COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXX Année 1937 Classe III Fascicule 7–9

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXX 1937 Zeszyt 7—9

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1937

Druk. i Litogr. Jan Cotty
w Warszawie, Kapucyńska 7.

TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

TABLE DES MATIÈRES.

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych

Posiedzenie
z dnia 24 czerwca 1937 r.

Alfred Tarski.

O ciałach i funkcjach zbiorów addytywnych i multyplikatywnych.

Przedstawił K. Kuratowski dnia 24 czerwca 1937 r.

STRESZCZENIE.

Rodzinę zbiorów **K**, która wraz z dowolnemi dwoma zbiorami X i Y zawiera również jako elementy sumę $X+Y$ i różnicę $X-Y$ tych zbiorów, nazywamy, jak wiadomo, ciałem zbiorów. Jeśli przytem suma, wzgl. iloczyn, dowolnych zbiorów danego ciała w ilości conajwyżej $\mathfrak{m}$ również należy do danego ciała, to ciało nosi nazwę $\mathfrak{m}$-addytywnego, wzgl. $\mathfrak{m}$-multyplikatywnego.

Funkcjami zbiorów nazywa autor tego rodzaju funkcje F, które każdemu zbiorowi X, należącemu do pewnego ciała **K**, przyporządkowują inny zbiór $F(X)$ (nie koniecznie należący do **K**). Jeśli przytem funkcja sumy, wzgl. iloczynu, co najwyżej $\mathfrak{m}$ zbiorów równa się sumie, wzgl. iloczynowi, funkcyj wszystkich tych zbiorów, to funkcja nosi nazwę $\mathfrak{m}$-addytywnej, wzgl. $\mathfrak{m}$-multyplikatywnej.

Autor podaje (bez dowodów) szereg twierdzeń o funkcjach addytywnych i multyplikatywnych; okazuje się w szczególności, że w pewnych warunkach z tego, że funkcja jest $\mathfrak{m}$-addytywna i $\mathfrak{m}$-multyplikatywna dla jakiejś liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, można wnioskować o tem, że jest ona $\mathfrak{n}$-addytywna i $\mathfrak{n}$-multyplikatywna dla różnych liczb $\mathfrak{n}$ większych od $\mathfrak{m}$. Wspomniane twierdzenia posiadają różne zastosowania w teorii ideałów, w abstrakcyjnej teorii miary, dalej w badaniach nad zagadnieniem reprezentacji oraz nad izomorfizmem i homomorfizmem ciał Boole'a.

Alfred Tarski.

Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen.

Vorläufige Mitteilung, vorgelegt von K. Kuratowski am 24. VI. 1937.

Die Hauptbegriffe der vorliegenden Betrachtungen sind die Begriffe des $\mathfrak{m}$-additiven und des $\mathfrak{m}$-multiplikativen Mengenkörpers sowie der $\mathfrak{m}$-additiven und der $\mathfrak{m}$-multiplikativen Mengenfunktion. Es werden verschiedene Sätze über diese Begriffe angeführt; ferner werden einige Anwendungen dieser Sätze aufgezeigt, und zwar auf die Theorie der Ideale, auf das allgemeine Maßproblem und auf das sog. Repräsentationsproblem; schließlich werden gewisse Folgerungen für die allgemeine Theorie der Boole'schen Körper gezogen. Alle Ergebnisse sind in dieser (vorläufigen) Mitteilung ohne Beweise angegeben[1]).

§ 1. Additive und multiplikative Mengenkörper; erreichbare Kardinalzahlen.

1.1. Ein nicht leeres Mengensystem K heißt Mengenkörper oder kurz Körper, wenn es mit zwei beliebigen Mengen X und Y zugleich ihre Summe $X + Y$ und ihre Differenz $X - Y$ als Elemente enthält.

1.2. Der Körper K heißt $\mathfrak{m}$-additiv, bzw. $\mathfrak{m}$-multiplikativ, wenn er mit allen Mengen X eines nicht leeren Systems $\mathbf{X} \subset K$, dessen Mächtigkeit $< \mathfrak{m}$ ist, zugleich ihre Summe $\sum_{X \varepsilon \mathbf{X}} X$, bzw. ihren Durchschnitt $\prod_{X \varepsilon \mathbf{X}} X$ als Element enthält.

1.3 Der Körper K heißt absolut-additiv, bzw. absolut-multiplikativ, wenn er mit allen Mengen X eines beliebigen nicht leeren Systems $\mathbf{X} \subset K$ zugleich ihre Summe $\sum_{X \varepsilon \mathbf{X}} X$, bzw. ihren Durchschnitt $\prod_{X \varepsilon \mathbf{X}} X$ als Element enthält[2]).

1.4. Ist $\mathbf{X}$ ein beliebiges Mengensystem, so wird die Menge $\sum_{X \varepsilon \mathbf{X}} X$ mit $1_{\mathbf{X}}$ bezeichnet und All- oder Einsmenge des Systems $\mathbf{X}$ genannt.

1.5 Der Körper K wird als Körper mit Einselement bezeichnet, wenn $1_K \varepsilon K$ ist.

1.6 Das Mengensystem K heißt vollständiger Körper, wenn $K = \underset{X}{E} [X \subset 1_K]$ ist.

1.7. Ist K ein Körper, so heißt ein System $\mathfrak{X}$ Basis des Körpers K, wenn $\mathfrak{X} \subset K$ und wenn $Y = \sum_{X \varepsilon \mathfrak{X} \text{ und } X \subset Y} X$ für jede Menge $Y \varepsilon K$ gilt.

1.8. Ist K ein Körper, so heißt eine nicht leere Menge $X \varepsilon K$ Atomelement des Körpers K, wenn jede nicht leere Menge $Y \subset X$, die zu K gehört, mit X identisch ist; das System aller Atomelemente des Körpers K wird mit $At(K)$ bezeichnet[3]).

1.9. Der Körper K heißt atomar, wenn das System $At(K)$ eine Basis von K ist.

1.10. Der Körper K heißt atomfrei, wenn $At(K) = 0$ ist.

Es gelten nun folgende, größtenteils einleuchtende oder leicht beweisbare Sätze:

1.11. Ist $\mathfrak{m} < \aleph_0$, so ist jeder Körper $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{m}$-multiplikativ.

1.12. Ist $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, so ist jeder $\mathfrak{m}$-additive (-multiplikative) Körper zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (-multiplikativ).

1.13. Es sei jedem Element m einer Menge M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}_m$ zugeordnet und sei $\sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{n}_m = \mathfrak{n}$. Dann ist jeder Körper K, der sowohl $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ), als auch $\mathfrak{n}_m$-additiv (-multiplikativ) für jedes $m \varepsilon M$ ist, zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (-multiplikativ).

1.14. Jeder absolut-additive (-multiplikative) Körper ist zugleich $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ) für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$.

1.15. Wenn der Körper K eine Basis mit einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ hat oder insbesondere wenn $\overline{\overline{K}} \leqslant \mathfrak{m}$ oder auch wenn $\overline{\overline{1_K}} \leqslant \mathfrak{m}$ ist und wenn dabei K $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ) ist, so ist zugleich K absolut-additiv (-multiplikativ).

1.16. Jeder endliche Körper ist absolut-additiv.

1.17. Jeder $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additive Körper ist zugleich $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) multiplikativ.

1.18. Jeder $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) multiplikative Korper mit Einselement ist zugleich $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additiv.

1.19. Jeder absolut-additive Körper ist ein Körper mit Einselement.

1.20. Jeder vollständige Körper ist ein absolut-additiver Körper.

1.21. Jeder absolut-multiplikative und umsomehr jeder absolut-additive Körper ist atomar.

1.22. Ist der Körper K absolut-additiv und ist $\overline{\overline{At(K)}} = \mathfrak{m}$, so ist $\overline{\overline{K}} = 2^{\mathfrak{m}}$.

1.23. Jeder unendliche Körper K enthält ein abzählbares Teilsystem $X \subset K$ von paarweise disjunkten Mengen[4].

1.24. Jeder unendliche absolut-additive Körper hat eine Mächtigkeit $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

1.25. Damit es einen Körper K mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{K}} = \mathfrak{m}$ gibt, ist es notwendig und hinreichend, daß entweder $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ oder $\mathfrak{m}$ von der Form: $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n} < \aleph_0$, ist.

1.26. Für jeden Körper K und jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) K ist absolut-additiv und $\overline{\overline{At(K)}} = \mathfrak{m}$; (ii) K ist $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{m}$ ist die größte Zahl, für die es ein System $X \subset K$ mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ von nicht leeren disjunkten Mengen gibt.

1.27. Für jeden Körper sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) K ist absolut additiv und $At(K)$ ist abzählbar; (ii) K ist unendlich, $\aleph_0$-additiv und jedes System $X \subset K$ von paarweise disjunkten Mengen ist höchstens abzählbar.

Wie leicht ersichtlich, ist 1.27 ein Korollar von 1.26 und 1.22.

Für weitere Zwecke brauchen wir noch zwei Begriffe aus der Arithmetik der Kardinalzahlen[5].

1.28. Wir wollen sagen, daß *die Kardinalzahl* $\mathfrak{n}$ *von der Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar ist*, wenn $\mathfrak{n}$ zu jedem System $\mathfrak{K}$ von Kardinalzahlen gehört, das folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{K}$;

(ii) ist $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{q} \varepsilon \mathfrak{K}$;

(iii) ist jedem Element p einer Menge P mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{K}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{q}_p \varepsilon \mathfrak{K}$ zugeordnet, so ist $\sum\limits_{p \varepsilon P} \mathfrak{q}_p \varepsilon \mathfrak{K}$;

(iv) ist $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{q} \varepsilon \mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \varepsilon \mathfrak{K}$.

1 29. Wir wollen sagen, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ aus stark ist, wenn $\mathfrak{n}$ zu jedem System $\mathfrak{K}$ von Kardinalzahlen gehört, das den Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus 1.28 sovie folgender Bedingung genügt:

(v) in dem System $\mathfrak{K}$ gibt es keine größte Kardinalzahl.

Es gilt, wie leicht zu zeigen:

1.30. Das System $\mathfrak{K}$ der Kardinalzahlen, die von der gegebenen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ aus schwach bzw. stark, erreichbar sind, genügt den Bedingungen (i)–(iv) aus 1.28, bzw. den Bedingungen (i)–(iii) aus 1.28 und (v) aus 1.29.

1.31. Ist $\mathfrak{m} < 2$, so ist $\mathfrak{n}$ dann und nur dann von $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, wenn $\mathfrak{n} < 2$ ist.

1.32. Ist $2 \leqslant \mathfrak{m} < \aleph_0$, so ist $\mathfrak{n}$ dann und nur dann von $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, wenn $\mathfrak{n} < \aleph_0$ ist.

1.33. Ist $\mathfrak{m} < \aleph_0$, so ist $\mathfrak{n}$ dann und nur dann von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar, wenn $\mathfrak{n} < \aleph_0$ ist.

1.34. Ist $\mathfrak{m} \geqslant 2$, so ist jede Zahl $\mathfrak{n}$, die von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar ist, zugleich erreichbar.

1.35. Folgende Sätze sind äquivalent:

(i) ist $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl, so ist die Zahl $2^{\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar;

(ii) ist $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl, so ist jede Zahl $\mathfrak{n}$, die von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar ist, zugleich auch stark erreichbar.

Beide Sätze (i) und (ii) sind Folgerungen aus der Cantorschen Alefhypothese:

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ für jede Ordnungszahl α.

Das Problem, ob es Kardinalzahlen gibt, die von der Zahl $\aleph_0$ aus weder stark noch schwach erreichbar sind, kann aller Wahrscheinlichkeit nach auf dem Boden der üblichen Axiomensysteme der Mengenlehre nicht entschieden werden.

§ 2. Additive und multiplikative Mengenfunktionen.

In diesem und drei folgenden Paragraphen wird ein bestimmter Körper K als gegeben angenommen; alle Begriffe und Sätze werden implizite oder explizite auf diesen Körper bezogen.

2.1.[6]) Eine Funktion F wird als Mengenfunktion (in $\boldsymbol{K}$) bezeichnet, wenn sie jeder Menge $X \varepsilon \boldsymbol{K}$ eine Menge $F(X)$ (nicht notwendig aus $\boldsymbol{K}$) eindeutig zuordnet, m. a. W. wenn der Vorbereich von F sich mit $\boldsymbol{K}$ deckt und der Nachbereich aus Mengen besteht.

2.2 Eine Mengenfunktion F heißt $\mathfrak{m}$-additiv, bzw. $\mathfrak{m}$-multiplikativ, wenn

$$F\left(\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X\right) = \sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} F(X), \text{ bzw. } F\left(\prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X\right) = \prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} F(X)$$

für jedes nicht leere System $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}} \leqslant \mathfrak{m}$, dessen Summe $\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, bzw. Durchschnitt $\prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, dem Körper $\boldsymbol{K}$ angehört.

2.3 Eine Mengenfunktion F heißt absolut-additiv, bzw. absolut-multiplikativ, wenn

$$F\left(\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X\right) = \sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} F(X), \text{ bzw. } F\left(\prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X\right) = \prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} F(X),$$

für jedes nicht leere System $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$, dessen Summe $\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, bzw. Durchschnit $\prod_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$ zu $\boldsymbol{K}$ gehört.

Zwischen den $\mathfrak{m}$-additiven und $\mathfrak{m}$-multiplikativen Mengenfunktionen, die verschiedenen Werten von $\mathfrak{m}$ entsprechen, bestehen zahlreiche Beziehungen, zum Teil ganz elementarer Natur. Es gelten z. B. folgende Sätze, die den Sätzen aus § 1 teilweise analog sind:

2.4. Ist $\mathfrak{m} < 2$, so ist jede Mengenfunktion $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{m}$-multiplikativ.

2.5. Ist $\mathfrak{m} < \aleph_0$, so ist jede 2-additive (-multiplikative) Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ).

2.6. Ist $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive (-multiplikative) Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (-multiplikativ).

2.7. Es sei $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ und $\mathfrak{n}$ eine beliebige Kardinalzahl. Damit jede $\mathfrak{m}$-additive (-multiplikative) Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (-multiplikativ) ist, ist notwendig und hinreichend, daß jedem System $\mathbf{Y} \subset K$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{\mathbf{Y}}} \leqslant \mathfrak{n}$, derart daß $\sum\limits_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \varepsilon K \left(\prod\limits_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \varepsilon K \right)$, ein System $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{\mathbf{X}}} \leqslant \mathfrak{m}$ entspricht, das der Formel:

$$\sum_{X \varepsilon \mathbf{X}} X = \sum_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \qquad \left(\prod_{X \varepsilon \mathbf{X}} X = \prod_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \right)$$

genügt.

Dieser Satz gilt auch für die Zahlen $\mathfrak{m} < \aleph_0$, wenn man nur in ihm die Formel: $\overline{\overline{\mathbf{X}}} \leqslant \mathfrak{m}$ durch: $\overline{\overline{\mathbf{X}}} < \aleph_0$ ersetzt.

2.8. Es sei jedem Element m einer Menge M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}_m$ zugeordnet und es sei $\sum\limits_{m \varepsilon M} \mathfrak{n}_m = \mathfrak{n}$. Ist dann sowohl der Körper K als auch die Mengenfunktion F $\mathfrak{n}_m$-additiv (-multiplikativ) für jedes $m \varepsilon M$ und ist dabei die Mengenfunktion F $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ), so ist sie auch $\mathfrak{n}$-additiv (-multiplikativ).

2.9. Jede absolut-additive (-multiplikative) Mengenfunktion ist zugleich $\mathfrak{m}$-additiv (-multiplikativ) für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$.

2.10. Wenn der Körper K eine Basis mit einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ hat oder insbesondere wenn $\overline{\overline{K}} \leqslant \mathfrak{m}$ oder auch wenn $\overline{\overline{I_K}} \leqslant \mathfrak{m}$ ist, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive (-multiplikative) Mengenfunktion zugleich absolut-additiv (-multiplikativ).

2.11. Ist $\mathfrak{m} \geqslant 2$ und $\mathfrak{n} \geqslant 2$, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{n}$-multiplikative Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{m}$-multiplikativ und $\mathfrak{n}$-additiv (und umgekehrt).

2.12. Ist $\mathfrak{m} \geqslant 2$, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive und absolut-multiplikative Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{m}$-multiplikativ und absolut-additiv (und umgekehrt).

Tiefer liegend als die vorangehenden Sätze ist der Satz

2.13. Ist der Körper K $2^{\mathfrak{m}}$-additiv, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-multiplikative Mengenfunktion zugleich $2^{\mathfrak{m}}$-additiv und $2^{\mathfrak{m}}$-multiplikativ.

Der Satz 2.13 kann auf Grund von 2.6 und 2.8 erheblich verallgemeinert werden:

2.14. Ist der Körper K $\mathfrak{n}$-additiv und ist dabei die Zahl $\mathfrak{n}$ von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-multiplikative Mengenfunktion zugleich $\mathfrak{n}$-additiv und $\mathfrak{n}$-multiplikativ.

Hieraus ergibt sich sofort folgendes Korollar:

2.15. Ist der Körper K absolut-additiv und ist die Mächtigkeit dieses Körpers von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, so ist jede $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-multiplikative Mengenfunktion zugleich absolut-additiv und absolut-multiplikativ.

Wir geben hier eine Anwendung dieses Korollars. Es sei K der Körper, der aus allen Mengen reeller Zahlen besteht. Wir wollen eine Mengenfunktion F als Urbildfunktion bezeichnen, wenn es eine Funktion f der reellen Variable gibt, so daß $F(X)$ die Urbildmenge der Menge X in Bezug auf f ist, d. h. der Formel: $F(X) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) \varepsilon X]$ für jedes $X \varepsilon K$ genügt.

Nun kann man auf Grund von 2.15 (und 2.11) zeigen, daß eine Mengenfunktion F in K (deren Nachbereich auch in K enthalten ist) dann und nur dann eine Urbildfunktion ist, wenn sie $\aleph_0$-additiv und 2-multiplikativ ist und dabei der Formel: $F(0) = 0$ genügt.

Der Satz 2.15 kann auf gewisse Körper ausgedehnt werden, die nicht absolut-additiv sind; so z. B.:

2.16. Der Körper K sei $\mathfrak{m}$-additiv; es sei möglich, jedem Elementenpaar (m, n) aus einer Menge M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ eine Menge $X_{m,n} \varepsilon K$ in der Weise zuzuordnen, daß (i) $\sum_{n \varepsilon M} X_{m,n} = 1_K$ für jedes $m \varepsilon M$ gilt und daß (ii) für jede Funktion f, deren Vorbereich gleich M und deren Nachbereich in M enthalten ist, die Menge $\prod_{m \varepsilon M} X_{m,\, f(m)}$ entweder leer oder ein Atomelement von K ist. Dann ist jede $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-multiplikative Mengenfunktion zugleich absolut-additiv und absolut-multiplikativ.

Zu den Körpern, die den Voraussetzungen von 2.16 genügen, gehören u. a. (in dem wichtigsten Spezialfall: $\mathfrak{m} = \aleph_0$)

alle $\aleph_0$-additiven Körper, die aus Punktmengen eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes bestehen und die unter ihren Elementen alle (n-dimensionalen) Intervalle dieses Raumes enthalten, also z. B. die Systeme der Borelschen und der im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen.

Die Voraussetzung über die Erreichbarkeit der Zahl $\mathfrak{n}$, bzw. der Mächtigkeit $\overline{\overline{K}}$ von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus scheint in 2.14, bzw. 2.15 wesentlich zu sein. Von dem trivialen Fall: $\mathfrak{m} < 2$ abgesehen, ist es aber bis jetzt nur gelungen, dieses Problem für den Fall: $2 \leqslant \mathfrak{m} < \aleph_0$ endgültig zu lösen. Es bestehen nämlich die Sätze[7]):

2.17. Die Bedingung:

(i) es gibt ein unendliches System $\mathbf{Y} \subset K$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{\mathbf{Y}}} \leqslant \mathfrak{n}$ von paarweise disjunkten Mengen, so daß

$$\sum_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \varepsilon K,$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß es eine 2-additive und 2-multiplikative Mengenfunktion gibt, die weder $\mathfrak{n}$-additiv noch $\mathfrak{n}$-multiplikativ ist.

2.18. Ist der Körper K unendlich und $\aleph_0$-additiv, so ist die Bedingung (i) aus 2.17 für $\mathfrak{n} = \aleph_0$ erfüllt und es gibt demnach eine 2-additive und 2-multiplikative Mengenfunktion, die weder $\aleph_0$-additiv noch $\aleph_0$-multiplikativ ist.

2.19. Die Bedingung:

(i) es gibt ein unendliches System $\mathbf{Y} \subset K$ von paarweise disjunkten Mengen, so daß $\sum_{Y \varepsilon \mathbf{Y}} Y \varepsilon K$,

ist notwendig und hinreichend dafür, daß es eine 2-additive und 2-multiplikative Mengenfunktion gibt, die weder absolut-additiv noch absolut-multiplikativ ist.

2.20 Die Bedingung (i) aus 2.19 impliziert folgende Bedingung:

(ii) es gibt eine Menge $Y \varepsilon K$, die keine Summe von endlich vielen Atomelementen des Körpers K ist.

Die beiden Bedingungen (i) und (ii) sind stets erfüllt, wenn K ein unendlicher Körper mit Einselement ist.

§ 3. Anwendungen auf die Theorie der Ideale.

3.1. Ein nicht leeres Mengensystem $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{K}$ heißt Ideal (in $\boldsymbol{K}$), wenn es mit zwei beliebigen Mengen X und Y zugleich ihre Summe $X + Y$ und mit jeder beliebigen Menge X zugleich jede Menge $Y \varepsilon \boldsymbol{K}$, die eine Teilmenge von X ist, als Element enthält[8]).

3.2. Das Ideal $\boldsymbol{I}$ heißt $\mathfrak{m}$-additiv, wenn es mit allen Mengen X eines Systems $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{I}$, dessen Mächtigkeit $< \mathfrak{m}$ ist, zugleich ihre Summe $\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$ als Element enthält, vorausgesetzt daß diese Summe zu $\boldsymbol{K}$ gehört.

3.3. Das Ideal $\boldsymbol{I}$ heißt absolut-additiv, wenn es mit allen Mengen eines beliebigen Systems $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{I}$ zugleich ihre Summe $\sum_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$ als Element enthält, vorausgesetzt daß diese Summe zu $\boldsymbol{K}$ gehört.

3.4. Das Mengensystem $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{K}$ heißt Hauptideal (in $\boldsymbol{K}$), wenn $1_{\boldsymbol{I}} \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{I} = \underset{X}{\mathrm{E}} [X \varepsilon \boldsymbol{K} \textit{ und } X \subset 1_{\boldsymbol{I}}]$ ist.

3.5. Das Ideal $\boldsymbol{I}$ heißt $\mathfrak{p}$-saturiert, wenn jedes System $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$, das folgender Bedingung genügt:

ist $X, Y \varepsilon \boldsymbol{X}$, so ist $X = Y$ oder $X . Y \varepsilon \boldsymbol{I}$,

eine Mächtigkeit $< \mathfrak{p}$ hat.

3.6. Das Ideal $\boldsymbol{I}$ heißt Primideal (in $\boldsymbol{K}$), wenn es von $\boldsymbol{K}$ verschieden und 1-saturiert ist.

Wir wollen hier eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der Ideale angeben. Wir beginnen dabei mit Sätzen ganz elememtaren Charakters; tieferer Natur sind dagegen die weiter unten angeführten Ergebnisse (3.19 — 3.26) die Primideale und allgemeiner $\mathfrak{m}$-saturierte Ideale betreffen.

3.7. Das Mengensystem $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{K}$ ist dann und nur dann ein Ideal, wenn es die Nullmenge als Element enthält und dabei folgender Bedingung genügt:

ist $X \varepsilon \boldsymbol{I}$, $Y \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $X - Y \varepsilon \boldsymbol{I}$, so ist auch $Y \varepsilon \boldsymbol{I}$.

3.8. (i) Jedes Ideal ist ein Körper;

(ii) ist der Körper $\boldsymbol{K}$ $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additiv, so ist jedes $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additive Ideal in $\boldsymbol{K}$ ein $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additiver Körper;

(iii) ist der Körper K vollständig, so ist jedes absolut-additive Ideal in K ein vollständiger Körper;

(iv) ist der Körper K atomar, bzw. atomfrei, so ist auch jedes Ideal in K ein atomarer, bzw. atomfreier Körper.

3.9. Ist $\mathfrak{m} < \aleph_0$, so ist jedes Ideal $\mathfrak{m}$-additiv.

3.10. Die Sätze 2.6—2.10 bleiben gültig, wenn man in ihnen überrall das Wort „Mengenfunktion" durch „Ideal" ersetzt (und dabei die Worte wegläßt, die sich auf multiplikative Funktionen beziehen).

3.11. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) I ist ein absolut-additives Ideal; (ii) $I = \underset{X}{\mathsf{E}}\,[X \varepsilon K$ *und* $X \subset 1_I]$; (iii) es gibt einen vollständigen Körper L, so daß $I = K \,.\, L$.

3.12. I ist dann und nur dann ein Hauptideal, wenn I ein absolut-additives Ideal ist und wenn dabei 1_I zu K gehört.

3.13. Der Körper K ist dann und nur dann absolut-additiv, wenn jedes absolut-additive Ideal in K zugleich ein Hauptideal ist.

3.14. Der Körper K ist ein absolut-additives Ideal in K und ist zugleich das einzige 0-saturierte Ideal.

3.15. Folgende Bedingungen sind äquivalent: (i) I ist ein absolut-additives Primideal; (ii) I ist ein Primideal und es gilt $1_I \neq 1_K$; (iii) es gibt ein Element $x \varepsilon 1_K$, so daß $I = \underset{X}{\mathsf{E}}\,[X \varepsilon K$ *und* x *non* $\varepsilon X]$.

Es bestehen gewisse Verknüpfungen zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der additiven und multiplikativen Mengenfunktionen; die Analogien zwischen beiden Theorien, die bereits durch Satz 3.10 ans Licht gebracht wurden, haben ihre eigentliche Quelle in folgenden einfachen Sätzen:

3.16. Ist F eine $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additive Mengenfunktion, wobei $\mathfrak{m} \geqslant 2$, und ist $I = \underset{X}{\mathsf{E}}\,[F(X) = F(0)]$, so ist I ein $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additives Ideal.

3.17. Unter den Voraussetzungen von 3.16 ist I dann und nur dann ein Primideal, wenn F $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) multiplikativ ist und wenn der Nachbereich von F aus genau zwei Mengen besteht.

3.18. Ist I ein $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additives Ideal, so gibt es eine $\mathfrak{m}$-(bzw. absolut-) additive Mengenfunktion F, für die $I = \mathop{\mathrm{E}}_{X} [F(X) = F(0)]$ gilt; eine solche Funktion kann z. B. durch die Formeln:

$$F(X) = 0 \text{ für } X \varepsilon I, \quad F(X) = 1_K \text{ für } X \varepsilon K - I$$

bestimmt werden.

Auf Grund von 3.18 können die Ideale als ein Instrument zur Konstruktion von additiven Mengenfunktionen verwendet werden; durch die Primideale wird insbesondere (mit Rücksicht auf 3.17) die Konstruktion von Funktionen ermöglicht, die zugleich additiv und multiplikativ sind.

Mit Hilfe von 3.16—3.18 können (neben Sätzen 2.6 — 2.10, von denen in 3.10 die Rede war) auch die wichtigsten Sätze aus § 2, nämlich 2.13 – 2.16, auf den Boden der Theorie der Ideale übertragen werden; auch Sätze 2.17 — 2.20 sind zu einer analogen Umformung geeignet. Auf diesem Wege werden folgende Ergebnisse gewonnen:

3.19. Unter den Voraussetzungen von 2.14 ist jedes $\mathfrak{m}$-additive Primideal zugleich $\mathfrak{n}$-additiv.

3.20. Unter den Voraussetzungen von 2.15, bzw. 2.16 ist jedes $\mathfrak{m}$-additive Primideal zugleich absolut-additiv (und demnach — im Falle von 2.15 — ein Hauptideal).

3.21[7]). Die Bedingung (i) aus 2.17 ist notwendig und hinreichend dafür, daß es ein Primideal gibt, das nicht $\mathfrak{n}$-additiv ist.

3.22. Die Bedingung (i) aus 2.19 ist notwendig und hinreichend dafür, daß es ein Primideal gibt, das nicht absolut-additiv ist.

Es ist zu bemerken, daß die beiden letzteren Sätze nicht als Korollare aus 2.17 und 2.19 erhalten werden können; es bestehen hier vielmehr die Folgebeziehungen in umgekehrter Richtung: aus der Existenz der Primideale kann auf die Existenz der additiven und multiplikativen Mengenfunktionen geschlossen werden.

Da in dieser Mitteilung die Primideale als ein Spezialfall der $\mathfrak{p}$-saturierten Ideale definiert wurden, so entsteht in einer natürlichen Weise die Frage, ob und wie man die für die Primideale gewonnenen Ergebnisse auf beliebige saturierte Ideale ausdehnen kann. Die Untersuchungen in dieser Richtung sind noch nicht abgeschlossen; wir geben hier einige der bisher erzielten Teilergebnisse an, die mit 3.19 und 3.20 zusammenhängen.

3.23[9]). Ist der Körper K $\mathfrak{n}$-(bzw. absolut-)additiv und ist die Zahl $\mathfrak{n}$ (bzw. die Mächtigkeit des Systems $At(K)$) von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar, so ist jedes $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-saturierte Ideal zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (bzw. ein Hauptideal).

3.24. Ist der Körper K $\mathfrak{n}$-(bzw. absolut-)additiv, ist ferner $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\mathfrak{p}}$ und ist das Ideal $I \neq K$ $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{p}$-saturiert, aber nicht $\mathfrak{n}$-additiv (bzw. kein Hauptideal), so kann I zu einem $\mathfrak{m}$-additiven Primideal J erweitert werden ($I \subset J$), das ebenfalls nicht $\mathfrak{n}$-additiv (bzw. kein Hauptideal) ist. Ist $\mathfrak{p} < \aleph_0$, so gilt dieser Satz für beliebige (nicht nur $\mathfrak{n}$-, bzw. absolut-additive) Körper.

Aus 3.19, 3.20 und 3.24 ergibt sich sofort:

3.25. Ist der Körper K $\mathfrak{n}$-(bzw. absolut-)additiv und ist die Zahl $\mathfrak{n}$ (bzw. die Mächtigkeit des Systems $At(K)$) von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, so ist jedes $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{p}$-saturierte Ideal, wo $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\mathfrak{p}}$, zugleich $\mathfrak{n}$-additiv (bzw. ein Hauptideal).

Es sei bemerkt, daß es bis jetzt nicht gelungen ist, folgenden Satz $\mathcal{S}$ zu beweisen, der eine Verschärfung jedes der drei Sätze: 3.19, 3.23 und 3.25 darstellen würde:

$\mathcal{S}$. Unter den Voraussetzungen von 2.14 ist jedes $\mathfrak{m}$-additive und $\mathfrak{m}$-saturierte Ideal zugleich $\mathfrak{n}$-additiv.

Man ersieht aus 3.19 und 3.25, daß es genügen würde, den Satz $\mathcal{S}$ im Falle: $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}}$ zu beweisen, um sich von der Gültigkeit des Satzes in seiner allgemeinen Form zu überzeugen (es würde sogar genügen, diesen Spezialfall von $\mathcal{S}$ lediglich für die vollständigen Körper zu beweisen). Anderseits leuchtet es ein, daß $\mathcal{S}$ direkt aus 3.23 abgeleitet werden kann, wenn die Richtigkeit der Hypothese (i), bzw. (ii) aus 1.35 (oder umsomehr der Cantorschen Alefhypothese) vorausgesetzt wird.

§ 4. Anwendungen auf das abstrakte Maßproblem.

4.1. Eine Funktion f wird als endlich-, bzw. abzählbar-additive Maßfunktion (in $\boldsymbol{K}$) bezeichnet, wenn sie folgenden Bedingungen genügt.

(i) jeder Menge $X \varepsilon \boldsymbol{K}$ wird eine reelle Zahl $f(X) \geqslant 0$ zugeordnet;

(ii) für jede endliche, bzw. unendliche Folge von paarweise disjunkten Mengen $X_1, X_2, X_3 \ldots \varepsilon \boldsymbol{K}$ ist $f(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots) = f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + \ldots$ (vorausgesetzt, daß die Summe $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$ zu $\boldsymbol{K}$ gehört);

(iii) es gibt eine Menge $X \varepsilon \boldsymbol{K}$, so daß $f(X) \neq 0$;

(iv) es gibt ein System $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$, so daß $1_{\boldsymbol{X}} = 1_{\boldsymbol{K}}$ und $f(X) = 0$ für jedes $X \varepsilon \boldsymbol{X}$ ist.

Das abstrakte Maßproblem betrifft eben die Existenz von Funktionen, die den angegebenen Bedingungen genügen; durch die zusätzlichen Bedingungen (iii) und (iv) werden dabei die „trivialen" Lösungen dieses Problems ausgeschlossen (um eine Funktion f zu erhalten, die (i) — (iii), aber nicht (iv) erfüllt, genügt es, ein Element $x \varepsilon 1_{\boldsymbol{K}}$ zu wählen und zu setzen: $f(X) = 0$, wenn x *non* εX; $f(X) = 1$, wenn $x \varepsilon X$) [10].

4.2. Eine endlich-, bzw. abzählbar-additive Maßfunktion heißt $\mathfrak{q}$-wertig, wenn ihr Nachbereich die Mächtigkeit $\mathfrak{q}$ hat.

Es bestehen gewisse Zusammenhänge zwischen den Maßfunktionen und den $\aleph_0$-saturierten Idealen; insbesondere sind die 2-wertigen Maßfunktionen mit den Primidealen eng verknüpft. Das erhellt aus folgenden Sätzen, die zu 3.16 — 3.18 analog sind:

4.3. Ist f eine endlich-(bzw. abzählbar-) additive Maßfunktion und ist $\boldsymbol{I} = \underset{X}{\mathrm{E}}\,[f(X) = 0]$, so ist $\boldsymbol{I}$ ein $\aleph_0$-saturiertes (bzw. ein $\aleph_0$-additives und $\aleph_0$-saturiertes), aber kein absolut-additives Ideal.

4.4. Unter den Voraussetzungen von 4.3 sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) es gibt eine Zahl $\mathfrak{p} < \aleph_0$, so daß das Ideal $\boldsymbol{I}$ $\mathfrak{p}$-saturiert ist;

(ii) es gibt eine Zahl $\mathfrak{q} < \aleph_0$, so daß die Maßfunktion f $\mathfrak{q}$-wertig ist.

Insbesondere ist I dann und nur dann ein Primideal, wenn f 2-wertig ist.

4.5. Ist $\mathfrak{p} < \aleph_0$ und ist I ein $\mathfrak{p}$-saturiertes (bzw. ein $\aleph_0$-additives und $\mathfrak{p}$-saturiertes), aber kein absolut-additives Ideal, so gibt es eine endlich-(bzw. abzählbar-) additive Maßfunktion f, für die $I = \underset{X}{\mathrm{E}} [f(X) = 0]$ ist. Ist dabei I für keine Zahl $\mathfrak{n}$, die $< \mathfrak{p}$ ist, $\mathfrak{n}$-saturiert, so kann die Funktion f so bestimmt werden, daß ihr Nachbereich aus den ganzen Zahlen von 0 bis $\mathfrak{p}$ besteht; ist insbesondere I ein Primideal, so wird eine solche Funktion durch die Formeln:

$$f(X) = 0 \text{ für } X \varepsilon I, \quad f(X) = 1 \text{ für } X \varepsilon K - I$$

definiert.

Es sei bemerkt, daß die Bedingung: $\mathfrak{p} < \aleph_0$ in Satz 4.5 wesentlich ist, zumindest wenn es sich um die abzählbar-additiven Maßfunktionen handelt. Man kann nämlich einen ($\aleph_0$-additiven) Körper K und ein $\aleph_0$-additives und $\aleph_0$-saturiertes, aber nicht absolut-additives Ideal I in K angeben, so daß für keine abzählbar-additive Maßfunktion f in K die Formel: $I = \underset{X}{\mathrm{E}} [f(X)=0]$ gilt; ein Beispiel wird durch den Körper aller Borelschen Mengen eines Euklidischen Raumes und durch das Ideal der Borelschen Mengen erster Kategorie geliefert[11]).

Auf Grund von 4.3—4.5 ergeben sich aus 3.20—3.22 und 3.24 folgende Korollare:

4.6.[12]) Ist $\mathfrak{m} = \aleph_0 > \mathfrak{q}$ und sind die Voraussetzungen von 2.15, bzw. 2.16 erfüllt, so gibt es in K keine abzählbar-additive $\mathfrak{q}$-wertige Maßfunktion.

4.7.[7]) Die Bedingung (i) aus 2.17 für $\mathfrak{n} = \aleph_0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß es eine endlich-additive 2-wertige Maßfunktion in K gibt, die nicht abzählbar-additiv ist.

4.8. Die Bedingung (i) aus 2.19 ist notwendig und hinreichend dafür, daß es eine endlich-additive 2-wertige Maßfunktion in K gibt.

Sätze 4.7 und 4.8 bleiben gültig, wenn man in ihnen das Wort „2-wertige" wegläßt.

Aus 3.23 ergibt sich ferner folgender, übrigens wohlbekannter Satz:

4.9.[13]) Ist der Körper K absolut-additiv und ist die Mächtigkeit des Systems $At(K)$ von der Zahl $\aleph_0$ aus im engeren Sinne erreichbar, so gibt es keine abzählbar-additive Maßfunktion in K.

Man kann dieses Ergebnis noch etwas schärfer fassen:

4.10. Sind die Voraussetzungen von 4.9 erfüllt und ist f eine endlich-additive Maßfunktion in K, so entspricht jeder Menge $X \varepsilon K$ ein höchstens abzählbares System $\boldsymbol{Y} \subset K$, derart daß $\sum_{Y \varepsilon \boldsymbol{Y}} Y = X$ und $f(Y) = 0$ für jedes $Y \varepsilon \boldsymbol{Y}$ ist.

Ersetzt man in 4.9 das Wort „engeren" durch „weiteren", so erhält man einen Satz, der wohl logisch schärfer als Sätze 4.6 und 4.9 wäre, der aber bis jetzt noch nicht bewiesen ist; er ist eine unmittelbare Folgerung aus dem am Ende des § 3 formulierten und ebenfalls bisher nicht bewiesenen Satz $\mathfrak{S}$. Auch ist noch heute kein allgemeines Kriterium für die Existenz einer abzählbar-additiven Maßfunktion in einem beliebigen Körper bekannt.

§ 5. Anwendungen auf das Repräsentationsproblem.

5.1. Zwei beliebige Mengen X und Y des Körpers K heißen kongruent modulo I, in Zeichen $X \equiv Y$ (*mod.* I), wenn I ein Ideal ist und wenn die Menge $(X - Y) + (Y - X)$ zu I gehört[8]).

5.2. Ist I ein Ideal und X eine beliebige Menge des Körpers K, so setzen wir: $R_I(X) = \underset{Y}{E}\,[X \equiv Y \ (mod.\ I)]$; jedes Mengensystem $\boldsymbol{X}$ von der Form: $\boldsymbol{X} = R_I(X)$, wo $X \varepsilon K$, wird Restklasse modulo I genannt.

5.3. Eine Mengenfunktion F wird als $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal I (in K) bezeichnet, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

(i) F ist $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{m}$-multiplikativ;

(ii) $F(0) = 0$;

(iii) für beliebige X und Y sind die Formeln: $F(X)=F(Y)$ und $X \equiv Y \ (mod.\ \boldsymbol{I})$ äquivalent;

(iv) ist $X \varepsilon \boldsymbol{K}$, so ist $F(X) \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $F(X) \equiv X \ (mod.\ \boldsymbol{I})$.

Diese Definition läßt sich folgendermaßen umformen:

5.4. Ist $\mathfrak{m} \geqslant 2$, so ist die Mengenfunktion F dann und nur dann eine $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal $\boldsymbol{I}$, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

(i) F ist $\mathfrak{m}$-additiv und $\mathfrak{m}$-multiplikativ;

(ii) $\boldsymbol{I} = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{X} [F(X) = 0]$;

(iii) ist $X \varepsilon \boldsymbol{K}$, so ist $F(X) \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $F(F(X)) = F(X)$.

Die Frage, ob es — für einen gegebenen Körper $\boldsymbol{K}$ und für ein gegebenes Ideal $\boldsymbol{I}$ in $\boldsymbol{K}$ — $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktionen gibt, wird als Repräsentationsproblem oder genauer: als $\mathfrak{m}$-Repräsentationsproblem bezeichnet[14]). Eine andere, äquivalente Formulierung dieses Problems ergibt sich aus folgendem Satz:

5.5. Es sei $\mathfrak{m} \geqslant 2$. Damit es eine $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal $\boldsymbol{I}$ in $\boldsymbol{K}$ gibt, ist notwendig und hinreichend, daß es einen $\mathfrak{m}$-additiven Unterkörper $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{K}$ gibt, der mit jeder Restklasse modulo $\boldsymbol{I}$ genau éin gemeinsames Element hat.

Das Repräsentationsproblem wurde bisher nur für den einfachsten (nicht trivialen) Fall: $\mathfrak{m} = 2$ gestellt und erörtert. Es wurden verschiedene Teilergebnisse gewonnen: so ist z. B. die Lösung des 2-Repräsentationsproblems positiv, wenn $\boldsymbol{K}$ der Körper aller im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen eines Euklidischen Raumes R und $\boldsymbol{I}$ das Ideal der Mengen vom Maße 0 ist[14]); sie ist dagegen (unter Zugrundelegung der Kontinuumhypothese) negativ, wenn $\boldsymbol{K}$ aus allen Mengen des Raumes R und $\boldsymbol{I}$ aus allen Mengen vom Lebesgue'schen Maße 0 bzw. aus allen Mengen erster Kategorie besteht[15]). Die für $\mathfrak{m} = 2$ erzielten negativen Ergebnisse gelten offenbar a fortiori für jede Zahl $\mathfrak{m} > 2$. Es taucht aber die Frage auf, ob auch die positiven Ergebnisse erweitert werden können, und zwar auf unendliche Zahlen $\mathfrak{m}$, insbesondere auf $\mathfrak{m} = \aleph_0$.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir einige in §§ 2 und 3 angegebene Sätze auf das Repräsentationsproblem in seiner allgemeinen Form anwenden.

Aus 3.16 ergibt sich unmittelbar:

5.6. Gibt es eine $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal I, so muß I ein $\mathfrak{m}$-additives Ideal sein.

Tiefere Ergebnisse können auf Grund von 2.14 — 2.16 gewonnen werden:

5.7. Gibt es — unter den Voraussetzungen von 2.14 — eine $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal I, so muß I ein $\mathfrak{n}$-additives Ideal sein.

5.8. Gibt es — unter den Voraussetzungen von 2.15, bzw. 2.16 — eine $\mathfrak{m}$-repräsentative Funktion für das Ideal I, so muß I ein absolut-additives Ideal sein (und demnach — im Falle von 2.15 — ein Hauptideal).

Aus diesen Sätzen und insbesondere aus 5.8 ist leicht zu ersehen, daß die Lösung des Repräsentationsproblems für eine unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ in den interessantesten Spezialfällen negativ ist. Ist z. B. K der Körper aller Punktmengen, bzw. aller Borelschen oder auch aller im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen eines Euklidischen Raumes, so gibt es sicher keine $\aleph_0$-repräsentative Funktion für ein Ideal I in K, wenn nur I nicht absolut-additiv ist.

Es sei noch folgendes bemerkt:

5.9. Sätze 5.7 und 5.8 bewahren auch dann ihre Gültigkeit, wenn in Definition 5.3 die Bedingung (iv) weggelassen wird.

Dieser Umstand wird es uns in § 7 ermöglichen, den in 5.7 und 5.8 enthaltenen Ergebnissen eine schärfere Form zu geben.

Als ein Beispiel von Resultaten positiver Natur, die das allgemeine Repräsentationsproblem betreffen, sei hier folgender, übrigens ganz elementarer Satz angeführt[14]:

5.10. Ist K ein beliebiger Körper und I ein Hauptideal in K, so gibt es eine Funktion F, die $\mathfrak{m}$-repräsentativ für das Ideal I ist, und zwar für jede beliebige Kardinalzahl $\mathfrak{m}$.

§ 6. Ausdehnung der Begriffe und Ergebnisse auf die allgemeine Theorie der Boole'schen Körper.

Die Theorie der Mengenkörper stellt bekanntlich eine Interpretation eines formalen Systems dar, der als (verallgemeinerte) Boole'sche Algebra oder auch als Theorie der Boole'schen Körper bezeichnet wird[16]. Es taucht nun das Problem auf, inwieweit man die Begriffe und Ergebnisse der vorangehenden Paragraphen auf jene allgemeinere Theorie ausdehnen kann. Diesem Problem eben ist der vorliegende Paragraph gewidmet.

Ein System $\boldsymbol{K}$ von ganz beliebigen Dingen wird Boole'scher Körper genannt, wenn für seine Elemente $X, Y \ldots$ zwei binäre Operationen: die Addition $X+Y$ und die Subtraktion $X-Y$ bestimmt sind, die denselben formalen Gesetzen gehorchen wie die üblichen Operationen mit Mengen. Will man diese Definition ganz präzis formulieren, so muß man freilich einige der erwähnten Gesetze explizit angeben, und zwar solche, die zur Herleitung der übrigen Gesetze ausreichen. Das kann z. B. auf folgendem Wege geschehen:

6.1. Ein System $\boldsymbol{K}$ von beliebigen Dingen wird als Boole'scher Körper mit den Grundoperationen $X+Y$ und $X-Y$ bezeichnet, wenn für beliebige Elemente X, Y und Z dieses Systems folgende Formeln gelten:

(i) $X+Y \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $X-Y \varepsilon \boldsymbol{K}$,
(ii) $X+(Y+Z)=(Z+X)+Y$,
(iii) $X-(Y-Y)=X$,
(iv) $(X+Y)-Y=X-Y$,
(v) $X-(Y-Z)=(X-Y)+[Z-(Z-X)]$[16].

Wir betrachten nun einen bestimmten Boole'schen Körper $\boldsymbol{K}$ mit den Grundoperationen $X+Y$, und $X-Y$. Mit Hilfe der beiden Grundoperationen definieren wir zwei weitere Operationen mit Elementen des Körpers $\boldsymbol{K}$: die symmetrische Subtraktion $X \oplus Y$ und die Multiplikation $X.Y$, sowie zwei Relationen zwischen Elementen dieses Körpers: die Relation des Enthaltenseins (der Inklusion) $X \subset Y$ und die des Disjunktseins; und zwar setzen wir:

6.2. $X \oplus Y=(X-Y)+(Y-X)$

6.3. $X.Y=X-(X-Y)$

6.4. 0 ist dasjenige Element des Körpers $\boldsymbol{K}$, das die Formel: $0=X-X$ für jedes $X \varepsilon \boldsymbol{K}$ erfüllt.

6.5. Wir sagen, daß das Element X in dem Element Y enthalten ist, in Zeichen: $X \subset Y$, wenn $X+Y=Y$ (oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $X-Y=0$).

6.6. Wir sagen, daß die Elemente X und Y disjunkt sind, wenn $X - Y = X$ (oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $X.Y = 0$).

Es gilt folgender Satz:

6.7. Es sei $\boldsymbol{K}$ ein Boole'scher Körper mit den Grundoperationen $X + Y$ und $X - Y$. Bestimmt man für die Elemente dieses Körpers die Operationen $X \oplus Y$ und $X . Y$ durch die Formeln 6.2 und 6.3, so wird $\boldsymbol{K}$ zu einem kommutativen Ring in Bezug auf die Operationen $X \oplus Y$ und $X.Y$ (im Sinne der abstrakten Algebra), und zwar zu einem Ring, in dem jedes Element X idempotent ist, d. h. der Formel: $X.X = X$ genügt.

Es sei umgekehrt $\boldsymbol{K}$ ein kommutativer Ring in Bezug auf die Operationen $X \oplus Y$ und $X - Y$; jedes Element dieses Körpers sei idempotent. Setzt man für beliebige Elemente X und Y dieses Körpers:

$$X + Y = (X \oplus Y) \oplus (X . Y)$$

und $$X - Y = X \oplus (X . Y),$$

so wird $\boldsymbol{K}$ zu einem Boole'schen Körper mit den Grundoperationen $X + Y$ und $X - Y$[17]).

Die unendlichen Operationen der Addition und der Multiplikation werden in die Theorie der Boole'schen Körper in folgender Weise eingeführt[3]):

6.8. Ist $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$, so ist $\sum\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$ dasjenige Element $Y \varepsilon \boldsymbol{K}$, das folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\boldsymbol{X} \subset \mathop{\mathrm{E}}\limits_{X} [X \varepsilon \boldsymbol{K} \text{ und } X \subset Y]$;

(ii) ist $Z \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{X} \subset \mathop{\mathrm{E}}\limits_{X} [X \varepsilon \boldsymbol{K} \text{ und } X \subset Z]$, so ist $Y \subset Z$.

6.9. Ist $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$, so ist $\prod\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$ dasjenige Element $Y \varepsilon \boldsymbol{K}$, das folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\boldsymbol{X} \subset \mathop{\mathrm{E}}\limits_{X} [X \varepsilon \boldsymbol{K} \text{ und } Y \subset X]$;

(ii) ist $Z \varepsilon \boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{X} \subset \mathop{\mathrm{E}}\limits_{X} [X \varepsilon \boldsymbol{K} \text{ und } Z \subset X]$, so ist $Z \subset Y$.

Es sei bemerkt, daß die beiden letzteren Operationen nicht immer ausführbar sind: es kann vorkommen, daß einem System $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$ kein Element $Y \varepsilon \boldsymbol{K}$ entpricht, das die Bedingungen (i) und (ii) aus 6.8, bzw. 6.9 erfüllt.

Man kann nun jetzt alle in §§ 1—4 definierten Begriffe auf die Theorie der Boole'schen Körper übertragen (etwa mit Ausnahme des Begriffs des vollständigen Körpers, da die Definition 1.6 in ihrer Anwendung auf die Boole'schen Körper inhaltslos ist). Die geringen Modifikationen, die dabei vorgenommen werden müssen, sind einleuchtend. Anstatt von Mengen und Mengensystemen muß man freilich von Elementen des Körpers $\boldsymbol{K}$ und von Teilsystemen dieses Körpers sprechen. Anstatt „Mengenfunktion" kann z. B. der Ausdruck „Boole'sche Funktion" gebraucht werden [18]); in der Definition dieses Begriffs (vgl. 2.1) muß ausdrücklich gefordert werden, daß nicht nur der Vorbereich einer Boole'schen Funktion sich mit dem gegebenen Körper $\boldsymbol{K}$ deckt, sondern auch daß ihr Nachbereich in einem (eventuell von $\boldsymbol{K}$ verschiedenen) Boole'schen Körper enthalten ist. Im Zusammenhang mit den Definitionen 1.2, 1.3, 1.5, 2.2, 2.3, 3.2 und 3.3 lohnt es sich zu bemerken daß auf dem Boden der Boole'schen Körper Bedingungen von der Form:

die Summe $\sum\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, bzw. das Produkt $\prod\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, gehört zu dem Körper $\boldsymbol{K}$

durch einfachere äquivalente Bedingungen:

die Summe $\sum\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, bzw. das Produkt $\prod\limits_{X \varepsilon \boldsymbol{X}} X$, existiert

ersetzt werden können (denn im Einklang mit 6.8, bzw. 6.9, gehört ex definitione die Summe, bzw. das Produkt, aller Elemente eines Systems $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$ zu dem Körper $\boldsymbol{K}$, wenn sie nur überhaupt existiert).

Man muß den Umstand beachten, daß alle Begriffe, die oben explizite definiert oder aus §§ 1—4 übertragen wurden, immer einen relativen Charakter haben und zwar auf einen bestimmten Boole'schen Körper $\boldsymbol{K}$ sowie auf die Grundoperationen dieses Körpers bezogen werden müssen (wenn dies auch in der Terminologie und Bezeichnungsweise nicht zum Ausdruck kommt). Die Begriffe der additiven und multiplikativen Funktion werden sogar einer doppelten Relativierung unterzogen, da die Argumentwerte und die Funktionswerte im allgemeinen zu verschiedenen Körpern mit verschiedenen Grundoperationen gehören.

Der relative Charakter der unendlichen Addition und Multiplikation kommt besonders deutlich bei der Betrachtung der Unterkörper eines Körpers vor. Der Begriff des Unterkörpers wird nämlich folgendermaßen definiert:

6.10. Ein System $L \subset K$ wird als Unterkörper des Körpers K bezeichnet, wenn es zu zwei beliebigen Elementen X und Y zugleich deren Summe $X+Y$ und Differenz $X-Y$ als Elemente enhält (oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn es ein Boole'scher Körper mit denselben Grundoperationen wie K ist).

Es sei nun L ein Unterkörper des gegebenen Körpers K. Ist $\mathbf{X} \subset L$ ein beliebiges unendliches System, so muß man die Summe $\sum_{X \in \mathbf{X}} X$, bzw. das Produkt $\prod_{X \in \mathbf{X}} X$ in Bezug auf L streng von der Summe, bzw. dem Produkt in Bezug auf K unterscheiden: die Existenz einer dieser Summen ist von der Existenz der anderen unabhängig, und wenn auch beide existeren, so müssen sie keinswegs identisch sein (wenn aber die Summe in Bezug auf K zu L gehört, so ist sie zugleich die Summe in Bezug auf L). Deshalb erweist es sich als nützlich neben dem Begriff des Unterkörpers noch den engeren Begriff des eigentlichen Unterkörpers einzuführen:

6.11. Der Unterkörper $L \subset K$ wird als eigentlicher Unterkörper des Körpers K bezeichnet, wenn für jedes $\mathbf{X} \subset L$ die Summe $\sum_{X \in \mathbf{X}} X$ in Bezug auf L, sofern sie überhaupt existiert, zugleich die Summe in Bezug auf K ist.

Man zeigt leicht:

6 12. Ist L ein eigentlicher Unterkörper des Körpers K, so ist für jedes $\mathbf{X} \subset L$ das Produkt $\prod_{X \in \mathbf{X}} X$ in Bezug auf L, sofern es überhaupt existiert, zugleich das Produkt in Bezug auf K.

Im Zusammenhang mit den obigen Bemerkungen dürfen die unendlichen Summen und Produkte in der Theorie der Boole'schen Körper nicht als genaue Korrelata der mengentheoretischen Summen und Produkte angesehen werden (um genaue Korrelata der Boole'schen Summen und Produkte zu erhalten, müßte man in die Theorie der Mengenkörper die Begriffe der relativen Summe und des relativen Produktes einführen: als relative Summe aller Mengen eines System X in Bezug auf den Körper K würde man nämlich die kleinste Menge $Y \varepsilon K$ bezeichnen, die alle Mengen $X \varepsilon X$ umfaßt). Auch die Begriffe des additiven Körpers, der additiven Funktion, des additiven Ideals usw. aus der Theorie der Mengenkörper entsprechen nicht genau den gleichlautenden Begriffen aus der Theorie der Boole'schen Körper (beispielsweise ist jeder $\mathfrak{m}$-additive Mengenkörper zugleich $\mathfrak{m}$-additiver Boole'scher Körper mit den üblichen mengentheoretischen Addition und Subtraktion als Grundoperationen, aber nicht umgekehrt). Das hat ferner zur Folge, daß nicht alle Sätze der ersten Theorie, die die genannten Begriffe betreffen, auch innerhalb der zweiten Theorie im unveränderten Wortlaut ihre Gültigkeit bewahren. So z. B. fallen unter den Sätzen aus §§ 1—4 die wichtigsten Sätze 2.13—2.16 nebst ihren Folgerunhen 3.19, 3.20, 4.6 und 5.7—5.9 weg (im übrigen, noch Sätze 1.20—1.22, teilweise 1.26 und 1.27, ferner 3.8 (iii), 3.11, 3.15 (iii), 3.23—3.26 und 4.10; in 1.15, 2.10 und 3.18 muß man alles weglassen, was I_K betrifft). Nichtsdestoweniger haben Sätze 2.13—2.16 auch für die allgemeine Theorie der Boole'schen Körper eine gewisse Bedeutung: in § 7 werden wir manche interessante Folgerungen aus diesen Sätzen (genauer: aus 5.7—5.9) angeben, die die Isomorphiebeziehungen zwischen den additiven Mengenkörpern und den additiven Boole'schen Körpern betreffen und den Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen noch deutlicher ans Licht bringen.

§ 7. Anwendungen auf die Probleme der Homomorphie und Isomorphie von Körpern.

7.1. Man sagt, daß die Funktion F eine Homomorphie zwischen zwei gegebenen Boole'schen Körpern K und L herstellt, wenn der Vorbereich von F gleich

K, der Nachbereich gleich L ist und wenn dabei F 2-additiv und 2-multiplikativ ist. [8])

7.2. Man sagt, daß die Funktion F eine Isomorphie zwischen zwei gegebenen Boole'schen Körpern K und L herstellt, wenn F eine Homomorphie zwischen K und L herstellt und wenn dabei F eineindeutig ist.

Es sind verschiedene äquivalente Umformungen dieser beiden Definitionen bekannt, die aber hier nicht angegeben werden.

7.3. Man sagt, daß der Körper L zu dem Körper K homomorph, bzw. isomorph ist, wenn es eine Funktion gibt, die eine Homomorphie, bzw. eine Isomorphie zwischen K und L herstellt.

Aus 3.17 und 7.1 ergibt sich leicht:

7.4[19]). Wenn die Funktion F eine Homomorphie zwischen den Körpern K und L herstellt, so ist das System $I = \underset{X}{\mathrm{E}}\,[F(X) = 0]$ ein Ideal in K.

Um eine Umkehrung dieses Satzes zu gewinnen, geben wir folgende Definitionen an:

7.5. Man sagt, daß der Körper L zum Körper K modulo I homomorph ist, wenn es eine Funktion F gibt, die eine Homomorphie zwischen K und L herstellt und dabei der Formel $I = \underset{X}{\mathrm{E}}\,[F(X) = 0]$ genügt.

7.6. Ist K ein Körper und I ein Ideal in K, so wird das System aller Restklassen modulo I Restklassenkörper genannt und mit K/I bezeichnet; wir setzen dabei für zwei beliebige Restklassen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \varepsilon K/I$:

$$\mathbf{X} +_r \mathbf{Y} = \underset{X+Y}{\mathrm{E}}\,[X \varepsilon \mathbf{X} \text{ und } Y \varepsilon \mathbf{Y}],$$

$$\mathbf{X} -_r \mathbf{Y} = \underset{X-Y}{\mathrm{E}}\,[X \varepsilon \mathbf{X} \text{ und } Y \varepsilon \mathbf{Y}].$$

Es gelten dann folgende Sätze [19]):

7.7. Ist K ein Körper und I ein Ideal in K, so ist der Restklassenkörper K/I ein Boole'scher Körper mit den Grundoperationen $X +_r Y$ und $X -_r Y$, und zwar ein Körper, der zu K modulo I homomorph ist.

7.8 Ist K ein Körper und I ein Ideal in K, so ist ein Körper L dann und nur dann zu K modulo I homomorph, wenn er zu dem Resklassenkörper K/I isomorph ist.

Mit Rücksicht auf 7.7 und 7.8 kann der Restklassenkörper K/I als Vertreter aller zu dem gegebenen Körper K modulo I homomorphen Körper gelten; die unten angegebenen Sätze betreffend den Körper K/I lassen sich automatisch auf alle zu K modulo I homomorphen Mengen- und Boole'schen Körper ausdehnen.

Nach einem bekannten Satz ist jeder Boole'sche Körper zu einem Mengenkörper isomorph [19]). Im Zusammenhang mit den in § 6 gemachten Bemerkungen, die die Beziehung der unendlichen Boole'schen Summen und Produkte zu den mengentheoretischen betrafen, stellt es sich jedoch heraus, daß dieser Satz auf die $\mathfrak{m}$-additiven Boole'schen Körper nicht erstreckt werden kann: es gibt $\mathfrak{m}$-additive Boole'sche Körper, die zu keinem $\mathfrak{m}$-additiven Mengenkörper homomorph sind. Es ist sogar eine ziemlich allgemeine Methode zur Konstruktion derartigen Körper bekannt; sie stützt sich auf folgende fünf Sätze:

7.9. Ist K ein $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additiver (Mengen- oder Boole'scher) Körper und I ein $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additives Ideal in K, so ist K/I ein $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additiver Boole'scher Körper.

Dieser Satz ist ganz elementar; tiefer liegend, aber speziellerer Natur ist

7.10. Ist K ein $\mathfrak{m}$-additiver (Mengen- oder Boole'scher) Körper und I ein $\mathfrak{m}$-additives und $\mathfrak{m}$-saturiertes Ideal in K, so ist K/I ein absolut-additiver Boole'scher Körper.

Eine äquivalente Umformung von 7.10 gibt folgender Satz:

7.11. Wenn K ein $\mathfrak{m}$-additiver Boole'scher Körper ist und wenn jedes System $X \subset K$ von paarweise disjunkten Elementen eine Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ hat, so ist K ein absolut-additiver Boole'scher Körper.

Es ist zu bemerken, daß in diesem Satz der Ausdruck „Boole'scher Körper" durch „Mengenkörper" ersetzt werden kann (vgl. 1.26), wodurch sich aber der Beweis des Satzes wesentlich verändert.

Zwei letzte Sätze dieser Gruppe wurden aus 5.7 und 5.8 mit Rücksicht auf 5.9 gewonnen:

7.12. Wenn der Mengenkörper K und die Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ den Veraussetzungen von 2.14 genügen und wenn I ein $\mathfrak{m}$-additives, aber kein $\mathfrak{n}$-additives Ideal in K ist, so ist der Boole'sche Körper K/I zu keinem $\mathfrak{m}$-additiven Mengenkörper isomorph.

7.13. Wenn der Mengenkörper K und die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ den Voraussetzungen von 2.15, bzw. 2.16 genügt und wenn I ein $\mathfrak{m}$-additives, aber kein absolut-additives Ideal in K ist, so ist der Boole'sche Körper K/I zu keinem $\mathfrak{m}$-additiven Mengenkörper isomorph.

Um ein Beispiel für die Anwendung der Sätze 7.9—7.13 zu geben, betrachten wir wiederum den Körper K der im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen und das Ideal I der Mengen vom Maße 0. Wie leicht zu zeigen, sind dann die Voraussetzungen von 2.16, 7.10 und 7.13 für $\mathfrak{m} = \aleph_0$ erfüllt; demnach ist der Boole'sche Körper K/I zwar $\aleph_0$- und sogar absolut-additiv [20]), aber zu keinem $\aleph_0$- und umsomehr zu keinem absolut-additiven Mengenkörper isomorph. Ein anderes Beispiel mit denselben Eigenschaften wird durch den Körper K der Borelschen Mengen und durch das Ideal I der Borelschen Mengen erster Kategorie geliefert [11]).

Beispiele von absolut-additiven Boole'schen Körpern, die zu keinem absolut-additiven Mengenkörper isomorph sind, können auch auf anderen Wegen gewonnen werden: es stehen nämlich zwei ganz allgemeine Methoden zur Konstruktion von absolut-additiven Boole'schen Körpern zur Verfügung und dabei ist ein einfaches Kriterium bekannt, das unter den mit Hilfe dieser Methode konstruierten Körpern diejenigen auszusondern erlaubt, welche zu keinem absolut-additiven Körper isomorph sind. Wir wollen zunächst dieses Kriterium formulieren:

7.14. Für jeden Boole'schen Körper K sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) K ist zu einem absolut-additiven Mengenkörper isomorph, (ii) K ist zu einem vollständigen Mengenkörper isomorph, (iii) K ist absolut-additiv und atomar [3])

Zur Formulierung der Sätze, auf denen die erste Methode beruht, brauchen wir folgende Bezeichnungen:

7.15. Ist K ein Boole'scher Körper, so wird mit $\mathfrak{A}(K)$ das System aller absolut-additiven Ideale in K und mit $\mathfrak{H}(K)$ das System aller Hauptideale in K bezeichnet.

7.16. Sind I und J zwei Ideale eines Boole'schen Körpers K, so definieren wir ihre Summe $I +_i J$ als das kleinste absolut-additive Ideal, das die beiden Ideale I und J umfaßt, und ihre Differenz $I -_i J$ als das größte Ideal, das in I enthalten ist und mit J kein gemeinsames Element außer 0 hat.

Es gilt dann:

7.17. Ist K ein beliebiger Boole'scher Körper, so ist $\mathfrak{A}(K)$ ein absolut-additiver Boole'scher Körper mit den Grundoperationen $X +_i Y$ und $X -_i Y$; dieser Körper $\mathfrak{A}(K)$ ist dann und nur dann atomar, wenn K atomar ist. Dabei ist K zu einem eigentlichen Unterkörper von $\mathfrak{A}(K)$, und zwar zu $\mathfrak{H}(K)$ isomorph[21]).

7.18. Ist der Boole'sche Körper K zu einem Unterkörper (bzw zu einem eigentlichen Unterkörper) L eines absolut-additiven Boole'schen Körpers N isomorph, so ist auch $\mathfrak{A}(K)$ zu einem Unterkörper (bzw. zu einem eigentlichen Unterkörper) M von N isomorph, und zwar so, daß $L \subset M \subset N$; die Isomorphie zwischen M und $\mathfrak{A}(K)$ kann dabei durch eine Funktion F hergestellt werden, die zugleich L auf $\mathfrak{H}(K)$ abbildet:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{F(X)} [X \varepsilon L] = \mathfrak{A}(K).$$

7.17 und 7.18 drücken zusammen aus, daß $\mathfrak{A}(K)$ der „kleinste" absolut-additive Körper ist, in den der Körper K eingebettet werden kann.

7.19. Für jeden Boole'schen Körper K sind folgende drei Bedingungen äquivalent: (i) K ist absolut-additiv, (ii) $\mathfrak{A}(K) = \mathfrak{H}(K)$, (iii) K ist zu $\mathfrak{A}(K)$ isomorph.

Wie man aus 7.19 ersicht, ist die betrachtete Methode zur Konstruktion von absolut-additiven Körpern ganz allgemein, und zwar in dem Sinne, daß jeder absolut-additive Körper zu einem mittels dieser Methode konstruierten Körper isomorph ist.

Die zweite Methode gründet sich auf die Topologie. Wir bringen folgende bekannte Definitionen in Erinnerung: [22])

7.20. Eine Menge R wird als **topologischer Raum** **mit der Grundoperation** $\overline{X}$ bezeichnet ($\overline{X}$ heißt **abgeschlossene Hülle der Menge** X), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) ist $X \subset R$, so ist $\overline{X} = \overline{\overline{X}} \subset R$ [23]); (ii) besteht die Menge $X \subset R$ aus genau einem Element, so ist $\overline{X} = X$; (iii) ist $X + Y \subset R$, so ist $\overline{X + Y} = \overline{X} + \overline{Y}$.

7.21. Ist R ein topologischer Raum, so wird eine Menge $X \subset R$ **abgeschlossenes Gebiet** genannt, wenn $X = \overline{R - \overline{R - X}}$ ist; das System der abgeschlossenen Gebiete wird mit $G(R)$ bezeichnet.

7.22. Sind X und Y zwei abgeschlossene Gebiete eines topologischen Raumes R, so setzen wir: $X +_g Y = X + Y$ (die übliche mengentheoretische Summe) und $X -_g Y = \overline{X - Y}$.

Es gilt nun:

7.23. Ist R ein topologischer Raum, so ist $G(R)$ ein absolut-additiver Boole'scher Körper mit den Grundoperationem $X +_g Y$ und $X -_g Y$.

7.24. Ein Boole'scher Körper K ist dann und nur dann absolut-additiv, wenn es einen topologischen Raum R gibt, so daß K zu $G(R)$ isomorph ist [24]).

Durch die Sätze 7.14, 7.17 und 7.23 wird die Konstruktion verschiedenster absolut-additiver Körper ermöglicht, die zu keinem absolut-additiven Mengenkörper isomorph sind. Das einfachste Beispiel derartigen Körper ist wohl das System aller abgeschlossenen Gebiete eines Euklidischen Raumes: es ist ein absolut-additiver atomfreier Körper mit einer abzählbaren Basis.

In Anknüpfung an eben dieses Beispiel geben wir hier zum Schluß noch folgende zwei Sätze:

7.25. Zwei beliebige absolut-additive atomfreie Körper mit abzählbaren Basen sind zueinander isomorph [20].

7.26. Es werden topologische Räume R betrachtet, die folgender Bedingung genügen:

(i) es gibt ein abzählbares System $\mathbf{X} \subset G(R)$, derart daß in jeder nicht leeren Menge $Y \varepsilon G(R)$ eine nicht leere Menge $X \varepsilon \mathbf{X}$ als eine echte Teilmenge enthalten ist.

Sind nun R_1 und R_2 zwei topologische Räume von dieser Beschaffenheit, so sind die Körper $G(R_1)$ und $G(R_2)$ zueinander isomorph.

Satz 7.26 ist offenbar eine Folgerung aus 7.23 und 7.25. Die Voraussetzung dieses Satzes wird ersichtlicherweise durch beliebige metrische separable insichdichte Räume [22]) und insbesondere durch beliebige Euklidische Räume erfüllt [23]).

ANMERKUNGEN.

[1]) Über die in dieser Mitteilung dargestellten Ergebnisse hat der Verfasser am 12. VI. 1936 (und zum Teil auch am 1. V. 1936) in der Warschauer Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft berichtet; vgl. Ann. Soc. Pol. Math. 15, 1937, S. 190 (und S. 186 ff).

[2]) Vgl. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, S. 78 ff. (die $\mathfrak{m}$-, bzw. absolut-additiven Körper werden von Hausdorff als erweiterte Körper bezeichnet). Mit Mengenkörpern und insbesondere mit additiven und multiplikativen Körpern habe ich mich u. a. in einer Arbeit in Fund. Math. 16, 1930, S. 181 ff., befaßt, hauptsächlich aber unter dem Gesichtspunkt der Mächtigkeitslehre (vgl. insbesondere S. 298 ff., Théorème fondamental XIII—XVI).

[3]) Vgl. hiezu A. Tarski, Fund. Math, 24, 1935, S. 191 ff.

[4]) Dieser Satz stammt von Kuratowski und ist in meiner Arbeit in Fund. Math. 6, 1924, S. 94 f. veröffentlicht.

[5]) Zum Folgenden vgl. die gemeinsame Arbeit von W. Sierpiński und mir in Fund. Math. 15, 1930, S. 292 f. Der Zusammenhang zwischen dem Begriff der unerreichbaren Kardinalzahl, der loc. cit. betrachtet wird, und dem weiter unten eingeführten Begriff der Erreichbarkeit ist klar: eine Zahl $\mathfrak{n} \neq 0$ ist dann und nur dann von der Zahl $\mathfrak{m}$ aus erreichbar, wenn es keine unerreichbare Zahl $\mathfrak{p}$ gibt, so daß $\mathfrak{m} < \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n}$. Den zwei Begriffen der Erreichbar-

keit (vgl. 1.28 und 1.29) entsprechen dabei die zwei nicht äquivalenten Definitionen der unerreichbaren Kardinalzahl, von denen in der zitierten Arbeit die Rede ist.

[6]) Zum Folgenden vgl. A. Tarski, Ann. Soc. Pol. Math. 6, 1928, S. 127 f. In diesem Bericht habe ich lediglich Mengenfunktionen mit einem „unbeschränkten" Vorbereich behandelt; unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen können aber die loc. cit. angebenen Ergebnisse auf Mengenfunktionen im Sinne von 2.1 erweitert werden (teilweise sogar auf Boole'sche Funktionen, die weiter unten in § 6 betrachtet werden); übrigens sind heute noch verschiedene andere Ergebnisse analoger Natur bekannt. Es sei bei dieser Gelegenheit auf einen Druckfehler in dem zitierten Bericht hingewiesen: auf S. 1.28, Z. 7 von oben, muß man nach dem Wort „relation" das Wort „biunivoque" einschieben. — Vgl. noch hiezu S. Ulam, Fund. Math. 14, 1929, S. 231 ff.; T. Posament, C. R. Soc. Sc. Vars. 27, 1934, Cl. III, S. 89 ff.

[7]) Is Zusammenhang mit Sätzen 2.17—2.20, 3.21, 3.22, 4.7 und 4.8 vgl. A. Tarski, C. R. Sos. Sc. Vars. 22, 1929, Cl. III, S. 117 (Théorème IV) sowie Fund. Math. 15, 1930, S. 42 ff.; S. Ulam, Fund. Math. 14, 1929, S. 231 ff.; M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. 40, 1936, S. 100 ff. (wo auch weitere Litteraturangaben zu finden sind).

[8]) Die aus der abstrakten Algebra geschöpfte Terminologie wird hier nach dem Vorbild von Stone verwendet; vgl. seine Mitteilung in Proc. Nat. Ac. Sc. 21, 1935, S. 103 ff. sowie seine oben zitierte Arbeit aus Trans. Am. Math. Soc. 40; s. auch meinen Bericht in Ann. Soc. Pol. Math. 15, 1937, S. 186 ff. Mit den Idealen in den Mengenkörpern hat man sich übrigens schon seit mehreren Jahren befaßt, man hat sie aber anders bezeichnet, nämlich als erbliche und additive Mengensysteme; vgl. z. B. meine in Anm. [2]) zitierte Arbeit aus Fund. Math. 16, in der verschiedene Probleme betreffend die Anzahl der Ideale in vollständigen Mengenkörpern gelöst sind (S. 241 ff., Théorème fondamental V, X und XII).

[9]) Sätze 3.23 — 3.25 stehen im Zusammenhang mit gewissen Ergebnissen von Sierpiński und Ulam aus der algemeinen Maßtheorie; vgl. S. Ulam, Fund. Math. 16, 1930, S. 140 ff. und W. Sierpiński, Fund. Math. 20, 1933, S. 214 ff.

[10]) Vgl. S. Banach et C. Kuratowski, Fund. Math. 14, S. 127 f. sowie meine in Anm. [7]) zitierten Aufsätze aus C. R. Soc. Sc. Vars. 22 und Fund. Math. 15.

[11]) Das ergibt sich aus gewissen Untersuchungen von E. Szpilrajn; vgl. seine Aufsätze in Fund. Math. 21, 1933, S. 226 ff., insbesondere S. 233 f., und in Fund. Math. 22, 1934, S. 304 ff.

[12]) Satz 4.6, der hier als eine Folgerung aus Ergebnissen allgemeiner Natur angegeben wird, wurde bereits vor einigen Jahren von Ulam und von dem Verfasser gewonnen; vgl. S. Ulam, Fund. Math. 16, 1930, S. 140 ff. (insbesondere S. 146, Anmerkung [1])).

[13]) Vgl. S. Banach, Fund. Math. 15, 1930, S. 97 ff. sowie die oben zitierte Arbeit von Ulam aus Fund. Math. 16.

[14]) Vgl. (für den Fall: $\mathfrak{m} = 2$) J. von Neumann and M. H. Stone, Fund. Math. 25, 1935, S. 353 ff. (insbesonderes S. 359, 368 und 376).

[15]) Das zuletzt angegebene Ergebnis scheint mir neu zu sein.

[16]) Vgl. M. H. Stone, Am. Journ. Math. 57, 1935, S. 703 ff.; es wird dort u. a. ein Postulatensystem für die verallgemeinerte Boole'sche Algebra gegeben (S. 722), das dem System (i) — (v) aus 6.1 äquivalent ist, aber andere Grundausdrücke anthält.

[17]) Vgl. M. H. Stone, Proc. Nat. Ac. Sc. 21, 1935, S. 103 ff.

[18]) Dieser Ausdruck wird oft in einem viel engerem Sinne verwendet; vgl. z. B. J. C. C. Mc Kinsey, Trans Am. Math. Soc. 40, S. 343 ff.

[19]) Vgl. M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. 40, 1936, insbesondere S. 81 (Theorem 43) und S. 106 (Theorem 67).

[20]) Dieses Ergebnis wurde bereits in 1931 von Jaśkowski gefunden, aber bisher nicht veröffentlicht; Jaśkowski hat darüber am 22.1.1932 in der Warschauer Sektion der Polnischen Matematischen Gesellschaft berichtet (vgl. Ann. Soc. Pol. Math. 12, 1934, S. 122).

[21]) Dieses Ergebnis (das verschiedenartig formuliert werden kann) wurde in unabhängiger Weise von Stone und von dem Verfasser gewonnen. Vgl. die in [19]) zitierte Arbeit von Stone, S. 66 ff. (Theorem 28 und 29) und S. 73 f., wo in diesem Zusammenhang noch die Dissertation von Mac Neille: *The theory of partially ordered sets*, 1935, erwähnt wird; vgl. ferner meinen Bericht in Ann. Soc. Pol. Math. 15, 1937, S. 187 sowie S. 189, Anmerkung [1]) (in dem Bericht, S. 187, Z. 23 von oben kommt ein Druckfehler vor: die Formel „$I_1' = I_2$" soll durch „$I_1' = I_2'$" ersetzt werden).

[22]) Zum Folgenden vgl. C. Kuratowski, *Topologie. I*, Warszawa—Lwów 1933, insbesondere SS. 15, 37, 40, 80 und 81.

[23]) „$\overline{\overline{X}}$" bezeichnet hier offenbar nicht die Mächtigkeit der Menge X.

[24]) Satz 7.23 ist mir seit 1927 bekannt; in seiner Anwendung auf Euklidische Räume steckt er implizite in einem Aufsatz, den ich im *Księga Pamiątkowa pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego. Lwów, 7—10.IX. 1927* (Andenkenbuch des I. Poln. Math. Kongr.), Annex zu Ann. Soc. Pol. Math., Kraków 1929, S. 29 ff. veröffentlicht habe. Den Satz 7.24 habe ich in 1935 auf Grund eines bekannten Ergebnisses von Stone (Proc. Nat. Ac. Sc. 20, 1934, S. 198, Theorem IV_1) gewonnen.

[25]) *Zusatz.* Aus einer neuen Arbeit von Stone: *Algebraic characterisation of special Boolean rings*, die in Fund. Math. 29 erscheint, erfahre ich, daß Sätze 7.17 — 7.19, 7.23 und 7.24 oder zumindest nahe liegende Ergebnisse in unabhängiger Weise von Mac Neille, v. Neumann und Stone neulich gewonnen wurden. Im Zusammenhang mit Sätzen 7.17—7.19 vgl. nämlich H. M. Mac Neille, Proc. Nat. Ac. Sc. 22, 1936, SS. 45—50 sowie die eben zitierte Arbeit von Stone, Theorem 2.4 und 2.5. Bezüglich der Sätze 7.23 und 7.24 vgl. J. von Neumann, Proc. Nat. Ac. Sc. 22, 1936. SS. 92—108 sowie Stone, op. cit., Theorem. 4.1. Auch das oben S. 176 angegebene und in Anm. [20]) besprochene Ergebnis (eine Anwendung des Satzes 7.10 auf den Körper der im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen) wurde unabhängig von v. Neumann gefunden und loc. cit. veröffentlicht.

Posiedzenie
z dnia 19 października 1937 r.

W. Sierpiński.

O stosunku pewnej własności metrycznej do ogólnej teorii mnogości.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 19 października 1937 r.

STRESZCZENIE.

W pracy tej autor podaje pewne twierdzenie z ogólnej teorii mnogości, o którem dowodzi bez pomocy hipotezy continuum, że jest równoważne twierdzeniu o istnieniu zbioru liniowego mocy continuum, nie zawierającego żadnej części nieprzeliczalnej miary zero.

W. Sierpiński.

Sur le rapport d'une certaine propriété métrique à la théorie générale des ensembles.

Présenté dans la séance du 19 octobre 1937.

En utilisant l'hypothèse du continu j'ai démontré[1]) qu'il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui jouit de la propriété (S) suivante:

(S) L'ensemble N ne contient aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle[2]).

---

[1]) *Fundamenta Mathematicae* 5 p. 184—185.

[2]) La propriété (S) a été traitée en outre dans les travaux cités dans la Bibliographie qui se trouve à la fin de cette Note.

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que le théorème *métrique* de l'existence d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ à propriété (S) équivaut à un énoncé de la Théorie générale des ensembles[1]). Je vais démontrer notamment ce

Théorème: *L'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu à propriété* (S) *équivaut à l'existence d'un ensemble* E *de puissance du continu* (formé d'éléments quelconques) *et d'un système* $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ *d'ensembles correspondant à toutes les suites finies* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *formées de nombres 0 et 1 de manière que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *On a*

$$E = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} \quad \textit{pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *de* k *nombres 0 ou 1;*

2° *quelle que soit la suite finie* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *de nombres 0 ou 1, on a*

$$E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k 0} + E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k 1} \subset E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k};$$

3° *si pour un* k *naturel les suites* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *et* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *sont distinctes, on a*

$$E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} E_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k} = 0;$$

4° *quelle que soit la suite infinie* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ *formée de nombres 0 et 1, l'ensemble*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$$

contient au plus un élément[2])

[1]) Dans le même ordre d'idées cf. C. Kuratowski *Fund. Math.* **22,** p. 315–318 et W. Sierpiński *C. R. Soc. Sc. Varsovie.* **30,** p. 70; *Fund. Math.* **29,** p. 91–96 et p. 182–190.

[2]) Les conditions 1° — 4° coïncident respectivement avec ceux que j'ai considéré dans ma Note concernant la propriété (C): voir *Fund. Math.* **29,** p. 92.

5° *si* $E_1 \subset E$ *et s'il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *une suite infinie* $E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *d'ensembles du système* $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$, *telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} < \varepsilon \tag{1}$$

et

$$E_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}, \tag{2}$$

l'ensemble E_1 *est au plus dénombrable.*

Démonstration. I. Soit N un ensemble linéaire de puissance du continu et jouissant de la propriété (S). Nous pouvons le supposer situé dans l'intervalle (0,1). Soit E l'ensemble de tous les nombres irrationnels appartenant à N. L'ensemble E est encore de puissance du continu et jouit de la propriété (S). Désignons pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres 0 et 1, par $E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ la partie de l'ensemble E située dans l'intervalle

$$\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \right). \tag{3}$$

On voit sans peine que le système d'ensembles $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ jouit des propriétés 1°, 2°, 3° et 4°. Nous allons maintenant à montrer qu'il jouit également de la propriété 5°.

Soit E_1 un sous-ensemble de E et supposons qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite infinie $E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles du système $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ telle qu'on a les formules (1) et (2). Il résulte de la définition de l'ensemble $E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ qu'il est contenu dans l'intervalle (3) de longueur $1/2^k$: d'après (2) et (1) l'ensemble E_1 est donc contenu dans un ensemble de mesure $< \varepsilon$. Ceci étant quel que soit le nombre positif ε, on en conclut que l'ensemble E est de mesure nulle, donc, en tant que sous-ensemble de E (d'après la propriété (S) de l'ensemble E) au plus dénombrable, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'existence d'un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ jouissant de la propriété (S) entraîne l'existence d'un ensemble E de puissance $2^{\aleph_0}$ et d'un système d'ensembles $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ jouissant des propriétés $1^0 - 5^0$.

II. Soit maintenant E un ensemble de puissance du continu (formé d'éléments quelconques) et $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ un système d'ensembles jouissant des propriétés $1^0 - 5^0$.

Soit N l'ensemble de tous les nombres irrationnels

$$(4) \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i},$$

tels que

$$(5) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} \neq 0.$$

L'ensemble E étant de puissance du continu, il résulte sans peine de 1^0, 2^0, 3^0 et 4^0 que l'ensemble N est également de puissance du continu. Je dis que l'ensemble N jouit de la propriété (S).

En effet, soit N_1 un sous-ensemble de N de mesure nulle et soit ε un nombre positif donné quelconque. Il existe donc un ensemble ouvert G de mesure $< \varepsilon$ contenu dans l'intervalle $(0,1)$ et contenant N_1. Or, comme on voit sans peine, tout ensemble ouvert contenu dans l'intervalle $(0,1)$ est une somme d'intervalles de la forme (3) (où les α_i sont des nombres 0 ou 1) n'empiétant pas les uns sur les autres. Il existe donc une suite infinie $\delta_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'intervalles du système $\{\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$, telle que

$$(6) \qquad G = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}$$

et qu'on a l'inégalité (1).

Or, on a $N_1 \subset N$ et $N_1 \subset G$, donc, d'après (6):

$$(7) \qquad N_1 \subset NG = \sum_{n=1}^{\infty} N \delta_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}.$$

Posons, pour tout nombre (4) de N:

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}:$$

d'après la définition de l'ensemble N et d'après les propriétés 1^0 — 4^0, la fonction $f(x)$ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble N en l'ensemble E. L'ensemble $N_1 \subset N$ est donc de même puissance que l'ensemble

$$E_1 = f(N_1) \tag{8}$$

Or, il résulte tout de suite de (3) et de la définition de la fonction $f(x)$ que si $x \varepsilon N \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$, on a $f(x) \subset E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$. D'après (7) et (8) on a donc

$$E_1 = f(N_1) \subset \sum_{n=1}^{\infty} f(N \delta_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}) \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n},$$

et on trouve la formule (2).

Il existe ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ une suite infinie $E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \cdots \alpha_{k_n}^n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) d'ensembles du système $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$, telle qu'on a les formules (1) et (2). D'après la propriété 5^0, l'ensemble E_1 est donc au plus dénombrable. Il en est donc de même de l'ensemble N_1 (qui est de même puissance que E_1).

L'ensemble N ne contient donc aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle, donc jouit de la propriété (S), c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut, dans notre théorème, remplacer portout les mots „de puissance du continu" par „indénombrable" (sans en altérer la démonstration).

BIBLIOGRAPHIE.

(Abréviations: F. M. = Fundamenta Mathematicae, C. R. Varsovie = Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. III.).

A. S. Besikovitch. Concentrated and rarified sets, Acta Math. 62, p. 289.

S. Saks. Sur un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire, Fund. Math. 11, p. 277.

W. Sierpiński. I) Hypothèse du continu, Monografie Mat. t. IV (1934), Ch. I, p. 31—32, Ch. III, § 1, 80—81, § 2, 81—94, Ch. IV § 5 127—130.

II) Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Fund. Math. 5, 177—187 (184).

III) Sur un problème de M. Lusin, C. R. Varsovie 22, p. 58.

IV) Sur un ensemble non dénombrable dont tout image continue est de I-re catégorie, Bull. de l'Ac. Pol. 1928, 455—458.

V) Sur une décomposition du segment, F. M. 13, 195—200.

VI) Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses applications, C. R. Varsovie, 28, p. 135.

VII) Sur l'équivalence de quelques propriétés des ensembles linéaires. C. R. Varsovie 28, 1935, p. 23—26.

VIII) Un théorème équivalent à l'hypothèse du continu Bull. d'Acad. Roum. XVIa, № 4—5, p. 4.

IX) Deux théorèmes sur les familles des fonctions de Baire, F. M. 22, p. 42—48 (47—48).

X) Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, F. M. 22, p. 276—280.

XI) Remarque sur l'hypothèse du continu, Tohôku Math. Journ. 38, 1933, p. 225—226.

XII) Sur deux propositions dont l'ensemble équivaut à l'hypothèse du continu, F. M. 29, p. 31—32.

XIII) La base de M. Hamel et la propriété de Baire. Publ. Math. de Belgrade, 4, 1935, p. 221—225 (222—223).

W. Sierpiński et E. Szpilrajn. I) Sur les transformations continues et biunivoques, F. M. 27, p. 288—291 (289).

II) Sur un ensemble toujours de I-re catégorie et de mesure positive, Publ. Math. de Belgrade, 5, 1936 p. 117—123 (122).

E. Szpilrajn. I) O mierzalności i warunku Baire'a, Spr. z kongr. Mat. Słowiańskich, Warszawa, 1929, p. 297—303 (301).

II) Sur un problème de M. Banach, F. M. 15, p. 212—214.

III) Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński, C. R. Varsovie, 24, 1931, p. 78—85.

IV) Sur l'extension de la mesure lebesguienne, F. M. 25, p. 551 — 558.

V) Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles, F. M. 24, p. 17—34 (33).

A. J. Ward

O pewnej funkcji prostokąta.

Przedstawił S. Saks dn. 19 października 1937 r.

Jak wiadomo, każda funkcja addytywna i ciągła przedziału, która posiada wszędzie pochodną dolną nieujemną względem dowolnie ustalonej siatki, jest monotoniczna nieujemna. Twierdzenie to było uogólniane w wielu kierunkach. Autor pokazuje jednak, budując stosowny przykład, iż w żadnym razie, w twierdzeniu powyższym, pochodna dolna nie może być zastąpiona przez pochodną górną (nawet w przypadku, gdy siatce narzuci się pewne warunki regularności np. że jest siatką diadyczną kwadratów).

A. J. Ward

A certain function of rectangles.

Note presentée par M. S. Saks dans la séance du 19 octobre 1937.

The object of this note is to give a simple example of a continuous additive function of rectangles, $F(R)$, which assumes both positive and negative values, and yet has everywhere a non-negative upper derivate with respect to the fundamental binary net.[1]) The interest of the example lies in the fact that if we knew (in addition to this last property) either (a) that at each point lying on a line of the net ($x = p.2^{-n}$ or $y = q.2^{-n}$, p, q, n being integers) the lower derivate of F with respect to the net was different from $-\infty$, or (b) that F was of bounded variation, then we could deduce that the function took no negative values. It may be remarked also that, for a continuous function of one

[1]) By the fundamental binary net we mean the net of all squares of the form $p.2^{-n} \leqslant x \leqslant (p+1).2^{-n}$, $q.2^{-n} \leqslant y \leqslant (q+1).2^{-n}$ (p, q, n integers). The upper and lower derivates of $F(R)$ with respect to the net, at a point (x, y), are respectively the upper and lower limits, as the diameter of S tends to zero, of $F(S) / |S|$, where S is any square of the net which contains (x, y) (possibly on its boundary), and $|S|$ is the area of S.

variable, the fact that the upper derivate, with respect to the binary net, is everywhere non-negative, is by itself sufficient for the function to be non-decreasing.

1. The function $F(R)$ will ultimately be defined for all rectangles with sides parallel to the co-ordinate axes; we begin however by defining it for squares of the binary net. S_0 will denote the square $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. S^n will denote any square (of the net) of the nth order, that is, of side 2^{-n}. We shall suppose always $n \geqslant 0$.

First of all, we define $F(S^n) = 0$ whenever S^n lies outside (or adjoins) S_0. If S^n lies within S_0, we define $F(S^n)$ by induction. We assign to $F(S_0)$ the value 1. Suppose now that $F(S^n)$ is defined for all squares S^n of order $1, 2, \ldots, N$, where $N = 3M \geqslant 0$, (M an integer). Take any one square S, say, of order N, and suppose $F(S) = a$. Divide S into 64 squares, S_i say, $i = 1, 2, \ldots, 64$, of order $N + 3 = 3(M+1)$, and define $F(S_i)$ for each of these squares according to the scheme shown in the diagram. (The figure inside each square indicates the value of $F(S_i)$ for that square. The value of $F(S^n)$ for a square of order $N+1$ or $N+2$, contained in S, is to be obtained by addition of the values of $F(S_i)$ for those S_i which compose the required square S^n.)

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{a}{2}$	0	0	0	0
$\frac{a}{2}$	0	$-\frac{a}{2}$	0	0	0	$\frac{a}{2}$	0

It is clear that by this process we define $F(S^n)$ for all squares of the net, and that the function is additive. We note that $|F(S^{3m})| \leqslant 2^{-m}$.

2. We consider next rectangles R, composed of a finite number of squares of the net. For such a rectangle we define $F(R)$ by addition of the values of $F(S)$ for any finite system of non-overlapping squares S of the net, which together make up R. It is easily seen that $F(R)$ is thus uniquely defined, and is additive for such rectangles.

We consider in particular rectangles of the form

$$p_1 . 2^{-n} \leqslant x \leqslant (p_1 + 1) . 2^{-n}, \quad q_1 . 2^{-n} \leqslant y \leqslant q_2 . 2^{-n},$$

composed of $q_2 - q_1$ adjacent squares of order n. Such a rectangle will be called a *column-rectangle of order n*. If R is any such rectangle, and if $3m \leqslant n$, then it is easy to see from the diagram, by induction with respect to m, that R intersects at most one square of order $3m$ for which the value of F is different from zero. If there exists such a square, we call it S_R^{3m}. Taking in particular the value of m such that $3m \leqslant n \leqslant 3m + 2$, we obtain, again using the diagram,

$$|F(R)| = |F(RS_R^{3m})| \leqslant |F(S_R^{3m})| \leqslant 2^{-m} \leqslant 2^{-(n-2)/3}.$$

Interchanging the parts played by x and y, we obtain what we shall call *row-rectangles*. We say that if R is a row-rectangle of order n, and if $3m \leqslant n \leqslant 3m + 2$, then again

$$|F(R)| \leqslant 2^{-m} \leqslant 2^{-(n-2)/3}.$$

We prove this by induction. It is obviously true for $n = 0$. Suppose that it is true for all row-rectangles of order N, where $N = 3M$, and consider a row-rectangle R of order $N + 3$. If this lies entirely within one square S^N, then it is clear, by the diagram and by the inductive hypothesis, that $|F(R)| \leqslant \frac{1}{2} |F(S^N)| \leqslant 2^{-(M+1)}$. Now suppose that R intersects two or more squares of order N; then these squares clearly compose a row-rectangle of order N, which can be written as $S_1^N + S_2^N + \ldots + S_p^N$, say, the squares occurring in their natural order of increasing x. R consists of squares, of order $N + 3$, lying in the same row of the diagram for each S_i^N, say the qth row counting from the bottom. If $q =$ 3, 4, 5, 6, 7, or 8, then we have at once $F(R) = 0$. If however

$q = 1$ or 2, then we see that, for $1 < i < p$, since R traverses the whole width of S_i^N, we have

$$F(RS_i^N) = \tfrac{1}{2} F(S_i^N);$$

while

$$F(RS_1^N) = \alpha F(S_1^N), \qquad \alpha = 0 \text{ or } \tfrac{1}{2};$$

$$F(RS_p^N) = \beta F(S_p^N), \qquad \beta = 0 \text{ or } \tfrac{1}{2}.$$

Hence we can write

$$F(R) = \tfrac{1}{2} F(R'),$$

where R' is a row-rectangle of order N, which contains $S_2^N, \dots, S_{p-1}^N$, and does or does not contain S_1^N, according as $\alpha = \frac{1}{2}$ or $\alpha = 0$; similarly R' does or does not contain S_p^N, according as $\beta = \frac{1}{2}$ or $\beta = 0$. Now $|F(R')| \leqslant 2^{-M}$, by the inductive hypothesis, and so $|F(R)| \leqslant 2^{-(M+1)}$.

Any row-rectangle R of order $N+2$ is the sum of two row-rectangles of order $N+3$, and so satisfies $|F(R)| \leqslant 2.2^{-(M+1)} = 2^{-M}$. Finally, a row-rectangle of order $N+1$ is the sum of four row-rectangles of order $N+3$, but, in the diagram, at least two of these must lie in rows $3, 4 \dots, 7$ or 8 in each square S^N and so contribute nothing to $F(R)$; hence again $|F(R)| \leqslant 2.2^{-(M+1)} = 2^{-M}$. Thus we have proved the required result for $n = N+1$, $N+2$, $N+3$; and so, since $N+3 = 3\,(M+1)$, we see by induction that the result is true for all n.

3. Now let R be any rectangle whatever. Denote by R^n the rectangle formed by all the squares of the net, of order n, which lie entirely in R. Then, for sufficiently large n, R^n does not vanish, while as $n \to \infty$, R^n approaches R. Now $R^{n+1} - R^n$ consists of at most two column-rectangles and at most two row-rectangles, of order $(n+1)$. Hence

$$|F(R^{n+1}) - F(R^n)| \leqslant 4.2^{-(n-1)/3}.$$

This is true also if R^n vanishes, if we write 0 for $F(R^n)$. Since $\sum_n 2^{-n/3}$ converges, $F(R^n)$ tends to a limit as $n \to \infty$. We define

$$F(R) = \lim_{n \to \infty} F(R^n).$$

Now we have

$$|F(R) - F(R^n)| \leqslant 4 . \sum_{p=n}^{\infty} 2^{-(p-1)/3}$$

$$< 32 . 2^{-n/3}.$$

On the other hand, if $|R| < 2^{-2n}$, then clearly R^n vanishes, and so $|F(R)| < 32.2^{-n/3}$. This shows that $F(R)$ tends uniformly to zero as $|R|$ tends to zero.

Now let R_1, R_2, R_3 be three rectangles such that $R_3 = R_1 + R_2$, so that R_1, R_2 have a side in common. Then we see that either

$$R_3^n = R_1^n + R_2^n,$$

or

$$R_1^n = R_1^n + R_2^n + T^n,$$

where T^n is either a column-rectangle or a row-rectangle, of order n.

Hence $$|F(R_3^n) - F(R_1^n) - F(R_2^n)| \leqslant 2^{-(n-2)/3}.$$

Letting $n \to \infty$, we have

$$F(R_3) = F(R_1) + F(R_2).$$

We see that $F(R)$ is, as required, a continuous additive function of rectangles.

4. If $P = (x_0, y_0)$ is a point which lies on an edge of a square of order 0, then, since all squares S outside S_0 have $F(S) = 0$, we see at once that the upper derivate at P is non-negative. If P lies on a line of the net but not on a line of order 0, then we can find m such that P lies on an edge of a square S^{3m+3}, but not on an edge of any square S^{3m}. On referring to the diagram for S^{3m} we see that there exists at least one square S^{3m+3}, containing P on its boundary, for which $F(S^{3m+3}) = 0$. Since each square obtained by subdividing this square also satisfies $F(S) = 0$, we see again that the upper derivate at P is non-negative.

Now let P be a point which lies on no line of the net. Then, for each n, there is exactly one square of order n which contains P. We call this square $S^n(P)$. Suppose, if possible, that the upper derivate of F at P, with respect to the net, is negative. Then there exists n_0 such that $F[S^n(P)] < 0$ if $n > n_0$. Take any M such that $3M > n_0$, and let $S^{3M}(P)$ be

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + 2^{-3M}, \qquad y_1 \leqslant y \leqslant y_1 + 2^{-3M}.$$

Since $S^{3M}(P)$, $S^{3M+1}(P)$, $S^{3M+2}(P)$ and $S^{3M+3}(P)$ all have negative (not zero) values of F, we see that $S^{3M+3}(P)$ must lie in the bottom row of the diagram for $S^{3M}(P)$; that is,

$$y_1 \leqslant y_0 \leqslant y_1 + 2^{-3M-3}.$$

Proceeding in the same way for the diagram of $S^{3M+3}(P)$ we obtain

$$y_1 \leqslant y_0 \leqslant y_1 + 2^{-3M-6},$$

and so on; whence $y_0 = y_1$, contrary to the hypothesis that P lies on no line of the net. Hence the upper derivate of F at P cannot be negative. This completes the proof of the properties of $F(R)$.

I. P. Natanson (Leningrad).

O całkach Bochnera

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 19 października 1937 r.

STRESZCZENIE.

Autor nawiązuje do pracy S. Bochnera (Fundam. Math., **20** (1933) pp. 262 — 280), zawierającej definicję całki dla funkcyj, które przyjmują wartości należące do przestrzeni liniowej abstrakcyjnej. Autor wskazuje na pewne różnice istotne między tą całką a zwykłą całką Lebesgue'a. Np. wiadomo, że jeśli $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem funkcyj rzeczywistych i całki nieoznaczone Lebesgue'a tych funkcyj są jednakowo ciągłe bezwzględnie, to całki nieoznaczone funkcyj $|f_n(x)|$ tworzą również ciąg funkcyj jednakowo ciągłych bezwzględnie. Otóż okazuje się, że dla całki Bochnera twierdzenie analogiczne jest fałszywe.

I. P. Natanson.

Sur les intégrales au sens de M. Bochner.

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 19 octobre 1937.

1. Dans son mémoire „Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind", M. S. Bochner[1]) a introduit la notion de l'intégrale d'une fonction dont les valeurs appartienent à un espace abstrait du type de Banach. La théorie de ces intégrales est en presque tous les points analogue à la théorie ordinaire des intégrales de Lebesgue. Cependant M. S. Bochner[2]) a trouvé quelques propositions qu'on ne peut pas transposer du cas habituel à la théorie des ses intégrales. Telle est p. ex. *l'égalité de Parseval.*

Dans cette note nous allons indiquer encore quelques différences essentielles entre les intégrales de Lebesgue et celles de Bochner.

2. On dit que l'intégrale de Lebesgue

$$\int_e f_n(t)\, dt \tag{1}$$

est uniformément absolument continue, si à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $me < \delta$ entraîne l'inégalité

$$\left| \int_e f_n(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

quel que soit n. On sait que, si l'intégrale (1) est uniformément absolument continue, l'intégrale

$$\int_e |f_n(t)|\, dt \tag{2}$$

du *module* de la fonction considérée l'est aussi.

---

[1]) Fund. Math., 20 (1933), p. 262.

[2]) loc. cit., voir aussi S. Bochner, Abstrakte Funktionen und die Besselsche Ungleichung (Göttinger Nachr., I, Nr. 40, 1933, p. 178).

Cependant, comme nous le montrerons dans le n^0 4, pour les intégrales de Bochner à l'intégrale uniformément absolument continue (1) ne correspond pas nécessairement une intégrale (2) de mêmes propriétés.

3. Considérons la fonction $f(t)$ de la variable réelle t, dont les valeurs sont des points de l'espace abstrait (l^2), c.-à-d. des suites

$$\xi = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots)$$

pour lesquelles

$$\|\xi\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} < +\infty \cdot$$

Il est clair que notre fonction a la forme

$$f(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots), \quad (a \leq t \leq b).$$

Il est facile de démontrer que pour que $f(t)$ soit mesurable, il est nécessaire et suffisant que toutes les fonctions $\varphi_k(t)$ (où $k = 1, 2, 3, \ldots$ et $a \leq t \leq b$) soient mesurables.

La fonction $f(t)$ est intégrable dans le sens de Bochner si elle est mesurable et si la fonction

$$\|f(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t)}$$

est sommable.

Lemme. *Si $f(t)$ est intégrable dans le sens de Bochner, on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b \varphi_1(t)\,dt, \int_a^b \varphi_2(t)\,dt, \ldots\ldots\right). \tag{3}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après l'inégalité évidente

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left\{\int_a^b \varphi_k(t)\,dt\right\}^2 \leq \left\{\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(t)}\,dt\right\}^2$$

le second membre de l'égalité (3) est un point de l'espace (l^2).

Ceci fait, considérons la fonction

$$f_k^*(t) = (0, 0, \ldots, 0, \varphi_k(t), 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \varphi_k(t)$$

Il est évident que

$$\int_a^b f_k^*(t)\, dt = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \cdot \int_a^b \varphi_k(t)\, dt =$$

$$= \left(0, \ldots, 0, \int_a^b \varphi_k(t)\, dt, 0, \ldots\right).$$

Posons maintenant

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), 0, \ldots).$$

Puisque l'intégrale de Bochner est additive, nous avons

$$\int_a^b f_n(t)\, dt = \left(\int_a^b \varphi_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \varphi_n(t)\, dt, 0, \ldots\right). \tag{4}$$

Or, pour chaque valeur déterminée de t, on aura

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t),$$

et comme

$$\| f_n(t) - f(t) \| \leq \| f(t) \|,$$

on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt. \tag{5}$$

La relation (3) découle de (4) et (5). Le lemme est donc démontré.

Il en résulte que

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b \varphi_k(t)\, dt \right\}^2}. \tag{6}$$

Mentionnons encore la relation

$$\int_a^b \|f(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t)}\,dt\,. \tag{7}$$

4. Nous pouvons maintenant passer à l'exemple mentionné au début.

Exemple. Considérons l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ divisé en segments par les points $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{3}{4}, \ldots\ldots, t_i = 1 - \frac{1}{2^i}, \ldots$ Nous numéroterons les intervalles partiels dans l'ordre où ils se suivent de gauche à droite et les désignerons, ainsi que leurs longueurs, par

$$\delta_1,\ \delta_2, \ldots\ldots, \delta_i, \ldots\ldots$$

Soit

$$f^{(n)}(t) = (\varphi_1^{(n)}(t),\ \varphi_2^{(n)}(t), \ldots\ldots),$$

où

$$\varphi_k^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{identiquement pour } k > n, \\ \dfrac{1}{k\delta_k} & \text{pour } k \leqslant n,\ t\,\varepsilon\,\delta_k, \\ 0 & \text{pour } k \leqslant n,\ t \text{ non } \varepsilon\,\delta_k. \end{cases}$$

Soit E un ensemble mesurable arbitraire dans l'intervalle $(0,1)$. Posons

$$E_i = E.\delta_i$$

La relation (6) prend alors la forme

$$\left\| \int_E f^{(n)}(t)\,dt \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_E \varphi_k^{(n)}(t)\,dt \right\}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{m}\,E_k}{k\delta_k} \right)^2$$

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons un nombre n_0 tel que

$$\sum_{k > n_0} \frac{1}{k^2} > \tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

et posons

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k^2 \delta_k^2} = S.$$

On aura alors pour n quelconque

$$\left\| \int_E f^{(n)}(t)\, dt \right\|^2 \leqslant S \,.\, (\mathrm{m}\, E)^2 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2$$

et, sous la condition que

$$\mathrm{m}\, E < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2 S}},$$

on aura

$$\left\| \int_E f^{(n)}(t)\, dt \right\| < \varepsilon$$

de sorte que *l'intégrale*

$$\int_E f^{(n)}(t)\, dt$$

est uniformément absolument continue.

D'autre côté nous avons, d'après (7),

$$\int_E \| f^{(n)}(t) \|\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{E_i} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k^{(n)}(t)]^2\, dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \varphi_i^{(n)}(t)\, dt$$

d'où

$$\int_E \| f^{(n)}(t) \|\, dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{m} E_i}{i \delta_i}.$$

Posons maintenant

$$E^{(m)} = \sum_{i=m}^{\infty} \delta_i,$$

de sorte que

$$\mathrm{m}\, E_i^{(m)} = \begin{cases} 0 & (i < m) \\ \delta_i & (i \geqslant m) \end{cases}.$$

Alors

$$\int_{E^{(m)}} \| f^{(n)}(t) \| \, dt = \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i}$$

tend vers $+\infty$ avec $n \to \infty$.

Comme $\mathrm{m}\,E^{(m)}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{m}$, *l'intégrale*

$$\int_{E} \| f^{(n)}(t) \| \, dt$$

n'est pas uniformément absolument continue, ce qui démontre notre assertion.

5. L'examen de l'exemple du n^0 4 montre encore une différence entre l'intégrale de Bochner et celle de Lebesgue. Introduisons notamment la fonction $f(t)$ en posant

$$f(t) = (\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \ldots\ldots)$$

et définissons la fonction $\varphi_n(t)$ dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ de la manière suivante

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\delta_k} & (t \,\varepsilon\, \delta_k) \\ 0 & (t \text{ non } \varepsilon\, \delta_k). \end{cases}$$

Cette fonction est évidemment mesurable. Comme

$$\| f(t) \| = \frac{1}{k\delta_k} \quad (t \,\varepsilon\, \delta_k),$$

la norme $\| f(t) \|$ n'est pas sommable; donc la fonction même $f(t)$ n'est pas intégrable dans le sens de Bochner. D'autre côté pour chaque t défini on a

$$\lim_{n} f^{(n)}(t) = f(t)$$

où $f^{(n)}(t)$ est la fonction du n^0 4.

De cette façon nous avons un exemple d'une suite convergente de fonctions intégrables telle que l'intégrale

$$\int_e f^{(n)}(t)\, dt$$

est uniformément absolument continue, mais la fonction limite n'est pas intégrable. On sait qu'on ne peut pas trouver un exemple analogue dans la théorie de Lebesgue.

6. De cette façon le célèbre théorème de Vitali sur le passage à la limite sous le signe d'intégrale ne peut pas être étendu au cas des intégrales de Bochner. Cependant si l'on supposait *a priori* l'intégrabilité de la fonction limite, ce théorème resterait encore valable.

Théorème. *Soit* $\{f_n(t)\}$ *une suite de fonctions intégrables au sens de Bochner, convergente vers une fonction intégrable* $f(t)$,

$$\lim_n f_n(t) = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{8}$$

Pour que l'égalité

$$\lim_n \int_E f_n(t) = \int_E f(t)\, dt \tag{9}$$

ait lieu quel que soit l'ensemble E *mesurable, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale*

$$\int_e f_n(t)\, dt \tag{10}$$

soit uniformément absolument continue.

La condition est suffisante. Il ressort de la condition (8) que

$$\lim_n \| f_n(t) - f(t) \| = 0.$$

De cette façon la mesure de l'ensemble

$$E_n(\varepsilon) = \mathcal{E}\,(\|f_n - f\| > \varepsilon)$$

tend vers 0 avec $\dfrac{1}{n}$. Si E est un ensemble mesurable arbitraire et si nous posons

$$A_n = E.\,E_n(\varepsilon); \quad B_n = E - A_n$$

alors

$$\int_E [f_n(t) - f(t)]\, dt = \int_{A_n} (f_n - f)\; dt + \int_{B_n} (f_n - f)\, dt.$$

Pour l'intégrale étendue sur l'ensemble B_n nous avons

$$\left\| \int_{B_n} [f_n(t) - f(t)]\, dt \right\| \leqslant \int_{B_n} \| f_n - f \|\; dt \leqslant \varepsilon \,.\, (b-a).$$

L'intégrale prise pour l'ensemble A_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Ceci démontre le thèorème.

La *nécessité de la condition* découle du lemme général suivant:

Lemme. *Si pour chaque ensemble mesurable E on a*

$$\lim_n \int_E f_n(t)\, dt = 0,$$

l'intégrale

$$\int_E f_n(t)\; dt$$

est une fonction uniformément absolument continue.

On peut transposer presque sans changements la démonstration que M. Lebesgue a donnée à ce lemme[1]) aux intégrales de Bochner. Nous ne répéterons pas le raisonnement de l'illustre auteur.

Université de Leningrad.
Institut Mathématique.

---

[1]) H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse, I (3), 1909, p. 58.

Zygmunt Zahorski

Konstrukcja funkcji różniczkowalnej, monotonicznej, nie stałej, mającej wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu w dniu 19 października 1937 r.

STRESZCZENIE.

Funkcję o wymienionych w tytule własnościach konstruuję klasyczną metodą superpozycji, przyczym posługuję się funkcją różniczkowalną rosnącą $f(x)$, której pochodna posiada wszędziegęsty zbiór zer. Konstrukcja naogół nie jest efektywna, można jednak dobrać $f(x)$ tak, że da się ona przeprowadzić efektywnie.

Z. Zahorski

Über die Konstruktion einer differenzierbaren, monotonen, nicht konstanten Funktion, mit überall dichter Menge von Konstanzintervallen.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz á la séance du 19 octobre 1937.

Ich werde in dieser Note eine neue Konstruktionsmethode von Funktionen mit den genannten Eigenschaften angeben, die sich von den bekannten Methoden von S. Mazurkiewicz[1]), A. Denjoy[2]) und W. Bogomołowa[3]) unterscheidet. Diese Methode ist im wesentlichen mit der klassischen Methode der Singularitätenkondensation identisch.

Wenn $x_1 < x_2$, so soll (x_1, x_2) das offene, $< x_1, x_2 >$ das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten x_1, x_2 bezeichnen.

Sei $f(x)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) *$f(x)$ ist in $< a, b >$ wachsend und differenzierbar*[4])

---

[1]) Mazurkiewicz: *Konstrukcja funkcji różniczkowalnej mającej wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.* Prace mat.-fiz. T. 27 S. 87—91 (1915). Poln. m. franz. Res.

[2]) Denjoy: *Sur les fonctions dérivées sommables.* Bulletin de la Société Mathématique de France T. 43 S. 237 (1915).

[3]) Bogomołowa: *Sur une classe des fonctions asymptotiquement continues.* Moscou Rec. Math. T. 32 S. 152—171 (1924). Russ. m. franz. Res.

[4]) In *a* rechts — in *b* linksseitig.

(2) $f'(x) < M$ *in* $\langle a, b \rangle$

(3) $f'(x) = 0$ *in den Punkten einer in* (a, b) *überall dichten Menge.*

(4) $f(a) = 0$; $f(b) = 1$.

Funktionen mit den Eigenschaften (1), (2), (3), existieren z.B. die bekannte Funktion von Pompeiu[1]), hat aber $f_1(x)$ die Eigenschaften (1), (2), (3), so hat $\dfrac{f_1(x) - f_1(a)}{f_1(b) - f_1(a)}$ die Eigenschaften (1), (2), (3), (4).

Jetzt bestimme ich induktiv eine abzählbare Menge von paarweise punktfremden Intervallen:

(5) $\{\langle a_{n,m}, b_{n,m} \rangle\}$; $n = 1, 2 \ldots$, $m = 1, 2 \ldots 2^{n-1}$; $a < a_{n,m} < b_{n,m} < b$

in folgender Weise.

Sei $x_{1,1} \varepsilon \left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{20}, \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{20} \right)$ ein Stetigkeitspunt von $f'(x)$; ein solcher Punkt existiert, denn $f'(x)$ ist von der ersten Klasse, besitzt also eine in (a, b) überal dichte Menge von Stetigkeitspunkten. Dann ist nach (3):

(6) $f'(x_{1,1}) = 0$

und man kann eine Zahl $\delta_{1,1}$ so bestimmen, dass:

(7) $a \leqq x_{1,1} - \delta_{1,1} < x_{1,1} + \delta_{1,1} \leqq b$

(8) $f'(x) < \dfrac{1}{4(b-a)}$ *für* $x \varepsilon (x_{1,1} - \delta_{1,1}, x_{1,1} + \delta_{1,1})$

In $(x_{1,1} - \delta_{1,1}, x_{1,1} + \delta_{1,1})$ wählen wir $a_{1,1}$, $b_{1,1}$ so aus dass:

(9) $a_{1,1} < x_{1,1} < b_{1,1}$

(10) $f'(a_{1,1}) = f'(b_{1,1}) = 0$

Solche Punkte existieren, da die Menge der Nullstellen von $f'(x)$ nach (3) in (a, b) überall dicht ist. Somit ist $\langle a_{1,1}, b_{1,1} \rangle$ bestimmt. Wenn die $2^n - 1$ paarweise punktfremden, in (a, b)

---

[1]) Pompeiu: *Sur les fonctions dérivées.* Math. Ann. T. 63, S. 326—332 (1906).

enthaltenen Intervalle $< a_{k,j}, b_{k,j} >$, $k = 1,2\ldots n$, $j = 1,2\ldots 2^{k-1}$ bestimmt sind, so kann man $< a_{n+1,m}, b_{n+1,m} >$, $m = 1,2\ldots 2^n$ wie folgt bestimmen.

Die Menge $(a, b) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} < a_{k,j}, b_{k,j} >$ besteht aus 2^n offenen punktfremden Intervallen, die wir mit $(c_{n+1,m}, d_{n+1,m})$, $m = 1,2\ldots 2^n$ bezeichnen. Wir wählen in $\left(\frac{c_{n+1,m} + d_{n+1,m}}{2} - \right.$

$$\left. - \frac{d_{n+1,m} - c_{n+1,m}}{20}, \quad \frac{c_{n+1,m} + d_{n+1,m}}{2} + \frac{d_{n+1,m} - c_{n+1,m}}{20} \right)$$

einen Stetigkeitspunkt $x_{n+1,m}$ von $f'(x)$ und bestimmen die Zahl $\delta_{n+1,m}$ so dass:

$$(11) \quad c_{n+1,m} \leqq x_{n+1,m} - \delta_{n+1,m} < x_{n+1,m} + \delta_{n+1,m} \leqq d_{n+1,m}$$

$$(12) \quad f'(x) < \frac{1}{2^{n+2}(b-a)} \quad \text{für } x \varepsilon (x_{n+1,m} - \delta_{n+1,m}, x_{n+1,m} + \delta_{n+1,m})$$

In $(x_{n+1,m} - \delta_{n+1,m}, x_{n+1,m} + \delta_{n+1,m})$ wählen wir zwei Punkte: $a_{n+1,m}, b_{n+1,m}$ so dass:

$$(13) \quad a_{n+1,m} < x_{n+1,m} < b_{n+1,m}$$

$$(14) \quad f'(a_{n+1,m}) = f'(b_{n+1,m}) = 0$$

Man sieht leicht ein, dass die $< a_{n+1,m}, b_{n+1,m} >$ zueinander und zu den $< a_{k,j}, b_{k,j} >$, $k = 1,2\ldots n$, $j = 1,2\ldots 2^{k-1}$ paarweise punktfremd sind, die Konstruktion von (5) ist also unbeschränkt fortsetzbar.

Die so gebildete Intervallmenge ist in (a, b) überall dicht. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein Intervall $(x_1, x_2) \subset (a, b)$, mit $x_1 < x_2$ welches zu allen Intervallen (5) punktfremd wäre. (x_1, x_2) wäre also für jedes n in einem der Intervalle $< c_{n+1,m}, d_{n+1,m} >$ enthalten. Aber, wie man leicht induktiv beweisen kann, gilt die Ungleichung:

(15) $d_{n+1,m} - c_{n+1,m} < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\right)^n (b-a) \qquad n=1,2\ldots,\ m=1,2\ldots 2^n$

Also wäre für jedes n: $x_2 - x_1 < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\right)^n (b-a)$, somit $x_2 = x_1$, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

Nach (11), (14), (8), (12) hat man für $n=1,2\ldots,\ m=1,2\ldots 2^{n-1}$

(16) $f'(a_{n,m}) = f'(b_{n,m}) = 0$

(17) $f'(x) < \dfrac{1}{2^{n+1}(b-a)}$ für $x \varepsilon\ (a_{n,m}, b_{n,m})$

Nun setzen wir:

(18) $f_{n,m}(x) = 0$ für $x \varepsilon < a, a_{n,m} >$

(19) $f_{n,m}(x) = f(x) - f(a_{n,m})$ für $x \varepsilon\ (a_{n,m}, b_{n,m})$

(20) $f_{n,m}(x) = f(b_{n,m}) - f(a_{n,m})$ für $x \varepsilon < b_{n,m}, b >$

(21) $$f_n\ (x) = \sum_{m=1}^{2^{n-1}} f_{n,m}(x)$$

und

(22) $$g(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Ich behaupte, $g(x)$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. Wegen (16) sind die Funktionen $f_{n,m}(x)$, also auch die $f_n(x)$ in $< a, b >$ differenzierbar. Nach (17) ist:

(23) $0 \leqq f'_{n,m}(x) < \dfrac{1}{2^{n+1}(b-a)}$ für $x \varepsilon\ (a_{n,m}, b_{n,m})$

(24) $f'_{n,m}(x) = 0$ für $x \varepsilon < a, a_{n,m} > + < b_{n,m}, b >$

Da die Intervalle $(a_{n,m}, b_{n,m})$ paarweise punktfremd sind, so folgt:

(25) $0 \leqq f'_n(x) < \dfrac{1}{2^{n+1}(b-a)}$ in $< a, b >$

die Reihe:

$$(26)\quad f'(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

ist also in $<a, b>$ gleichmässig konvergent. Nun verschwinden für $x = a$ alle Glieder der Reihe (22), dieselbe konvergiert somit für $x = a$ und ist also, wegen der gleichmässigen Konvergenz von (26) — in $<a, b>$ auch gleichmässig konvergent. *Also ist $g(x)$ bestimmt und in $<a, b>$ differenzierbar.*

In $(a_{k,j}, b_{k,j})$ sind alle $f_{n,m}(x)$, mit Ausnahme von $f_{k,j}(x)$, — konstant. Also hat man für $x \varepsilon (a_{k,j}, b_{k,j})$:

$$(27)\quad g(x) = f(x) - f_{k,j}(x) + Const. = f(a_{k,j}) + Const. = Const.$$

Die Intervalle (5) *sind somit Konstanzintervalle von $g(x)$.*

Für ein x, welches zu keinem Intervall (5) gehört, verschwinden $f'_{n,m}(x)$, also alle $f'_n(x)$ und es folgt nach (1):

$$(28)\quad g'(x) = f'(x) \geqq 0$$

Also ist $g(x)$ monoton (nicht abnehmend)

Wegen (25) hat man:

$$(29)\quad f_n(b) = f_n(b) - f_n(a) \leqq \underset{x}{Sup}\, f'_n(x)\ (b-a) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$(30)\quad g(a) = 0$$

$$(31)\quad g(b) = f(b) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Also ist $g(x)$ nicht konstant in $<a, b>$.

Die gegebene Konstruktion von $g(x)$ ist nicht effektiv, aber *man kann $f(x)$ so konstruieren, dass sie effektiv wird.* Gleichzeitig kann man noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen, z. B. kann man $f(x)$ so konstruieren, dass eine überall dichte Menge algebraischer Zahlen existiert mit folgenden Eigenschaften: 1) die Zahlen der Menge sind durch Summen einer endlichen Anzahl von quadratischen Irrationalzahlen darstellbar, 2) sie sind Stetigkeitspunkte von $f'(x)$, 3) die entsprechenden Funktionswerte sind rational.

W. Lampe i J. Swiderski.

Synteza dwuferuloilo-α, β-etanu (homologu kurkuminy).

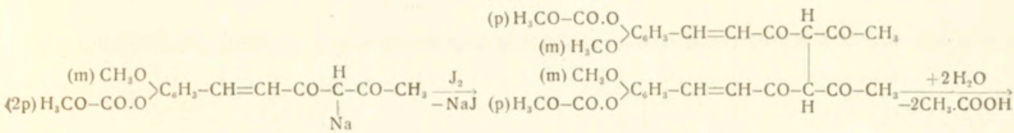
Przedstawił W. Lampe d. 19 października 1937 r.

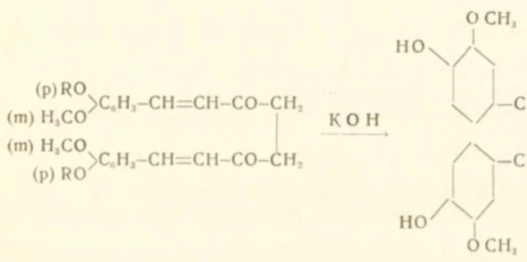
La synthèse du diferuloyl-α, β-éthane (homologue de la curcumine).

Mémoire présenté par M. V. Lampé dans la séance de 19 Octobre 1937.

STRESZCZENIE.

Celem pracy była synteza oraz poznanie własności chemicznych i barwierskich dwuferuloilo-α, β-etanu (wzór I), homologu barwnika roślinnego, kurkuminy (wzór II). Następujące wzory odtwarzają główne etapy syntezy

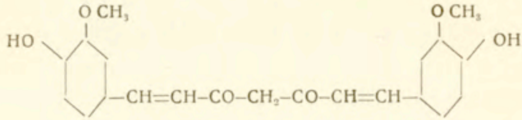




(wzór I)

Dwuferuloilo-α, β-etan otrzymaliśmy w dwóch odmianach tautomerycznych. Forma ketonowa, trudniej rozpuszczalna w alkoholu etylowym krystalizuje się w cytrynowo-żółto zabarwione blaszki o t. t. 190—191°, nie barwiące się pod wpływem $FeCl_3$; forma enolowa, wydzielona z alkoholowych ługów pokrystalicznych odmiany ketonowej tworzy skupienia cytrynowo-żółto zabarwionych, drobnych igiełek o t. t. 179—180°, dających z $FeCl_3$ krwisto-czerwone zabarwienie.

Opisywana substancja posiada b. zbliżoną budowę do barwnika roślinnego kurkuminy, dla której udowodniony został wzór dwuferuloilometanu [1]), zaproponowany przez Kostaneckiego [2])



(wzór II)

Stwierdzone różnice w zachowaniu się obydwu homologicznych związków tłumaczyć należy przynależnością produktów do dwóch odrębnych substancyj macierzystych: β, względnie γ-dwuketonu.

Pomarańczowo-czerwono zabarwiona kurkumina barwi bawełnę bezpośrednio na kolor pomarańczowy i wykazuje pozytywną reakcję z kwasem borowym, — a mianowicie: bibuła, nasycona roztworem kurkuminy zmienia pod wpływem rozczynu kw. borowego zabarwienie na kolor silnie pomarańczowy; ług wywołuje na tak przygotowanym papierku niebiesko czarną plamę.

Cytrynowo-żółto zabarwiony dwuferuloilo-α, β etan zabarwia bawełnę bezpośrednio na kolor cytrynowo-żółty; związek ten charakterystycznej reakcji z kw. borowym nie wykazuje.

Praca ogłoszona zostanie w „Rocznikach Chemii".

Zakład Chemii Organicznej
U. J. P. w Warszawie.

Bogumił Krygowski.

O nowej metodzie rozdzielania ziarn piasku według stopnia ich zaokrąglenia.

Przedstawił A. Łaszkiewicz dn. 19 października 1937 r.

Bericht über eine neue Methode der Selektion der Sandkörner nach ihrem Rundungsgrade.

Mémoire présenté par M. A. Łaszkiewicz à la séance du 19 octobre 1937.

Praca ukazała się w „Archiwum Mineralogicznym". XIII. 1937. 52 — 62.

---

[1]) Rozprawy Akad. Umiej. w Krakowie t. 57 Ser. A., str. 23. [1917 r.].
[2]) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. t. 43, str. 2163 [1910 r.].

Posiedzenie

z dnia 23 listopada 1937 r.

Kazimierz Smulikowski.

O wykryciu molibdenitu w okolicy Jasnohorki (powiat Sarny).

Przedstawił A. Łaszkiewicz dn. 23 listopada 1937 r.

Trouvaille de molybdénite à Jasnohorka (arrondissement de Sarny).

Mémoire présenté par M. A. Łaszkiewicz à la séance du 23 novembre 1937.

Praca ukazała się w „Archiwum Mineralogicznym". XIII. 1937. 98 — 108.

Adam Drath.

Występowanie molibdenitu w powiecie Sarneńskim na Wołyniu.

Przedstawił A. Łaszkiewicz dn. 23 listopada 1937 r.

Molybdénite dans l'arrondissement de Sarny en Volhynie.

Mémoire présenté par M. A. Łaszkiewicz à la séance du 23 novembre 1937.

Ludwik Piotrowski.

Własności krystalograficzne heliantynv.

Przedstawił A. Łaszkiewicz dn. 23 listopada 1937 r

Sur les propriétés cristallographiques de l'héliantine.

Mémoire présenté par M. A. Łaszkiewicz à la séance du 23 novembre 1937.

Praca ukazała się w „Archiwum Mineralogicznym". XIII. 1937. 63 — 79.

Maria Kołaczkowska.

Badania rentegonologiczne naturalnego i syntetycznego kaliofilitu oraz jego pochodnych.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 23 listopada 1937 r

Études roentgenoscopiques sur la kaliophilite et sur l'alunite naturelle et synthétique.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 23 novembre 1937.

Praca ukazała się w „Archiwum Mineralogicznym". XIII. 1937. 92 — 97.

Posiedzenie

z dnia 16 grudnia 1937 r.

L. C. Young.

O krzywych uogólnionych i o istnieniu minimum bezwzględnego w rachunku wariacyjnym.

Przedstawił S. Saks dnia 16 grudnia 1937 r.

Autor bada zagadnienie minimum dla wyrażeń postaci

$$(*) \qquad \Phi\left\{\int_0^1 F[x(t),\ x'(t)]\,dt\right\},$$

w którym Φ oznacza funkcję rzeczywistą ciągłą zmiennego wektora, zaś $F(x, y)$ — funkcję dwu wektorów x i y w przestrzeni euklidesowej, przyjmującą wartości należące do przestrzeni liniowej abstrakcyjnej. Funkcja $x(t)$ zmiennej rzeczywistej t interpretowana jest, jak zwykle, jako krzywa zmienna w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, przy czym zakłada się m. in, że pochodna $x'(t)$ istnieje prawie wszędzie oraz że $|x'(t)| \leq K$, gdzie K jest pewną stałą.

Wyrażenie (*) może nie osiągać swego minimum dla żadnej krzywej rozważanego typu. Autor wprowadza jednak pewne krzywe uogólnione, które uważać można za „punkty skupienia“ klasy krzywych rozważanych, i pokazuje, że poszukiwane minimum jest osiągane zawsze w dziedzinie krzywych uogólnionych.

L. C. Young.

Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the Calculus of Variations.

Mémoire présenté par M. S. Saks à la séance du 16 décembre 1937.

1. **Introduction.** The *classical* calculus of variations concerned itself only with problems in which a maximum, or minimum, of the variational integral under consideration, was actually *attained*. It was therefore found necessary to supplement the classical investigations by an *existence theory* ensuring the existence of an attained extremum in certain types of problems, in order to render the classical ideas applicable.

The restrictions required to build up such an existence theory were of a very drastic kind, and it is natural to ask whether the variational methods cannot be generalized so as to apply to certain types of problems in which the extrema are not attained. These problems still have a definite meaning, and in special cases their solutions constitute well-known inequalities which are of great importance in Analysis.

Actually such a generalization is possible, if we introduce a class of elements called *generalized admissible curves* which may, for the variational problem considered, be regarded as the *closure* of the originally given class of admissible curves. The procedure is merely an adaptation of the ideas which led to the notion of irrational number.

The definition of these generalized curves is implicitly contained in the ideas of the note [7]. We give it here explicitly, and in a general form, applicable when the space is a general vector space of the Banach type. We also link it, in a natural way, to the theory of general linear operations, and we employ it to extend the scope of the Calculus of Variations by transforming certain types of variational problems with unattained extrema into corresponding problems with attained extrema.

The present methods, when used in conjunction with those of the paper [9], where the classical conditions for a minimum are extended correspondingly, make it possible to solve, in the framework of the Calculus of Variations, important classes of problems concerning unattained minima.

2. **A general type of variational problem.** We shall formulate our present results for a variational problem of a rather general type concerning simple integrals, and which, like certain other problems recently considered (cf., in particular, Menger [5]), refers to an abstract space.

We denote by $\mathcal{F}_0$ a complete metrical vector-space (a *Banach space*, cf section 3 below, or for instance Banach [1] Chap. IV) and by $F(x, y)$ a continuous single-valued function of two vectors x and y of n-dimensional space, the values f of the function F being vectors of the space $\mathcal{F}_0$, subject to the condition of homogenuity

$$F(x, \sigma y) = \sigma F(x, y) \tag{2·1}$$

for every non-negative real scalar σ. Further, we denote by $\Phi(f)$ a continuous real function of the vector f in $\mathcal{F}_0$. We shall be concerned with the problem

$$\Phi\left\{\int_0^1 F(x(t),\ x'(t))\, dt\right\} = \text{Min.}, \tag{2·2}$$

where the variable absolutely continuous vector-function $x(t)$ of the real parameter t will be supposed, for simplicity, to have a bounded derivative $x'(t)$ almost everywhere, and fixed ends $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. The condition of homogenuity (2·1) ensures that the integral

$$\mathcal{I}_C = \int_0^1 F(x(t),\ x'(t))\, dt \tag{2·3}$$

is independent of the choice of the parameter t in terms of which C is represented by the function $x(t)$.

We shall, actually, be concerned only with the minimum of (2·2) for *curves of uniformly bounded length*. To our hypotheses on the curves, we therefore add the condition

$$\int_0^1 |x'(t)|\, dt \leq K,$$

or, with a suitable standard parameter (a constant multiple of the length of arc), the condition

$$|x'(t)| \leq K,$$

which expresses that the length must not exceed the fixed number K.

In the above variational problem, the function F and the limits of integration are fixed, as well as Φ and the constant K, while C is a variable curve.

It is convenient, however, to make the function F and the range of integration *variable*, and keeping the curve C fixed for the moment, to consider the operation

$$I_C\,(F;\,\Delta) = \int_{\Delta} F\,(x\,(t),\,x'\,(t))\,dt,$$

(where $|x'(t)| \leq K$, $|x(t)| \leqslant |x_0| + K$) an operation which makes correspond to the function $F(x, y)$ a function of the sub-interval Δ of (0, 1). We may forget about our minimum problem, to which we shall return in a later section. In the meantime, we study the *closure of the operations* $I_C\,(F;\,\Delta)$.

We begin with the definitions and elementary theorems which comprise all we need know, in this note, of the vector-spaces which occur here.

3. **Vector-spaces and the principle of linear closure.** As usual, we term *Banach space*, a space $\mathfrak{F}_0$ of points f (called *vectors*), such that: (i) whenever the f_i are points of $\mathfrak{F}_0$ and the a_i are real numbers, for $i = 1, 2, \ldots, N$, the linear combination $\sum a_i f_i$ defines a unique point of $\mathfrak{F}_0$ such that the laws of vector algebra hold; (ii) the non-negative real number $|f|$ is defined for each f of $\mathfrak{F}_0$ and we have $|f| = 0$ only when f is the null-vector 0; moreover, $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$ and, for every real number t, $|tf| = |t| . |f|$; (iii) the distance of any two vectors f_1, f_2 is defined to be $|f_2 - f_1|$, and, given any sequence of vectors $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ such that

$$\lim_{p,\,q \to \infty} |f_p - f_q| = 0,$$

there exists a vector f such that

$$\lim_{n} |f_n - f| = 0.$$

A function F whose values f are vectors belonging to a Banach space $\mathfrak{F}_0$, will be termed a *vector-function*. The product

$f.\Phi$ of a constant vector f and a real function Φ will be termed an *elementary vector-function.* Evidently, every continuous vector-function $F(x)$ defined in a closed Euclidean interval is *the uniform limit of finite sums of continuous elementary vector-functions.* The elementary vector-functions of this approximation can for instance be chosen to have the form $F(c).\prod_{k=1}^{n}\Phi_0(a\,x^{(k)}+b)$ where $x^{(k)}$ is the k-th coordinate of x and $\Phi_0(t)=\text{Max}(1-|t|,0)$, and where a, b, c are constant.

Functions F whose values f belong to $\mathcal{F}_0$ may in their turn be treated as abstract vectors of a space $\mathcal{F}_1$, not necessarily a Banach space, and in which the part of a norm $|F|$ is played by a functional $Q(F)$, whose choice is to some extent arbitrary subject to the conditions

$$(3{\cdot}1)\qquad Q(F_1+F_2)\leq Q(F_1)+Q(F_2),\quad Q(cF)=|c|\,Q(F)$$

where c is any real constant. In the space $\mathcal{F}_1$ the linear combination $\sum a_i F_i$ denotes, of course, the function whose value for each x is the vector of $\mathcal{F}_0$ defined by $\sum a_i F_i(x)$. The „quasi-norm" $Q(F)$ clearly fulfils the condition $Q(0)=0$, but we do not stipulate that $Q(F)>0$ whenever $F\neq 0$. Moreover, $Q(F)$ gives rise to a „quasi-distance" $Q(F_2-F_1)$, or as we shall say a Q-*distance*, of any two functions F_1 and F_2, but the condition of completeness corresponding to (iii) will not be assumed. We shall term Q-*closure* of a set E of abstract vectors of $\mathcal{F}_1$, the set of the vectors F for each of which there exists a sequence $\{F_n\}$ $(n=0,1,2,\dots)$ of vectors of E such that

$$(3{\cdot}2)\qquad \lim_n Q(F_n-F)=0.$$

Principle of linear closure. *Given an abstract space $\mathcal{F}_1$ of abstract vectors F and a quasi-norm $Q(F)$, let $L(F)$ be a linear operation whose values are vectors f of a Banach space $\mathcal{F}_0$. and which is defined and subject to the condition*

$$|L(F)|\leqslant Q(F)$$

for each F of a linear subspace E of $\mathcal{F}_1$. Then there exists *a unique linear extension of $L(F)$ which is subject to the same conditions in the Q-closure of the set E.*

The proof is easy. Let F belong to the closure in question, and let $\{F_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ be a subsequence of E for which (3·2) holds. Since the operation L is linear, we have.

$$\begin{aligned} |L(F_p)-L(F_q)| = |L(F_p-F_q)| &\leqslant Q(F_p-F_q) \leqslant \\ &\leqslant Q(F_p-F)+Q(F-F_q), \end{aligned}$$

on account of (3·1). Thus, by 3·2, the vectors $f_n=L(F_n)$ of the Banach space $\mathfrak{F}_0$ have the convergence property considered in (iii) above, and there must exist a vector f for which

$$\lim_n |L(F_n)-f| = 0.$$

If a second sequence $\{F_n^*\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ of vectors of E fulfils the relation (3·2), the same is true of the mixed sequence

$$F_0,\ F_0^*,\ F_1,\ F_1^*,\ \ldots\ \ldots,$$

and it follows that there exists a vector f^* for which, simultaneously,

$$\lim_n |L(F_n)-f^*| = 0, \quad \lim_n |L(F_n^*)-f^*| = 0.$$

Evidently this is only possible if $f=f^*$ and we see that the vector f is uniquely attached to the function F. Writing $L(F)=f$, we at once verify that $L(F)$ is a linear operation, with the properties asserted, defined in the Q-closure of the set E. Finally, given any second linear extension $L^*(F)$ with the properties in question, we must have

$$\begin{aligned} |L^*(F)-L(F)| &= \lim_n |L^*(F)-L(F_n)| = \\ &= \lim_n |L^*(F-F_n)| \leqslant \lim_n Q(F-F_n) = 0, \end{aligned}$$

so that the extension is unique.

The result just establisted, which goes back substantially to Fréchet and F. Riesz [6], will be of frequent use in the sequel.

4. **Linear operations in functional vector-spaces.** We shall require the elements of a theory of integration for vector-

functions. This theory, an account of which is given by Bochner [2], may be based in a simple manner on the principle of linear closure discussed in the preceding section.

We observe that a linear functional $\Lambda(\Phi)$, such as a Lebesgue integral, defined in a field of real functions Φ, has a trivial extension

$$(4\cdot1) \qquad L\left(\sum_i f_i \Phi_i\right) = \sum_i f_i \Lambda(\Phi_i)$$

in the field consisting of the finite sums of elementary vector-functions $F = f\Phi$, where the f are constant vectors. We have only to verify that the definition is consistent, and this amounts to showing that

(4·2) *the identity* (*a*) $\sum_i f_i \Phi_i = 0$ *implies* (*b*) $\sum_i f_i \Lambda(\Phi_i) = 0$.

For this purpose, let f_j^* $(j = 1, 2, \ldots, N^*)$ be a linearly independent base of the finite system of vectors f_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, and let

$$f_i = \sum_j a_{ij} f_j^*.$$

We must then have, for each j, since the f_j^* are linearly independent and since (4·2) (*a*) holds,

$$\sum_i a_{ij} \Phi_i = 0.$$

Hence, by linearity of $\Lambda(\Phi)$,

$$\sum_i f_i \Lambda(\Phi_i) = \sum_{i,j} a_{ij} f_j^* \Lambda(\Phi_i) =$$
$$= \sum_j f_j^* \Lambda\left(\sum_j a_{ij} \Phi_i\right) = 0.$$

Suppose now, for definiteness, that

$$\Lambda(\Phi) = \int_0^1 \Phi(t)\, dt$$

and that this operation is defined, in the first instance, in the field of real *step-functions* of the real variable t. We observe that, by superposition of suitable subdivisions, any finite system of step-functions Φ_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) may be regarded as consisting of functions each of which is constant in each interval Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, K$) of a fixed subdivision of the interval of definition $(0, 1)$. The trivial vector-extension $L(F)$ of $\Lambda(\Phi)$ therefore fulfils, for any F of the form $\sum_i f_i \Phi_i$, the relation

$$(4{\cdot}3)\qquad \begin{aligned} |L(F)| &= \Big| \sum_{i,k} f_i \Phi_i(\Delta_k) \, |\Delta_k| \Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_k \Big| \sum_i f_i \Phi_i(\Delta_k) \Big| \, . \, |\Delta_k| = \Lambda(|F|), \end{aligned}$$

where we have written $|\Delta_k|$ for the length of Δ_k and $\Phi_i(\Delta_k)$ for the constant value $\Phi_i(t)$ when $t \varepsilon \Delta_k$.

If we now write, for any vector-function F whatever,

$$(4{\cdot}4)\qquad Q(F) = \Lambda^*(|F|),$$

where $\Lambda^*(\Phi)$ now denotes the upper Lebesgue integral of any real function Φ of the variable t, it follows that $L(F)$ extends uniquely to all functions F of the Q-closure of the vector step-functions so as to fulfil the conditions of linearity and the inequality

$$|L(F)| \leqslant Q(F).$$

The functions F belonging to this Q-closure are termed *Lebesgue integrable*, and $L(F)$ is termed their *Lebesgue integral*. Most of the further properties of this integral (for which cf. Bochner [2,3]) are easily obtained from the corresponding properties of the real Lebesgue integral.

For instance, if the vector-function $F(t)$ is Lebesgue integrable, we have, almost everywhere in Θ,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} |F(\Theta + t) - F(\Theta)| \, dt = 0;$$

the proof, a simple consequence of the definition, is identical with the corresponding proof by approximation (cf. Hobson [4], vol. I p. 582, 583) of the corresponding result for real functions. From this we may deduce, further, that $F(t)$ is almost everywhere the derivative of its indefinite integral, etc. It is less simple to prove that an indefinite integral can be characterized by absolute continuity (vide Bochner [3]). But these developments need not detain us and will not be required in the sequel.

There are, however, in the same order of ideas as the definition of vector-integration, some further extensions of real variable notions of importance to us.

Instead of the operation of integration, let us consider any linear functional $\Lambda(\Phi)$, defined for all continuous real functions $\Phi(x)$ in a closed Eucidean interval and measurable (B). We shall see that $\Lambda(\Phi)$ has a unique vector analogue defined for all continuous vector-functions F with values in $\mathcal{F}_0$. As is well-known (cf. Banach [1], p. 54) there exists a constant N, depending on Λ, such that

$$\Lambda(\Phi) \leqslant N \, . \, \operatorname*{Max}_x |\Phi(x)| \, .$$

We shall restrict ourselves to the case $N=1$, without effective loss of generality. Moreover, in the space whose elements are continuous real functions, or continuous vector-functions, we shall term *uniform* the notions of distance, closure, etc., obtained by taking for our quasi-norm $Q(\Phi)$ or $Q(F)$ the expressions

$$M(\Phi) = \operatorname*{Max}_x |\Phi(x)|, \quad M(F) = \operatorname*{Max}_x |F(x)| \, .$$

Principle of uniform vector continuation of a linear functional. *Given, for all continuous real functions* $\Phi(x)$ *in a closed Euclidean interval, a linear functional* $\Lambda(\Phi)$ *such that*

$$(4\cdot5) \qquad \Lambda(\Phi) \leqslant M(\Phi),$$

there exists a unique linear operation $L(F)$, *defined for all continuous vector-functions* $F(x)$ *(in the same interval) whose values belong to a Banach space* $\mathcal{F}_0$, *such that*

(i) $\quad L(F) = f \, . \, \Lambda(\Phi) \quad$ *when* $F = f \, . \, \Phi$

(ii) $\quad |L(F)| \leqslant M(F)$.

We call $L(F)$ *the uniform vector-continuation of* $\Lambda(\Phi)$.

If $\{\Lambda_n(\Phi)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *is a sequence of linear functionals defined for all continuous* $\Phi(x)$ *and we have for each continuous* $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} &\lim_n \Lambda_n(\Phi) = \Lambda^*(\Phi) \\ &\Lambda_n(\Phi) \leq M(\Phi), \end{aligned} \tag{4·6}$$

then for each continuous vector-function $F(x)$ we have

$$\lim_n L_n(F) = L^*(F), \tag{4·7}$$

where $L_n(F)$ and $L^*(F)$ are the uniform vector-continuations of the linear functionals $\Lambda_n(\Phi)$ and $\Lambda^*(\Phi)$ respectively.

Proof. We see at once from the principle of linear closure (section 3) that both the existence, and the unicity, of an operation $L(F)$, linear in F and subject to (i) and (ii), need only be established in a field of vector-functions F whose uniform closure includes all continuous vector-functions, and for which, at the same time, the elementary functions of the field have a uniform closure including all continuous elementary functions.

Now we have already seen (section 3, p. 6) that the finite sums of continuous elementary vector-functions have for their uniform closure the field of all continuous F, and for these finite sums the unicity of $L(F)$ is evident on account of (i). Therefore $L(F)$, if existent, is certainly unique.

Again, if $\Lambda_n(\Phi)$ and $\Lambda^*(\Phi)$ have uniform vector-continuations, the relation (4·7) clearly holds for the finite sums of elementary continuous vector-functions. This relation extends at once to all continuous vector-functions, since (ii) implies *equi-continuity in F* for the linear operations $L_n(F)$.

It only remain to establish the existence of the uniform vector-continuation. We do this in a larger field of vector-functions (in which there is not necessarily unicity). Denoting by $\{\Phi_n\}$ the enumerable set of step-functions each of which assumes the value 0 except at the points of an interval, determined by a binary subdivision of the interval of definition, at which it assumes the value 1, we call *simplicial field* of real, and of vector, functions, respectively, the sets of finite linear combinations

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \Phi_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{N} f_i \Phi_i$$

where the a_i and f_i are constant real numbers and vectors.

In virtue of a well-known principle of continuation due to Banach ([1], p. 28), we can continue $\Lambda(\Phi)$ in at least one way into the real simplicial field so as to have $\Lambda(\Phi) \leqslant M(\Phi)$. The trivial extension (4·1) defines a linear operation $L(F)$ subject to (i) in the simplicial field of vector-functions. To verify that we have also (ii), we observe that if $F = \sum_{i=1}^{N} f_i \Phi_i$, then

$$|L(F)| = \left| \sum f_i \, \Lambda(\Phi_i) \right| \leqslant \operatorname*{Max}_i |f_i| \, . \sum_i |\Lambda(\Phi_i)| \, ;$$

now we can choose the Φ_i (of which F is a linear combination) to correspond to non-overlapping intervals, and we then have

$$\operatorname*{Max}_i |f_i| = M(F), \qquad \sum_i |\Lambda(\Phi_i)| = \Lambda\left(\sum_i \pm \Phi_i\right)$$

and

$$\left| \sum_i \pm \Phi_i \right| \leqslant 1.$$

Hence (ii) follows.

Finally, since every continuous elementary vector-function belongs to the closure of the simplicial field, the existence of $L(F)$ subject to (i) and (ii) for all continuous vector-functions F is established.

5. **Weak closure of operations of a special type.** Let now $F(t, y)$ be a continuous vector-function in a $(1+n)$-dimensional interval of (t, y) including the set $[0 \leqslant t \leqslant 1, |y| \leqslant K]$. Keeping fixed our curve C, together with its standard parameter and the corresponding functions $x(t)$, $x'(t)$, let us now consider the operation

$$\int_{\Delta} F(t, x'(t)) \, dt, \tag{5·1}$$

where Δ is a subinterval of $[0 \leqslant t \leqslant 1]$ with the length $|\Delta|$. The integrand is here Lebesgue integrable. In fact, we have

$$\lim_n \int_0^1 |F_n(t) - F(t, x'(t))| \, dt = 0, \tag{5·2}$$

where, for a suitable continuation of $x(t)$ outside $[0 \leqslant t \leqslant 1]$,

$$F_n(t) = F(t, n[x(t + 1/n) - x(t)]).$$

For in (5·2), the integrand tends to zero almost everywhere and is uniformly bounded, by continuity of F, since

$$|x'(t)| \leqslant K, \quad |n[x(t+1/n)-x(t)]| \leqslant n\int_t^{t+1/n} |x'(u)|\, du \leqslant K.$$

The relation (5·2) therefore follows from the ordinary Lebesgue principle of bounded convergence, and $F(t, x'(t))$ is Lebesgue integrable, as asserted.

We shall study the „weak closure" of the operations (5·1) which correspond to any infinite system of curves C of lengths not exceeding the fixed constant K.

Evidently, for each Δ, these operations are uniform vector-continuations of the corresponding linear functionals

$$\Lambda(\Phi;\Delta) = \int_\Delta \Phi(t, x'(t))\, dt,$$

defined for real continuous $\Phi(t, y)$. The principle of uniform vector-continuation will allow us to base our conclusions on this special case. We observe that

$$(5\cdot3) \qquad \Lambda(\Phi;\Delta) \leqslant |\Delta| \,.\, M(\Phi;\Delta),$$

where $M(\Phi;\Delta)$ denotes the maximum modulus of $\Phi(t, y)$ for $t \varepsilon \Delta$ and $|y| \leqslant K$, and is independent of C. For each Φ, the additive functions of Δ, $\Lambda(\Phi;\Delta)$, are thus *equi-continuous* in Δ. By a well-known theorem, due to Helly, there exist, on account of (5·3), for fixed Δ, a subsequence $\{\Lambda_n(\Phi;\Delta)\}$ and a linear functional $\Lambda^*(\Phi,\Delta)$, such that

$$(5\cdot4) \qquad \lim_n \Lambda_n(\Phi;\Delta) = \Lambda^*(\Phi;\Delta) \textit{ for continuous } \Phi.$$

By an application of the „diagonal process", we can arrange that (5·4) holds simultaneously for an enumerable set of intervals Δ everywhere dense. This relation then holds, by equi-continuity, for all intervals Δ, simultaneously

This being so, (5·3) requires $|\Lambda^*(\Phi;\Delta)| \leqslant |\Delta|\, M(\Phi;\Delta)$, and since $\Lambda^*(\Phi;\Delta)$ is evidently additive in Δ by (5·4), it follows that, for each fixed Φ, there exists, almost everywhere in t_0, a derivative

$$\mathcal{A}(\Phi;t_0) = \lim_{\Delta\to t_0} \Lambda^*(\Phi;\Delta)/|\Delta| \leqslant M(\Phi;\Delta).$$

Now, for almost every t_0, this derivative exists *simultaneously* for all Φ of a given enumerable everywhere dense set of functions; by equi-continuity in Φ of the functionals $\Lambda^*(\Phi;\ \Delta)/|\Delta|$ for the various intervals Δ, this derivative also exists simultaneously for all continuous Φ, and represents a linear functional majorized by the maximum modulus $M(\Phi;\ t_0)$ of $\Phi(t, y)$ for fixed $t = t_0$ and for $|y| \leqslant K$.

The number $\mathcal{A}(\Phi;\ t_0)$ therefore depends only on the values of Φ for $t = t_0$, and we easily verify that

$$(5{\cdot}5)\qquad \begin{aligned} &(a)\quad \mathcal{A}(1, t_0) = 1;\\ &(b)\quad \mathcal{A}(\Phi, t_0) \geqslant 0,\ \textit{if}\ \Phi(t, y) \geqslant 0\ \textit{when}\ t = t_0\ \textit{and}\ |y| \leqslant K. \end{aligned}$$

Moreover

$$(5{\cdot}6)\qquad \Lambda^*(\Phi;\ \Delta) = \int_{\Delta} \mathcal{A}(\Phi;\ t)\, dt.$$

A linear functional $\mathcal{A}(\Phi;\ t_0)$ subject to (5·5) will be termed *linear average at* t_0 of the real function $\Phi(t, y)$ over the sphere $|y| \leqslant K$; its vector-continuations, both for functions $X(t, y)$ whose values lie in a Euclidean space and for functions $F(t, y)$ whose values lie in a Banach space $\mathcal{F}_0$, will be written $\mathcal{A}(X;\ t_0)$ and $\mathcal{A}(F;\ t_0)$, and termed *extended linear averages at* t_0 *over the sphere* $|y| \leqslant K$.

By the principle of uniform vector-continuation, the vector-continuations $L_n(F;\ \Delta)$ of the $\Lambda_n(\Phi;\ \Delta)$ tend, as $n \to \infty$, to the vector-continuation $L^*(F;\ \Delta)$ of $\Lambda^*(\Phi;\ \Delta)$ for each continuous vector-function $F(t, y)$. For the same reason (with the continuous „parameter" Δ in place of n, an alteration which does not affect the validity of the argument of p. 220), the operation $L^*(F;\ \Delta)/|\Delta|$ on F, tends for almost every t_0 to the vector-continuation $\mathcal{A}(F;\ t_0)$ of $\mathcal{A}(\Phi;\ t_0)$ as Δ tends to t_0. Thus $\mathcal{A}(F;\ t_0)$ is the derivative at t_0 of $L^*(F;\ \Delta)$, and is moreover Lebesgue integrable in t_0 since, for each F,

$$|n\, L^*(F;\ \Delta_{n, t_0}) - \mathcal{A}(F, t_0)|$$

converges boundedly to zero almost everywhere in t_0, when Δ_{n, t_0} denotes the interval $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1/n$ and L^* is suitably continued outside the interval $0 \leqslant t \leqslant 1$. Hence the relation (5·6) extends to

$$(5\cdot7) \qquad L^*(F;\Delta) = \int_{\Delta} \mathcal{A}(F;t)\,dt,$$

both sides being here uniform vector-continuations of the corresponding sides of (5·6)

Suppose now that the given system of curves C consists of curves with the fixed endpoints x_0, x_1. Choosing y of Euclidean space in place of the function $F(t, y)$ of $\mathcal{F}_0$, and interpreting (5·7) in Euclidean space, we see that

$$(5\cdot8) \qquad x_1 - x_0 = \int_0^1 \mathcal{A}(y;t)\,dt.$$

It may also be observed that if $x_n(t)$ is the standard representation of the curve C_n corresponding to the operation $\Lambda_n(\Phi, \Delta)$, we have

$$x_n(t_0) = x_0 + L_n(y;\Delta) \quad \text{when } \Delta = [0 \leqslant t \leqslant t_0].$$

The curves C_n therefore converge uniformly to a limit curve C_* with the representation $x^*(t) = \lim\limits_n x_n(t)$ which may be written

$$(5\cdot9) \qquad x_0 + \int_0^t \mathcal{A}(y;u)\,du.$$

This curve C_* in conjunction with the operation $\mathcal{A}(F;t)$ is related to the generalized curves that we define further on.

Recapitulating we have: *Given any infinite system of curves C, with fixed endpoints x_0 and x_1 and with lengths not exceeding the fixed constant K, there exists a subsequence of the curves C such that, for each continuous vector-function $F(t, y)$ whose values lie in an arbitrary Banach space $\mathcal{F}_0$, the corresponding operations* (5·1) *tend uniformly in Δ to an operation of the form*

$$\int_{\Delta} \mathcal{A}(F;t)\,dt$$

where $\mathcal{A}(F;t)$ is an extended linear average at t over the sphere $|y| \leqslant K$, subject to (5·8). *Moreover the, subsequence of the curves C thus obtained converges uniformly to the curve with the representation* (5·9).

The result just obtained has a converse, except that, in the hypothesis, the constant K is then replaced by any smaller value.

Let $\mathcal{A}(\Phi; t)$ be a linear average at t over the sphere $|y| \leqslant R$, defined and measurable in t for each continuous real $\Phi(t, y)$ $[0 \leqslant t \leqslant 1, |y| \leqslant K]$; and let $x^*(t)$ be an absolutely continuous n-dimensional vector-function whose derivative is almost everywhere the extended linear average $\mathcal{A}(y; t)$ and whose values at $t = 0$ and $t = 1$, respectively, we denote by x_0 and x_1.

We shall show that $x^*(t)$ *is expressible as the uniform limit of a certain sequence of absolutely continuous n-dimensional vector-functions* $x_n(t)$ *such that*

$$|x_n'(t)| \leqslant K, \quad x_n(0) = x_0, \quad x_n(1) = x_1,$$

and that for each continuous vector-function $F(t, y)$ *whose values lie in an arbitrary Banach space* $\mathcal{F}_0$, *we have, uniformly in* Δ,

$$\lim_n \int_\Delta F(t, x_n'(t)) \, dt = \int_\Delta \mathcal{A}(F; t) \, dt.$$

In view of the conditions (5·5) (a) and (b) (which define the notion of linear average), the function of t, $\mathcal{A}(\Phi; t)$, is bounded for each continuous $\Phi(t, y)$, and therefore integrable in t, and we have

$$\int_\Delta \mathcal{A}(\Phi; t) \, dt \leqslant |\Delta| \, M_R(\Phi; \Delta),$$

where $M_R(\Phi; \Delta)$ is the maximum modulus of Φ for $t \varepsilon \Delta$, $|y| \leqslant R$. Similarly we shall write $M_R(\Phi; t_0)$ for the maximum modulus when $t = t_0$, $|y| \leqslant R$.

We shall begin by continuing $\mathcal{A}(\Phi; t)$ for almost all t, into a wider field of functions $\Phi(t, y)$, including those which are *continuous in t and step-functions in y*; and we shall do this in such a manner that the above inequality remains true in the extended field.

The left-hand side has, for each fixed Δ, a continuation $\Lambda^*(\Phi; \Delta)$ with the same majorant, this continuation being linear in Φ, in the field of functions in question. This follows from the theorem of Banach ([1], p. 28) already cited. We require Λ^* to be also additive in Δ, and to be expressible as the integral of a continuation of $\mathcal{A}(\Phi; t)$. For this purpose, denoting by Δ_n each of the binary intervals of length 2^{-n}, we write $\Lambda_n^*(\Phi; \Delta)$ for a continuation of the Banach type, defined when $\Delta = \Delta_n$ and extended by addition to intervals Δ which are sums of Δ_n for fixed n. For an everywhere dense enumerable set of our functions Φ there exists a subsequence of n so that $\Lambda_n^*(\Phi; \Delta)$ tends to a limit for each Δ expressible as a finite sum of binary intervals. The limit extends, by equi-continuity in Φ and in Δ, to all functions Φ of our field and to all intervals Δ in $[0 \leqslant t \leqslant 1]$, and is an operation $\Lambda^*(\Phi; \Delta)$ *additive in* Δ, linear in Φ and majorized by $|\Delta| \,.\, M_R(\Phi; \Delta)$. To show that $\Lambda^*(\Phi; \Delta)$ is the integral of its derivative in Δ, and that this derivative, defined outside a set of values of t independent of the function Φ of our extended field, is a linear average at t which agrees with $\mathcal{A}(\Phi; t)$ if Φ is continuous, is now a trivial consequence of the argument already used on p. 222, 223.

Our next object is to show that the integral over Δ of $\mathcal{A}(\Phi; t)$ is for each Φ of the original field, uniformly in Δ the limit of a sequence of integrals of *elementary linear averages at t*, each of which is subject also to the same conditions as $\mathcal{A}(\Phi; t)$, except that the corresponding curves $x(t)$ need not have the endpoints x_0 and x_1. By an elementary linear average at t, we mean a linear operation of the form

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\; \Phi(t, y_i), \tag{5·10}$$

where the y_i are a given finite system of constant points, and where the $a_i(t)$ are given non-negative step-functions subject to

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(t) = 1. \tag{5·11}$$

For this purpose, let $\Phi_n(t, y)$ be, for each t, the step-function whose intervals of constancy (some open, some closed) are the cubes of a subdivision of y-space into cubes of diameter not exceeding $1/n$, and which agrees with $\Phi(t, y)$ at the centres of these cubes. For each continuous $\Phi(t, y)$, we write

$$\mathcal{A}_n(\Phi; t) = \mathcal{A}(\Phi_n; t).$$

Evidently, for large n, $\mathcal{A}_n(\Phi;\, t)$ cannot exceed $M_{R'}(\Phi;\, t)$, where $R < R' < K$, and tends uniformly to $\mathcal{A}(\Phi;\, t)$ for each continuous $\Phi(t, y)$; moreover, $\mathcal{A}_n(\Phi;\, t)$ is of the form (5·10), with the centres of the cubes of our subdivision for the y_i and with

$$a_i(t) = \mathcal{A}(\Psi_i;\, t),$$

where $\Psi_i = \Psi_i(y)$ is the characteristic function of the cube of centre y_i. Each $a_i(t)$ is measurable in t and non-negative and the relation (5·1), which reduces to

$$\mathcal{A}(1;\, t) = 1,$$

is fulfilled. Hence approximating to each $a_i(t)$ by a step-function $b_i(t)$ such that

$$\int_0^1 |\, a_i(t) - b_i(t)\,|\, dt < 1/(N.n),$$

we obtain a sequence of elementary linear averages with the required property.

This being so, we shall now show that there exists a sequence of functions $x_n(t)$ with derivatives $x_n'(t)$ in modulus not exceeding K (but not necessarily fulfilling the relations $x_n(0) = x_0$, $x_n(1) = x_1$), such that, *for each real continuous* $\Phi(t, y)$,

$$\lim_n \int_\Delta \Phi(t,\, x_n'(t))\, dt = \int_\Delta \mathcal{A}(\Phi;\, t)\, dt, \tag{5·12}$$

uniformly in Δ.

By what has been proved, we may suppose that $\mathcal{A}(\Phi;\, t)$ is an *elementary* linear average at t given by (5·10).

We divide the intervals which are common intervals of constancy of the N functions $a_i(t)$, into 2^{-n} equal parts I; and we divide each I into N parts I_i so that, for any $t \in I$,

$$|\, I_i \,| = a_i(t)\, |\, I \,|\,.$$

Let us define, in each of the intervals I, $c_i(t) = 1$ *when* $t \in I_i$ *and* $c_i(t) = 0$ *otherwise*. The difference

$$\left|\int_I a_i(t)\, \Phi(t, y_i)\, dt - \int_I c_i(t)\, \Phi(t, y_i)\, dt\right|$$

clearly does not exceed the product of $|\, I_i \,|$ and of the oscillation of Φ for $t \varepsilon I$. It follows that for any interval Δ expressible as a sum of a finite number of the intervals I of the n-th stage, and therefore of all subsequent stages, the expresion

$$\left| \int\limits_{\Delta} \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, \Phi(t, y_i) - \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\, \Phi(t, y_i) \right\} dt \right|$$

tends to zero as $n \to \infty$, uniformly in Δ, for each continuous Φ. The same is true, by equicontinuity in Δ, for every interval Δ, uniformly in Δ, and this establishes (5·12) if we write (at the n-th stage)

$$x_n'(t) = \sum_{i=1}^{N} y_i\, c_i(t), \quad x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t x_n'(t)\, dt,$$

and observe that

$$\Phi(t, x_n'(t)) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\, \Phi(t, y_i).$$

This being so, we observe that (5·12) extends at once (cf. the proof of (5·7)) to the case in which $\Phi(t, y)$ is replaced by a vector-function $F(t, y)$; and in particular choosing $F(t, y) = y$, we have

$$|x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon_n, \quad x_n(0) = x_0,$$

where $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. Finally we make $x_n(1) = x_1$, by altering the function $x_n(t)$ in the interval $1 - \delta_n \leqslant t \leqslant 1$, where

$$\delta_n = \varepsilon_n / (K - R');$$

in this interval we replace $x_n(t)$ by the linear function whose values at $t = 1 - \delta_n$ and $t = 1$ are, respectively, $x_n(1 - \delta_n)$ and x_1. The derivative of this function,

$$\frac{x_1 - x_n(1 - \delta_n)}{\delta_n} = \frac{1}{\delta_n} \int\limits_{1-\delta_n}^{1} x^{*\prime}(t)\, dt + \frac{x^*(1 - \delta_n) - x_n(1 - \delta_n)}{\delta_n},$$

is, in absolute value, at most

$$R' + \frac{1}{\delta_n} \cdot \varepsilon_n = R' + (K - R') = K.$$

The corresponding alteration of the integral

$$\int_{\Delta} F(x_n(t), x'_n(t))\, dt$$

is therefore at most $M_{R'}(F; \Delta)\, \delta_n + M_K(F; \Delta)\, \delta_n$ which tends to zero uniformly in Δ as $n \to \infty$. This completes the proof.

6. **Weak closure of variational integrals.** We shall now apply the results of the preceding section to functions of the form $F(x(t), y)$ where $F(x, y)$ denotes, as in section 2, a continuous vector-function of the two Euclidean n-dimensional points x and y, subject to the homogenuity condition (2·1).

Given any infinite system of curves C with fixed end-points x_0 and x_1 and with lengths not exceeding the fixed constant K, the subsequence $\{C_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, with the parametric representations $x_n(t)$ in terms of a standard parameter in $[0 \leqslant t \leqslant 1]$, and which was constructed in the preceding section, has the property that $x_n(t)$ tends uniformly to a limit $x^*(t)$ given by (5·9) and that moreover, uniformly in Δ,

$$(6·1)\quad \lim_n \int_{\Delta} F(x^*(t), x'_n(t))\, dt = \int_{\Delta} \mathscr{A}\,[F(x^*(t), y); t]\, dt.$$

It follows at once, since

$$\lim_n |F(x_n(t), y) - F(x^*(t), y)| = 0$$

uniformly for $|y| \leqslant K$ and for $0 \leqslant t \leqslant 1$, that we have uniformly in Δ,

$$(6·2)\quad \lim_n \int_{\Delta} (F(x_n(t), x'_n(t))\, dt = \int_{\Delta} \mathscr{A}\,[F(x^*(t), y); t]\, dt.$$

It this relation $\mathscr{A}$ denotes, as previously, the vector extension of a linear average $\mathscr{A}(\Phi; t)$ at t over the sphere $|y| \leqslant K$. Let us remark that this average may here be further restricted to be an average over the *surface* of a sphere $|y| = R$, where $R \leqslant K$; by this we mean that (5·5) (b) is strengthened to

$$(6·3)\quad \mathscr{A}(\Phi; t_0) \geqslant 0, \textit{ if } \Phi(t, y) \geqslant 0 \textit{ when } t = t_0 \textit{ and } |y| = R.$$

In fact, with a standard parameter t, the value of $|x'(t)|$ is constant almost everywhere and equal to the length of the curve C considered; so that (6·2) with $F(x, y) = |y|$, gives

$$\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta} \mathcal{A}(|y|; t)\, dt = R,$$

where R is the limit of the lengths of the curves C_n. We may thus suppose that $\mathcal{A}(|y|; t)$ is a constant $R \leq K$.

Let now $\mathcal{A}^*(\Phi; t)$ be any linear average at t_0 over a sphere $|y| \leq K$ such that $\mathcal{A}^*(|y|; t) = R$. Writing

$$\Phi^*(t, y) = \Phi(t, Ry/|y|) \cdot |y|/R,$$

and

$$\mathcal{A}(\Phi; t) = \mathcal{A}^*(\Phi^*; t),$$

we clearly have $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ for the functions $\Phi(t, y)$ which are homogeneous in y, and moreover (5·5) (a) and (6·3) are valid.

This remark will be of some importance to us.

The converse result established in the preceding section also extends to the functions $F(x(t), y)$. In fact, given at each t the linear average $\mathcal{A}$ over the surface of the sphere $|y| = R$, or over the sphere $|y| \leq R$ itself, where $R < K$, the function $x^*(t)$ defined by (5·9) is the uniform limit of a sequence of functions $x_n(t)$ such that

$$|x_n'(t)| \leq K, \quad x_n(0) = x^*(0) = x_0, \quad x_n(1) = x^*(1) = x_1$$

and that (6·1) holds. Therefore, for this sequence, the relation (6·2) must hold also, as before.

We have, in particular, established the following

Theorem. *For every continuous vector-function $F(x, y)$, homogeneous in y, the limits of the variational integral $\mathcal{I}_C$ for curves C with lengths not exceding the fixed constant K and with the fixed endpoints x_0 and x_1, are all of the form*

$$\int_0^1 \mathcal{A}[F(x(t); y); t]\, dt, \tag{6·4}$$

where $\mathcal{A}$ denotes the vector extension of a linear average $\mathcal{A}(\Phi; t)$ at t over the surface of a sphere $|y| = R$, where $R \leq K$, the expression $\mathcal{A}(\Phi; t)$ being measurable in t for every continuous real $\Phi(t, y)$ such that

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathcal{A}(y; t)\, dt, \quad x(1) = x_1.$$

Moreover, when $R < K$, *each of these expressions* (6·4) *is such a limit of* $\mathcal{I}_C$.

7. **The notion of generalized curve.** For variational purposes, an *ordinary* curve C means a pair of points $x = x(t)$, $y = x'(t)$ depending on t and fulfilling certain conditions, viz. $x(t)$ *absolutely continuous*, $x'(t)$ *equal almost everywhere to the derivative of* $x(t)$, etc. In generalizing the notion of curve, it is important to regard x and y as on a quite different footing: the point $x = x(t)$ fulfils conditions of extreme smoothness in t and is subject to definite boundary conditions; the point $y = x'(t)$ may vary in a most disconcerting manner. This difference of footing is not artificially imposed by the modern theories of integration and derivation. The direction of a sailing ship, or that of a mountain road, is (for purely practical reasons having a definite variational interpretation) constantly oscillating between wide limits, while the path described departs only slightly from the geodesic. In our generalization, we shall therefore keep $x = x(t)$ as a *point*, but the derivative will be replaced by something more general.

In accordance with modern ideas, a point, or a number, may be regarded as a special case of a *distribution of a unit mass over a set of points*, viz. the special case in which this set has only one element. This view has already led to important developments of Analysis as well as, of course, Modern Physics. Thus the classical problem of attaching a generalized limit to certain sequences of numbers, was changed by the founders of modern *diophantine approximation* to that of correlating with each of these sequences a distribution of unit mass, termed its *asymptotic distribution*, and which generalizes the notion of limit of a convergent sequence.

In defining a generalized curve, we prefer here to use the notion of a linear average rather the equivalent notion of a distribution of unit mass. This is only a slight difference of notation. Accordingly, the definition differs in form (but not in substance) from those of my papers [7, 8, 9].

By a *generalized admissible curve* C_* with the ends x_0, x_1, we shall mean a point $x(t)$ together with a linear average, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Phi; t)$, at t over the surface of a fixed sphere $|y| = R$, and which is defined as a measurable function of t whenever $\Phi(t, y)$ is continuous, such that

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathcal{A}(y;\, t)\, dt = x_1 - \int_t^1 \mathcal{A}(y;\, t)\, dt.$$

We write, for any continuous vector-function $F(x, y)$ homogeneous in y,

$$\mathcal{I}_{C_*} = \int_0^1 \mathcal{A}[F(x(t);\, y);\, t]\, dt, \tag{7·1}$$

where the integrand denotes the extended linear average obtained by uniform vector-continuation from $\mathcal{A}(\Phi;\, t)$. The number R is termed *length of* C_*, and for any subinterval Δ of $[0 \leq t \leq 1]$, the number $R \cdot |\Delta|$ is termed *length of arc of* C_*.

Like the curvilinear integral $\mathcal{I}_{C_*}$, the length of C_* is, of course, strongly dependent on the linear averages $\mathcal{A}$ at the points t, as well as on the positions of $x(t)$. In particular the ordinary curve C, defined parametrically by the function $x(t)$ and its derivative $x'(t)$ given rise to a wholly different integral $\mathcal{I}_C$ and to a wholly different length.

Let us add that the definition both of generalized curve, and of corresponding integral and length, may also be framed so as to permit changes of parameter, just as in the case of ordinary curves. The definition requires some easy formal developments into which we shall not enter here, and is shown to be eventually wholly equivalent to the definition given above.

Let us observe that *every ordinary curve C may be regarded as a special case of a generalized curve.*

For, if $x(t)$ is a parametric representation of C in terms of a standard parameter, we have $|x'(t)| = R$ where R is the length of C in the ordinary sense, and the linear average $\mathcal{A}(\Phi;\, t) = \Phi(t, x'(t))$, uniquely defined for all continuous $\Phi(t, y)$, has almost everywhere in t the required properties. Moreover the curvilinear integrals (2·3) and (7·1) agree, in this case, for every $F(x, y)$.

8. **Main conclusions.** Let us observe that for any constant K *greater than* $|x_1 - x_0|$, given any curve C of length not exceeding K there exists a curve C_n attached to C, such that the length of C_n does not exceed $(1 - 1/n)K + |x_1 - x_0|/n$ and

that the difference $|\mathcal{I}_C - \mathcal{I}_{C_n}|$ does not exceed the oscillation of $F(x, y)$ for points of (x, y)-space distant at most $4K/n$ such that $|y| \leqslant K$, $|x| \leqslant K + |x_0|$.

It is sufficient, writing $x(t)$ for the parametric representation of C in terms of its standard parameter, to take for C_n the curve represented by

$$x_n(t) = (1 - 1/n)\, x(t) + (x_0 + t\,(x_1 - x_0))/n.$$

This being so, the theorem of section 6 may be expressed as follows, remembering that the straight line is the only curve of length not exceeding $|x_1 - x_0|$ which joins the points x_0 and x_1.

Theorem. (i) *For every continuous vector-function $F(x, y)$ homogeneous in y, the limits of the variational integral $\mathcal{I}_C$ for curves C, with lengths not exceeding K and with the endpoints x_0 and x_1, consist of the values of the generalized variational integral $\mathcal{I}_{C_*}$ for generalized curves C_*, with lengths not exceeding K and with the endpoints x_0 and x_1. Moreover* (ii) *the set of the values of $\mathcal{I}_{C_*}$ is closed.*

It only remains to justify (ii). This is almost evident. To any generalized curve C_* we can attach, for each n, an ordinary curve C of length not exceeding that of C_* such that $|\mathcal{I}_C - \mathcal{I}_{C_*}| < 1/n$. Therefore given any sequence of generalized curves for which the lengths do not exceed K and for which $\mathcal{I}_{C_*}$ tends to a limit f, there exists a corresponding sequence of ordinary curves of lengths not exceeding K and for which $\mathcal{I}_C$ tends to f. This completes the proof.

As an immediate consequence we have:

Theorem. *Let $\Phi(f)$ be a continuous real function of the vector f of $\mathcal{F}_0$, and let $F(x, y)$ be any continuous vector-function homogeneous in y. Then the closure of the numbers $\Phi(\mathcal{I}_C)$ for curves C with lengths not exceeding K and with the endpoints x_0 and x_1, consists of the set of numbers of the form $\Phi(\mathcal{I}_{C_*})$ which correspond to generalized curves C_* with lengths not exceeding K and with the endpoints x_0 and x_1.*

In particular:

The lower bound of the numbers $\Phi(\mathcal{I}_C)$ for curves C with lengths not exceeding K and with the endpoints x_0 and x_1, is *the minimum of the numbers* $\Phi\,(\mathfrak{I}_{C_*})$ *for generalized curves* C_* *with length not exceeding* K *and with the endpoints* x_0 *and* x_1. *This minimum is attained for one of the curves* C_* *concerned*[1]).

These results may be further extended a little by making use of the *uniformity in* Δ of the results of section 5.

LITTERATURE

(see also memoirs cited in Young [9]).

Banach, S.

[1] *Theorie des operations linéaires*, Monografje Matematyczne I (Warszawa 1932).

Bochner, S.

[2] *Integration von Funktionen, deren Werte Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math., 20 (1933), 262 – 274

[3] *Absolut-additive abstrakte Mengenfunktionen*, Fund. Math., 21 (1933), 211 — 213.

Hobson E. W.

[4] *The Theory of Functions of a Real Variable* (Cambridge, 2 nd ed., 1921).

Menger, K.

[5] *Calcul des Variations dans les espaces distanciés généraux*, C. R. Acad. d. Sc. Paris (16 Mars 1936).

Riesz, F.

[6] *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. d. Sc. Paris, 149 (1909), 974 – 977.

Young, L. C.

[7] *Approximation by polygons in the Calculus of Variations*, Proc. Roy. Soc. *A*, 141 (1933), 325 — 341.

[8] *Limits of Stieltjes integrals*, Journal London Math. Soc., 9 (1933), 119 — 126.

[9] *Necessary conditions in the Calculus of Variations*, to appear in the Acta Mathematica.

[1]) For a study of the conditions fulfilled by such a generalized minimized curve C_* (in the case of the simplest problem of the Calculus of Variations in ordinary form) *vide* my paper [9]. The conditions are analogous to the classical conditions for an ordinary minimizing curve.

P. P. Demiańczuk

Ruch pocisku ze zmienną masą w powietrzu.

Przedstawił M. Kamieński dn. 16 grudnia 1937.

STRESZCZENIE

W pracy tej autor rozwiązuje zagadnienie ruchu pocisku o zmiennej masie w ośrodku oporowym, przy następujących założeniach:

1. Masa pocisku jest funkcją ciągłą i różniczkowalną, zależną od czasu.

2. Siła odrzutu, powstająca przy zmianie masy pocisku mierzy się (na jedną sekundę) ilością ruchu gazów, wyrzuconych w kierunku przeciwnym ruchowi pocisku.

3. Spalanie się masy zawartej w pocisku jest jedynie funkcją czasu, zupełnie nie zależącą od kierunku ruchu φ pocisku, czyli że dla każdego momentu t zachodzi zależność

$$\frac{dm}{d\varphi} = 0$$

W streszczeniu, główne wyniki tej pracy są następujące:

Szybkość, czas lotu, dalekość lotu oraz wysokość wzniesienia się pocisku ponad linię celu są tym większe im większy jest stosunek:

$$\frac{m_0}{m}$$

gdzie przez m_0 oznaczona jest masa pocisku w chwili t_0, zaś przez m — jego masa w chwili t.

Nadmienić przytem należy, iż przy założeniach przyjętych, rozwiązanie problemu sprowadziło się do rozwiązania elementarnej całki typu

$$\int_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)}$$

Kładąc we wzorach ogólnych, wyprowadzonych przez autora

$$m = m_0 = \text{constans},$$

otrzymamy wzory, charakteryzujące ruch pocisku zwykłego w ośrodku oporowym.

Kładąc zaś

$$m = \text{constans}, \quad \Theta = 90^0$$

otrzymamy znane wzory Bernoulliego. Przyjmując wreszcie

$$m = \text{constans}, \quad \lambda_n = 0$$

będziemy mieli wzory, odnoszące się do ruchu pocisku zwykłego w ośrodku nieoporowym.

P. P. Demiańczuk

Le mouvement du projectile à masse variable dans l'air.

Mémoire presenté par M. M. Kamieński à la séance du 16 decembre 1937.

Dans ce mémoire nous nous occuperons du problème du mouvement du projectile à masse variable.

Admettons ce qui suit:

1) la masse du projectile est une fonction continue et différenciable, dépendant du temps,

2) la force du rejet se produisant lors du changement de la masse du projectile est mesurée par la quantité de mouvement en une seconde des gaz projetés en sens invers a celui du projectile,

3) la combustion de la masse comprise dans le projectile n'est que fonction du temps et comme telle elle est tout à fait indépendante du sens du mouvement du projectile c'est à dire que pour chaque instant t on a la relation:

$$\frac{dm}{d\varphi} = 0$$

φ — désigne l'angle entre la direction de la vitesse du projectile et l'axe x_σ. Désignons par σ l'angle de la situation, et par γ l'angle de l'elévation.

Désignons la vitesse initiale par v_0, et la masse du projectile au moment du déclanchement du mouvement par m_0.

Désignons enfin par les symboles

ω_σ — l'angle de l'aboutissement

ω — l'angle de la chute.

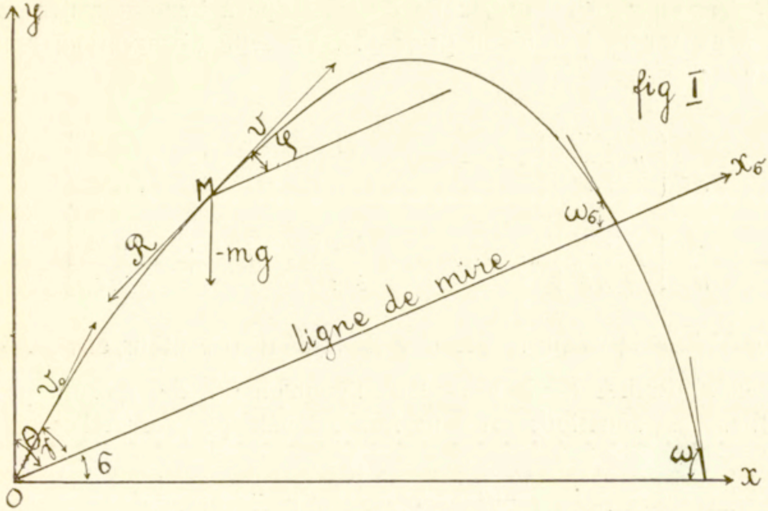


Fig. 1. Le plan du départ du projectile.

En désignant par le symbole R la résistance de l'air agissant en sens invers au mouvement du projectile on trouvera les composantes de la résistance de l'air dans les directions de l'axe $0x_\sigma$ et $0y$. Désignant ces composantes par R_{x_σ}, R_y on aura

$$\left.\begin{aligned} R_{x_\sigma} &= - R \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin \Theta} \\ R_y &= - R \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Disons que la résistance de l'air s'exprime par la fonction de la forme

$$R = m\, a_n\, v^n \tag{2}$$

où la masse du projectile au moment t, est désignée par m, et a_n désigne une certaine constante correspondant à une valeur donnée du nombre n. On le sait étant donné la condition de la stabilité de la masse, la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps est ègale à la force extérieure.

Si la masse est variable, alors dans la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps il faut considérer, en outre de force extérieure, celle de rejet due à l'émission des gaz en sens invers à celui du projectile. Vu cette observation, nous écrivons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{ m \frac{dx_\sigma}{dt} \right\} &= - m a_n v^n \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta} + V_{x_\sigma} \frac{dm}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left\{ m \frac{dy}{dt} \right\} &= - m a_n v^n \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta} - mg + V_y \frac{dm}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où g désigne la valeur moyenne de la force de pesanteur, et V_{x_σ}, V_y les composantes de la vitesse de l'écoulement des gaz du projectile. Les équations (3) sous forme développée sont telles

$$\frac{d^2x_\sigma}{dt^2} = - a_n v^n \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{dx_\sigma}{dt} + \frac{V_{x_\sigma}}{m}\frac{dm}{dt} \qquad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - a_n v^n \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\frac{dy}{dt} - g + \frac{V_y}{m}\frac{dm}{dt} \qquad (5)$$

Il résulte directement de la fig. 1 que

$$\frac{dx_\sigma}{dt} = v \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta}; \qquad V_{x_\sigma} = V \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta} \qquad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}; \qquad V_y = V \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta} \qquad (7)$$

où V désigne la vitesse de l'écoulement des gaz du projectile.

En prenant la dérivée par rapport au temps de la premiére expression (6) on aura

$$\frac{d^2x_\sigma}{dt^2} = \frac{\sin(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta}\frac{dv}{dt} - v \frac{\cos(\Theta - \varphi)}{\sin\Theta}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (8)$$

et de la premiére (7)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}\frac{dv}{dt} + v \frac{\cos\varphi}{\sin\Theta}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (9)$$

En substituant les expressions (8) et (9) au (4) et (5), on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta}\frac{dv}{dt}-v\frac{\cos(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta}\frac{d\varphi}{dt}=-a_n v^n\frac{\sin(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta}-\\
&\qquad-\frac{v}{m}\frac{\sin(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta}\frac{dm}{dt}+\frac{V}{m}\frac{\sin(\Theta-\varphi)}{\sin\Theta}\frac{dm}{dt};\\
&\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}\frac{dv}{dt}+v\frac{\cos\varphi}{\sin\Theta}\frac{d\varphi}{dt}=-a_n v^n\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}-g-\\
&\qquad-\frac{v}{m}\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}\frac{dm}{dt}+\frac{V}{m}\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta}\frac{dm}{dt};
\end{aligned}\right\}(10)$$

En résolvant le système (10) par rapport à $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, on aura

$$\frac{dv}{dt}=-a_n v^n-\frac{v}{m}\frac{dm}{dt}\cdot g\cos(\Theta-\varphi)+\frac{V}{m}\frac{dm}{dt} \quad (11)$$

La valeur $\frac{d\varphi}{dt}$ se trouve par l'expresion

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{g}{v}\sin(\Theta-\varphi) \quad (12)$$

Le mouvement du projectile à masse invariable dans un millieu non résistant s'exprime par (12) et

$$\frac{dv}{dt}=-g\cos(\Theta-\varphi) \quad (13)$$

Les équations (12) et (13) donnent

$$\frac{dv}{v}=\operatorname{ctg}(\Theta-\varphi)\,d\varphi \quad (14)$$

Ayant intégrè on obtient l'expression pour la vitesse du projectile ordinaire dans un millieu non résistant

$$v=v_0\frac{\sin(\Theta-\gamma)}{\sin(\Theta-\varphi)} \quad (15)$$

où γ désigne l'angle de l'élévation.

Supposons que la vitesse du projectile à masse variable dans un millieu résistant s'exprime

$$v = \frac{u_1}{m} \frac{\sin (\Theta - \gamma)}{\sin (\Theta - \varphi)} \tag{16}$$

où u_1 est une fonction continue et diffèrenciable dépendant du temps. Vu (16), l'expression (12) prendra le forme

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{mg \sin^2 (\Theta - \varphi)}{u_1 \sin (\Theta - \gamma)} \tag{17}$$

En prenant la dérivée de (16) par rapport au temps, nous aurons

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sin (\Theta - \gamma)}{\sin (\Theta - \varphi)} \frac{1}{m} \frac{du_1}{dt} - \frac{\sin (\Theta - \gamma)}{\sin (\Theta - \varphi)} \frac{u_1}{m^2} \frac{dm}{dt} +$$
$$+ \frac{u_1}{m} \frac{\sin (\Theta - \gamma) \cos (\Theta - \varphi)}{\sin^2 (\Theta - \varphi)} \frac{d\varphi}{dt}$$

Considérant (17) de la dernière expression on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sin (\Theta - \gamma)}{\sin (\Theta - \varphi)} \frac{1}{m} \frac{du_1}{dt} - \frac{\sin (\Theta - \gamma)}{\sin (\Theta - \varphi)} \frac{u_1}{m^2} \frac{dm}{dt} -$$
$$- g \cos (\Theta - \varphi) \tag{18}$$

Substituant (16) et (18) dans (11) on aura

$$\frac{du_1}{dt} = - a_n \frac{u_1^n \sin^{n-1} (\Theta - \gamma)}{m^{n-1} \sin^{n-1} (\Theta - \varphi)} + V \frac{\sin (\Theta - \varphi)}{\sin (\Theta - \gamma)} \frac{dm}{dt} \tag{19}$$

En éliminant dt au moyen de l'expression (17) on aura

$$\frac{du_1}{d\varphi} = \frac{a_n}{g} \frac{u_1^{n+1}}{m^n} \frac{\sin^n (\Theta - \gamma)}{\sin^{n+1} (\Theta - \varphi)} + V \frac{\sin (\Theta - \varphi)}{\sin (\Theta - \gamma)} \frac{dm}{d\varphi} \tag{20}$$

Mais vu nos suppositions

$$\frac{dm}{d\varphi} = 0$$

toujours, donc l'équation (20) se réduit à

$$\frac{du_1}{d\varphi} = \frac{a_n}{g} \frac{u_1^{n+1}}{m^n} \frac{\sin^n(\Theta-\gamma)}{\sin^{n+1}(\Theta-\varphi)} \tag{21}$$

En désignant

$$\frac{a_n}{g} = \lambda_n \tag{22}$$

nous écrivons l'expression (21) sous une forme aisée à intégrer

$$\frac{du_1}{u_1^{n+1}} = \lambda_n \frac{\sin^n(\Theta-\gamma)}{m^n} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta-\varphi)} \tag{23}$$

En intégrant l'expression (23) et en effectuant des réductions bien simples on a

$$u_1 = u_{1,0} \left\{ 1 - \frac{n\lambda_n u_{1,0}^n \sin^n(\Theta-\gamma)}{m^n} \int\limits_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta-\varphi)} \right\}^{-\frac{1}{n}} \tag{24}$$

Dans l'expression ci-desous $u_{1,0}$ désigné la valeur de la fonction pour l'instant t_0; au quel répond la valeur de l'angle φ égale à γ.

De l'expression (16) nous avons

$$u_{1\cdot0} = m_0 v_0 \tag{25}$$

Vu le (25) l'expression (24) deviendra

$$u_1 = m_0 v_0 \left\{ 1 - n\lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta-\gamma) \int\limits_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta-\varphi)} \right\}^{-\frac{1}{n}} \tag{26}$$

Ainsi donc la vitesse du projectile à masse variable s'exprimera par la formule générale que voici

$$v = \frac{m_0 v_0}{m} \frac{\sin(\Theta-\gamma)}{\sin(\Theta-\varphi)} \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - n\lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta-\gamma) \int\limits_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta-\varphi)} \right\}^{-\frac{1}{n}} \tag{27}$$

Nous déterminerons le temps du vole du projectile à masse variable à l'aide de (12): moyennant l'expression (27). Intégration faite, nous aurons

$$t - t_0 = - \frac{m_0 v_0 \sin(\Theta - \gamma)}{mg} \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{1}{\sin^2(\Theta - \varphi)} \Bigg\{ 1 - n \lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Bigg\}^{-\frac{1}{n}} \tag{28}$$

Moyennant la première équation (6) et (12) nous trouverons la longueur du vol. En éliminant dt nous aurons

$$\frac{dx_\sigma}{d\varphi} = - \frac{v^2}{g \sin\Theta} \tag{29}$$

Vu (27) l'expression (29) deviendra

$$dx_\sigma = - \frac{m_0^2 v_0^2 \sin^2(\Theta - \gamma)}{m^2 g \sin\Theta \sin^2(\Theta - \varphi)} \Bigg\{ 1 - n \lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Bigg\}^{-\frac{2}{n}} d\varphi \tag{30}$$

ce qui après intégration donne l'expression générale pour la longueur du vol du projectile

$$x_\sigma = - \frac{m_0^2 v_0^2 \sin^2(\Theta - \gamma)}{m^2 g \sin\Theta} \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{1}{\sin^2(\Theta - \varphi)} \Bigg\{ 1 - n \lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Bigg\}^{-\frac{2}{n}} d\varphi \tag{31}$$

Trouvons ensuite la hauteur de l'élévation du projectile au dessus de la ligne de mire. Nous profiterons de la première expression (7) et (12) qui après l'élimination de dt, donne

$$\frac{dy}{d\varphi} = - \frac{v^2}{g} \frac{\sin\varphi}{\sin\Theta \sin(\Theta - \varphi)} \tag{32}$$

En substituant dans la dernière expression pour v^2 sa valeur de (27) et en intégrant nous obtiendrons l'expression générale pour l'élévation du projectile au dessus de la ligne de mire

$$y = -\frac{m_0^2 v_0^2 \sin^2(\Theta - \gamma)}{m^2 g \sin\Theta} \int_\gamma^\varphi \frac{\sin\varphi}{\sin^3(\Theta - \varphi)} \Big\{ 1 -$$

$$- n \lambda_n v_0^n \left(\frac{m_0}{m}\right)^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Big\}^{-\frac{2}{n}} d\varphi \qquad (33)$$

Au point de mire les grandeurs x_σ, y, t, v, seront respectivement

$$x_\sigma = X_\sigma, \quad y = o, \quad \varphi = \omega_\sigma, \quad t = t_1, \quad v = v_1 \qquad (34)$$

En posant

$$m = m_0 = \text{constans}$$

on obtiendra le problème plus restreint concernant le mouvement du projectile ordinaire; ici les formules sont beaucoup plus simples.

L'expression (26) devient

$$\overline{u}_1 = m_0 v_0 \Big\{ 1 - n \lambda_n v_0^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Big\}^{-\frac{1}{n}} \qquad (35)$$

L'expression pour la vitesse du projectile à masse invariable sera

$$\overline{v} = v_0 \frac{\sin(\Theta - \gamma)}{\sin(\Theta - \varphi)} \Big\{ 1 - n \lambda_n v_0^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Big\}^{-\frac{1}{n}} \qquad (36)$$

Le temps du vol du projectile à masse invariable s'exprimera

$$\overline{t} - \overline{t}_0 = \frac{v_0 \sin(\Theta - \gamma)}{g} \int_\varphi^\gamma \frac{1}{\sin^2(\Theta - \varphi)} \Big\{ 1 -$$

$$- n \lambda_n v_0^n \sin^n(\Theta - \gamma) \int_\gamma^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}(\Theta - \varphi)} \Big\}^{-\frac{1}{n}} d\varphi \qquad (37)$$

L'expression pour la longueur du vol du projectile à masse invariable sera

$$\bar{x}_c = \frac{v_0^2 \sin^2 (\Theta - \gamma)}{g \sin \Theta} \int\limits_{\varphi}^{\gamma} \frac{1}{\sin^2 (\Theta - \varphi)} \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - n \lambda_n v_0^n \sin^n (\Theta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1} (\Theta - \varphi)} \right\}^{-\frac{2}{n}} d\varphi \qquad (38)$$

La hauteur de l'élévation du projectile à masse invariable au dessus de la ligne de mire prendra la forme

$$\bar{y} = \frac{v^2 \sin^2 (\Theta - \gamma)}{g \sin \Theta} \int\limits_{\varphi}^{\gamma} \frac{\sin \varphi}{\sin^3 (\Theta - \varphi)} \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - n \lambda_n v_0^n \sin^n (\Theta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1} (\Theta - \varphi)} \right\}^{-\frac{2}{n}} d\varphi \qquad (39)$$

Mettant dans les expressions $\Theta = 90^0$ on aura les formules de Bernoulli.

Mettant $\lambda_n = 0$ nous obtenons les expressions se rapportant au mouvement du projectile dans un millieu non résistant.

En résumé, étant donné nos suppositions la résolution du problème s'est réduite à résoudre l'intégrale élémentaire du type

$$\int\limits_{\gamma}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{n+1} (\Theta - \varphi)}$$

Or, en mettant dans les expressions générales (26), (27), (28), (31), (33)

$$m = m_0 = \text{const}$$

nous avons obtenu les expressions caractérisant le mouvement du projectile ordinaire dans un millieu résistant.

En mettant $\Theta = 90^0$ nous obtenons le formules de Bernoulli, en mettant $\lambda_n = 0$ nous avons les expressions du mouvement du projectile dans un millieu non résistant.

Varsovie, le 20 Sept. 1937.

LITTÉRATURE.

1. Ing. Giovani Bianchi „Corso Teorico-Pratico di Balistica Esterna" 1922.
2. Dr Ing. Godofredo García „Movimiento de los Proyectiles en el aire" 1933.
3. M. Kurenskij „Formules fondamentales pour le calcul des éléments de la trajectoire du centre de gravité d'un projectile".
Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de l'U. R. S. S. Nr 6—7. Moscou.

S. Lipiński.

Nova CP Lacertae.

Przedstawił M. Kamieński dnia 16 grudnia 1937 r.

STRESZCZENIE.

Praca niniejsza zawiera opracowanie obserwacyj jasności Novej CP Lac, dokonanych przez autora, w okresie czasu 1936 VI 19 — XI 15, przeważnie w obserwatorium U. J. P. w Warszawie.

Obserwowano metodą Argelandera i fotometrem klinowym. Jasności gwiazd porównania przyjęto według katalogów Harwardzkich, z wyjątkiem gwiazd zawartych w tablicy II, których jasności wyznaczono drogą pomiarów fotometrem klinowym. Wyniki obserwacyj zawiera tablica III, graficzne zaś ich przedstawienie podaje rysunek 1.

S. Lipiński.

Nova CP Lacertae.

Mémoire présenté par M. M. Kamieński à la séance du 16 décembre 1937.

Der Schriftsteller beobachtete N Lac in den Zeitraume 1936 VI 19 — XI 15 in der Universitäts-Sternwarte in Warschau, mit Ausnahme der Beobachtungen Nr Nr 67—81, die in Ortschaft

Szadek ($\lambda = 1^h 16\overset{m}{.}6$ E, $\varphi = +51^\circ 42\overset{'}{.}3$) angestellt wurden. Im ganzen besteht das Beobachtungsmaterial aus 108 Schätzungen der Helligkeit der Nova, durchgeführt mit der Argelanderschen Methode und aus photometrischen Messungen während 15 Nächten.

Anfangs wurde mit blossen Auge beobachtet (Beobachtungen 1—22), später, als die Helligkeit der Nova sich verminderte, wurden folgende Instrumente benutzt:

1) Ein Prismenglass „Turact" 8×, Objektivdurchmesser 24 mm. (Beobachtungen NrNr 23—25, 27—39, 41—51).

2) Ein Kometensucher von Heyde, Objektivdurchmesser 162 mm, Brennweite 146 cm, Vergr. 25×. (Beobachtungen NrNr 52, 53, 82—123).

3) Ein Fernrohr von Merz, Objektivdurchmesser 100. (Beobachtungen NrNr 67—81).

4) Ein Refraktor von Grubb, Objektivdurchmesser 207 mm abgeblendet auf 80 mm, verbunden mit einem Keilphotometer von Graff. (Beobachtungen NrNr 26, 40, 54—66).

Bei photometrischen Messungen, mit 2 Ausnahmen, die in Bemerkungen angegeben sind, diente als Vergleichstern BD + 56° 2746.

Die Vergleichsterne, deren Helligkeiten aus Harvard Annalen L und LXXIV entnommen wurden, sind in der Tabelle I zusammengestellt. Die Tabelle II enthält dagegen die Vergleichsterne, deren Helligkeiten ich mit Hilfe des Photometers, verbunden mit Instrument 4, während 8 Nächten (Mai 1937), ausgemessen habe. Der mittlere Fehler einer Helligkeit beträgt $\pm 0\overset{m}{.}04$. Es wurden ingesamt bei Ausmessung dieser Helligkeiten 980 Anschlüsse an Vergleichsterne: BD + 55° 2714 ($7\overset{m}{.}16$), BD + 55° 2724 ($7\overset{m}{.}30$), Q, R, und L (siehe Tab. I) angestellt.

Tabelle III enthält die Beobachtungen in extenso so wie die daraus erfolgenden Helligkeiten der Nova. Fig. 1 stellt graphisch die Ergebnisse der Beobachtungen dar.

Warschau, den 6 November 1937.

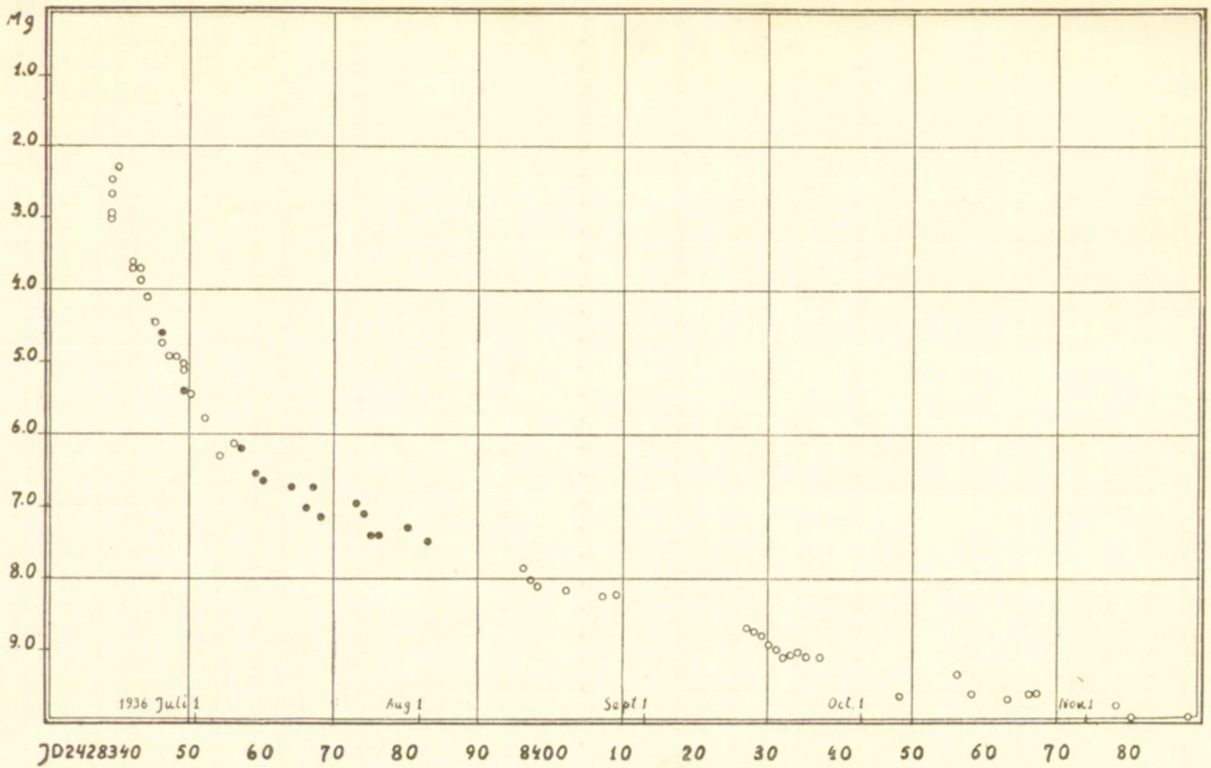


Fig. 1. Graphische Darstellung der Beobachtungen der Helligkeit von Nova CP Lacertae. In der Zeichnung sind meistens die Mittelwerte der betreffenden Abende eingetragen. Die vollen schwarzen Kreisen bedeuten die mit Hilfe des Photometers gewonnenen Grössen.

TABELLE I.

*	Gr	Bezeichnung	*	Gr
α Cyg	$1^{m}.33$		9 Lac	$4^{m}.83$
β UMi	2.24		19 Cep	5.17
γ Cyg	2.32		λ „	5.19
β Cas	2.42		20 „	5.39
α Cep	2.60	A_1^1	BD + 56° 2727	5.42
ε Cyg	2.64	B	BD + 50° 3602	5.44
δ „	2.97	C	BD + 56° 2821	5.47
β Cep	3.32		14 Cep	5.50
η „	3.59	D	BD + 60° 2358	5.52
ζ „	3.62	E	BD + 55° 2820	5.56
η Cas	3.64		13 Cep	6.01
ζ „	3.72	F	BD + 56° 2746	6.05
τ Cyg	3.82	G	BD + 55° 2679	6.22
7 Lac	3.85	H	BD + 55° 2779	6.30
ξ Cyg	3.92	L	BD + 55° 2695	6.87
ν „	4.04	M	BD + 55° 2709	7.46
ε Cep	4.23	N	BD + 55° 2729	7.89
ξ „	4.40	P	BD + 54° 2750	8.41
3 Lac	4.58	Q	BD + 55° 2721	8.96
4 „	4.64	R	BD + 55° 2706	9.11

TABELLE II.

Bezeichnung	BD	Gr	Bezeichnung	BD	Gr
a	+ 54° 2709	$7^{m}.56$	g	+ 55° 2723	$8^{m}.84$
b	+ 54° 2722	8.01	h	+ 54° 2719	9.19
c	+ 55° 2718	8.04	k	+ 55° 2719	9.42
d	+ 54° 2716 *	8.23	l	+ 54° 2718	9.46
e	+ 53° 2830	8.27	m	+ 55° 2722	9.76
f	+ 54° 2723	8.50	p	+ 54° 2717	10.16

* $8^{m}.68 + 9^{m}.41$

TABELLE III.

Beobachtungen.

Nr	J. D.	Schätzungen	Gewicht	Mg	Mg (Mittel)	Bem.
	24283..			m		
1	39.347	γ Cyg 5 n 4 ζ Cep	3	3.01		1,2
2	39.358	δ Cyg 1 n 4 β Cep	3	2.95		1,2
3	39.430	γ Cyg 3 n 5 β Cep	4	2.67		
4	39.438	β Cas 2 n 3 α Cep	4	2.52		
5		α Cyg 10 n 3 ε Cyg	2	2.33	2.46	3
6	40.358	γ Cyg 0 n	3	2.29		1
7		α Cyg 8 n 4 ε Cyg	3	2.20		1
8		α Cyg 8 n 2 β Cas	3	2.30	2.25	1
9		α Cyg 8 n 3 α Cep	3	2.20		1
10	40.410	α Cyg 7 n 2 γ Cyg	3	2.06		4
11		β UMi 4 n 3 β Cas	3	2.36		
12		α Cyg 7 n 3 α Cep	3	2.20	2.25	
13		β UMi 4 n 5 ε Cyg	3	2.36		
14	42.365	ζ Cep 0 n	2	3.62		5
15	42.403	ζ Cep 3 n 6 [7 Lac]	3	3.71		
16	43.400	ζ Cep 6 n 4 [7 Lac]	4	3.76		
17		η Cep 4.5 n 7 ε Cep	4	3.81	3.70	
18		η Cas 3 n 4 ζ Cas	4	3.54		
19	43.449	ζ Cep 6.5 n 5 [7 Lac]	2	3.75		6
20		ξ Cyg 3.5 n 4.5 ν Cyg	2	3.97	3.86	6
21		η Cep 5 n 7 ε Cep	2	3.86		6
22	44.406	ζ Cep 11 n 3 ε Cep	2	4.10		7
23	45.417	ε Cep 3 n 6 λ Cep	3	4.55		
24		ξ Cep 1 n 3 [3 Lac]	3	4.45	4.45	
25		[7 Lac] 5 n 4 [4 Lac]	2	4.29		
26	46.395	Photometer	4	4.59		8
27	46.407	ε Cep 5 n 3.5 λ Cep	4	4.79		
28		ξ Cep 4 n 6 A	4	4.81		
29		[3 Lac] 0.5 n 2 [4 Lac]	2	4.59	4.75	
30		[7 Lac] 7 n 6 A	2	4.70		
31	47.424	ε Cep 6 n 6 A	3	4.83		7
32		[9 Lac] 3 n 6 A	3	5.03	4.93	
33	48.396	ε Cep 5 n 7 A	3	4.72		
34		[3 Lac] 6 n 4 C	3	5.12		
35		[4 Lac] 4 n 7 B	3	4.93	4.93	
36		[9 Lac] 3.5 n 6 λ Cep	3	4.96		
37	49.367	[9 Lac] 5 n 6 A	5	5.10		
38		[3 Lac] 8 n 4 λ Cep	4	4.99	5.03	
39		ε Cep 8 n 5 C	4	4.99		
40	49.385	Photometer	4	5.38		9
41	49.402	[9 Lac] 7 n 4 A	4	5.20		
42		[4 Lac] 9 n 5 λ Cep	4	4.99	5.11	
43	50 388	λ Cep 3 n 2.5 A	4	5.31		
44		C 3 n 6 F	4	5.66		
45		[19 Cep] 3 n 2 D	4	5.38	5.45	
46		[20 Cep] 4 n 4 [14 Cep]	4	5.44		
47	52.376	A 5 n 6 F	4	5.71		☽
48		E 5 n 4 H	4	5.97		

Nr	J. D.	Schätzungen	Gewicht	Mg	Mg (Mittel)	Bem.
	24283..			m		
49		D 3.5 n 5 [13 Cep]	4	5.72	5.77	
50		B 4 n 5 [13 Cep]	4	5.69		
51	54.382	H 0 n	1	6.30		10. ☽
52	56.387	F 5 n 5 G	1	6.13	6.14	11, 12
53		[14 Cep] 7 n 8 L	2	6.14		☽
54	57.395	Photometer	3	6.19		13 ☽
55	59.388	„	4	6.53		
56	60.375	„	2	6.62		14
57	64.385	„	3	6.67		
58	66.397	„	3	7.01		
59	67.381	„	4	6.72		
60	68.362	„	4	7.14		
61	73.410	„	4	6.95		
62	74.409	„	4	7.09		
63	75.373	„	4	7.38		
64	76.403	„	4	7.39		
65	80.356	„	3	7.28		☽
66	83.356	„	2	7.46		☽
67	96.387	M 5 n 4 d	3	7.89	7.86	
68		a 5 n 4 c	4	7.83		
69	97.430	M 8 n 3 d	4	8.02		
70		a 6 n 3 d	4	8.01	8.02	
71		c 0 n	4	8.04		
72	98.364	a 7 n 4 d	4	7.98		
73		b 3 n 2 e	4	8.17	8.11	
74		c 5 n 2 e	4	8.20		
	24284..					
75	02.383	c 4 n 6 d	4	8.12		
76		b 3 n 2.5 e	4	8.15	8.15	
77		b 3 n 5 f	4	8.19		
78	07.394	c 4 n 5 d	3	8.12	8.25	☽
79		e 3 n 3 f	3	8.38		
80	09.378	c 5 n 4 d	3	8.14	8.22	☽
81		b 6 n 4 f	3	8.31		
82	27.283	P 4 n 3 Q	4	8.72		
83		c 6 n 2 g	4	8.64	8.70	
84		c 6 n 5 k	2	8.80		
85	28.337	N 7 n 3 Q	3	8.64	8.74	15
86		g 0 n	3	8.84		
87	29.393	P 5 n 2 Q	3	8.80		15, 16
88	30.312	P 4.5 n 2 Q	4	8.79	8.93	
89		g 2 n 3 k	4	9.07		
90	31.312	Q 1 n 3 R	4	9.00		
91	32.322	Q 2 n 2 R	3	9.03		
92		P 6 n 3 k	2	9.08	9.10	
93		g 3.5 n 3 k	3	9.15		
94	33.316	Q 1.5 n 3 R	3	9.01		
95		P 6 n 3 k	2	9.08	9.07	
96		g 3 n 3 k	2	9.13		
97	34.312	Q2 n 3 R	3	9.02		
98		P 6 n 4 k	3	9.02	9.04	

Nr	J. D.	Schätzungen	Gewicht	Mg	Mg (Mittel)	Bem.
	24284..			m		
99		g 3 n 4 k	3	9.09		
100	35.396	Q 2 n 2 R	2	9.04	9.10	15
101		g 4 n 3 k	2	9.17		
102	37.311	Q 2 n 3 R	3	9.02		
103		P 6 n 3 k	3	9.09	9.10	☽ 15
104		g 4 n 3 k	3	9.17		
105	48.388	k 2 n 5 p	2	9.63	9.64	15
106		l 2 n 5 p	2	9.66		
107	56.351	R 2 n 2 l	4	9.29	9.35	
108		h 4 n 4 m	2	9.48		
109	58.371	R 4 n 4 p	4	9.63	9.60	
110		l 2 n 5 m	3	9.58		
111	63.337	R 3 n 5 p	3	9.74	9.66	
112		l 2 n 3 m	3	9.58		
113	66.326	R 4.5 n 5 p	4	9.61	9.59	☽
114		l 1.5 n 4 m	2	9.54		
115	67.378	R 5 n 6 p	2	9.59	9.60	☽
116		l 2 n 2 m	2	9.61		
117	78.222	R 6 n 3 p	3	9.81		
118		h 7 n 3 p	1	9.87	9.76	
119		n 0 l	1	9.46		
120	80.307	l 4 n 2 p	3	9.93	9.91	
121		R 6 n 2 p	3	9.90		
122	88.267	l 6 n 3 p	3	9.93	9.91	
123		R 8 n 3 p	2	9.88		

Bemerkungen: 1. Abenddämmerung. 2. Wolken. 3. Nova gelblich. 4. Nova gelblich-orange. 5. Cirrus-Wolken. 6. Beobachtung angestellt aus dem Fenster der Wohnung. 7. In der Wolkenlücke. 8. Anschluss an ε Cep. 9. Anschluss an BD + 56° 2727. 10. Schätzung unsicher. 11. Nova rötlich. 12. Mit Hilfe des Refraktors von Heyde. 13. Messungen schwierig wegen rötlicher Farbe der Nova. 14. Beobachtung während kurzer Aufhellung. 15 Stellung des Beobachter unbequem. 16. Schätzungen schwierig.

Sophie Piccard

O pewnej własności zbioru doskonałego Cantora.

Komunikat przedstawiony przez W. Sierpińskiego na posiedzeniu w dniu 16 grudnia 1937.

STRESZCZENIE.

Autorka dowodzi twierdzenia: Zbiór punktów wspólnych zbioru Cantora i jego dowolnego przesunięcia jest skończony albo nieprzeliczalny.

Sophie Piccard

Une propriété de l'ensemble parfait de Cantor.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 16 décembre 1937.

Soit E l'ensemble parfait de Cantor construit sur l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ et soit a un nombre réel quelconque vérifiant les relations $0 \leq a \leq 1$. Désignons par $E(a)$ la translation de l'ensemble E du nombre a. Il s'agit de déterminer la puissance de l'ensemble $E \cdot E(a)$. Comme l'a montré M. D. Mirimanoff[1]), l'ensemble $E \cdot E(a)$ ne saurait être vide. Nous allons établir cette

Proposition: L'ensemble $E \cdot E(a)$ est *fini* ou *indénombrable*, autrement dit l'ensemble parfait de Cantor ne saurait avoir avec aucune de ses translations une infinité *dénombrable* d'éléments communs.

Démonstration: I. Supposons d'abord que $a \varepsilon E$. Ce nombre peut donc être mis sous la forme

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots, \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \dots$ prennent l'une des valeurs 0 ou 2.

Soit x un nombre quelconque de E:

$$x = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \dots, \tag{2}$$

où $b_1, b_2, \dots$ prennent l'une des valeurs 0 ou 2.

---

1) *Sur un problème de la théorie de la mesure*, propriété II, Fundamenta Mathematicae, t. IV, p. 77.

Pour tout nombre y de $E \cdot E(a)$, il existe un nombre x de E, tel que $a + x = y$.

Deux cas sont à distinguer.

1. Parmi les chiffres $a_1, a_2, \ldots$ il n'y en a qu'un nombre fini (ou nul) qui sont nuls. Alors il existe un plus petit indice $i \geqslant 0$, tel que $a_{i+1} = a_{i+2} = \ldots = 2$.

Si $i = 0$, on $a : a = 0{,}222\ldots = 1$, et alors le seul nombre x de E, tel que $a + x \varepsilon E$, est $x = 0$. Dans ce cas, l'ensemble $E \cdot E(a)$ contient un seul élément.

Supposons que $i > 0$. Le nombre a peut alors s'écrire:

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_{i-1}}{3^{i-1}} + \frac{1}{3^i} \cdot$$

On démontre alors sans peine, par l'induction, que tout nombre x de E, tel que $a + x \varepsilon E$, est nécessairement de la forme (2), où

$b_i = 0$ ou 2;

$b_{i+1} = b_{i+2} = \ldots = 0$, si $b_i = 2$,

$b_{i+1} = b_{i+2} = \ldots = 0$ ou bien $b_{i+1} = b_{i+2} = \ldots = 2$, si $b_i = 0$,

$b_j = 0$, si $a_j = 2$, $b_j = 0$ ou 2, si $a_j = 0$,

quel que soit le nombre entier $j \geqq 1$ et $< i$.

Donc, dans le cas considéré, l'ensemble $E \cdot E(a)$ est fini. Désignons par n le nombre de ses éléments et soit k le nombre total de chiffres nuls faisant partie de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$. Le nombre n est alors défini par l'égalité $n = 2^k \cdot 3$.

2. Parmi les chiffres $a_1, a_2, \ldots$, il y en a une infinité qui sont nuls. Soit $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = 0$ tous ces chiffres $(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots)$. Il est clair qu'alors tout nombre x de la forme

$$x = \frac{b_{i_1}}{3^{i_1}} + \frac{b_{i_2}}{3^{i_2}} + \ldots, \tag{3}$$

oú $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$ prennent l'une des valeurs 0 ou 2, appartient á E et jouit de cette propriété que $a + x \varepsilon E$. Or, comme les nombres x de la forme (3) sont en infinité indénombrable, il en résulte que dans le cas considéré l'ensemble $E \cdot E(a)$ est indénombrable.

II. Supposons, à présent, que $a \overline{\varepsilon} E$. Soit

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots, \tag{4}$$

où $a_1, a_2, \ldots$ prennent l'une des valeurs 0, 1, 2.

Comme $a \varepsilon E$, l'un au moins des chiffres $a_1, a_2, \ldots$ est égal à 1 et si ce chiffre est unique, il est suivi d'un chiffre non nul au moins. Ici encore deux cas sont à distinguer.

1. Le nombre de chiffres égaux à 1 de la suite $a_1, a_2, \ldots$ est fini. Soit r ce nombre et soient $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_r} = 1$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$ tous les chiffres égaux à 1 du développement (4). Si un nombre a peut être mis sous les deux formes suivantes:

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_{t-1}}{3^{t-1}} + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3^{t+1}} + \frac{2}{3^{t+2}} + \ldots$$

$$\text{et } \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_{t-1}}{3^{t-1}} + \frac{2}{3^t} \quad (t = \text{entier} \geqslant 1),$$

nous prendrons toujours la seconde forme de ce nombre. Ainsi le nombre r sera toujours défini de façon univoque.

Supposons d'abord que r est pair: $r = 2\,r_1$ $(r_1 \geqq 1)$.

On voit alors aisément que tout nombre x de E, tel que $a + x \varepsilon E$ est nécessairement de la forme (2), où

$b_{i_{2m-1}} = 0$, $b_{i_{2m}} = 2$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 2$, $b_j = 2$ si $a_j = 0$, quel que soit l'indice $j > i_{2m-1}$ et $< i_{2m}$ et quel que soit l'entier $m = 1, 2, \ldots, r_1$;

$b_j = 0$ si $a_j = 2$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 0$ pour tout indice j faisant partie de la suite $1, 2, \ldots, i_1 - 1,\ i_2 + 1,\ i_2 + 2, \ldots, i_3 - 1,$ $i_4 + 1,\ i_4 + 2, \ldots, i_{r-1} - 1,\ i_r + 1,\ i_r + 2, \ldots$

Il s'ensuit que si parmi les chiffres de la suite

$$(^*) \qquad a_1,\ a_2, \ldots, a_{i_1-1},\ a_{i_2+1},\ a_{i_2+2}, \ldots, a_{i_3-1},\ a_{i_4+1},\ a_{i_4+2}, \ldots,$$
$$a_{i_{r-1}-1},\ a_{i_r+1},\ a_{i_r+2}, \ldots$$

il n'y en a qu'un nombre fini k_1 qui sont nuls, l'ensemble $E \cdot E(a)$ est fini et contient $2^{k_1+k_2}$ éléments, k_2 désignant le nombre total de chiffres égaux à 2 de la suite

$$a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots, a_{i_2-1}, a_{i_3+1}, a_{i_3+2}, \ldots, a_{i_4-1}, \ldots, a_{i_{r-1}+1}, a_{i_{r-1}+2}, \ldots, a_{i_r-1}.$$

L'ensemble $E \cdot E(a)$ est indénombrable dans le cas où la suite (*) contient une infinité de chiffres nuls.

Supposons maintenant que le nombre r est impair: $r = 2\,r_1 + 1$ $(r_1 \geqq 0)$. Alors on voit aisément que tout nombre x de E, tel que $a + x \varepsilon E$ est nécessairement de la forme (2), où

$b_{i_{2m-1}} = 0$, $b_{i_{2m}} = 2$, $b_j = 0$ ou 2, si $a_j = 2$, $b_j = 2$ si $a_j = 0$, quel que soit l'indice $j > i_{2m-1}$ et $< i_{2m}$ et quel que soit l'entier $m = 1, 2, \ldots, r_1$;

$b_{i_r} = 0$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 2$, $b_j = 2$ si $a_j = 0$, pour tout indice $j > i_r$, si l'un au moins des chiffres a_{i_r+1}, $a_{i_r+2}, \ldots$ est différent de zéro. Si $a_{i_r+1} = a_{i_r+2} = \ldots = 0$, b_{i_r} peut prendre l'une des valeurs 0 ou 2; si $b_{i_r} = 0$, on doit avoir soit $b_{i_r+1} = b_{i_r+2} = \ldots = 0$ soit $b_{i_r+1} = b_{i_r+2} = \ldots = 2$; si $b_{i_r} = 2$, on a nécessairement $b_{i_r+1} = b_{i_r+2} \ldots = 0$.

Enfin $b_j = 0$, si $a_j = 2$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 0$ pour tout indice j faisaint partie de suite
$1, 2, \ldots, i_1 - 1$, $i_2 + 1$, $i_2 + 2, \ldots$, $i_3 - 1$, $i_4 + 1$, $i_4 + 2, \ldots, i_r - 1$.
Donc dans le cas considéré, lorsque le nombre de chiffres égaux à 2, faisant partie de la suite

$$(^{**}) \qquad a_{i_r+1},\ a_{i_r+2}, \ldots$$

est fini, l'ensemble $E \cdot E(a)$ est fini et le nombre n d'éléments qu'il contient est alors défini comme suit. Soit k_1 le nombre total de chiffres nuls de la suite a_1, $a_2, \ldots, a_{i_1-1}$, a_{i_2+1}, $a_{i_2+2}, \ldots a_{i_3-1}$, a_{i_4+1}, $a_{i_4+2}, \ldots, a_{i_r-1}$ et soit k_2 le nombre total de chiffres égaux à 2 de la suite
a_{i_1+1}, $a_{i_1+2}, \ldots, a_{i_2-1}$, a_{i_3+1}, $a_{i_3+2}, \ldots, a_{i_4-1}, \ldots, a_{i_r+1}$, $a_{i_r+2}, \ldots$
Alors, si l'un au moins des chiffres a_{i_r+1}, $a_{i_r+2}, \ldots$ est egal à 2, on a $n = 2^{k_1+k_2}$. Si $a_{i_r+1} = a_{i_r+2} = \ldots = 0$, on a $n = 2^{k_1+k_2}\,3$.

D'autre part, si le nombre de chiffres égaux à 2 faisant partie de la suite (**) est infini, l'ensemble $E \cdot E(a)$ est indénombrable.

2. Il existe un nombre infini de chiffres $= 1$ dans la suite a_1, $a_2, \ldots$ Soit $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = 1$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots)$ tous les chiffres en question.

Alors tout nombre x de E, tel que $a + x \varepsilon E$ est forcément de la forme (2), où

$b_{i_{2m-1}} = 0$, $b_{i_{2m}} = 2$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 2$, $b_j = 2$ si $a_j = 0$, quel que soit l'indice $j > i_{2m-1}$ et $< i_{2m}$ et quel que soit $m = 1, 2, 3, \ldots$;

$b_j = 0$ si $a_j = 2$, $b_j = 0$ ou 2 si $a_j = 0$ pour tout indice j de la suite $1, 2, \ldots, i_1 - 1$, $i_2 + 1$, $i_2 + 2, \ldots, i_3 - 1$, $i_4 + 1$, $i_4 + 2, \ldots$

Donc si parmi les chiffres

(***) $\qquad a_1\ a_2, \ldots, a_{i_1-1},\ a_{i_2+1},\ a_{i_2+2}, \ldots, a_{i_3-1},\ a_{i_4+1},\ a_{i_4+2}, \ldots$

il n'y en a qu'un nombre fini k_1 qui sont nuls et si parmi les chiffres

(****) $\qquad a_{i_1+1},\ a_{i_1+2}, \ldots,\ a_{i_2-1},\ a_{i_3+1},\ a_{i_3+2}, \ldots,\ a_{i_4-1}, \ldots$

il n'y en a qu'un nombre fini k_2 qui sont égaux à 2, l'ensemble $E{\cdot}E(a)$ contient un nombre fini, $2^{k_1+k_2}$, d'éléments distincts. L'ensemble $E{\cdot}E(a)$ est indénombrable, si la suite (***) contient un nombre infini de termes nuls ou si la suite (****) contient une infinité de termes égaux à 2 (et à plus forte raison si ces deux cas se présentent simultanément).

Notre proposition est ainsi établie et du raisonnement précédent il ressort que si l'ensemble $E{\cdot}E(a)$ est infini, il a la puissance du continu.

On peut encore remarquer que l'ensemble M formé de tous les nombres a de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, tels que $E{\cdot}E(a)$ est fini et l'ensemble N de tous les nombres a de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, tels que $E{\cdot}E(a)$ est indénombrable, sont tous deux indénombrables. Il suffit, à cet effet, d'observer que l'ensemble des nombres $a \varepsilon E$, tels que

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots,$$

où $a_1\ a_2, \ldots$ prennent l'une des valeurs 0 ou 2, le nombre de chiffres nuls étant infini, est indénombrable. Or, nous savons que pour chacun de ces nombres, l'ensemble $E{\cdot}E(a)$ est indénombrable. Donc l'ensemble N est indénombrable. Dautre part, l'ensemble des nombres a, tels que

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots,$$

où $a_1, a_2, \ldots,$ prennent l'une des valeurs 0, 1, 2, une infinité de ces chiffres, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots)$, prenant la valeur 1, alors que parmi les chiffres

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_{i_1-1},\ a_{i_2+1},\ a_{i_2+2}, \ldots, a_{i_3-1},\ a_{i_4+1},\ a_{i_4+2}, \ldots$$

il n'y en a qu'un nombre fini (ou nul) qui sont nuls et parmi les chiffres $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots, a_{i_2-1}, a_{i_3+1}, a_{i_3+2}, \ldots, a_{i_4-1}, a_{i_5+1}, a_{i_5+2}, \ldots$ il n'y en a qu'un nombre fini (ou nul) qui sont égaux à 2, est indénombrable. Or, d'après ce qui précède, pour tout nombre a de cette forme, l'ensemble $E{\cdot}E(a)$ est fini. Donc l'ensemble M est également indénombrable.

W. Sierpiński.

O pewnej addytywnej własności zbiorów.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 16 grudnia 1937 r.

Sur une propriété additive d'ensembles.

Présenté dans la séance du 16 décembre 1937.

On dit, d'après M. Kuratowski, qu'un ensemble E situé dans l'espace euclidien R_n à n dimensions jouit de la propriété λ, si chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ relativement à E[1].

On ne sait pas (même en utilisant l'hypothèse du continu) résoudre le problème si la propriété λ est dénombrablement additive, c'est-à-dire si toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (situés dans R_n) jouissant de la propriété λ jouit également de cette propriété.

Or, comme je démontrerai, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la propriété λ soit *simplement additive*, c. à. d. que chaque somme de deux ensembles (situés dans R_n) jouissant de la propriété λ jouisse encore de cette propriété, et on pourra même admettre qu'un de ces ensembles est dénombrable.

On est ainsi conduit à introduire la propriété λ' suivante qui est, peut-être, plus forte que la propriété λ:

Nous dirons qu'un ensemble E situé dans R_n jouit de la propriété λ' (relativement à R_n), si pour tout sous-ensemble dénombrable D de R_n l'ensemble $E + D$ jouit de la propriété λ.

On voit sans peine que pour qu'un ensemble E situé dans R_n jouisse de la propriété λ' (rel. à R_n), il faut et il suffit que, D étant un sous-ensemble dénombrable quelconque de R_n, il existe toujours un ensemble G_δ de R_n, soit Γ, contenant D et tel que $\Gamma E \subset D$.

On voit aussi sans peine que si l'ensemble E situé dans R_n jouit de la propriété λ' relativement à R_n, il jouit encore de la propriéte λ' relativement à R_{n+1}. Or, on démontre aisément

[1]) Voir C. Kuratowski *Topologie I* (Monogr. Matem. t. III). Warszawa 1933, p. 269.

que la propriété λ' est héreditaire, c'est-à-dire que tout sous-ensemble d'un ensemble (de R_n) jouissant de la propriété λ' (rel. à R_n) jouit également de cette propriété.

Théorème 1. *La propriété λ' est dénombrablement additive.*

Démonstration. Soit $E_1, E_2, E_3, \dots$ une suite infinie d'ensemble contenus dans R_n et jouissant de la propriété λ' relativement à R_n et soit D un sous-ensemble dénombrable de R_n.

Il existe donc une suite infinie $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ d'ensembles G_δ situés dans R_n, tels que

(1) $$D \subset \Gamma_k \text{ et } \Gamma_k E_k \subset D \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

Posons $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ et

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \dots ;$$

l'ensemble Γ sera encore un G_δ de R_n et, d'après (1), nous aurons:

$$D \subset \Gamma \text{ et } \Gamma E = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma E_k \subset \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k E_k \subset D,$$

ce qui prouve que l'ensemble E jouit de la propriété λ', c.q.f.d.

Admettons maintenant que la propriété λ est simplement additive. Il en résulte, en particulier, que tout ensemble jouissant de la propriété λ jouit également de la propriété λ'. D'après le théorème 1 et vu que la propriété λ' entraîne la propriété λ, il en résulte que la propriété λ est dénombrablement additive.

Il est encore à remarquer que, comme on voit sans peine, le problème si les propriétés λ et λ' coïncident (dans R_n) équivaut au probléme si toute somme d'un ensemble de R_n jouissant de la propriété λ et d'un sous-ensemble dénombrable de R_n jouit de la propriété λ.

On peut démontrer pour la propriété λ' le théorème suivant, analogue an théorème de M. Kuratowski concernant la propriété λ[1]):

---

[1]) *Fund. Math.* **21**, p. 128.

Théorème 2. *Si l'ensemble linéaire H jouissant de la propriété λ' est une projection biunivoque d'un ensemble plan E l'ensemble E jouit de la propriété λ' relativement au plan.*

On sait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu (en utilisantr seulement l'axiome du choix) qu'il existe des ensembles linéaires indénombtables (de puissance $\aleph_1$) jouissant de la propriété λ. Or, nous ne savons pas démontrer qu'en admettant l'hypothèse du continu qu'il existe des ensembles linéaires indénombrables jouissant de la propriété λ' (Tels sont les ensembles linéaires indénombrables ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle).

Il résulte sans peine du théorème 2 que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tout ensemble linéaire est une image biunivoque et continue d'un ensemble plan à propriété λ'. La propriété λ' n'est pas donc un invariant des transformations biunivoques et continues (dans un sens). Or, nous ne savons pas résoudre le problème si la propriété λ' est un invariant des transformations topologiques (comme c'est le cas pour la propriété λ).

St. J. Thugutt.

O syntetycznym kaliofilicie.

Komunikat zgłoszony dn. 16 grudnia 1937 r.

Sur la kaliophilite artificielle.

Mémoire présenté à la séance du 16 décembre 1937.

Praca ukazała się w „Archiwum Mineralogicznym". XIII. 1937. 109 — 113.

E R R A T A

do komunikatu p. Stanisława Ruziewicza
„Uogólnienie kilku twierdzeń równoważnych hipotezie continuum"
zgłoszonego dn. 19 stycznia 1937 r.
Sprawozdania z pos. T. N. W. XXX. 1937. Wydz. III.

str. 21 wiersz 7 od dołu

zamiast *la* winno być: *toute telle.*