Jeżeli* $f(X) \subset Y_1$ *i* $f(X) \subset Y_2$, *to relacje:* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y_1)$ *i* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y_2)$ *są równoważne.*

(ii) *Jeżeli* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$ *i* $B \varepsilon \boldsymbol{B}(Y)$, *to* $f^{-1}(B) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

(iii) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *potrzeba i wystarcza by* $c_E \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, \mathcal{I})$.

(iv) *Jeżeli* $f_n \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$ i $f_n \to f$, *to* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$.

(v) *Jeżeli* $f \varepsilon \boldsymbol{B}(X, Y)$, *to* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$.

1.9 **Przekształcenia miar.**

(i) *Niech* μ *będzie miarą w* X, *oraz* $f \varepsilon \boldsymbol{M}(\mu, Y)$. *Teza*: 1° *Funkcja* $\nu(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ *zbioru* $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ *jest miarą w* Y. 2° *Jeżeli* $M \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$, *to* $f^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$.

1° Funkcja ν jest miarą w Y, gdy bowiem B jest sumą zbiorów rozłącznych $B_n \varepsilon \mathbf{B}(Y)$, to

$$\sum_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(B) \qquad f^{-1}(B_j) \cdot f^{-1}(B_k) = 0 \text{ dla } j \neq k$$

i — wobec 1.8 (ii) —

$$f^{-1}(B_n) \varepsilon \mathbf{M}(\mu) \text{ dla } n = 1, 2, \ldots,$$

a więc

$$\sum_n \mu[f^{-1}(B_n)] = \mu[f^{-1}(B)]$$

czyli

$$\sum_n \nu(B_n) = \nu(B).$$

2° Gdy $M \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$, to istnieją zbiory $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ i $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ takie, że

$$B_1 \subset M \subset B_2 \quad \text{i} \quad \nu(B_1) = \nu(B_2).$$

Mamy zatem $f^{-1}(B_1) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ i $f^{-1}(B_2) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, oraz

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(M) \subset f^{-1}(B_2) \quad \text{i} \quad \mu[f^{-1}(B_1)] = \mu[f^{-1}(B_2)],$$

więc, na mocy 1.2 (v), $f^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, c. b. d. o.

Twierdzenie (i) słuszne jest w szczególności dla funkcyj mierzalnych (B) (por. 1.8 (v)); zatem, stosując je dwukrotnie, otrzymujemy:

(ii) *Jeżeli* μ *jest miarą w* X, *a* h *homeomorfizmem uogólnionym przekształcającym* X *w* Y, *to funkcja* $\nu(B) = \mu[h^{-1}(B)]$ *zbioru* $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ *jest miarą w* Y. *Funkcja* h *przeprowadza klasy* $\mathbf{M}(\mu)$ *i* $\mathbf{N}(\mu)$ *odpowiednio w klasy* $\mathbf{M}(\nu)$ *i* $\mathbf{N}(\nu)$.

Ponieważ dla każdej przestrzeni $Z \varepsilon \mathbf{B}$ istnieje homeomorfizm uogólniony h taki, że $h(\mathcal{I}) = Z$ [1]), więc stosując (ii) dla $X = \mathcal{I}$, $Y = Z$, oraz μ = mierze liniowej Lebesgue'a, otrzymujemy:

(iii) *W każdej przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$ *istnieje miara ciągła* μ *taka, że* $\mu(Z) = 1$.

§ 2. ZBIORY I FUNKCJE BEZWZGLĘDNIE MIERZALNE

2.1 **Definicje. Równoważności.** Zbiór $E \subset X$ nazywamy *bezwzględnie mierzalnym w przestrzeni* X (symbolicznie: $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$), gdy jest mierzalny względem każdej miary w X. Zbiór, który jest bezwzględnie mierzalny w każdej zawierającej go przestrzeni, nazywamy *bezwzględnie mierzalnym* (symbolicznie: $E \varepsilon \mathbf{M}$).

Funkcję f przekształcającą przestrzeń X na podzbiór przestrzeni Y nazywamy *bezwzględnie mierzalną na* X (symbolicznie: $f \varepsilon \mathcal{M}(X, Y)$), gdy jest mierzalną względem każdej miary w X.

Z twierdzenia 1.4 (1° i 3°) wynika, że

(i) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$ *potrzeba i wystarcza, by zbiór* E *był mierzalny względem każdej* *c i ą g ł e j* *miary w* X.

Z definicji i twierdzeń 1.8 wynika, że

(ii) *Jeżeli* $f(X) \subset Y_1$ *i* $f(X) \subset Y_2$, *to relacje*: $f \varepsilon \mathcal{M}(X, Y_1)$ *i* $f \varepsilon \mathcal{M}(X, Y_2)$ *są równoważne.*

(iii) *Na to by* $f \varepsilon \mathcal{M}(X, Y)$ *potrzeba i wystarcza, by dla każdego zbioru otwartego* $G \subset Y$, $f^{-1}(G) \varepsilon \mathbf{M}(X)$.

(iv) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$ *potrzeba i wystarcza, by* $c_E \varepsilon \mathcal{M}(X, \mathcal{I})$.

2.2 **Zbiory bezwzględnie mierzalne.** Z twierdzeń 1.2 (iv), 1.6 (ii) oraz 1.6 (iii) otrzymujemy.

---

[1]) K u r a t o w s k i [1], str. 231.

(i) *Jeżeli* $M_n \varepsilon \mathbf{M}(X)$ *dla* $n = 1,2,\ldots$ *to* $M_1 + M_2 + \ldots \varepsilon$ $\mathbf{M}(X)$ *oraz* $M_1 - M_2 \varepsilon \mathbf{M}(X)$.

(ii) *Wynik operacji* (A) *wykonanej na zbiorach bezwzględnie mierzalnych w* X *jest zbiorem bezwzględnie mierzalnym w* X.

(iii) *Jeżeli zbiór* A *jest analityczny w* X, *to* $A \varepsilon \mathbf{M}(X)$ *oraz* $X - A \varepsilon \mathbf{M}(X)$.

2.3 **Zbiory które nie są bezwzględnie mierzalne.**

(i) *Każdy zbiór nieprzeliczalny* $B \varepsilon \mathbf{B}$ *zawiera podzbiór* $R \bar{\varepsilon} \mathbf{M}(B)$.

Z 1.9 (iii) wynika, że istnieje miara ciągła μ w B taka, że $\mu(B) > 0$; z twierdzenia 1.7 (2^0) wynika dalej, że istnieje zbiór $R \subset B$ taki, że $R \bar{\varepsilon} \mathbf{M}(\mu)$, a więc $R \bar{\varepsilon} \mathbf{M}(B)$.

Twierdzenie (i) pozwala rozstrzygnąć następujące pytanie: czy istnieje ciąg miar μ_n (w X) taki, by mierzalność zbioru $E \subset X$ względem wszystkich tych miar pociągała za sobą jego mierzalność bezwzględną?[1]

(ii) *Dla każdego ciągu* $\{\mu_n\}$ *miar w przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$ *istnieje zbiór* $R \subset Z$ *taki, że* $R \bar{\varepsilon} \mathbf{M}$ *i* $R \varepsilon \mathbf{N}(\mu_n)$ *dla* $n = 1,2,\ldots$

Dobierzmy ciąg liczb $a_n > 0$ by $\sum_n a_n \mu_n(Z) < \infty$. Funkcja

$$\mu(B) = \sum_n a_n \mu_n(B)$$

zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(Z)$ jest miarą w Z (1.3 (i)). Rozważmy zbiór D punktów nieciągłości miary μ oraz ciągłą miarę (w Z): $\bar{\mu}(B) = \mu(B - D)$ (por. 1.4).

Z alternatywy: $\bar{\mu}(Z) = 0$ lub $\bar{\mu}(Z) > 0$ oraz z 1.7 (3^0) wynika, że Z zawiera zbiór doskonały $N \varepsilon \mathbf{N}(\bar{\mu})$. W myśl (i) istnieje w zbiorze $N - D$ zbiór $R \bar{\varepsilon} \mathbf{M}$.

Ponieważ $\mu(N - D) = \bar{\mu}(N) = 0$, więc tembardziej $\mu_n(R) = 0$ dla $n = 1,2,\ldots$

2.4 **Funkcje bezwzględnie mierzalne. Przekształcenia zbiorów bezwzględnie mierzalnych.**

(i) *Jeżeli* $f_n \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y)$ *i* $f_n \to f$, *to* $f \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y)$.

(ii) *Jeżeli* $f \varepsilon \mathfrak{B}(X, Y)$, *to* $f \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y)$.

Są to wnioski z definicji 2.1 oraz z twierdzeń 1.8 (iv) i (v).

(iii) *Jeżeli* $f \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y)$ *i* $M \varepsilon \mathbf{M}(Y)$, *to* $f^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(X)$.

---

[1]) Analogiczne pytanie dla warunku Baire'a stawiał Ulam; por. Szpilrajn [6], str. 20.

Niech μ będzie dowolną miarą w X. Dla każdego zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ połóżmy $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ (mamy: $f^{-1}(B) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ na podstawie 1.8 (ii)). Według 1.9 (i) funkcja ν jest miarą w Y. Wobec założenia: $M \varepsilon \mathbf{M}(Y)$, mamy $M \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$, a więc z 1.9 (i) otrzymujemy: $f^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$. Wobec dowolności miary μ, $f^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(X)$, c. b. d. o.

Z twierdzeń (ii) oraz (iii) otrzymujemy:

(iv) *Homeomorfizm uogólniony przekształcający X na Y przeprowadza klasę* $\mathbf{M}(X)$ *w klasę* $\mathbf{M}(Y)$[1].

Z (iii) wynika również twierdzenie o superpozycjach:

(v) *Jeżeli $f \varepsilon \boldsymbol{M}(X, Y)$, $g \varepsilon \boldsymbol{M}(Y, Z)$, to dla funkcji określonej (dla każdego $x \varepsilon X$) wzorem: $h(x) = g[f(x)]$ mamy: $h \varepsilon \boldsymbol{M}(X, Z)$.*

Dla każdego bowiem zbioru G otwartego w Z mamy: $h^{-1}(G) = f^{-1}[g^{-1}(G)]$. Wobec: $g \varepsilon \boldsymbol{M}(Y, Z)$ mamy $g^{-1}(G) \varepsilon \mathbf{M}(Y)$, a więc, wobec $f \varepsilon \boldsymbol{M}(X, Y)$ oraz (iii): $h^{-1}(G) \varepsilon \mathbf{M}(X)$, c. b. d. o.

2.5 Bezwzględna mierzalność w różnych przestrzeniach.

(i) *Jeżeli $Y \subset X$; $E \subset X$ i $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$, to $EY \varepsilon \mathbf{M}(Y)$.*

Niech więc μ będzie miarą w Y. Dla każdego zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$ połóżmy $\nu(B) = \mu(BY)$. Jest to miara w X (por. 1.3 (ii)), a zatem $E \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$. Istnieją więc zbiory $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$, $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ takie, że

$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad \nu(B_1) = \nu(B_2),$$

a więc

$$B_1 Y \subset EY \subset B_2 Y \qquad \mu(B_1 Y) = \mu(B_2 Y).$$

Mamy więc istotnie: $EY \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$, a zatem (wobec dowolności μ) $EY \varepsilon \mathbf{M}(Y)$.

(ii) *Jeżeli $E \subset Y \subset X$ i $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$, to $E \varepsilon \mathbf{M}(Y)$*

Jest to wniosek bezpośredni z twierdzenia (i).

(iii) *Jeżeli $E \subset Y \subset X$, $E \varepsilon \mathbf{M}(Y)$* i *$Y \varepsilon \mathbf{M}(X)$*, to *$E \varepsilon \mathbf{M}(X)$.*

Niech μ bedzie miarą w X. Jeżeli $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ to $B = B_1 Y$, gdzie $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$, a zatem $B \varepsilon \mathbf{M}(X)$. Dla każdego więc zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ możemy położyć $\nu(B) = \mu(B)$. Funkcja ν jest miarą w Y. Istnieją więc dwa zbiory B_1 i B_2 borelowskie w Y, a więc

[1]) Por. 2.5 (v) i 3.5 (iv).

bezwzględnie mierzalne w X takie, że $B_1 \subset E \subset B_2$ i $\nu(B_1) = \nu(B_2)$, a więc $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Z 1.2 (v) wynika, że $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$. Mamy zatem $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$, c. b. d. o.

(iv) *Niech będzie* $E \subset M \varepsilon \mathbf{M}$. *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}$ *potrzeba i wystarcza, by* $E \varepsilon \mathbf{M}(M)$.

Konieczność warunku jest oczywista, udowodnimy więc jego wystarczalność. Niech $E \subset X$; okażemy, że założenia: $E \subset M$; $M \varepsilon \mathbf{M}$; $E \varepsilon \mathbf{M}(M)$ pociągają za sobą $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$.

Oznaczmy przez Z dowolną przestrzeń zupełną zawierającą M; przez Z^* przestrzeń zupełną zawierającą X; przez D domknięcie zbioru E w Z, a przez D^* domknięcie zbioru E w Z^*.

Z (iii) wynika, że $E \varepsilon \mathbf{M}(Z)$, a więc, wobec (ii), $E \varepsilon \mathbf{M}(D)$. Pomiędzy zbiorami D i D^* istnieje — jak łatwo stwierdzić — homeomorfizm przekształcający E w siebie, zatem na mocy 2.4 (iv), $E \varepsilon \mathbf{M}(D^*)$, skąd wynika na podstawie (iii) oraz (ii), że $E \varepsilon \mathbf{M}(Z^*)$ i $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$, c. b. d. o.

Dzięki twierdzeniu (iv) badanie klasy $\mathbf{M}$ redukuje się do badania klas $\mathbf{M}(X)$ dla X będących np. przestrzeniami bezwzględnie borelowskimi. Tak np. otrzymujemy:

(v) *Jeżeli* $X \varepsilon \mathbf{M}$, *a* h *jest homeomorfizmem uogólnionym takim, że* $h(X) = Y$, *to* $Y \varepsilon \mathbf{M}$ [1]).

Homeomorfizm h daje się rozszerzyć na przestrzenie borelowskie $A \supset X$ i $B \supset Y$. Z relacji $X \varepsilon \mathbf{M}$ wynika $X \varepsilon \mathbf{M}(A)$, a więc, na podstawie 2.4 (iv): $Y \varepsilon \mathbf{M}(B)$, skąd, wobec (iv): $Y \varepsilon \mathbf{M}$.

2.6 **Mnożenie kartezjańskie.**

(i) *Jeżeli* $M \varepsilon \mathbf{M}(X)$, *to* $M \times Y \varepsilon \mathbf{M}(X \times Y)$ [2]).

Dla każdego punktu $z = (x, y) \varepsilon X \times Y$ połóżmy $p(z) = x$. Wobec 2.4 (ii) mamy $p \varepsilon \mathbf{M}(X \times Y, X)$ a więc, wobec 2.4 (iii), $p^{-1}(M) \varepsilon \mathbf{M}(X \times Y)$. Ponieważ $p^{-1}(M) = M \times Y$, więc $M \times Y \varepsilon \mathbf{M}(X \times Y)$, c. b. d. o.

(ii) *Niech* $E = E_1 \times E_2 \times \ldots$ *będzie iloczynem kartezjańskim skończonej lub przeliczalnej liczby czynników niepustych, zawartych odpowiednio w przestrzeniach* $X_1, X_2, \ldots$; *niech* $X = X_1 \times X_2 \times \ldots$ *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$ *potrzeba i wystarcza, by stale* $E_n \varepsilon \mathbf{M}(X_n)$.

[1]) Por. 2.4 (iv) i 3.5 (iv).

[2]) Bezpośredni dowód tego twierdzenia podał wcześniej p. Sierpiński.

Konieczność. Niech $x_n \varepsilon E_n$. Rozważmy zbiór
$E_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots = E \cdot [X_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots]$
Ponieważ z założenia $E \varepsilon \mathbf{M}(X)$, więc na podstawie 2.5 (i)
$E_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots \varepsilon \mathbf{M}[X_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots]$
Z 2.4 (iv) wynika więc, że $E_1 \varepsilon \mathbf{M}(X_1)$. Analogicznie: $E_n \varepsilon \mathbf{M}(X_n)$.

Wystarczalność. Z (i) wynika, że

$$[X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times E_k \times X_{k+1} \times \ldots] \varepsilon \mathbf{M}(X).$$

Zatem

$$E = \prod_k [X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times E_k \times X_{k+1} \times \ldots] \varepsilon \mathbf{M}(X).$$

2.7 **Ciągi funkcyj. Wykresy funkcyj. Funkcje dwóch zmiennych.** Z twierdzeń poprzednich wynikają następujące:

(i) *Niech $f(x) = \{f_n(x)\}$ będzie ciągiem (skończonym lub przeliczalnym) funkcyj przekształcających X odpowiednio na podzbiory przestrzeni Y_n. Na to by $f \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y_1 \times Y_2 \times \ldots)$ potrzeba i wystarcza by stale $f_n \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y_n)$.*

(ii) *Jeżeli $f \varepsilon \mathfrak{M}(X, Y)$, a W jest wykresem tej funkcji, to $W \varepsilon \mathbf{M}(X \times Y)$.*

(iii) *Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną dla $x \varepsilon X, y \varepsilon Y$ o wartościach należących do Z. Przypuśćmy, że dla każdego $y_0 \varepsilon Y$ funkcja $\varphi(x) = f(x, y_0)$ jest ciągła, a dla każdego $x_0 \varepsilon X$ funkcja $\psi(y) = f(x_0, y)$ należy do $\mathfrak{M}(Y, Z)$. Teza: $f \varepsilon \mathfrak{M}(X \times Y, Z)$.*

Dla udowodnienia tych twierdzeń wystarczy powtórzyć rozumowania, stosowane często w teorii funkcyj w przestrzeniach metrycznych [1]).

§ 3. ZBIORY BEZWZGLĘDNIE ZEROWE

3.1 **Definicja. Równoważności.** Zbiór N nazywamy *bezwzględnie zerowym* (symbolicznie: $N \varepsilon \mathbf{N}$), gdy każda ciągła miara w każdej przestrzeni $X \supset N$ znika na N.

(i) *Niech $N \subset X$. Następujące warunki są równoważne między sobą:*

(o) $N \varepsilon \mathbf{N}$;

(α) *każda ciągła miara w X znika na N;*

---

[1]) Por. Kuratowski [1], str. 182, 183, 180.

(β) *każda ciągła miara w N znika na N;*
(γ) *jeżeli $E \subset N$, to $E \in \mathbf{M}$;*
(δ) *N jest zbiorem całkowicie niedoskonałym i $N \in \mathbf{M}$.*

Wykażemy kolejno, że (o) $\to$ (α) $\to$ (β) $\to$ (o) oraz (o) $\to$ (γ) $\to$ $\to$ (δ) $\to$ (o).

1° (o) $\to$ (α). Bezpośredni wniosek z definicji.

2° (α) $\to$ (β). Zakładamy, że N spełnia (α). Niech μ będzie dowolną ciągłą miarą w N. Funkcja $\nu(B) = \mu(BN)$ zbioru $B \in \mathbf{B}(X)$ jest ciągłą miarą w X (1.3 (ii)).

Zatem $N \in \mathbf{N}(\nu)$; istnieje więc zbiór $B_0 \in \mathbf{B}(X) . \mathbf{N}(\nu)$, zawierający N (1.2 (i)), a więc $\mu(N) = \mu(B_0 N) = \nu(B_0) = 0$.

3° (β) $\to$ (o). Zakładamy, że N spełnia (β). Niech Y będzie dowolną przestrzenią zawierającą N, a μ ciągłą miarą w Y. Funkcja zbioru $A \in \mathbf{B}(N)$ określona wzorem: $\nu(A) = inf\ \mu(B)$, gdzie B przebiega zbiory $B \in \mathbf{B}(Y)$ zawierające A, jest miarą w N (1.3 (iv)). Mamy więc $N \in \mathbf{N}(\nu)$. Wynika stąd łatwo, że istnieje zbiór $B_0 \in \mathbf{B}(Y) . \mathbf{N}(\mu)$, zawierający N, skąd wynika, że $N \in \mathbf{N}(\mu)$.

4° (o) $\to$ (γ). Niech będzie $N \subset Z \in \mathbf{B}$; $N \in \mathbf{N}$; $E \subset N$. Dla każdej ciągłej miary μ w Z mamy $N \in \mathbf{N}(\mu)$, a więc $E \in \mathbf{N}(\mu)$. Wobec dowolności miary ciągłej μ, z 2.1 (i) wynika, że $E \in \mathbf{M}(Z)$, a więc, wobec 2.5 (iv), $E \in \mathbf{M}$.

5° (γ) $\to$ (δ). Bezpośredni wniosek z 2.3 (i).

6° (δ) $\to$ (o). Niech N będzie zbiorem spełniającym (δ); $N \subset Z \in \mathbf{B}$. Niech μ będzie dowolną miarą ciągłą w Z. Ponieważ każdy zbiór $M \in \mathbf{M}(\mu) - \mathbf{N}(\mu)$ zawiera podzbiór doskonały (1.7 (1°)), więc $N \in \mathbf{N}(\mu)$. — Zbiór N spełnia zatem warunek (α) w przestrzeni Z, a ponieważ wykazaliśmy już (2° i 3°), że dla każdej przestrzeni X warunek (α) w przestrzeni X pociąga warunek (o), więc istotnie (δ) $\to$ (o).

3.2 **Podzbiory. Dodawanie.** Z 3.1 (i) wynika bezpośrednio (np. przez zastosowanie warunku (α) lub (γ)), że

(i) *Jeżeli $E_2 \subset E_1$ i $E_1 \in \mathbf{N}$ to $E_2 \in \mathbf{N}$.*
(ii) *Jeżeli $E_n \in \mathbf{N}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ to $E_1 + E_2 + \ldots \in \mathbf{N}$.*
(iii) *Jeżeli $\overline{\overline{E}} < \aleph_0$, to $E \in \mathbf{N}$.*

3.3 **Zbiór nieprzeliczalny bezwzględnie zerowy.** Wybierając po jednym punkcie z niepustych składowych zbioru analitycznego nieborelowskiego, umieszczonego w przestrzeni $Z \varepsilon \mathbf{B}$ otrzymujemy w myśl 1.6 (i) zbiór $N \varepsilon \mathbf{N}$ mocy $\aleph_1$. Mamy więc

(i) *W każdej przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$ *istnieje zbiór* $N \varepsilon \mathbf{N}$ *mocy* $\aleph_1$ [1]).

Z twierdzenia tego oraz 3.2 (i) wynika, że

(ii) *W każdej przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$ *istnieje conajmniej* $2^{\aleph_1}$ *zbiorów* $N \varepsilon \mathbf{N}$.

3·4 **Zagadnienie miary** [2]). Twierdzenie 3.3 (i) pozwala przeprowadzić łatwy dowód twierdzenia Banacha-Kuratowskiego-Ulama o. t. zw. *ogólnym zagadnieniu miary*.

Rozważajmy następującą własność zbioru N:

(ν) Każda funkcja nieujemna, skończona, przeliczalnie addytywna i ciągła, określona dla wszystkich podzbiorów zbioru N, znika tożsamościowo.

Własność ta ma sens dla wszelkich zbiorów N (nietylko metrycznych) i jest niezmiennikiem przekształceń wzajemnie jednoznacznych.

Z drugiej strony własność (β) (sformułowana w twierdzeniu 3.1 (i)) pociąga za sobą własność (ν). Zatem

(i) *Jeżeli w pewnej przestrzeni istnieje zbiór* $N \varepsilon \mathbf{N}$ *mocy* $\mathfrak{n}$, *to każdy zbiór tej mocy posiada własność* (ν).

Z (i) oraz 3.3 (i) otrzymujemy więc twierdzenie Banacha—Kuratowskiego—Ulama:

(ii) *Każdy zbiór mocy* $\aleph_1$ *posiada własność* (ν).

3.5 **Przekształcenia.**

(i) *Niech będzie* $f \varepsilon \mathbf{M}(N, Y)$; $f(N) \varepsilon \mathbf{N}$. *Na to by* $N \varepsilon \mathbf{N}$ *potrzeba i wystarcza by* $f^{-1}(y) \varepsilon \mathbf{N}$ *dla każdego* $y \varepsilon f(N)$.

Konieczność tego warunku jest oczywista; udowodnimy więc jego wystarczalność. Niech μ będzie miarą ciągłą w N. Połóżmy $N^* = f(N)$. Dla każdego zbioru $B \varepsilon \mathbf{B}(Y)$ mamy $f^{-1}(B) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ (1.8 (ii)). Możemy więc położyć $\nu(B) = \mu[f^{-1}(B)]$, otrzymując miarę w N^* (1.9 (i)). Jest ona ciągła, bo dla każdego $y \varepsilon N^*$:

$$\nu((y)) = \mu[f^{-1}(y)] \quad \text{i} \quad f^{-1}(y) \varepsilon \mathbf{N}.$$

---

[1]) Wynik p. Sierpińskiego. Por. str. 40, odsyłacz [4]).

[2]) Por. Sierpiński—Szpilrajn [1].

Ponieważ z założenia $N^* \varepsilon \mathbf{N}$, więc

$$0 = \nu(N^*) = \mu[f^{-1}(N^*)] = \mu(N),$$

a zatem $\mu(N) = 0$. Wobec dowolności μ, mamy $N \varepsilon \mathbf{N}$, c. b. d. o.

Jako wniosek z (i) otrzymujemy

(ii) *Własność: $N \varepsilon \mathbf{N}$ jest niezmiennikiem przekształceń wzajemnie jednoznacznych, których odwrócenia są mierzalne* (B)[1]).

Wynika stąd łatwo, że

(iii) *Każdy zbiór E mocy $\aleph_1$ jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznacznym pewnego zbioru $N \varepsilon \mathbf{N}$*[21]).

Bowiem przekształcenie wzajemnie jednoznaczne dowolnego zbioru E_0 na zbiór E jest superpozycją przekształcenia wzajemnie jednoznacznego φ, którego odwrócenie jest ciągłe i przekształcenia wzajemnie jednoznacznego ciągłego[2]). Wystarczy więc wziąć $E_0 \varepsilon \mathbf{N}$ mocy $\aleph_1$ i położyć $N = \varphi(E_0)$.

Z (iii) oraz z istnienia zbiorów $R \,\bar{\varepsilon}\, \mathbf{M}$ (2.3 (i)) wynika, że

(iv) *Jeżeli $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, to własności: $E \varepsilon \mathbf{N}$ oraz $E \varepsilon \mathbf{M}$ nie zachowują się przy przekształceniach ciągłych wzajemnie jednoznacznych.*

3.6 **Mnożenie kartezjańskie**. *Niech $E_1 \neq 0 \neq E_2$. Na to by $E_1 \times E_2 \varepsilon \mathbf{N}$ potrzeba i wystarcza, by $E_1 \varepsilon \mathbf{N}$ i $E_2 \varepsilon \mathbf{N}$.*

Konieczność. Niech $p \varepsilon E_2$. Jeżeli $E_1 \times E_2 \varepsilon \mathbf{N}$, to $E_1 \times (p) \varepsilon \mathbf{N}$, a więc również $E_1 \varepsilon \mathbf{N}$ (bo zbiory E_1 i $E_1 \times (p)$ są izometryczne). Podobnie: $E_2 \varepsilon \mathbf{N}$.

Wystarczalność. Dla każdego $z = (x, y) \varepsilon E_1 \times E_2$ połóżmy $p(z) = x$. Funkcja p jest ciągła, a więc $p \varepsilon \mathbf{M}(E_1 \times E_2, E_1)$. Dla każdego $x \varepsilon E_1$ mamy $p^{-1}(x) = (x) \times E_2 \varepsilon \mathbf{N}$ i $p(E_1 \times E_2) = E_1 \varepsilon \mathbf{N}$, a więc w myśl 3.5 (i) również $E_1 \times E_2 \varepsilon \mathbf{N}$.

Twierdzenie powyższe nie uogólnia się na iloczyny kartezjańskie przeliczalne. Istotnie, dla zbioru E złożonego z dwóch punktów, zbiór $E \times E \times \ldots$ jest homeomorficzny ze zbiorem doskonałym Cantora, który wobec 3.1 (i) (warunek (δ)) nie jest zbiorem bezwzględnie zerowym.

---

[1]) Por. Sierpiński—Szpilrajn [1], str. 260—261.

[2]) Sierpiński—Szpilrajn [2], str. 290.

§ 4 TWIERDZENIE O RÓWNOWAŻNOŚCI MIAR. WNIOSKI DLA ZBIORÓW BEZWZGLĘDNIE MIERZALNYCH

4.1 Równoważność miar ciągłych.

(i) *Niech* μ *będzie ciągłą miarą w* $\mathcal{I}$ *taką, że* $\mu(\mathcal{I}) = 1$: *Teza*: *Istnieje homeomorfizm uogólniony* φ *taki, że* $\varphi(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ *i że dla każdego* $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I})$ *mamy* $m[\varphi(B)] = \mu(B)$. *W przypadku, gdy* μ *nie znika na żadnym odcinku, otrzymujemy jako* φ *homeomorfizm zwykły.*

Połóżmy $f(x) = \mu([0, x])$ dla każdego $x \varepsilon \mathcal{I}$. Wobec jednostajnej ciągłości miary μ (1.5), funkcja f jest ciągła.

Połóżmy dalej $\nu(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I})$. W myśl 1.9 (i) funkcja ν jest miarą w $\mathcal{I}$. Z definicji f i ν wynika łatwo, że dla każdego przedziału $G \subset \mathcal{I}$, a więc również dla każdego zbioru G otwartego w $\mathcal{I}$ mamy

$$(*) \qquad \nu(G) = m(G).$$

Niech teraz będzie $A \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I})$. Wobec (*) mamy oczywiście

$$\left({}^{*}_{*}\right) \qquad m(A) = \inf m(G) = \inf \nu(G),$$

gdzie G przebiega wszystkie zbiory otwarte w $\mathcal{I}$, zawierające A. Ponieważ z inkluzji: $G \supset A$ wynika: $\nu(G) \geqslant \nu(A)$, więc z $\left({}^{*}_{*}\right)$ otrzymujemy: $m(A) \geqslant \nu(A)$.

Dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I})$ mamy więc jednocześnie:

$$m(B) \geqslant \nu(B) \qquad m(\mathcal{I} - B) \geqslant \nu(\mathcal{I} - B)$$
$$m(B) + m(\mathcal{I} - B) = 1$$
$$\nu(B) + \nu(\mathcal{I} - B) = 1$$

a zatem $m(B) = \nu(B)$. Według definicji ν mamy więc stale

$$({}^{*}{}_{*}{}^{*}) \qquad m(B) = \mu[f^{-1}(B)] \quad \text{dla} \quad B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I}).$$

Gdy miara μ nie znika na żadnym odcinku, funkcja f jest rosnąca, a zatem jest homeomorfizmem. Druga część twierdzenia została w ten sposób udowodniona.

Weźmy teraz pod uwagę sumę W wszystkich przedziałów stałości funkcji f, wraz z ich lewymi krańcami, natomiast bez krańców prawych; mamy oczywiście: $\mu(W) = 0$. Połóżmy $V = \mathcal{I} - W$ oraz $g = f \mid V$. Funkcja g jest różnowartościową, przy czym $g(V) = \mathcal{I}$.

Udowodnimy, że

$$(+) \qquad m(B) = \mu[g^{-1}(B)] \quad \text{dla} \quad B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I}).$$

Istotnie, z inkluzyj:

$$g^{-1}(B) \subset f^{-1}(B) \subset g^{-1}(B) + W$$

i z równości:

$$\mu[g^{-1}(B)] = \mu[g^{-1}(B) + W]$$

otrzymujemy: $\mu[g^{-1}(B)] = \mu[f^{-1}(B)]$, co, wobec $({}^{*}_{*}{}^{*})$, daje nam wzór $(^{+})$.

Ponieważ $\mu(W) = 0$, więc $\mu(V) = 1$; zbiór V zawiera więc zbiór doskonały N taki że $\mu(N) = 0$ (1.7 (3°)). Połóżmy $N^* = g(N)$. Funkcja g jest ciągła i różnowartościowa na N, zatem zbiór N^* jest również zbiorem doskonałym. Z równości $(^{+})$ wynika więc, że

$$(\substack{+\\+}) \qquad m(N^*) = \mu(N) = 0.$$

Pomiędzy każdymi zbiorami borelowskimi nieprzeliczalnymi istnieje homeomorfizm uogólniony [1]; niech więc ψ będzie przekształceniem przez homeomorfizm uogólniony zbioru $N + W$ na zbiór N^*. Określmy dalej przekształcenie φ jak następuje:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{dla } x \varepsilon N + W \\ g(x) & \text{dla } x \varepsilon V - N. \end{cases}$$

Przekształcenie φ jest istotnie homeomorfizmem uogólnionym przekształcającym zbiór $N + W$ na zbiór N^*, a zbiór $V - N$ na zbiór $\mathcal{I} - N^*$, a zatem przedział $\mathcal{I}$ na siebie.

Pozostaje do okazania, że dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{I})$ mamy

$$(\substack{+\,+\\+}) \qquad m(B) = \mu[\varphi^{-1}(B)].$$

Z $(\substack{+\\+})$ wynika, że

$$\mu[\varphi^{-1}(B)] = \mu[\varphi^{-1}(B - N^*)] + \mu[\varphi^{-1}(BN^*)] =$$
$$= \mu[\varphi^{-1}(B - N^*)] + \mu[\varphi^{-1}(B) \,.\, N] = \mu[\varphi^{-1}(B - N^*)].$$

Dla każdego zbioru $E \subset \mathcal{I} - N^*$ mamy $\varphi^{-1}(E) = g^{-1}(E)$, a zatem, na podstawie $(^{+})$ i $(\substack{+\\+})$,

$$\mu[\varphi^{-1}(B)] = \mu[g^{-1}(B - N^*)] = m(B - N^*) = m(B).$$

Wzór $(\substack{+\,+\\+})$ został więc udowodniony.

Ponieważ każda przestrzeń $Z \varepsilon \mathbf{B}$ daje się odwzorować przez homeomorfizm uogólniony na odcinek $\mathcal{I}$ [2], przy czym każda miara w tej przestrzeni zostaje w ten sposób przeprowadzona na miarę w $\mathcal{I}$ i naodwrót (1.9 (ii)), więc z twierdzenia (i) wynika:

(ii) *Dla każdych dwóch miar ciągłych: μ w przestrzeni $A \varepsilon \mathbf{B}$ i ν w przestrzeni $B \varepsilon \mathbf{B}$, takich że $\mu(A) = \nu(B)$, istnieje homeomorfizm uogólniony φ taki, że $\varphi(A) = B$ i $\mu(E) = \nu(\varphi(E))$ dla każdego $E \varepsilon \mathbf{B}(A)$.*

---

[1]) Por. Kuratowski [1], str. 231.

[2]) Por. Kuratowski [1], str. 231.

4.2 **Zbiory bezwzględnie mierzalne i bezwzględnie zerowe.**

(i) *Niech* μ *będzie miarą ciągłą w przestrzeni* $Z \varepsilon \mathbf{B}$, *przy czym* $\mu(Z) > 0$. *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}$ *resp.* $E \varepsilon \mathbf{N}$ *potrzeba i wystarcza, by dla każdego homeomorfizmu uogólnionego* φ *takiego, że* $\varphi(E) \subset Z$, *zachodziła relacja:* $\varphi(E) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ *resp.* $\varphi(E) \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$.

Konieczność warunku wynika z 2.5 (v) resp. 3.5 (ii).

Wystarczalność. Niech będzie $E \subset Y \varepsilon \mathbf{B}$, a ν miarą ciągłą w Y. Możemy założyć bez szkody dla ogólności, że $\nu(Y) = \mu(Z)$. W myśl 4.1 (ii) istnieje więc homeomorfizm uogólniony φ pomiędzy Y a X, taki że

$$(*) \qquad \mu[\varphi(B)] = \nu(B) \quad \text{dla} \quad B \varepsilon \mathbf{B}(Y).$$

Z założenia $\varphi(E) \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ resp. $\varphi(E) \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$. Z równości (*) wynika więc, że $E \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$ resp. $E \varepsilon \mathbf{N}(\nu)$ (1.9 (ii)).

Wobec dowolności miary ciągłej ν, mamy $E \varepsilon \mathbf{M}$ (2.1 (i), oraz 2.5 (iv)), resp. $E \varepsilon \mathbf{N}$ (3.1 (i)).

Z (i) wynika w szczególności, że

(ii) *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}$ *resp.* $E \varepsilon \mathbf{N}$ *potrzeba i wystarcza, by każdy obraz zbioru* E, *zawarty w* $\mathcal{J}^n$, *otrzymany przez homeomorfizm uogólniony, był mierzalny* (L) *resp. miary Lebesgue'a zero.*

Dla zbiorów liniowych twierdzenie to można zmodyfikować:

(iii) *Niech* $E \subset \mathcal{J}$. *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}$ *resp.* $E \varepsilon \mathbf{N}$ *potrzeba i wystarcza, by każdy obraz homeomorficzny zbioru* E *zawarty w* $\mathcal{J}$ *był mierzalny* (L) *resp. miary* (*Lebesgue'a*) *zero*[1]).

Konieczność warunku wynika z (ii), przejdźmy więc do wystarczalności. Niech μ będzie miarą ciągłą w $\mathcal{J}$. Bez szkody dla ogólności możemy założyć $\mu(\mathcal{J}) = 1$. Położmy:

$$(\ast\ast) \qquad \nu(B) = \frac{1}{2}[\mu(B) + m(B)] \quad \text{dla} \quad B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{J}).$$

ν jest miarą w $\mathcal{J}$ na podstawie 1.3 (i), przy tym ciągłą i nieznikającą na żadnym odcinku $\subset \mathcal{J}$. W myśl 4.1 (i) istnieje homeomorfizm h taki, że $h(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ i $\nu[h(B)] = m(B)$ dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(\mathcal{J})$. Zbiór $h(E)$ jest z założenia mierzalny (L) resp. miary (Lebesgue'a) zero, a więc $E \varepsilon \mathbf{M}(\nu)$ resp. $E \varepsilon \mathbf{N}(\nu)$ (1.8 (ii)).

---

[1]) Por. wstęp, str. 40. — Zbiór nieprzeliczalny, którego każdy liniowy obraz homeomorficzny jest miary (Lebesgue'a) zero, podał po raz pierwszy p. Sierpiński, [2].

Z (⁂) i 1.3 (i) wynika, że tym bardziej $E \varepsilon \mathbf{M}(\mu)$ resp. $E \varepsilon \mathbf{N}(\mu)$. Wobec dowolności miary ciągłej μ, otrzymujemy: $E \varepsilon \mathbf{M}$ resp. $E \varepsilon \mathbf{N}$.

§ 5. ZESTAWIENIE BEZWZGLĘDNEJ MIERZALNOŚCI Z INNYMI WŁASNOŚCIAMI ZBIORÓW

5.1 **Rzutowość.** Niech będzie przestrzeń $Z \varepsilon \mathbf{B}$. Z hipotezy continuum i twierdzenia 3.3 (ii) wynika odrazu, że istnieją w Z zbiory bezwzględnie mierzalne, które nie są rzutowe.

Zagadnienie odwrotne nastręcza trudności znacznie poważniejsze. Wiąże się ono ściśle z zagadnieniem mierzalności (L) zbiorów rzutowych. Udowodnimy mianowicie, że

(i) *Jeżeli wszystkie zbiory rzutowe w przestrzeni $Z \varepsilon \mathbf{B}$ są mierzalne względem pewnej ciągłej miary μ w Z, to wszelkie zbiory rzutowe są bezwzględnie mierzalne.*

Oznaczmy tę miarę przez μ, a przez R dowolny podzbiór rzutowy przestrzeni $Y \varepsilon \mathbf{B}$. Każdy jego obraz w Z, otrzymany przez homeomorfizm uogólniony, jest również zbiorem rzutowym [1]), a więc — w myśl założenia — mierzalnym względem μ. Z 4.2 (i) wynika, że będzie wówczas $R \varepsilon \mathbf{M}$.

Z (i) otrzymujemy natychmiast:

(ii) *Zagadnienie mierzalności bezwzględnej zbiorów rzutowych jest równoważne zagadnieniu mierzalności (L) podzbiorów rzutowych odcinka $\mathcal{I}$.*

Istotnie, jeśli każdy zbiór rzutowy $R \subset \mathcal{I}$ jest mierzalny (L), to — według (i) — każdy zbiór rzutowy jest bezwzględnie mierzalny; naodwrót zaś, jeśli każdy zbiór rzutowy jest bezwzględnie mierzalny, to w szczególności każdy zbiór rzutowy $R \subset \mathcal{I}$ jest mierzalny (L).

5.2 **Własność** (C). Rozważmy następującą własność zbioru E:

(C) Dla każdego ciągu liczb $a_n > 0$ istnieje rozkład $E = E_1 + E_2 + \ldots$ taki, że $\delta(E_n) < a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ [2]).

(i) *Jeżeli E posiada własność (C), to $E \varepsilon \mathbf{N}$* [3]).

---

[1]) Sierpiński [4], str. 273.

[2]) Por. Sierpiński [1], str. 37; Szpilrajn [1], [5]; Mazurkiewicz—Szpilrajn [1], str. 308.

[3]) Wynik p. Poprużenki; por. Szpilrajn [5], str. 311.

Niech więc μ będzie dowolną miarą ciągłą w E i niech $\eta > 0$. Z twierdzenia o jednostajnej ciągłości (1.5) wynika, że dla każdego n naturalnego istnieje liczba $a_n > 0$ taka, że jeśli $\delta(A) < a_n$ i $A \varepsilon \mathbf{B}(E)$, to $\mu(A) < \eta/2^n$. Z własności (C) wynika, że istnieje rozkład $E = E_1 + E_2 + \ldots$ taki, że $\delta(E_n) < a_n$. Dla każdego n naturalnego znaleźć można zbiór $G_n \supset E_n$, otwarty w E, taki, że nadal $\delta(G_n) < a_n$. Mamy więc $\mu(E) \leqslant \mu(G_1) + \mu(G_2) + \ldots < \eta$. Ponieważ η było dowolną liczbą > 0, więc $\mu(E) = 0$, c. b. d. o.

Wiadomo z drugiej strony, że z hipotezy continuum wynika istnienie zbioru liniowego o własności (C), którego kwadrat kartezjański własności (C) nie posiada, a nawet jest miary liniowej dodatniej [1]). Z (i) oraz 3.6 otrzymujemy w ten sposób:

(ii) *Jeżeli* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, *to istnieje w* $\mathcal{J}^2$ *zbiór* $E \varepsilon \mathbf{N}$ *o mierze liniowej dodatniej* (*a więc nie posiadający własności* (C)) [2]).

5.3 **Kategoria i własność Baire'a.** Jak wiadomo, z hipotezy continuum wynika istnienie zbioru liniowego o własności (C), nieposiadającego własności Baire'a (t. zw. zbiór Łuzina); z drugiej strony z hipotezy tej wynika również istnienie zbioru zawsze I kategorii, który nie jest mierzalny (L) (t. zw. zbiór o własności (S) Sierpińskiego) [3]). Mamy więc dwa dwoiste twierdzenia:

(i) *Jeżeli* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ *to istnieje zbiór liniowy bezwzględnie zerowy, który nie posiada własności Baire'a* (*a więc nie jest zawsze I kategorii*).

(ii) *Jeżeli* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, *to istnieje zbiór liniowy zawsze I kategorii, który nie jest mierzalny* (L) (*a więc nie jest bezwzględnie zerowy*).

5.4 **Własności** (s) **i** (s_0) [4]). Mówimy, że zbiór $E \subset Z \varepsilon \mathbf{B}$ posiada *własność* (s), gdy każdy zbiór doskonały $P \subset Z$ zawiera zbiór doskonały D taki, że $DE = 0$ lub $D \subset E$. Zbiór posiada *własność* (s_0), gdy każdy jego podzbiór posiada własność (s).

(i) *Jeżeli* $M \varepsilon \mathbf{M}$, *to* M *posiada własność* (s).

---

[1]) Sierpiński [5].

[2]) Rezultat otrzymamy został na innej drodze w pracy: Mazurkiewicz—Szpilrajn [1], str. 308. Por. niżej 5.5.

[3]) Por. np. Sierpiński [1], str. 37 i 81.

[4]) Szpilrajn [6].

Niech $Z \varepsilon \mathbf{B}$ będzie przestrzenią zawierającą M, a P jej podzbiorem doskonałym. W myśl 1.9 (iii) istnieje ciągła miara μ w P taka, że $\mu(P) = 1$. Oczywiście $P - M \varepsilon \mathbf{M}$ i $PM \varepsilon \mathbf{M}$, przy czym $\mu(P - M) > 0$ lub $\mu(PM) > 0$, a więc — wobec 1.7 (1°) — jeden z tych dwóch zbiorów zawiera żądany podzbiór doskonały D.

Twierdzenie (i) daje nam odrazu:

(ii) *Jeżeli* $N \varepsilon \mathbf{N}$, *to* N *posiada własność* (s_0).

Ponieważ każdy zbiór zawsze I kategorii ma własność (s_0) [1]) więc z hipotezy continuum i 5.3 (ii) wynika niemożność odwrócenia twierdzeń (i) i (ii).

5.5 **Wymiar** [2]). Jak udowodnił Hilgers [3]), każdy zbiór liniowy mocy $\mathfrak{c}$ jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznacznym pewnego zbioru n wymiarowego umieszczonego w $\mathcal{E}^{n+1}$ (jako też pewnego zbioru przeliczalnie wymiarowego — w $\mathcal{H}_0$ oraz nieprzeliczalnie wymiarowego — w $\mathcal{H}$). Ponieważ klasa $\mathbf{N}$ jest niezmiennikiem przekształceń wzajemnie jednoznacznych, których odwrócenia są ciągłe (3.5 (ii)), ponieważ dalej istnieje zbiór liniowy $N \varepsilon \mathbf{N}$ mocy $\aleph_1$ (3.3 (i)), więc

(i) *Jeżeli* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, *to istnieje zbiór n-wymiarowy w przestrzeni* $\mathcal{E}^{n+1}$ *(oraz zbiór przeliczalnie wymiarowy — w* $\mathcal{H}_0$ *i zbiór nieprzeliczalnie wymiarowy w* $\mathcal{H}$*), który jest bezwzględnie zerowy.*

Ponieważ każdy zbiór o własności (C) ma wymiar 0 [4]), więc otrzymujemy z (i) inny przykład zbioru bezwzględnie zerowego, który nie posiada własności (C) (por. 5.2).

Hurewicz udowodnił przy pomocy hipotezy continuum, że istnieje w $\mathcal{H}$ zbiór nieprzeliczalny W o następującej własności: (H) Każdy podzbiór 0-wymiarowy zbioru W jest najwyżej przeliczalny (czyli: każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru W jest nieprzeliczalnie wymiarowy) [5]). Łatwo można wykazać, że

(ii) *Dla każdej miary* μ *w* X *istnieje rozkład* $X = N + Q$ *gdzie* $\mu(N) = 0$ *oraz* $\dim(Q) = 0$.

Z (ii) wynika natychmiast, że

(iii) *Każdy zbiór o własności (H) jest bezwzględnie zerowy* [6]).

Otrzymujemy w ten sposób (również przy pomocy hipotezy continuum) inny przykład nieprzeliczalnie wymiarowego zbioru bezwzględnie zerowego.

---

[1]) Szpilrajn [6], str. 31.

[2]) Por. Mazurkiewicz — Szpilrajn [1], str. 308.

[3]) Hilgers [1].

[4]) Szpilrajn [7], str. 85.

[5]) Hurewicz [2].

[6]) Analogicznie wykazał Hausdorff, że zbiór o własności (H) jest zawsze I kategorii, Fund. Math. 27 (1936), str. 293.

§ 6. FUNKCJE CARATHEODORY'EGO I ZBIORY BEZWZGLĘDNIE MIERZALNE

6.1 **Funkcja Carathéodory'ego** [1]). Funkcję przyporządkowującą każdemu zbiorowi $E \subset X$ liczbę $\mu^*(E) \geqslant 0$ (skończoną, lub równą $+\infty$) nazywamy *funkcją Carathéodory'ego w* X, gdy spełnia warunki:

(1) Jeżeli $E_1 \subset E_2$, to $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$.

(2) $\mu^*(E_1 + E_2 + \ldots) \leqslant \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \ldots$

(3) Jeżeli $\rho(E_1, E_2) > 0$, to $\mu^*(E_1 + E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$.

Zbiór $M \subset X$ nazywa się *mierzalnym względem* μ^* (symbolicznie: $M \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$), gdy dla każdego zbioru $E \subset X$ mamy $\mu^*(E) = \mu(EM) + \mu^*(E - M)$ (z warunku (2) wynika, że można ograniczyć się do rozważania przypadku $\mu^*(E) < \infty$).

Dla funkcyj Carathéodory'ego w X zachodzą twierdzenia:

(i) *Jeżeli* $M_n \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ to $M_1 + M_2 + \ldots \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ i $M_1 - M_2 \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$.

(ii) $\mathbf{B}(X) \subset \mathbf{M}^*(\mu^*)$. *Jeżeli* $\mu^*(N) = 0$, *to* $N \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$.

(iii) *Funkcja* μ^* *jest przeliczalnie addytywna w klasie* $\mathbf{M}^*(\mu^*)$.

(iv) *Jeżeli* $A \subset X$ *i* μ^* *jest funkcją Carathéodory'ego w* X, *to funkcja* $\nu^*(E) = \mu^*(AE)$ (*określona dla każdego* $E \subset X$) *jest funkcją Carathéodory'ego w* X.

(v) *Jeżeli* $Y \subset X$ *i* μ^* *jest funkcją Carathéodory'ego w* X, *to funkcja* $\mu^*(E)$, *rozważana wyłącznie dla* $E \subset Y$, *jest funkcją Carathéodory'ego w* Y.

6.2 **Miara zewnętrzna**. Rozważajmy skończone funkcje Carathéodory'ego w X, t. j. spełniające warunki (1), (2), (3) oraz

(4) $\mu^*(X) < \infty$.

Funkcję taką nazwiemy *miarą zewnętrzną w* X, gdy spełnia ponadto warunek:

(5) Dla każdego zbioru $E \subset X$ istnieje nadzbiór $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$ taki, że $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.

(i) *Niech* μ^* *będzie miarą zewnętrzną* w X. *Na to by* $E \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ *potrzeba i wystarcza, by istniały zbiory* $B_1 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ *i* $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ *takie, że*

$$(*) \qquad B_1 \subset E \subset B_2 \quad i \quad \mu^*(B_1) = \mu^*(B_2).$$

---

[1]) Por. Carathéodory [1], Kap. V; Saks [1], chap. II.

Konieczność. Niech będzie $E \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$. Istnieją więc zbiory $B_1' \varepsilon \mathbf{B}(X)$, $B_2 \varepsilon \mathbf{B}(X)$ takie, że

$B_1' \supset X - E$ oraz $\mu^*(B_1') = \mu^*(X - E) = \mu^*(X) - \mu^*(E)$.

$B_2 \supset E$ oraz $\mu^*(B_2) = \mu^*(E)$.

Kładziemy $B_1 = X - B_1'$. Mamy więc

$B_1 \subset E$ oraz $\mu^*(B_1) = \mu^*(X) - \mu^*(B_1') = \mu^*(E)$.

Wystarczalność. Z (*) wynika, że $\mu^*(B_2 - B_1) = 0$, zatem $\mu^*(E - \mathrm{B}_1) = 0$, co, wobec równości $E = B_1 + (E - B_1)$, daje nam mierzalność zbioru E.

(ii) *Dwie miary zewnętrzne (w X): μ^* i ν^*, równe dla zbiorów borelowskich (w X), są identyczne.*

Jest to łatwy wniosek z warunku (5).

Zaznaczmy, że każda miara zewnętrzna μ^* w X spełnia warunek:

(5′) Dla każdego zbioru $E \subset X$ mamy: $\mu^*(E) = inf\ \mu^*(G)$, gdzie G przebiega otwarte w X nadzbiory zbioru E;

skąd wynika natychmiast, że dla każdego $E \subset X$ istnieje nadzbiór H będący zbiorem G_δ w X taki że $\mu^*(E) = \mu^*(H)$. (W ten sposób klasa miar zewnętrznych w X pokrywa się z klasą skończonych *Inhaltsfunktionen* w znaczeniu Hahna [1]).

Dla dowodu warunku (5′) połóżmy

$$(\ast\ast) \qquad \nu^*(E) = inf\ \mu^*(G)$$

gdzie G przebiega otwarte w X nadzbiory zbioru E. Sprawdza się bez trudności, że ν^* jest miarą zewnętrzną w X, przy czym

$$\nu^*(E) \geqslant \mu^*(E) \quad \text{dla każdego} \quad E \subset X$$

oraz

$$\nu^*(X) = \mu^*(X).$$

Z powyższych relacyj, z definicji mierzalności 6.1, oraz 6.1 (iii) wyniknie, że

$$\nu^*(B) = \mu^*(B) \text{ dla każdego } B \varepsilon \mathbf{B}(X)$$

a więc, wobec (ii), $\mu^* = \nu^*$. Z równości (**) otrzymujemy więc warunek (5′).

6.3 **Miara i miara zewnętrzna.** Z 6.1 (ii), (iii) wynika bezpośrednio:

(i) *Jeżeli μ^* jest skończoną funkcją Carathédor'yego w X, to funkcja $\mu = \mu^* \mid \mathbf{B}(X)$ jest miarą w X.*

Niech teraz μ będzie miarą w X. Połóżmy dla każdego $E \subset X$:

$$(\ast) \qquad \mu'(E) = \inf_B \mu(B) \quad \text{gdzie} \quad E \subset B \varepsilon \mathbf{B}(X).$$

[1]) Hahn [1], str. 444.

Z równości powyższej, przez łatwe sprawdzenie warunków (1) — (5), otrzymujemy:

(ii) *Jeżeli* μ *jest miarą w* X, *to* μ' *jest miarą zewnętrzną w* X, *przy czym* $\mu(B) = \mu'(B)$ *dla* $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$.

Z (i), (ii) oraz 6.2 (i), (ii) otrzymujemy:

(iii) *Przyporządkowując każdej mierze zewnętrznej* μ^* *w* X *funkcję* $\mu = \mu^* \mid \mathbf{B}(X)$, *otrzymujemy odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między wszystkimi miarami zewnętrznymi w* X, *a wszystkimi miarami w* X, *przy czym:* $\mathbf{M}^*(\mu^*) = \mathbf{M}(\mu)$.

6.4 **Rozszerzanie miary zewnętrznej.** *Niech* μ^* *będzie miarą zewnętrzną w* $Y \subset X$. *Teza: Istnieje miara zewnętrzna* ν^* *w* X *taka, że* $\nu^*(E) = \mu^*(E)$ *dla* $E \subset Y$.

Funkcja $\mu = \mu^* \mid \mathbf{B}(Y)$ jest w myśl 6.3 (i) miarą w Y. Połóżmy $\nu(B) = \mu(BY)$ dla każdego $B \varepsilon \mathbf{B}(X)$; w myśl 1.3 (ii) ν jest miarą w X.

Niech teraz ν^* będzie miarą zewnętrzną w X odpowiadającą mierze ν według wzoru 6.3 (*) i twierdzenia 6.3 (ii). Dla każdego zbioru $E \subset Y$ mamy

$$(*) \qquad \nu^*(E) = \inf_B \nu(B) = \inf_B \mu(BY) \quad \text{gdzie} \quad E \subset B \varepsilon \mathbf{B}(X).$$

Zbiór BY przebiega więc zbiory borelowskie w Y, zawierające E, a więc wzór (*) daje nam w myśl warunku (5): $\mu^*(E) = \nu^*(E)$ (dla $E \subset Y$).

6.5 **Zbiory bezwzględnie mierzalne.** *Każdy z następujących warunków jest równoważny warunkowi:* $M \varepsilon \mathbf{M}(X)$:

(a) $M \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ *dla każdej ciągłej miary zewnętrznej* μ^* *w* X;

(b) $M \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ *dla każdej miary zewnętrznej* μ^* *w* X;

(c) $M \varepsilon \mathbf{M}^*(\mu^*)$ *dla każdej funkcji Caratéhodory'ego* μ^* *w* X.

Z twierdzenia 6.3 (iii) oraz 2.1 (i) wynika natychmiast, że warunki (a) i (b) są równoważne bezwzględnej mierzalności zbioru M w X. Ponieważ oczywiście (c) → (b), więc pozostaje do okazania, że (b) → (c).

Załóżmy więc, że $\mathbf{M} \subset X$ i że $M \varepsilon \mathbf{M}^*(\nu^*)$ dla każdej miary zewnętrznej ν^* w X. Niech μ^* będzie dowolną funkcją Carathéodory'ego w X, a R dowolnym zbiorem takim, że $\mu^*(R) < \infty$. Należy dowieść, że

(*) $$\mu^*(R) \geqslant \mu^*(RM) + \mu^*(R - M).$$

W myśl 6.1 (v) oraz 6.3 (i) funkcja $\mu = \mu^* \mid \mathbf{B}(R)$ jest miarą w R. Kładąc dla każdego $E \subset R$

$$\nu_0^*(E) = \inf_B \mu^*(B) \quad \text{gdzie} \quad E \subset B \in \mathbf{B}(R)$$

otrzymujemy na mocy 6.3 (ii) miarę zewnętrzną w R, przy czym

$(^*_*)$ $$\mu^*(E) \leqslant \nu_0^*(E) \quad \text{dla} \quad E \subset R$$

$(^*{}_*{}^*)$ $$\mu^*(R) = \nu_0^*(R).$$

Według 6.4 istnieje miara zewnętrzna ν^* w X taka, że

$(^{**}_{**})$ $$\nu^*(E) = \nu_0^*(E) \quad \text{dla} \quad E \subset R.$$

Z założenia $M \in \mathbf{M}^*(\nu^*)$; mamy więc

$$\nu^*(R) = \nu^*(RM) + \nu^*(R - M)$$

a więc, na podstawie $(^{**}_{**})$ i $(^*{}_*{}^*)$:

$$\mu^*(R) = \nu_0^*(RM) + \nu_0^*(R - M),$$

skąd, wobec $(^*_*)$, otrzymujemy (*), c. b. d. o.

6.6 **Zbiory bezwzględnie zerowe**. Rozważajmy przestrzeń $Z \in \mathbf{B}$. Jakie wartości mogą przyjmować funkcje Carathéodory'ego na zbiorach $N \in \mathbf{N}$, zawartych w Z?

Gdy wszystkie podzbiory zbioru $E \subset Z$ spełniają odpowiednio (b) lub (c) (por. 6.5), to mówić będziemy, że zbiór E spełnia warunek (b_0) lub (c_0).

Wobec 2.5 (iv), 6.5 oraz 3.1, mamy

(i) *Warunek $N \in \mathbf{N}$ jest równoważny każdemu z warunków* (b_0) i (c_0).

Otóż z 2.1 (i), 6.3 (iii) oraz 1.7 (2^0) wynika, że

(ii) *Warunek* (b_0) *jest równoważny warunkowi:* (b'_0) *Każda ciągła miara zewnętrzna w Z znika na N.*

Za pomocą twierdzenia 3.4 (ii) otrzymujemy łatwo:

(iii) *Jeżeli $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, to warunek* (c_0) *jest równoważny każdemu z warunków:*

(c'_0) *Każda ciągła i skończona funkcja Carathéodory'ego w Z znika na N;*

(c''_0) *Dla każdej ciągłej funkcji Carathéodory'ego μ^* w Z i dla każdego zbioru $E \subset N$ mamy $\mu^*(E) = 0$ lub $\mu(E) = \infty$.*

Za pomocą hipotezy continuum dowodzimy, że (c_0) $\rightarrow$ (c'_0) a potem: już bez tej hipotezy, że (c'_0) $\rightarrow$ (c''_0) $\rightarrow$ (c_0).

W związku z warunkiem (c''_0) warto zaznaczyć, że na to by każda ciągła funkcja Carathéodory'ego znikała na N potrzeba i wystarcza, by zbiór N był najwyżej przeliczalny. — Wyżej podaliśmy już przykład zbioru płaskiego $N \in \mathbf{N}$ (przy założeniu hipotezy continuum) na którym nie znika t. zw. miara liniowa (która jest ciągłą funkcją Carathéodory'ego) (5.2 (ii)).

Lista prac cytowanych.

C a r a t h é o d o r y, C. [1] *Vorlesungen über relle Funktionen.* 2-te Auflage. Leipzig — Berlin 1927.

H a h n, H. [1] *Theorie der reellen Funktionen.* Erster Band. Berlin 1921.

H a u s d o r f f, F. [1] *Summen von $\aleph_1$ Mengen.* Fund. Math. 26 (1936). str. 241—255.

H i l g e r s, A. [1] *Bemerkung zur Dimensionstheorie.* Fund. Math. 28 (1937), str. 303—304.

H u r e w i c z, W. [1] *Ueber unendlich-dimensionale Punktmengen.* Proc. Akad. Amsterdam 31 (1928), str. 916—922.

— [2] *Une remarque sur l'hypothèse du continu.* Fund. Math. 19 (1932), str. 8—9.

K u r a t o w s k i, C [1] *Topologie I.* Monografie Matematyczne 3. Warszawa — Lwów 1933.

— [2] *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie.* Fund. Math. 22 (1934), str. 206—220.

L a v r e n t i e f f, M. [1] *Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes.* Fund. Math. 6 (1924), str. 149—160.

M a z u r k i e w i c z, S. et S z p i l r a j n, E. [1] *Sur la dimension de certains ensembles singuliers.* Fund. Math. 28 (1937), str. 305—308.

P o p r o u g é n k o, G. [1] *Sur certaines propriétés des fonction additives d'ensembles.* Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie 23 (1930).

S a k s, S. [1] *Theory of the integral.* Monografie Matematyczne 7. Warszawa — Lwów 1937.

S é l i v a n o w s k i, E. [1] *Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques.* Fund. Math. 21 (1933), str. 20—28.

S i e r p i ń s k i, W. [1] *Hypothèse du continu.* Monografie Matematyczne 4. Warszawa — Lwów 1934.

— [2] *Sur un ensemble non dénombrable, dont tout homéomorphe est de mesure nulle.* Fund. Math. 7 (1925), str. 188—190.

— [3] *Sur les constituantes des ensembles analytiques.* Fund. Math. 21 (1933), str. 29—34.

— [4] *Sur une extension de la notion d'homéomorphie.* Fund. Math 22 (1934), str. 270—275.

— [5] *Sur le produit combinatoire de deux ensembles jouissant de la propriété (C).* Fund. Math. 24 (1935), str. 48—50.

S i e r p i ń s k i, W. et S z p i l r a j n, E. [1] *Remarque sur le problème de la mesure.* Fund. Math. 26 (1936), str. 256—261.

— [2] *Sur les transformations continues biunivoques.* Fund. Math. 27 (1936), str. 289—292.

— [3] *Sur un ensemble toujours de I-e catégorie et de dimension positive.* Publ. Math. Univ. Belgrade (à paraître).

S z p i l r a j n, E. [1] *Sur une hypothèse de M. Borel.* Fund. Math. 15 (1930), str. 126—127.

— [2] *O mierzalności i warunku Baire'a.* Spraw. Kongr. Matem. Kr. Słow. 1929 (1930), str. 297—303.

— [3] *Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński.* Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie 24 (1931), str. 1—8.

— [4] *Sur certains invariants de l'opération* (*A*). Fund. Math. 21 (1933), str. 229—235.

— [5] *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire.* Fund. Math. 22 (1934), str. 303—311.

— [6] *Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et une classe correspondante d'ensembles.* Fund. Math. 24 (1935), str. 17—34.

— [7] *La dimension et la mesure.* Fund. Math. 28 (1937), str. 81—89.

Edward Szpilrajn

Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 19 janvier 1937.

RÉSUMÉ.

Soit X un espace métrique séparable. L'auteur appelle *mesure dans* X chaque fonction non negative (finie) et complètement additive $\mu(B)$ d'ensemble borelien dans X. Un ensemble $E \subset X$ est *mesurable* par rapport à μ, lorsqu'il existe deux ensembles B_1 et B_2 boreliens dans X et tels que

$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad \mu(B_1) = \mu(B_2).$$

Un ensemble M est *absolument mesurable*, lorsqu'il est mesurable par rapport à chaque mesure (dans chaque espace $X \supset M$).

L'auteur démontre que

1° la mesurabilité absolue est un invariant par rapport à l'homéomorphie généralisée, l'opération (A), la multiplication cartésienne, etc.;

2° la mesurabilité absolue d'ensemble M est équivalente à la mesurabilité (L) de chaque image linéaire de M, obtenue par une homéomorphie généralisée (pour le cas d'ensemble M linéaire il suffit de considérer l'homéomorphie au sens ordinaire);

3° la mesurabilité absolue est équivalente à la mesurabilité au sens de M. Carathéodory par rapport à chaque „Mass-

funktion“ de M. Carathéodory, ou bien par rapport à chaque „Inhaltsfunktion“ au sens de M. Hahn.

L'auteur considère également les ensembles dont tous les sous-ensembles sont absolument mesurables. Cette propriété est aussi un invariant par rapport à diverses opérations (la multiplication cartésienne finie, les transformations biunivoques inverses aux transformations mesurables (B), etc.). L'étude de cette propriété est rattachée au problème généralisé de la mesure.

Posiedzenie
z dnia 25 lutego 1937 r.

W. Sierpiński.

O pewnem twierdzeniu z ogólnej teorji mnogości równoważnem twierdzeniu Łuzina.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 25 lutego 1937 r.

STRESZCZENIE.

Nawiązując do pracy p. Kuratowskiego z XXII-go tomu *Fund. Math.* (str. 315—318) autor podaje pewne twierdzenie z ogólnej teorji mnogości, równoważne twierdzeniu Łuzina o istnieniu zbioru linjowego mocy continuum, nie zawierającego żadnej części nigdziegęstej nieprzeliczalnej. Twierdzenie to orzeka istnienie układu określającego (utworzonego ze zbiorów o dowolnych elementach), spełniającego pewne warunki.

W. Sierpiński.

Sur une proposition de la Théorie générale des ensembles équivalente au théorème de M. Lusin.

Présenté dans la séance du 25 Février 1937.

Dans le vol. XXII des *Fundamenta Mathematicae* (p. 315—318) M. Kuratowski a démontré que le théorème de M. Lusin (d'après lequel il existe un ensemble linéaire de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble non dense indénombrable (ce qui a été démontré par N. Lusin en 1914 à l'aide de l'hypothèse du continu) équivaut à un énoncé de la Théorie générale des ensembles. Dans le même ordre d'idées je démontrerai ici (sans faire appel à l'hypothèse du continu), que le théorème de M. Lusin équivaut à un autre énoncé de la Théorie générale des ensembles. Je prouverai notamment ce

Théorème: *L'existence d'un ensemble linéaire L de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble non dense indénombrable équivaut à l'existence d'un système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'ensembles non vides quelconques, tel que*

1°. $$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

quelle que soit la suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, n_{k+1} (où $k \geqslant 1$).

2°. $$E_{n_1, n_2, \ldots n_{k-1}, n_k} E_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n'_k} = 0,$$

quelle que soit la suite finie de nombres naturels n_1, $n_2, \ldots$, n_k et le nombre naturel $n'_k \neq n_k$.

3°. *Quelle que soit la suite infinie de nombres naturels n_1, n_2, $n_3, \ldots$, l'ensemble*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

contient au plus un élément.

4°. *Le noyau $N = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ du système S est un ensemble de puissance du continu.*

5°. *Si T est une somme d'ensembles du système S qui a au moins un élément commun avec chaque ensemble du système S, l'ensemble $N - T$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. 1. Soit L un ensemble linéaire de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble non dense indénombrable. Nous pouvons évidemment supposer que les éléments de L sont des nombres irrationnels de l'intervalle (0,1) et que L est dense dans cet intervalle[1]).

Désignons, pour tout système fini de nombres naturels n_1, $n_2, \ldots$, n_k par $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les nombres de

[1]) Cela résulte tout de suite du fait qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de Lusin est un ensemble de Lusin et qu'un sous-ensemble de l'ensemble de Lusin est un ensemble de Lusin.

L dont le développement en fraction continue infinie a pour k-ième réduit le nombre

$$\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \cdots + \frac{1|}{|n_k}.$$

On voit sans peine que le système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ jouit des propriétés 1°, 2°, 3° et 4°. Je dis qu'il jouit aussi de la propriété 5°.

Soit donc T une somme d'ensembles du système S qui a au moins un élément commun avec tout ensemble du système S. Je dis que l'ensemble $L - T$ est non dense.

En effet, admettons que l'ensemble $L - T$ est dense dans un intervalle ouvert δ. Il existe, comme on voit sans peine, une suite finie de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots, m_p$, telle que tout nombre irrationnel dont le p-ième réduit est $\frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots + \frac{1|}{|m_p}$ appartient à δ.

D'après la propriété de la somme T, on a

$$T\, E_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \neq 0.$$

Soit x un nombre de l'ensemble $T\, E_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$: son développement en fraction continue est donc

$$x = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots + \frac{1|}{|m_p} + \frac{1|}{|m_{p+1}} + \frac{1|}{|m_{p+2}} + \cdots$$

(où $m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots$ est une suite infinie de nombres naturels).

D'après $x \varepsilon T$ et la définition de T il existe un ensemble du système S contenu dans T et contenant x et, d'après la définition des ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, un tel ensemble est de la forme

$$E_{m_1, m_2, \ldots, m_q},$$

où q est un nombre naturel.

On a donc $E_{m_1, m_2, \ldots, m_q} \subset T$. Soit $s = \max(p, q)$: on aura donc, d'après 1°, $E_{m_1, m_2, \ldots, m_s} \subset T$, donc

$$(L - T)\, E_{m_1, m_2, \ldots, m_s} = 0:$$

l'ensemble $L - T$ ne contient donc aucun nombre irrationnel, dont le s-ième réduit est $\frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots + \frac{1|}{|m_s}$. Or, d'après $s \geqslant p$, tous tels nombres appartiennent à δ. L'ensemble $L - T$ étant dense dans l'intervalle ouvert δ, il existe donc un nombre de $L - T$, dont le s-ième réduit est $\frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots + \frac{1|}{|m_s}$. On a donc une contradiction.

L'ensemble $L - T$ est donc non dense, donc, d'après la propriété de l'ensemble L, au plus dénombrable. Le système S jouit donc de la propriété 5°.

Nous avons ainsi démontré que l'existence de l'ensemble L entraîne celle du système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ jouissant des propriétés 1° — 5°.

2. Soit $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système déterminant formé d'ensembles non vides quelconque jouissant des propriétés 1° — 5°, et soit N le noyau du système S.

Désignons par L l'ensemble de tous les nombres

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \cdots,$$

tels que

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \neq 0.$$

Il résulte tout de suite de 4° et 3° que l'ensemble L est de puissance du continu. Je dis que l'ensemble L ne contient aucun sous-ensemble non dense indénombrable.

En effet, soit Q un ensemble non dense donné quelconque situé dans l'intervalle (0,1). Soit T la somme de tous les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ du système S, où la suite d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jouit de la propriété suivante: il n'existe aucun nombre de l'ensemble LQ, dont le k-ième réduit est $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \cdots + \frac{1|}{|n_k}$.

Soit maintenant $E_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ un ensemble donné quelconque du système S. L'ensemble Q étant non dense, il existe, comme on voit sans peine, une suite finie de nombres naturels $m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots, m_{p+q}$, telle que l'ensemble Q ne contient aucun nombre irrationnel, dont le $p+q$-ième réduit est

$$\frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \cdots + \frac{1|}{|m_p} + \frac{1|}{|m_{p+1}} + \cdots + \frac{1|}{|m_{p+q}}.$$

D'après la définition de la somme T, l'ensemble $E_{m_1, m_2, \ldots, m_{p+q}}$ est donc un terme de cette somme, et on a

(1) $$E_{m_1, m_2, \ldots, m_{p+q}} \subset T.$$

Or, d'après 1° on a

$$E_{m_1, m_2, \ldots, m_{p+q}} \subset E_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

donc, d'après (1), les ensembles du système S étant non vides:

$$T\, E_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \neq 0.$$

L'ensemble T a donc au moins un élément commun avec tout ensemble du système S: d'après 5° l'ensemble $N - T$ est donc au plus dénombrable.

Soit p un élément donné de l'ensemble N: d'après $N = N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ et 2° il existe une et une seule suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que

$$p \varepsilon \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Posons

$$f(p) = \frac{1}{\lceil n_1} + \frac{1}{\lceil n_2} + \frac{1}{\lceil n_3} + \ldots.$$

— ce sera donc une fonction univoque définie dans l'ensemble N et, d'après la définition de l'ensemble L, nous aurons

(2) $$L = f(N)$$

Or, d'après la définition de la somme T nous aurons pour chaque terme $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de cette somme

$$L Q \,.\, f(N E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = 0,$$

d'où

(3) $$L Q f(N T) = 0$$

D'après (2) on a, vu que $f(N) = f(N - T) + f(NT)$:

$$L Q = L Q f(N) = L Q f(N - T) + L Q f(N T),$$

donc, d'après (3):

(4) $$L Q = L Q f(N - T) \subset f(N - T)$$

L'ensemble $N - T$ étant au plus dénombrable, il en est donc de même de l'ensemble $f(N - T)$: d'après (4), l'ensemble LQ est donc au plus dénombrable.

L'ensemble L ne contient donc aucun sous-ensemble non dense indénombrable, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'existence d'un système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ jouissant des propriétés $1^0 - 5^0$ entraîne celle de l'ensemble L de Lusin.

Notre théorème est ainsi démontré.

Z. Kobrzyński.

Teoria wyznaczników logicznych.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu w dniu 25 lutego 1937 r.

Teoria wyznaczników logicznych jest rozdziałem algebry zbiorów wyrażonym przy pomocy czterech funkcji: dodawania logicznego, mnożenia logicznego, przeczenia i równości logicznej. Wyznacznikiem logicznym klasy pierwszej (wzgl. drugiej) należącym do tablicy $\{a_{ik}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,n}}$ jest suma logiczna iloczynów logicznych po n czynników w każdym (wzgl. iloczyn logiczny sum logicznych po n składników w każdej) z których żadne dwa nie leżą w tym samym poziomie ani w tym samym pionie jednocześnie. Tablica wyznaczniów jest poziomo (wzgl. pionowo) rozłączna, jeżeli iloczyn logiczny jej każdych dwóch wyrazów położonych w tym samym poziomie (wzgl. pionie) jest równy zeru logicznemu. Tablica wyznaczników jest poziomo (wzgl. pionowo) zupełna, jeżeli suma logiczna jej każdych dwóch wyrazów położonych w tym samym poziomie (wzgl. pionie) jest równa jedności logicznej.

Część twierdzeń przysługujących wyznacznikom liczbowym daje się przenieść, po dokonaniu uproszczeń, na wyznaczniki logiczne klasy pierwszej — inne przysługują im przy założeniu rozłączności, poziomej lub pionowej, odnośnych tablic. Do grupy twierdzeń wymagających rozłączności należą: 1^0 twierdzenie o znikaniu wyznacznika posiadającego dwa rzędy równoległe identyczne; 2^0 twierdzenie o dodawaniu rzędów równoległych;

3⁰ twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników. Wyznacznikom logicznym klasy drugiej przysługują własności dwoiste względem poprzednich. Rolę tablicy rozłącznej odgrywa wówczas tablica zamknięta. Zaprzeczenie wyznacznika logicznego klasy pierwszej jest wyznacznikiem logicznym klasy drugiej i naodwrót.

Wyznaczniki logiczne obu klas znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu układów równań logicznych schroederowskich — t. j. równań wyrażonych przy pomocy funkcji minimów niewiadomych. Zagadnienie sprowadza się do wyrażenia rozwinięć funkcji $\prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$ i $\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ik}$ przy pomocy wyznaczników logicznych należących do macierzy $\{a_{ik}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$.

Z. Kobrzyński.

La Théorie des déterminants logiques.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 25 fevrier 1937.

La Théorie des déterminants logiques est un chapitre de l'Algèbre des ensembles. Elle se réduit aux formules contenant 1⁰ les termes $a + b$, ab, a', $a = b$ dans le sens de la somme logique, du produit logique, de la négation et de l'égalité logique des termes a et b [1]); 2⁰ les signes 0 (zéro logique) et 1 (unité logique) dans le sens des modules de l'addition et de la multiplication logiques; 3⁰ les termes $\sum_{i=m}^{n} a_i$ et $\prod_{i=m}^{n} a_i$ dans le sens de la somme et du produit logiques des termes a_{ik}, i étant un indice numérique parcourant, pour $m \leqq n$, les valeurs naturelles de m à n.

§ 1. Soit T une suite double de $m.n$ termes a_{ik} pour $i = 1,2,\dots,m$ et $k = 1,2,\dots,n$. La suite T sera dite *tableau*

---

[1]) D'aprés Couturat; — resp. les termes $a \,\&\, b$, ab, $\bar{a}$, $a \backsim b$ d'après M. M. Hilbert-Ackermann, indépendamment de toute interprétation qu'on en donne en Logique.

des déterminants; les suites $\{a_{ik}\}_{k=1,2,\ldots,n}$ et $\{a_{ik}\}_{i=1,2,\ldots,m}$ seront dites respectivement *i-ème ligne* et *k-ème colonne du tableau T*.

Soit p le non supérieur des nombres m et n. Le produit et la somme logiques de p termes dont aucun n'est de la même ligne ou colonne qu'un autre seront dits respectivement *sommande* et *facteur du tableau T*. Le nombre p sera dit *dégré du tableau T*[1]).

1. Posons $m = n$. Dans ce cas la somme logique de toutes les sommandes et le produit logique de tous les facteurs du tableau T seront dits respectivement *déterminant de la 1-ère* et *de la 2-ème classe appartenant à T*. Désignons les par les symboles:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|cccc|} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

2. Posons $m < n$. Dans ce cas nous appellerons *déterminant appartenant à T* chaque déterminant appartenant à un tableau composé de m diverses colonnes du tableau T.

3. Posons $m > n$. Dans ce cas nous appellerons *déterminant appartenant à T* chaque déterminant appartenant à un tableau composé de n diverses lignes du tableau T.

Les termes, les lignes, les colonnes, les sommandes, les facteurs et le dégré d'un tableau des déterminants seront dit respectivement *termes*, *lignes*, *colonnes*, *sommandes*, *facteurs* et *dégré des déterminants appartenant à ce tableau*. Les déterminants des classes différentes appartenant au même tableau et étant composés des mêmes lignes (resp. colonnes) seront *correspondants l'un à l'autre*.

Il s'ensuit que la valeur du déterminant logique ne dépend de l'ordre de ses lignes ou colonnes; la valeur du déterminant

---

[1]) Dans le cas $p = 1$ somme (resp. produit) logique de p termes α_i pour $i = 1,2,\ldots, p$ signifie α_1.

logique reste invariable, si ses lignes entrent à la place de ses colonnes et réciproquement. Le déterminant de la 1-ère classe est égal au zéro logique, si une de ses lignes ou colonnes est composeé des zéros logiques; le déterminant de la 2-ème classe est égal à l'unité logique, si une de ses lignes ou colonnes est composée des unités logiques. La négation du déterminant logique D est le déterminant correspondant au déterminant dont le symbole s'obtient de celui de D par la négation de tous ses termes.

§ 2. D étant le déterminant logique appartenant au tableau T (§ 1), nous appellerons *mineur du déterminant D appartenant au terme a_{ik}* le déterminant dont le symbole s'obtient de celui de D par l'éffacement de la i-ème ligne et de la k ème colonne. Il s'ensuit que le mineur du déterminant du dégré n est un déterminant du dégré $n - 1$. Les mineurs de deux déterminants correspondants l'un à l'autre et appartenant au même terme sont correspondants l'un à l'autre.

Théorèmes:

1. Soit D le déterminant de la 1-ère classe et $\underset{\cdot}{\Delta}$ celui de la 2-ème appartenant au tableau T; si l'on désigne respectivement par A_{ik} et B_{ik} les mineurs des déterminants D et Δ appartenant au terme a_{ik}, on a

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, A_{ik} \quad , \quad D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, A_{ik}$$

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} (a_{ik} + B_{ik}) \quad , \quad \Delta = \prod_{k=i}^{n} (a_{ik} + B_{ik})$$

2. Les condidions du théorème 1 étant remplies, si l'on désigne par D_j, $1 \leqq j \leqq n$, le déterminant dont le symbole s'obtient de celui de D en y remplaçant les a_{ij} (ou a_{ji}) pour $i = 1, 2, \ldots, n$ respectivement par les $a_0\, a_{ij}$ (ou $a_0\, a_{ji}$) on a $D_j = a_0\, D$.

De même, si l'on désigne par Δ_j le déterminant dont le symbole s'obtient de celui de Δ en y remplaçant les a_{ij} (ou a_{ji}) pour les mêmes valeurs de l'indice variable i respectivement par les $a_0 + a_{ij}$ (ou $a_0 + a_{ji}$) on a $\Delta_j = a_0 + \Delta$.

3. Les conditions du théorème 1 étant remplies, si l'on désigne par D_{js}, $1 \leqq j \leqq n$ et $s = 1, 2, \ldots, p$, le déterminant dont

le symbole s'obtient de celui de D en y remplaçant les a_{ij} (ou a_{ji}) pour $i=1,2,\dots,n$ respectivement par les b_{is} et si l'on pose, pour les mêmes valeurs de l'indice variable i, l'égalité $a_{ij}=$ $=\sum_{s=1}^{p} b_{is}$ $\left(\text{ou } a_{ji}=\sum_{s=1}^{p} b_{is}\right)$ on a $D=\sum_{s=1}^{p} D_{js}$.

De même, si l'on désigne par Δ_{js} le déterminant dont le symbole s'obtient de celui de Δ par les opérations transformant D en D_{js} et si l'on pose pour $i=1,2,\dots,n$ l'égalité $a_{ij}=\prod_{s=1}^{p} b_{is}$ $\left(\text{ou } a_{ji}=\prod_{s=1}^{p} b_{is}\right)$ on a $\Delta=\prod_{s=1}^{p} \Delta_{js}$.

§ 3. Nous passons à l'étude des tableaux satisfaisant aux conditions spéciales.

La suite des termes logiques sera dite *disjointe*, si le produit logique de chaques deux de ses éléments est égal au zéro logique; la suite des termes logiques sera dite *enfermeé*, si la somme logique de chaques deux de ses éléments est égale à l'unité logique[1]). Le tableau des déterminants sera *horizontalement* (resp. *verticalement*) *disjoint*, s'il est composé des lignes (resp. colonnes) disjointes; le tableau des déterminants sera *horizontalement* (resp. *verticalement*) *enfermé*, s'il est composé des lignes (resp. colonnes) enfermées. Les tableaux des négations des termes d'un tableau horizontalement (resp. verticalement) disjoint est horizontalement (resp. verticalement) enfermé et réciproquement.

Il s'ensuit que le déterminant logique de la 1-ère classe appartenant à un tableau horizontalement ou verticalement disjoint et comprenant deux lignes ou colonnes identiques est égal au zéro logique; de même, le déterminant logique de la 2-ème classe appartenant à un tableau horizontalement ou verticalement enfermé et comprenant deux lignes ou colonnes identiques est égal à l'unité logique.

---

[1]) Conformément à la terminologie ancienne, employant le terme *produit logique* dans le sens de la conjonction et celui de la *somme logique* dans le sens de l'alternative. M M. Hilbert-Ackermann emploient ces termes dans le sens invers.

On démontrera aisement, que la valeur du déterminant de la 1-ère classe appartenant au tableau $\{a_{ik}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\k=1,2,\ldots,n}}$ horizontalement (ou verticalement) disjoint reste invariable, si l'on y remplace les a_{ij} (ou a_{ji}), $1 \leqq j \leqq n$ et $i = 1,2,\ldots, n$, respectivement par les $a_{ij} + \sum_{s=1}^{p} c_s\, a_{i\alpha_s}$ $\left(\text{ou } a_{ji} + \sum_{s=1}^{p} c_s\, a_{\alpha_s i}\right)$, les α_s satisfaisant à la condition $1 \leqq \alpha_s \leqq n$.

De même, la valeur du déterminant de la 2-ème classe appartenant au tableau $\{b_{ik}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\k=1,2,\ldots,n}}$ horizontalement (ou verticalement) enfermé reste invariable, si l'on y remplace les b_{ij} (ou b_{ji}) respectivement par les $b_{ij} \prod_{s=1}^{p} (c_s + b_{i\alpha_s})$ $\left(\text{ou } b_{ji} \prod_{s=1}^{p} (c_s\, b_{\alpha_s i})\right)$ les α_s satisfaisant à la même condition $1 \leqq \alpha_s \leqq n$.

§ 4. **Application du Théorème de Cauchy.** Soient T_1 et T_2 respectivement les tableaux des termes a_{ik} et b_{ik} pour $i = 1,2,\ldots, m$ et $k = 1,2,\ldots, n$. Supposont T_1 verticalement disjoint (resp. verticalement enfermé). Soit C le déterminant de la 1-ère (resp. 2-ème) classe appartenant au tableau $\{c_{jl}\}_{\substack{j=1,2,\ldots,m\\l=1,2,\ldots,m}}$.

Posons $c_{jl} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}\, b_{ls}$ $\left(\text{resp. } c_{jl} = \prod_{s=1}^{n} (a_{js} + b_{ls})\right)$.

1. Dans le cas $n > m$ on a $C = O$ (resp. $C = 1$).
2. Dans le cas $n = m$ on a $C = AB$ (resp. $C = A + B$), A et B étant les déterminants de la 1-ère (resp. 1-ème) classe du dégré m appartenant respectivement à T_1 et T_2.
3. Dans le cas $n > m$ on a $C = \sum_{t=1}^{p} A_t\, B_t$ $\left(\text{resp. } C = \prod_{s=1}^{p} (A_t + B_t)\right)$ désignant par $A_1, A_2, \ldots, A_p$ la suite de tous les déterminants de la 1-ère (resp. 2-ème) classe du dégré m appartenant à T_1 et par B_t pour $t = 1,2,\ldots, p$ le déterminant de la 1-ère (resp. 2-ème) classe, composé des colonnes du tableau T_2 correspondant à celles du déterminant A_t.

Démonstration analogique à celle du Théorème de Cauchy en Algèbre numéraire.

Le déterminant C sera dit *produit* (resp. *somme*) *logique des tableaux* T_1 *et* T_2. Nous le désignerons par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{1m} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

resp. par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

§ 5. Les développements de $\prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$ et $\sum_{k=i}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ik}$

Soit **T** un tableau des termes a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$ et $k = 1, 2, \ldots, n$, horizontalement disjoint (resp. horizontalement enfermé).

1. Dans le cas $m < n$ on a $\prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} = 0$ $\left(\text{resp. } \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ik} = 1\right)$.

2. Dans le cas $m = n$ la formule $\prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$ $\left(\text{resp. } \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ik}\right)$ représente le déterminant de la 1-ère (resp. 2-ème) classe du dégré n appartenant à **T**.

3. Dans le cas $m > n$ la formule $\prod\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}$ $\left(\text{resp. } \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{m} a_{ik} \right)$ représente la somme (resp. le produit) logique de tous les déterminants de la 1-ère (resp. 2-ème) classe appartenant à **T**. En abrégé nous désignerons la dite somme et le dit produit respectivement par

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|cccc|} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$ [1]

Application: Les formules $\prod\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{m} a_{ik}$ pour $n = 2^{\nu}$ sont contenues dans les solutions du système $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{2^{\nu}} a_{ik}\, p_k = 0 \right\}_{i=1,2,\ldots,m}$ $\left(\text{resp. } \left\{ \sum\limits_{k=1}^{2^{\nu}} a_{ik}\, p_k = \right\}_{i=1,2,\ldots,m} \right)$ désignant par p_k pour $k = 1,2,\ldots, 2^{\nu}$ les *minima* [2]) des inconnues x_s pour $s = 1, 2, \ldots, n$. Les termes a_{ik} seront dits *cœfficients des minima des inconnues* x_s.

En éliminant les inconnues on a la condition du système

$$\prod_{k=1}^{2^{\nu}} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} = 0, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{2^{\nu}} \prod_{i=1}^{m} a_{ik} = 1$$

En résolvant le système par rapport à x_s on a

$$x_s = \prod_{k=1}^{2^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{m} b_{ik}^{(s)} + \left(\prod_{k=1}^{2^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{m} c_{ik}^{(s)} \right)' a_0$$

[1]) On peut définir ces symboles respectivement comme somme logique de toutes les sommandes et produit logique de tous les facteurs du tableau **T**.

[2]) Dans le sens des produits logiques des termes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de leurs négations, chaque produit logique comprenant n termes différents et ne comprenant jamais à la fois un terme et sa négation.

resp.

$$x_s = \sum_{k=1}^{2^{\nu-1}} \prod_{i=1}^{m} b_{ik}^{(s)} \left(\left(\sum_{k=1}^{2^{\nu-1}} \prod_{i=1}^{m} c_{ik}^{(s)} \right)' + a_0 \right)$$

désignant par $b_{ik}^{(s)}$ pour $i = 1,2,\ldots, m$ et $k = 1,2,\ldots, 2^{\nu}$ les cœfficients des minima contenant l'inconnue x_s et par $c_{ik}^{(s)}$ pour les mêmes valeurs des indices variables i et k les cœfficients des minima contenant la négation de la variable x_s.

Supposons le tableau des cœfficients des minima des inconnues horizontalement disjoint (resp. horizontalement enfermé)[1]).

Dans ce cas les formules $\prod_{k=1}^{2^{\nu}} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$, $\sum_{k=1}^{2^{\nu}} \prod_{i=1}^{m} a_{ik}$,

$$\prod_{k=1}^{2^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{m} b_{ik}^{(s)}, \quad \sum_{k=1}^{2^{\nu-1}} \prod_{i=1}^{m} b_{ik}^{(s)}, \quad \prod_{k=1}^{2^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{m} c_{ik}^{(s)}, \quad \sum_{k=1}^{2^{\nu-1}} \prod_{i=1}^{m} c_{ik}^{(s)}$$

représentent les déterminants de la 1-ère (resp. 2-ème) classe des dégrés 2^{ν} et $2^{\nu-1}$ appartenant aux tableaux des coefficients a_{ik}, $b_{ik}^{(s)}$ et $c_{ik}^{(s)}$. Nous les dirons respectivement *déterminants du système*, *déterminants des cœfficients de la variable* x_s, *déterminants des cœfficients de la négation de la variable* x_s.

---

[1]) Ces conditions ne resserent pas l'étendue de nos applications, chaque système des équations logiques pouvant être transformé en système dont le tableau des coefficients des minima des inconnues est horizontalement disjoint (resp. horizontalement enfermé). Par ex.: l'équation $ax + bx' = 0$ pour $ab \neq 0$ équivaut au système $\{ax = 0,\ bx' = 0\}$; $ax + bx' = 1$ pour $a + b \neq 1$ équivaut à $\{ax + x' = 1,\ x + bx' = 1\}$.

W. Kozakiewicz

O pewnym twierdzeniu Gliwenki.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu w dniu 25 lutego 1937 r.

Praca niniejsza zawiera prosty dowód twierdzenia Gliwenki orzekającego, że empiryczne prawo prawdopodobieństwa zmiennej losowej jest mocno stochastycznie zbieżne do jej prawa prawdopodobieństwa apriorycznego przy nieograniczenie rosnącej liczbie prób i założeniu niezależności prób.

W. Kozakiewicz

Sur un théorème de Glivenko.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 25 fevrier 1937.

Cette notte contient une démonstration trés simple d'un théorème de M. Glivenko.

1. Désignons par $P\{E\}$ la probabilité d'un évenement E, par $\mathcal{E}(z)$ l'espérance mathématique d'une variable aléatoire z. Étant donné une suite $\{z_n\}$, $n = 1,2\ldots$ de variables aléatoires, nous désignos — pour t réel — par $P_m\{z_n < t\}$ la probabilité d'avoir simultanément toutes les inégalités:

$$z_n < t; \quad n = m, m+1 \ldots\ldots \tag{1}$$

2. Soit x une variable aléatoire. Posons pour t réel:

$$F(t) = P\{x \leqslant t\} \tag{2}$$

$F(t)$ est la loi de probabilité totale de la variahle x.

Soient $x_1, x_2 \ldots x_n$ — n valeurs de la variable x, correspondant à n epreuves indépendantes. Déterminons pour chaque x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ une fonction $u_k(t)$ par les conditions $u_k(t) = 1$ si $x_k \leqslant t$ et $u_k(t) = 0$ si $x_k > t$. Posons:

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k(t). \tag{3}$$

[1]) Glivenko: Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari IV, Nr. 1, 1933. Voir aussi le travail de Kolmogoroff dans le même fascicule.

On appelle $V_n(t)$ loi empirique de probabilité, parce que pour $x_1, x_2 \dots x_n$ fixés, $V_n(t)$ posséde toutes les propriétés d'une fonction de probabilité totale.

Le théorème de M. Glivenko peut être exprimé par la relation:

$$(4) \qquad P\left\{\lim_{n\to\infty} [\operatorname{Sup}_t |V_n(t) - F(t)|] = 0\right\} = 1$$

ce qui veut dire: *la suite des variables aléatoires* $\operatorname{Sup}_t |V_n(t) - F(t)|$ *converge de maniére stochastique et forte vers zéro.* Autrement dit, *à tout couple de nombres positifs* ε, η *on peut faire correspondre un nombre* N *tel que* $m \geqslant N$ *entraîne*:

$$(5) \qquad P_m\left\{\operatorname{Sup}_t |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta$$

3. Démonstration. Les fonctions $F(t)$, $u_k(t)$, $V_n(t)$ sont continues á droite. Désignons par $F(t-0)$, $u_k(t-0)$, $V_n(t-0)$ leur limites á gauche. On a pour t fixe:

$$(6) \qquad \mathcal{E}[u_k(t)] = F(t); \quad \mathcal{E}[u_k(t-0)] = F(t-0)$$

$$(7) \qquad 0 \leqslant u_k(t-0) \leqslant u_k(t) \leqslant 1$$

donc les suites des variables aléatoires: $\{u_k(t)\}$ et $\{u_k(t-0)\}$ satisfont aux conditions de la loi forte de grands nombres. Il en résulte la convergence stochastique forte de $V_n(t)$ et $V_n(t-0)$ respectivement vers les limites $F(t)$ et $F(t-0)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Soit $\{a_i\}$ la suite de tous les points de discontinuité de $F(t)$. On a:

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} [F(a_i) - F(a_i - 0)] = \sum_{i=1}^{\infty} P\{x = a_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \leqslant 1.$$

Déterminons un entier s tel que:

$$(9) \qquad \sum_{i=s+1}^{\infty} p_i < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Soit R un nombre réel tel que:

$$(10) \qquad F(R) - F(-R) > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \qquad R \neq a_i,\ i = 1, 2 \dots$$

Rangeons en une suite croissante: $d_2 < d_3 \ldots < d_{r-1}$ tous les points a_i, $i \leqslant s$ qui sont intérieurs à l'intervalle $\langle -R, R \rangle$, et posons: $d_1 = -R$, $d_r = R$.

Considérons un intervalle quelconque $\langle d_j, d_{j+1} \rangle$, $j = 1,2 \ldots \ldots r-1$, p. ex. l'intervalle $\langle d_1 \; d_2 \rangle$. Soit $\overline{F}(t)$ la fonction définie par les conditions: $\overline{F}(t) = \overline{F}(t)$ pour $d_1 \leqslant t < d_2$, $\overline{F}(d_2) = = F(d_2 - 0)$. $\overline{F}(t)$ est continue aux points d_1, d_2, de plus l'intérieur de l'intervalle $\langle d_1, d_2 \rangle$ ne contient aucun point a_i tel que $i \leqslant s$, donc aucun point a_i tel que $p_i \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Il en résulte que l'oscillation de la fonction $\overline{F}(t)$ dans tout point de l'intervalle fermé $\langle d_1, d_2 \rangle$ est inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$. D'aprés un théorème connu de la théorie de fonctions d'une variable réelle il existe, une suite: $b_1 = d_1 < b_2 < \ldots . < b_{q-1} < b_q = d_2$ telle que:

$$\overline{F}(b_{i+1}) - \overline{F}(b_i) < \frac{2\varepsilon}{3} \qquad i = 1,2 \ldots q-1. \tag{11}$$

Déterminons m de maniére à avoir simultanément les q inégalités.

$$P_m \left\{ |V_n(b_i) - \overline{F}(b_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\} > 1 - \frac{\eta}{(r+1)q} \quad i = 1,2 \ldots q-1 \tag{12}$$

$$P_m \left\{ |V_n(b_q - 0) - \overline{F}(b_q)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\} > 1 - \frac{\eta}{(r+1)q} \tag{13}$$

ce qui est possible d'aprés la loi forte de grands nombres. Soit maintenant $d_1 \leqslant t < d_2$; il existe alors un $i \leqslant q-1$ tel que: $b_i \leqslant t < b_{i+1}$ et les inégalités:

$$|V_n(b_i) - \overline{F}(b_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

$$|V_n(b_q - 0) - \overline{F}(b_q)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{15}$$

entraînent:

$$\begin{aligned} &\overline{F}(t) - \varepsilon < \overline{F}(b_i) - \frac{\varepsilon}{3} < V_n(b_i) \leqslant V_n(t) \leqslant \\ &\leqslant V_n(b_{i+1} - 0) < \overline{F}(b_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{3} < \overline{F}(t) + \varepsilon \end{aligned} \tag{16}$$

Donc:

(17) $$|V_n(t) - \overline{F}(t)| = |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon.$$

Donc d'aprés (12), (13) on aura:

(18) $$P_m\left\{\sup_{d_1 \leq t < d_2} |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{\eta}{r+1}$$

et des inégalités analogues pour les intervalles: $\langle d_2, d_3\rangle, \ldots \langle d_{r-1}, d_r\rangle$. On voit que nous pouvons déterminer un m_0 tel que l'on a simultanément les inegalités:

$$P_{m0}\left\{\sup_{d_i \leq t < d_{i+1}} |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{\eta}{r+1} \quad i = 1,2 \ldots r-1$$

(19) $$P_{m0}\left\{|V_n(d_1) - F(d_1)| < \frac{2}{3}\varepsilon\right\} > 1 - \frac{\eta}{r+1}$$

$$P_{m0}\left\{|V_n(d_r) - F(d_r)| < \frac{2}{3}\varepsilon\right\} > 1 - \frac{\eta}{r+1}.$$

La probabilité d'avoir simultanément toutes les inegalités:

(20) $$\sup_{d_i \leq t < d_{i+1}} |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon \quad i = 1,2 \ldots r-1, \ n = \\ = m_0, m_0, m_0 + 1 \ldots\ldots$$

(21) $$|V_n(d_1) - F(d_1)| < \frac{2}{3}\varepsilon \qquad n = m_0, m_0 + 1, \ldots\ldots$$

(22) $$|V_n(d_r) - F(d_r)| < \frac{2}{3}\varepsilon \qquad n = m_0, m_0 + 1 \ldots.$$

est par suite supérieure à $1 - \eta$. Mais (20), (22) entraînent:

(23) $$\sup_{-R \leq t \leq R} |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon.$$

D'autre part (21) et (10 entraînent pour $t < -R$:

(24) $$V_n(t) \leqslant V_n(-R) = V_n(d_1) < F(d_1) + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

(25) $$\sup_{t < -R} |V_n(t) - F(t)| < \operatorname{Max}\{V_n(d_1), F(d_1)\} < \varepsilon$$

et de même (22) et (10) entraînent:

$$\sup_{t > R} |V_n(t) - F(t)| < \varepsilon. \tag{26}$$

Donc on aura:

$$P_{m_0}\{\sup_{t} |V_n(t) - F(t) < \varepsilon\} > 1 - \eta \tag{27}$$

c. q. f. d.

Remarquons que le théorème démontré peut être generalisé pour le cas de plusieurs dimensions. En outre les méthode employé dans ce travail peut être appliqué sous des modifications convenables aussi lorsque les épreuves ne sont pas indépendantes.

Warszawa, 25/II 1937.

Marian Kamieński.

O minerałach arsenowych z fliszu karpackiego okolicy Liska.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 25 lutego 1937 r.

STRESZCZENIE.

Wśród warstw eoceńskich Karpat środkowych przebiega antyklina z NW na SE przez wsie Huczwice, Bystre i Jabłonki, złożona z piaskowców szarych, średnio- i gruboziarnistych, o spoiwie krzemionkowym z blaszkami serycytu, ogólnej miąższości 5 do 6 m. Na piaskowcu spoczywają łupki stalowoszare, ciemnoszare, prawie czarne, ze znaczną ilością drobnego serycytu, oraz łupki krzemionkowe z dużą ilością ziarn kwarcu, o łącznej miąższości 2,5 m. Na łupkach zalegają piaskowce zlepieńcowate szarordzawe.

Otóż do poziomu piaskowców i łupków przywiązane są minerały arsenowe, mianowicie realgar z małą ilością wtórnego aurypigmentu. Występują one w szczelinach i spękaniach wypełnionych utworami gliniastymi i biegnących z N na S oraz z W

na E. Kryształy realgaru dochodzą do wielkości 1 cm. Towarzyszą im niekiedy kryształki kwarcu, t. zw. diamentu marmaroskiego. Zawartość arsenu w łupku ilastym sięga 0,1%.

Kryształy realgaru nie są dobrze rozwinięte i do pomiarów goniometrycznych się nie nadają ze względu na liczne uszkodzenia, wywołane istnieniem napięć wewnętrznych. Mianowicie mała zmiana temperatury, nawet chuchnięcie powoduje już rozpryskiwanie się realgaru na drobne cząsteczki.

Poza Śląskiem arsen w Polsce nie był znany. W roku ubiegłym wykrył Dr Zbigniew Sujkowski w Karpatach wschodnich w dorzeczu Czeremoszu blaszki realgaru w konkrecjach pirytowych, występujących w czarnych łupkach serii szypockiej. Na terenie obcym, po stronie południowej Karpat, znany jest realgar z żył kruszcowych Kapniku, Felsöbanyi, Nagyagu, również z Tajov na Słowacczyznie, gdzie występuje wapieniach triasowych.

Znaczenia praktycznego nasze złoża realgaru dotąd nie mają, gdyż jest go narazie zbyt mało.

Marian Kamieński.

Minéraux arsénifères dans les Carpathes flyscheuses aux environs de Lisko.

Note présentée par M. St. J. Thugutt à la séanec du 25 février 1937.

RÉSUMÉ.

Dans la région des Carpathes flyscheuses, au sud de la ville de Lisko, près de Baligród, on a rencontré des traces de réalgar accompagné d'oripiment. Ces minéraux apparaîssent en quanttité très limitée dans des fissures parcourant les grès et les schistes éocènes et ayant des directions N—S et W—E. Le réalgar s'y présente sous formes de cristaux de dimensions variables dépuis microscopiques jusqu'à 10 mm, de forme prismatique, mal définie.

Eugenia Zaniewska-Chlipalska.

O składzie chemicznym pewnych adularów

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 25 lutego 1937 r.

STRESZCZENIE.

Zgodnie z doświadczeniem St. J. Thugutta [1]) ogniowy ortoklaz rozpada się w temperaturze 200° C pod wpływem działającej nań wody na dwa ogniwa: jedno nierozpuszczalne w wodzie i uboższe w krzemionkę, drugie koloidalnie rozpuszczalne, zarazem w krzemionkę bogatsze. Należało przypuszczać, że to samo zjawisko powtórzy się w przyrodzie. W istocie poza normalnym glinosześciokrzemianem sodowopotasowym, ortoklazem czy też sanidynem, istnieje skaleń nieco mniej krzemionki zawierający, mianowicie mikroklin, pospolity składnik pegmatytowy [2]). Dokładne analizy obu tych minerałów wykonałam przed kilku laty [3]). Myśl, że tym bogatszym w krzemionkę skaleniem będzie wodnego pochodzenia adular nasuwała się sama przez się. W celu stwierdzenia powyższej możliwości wykonałam analizy trzech okazów, mianowicie adularu gotardskiego, salzburgskiego i z Bourg d'Oisans. Nie potrzeba dodawać, że materiał poddany analizie był uprzednio bardzo dokładnie zbadany na swą jednorodność i śladów nawet wolnej krzemionki nie zawierał. Stosunek $R_2O : Al_2O_3 : SiO_2$ był następujący:

0,9744 : 1 : 6,1164, 0,9712 : 1 : 6,0301 0,9887 : 1 ; 6,1294,

Zgodnie więc z przewidywaniem we wszystkich trzech przypadkach okazał się w stosunku do normalnego skalenia potasowego pewien nadmiar krzemionki.

Podczas hydrolizy ogniowego skalenia potasowego jeszcze inne ważne zachodzą okoliczności, mianowicie częściowo ustępuje sód w postaci glinosześciokrzemianu sodowego. Jest to znane i bardzo w przyrodzie rozpowszechnione zjawisko albityzacji. Wyługowany albit osiada w szczelinach skalenia potaso-

---

[1]) St. J. Thugutt. Sprawozd. T. N. W. (1913) 633.

[2]) St. J. Thugutt. Arch. Min. T. N. W. 1 (1925) 63

[3]) Arch. Min. T. N. W. 7 (1931) 49—67.

wego, wytwarzając z nim zrosty pertytowe. Ubytek sodu widzimy również w adularach. Lecz tu wyługowany albit zrostów z minerałem macierzystym nie tworzy, wędruje dalej, poczem osiada na ścianach szczelin skalnych jako taki. Oczywiście wtórny mikroklin i wtórny adular wzbogacają się z natury rzeczy w potas.

I znów rzecz ciekawa, że za potasem podąża bar również z ogniowego wyługowany skalenia. W sanidynie bywa go około 1¼%. Do adularu przedostaje się prawie 1% BaO, gdy reszta, wynosząca około 0,2% uwięziona zostaje w mikroklinie. Parageneza baru z potasem jest z punktu widzenia geochemii zjawiskiem na szczególną zasługującym uwagę. Dwa te pierwiastki mają bardzo do siebie zbliżone promienie jonowe. Wynoszą one dla baru 1,43 Å, dla potasu 1,33 Å, stąd łatwość wzajemnej ich wymiany w komórce elementarnej.

Z danych Schieboldа [1]) wynika, że największą komórkę elementarną, a więc najmniejszą gęstość wykazuje adular, najmniejszą komórkę elementarną — sanidyn, gdy mikroklin pośrednie zajmuje miejsce. Oznaczone przeze mnie ciężary właściwe analizowanych skaleni wynoszą:

2,5830	dla	sanidynu	z Wehr, Eifel,
2,5720	„	mikroklinu	z Klesowa na Wołyniu,
2,5720	„	adularu	z Bourg d'Oisans,
2,5715	„	„	z Gotardu,
2,5680	„	„	z Krimml z Salzburga

są zatem zgodne z rozważaniami Schieboldа.

E. Zaniewska-Chlipalska.

Sur la composition chimique de quelques adulaires.

Note presentée par M. St. J. Thugutt à la séance du 25 février 1937.

RÉSUMÉ.

St. J. Thugutt a démontré que l'orthose soumise à l'action de l'eau à 200° C se partage en deux produits: un colloïdal, soluble dans l'eau et plus riche en silice et en soude, l'autre

[1]) E. Schiebold. Centralbl. f. Min. etc. (1927) A. 453—458.

moins riche et insoluble [1]. La même chose s'éffectue dans la nature. A côté de la sanidine et de l'orthose normales et pyrogéniques on rencontre un feldspath contenant moins de silice. C'est le microcline — constituant connu d'origine pégmatitique [2]. A son temps j'ai annoncé plusieurs analyses concernant les deux minéraux susdits [3]. Quant au feldspath plus acide on a pu s'attendre de le trouver dans l'adulaire, minéral tapissant les fentes et les fissures de certains roches ignées et métamorphiques. Trois analyses des adulaires: de Saint-Gothard, de Salzburg et de Bourg d'Oisans exécutées dans ce but ont confirmé l'idée lancée tout à l'heure. Voilà les rélations pour $R_2O : Al_2O_3 : SiO_2$ ainsi évaluées:

0,9744 : 1 : 6,1164, 0,9712 : 1 : 6,0301 0,9887 : 1 ; 6,1294

Simultanement avec la silice entre le soude en solution, donnant lieu à la formation de l'albite. Celle-ci forme des cristaux homogènes ou bien des perthites.

Autant mobile que le soude est l'élement congéné — le barium. On trouve notamment ca 1¼% BaO dans la sanidine, ca 1% BaO dans l'adulaire et ca 0,2% BaO dans le microcline. La paragénèse de barium avec le potassium est au point de vue géochimique d'un interêt tout à fait spécial. Les valeurs des rayons ioniques de Ba et de K s'approchent autant qu'ils peuvent se remplacer mutuellement dans la cellule élementaire.

Selon E. Schiebold [4] les dimensions de la cellule élementaire de feldspaths potassiques varie en certaines limites. Elles grandissent en partant de la sanidine par le microcline jusqu'à l'adulaire, ce qui est d'accord avec les poids spécifiques de ces minéraux indiqués par l'auteur (v. le texte polonais).

---

[1] St. J. Thugutt. C. R. des séances de la Soc. des Sc. de Varsovie (1913) 633.

[2] St. J. Thugutt. Arch. de Min. de la Soc. des Sc. de Varsovie *1* (1925) 633.

[3] E. Zaniewska. Arch. de Min. de la Soc. des Sc. de Varsovie *7* (1931) 43 — 67.

[4] E. Schiebold. Centralbl. f. Min. A. (1927) 453 — 458.

P o s i e d z e n i e

z dnia 16 marca 1937 r.

S. L i p i ń s k i.

Nova Herculis 1934.

Przedstawił M. Kamieński dn. 16 marca 1937 r.

STRESZCZENIE.

Praca niniejsza zawiera opracowanie 340 własnych ocen blasku Novej Herkulesa, dokonanych metodą Argelandera w Obserwatorium U. J. P., w czasie 1934 XII 22. — 1937 I 15.

Jasności Novej wyrażono w skali fotowizualnej harwardzkiej. Jasności gwiazd porównania zaczerpnięto bądź z „Harvard Bulletin" NN-o 898 i 899, bądź, o ile dana gwiazda nie figurowała we wspomnianym spisie, obliczono przy pomocy poprawek podanych w „Harvard Annals" vol. 89, bądź wreszcie wyznaczono drogą bezpośrednich pomiarów fotometrycznych i wizualnych.

Przy obserwacjach używano następujących przyrządów: a) gołego oka, b) lornetki Zeissa „Turact" 8 x, c) refraktora Heydego (otwór 162 mm), d) refraktora Grubba (otwór 207 mm), e) lunety Merza (otwór 100 mm).

Przy obliczaniu jasności Novej z obserwacyj dokonanych gołym okiem i lornetką uwzględniono ekstynkcję różniczkową.

Wyniki obserwacyj (średnie wieczoru) ujęto w wykresy, umieszczone w końcu niniejszej pracy.

S. Lipiński.

Nova Herculis 1934. (DQ Her).

Mémoire présenté par M. M. Kamieński à la séance du 16 mars 1937.

Mémoire présent comprend 340 éstimations d'éclat de la Nova Herculis obtenues par la méthode d'Argelander du 22 décembre 1934 au 15 janvier 1937. Les observations ont été faites pour la plupart à l'Observatoire de l'Université J. Piłsudski à Varsovie, sauf les observations NN^{os} 153—185, 284—296 faites à Szadek ($\lambda = 1^h\,16^m,6$ E, $\varphi = +51^0\,42'.3$).

I. *Etoiles de comparaison.*

A quelques exceptions près les magnitudes des étoiles de comparaison données dans le Tableau I sont celles publiées dans Harvard Bulletins NN^{os} 898 pp. 25—27 et 899 p. 2, c'est à dire rapportées à échelle photovisuelle de Harvard (HPv). Parmi les exceptions mentionnées ci-dessus se trouvent les étoiles suivantes:

a) Les étoiles marquées dans le tableau I, par un astérisque, dont les magnitudes sont rapportées à l'échelle photovisuelle internationale. Elles different très peu de celles de l'échelle de Harvard.

b) e Her, ρ Her, δ Cyg, BD $+ 50^0$ 2468.

Ces étoiles ne figurent pas sur les listes de Harvard. Leurs magnitudes photovisuelles ont été calculées à l'aide des corrections publiées par C. H. Payne dans Harvard Annals vol. 89, pp. 12, 64, 70 en partant des magnitudes visuelles que l'on trouve dans la Revised Harvard Photometry (H. A. vol. 50).

c) ι Her.

Sa magnitude adoptée ici ($3\overset{m}{.}57 \pm 0\overset{m}{.}03$) a été déduite de toutes les observations comprenant cette étoile en vue d'améliorer l'accord entre les magnitudes de la Nova résultant des comparaisons avec les étoiles autres que ι Her et de celles avec elle. Ces dernières s'écartaient systématiquement de la moyenne du soir de $+ 0\overset{m}{.}2$ (valeur moyenne, les valeurs maxima s'élevant à $+ 0\overset{m}{.}4$). Après l'introduction dans les calcules de la nouvelle magnitude, ce résidu s'est réduit à $+ 0\overset{m}{.}06$ (moyenne calculée en tenant compte du signe du chaque résidu.)

d) Magnitude de l'étoile BD + 45° 2665 résulte de mes propres mésures photométriques faites au photométre à coin de Graff. Comme étoiles de comparaison m'ont servi les étoiles h et b.

Magnitudes des étoiles *y* et *z* ont été déterminées l'aide de deux methodes différentes:

1) Au moyen des mésures photométriques de J. Gadomski qui s'est servi des étoiles N, K, A comme étoiles de comparaison.

2) Au moyen de l'ensemble d'observations visuelles NN^os^ 153—182 (comparaisons placées dans le tab. II entre parenthèses compris) traité par la méthode de moindres carrés.

Ces deux méthodes ont donné les résultats suivants:

	1)	2)
	m	m
y	8.05	8.12
z	8.50	8.41

L'accord entre eux étant satisfaisant (surtout si l'on tient compte de differents instruments utilisés) on a adopté comme magnitudes définitives les moyennes des précedantes.

TABLEAU I.

Désignation de l'étoile	Mg	Désignation de l'étoile	Mg	Désignation de l'étoile	Mg	Désignation de l'étoile	Mg
α Lyr	0.08	π Her	3.01	30 Dra (BD+50°2468)	5.16	g (BD+46°2427)	10.08*
α Cyg	1.31	γ Lyr	3.23	u (BD+45°2629)	6.59	d (BD+45°2661)	10.18*
β UMi	1.98	ι Her	3.57	H (BD+46°2426)	7.41	k (BD+45°2656)	10.30*
γ Dra	2.14	ξ Dra	3.69	K (BD+46°2416)	7.66	m (BD+45°2665)	10.39
γ Cyg	2.30	ϑ Her	3.72	y (BD+46°2412)	8.08	l (BD+45°2655)	10.44*
ε Cyg	2.38	ρ Her	4.08	N (BD+45°2652)	8.24	n	10.67*
η Dra	2.74	ν Dra	4.17	a (BD+45°2662)	8.40*	p	11.40*
β Dra	2.82	e Her	4.56	z (BD+45°2649)	8.45	r	11.61*
δ Cyg	2.88	f Her	4.84	h (BD+45°2654)	9.06*	s	11.79*
ζ Dra	2.98	(BD+43°2892)	4.96	c (BD+45°2664)	9.18*		

II. *Extinction.*

Les magnitudes de la Nova déduites des observations faites à l'oeil nu ou à la jumelle sont exemptes de l'extiction différentielle. Les valeurs de l'extinction étaient prises de table de Müller (Photometrie der Gestirne pp. 515—516).

III. *Instruments.*

Pendant les observations de la Nova on a utilisé les instruments suivants:

a) L'oeil nu (observations NN^{os} 1— 63).

b) Jumelle „Turact" Zeiss 8 × (obs. NN^{os} 64—112).

c) Réfracteur Heyde d = 162, f = 1460, avec des oculaires f = 20 mm et f = 60 mm (premier des oculaires n'étant utilisé qu'exceptionnellement, obs. NN^{os} 113—123, 136—152, 186—283, 297—340).

d) Réfracteur Grubb d = 207, f = 2910, avec oculaire de photométre de Graff. (obs. NN-os 124—135).

e) Lunette portative Merz d = 100 mm, avec oculaire terrestre grossissant 40 × transformé en oculaire astronomique par l'enlèvement de sa partie antérieure (obs. NN^{os} 153—185, 284—296).

Les observations faites à l'un de ces instruments sont séparées dans le tableau II de celles faites à l'un autre par deux traits horizontaux.

Les cas d'émploi d'autres instruments qu'enumerés ci-dessus sont indiqués dans les remarques.

TABLEAU II.

Nr.	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24277..			mg	mg	
1	94.2153	α Lyr 6 n 4 γ Dra	4	1.31		1,2
2	94.3660	α Cyg 3 n 6 δ Cyg	2	1.37		1.
3		α Lyr 2 n 3 γ Cyg	1	1.20	1.31	1,3
4		α Cyg 3 n 5 ε Cyg	2	1.31		1.
5	95.1639	α Lyr 8 n 3 γ Cyg	2	1.63		
6		α Cyg 2 n 3 γ Dra	4	1.97		
7		α Cyg 2 n 6 δ Cyg	3	1.61	1.75	
8		α Cyg 2 n 5 β Dra	4	1.68		
9		α Lyr 8 n 1 β UMi	1	1.76		

Nr.	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24277..			mg	mg	
10	96.1910	α Cyg 5 n 1 γ Dra	3	1.95		
11		n 0 γ Cyg	3	2.18		
12		α Cyg 5 n 5 β Dra	3	2.00	2.00	
13		α Cyg 5 n 3 ε Cyg	1	1.86		
14		α Cyg 5 n 6 δ Cyg	3	1.90		
15	97.2111	γ Dra 4 n 2 β Dra	3	2.58		
16		ε Cyg 3 n 3 δ Cyg	3	2.50	2.56	
17		γ Cyg 4 n 4 γ Lyr	1	2.71		
18	97.2153	η Dra 1 n 3 ζ Dra	3	2.75		
	24278..					
19	01.1813	β Dra 4 n 6 ι Her	3	3.14		
20		γ Dra 8 n 3 ξ Dra	3	3.21	3.09	
21		β Dra 4 n 2 γ Lyr	3	3.07		
22		η Dra 5 n 1 ζ Dra	2	2.87		
23	01.1889	β Dra 5 n 4 ι Her	2	3.27	3.30	4
24		β Dra 5 n 3 ξ Dra	2	3.33		4
25	02.1743	γ Dra 5 n 2 β Dra	4	2.62		
26		γ Dra 5 n 4.5 γ Lyr	3	2.71		
27		η Dra 0 n	3	2.73	2.66	
28		ε Cyg 5 n 4 ζ Dra	3	2.62		
29		γ Cyg 7 n 3 δ Cyg	2	2.59		
30	03.2792	γ Dra 3 n 4 β Dra	3	2.31		
31		γ Dra 3 n 2 η Dra	3	2.30	2.30	
32		γ Dra 3 n 4 ζ Dra	3	2.28		
33	03.2854	γ Cyg 5 n; ε Cyg 3.5 n	3	2.36		5.
34	10.1806	γ Dra 3 n 2 β Dra	4	2.52		6.
35		γ Dra 3 n 5 γ Lyr	3	2.53	2.52	
36		γ Cyg 5 n 3 η Dra	3	2.49		
37		ε Cyg 3 n 7 ζ Dra	3	2.54		
38	11.1757	γ Dra 3 n 4 β Dra	4	2.40		
39		γ Dra 3 n 3 η Dra	3	2.40		
40		γ Cyg 4 n 6 γ Lyr	3	2.60	2.46	
41		γ Cyg 4 n 5 ζ Dra	3	2.47		
42		ε Cyg 2 n 4 δ Cyg	3	2.47		
43	12.1924	n 0 β Dra	4	2.80		
44		γ Dra 5 n 5 γ Lyr	4	2.72	2.74	
45		η Dra 1 n 4 ζ Dra	4	2.71		
46	12.1965	ε Cyg 3 n 2.5 δ Cyg	3	2.49	2.50	
47		γ Cyg 5 n 2.5 δ Cyg	3	2.52		
48	13.1979	β Dra 1 n 5 ξ Dra	1	2.91		7; 8.
49	14.1785	β Dra 0 n	2	2.80		
50		γ Dra 6 n 6 ξ Dra	2	2.84		
51		η Dra 2 n 4 ζ Dra	1	2.75	2.77	
52		ε Cyg 4 n 6 ξ Dra	1	2.77		
53		η Dra 2 n 1 δ Cyg	1	2.72		
54	14.1882	γ Dra 5 n 1 β Dra	2	2.68		4.
55	16.2632	γ Dra 5 n 1 β Dra	3	2.54		1; 9.
56		η Dra 3 n 3 ζ Dra	3	2.48	2.49	
57		ε Cyg 5 n 2 δ Cyg	3	2.45		
58	18.2410	γ Dra 5 n 2 β Dra	1	2.50		9.

Nr.	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24278..			mg	mg	
59	20.1771	γ Dra 3 n 4 β Dra	3	2.38	2.39	10.
60		γ Cyg 4 n 4 δ Cyg	3	2.41		
61	27.2035	γ Dra 4 n 3 β Dra	3	2.43		
62		γ Dra 4 n 1 η Dra	3	2.44	2.39	
63		γ Dra 4 n 5 ζ Dra	3	2.31		
64	38.2000	β Dra 6 n 3 ι Her	2	3.34	3.22	
65		β Dra 6 n 4 ξ Dra	2	3.11		
66	40.2097	β Dra 3 n 8 ι Her	2	2.91	2.82	
67		γ Dra 7 n 5 ξ Dra	3	2.75		
68	44.2257	β Dra 8 n 3 ν Dra	3	3.44	3.49	
69		ξ Dra 4 n 3 ν Dra	3	3.54		
70	55.2292	ξ Dra 5 n 3 ν Dra	2	3.45		
71	56.2188	ξ Dra 3 n 5 ν Dra	2	3.33	3.29	
72		β Dra 9 n 5 ν Dra	2	3.24		
73	59.3181	β Dra 0 n	2	2.34		11.
74		γ Dra 8 n 6 ι Her	1	2.73	2.49	
75		γ Dra 8 n 6 ξ Dra	2	2.51		
76	62.3715	ξ Dra 5 n 2 ι Her	4	3.41	3.49	
77		ξ Dra 5 n 4 ν Dra	4	3.58		
78	65.3333	ξ Dra 5 n 3 ν Dra	5	3.51	3.60	
79		ι Her 2 n 9 [30 Dra]	4	3.71		
80	66.3056	ι Her 4 n 6 [30 Dra]	4	3.99	4.03	
81		ξ Dra 8 n 6 [30 Dra]	4	4.07		
82	67.3701	ξ Dra 4 n 4 ν Dra	4	3.60		
83		π Her 2 n 4 ν Dra	2	3.61	3.53	11.
84		ξ Dra 4 n 2 ι Her	2	3.32		
85	70.3583	ι Her 4 n 7 [30 Dra]	4	3.99		
86		ν Dra 1 n 7 [30 Dra]	4	3.96	3.92	
87		ξ Dra 5 n 5 ρ Her	4	3.82		
88	72.3611	ι Her 2 n 4 ν Dra	4	3.60		1.
89		ξ Dra 5 n 4 ν Dra	4	3.64	3.61	
90		π Her 4 n 6 ρ Her	4	3.60		
91	76.3639	ι Her 4 n 7 [30 Dra]	3	4.03		1;12.
92		π Her 6 n 3 ρ Her	2	3.84	3.95	
93		ν Dra 0 n	3	3.89		
94		ξ Dra 4 n 7 [30 Dra]	3	3.99		
95	77.3507	ι Her 4 n 8 [30 Dra]	5	3.97	3.96	1.
96		π Her 6 n 2 ρ Her	5	3.95		
97	77.3549	ξ Dra 7 n; ν Dra 3 n	3	4.24		5.
98	78.3833	ι Her 4 n 8 [30 Dra]	3	4.00		1.
99		π Her 8 n 3 ρ Her	3	3.85	3.87	
100		ϑ Her 0 n	3	3.93		
101		ξ Dra 6 n 2 ν Dra	3	3.84		
102	79.4049	π Her 8 n 3 ρ Her	2	3.88		1;13.
103		ι Her 5 n 7 [30 Dra]	3	4.11	4.04	
104		ξ Dra 6 n; ν Dra 2 n	1	4.17		5.
105	84.3528	ι Her 8 n 3 [30 Dra]	3	4.59		1;13.
106		ϑ Her 4 n 5 f Her	1	4.43	4.54	
107		ϑ Her 4 n 4 [BD+43° 2892]	1	4.51		
108	92.3903	e Her 4.5 n 2 [BD+43° 2892]	4	4.85	4.86	

Nr.	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24278..			mg	mg	
109		e Her 4.5 n 3 [30 Dra]	3	4.87	4.86	
110	93.3688	ϑ Her 6 n 3 [BD+43°2892]	3	4.62		
111		e Her 0 n	3	4.56	4.56	
112		ϑ Her 6 n 5 [30 Dra]	3	4.51		
	24279..					
113	00.4069	H 5 n 3 h	2	8.44	8.54	14.
114		N 4 n 4 h	2	8.65		
115	03.3972	h 3.5 n 6 k	2	9.52		1;15.
116	06.3694	h 6 n 3 k	4	9.89		1;15.
117	06.3854	g 3 n 3 m	4	10.23		
118	07.3444	k 0 n	3	10.30		1;15.
119	07.3729	m 2 n 5 [n]	3	10.47		
120	08.3229	k 3 n 3 [n]	3	10.49		14;16;17.
121	09.3340	k 3.5 n 2 [n]	3	10.54		1;14;16.
122	10.3403	k 4 n 2 [n]	3	10.55		1;15;16.
123	11.3708	n 0 [n]	2	10.67		14;18.
124	12.3667	[n] 2.5 n 5 p	3	10.91		
125	13.3632	[n] 3 n 4 p	3	10.98		19.
126	14.3590	[n] 5 n 1.5 p	4	11.23	11.23	
127		[n] 6 n 4 r	4	11.23		
128	15.3278	p 4 n 3 r	3	11.52	11.57	16.
129		p 3 n 2 s	3	11.63		16.
130	16.3479	r 3 n	3	11.85		20.
131	17.3215	r 6 n	2	12.09		20.
132	19.3403		1	13.30		21;
133	20.3333		—	—		22.
134	26.3333		—	—		22.
135	58.3778	h 2 n 6 k	2	9.37		
136	58.3875	h 3 n 8 k	4	9.40		15.
137	59.3771	a 4 n 2.5 h	4	8.81		
138	61.3889	h 2 n 5 k	3	9.41		23.
139	63.3757	a 6 n 2.5 h	3	8.86		
140	64.3681	a 3 n 6 h	4	8.62		
141	65.3882	N 4 n 2 a	2	8.35		1;23.
142	65.3535	N 4 n 3 a	3	8.33		
143	66.3681	N 5 n 1.5 a	3	8.36		1.
144	66.3819	N 4.5 n 2.5 a	3	8.34		
145	67.3736	N 4 n 3 a	3	8.33		1.
146	68.3653	N 4 n 3 a	3	8.33		1.
147	68.3840	N 3 n 4.5 a	3	8.30		
148	69.3715	N 4 n 3 a	2	8.33		1;24.
149	72.3771	H 8 n 2.5 N	3	8.04		1.
150	75.3736	H 6 n 2 N	3	8.03		
151	76.3729	H 5 n 3 N	3	7.93		
152	79.3924	H 6 n 4 a	3	8.00		
153	85.4132	H 4 n 8 z [H 8 N 3z]	3	7.76		25.

Nr.	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24279..			mg	mg	
154	86.3979	H 4 n 7 z	4	7.79		25.
		[H 7 N 2 z]				
155	87.3944	H 3 n 6 z	2	7.76		25.
		[H 8 N 2 z]				
156	90.4201	n 3 H	1	7.11		26.
157	92.3910	H 3 n 7 a	4	7.71		
		[H 8 N 1 z]				
158	93.4042	H 4 n 7 a	2	7.77		27.
		[H 8 N 3 z]				
159	94.3917	H 4 n 9 a	2	7.71	7.81	1; 7.
160		K 3 n 2 y	2	7.91		
161	95.3854	H 5 n 9 a	3	7.76	7.82	1; 24.
162		K 3 n 3 y	3	7.88		
		[H 6 N 2 z]				
163	96.3882	H 3 n 9 a	2	7.66	7.70	1; 27.
164		K 1,5 n 6 y	2	7.75		
		[H 8 N 4 z)				27.
	24280..					
165	01.3868	H 5 n 7 a	1	7.82	7.81	1; 12.
166		K 3 n 6 y	1	7.80		
		[H 8 N 3 z]				
167	03.3805	H 4 n 8 a	4	7.74	7.76	1.
168		K 2 n 5 y	4	7.78		
		[H 9 N 2 z]				
169	05.4264	H 4 n 9 a	4	7.71	7.74	
170		K 1.5 n 4.5 y	4	7.77		
		[y 3 N 4 z]				
171	07.3778	H 5 n 7 a	4	7.82	7.85	
172		K 3 n 3 y	4	7.87		
		[H 8 N 1.5 z]				
173	08.3833	H 5.5 n 7 a	4	7.85	7.87	
174		K 4 n 3 y	4	7.90		
		[K 5 N 2 z, H 9 N]				
175	09.3708	H 5 n 8 a	3	7.79	7.80	24.
176		K 3.5 n 5.5 y	2	7.82		27.
		[y 3 N 2 z]				
177	10.3708	H 4.5 n 6.5 a	4	7.81	7.82	
178		K 3 n 4 y	4	7.84		
		[y 3 N 1.5 z]				
179	11.3646	H 4 n 8 a	2	7.74	7.77	7.
180		K 2.5 n 5 y	2	7.80		
181	13.4035	H 4 n 8 a	4	7.74	7.77	
182		K 3 n 6 y	4	7.80		
		[y 4 N 3 z]				
183	17.4083	H 3 n 9 a	3	7.66	7.76	28.
184		K 3 n 9 a	3	7.85		
185	18.4361	H 5 n 6 a	4	7.86		
186	24.3597	H 4 n 8 a	4	7.74	7.76	1; 24.
187		K 2.5 n 6 y	4	7.78		

Nr	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24280..			mg	mg	
188	35.3590	n 2 H; n 10 a	3	7.16	7.38	5; 29.
189		n 8 N; n 10 a	3	7.60		
190	36.3750	n 3.5 H (H 8 N 3 a)	3	7.13		29.
191	37.3715	n 2.5 H (H 7 N 3 a)	3	7.20		29.
192	39.3847	n 0 H	2	7.41		18.
193	40.3562	u 6 n 2 H	4	7.20		30.
194	41.3549	u 6 n 3 H	4	7.14		30.
195	42.3396	u 6 n 3 H	5	7.14	7.18	
196		u 6 n 4 K	5	7.23		
197	43.3542	u 6 n 2.5 H	2	7.17		
198	46.3500	H 3 n 8 N	4	7.64	7.68	
199		K 1 n 8 N	4	7.72		
200	47.3354	u 7 n 2 H	5	7.23		31.
201	48.3194	H 2 n 9 N	4	7.56	7.51	
202		K 1 n 9 N	4	7.47		
203	53.3257	u 5.5 n 2 H	4	7.23	7.20	30.
204		u 5.5 n 10 N	4	7.18		
205	58.3118	H 3 n 8 N	2	7.64	7.63	30; 1.
206		H 3 n 6 y	2	7.61		
207	67.3319	H 2 n 7 N	5	7.60	7.62	30.
208		K 0 n	5	7.66		
209		H 2 n 5 y	5	7.60		
210	68.3437	H 4 n 7 N	4	7.71	7.74	30.
211		K 2.5 n 6 y	4	7.78		
212	70.3354	H 5 n 7 N	3	7.76	7.78	13.
213		K 3 n 6 y	3	7.80		
214	74.3396	H 5 n 7 N	5	7.76	7.79	
215		K 3 n 5 y	5	7.82		
216	75.3375	H 3.5 n 9 N	5	7.64	7.71	31.
217		K 2.5 n 7 y	5	7.77		
218	76.3215	H 2 n 8 N	2	7.58	7.64	16; 30; 33.
219		K 1 n 7 y	2	7.71		
220	77.3333	H 5 n 8 N	3	7.73	7.76	
221		K 3 n 6 y	3	7.80		
222	80.3694	H 5.5 n 8 N	4	7.75	7.78	
223		K 3.5 n 6 y	4	7.81		
224	83.3347	H 5 n 7 N	3	7.76	7.78	1.
225		K 3 n 6 y	3	7.80		
226	88.3153	H 6 n 6 N	3	7.83	7.83	1.
227		K 4 n 6 y	3	7.83		
228	89.3146	H 6 n 7 N	4	7.79	7.81	1.
229		K 4 n 6 y	4	7.83		
230	90.2500	H 3 n 9 N	3	7.62	7.66	1.
231		K 1 n 8 y	3	7.70		
232	93.2396	H 5.5 n 7.5 N	3	7.76	7.78	
233		K 3 n 6 y	3	7.80		
234	95.2215	H 5.5 n 7.5 N	4	7.76	7.80	
235		K 4.5 n 6.5 y	4	7.83		
	24281..					
236	06.3583	M 6 n 7 n	3	7.79		27.

Nr	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24281..			mg	mg	
237		K 3.5 n 7 y	3	7.80	7.79	
238	08.3174	H 5 n 8 N	4	7.73	7.76	32.
239		K 3 n 6 y	4	7.80		
240	09.3042	H 4.5 n 7.5 N	2	7.72	7.74	18; 31.
241		K 2.5 n 7 y	2	7.77		1; 32.
242	10.3062	H 5 n 8 N	5	7.73	7.76	1; 32.
243		K 3 n 6 y	5	7.80		
244	11.2278	H 4.5 n 8 N	4	7.71	7.75	1; 34.
245		K 3 n 7 y	4	7.79		
246	18.2326	H 3.5 n 9 N	2	7.63	7.68	1; 32.
247		K 2 n 8 y	2	7.74		
248	19.2292	H 2 n 9 N	2	7.56	7.64	1; 24.
249		K 1 n 6 y	2	7.72		
250	20.2139	H 5 n 9 N	3	7.71	7.75	32.
251		K 3 n 7 y	3	7.79		
252	22.2174	H 5 n 7 N	3	7.76	7.77	13.
253		K 2.5 n 6 y	3	7.78		
254	23.2257	H 5 n 9 N	4	7.71	7.74	
255		K 3 n 8 y	4	7.77		
256	24.2465	H 4 n 9 N	4	7.66	7.71	
257		K 3 n 8 y	3	7.77		
258	25.2417	H 5 n 9 N	4	7.71	7.75	
259		K 3.5 n 7 y	4	7.80		
260	27.2555	H 4 n 9 N	4	7.66	7.71	32.
261		K 3 n 8 y	4	7.77		
262	65.2292	H 7 n 5 N	4	7.89	7.87	
263		K 4 n 5.5 y	4	7.84		
264	70.2201	K 4.5 n 5.5 y	3	7.89	7.88	1; 27.
265		H 7 n 6 N	3	7.86		
	24283..					
266	06.3576	H 6 n 5 a	4	7.95	8.17	34.
267		N 3 n 5 a	4	8.30		
268	07.3673	H 7 n 5 a	4	7.99	8.15	
269		N 3 n 5 a	4	8.30		
270	11.3694	N 4 n 4 a	4	8.32	8.32	32.
271		y 3 n 6 z	4	8.33		
272	12.3750	H 6 n 6 a	4	7.91	7.95	
273		H 6 n 2 N	4	8.03		
274		K 5 n 3 y	4	7.92		
275	15.3875	H 5 n 3 N	2	7.93	8.02	
276		K 4 n 3 z	2	8.11		
277	23.3701	H 6 n 2 N	3	8.03	8.09	1; 34.
278		K 5 n 3 z	3	8.15		
279	34.3694	N 3 n 6 a	3	8.29	8.31	
280		y 5 n 2 z	3	8.34		
281	43.4090	H 6 n 3 N	3	7.96		
282	52.3937	N 3 n 3 a	2	8.29	8.29	1; 27; 34.
283		y 2 n 6 z	2	8.29		
284	96.3993	H 3 n 5 N	1	7.72		27.

Nr	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24283..			mg	mg	
285		K 2 n 6 y	1	7.76	7.74	
286	97.4153	H 6 n 3 N	2	7.96	8.02	36.
287		n 0 y	2	8.08		27.
288	98.4062	H 7 n 4 N	2	7.94	7.93	
289		K 5 n 3 y	2	7.92		
	24284..					
290	02.4069	N 4 n 3 a	2	8.33	8.33	16.
291		y 5 n 2 z	2	8.34		
292	07.3854	N 4 n 6 h	1	8.57	8.41	16; 30.
293		y 5 n 6 z	1	8.25		
294		a 0 n	1	8.40		
295	09.3715	N 7 n 2 a	2	8.36	8.32	1; 16.
296		y 4 n 3 z	2	8.29		
297	27.2986	N 4 n 3 a	4	8.33	8.45	
298		z 2 n 8 h	4	8.57		
299	28.3472	a 0 n	4	8.40	8.58	37.
300		z 3 n 4 c	4	8.76		
301	29.3299	N 3 n 3 a	4	8.32	8.33	
302		y 5 n 2 z	4	8.34		
303	30.3243	z 4 n 5 c	4	8.77	8.61	37.
304		a 0 n	4	8.40		
305		N 6 n 4.5 h	2	8.71		
306	32.3340	a 3 n 4 c	3	8.73	8.73	
307		z 5 n 6 h	3	8.73		
308	33.3278	n 0 a	3	8.40	8.63	
309		z 4 n 5 c	3	8.77		
310		N 5 n 5 c	3	8.71		
311	34.3222	a 3 n 4.5 h	2	8.66	8.79	16.
312		z 5 n 3 c	2	8.91		
313	35.3875	a 3 n 5 h	1	8.65	8.76	9.
314		z 5 n 4 c	1	8.86		
315	37.3201	a 6 n 2 h	3	8.90	8.90	1.
316		z 7 n 4 c	3	8.91		
317	48.3271	a 3 n 6 h	4	8.62	8.72	
318		z 5 n 5 c	4	8.82		
319	56.3611	a 3 n 4 h	2	8.68	8.75	24.
320		z 5 n 5 c	2	8.82		
321	58.3666	h 3 n 5 d	3	9.48	9.63	16, 37, 38.
322		c 2 n 4 g	3	9.78		
323	63.3229	h 2 n 5 d	3	9.38	9.46	16; 38; 39.
324		c 4 n 6 g	3	9.54		
325	66.3278	a 3 n 5 h	4	8.65	8.71	1.
326		z 6 n 6 c	2	8.82		
327	67.3750	a 3 n 5 h	1	8.65	8.75	1; 16.
328		z 5 n 4 c	1	8.85		
329	72.2736	a 3 n 3 h	3	8.73	8.82	1.
330		z 5 n 3 c	3	8.91		

Nr	J. J.	Comparaisons	Poids	Magnitude conclue	Moyenne du soir	Remarques
	24284..			mg	mg	
331	78.2164	a 4 n 3 h	3	8.78	8.81	
332		z 5 n 4 c	2	8.85		
333	80.3042	a 4 n 2 h	3	8.84	8.89	
334		z 6 n 3 c	3	8.94		
335	88.2625	a 4 n 3 h	3	8.78	8.86	
336		z 6 n 3 c	3	8.94		
	24285..					
337	19.2219	a 4 n 1 h	2	8.93	8.95	16.
338		z 5 n 2 c	2	8.97		
339	24.2368	h 3 n 2 d	2	9.73		1; 16.
340	49.2153	a 3 n 2 h	3	8.80		

Les résultats des observations (moyennes du soir) sont représentés par les diagrammes, placés à la fin du présent Mémoire.

REMARQUES.

1. Clair de Lune. 2. Nova jaune-verdâtre. 3. α Lyr en grande distance zénithale. 4. Observations à la jumelle „Turact". 5. Magnitude de la Nova extrapolée. 6. Nova jaunâtre. 7. Observation en proximité d'un cirrus. 8. Brouillard léger. 9. Ciel brumeux. 10. Observation au voisinage d'une nuage. 11. Nova peu éloignée de l'horizont. 12. Brouillard léger. 13. Transparence de l'air médiocre. 14. Observation au réfracteur Heyde. 15. Idem, oculaire f = 20 mm. 16. Estimations difficiles. 17. (n) — désignation de l'étoile d'après HB. 18. Observation dans une éclaircie. 19. Estimations assez difficiles. 20. Nova à la limite de visibilité, éstimation au moyen des parties laterales de la rétine. Valeur adoptée d'un degré (0.08) représente la moyenne des soirées du 20 au 22 avril 1935. 21. Estimations peu exactes, oculaire f = 30 mm. 22. Nova invisible. 23. Observation au réfracteur Grubb. 24. Quelques cirrus sur le ciel. 25. Observation au chercheur d = 60 mm, grossissant 7 fois. 26. Observation à la lunette Merz, oculaire terrestre 40 ×, éstimation peu sûre. 27. Position de l'observateur incommode. 28. Proximité d'un nuage. 29. Observation au chercheur de réfracteur Grubb. 30. Nova bleuâtre. 31.Nova bleue. 32. Nova verdâtre. 33. Nuages ça et la. 34. Nova verte-émeraude. 35. Lumières de ville génent l'observation. 36. Objectif se couvre du dêpot de rosée. 37. Nova verte. 38. L'image de la Nova floue. 39. Nova verte-foncée.

IV. *Généralités.*

Durant les mois de janvier et fevrier 1935 la Nova était observée aux grandes distances zénithales sur la partie nord du du ciel, souvent récouverte des fumées et éclairée par des lumières d'une grande ville. Ces circonstances gênaient parfois beaucoup les observations.

Les magnitudes de la Nova se rapportant à l'intervalle de temps durant lequel la Nova présentait la coloration verte-intense sont à peu près d'une grandeur supérieures à celles publiés par les observateurs utilisants les instruments plus faibles. Ce phénomène avait été déjà constaté par L. Campbell, M-me G.-C. Flammarion et F. Quénisset. Son explication a été donnée par F. Baldet [1]).

Cette coloration verte était en contraste saillant avec celles des étoiles voisines. Elle rendait parfois les éstimations difficiles. Quelques observations de la couleur de la Nova se trouvent dans les remarques.

Pour terminer qu'il me soit permis de remercier M. le Dr J. Gadomski qui a bien voulu d'effectuer les mésures photométriques de quelques étoiles qui ne figurent pas sur les listes de Harvard.

Varsovie, le 18 janvier 1937.

---

[1]) P. A. Nov. 1935 et B. S. A. F. 50 p. 225.

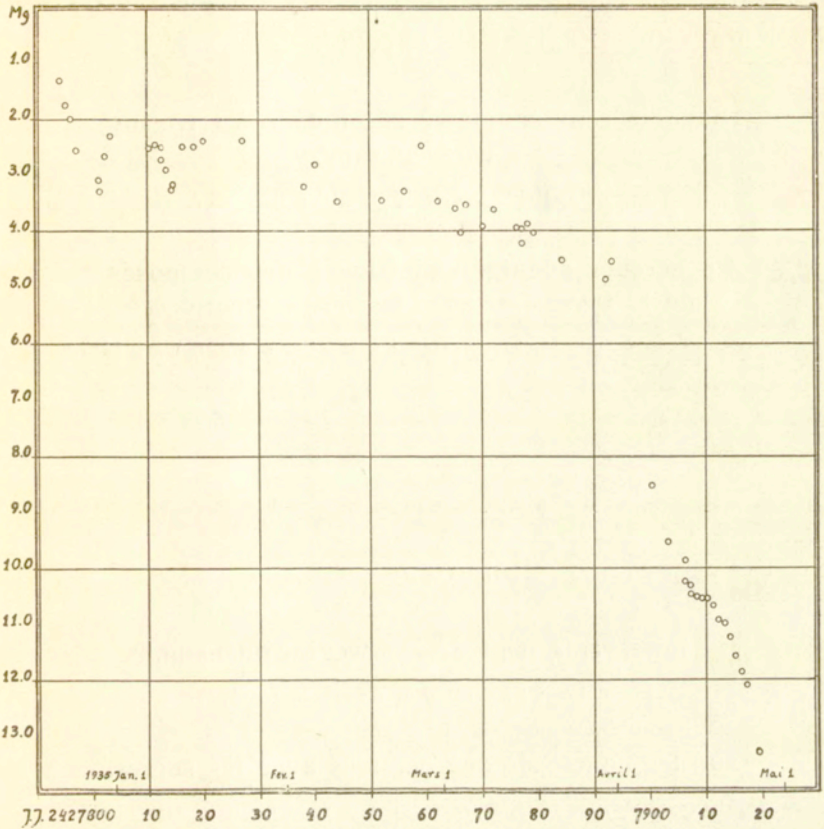

Fig. 1. Graphique des observations de la Nova Herculis faites du 22 décembre 1934 au 26 avril 1935.

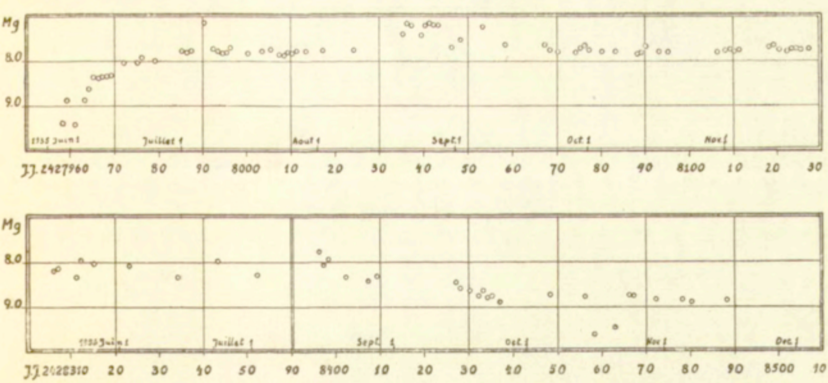

Fig. 2. Graphique des observations de la Nova Herculis faites du 4 juin 1935 au 15 novembre 1936.

M. Kołaczkowska i St. Przyłęcki.

Badania rentgenometryczne połączeń tyrozyny z wielocukrami.

Przedstawił St. Przyłęcki dn. 16 marca 1937.

Recherches roentgénometriques des composés de la thyrosine avec les polysaccharides.

Note présentée par M. St. Przyłęcki à la séance du 16 mars 1937.

St. Przyłęcki i J. Cichocka.

Połączenia peptydów z węglowodanami.

Przedstawił St. Przyłęcki dn. 16 marca 1937.

Sur les composés des peptides avec les sucres.

Note présentée par M. St. Przyłęcki à la séance du 16 mars 1937.

ERRATA.

Page 3, 14-th line in the formula (6') instead of:

$$(\Theta_1 U_1, \ \Theta_2 U_2, \ldots \Theta_k U_k) =$$

ought to be:

$$(U_1 + \Theta_1 \delta_1, U_2 + \Theta_2 \delta_2, \ldots U_k + \Theta_k \delta_k) =$$