COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXIX Année 1936 Classe III Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIX 1936 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1936

Drukarnia i Litografja
JAN COTTY
Warszawa, Kapucyńska 7.

TREŚĆ ZESZYTU 1 – 3

TABLE DES MATIÈRES.

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno - fizycznych.

Posiedzenie
z dnia 27 stycznia 1936 r.

S. Mazurkiewicz.

O największym wyrazie funkcji całkowitej.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 27 Stycznia 1936 r.

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej wykazuję, że twierdzenie Wimana z r. 1914 o związku asymptotycznym, między $M(r)$ i $m(r)$, w zaostrzonej postaci podanej w r. 1920 przez Valirona, można udowodnić przy pomocy odpowiedniej modyfikacji lemmatu Pólyi z r. 1916.

S. Mazurkiewicz.

Sur le terme maximum d'une fonction entière.

Note présentée dans la séance du 27 Janvier 1936.

Dans deux mémoires remarquables M. Wiman a obtenu des inégalités très précises entre le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière, le terme maximum $m(r)$ de son développement en série de Mac-Laurin, le maximum de sa partie réelle $A(r)$ et le module maximum de sa dérivée $M_1(r)$ [1]. Ce sont les relations:

(a) $M(r) < [\log m(r)]^{\varepsilon+\frac{1}{2}}\, m(r)$; $A(r) \sim M(r)$; $r\, M_1(r) \sim N(r)\, M(r)$

$N(r)$ désignant le rang du terme maximum. M. Wiman a démontré ces relations pour une suite infiniment croissante de va-

[1]) Acta mathematica 37 (1914) p. 305 — 326 et 41 (1918) p. 1 — 28.

leurs de r. M. Valiron a démontré qu'elles ont lieu presque partout, plus precisément pour tout $r > r' > 0$ à l'exception *d'un ensemble de mesure logarytmique (J) finie*[2]) M. Wiman a donné deux méthodes pour la démonstration de (a). La première a été ensuite présentée dans une forme particulierèment élégante par M. Pólya, qui l'a basée sur un lemme extremment simple[3]). La deuxième, convenablement développée et modifiée par l'emploi du diagramme de Newton sert de base aux résultats de M. Valiron[4]). Je me propose de démontrer que ces résultats peuvent être obtenus par une legère modification du lemme de M. Pólya.

Lemme. *Si la suite de nombres réels* $\{l_k\}$ *satisfait à :* $\lim\limits_{k=\infty} l_k = +\infty$, *alors à tout* $t \geqq l_1$ *on peut faire correspondre un entier positif* $n(t)$, *satisfaisant aux conditions suivantes: la fonction* $n(t)$ *est non décroissante, continue à droite et on a les inégalités:*

$$(1) \qquad \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} l_{n(t)-\mu+j} \leqq t < \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} l_{n(t)+j}$$

$$\mu = 1, 2 \ldots n(t); \quad \nu = 1, 2 \ldots$$

Démonstration. Soit $q(t)$ le premier entier tel que $t < l_{q(t)+1}$.

Posons:

$$(2) \qquad L_k(t) = \sum_{j=q(t)}^{k} l_j - [k - q(t) + 1]\,t \qquad k = q(t),\ q(t)+1 \ldots.$$

---

[2]) Ann. Ec. Norm. 37 (1920) p. 219 — 255. J'appelle ensemble de mesure logarytmique (J) finie, tout sous-ensemble d'une demi-droite $r \geqq r_1 > o$, qui peut être enfermé en une suite d'intervalles (b_k , c_k) telle que:

$$r_1 \leqq b_1 < c_1 < b_2 < c_2 \ldots, \lim_{k=\infty} b_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{c_k}{b_k} < \infty$$

[3]) Wiman: Acta mathematica 37, §§ 1 — 3 p. 306 — 318. Pólya: Acta mathematica 40 (1916) p. 313 — 317, en part. Hilfssatz I.

[4]) l c.[2]) p. 221 — 228.

On a: $\lim_{k=\infty} L_k(t) = +\infty$, donc les nombres (2) possédent un minimum. Soit $n(t)$ la plus grande valeur de k pour laquelle ce minimum est atteint. On aura:

$$(3) \qquad L_{n(t)+\nu}(t) - L_{n(t)}(t) = \sum_{j=1}^{\nu} l_{n(t)+j} - \nu t > 0 \qquad \nu = 1, 2 \ldots$$

$$(4) \qquad L_{n(t)}(t) - L_{n(t)-\mu}(t) = \sum_{j=1}^{\mu} l_{n(t)-\mu+j} - \mu t \leqq 0$$

$$\mu = 1, 2 \ldots n(t) - q(t)$$

en particulier pour $\mu = n(t) - q(t)$:

$$(5) \qquad \sum_{j=q(t)+1}^{n(t)} l_j - [n(t) - q(t)]\, t \leqq 0$$

Supposons $\mu > n(t) - q(t)$. D'après la signification de $q(t)$, on aura:

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{\mu - n(t) + q(t)} l_{n(t)-\mu+j} - [\mu - n(t) + q(t)]\, t \leqq 0$$

L'addition de (5) et (6) donne:

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{\mu} l_{n(t)-\mu+j} - \mu t \leqq 0 \qquad \mu = n(t) - q(t) + 1 \ldots n(t)$$

Les inégalités (3), (4), (7) sont équivalentes à (1).

Supposons $t_1 < t_2$, alors $n(t_2) \geqq q(t_2) \geqq q(t_1)$. Si $n(t_1) \leqq q(t_2)$ on aura:

$$(8) \qquad n(t_1) \leqq n(t_2)$$

Si $n(t_1) > q(t_2)$, on aura:

$$(9) \qquad L_{n(t_2)}(t_2) \leqq L_{n(t_1)}(t_2)$$

$$(10) \qquad L_{n(t_1)}(t_1) \leqq L_{n(t_2)}(t_1)$$

$$(11) \qquad 0 \leqq L_{n(t_1)}(t_2) + L_{n(t_2)}(t_1) - L_{n(t_2)}(t_2) - L_{n(t_1)}(t_1) =$$
$$= [n(t_2) - n(t_1)]\,(t_2 - t_1)$$

Il en résulte (8). Donc $n(t)$ est une fonction non décroissante. Soient: $t_1 < t_2 \ldots \lim\limits_{j=\infty} t_j = \infty$ les discontinuités de $n(t)$. On a pour $t_j < t < t_{j+1}$: $n(t) =$ constans $= n_j$, et, $n(t)$ étant non décroissante: $n(t_j) \leqq n_j$. La fonction $q(t)$ est continue à droite, donc il existe un t'_j tel que $t_j < t'_j \leq t_{j+1}$ et que: $q(t) = q(t_j)$ pour $t_j < t < t_j'$. D'après la définition de n_j:

$$L_{n(t_j)}(t) \geqq L_{n_j}(t) \qquad t_j < t < t_j' \tag{12}$$

$q(t)$ étant continue à droite il en est de même pour $L_k(t)$. Donc:

$$L_{n(t_j)}(t_j) \geqq L_{n_j}(t_j) \tag{13}$$

Il en résulte $n(t_j) = n_j$. Donc $n(t)$ est continue à droite c. q. f. d.

Corollaire. *Soit:*

$$0 < r_1 \leq r_2 \leqq r_3 \ldots \qquad \lim_{k=\infty} r_k = \infty \tag{14}$$

$$0 < P_1 \leqq P_2 \leqq P_3 \ldots \qquad \lim_{k=\infty} P_k < \infty \tag{15}$$

Pour tout $r \geqq r_1$ à l'exception d'un ensemble de mesure logarytmique (J) finie, on a les inégalités:

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{\mu} r_{N(r)-\mu+j}}{r^{\mu}} \leqq \frac{\prod\limits_{j=1}^{\mu} P_{N(r)-\mu+j}}{P^{\mu}_{N(r)}} \qquad \mu = 1, 2 \ldots N(r) \tag{16}$$

$$\frac{r^{\nu}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu} r_{N(r)+j}} \leqq \frac{P^{\nu}_{N(r)}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu} P_{N(r)+j}} \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots . \tag{17}$$

$N(r)$ désignant l'entier déterminé par:

$$r_{N(r)} \leqq r < r_{N(r)+j} \tag{18}$$

Démonstration. D'après (14), (15) on aura:

$$\lim_{k=\infty} \frac{r_k}{P_k} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} \log \frac{r_k}{P_k} = +\infty$$

D'après le lemme il existe pour $t \geqq t_0 = \log \dfrac{t_1}{P_1}$ un entier $n(t)$

tel que $n(t)$ est une fonction non décroissante, continue à droite et que:

(19) $$\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\log\frac{r_{n(t)-\mu+j}}{P_{n(t)-\mu+j}} \leqq t$$

(20) $$\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\log\frac{r_{n(t)+j}}{P_{n(t)+j}} > t \qquad \nu = 1, 2\ldots$$

Posons:

(21) $$r = P_{n(t)}e^{t} \qquad t \geqq t_0$$

r est une fonction croissante de t. Soient t_1, $t_2\ldots$ les discontinuités de $n(t)\,(t_0 < t_j < t_{j+1})$. Pour $t_j \leqq t < t_{j+1}$, $j=0, 1\ldots$ on a $n(t) = n(t_j)$. Donc l'ensemble Z de tous les r donnés par la formule (21) est composé des intervalles semi-ouverts:

(22) $$P_{n(t_j)}e^{t_j} \leqq r < P_{n(t_j)}e^{t_{j+1}} \qquad j=0, 1, 2\ldots$$

Z s'obtient en excluant de la demi-droite $r \geqq r_1$ les intervalles semi-ouverts:

(23) $$r_1 \leqq r < P_{n(t_0)}e^{t_0} = \frac{P_{n(t_0)}}{P_1}r_1; \quad P_{n(t_j)}e^{t_{j+1}} \leqq r < P_{n(t_{j+1})}e^{t_{j+1}}$$
$$j = 0, 1\ldots.$$

La variation totale de log r dans ces intervalles est égale à

$\lim\limits_{k=0}\log\dfrac{P_k}{P_1}$, donc finie.

(24) $$\log\frac{r_{n(t)}}{P_{n(t)}} \leqq \log\frac{r}{P_{n(t)}} < \log\frac{r_{n(t)+1}}{P_{n(t)+1}}$$

(25) $$r_{n(t)} \leqq r < r_{n(t)+1}\frac{P_{n(t)}}{P_{n(t)+1}} \leqq r_{n(t)+1}$$

donc:

(26) $$n(t) = N(r) \qquad r \varepsilon Z$$

En remplaçant dans (19), (20) $n(t)$ par $N(r)$, t par $\log\dfrac{r}{P_{N(r)}}$ on obtient (16), (17). Le corollaire est ainsi démontré.

En posant:

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{r_1 \,.\, r_2 \ldots r_n} \tag{27}$$

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + k^{-\beta}) \qquad 1 < \beta < \beta_1 < 2 \tag{28}$$

et en désignant par Z_β l'ensemble Z correspondant aux suites (14) et (28) on démontre l'inégalité:

$$\sum_{p=-N(r)}^{\infty} |p|^q \frac{r^{N(r)+p}}{r_1 \; r_2 \ldots\ldots r_{N(r)+p}} < A_q \, m(r) \, [N(r)]^{(q+1)\frac{\beta}{2}}; \; r \varepsilon Z_\beta \tag{29}$$

A_q désignant une constante, $m(r)$ le terme maximum de la fonction (27), $N(r)$ le rang de $m(r)$. La démonstration pour $q = 0$ se trouve dans le mémoire cité de M. Wiman. L'extension au cas géneral $q > 0$, en partant des inégalités (16), (17) ne présente aucune difficulté. L'inégalité (29) est équivalente à l'inégalité (4) de M. Valiron[5]) et permet d'obtenir (a).

S. Mazurkiewicz.

O pewnej klasie funkcyj meromorficznych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 27 Stycznia 1936 r.

STRESZCZENIE.

Istnienie funkcyj meromorficznych przekształcających każdy zbiór spójny nieograniczony w zbiór gęsty w płaszczyźnie zostało udowodnione przez Gross'a (przez podanie przykładu) a następnie przez Kiersta i Szpilrajna metodą kategorji w przestrzeni funkcyj meromorficznych. Podaję tu nowy dowód istnienia, również metodą kategorji, ale w przestrzeni par funkcyj całkowitych.

---

[5]) l. c. p. 226. Corollaire I.

S. Mazurkiewicz.

Sur une classe de fonctions méromorphes.

Note présentée dans la séance du 27 Janvier 1936.

M. Gross a construit une fonction méromorphe dans le plan, qui transforme tout ensemble connexe non borné en un ensemble dense dans le plan[1]). M. M. Kierst et Szpilrajn ont démontré, que la classe $\mathfrak{M}_1$ de fonctions possédant cette propriété est un ensemble résiduel dans l'espace $\mathfrak{M}$ de fonctions méromorphes[2]). Dans le même ordre d'idées, je me propose de démontrer le résultat suivant. Désignons par $\mathfrak{E}$ l'espace de fonctions entieres, par $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ l'espace de couples ordonnés (f, g) oú $f \varepsilon \mathfrak{E}$, $g \varepsilon \mathfrak{E}$[3]). La classe $\mathfrak{H}$ de couples $(f, g) \varepsilon \mathfrak{E}$, tels que $\frac{f}{g} \varepsilon \mathfrak{M}_1$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{E}^2$. Soit β un nombre complexe. Désignons par $\mathfrak{H}(\beta)$ l'ensemble des $(f, g) \varepsilon \mathfrak{E}^2$ satisfaisant à la condition: pour tout $(f, g) \varepsilon \mathfrak{H}(\beta)$ il existe une suite $\{r_k\}$, telle que $r_k \geq k$ et:

$$(1) \qquad \left| \frac{f(r_k e^{i\varphi})}{g(r_k e^{i\varphi})} - \beta \right| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2 \ldots$$

Soit $\mathfrak{H}_k(\beta)$ l'ensemble des $(f, g) \varepsilon \mathfrak{E}^2$ qui satisfont à la condition: pour tout $(f, g) \varepsilon \mathfrak{H}_k(\beta)$ il existe un $r \geq k$ tel que:

$$(2) \qquad \left| \frac{f(r e^{i\varphi})}{g(r e^{i\varphi})} - \beta \right| < \frac{1}{k}$$

Evidement $\mathfrak{H}_k(\beta)$ est ouvert dans $\mathfrak{E}^2$ et:

$$(3) \qquad \mathfrak{H}(\beta) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k(\beta)$$

donc $\mathfrak{H}(\beta)$ est un G_δ (rel $\mathfrak{E}^2$)

---

1) Monatshefte f. Math. u. Phys. 29 (1918) p. 14.

2) Fund. Math. XXI (1933) p, 276 — 294, en particulier p. 292 — 293.

3) Nous considérons $\mathfrak{E}^2$ comme un espace (L): une suite (f_n, g_n) sera considerée convergente vers (f, g) (en symboles $(f_n, g_n) \rightrightarrows (f, g)$) lorsque $f_n(z)$ tend vers $f(z)$ et $g_n(z)$ vers $g(z)$ uniformément sur tout cercle. $\mathfrak{E}$, donc aussi $\mathfrak{E}^2$ sont mètrisables d'une façon complète. (comp. Kierst-Szpilrajn l. c. p. 281).

Soit maintenant $\mathfrak{P}(\beta)$ l'ensemble des $(p, q) \varepsilon \mathfrak{G}^2$ tels que $p(z)$ et $q(z)$ sont des polynomes et que le degré de $p(z) - \beta q(z)$ est inférieur à celui de $q(z)$. On a alors $\lim\limits_{|z| \to \infty} \left| \dfrac{p(z)}{q(z)} - \beta \right| = 0$, donc:

$$(4) \qquad \mathfrak{P}(\beta) \subset \mathfrak{H}(\beta)$$

Soit d'autre part $(f, g) \in \mathfrak{G}^2$. Posons:

$$(5) \qquad p_n(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \frac{\beta z^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(6) \qquad q_n(z) = g(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} z^j + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$$

On aura:

$$(7) \qquad (p_n, q_n) \in \mathfrak{P}(\beta); \qquad (p_n, q_n) \rightrightarrows (f, g)$$

Donc $\overline{\mathfrak{P}(\beta)} = \mathfrak{G}^2$ et d'aprés (4): $\mathfrak{H}(\beta) = \mathfrak{G}^2$. Donc $\mathfrak{H}(\beta)$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{G}^2$.

Soit $\beta_1, \beta_2 \ldots$ une suite de nombres complexes dense dans le plan. Posons $\mathfrak{H}^* = \prod\limits_{m=1}^{\infty} \mathfrak{H}(\beta_m)$. Alors $\mathfrak{H}^*$ est résiduel dans $\mathfrak{G}^2$. D'autre part on voit immédiatement que $\mathfrak{H}^* \subset \mathfrak{H}$. Donc $\mathfrak{H}$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{G}^2$ *c. q. f. d.*

Remarque. Une modification legère de ce raisonnement permet de démontrer que $\mathfrak{M}_1$ contient de fonctions méromorphes d'ordre fini (plus precisement d'ordre $\leq \rho$). Soit en effet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$ une fonction entiére d'ordre ρ, telle que $\gamma_n > 0$. Remplaçons $\mathfrak{G}^2$ par $\mathfrak{G}^2_1$, $\mathfrak{G}_1$ désignant la classe de fonctions entiéres $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ satisfaisant à l'inégalité $|c_n| \leq \gamma_n$, $n = 0, 1, 2..$; ces fonctions sont d'ordre $\leq \rho$. Les formules (5) et (6) sont à remplacer par.

$$(5)' \qquad p_n(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \frac{\beta \gamma_{n+1}}{1 + |\beta|} z^{n+1}$$

$$(6)' \qquad q_n(z) = g(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} z^j + \frac{\gamma^{n+1}}{1+|\beta|} z^{n+1}$$

On obtient alors le résultat suivant: $\mathfrak{H}\,\mathfrak{C}^2_1$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{C}^2_1$.

Jerzy Słupecki.

Pełny trójwartościowy rachunek zdań.

Przedstawił J. Łukasiewicz dn. 27 stycznia 1936 r

Der volle dreiwertige Aussagenkalkül.

Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz à la séance du 27 janvier 1936.

Ein System des Aussagenkalküls, das durch eine zwei- oder mehrwertige [1] Matrix definiert ist, nennt man ein volles System, wenn sich jede in ihm mögliche Aussagenfunktion von endlich vielen Argumenten mittels der Grundbegriffe dieses Systems definieren lässt.

Diese Eigenschaft besitzt nicht der dreiwertige Aussagenkalkül, dessen einzige Grundbegriffe die Implikation und die Negation sind und der durch nachstehende Matrix definiert ist:

	C	*0*	*1*	*2*	*N*
	0	*1*	*1*	*1*	*1*
*	*1*	*0*	*1*	*2*	*0*
	2	*2*	*1*	*1*	*2*

Mit Hilfe der Induktion ist es leicht nachzuweisen, dass man mittels des Funktors der Implikation „*C*“ und der Negation „*N*“ keine Funktion mit einem Argument definieren kann,

---

[1]) Den Leser, der über mehrwertige Logik Näheres erfahren möchte, verweisen wir auf folgende Arbeiten: J. Łukasiewicz und A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. XXIII. 1930. Classe III. — J. Łukasiewicz. *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.* Ebenda.

die für die Werte *0* oder *1* ihres Arguments den Wert *2* annähme. Insbesondere ist es unmöglich, in diesem System eine Funktion zu definieren, die für jeden Wert ihres Arguments den Wert *2* annähme.

Diese Funktion, die nach Herrn Prof. Dr. J. Łukasiewicz als das „tertium" bezeichnet wird und symbolisch durch Tp dargestellt ist, ermöglicht es, mit Hilfe der Implikation und der Negation jede Funktion des dreiwertigen Aussagenkalküls mit endlich vielen Argumenten zu definieren.

Das System, das durch die Matrix

I.

C	0	1	2	N	T
0	1	1	1	1	2
1	0	1	2	0	2
2	2	1	1	2	2

definiert ist, ist ein volles System der dreiwertigen Logik.

Die Axiomatik dieses Systems erhält man, indem man zu den vier Axiomen des dreiwertigen Aussagenkalküls [2]), dessen einzige Grundbegriffe die Implikation und die Negation sind, zwei neue den Grundbegriff T enthaltende Axiome hinzufügt:

$$CTpNTp$$
$$CNTpTp$$

In diesen beiden Axiomen ist eine der prinzipiellen Intuitionen der dreiwertigen Logik enthalten: Aussagen vom Werte 2 sind ihrer Negation äquivalent.

Der volle dreiwertige Aussagenkalkül ist ein vollständiges System in dem Sinne, dass jede durch die Symbole C, N, T und durch Aussagenvariable dargestellte Aussage entweder

---

[2]) Diese Axiome lauten:

1. $CqCpq$
2. $CCpqCCqrCpr$
3. $CCCpNppp$
4. $CCNqNpCpq$

Siehe: M. Wajsberg. *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań.* Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIV. 1931. Classe III.

eine Konsequenz der Axiome dieser Logik ist oder nach Hinzufügung zu den Axiomen einen Widerspruch ergibt.

Es ist auch ersichtlich, dass das vorliegende System widerspruchsfrei ist, denn nicht jede sinnvolle Aussage des vollen dreiwertigen Aussagenkalküls genügt der Matrix I.

Nach der Matrizenmethode von Herrn Prof. Dr. J. Łukasiewicz kann auch leicht nachgewiesen werden, dass diese Axiome voneinander unabhängig sind.

Wir sehen also, dass der vorliegende Aussagenkalkül alle grundsätzlichen Eigenschaften besitzt, die wir in der zweiwertigen Logik, z. B. derjenigen, die die Implikation und die Negation zu Grundbegriffen hat, antreffen: es ist ein volles, vollständiges, widerspruchsfreies System, das eine unabhängige Axiomatik besitzt.

Hingegen ist der dreiwertige Aussagenkalkül, dessen einzige Grundbegriffe die Implikation und die Negation sind, kein volles System, wie schon oben bemerkt wurde; es ist auch kein vollständiges System in dem oben erwähnten Sinne.

Posiedzenie

z dnia 18 lutego 1936 r.

A. Łaszkiewicz.

Własności krystalograficzne aldehydu oksyhydrochinonowego.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 18 lutego 1936 r.

Sur la forme cristalline de l'aldehyde de l'oxyhydroquinone.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 18 février 1936.

Praca ukaże się w tomie XII Archiwum Mineralogicznego Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

A. Łaszkiewicz.

Własności krystalograficzne cynamoilo-acetonu.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 18 lutego 1936 r.

Sur la forme crystalline du cynnamoylacétone.

Mémoire présentè par M. St. J. Thugutt à la séance du 18 février 1936.

Praca ukaże się w tomie XII Archiwum Mineralogicznego Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

L. Sawicki.

Przekrój geologiczny nowego kolektora na Żoliborzu.

Przedstawił J. Lewiński dn. 18 lutego 1936.

Coupe géologique du nouveau collecteur à Żoliborz.

Mémoire présenté par M. J. Lewiński à la séance du 18 février 1936.

Posiedzenie

z dnia 12 marca 1936 r.

St. J. Przyłęcki.

Wiązania między kwasami tłuszczowymi i aminokwasami oraz ich pochodnymi.

Komunikat zgłoszony dn. 12 marca 1936 r.

Les sels des acides gras avec les acides aminés.

Mémoire présenté à la séance du 12 mars 1936.

I. Z kwasem octowym, propjonowym i masłowym otrzymano dwa typy połączeń.

1. W 95—98% kwasach zawierających 2—5% wody otrzymano sole o typie:

$$CH_3\,(CH_2)_n\,COO^- \;\; {}^+NH_3\,\begin{array}{l} \;\;\diagup R \\ C — COOH \\ \;\;\diagdown H \end{array}$$

Katjonowy charakter aminokwasu powstaje z bliźniaczej formy dzięki 1-o dużej ilości grup zdysocjowanych COO kw. tłuszczowych i 2-o obecności H_2O przenoszącej w formie oksonjum protonu według wzoru

$$R — \begin{array}{l} \;\;\diagup COO \\ C — H \\ \;\;\diagdown NH_3^+ \end{array} + H_3O \;\rightarrow\; R — \begin{array}{l} \;\;\diagup COOH \\ C — H \\ \;\;\diagdown NH_3^+ \end{array} + H_2O$$

Sole szeregu aminokwasów jak glikokolu, alaniny, leucyny asparaginy ulegają rozpadowi w eterze. Kwasy asparaginowy i glutaminowy soli wogóle nie daje.

Stosunek kwas tłuszczowy: aminokwas w solach glikokolu, alaniny, leucyny jest jak 1 : 1.

W miarę wydłużenia łańcucha *R.* w aminokwasie osad otrzymany po zadaniu eterem staje się coraz bardziej kłaczkowaty.

Osad z argininą, histydyną i lizyną jest pięknie krystaliczny.

II. Z bezwodnymi kwasami $C_2 — C_{18}$ nasyconymi wzgl. nienasyconymi nie wszystkie aminokwasy dają połączenie. Połączenia otrzymano wyłącznie z aminokwasami zasadowymi lizyną, argininą i histydyną i tylko wówczas, gdy znajdują się one bądź w postaci wolnych zasad względnie węglanów.

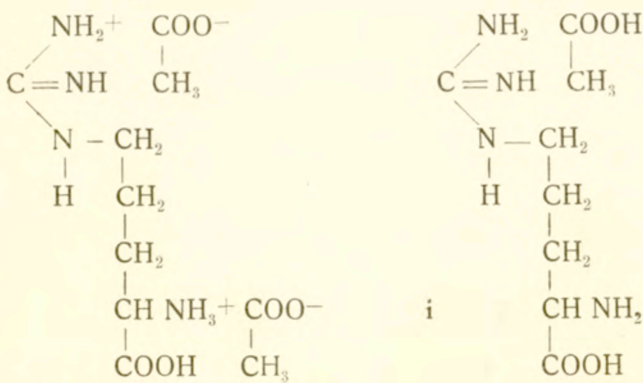
Na ogół im niższy kwas tym rozpuszczalność pozostałych połączeń w eterze i benzenie jest mniejsza. Połączenie np. kwasu olejowego i argininy daje w eterze i benzenie zawiesiny bardzo trwałe. Pod ultramikroskopem powstają submikrony o kształtach elipsoidalnych. Zawiesina w benzenie i toluenie daje piękne zjawisko T y n d a l l a. Połączenie z kwasem olejowym daje wybitną fluorescencję. W 100 cm^3 benzenu można mieć zawieszone do 1 gr. guanidyny wzgl. argininy.

Stosunek kwasu do aminokwasu = 1 : 1. Podobne połączenia otrzymano z kwasami tłuszczowemi C_2, C_3, C_4, C_7 i C_9 oraz kwasem palmitynowym i olejowym.

Jako aminokwasy zbadano argininę, lizynę, histydynę i kreatyninę. Kreatyna połączeń nie daje.

Reakcja przebiega między niezdysocjowanymi grupami COOH i NH_2 wzgl. NH. Fakt że cząsteczka argininy wiąże 1 lub 2 cz. kwasu świadczy że połączenie zachodzi według schematów.

I. II.



z kwasem octowym
w obecności wody

Stanisław Józef Thugutt.

O rozpuszczalności barytu w wodzie przekroplonej.

Komunikat przedstawiony dn. 12 marca 1936 r.

STRESZCZENIE

Baryt należy do minerałów bardzo rozpowszechnionych w przyrodzie. Spotykamy go w charakterze minerału płonnego na tle żył kruszcowych, w postaci lepiszcza w piaskach pustynnych, w postaci wkładek i nacieków w pokładach węglowych, bywa też składnikiem konkrecyj i buł manganowych, zalegających dno oceanów. Znane są również pseudomorfozy barytu po różnych minerałach i minerałów tych po barycie. Toteż nie wątpiono, że baryt jest minerałem wodnego pochodzenia, nie wiedziano tylko, w jakiej postaci odbywa się jego wędrówka. Badano więc warunki jego rozpuszczalności bądź w wodzie zaprawionej solami (J. Lemberg, G. B. Trener),, bądź czystej. Tu szczególne zasługi położyli: Fresenius, F. Kohlrausch i F. Rose, Hulett, Bolarew. Badacze ci sądzili, że roztwór barytu w wodzie jest roztworem rzeczywistym, a przewodnictwo prądu procesem elektrolitycznym. Zastanawiano się tylko nad tem, dla czego to przewodnictwo tak szybko słabnie.

Moje doświadczenia, wykonane na materjale czystym, miałko roztartym, pochodzącym z Oberkainsbach w Hessji, wykazały, że baryt wistocie do wodnego przechodzi roztworu, lecz że roztwór ten nie jest roztworem rzeczywistym lecz koloidalnym. W temperaturze 200° w autoklawie osiągnięto stężenie niewielkie. 100 cm^3 cieczy pozostawiło po odparowaniu na łaźni wodnej 0.00216 g osadu. Ten niski stopień rozpuszczalności tłomaczy się względnie dużym ciężarem właściwym barytu. Pomiędzy ciężarem badanych przezemnie minerałów (np. kwarcu, barytu i kasyterytu) a ich rozpuszczalnością koloidalną w wodzie zachodzi mianowicie stosunek odwrotnie proporcjonalny. Ciecze te przepuszczają prąd, lecz nie jest to przewodnictwo elektrolityczne lecz kataforeza. Pomiędzy elektrodami wędrują nie jony lecz całe cząsteczki. Duży ciężar właściwy siarczanu barowego powoduje szybkie osiadanie cząsteczek jego na dnie naczynia.

Stąd zmniejszanie się przewodnictwa elektrycznego, tak niepokojące moich poprzedników.

Na istnienie koloidalnego barytu w przyrodzie wskazuje również jego barwa jednolita, niknąca pod wpływem promieni termicznych, a pojawiająca się ponownie podczas naświetlania promieniami radowemi.

Praźródłem barytu są skały pochodzenia ogniowego, zawierające skaleń barowy, zwany celzjanem.

W zakończeniu umieszczono wykaz ważniejszych stanowisk szpatu ciężkiego w Polsce.

St. J. Thugutt.

Sur la solubilité de la baritine dans l'eau distillée.

Note présentée à la séance du 12 mars 1936.

RÉSUMÉ

La barytine paraît dans la nature en caractère du minéral stérile accompagnant dans les gisements métallifères, les minerais de plomb, argent et cobalt, elle constitue le ciment des sables de certains déserts, elle se rencontre parmi les couches houilleuses ou bien en forme des concretions et des bulles manganifères tapissant le fond des mers. On connaît les épigénies de la barytine d'après plusieurs minéraux et celles de ces minéraux d'après la barytine. On ne doutait pas qu'elle soit déposée par action aqueuse, mais il manquait d'indication comment ce pérégrinage s'est accompli dans la nature. Pour cette raison on se mit à étudier la solubilité de la barytine dans l'eau aprêtée par divers sels (J. Lemberg, G. B. Trener) et dans l'eau pure. A cet égard nous sommes obligés surtout à Fresenius, F. Kohlrausch et F. Rose, Hulett, Bolarew. Selon eux la dissolution aqueuse de la barytine se présente comme une dissolution véritable, elle conduit le courant électrique, mais cette conductibilité s'abaisse spontanement d'une manière incompréhensible, évoquant des réflexions sérieuses.

Pour mes propres expériences je me suis servi d'une barytine nette, provenant d'Oberkainsbach en Hessen. Mise en poudre très tenue et chauffée à 200° en vase clos avec l'eau distillée, elle donna une dissolution de nature colloïdale contenant

0.00126% de la phase solide. La faible concentration du liquide est causée par la haute pésanteur de la barytine. Entre le poids spécifique de certains minéraux et leur solubilité colloïdale dans l'eau il existe comme j'ai pu me convaincre une proportionalité inverse. Puis les dissolutions en question laissent passer le courant, mais ce n'est pas une conductibilité électrolytique mais kataphorétique. La haute pésanteur de la barytine colloïdale accuse son sédimentation. De là la diminution spontanée de la conductibilité électrique, qui frappait tant mes prédécesseurs.

On a encore une indication de plus prouvant l'existence de la barytine colloïdale dans la nature. C'est sa teinte homogène, qui disparaît sous l'influence de rayons thermiques et qu'on regagne faisant agir les rayons de radium (St. J. Thugutt. Revue scientifique (*61* (1923) 100; Archive de Min. 11 (1935) 9).

Quant à la source primitive de la barytine, il faut la chercher dans les roches ignées. C'est là qu'on trouve l'alumobisilicate de barium nommé celsian.

Stanisław Józef Thugutt.

O zachowaniu się pewnych koloidów mieszanych w temperaturze podniesionej.

Komunikat przedstawiony dn. 12 marca 1936 r.

STRESZCZENIE

Ogrzewając z wodą w autoklawie w temperaturze 200° i pod odpowiedniem ciśnieniem dwa dokładnie sproszkowane osobniki chemiczne, mające ten sam ładunek elektryczny, jak np. elektrododatni kalcyt z elektrododatnim aragonitem lub elektroujemny kasyteryt z elektroujemnym anatazem, otrzymujemy roztwór koloidalny mieszany, z którego po odparowaniu roczynnika wydzielają się zpowrotem obie fazy stałe w stanie niezmienionym, nienaruszonym (St. Thugutt. Arch. Min. *4* (1928) 143 i *8* (1932) 131). Żeby się przekonać, jak się zachowają dwa osobniki chemiczne o przeciwnym ładunku elektrycznym, ogrzewałem w warunkach analogicznych koloidalny roztwór kalcytu z koloidalnym roztworem chalcedonu. Lecz i tu wzajemnego oddziaływania obu faz stałych na siebie nie zauważyłem. Krzemianu wapniowego nie było nawet śladu. Po od-

parowaniu cieczy wydzielił się chalcedon w postaci galaretowatej, natomiast zamiast kalcytu wykrystalizował się aragonit. Wynik nieoczekiwany i sprzeczny z drugiem prawem termodynamiki, które orzeka, że nigdy faza trwała nie może przeistoczyć się w fazę mniej trwałą, łatwiej niż tamta rozpuszczalną. Wprawdzie G. Tammann (Krystallisieren und Schmelzen. Leipzig (1903) 112) i Foote (Z. f. phys. Chem. *33* (1900) 314) przewidywali możliwość takiej przemiany, mianowicie przy udziale wysokiego ciśnienia i w obecności katalizatora ($CaCl_2$ lub Na_2CO_3), to jednak eksperyment wykonany w tym celu przez J. Johnstona i L. H. Adamsa (Z. f. phys.-Chem. *80* (1913) 314) dał wynik ujemny i ciśnienie 15000 atmosfer nie wystarczyło jeszcze, aby z heksagonalnego kalcytu rombowy wytworzyć aragonit. W mojem doświadczeniu ciśnienie nie przekraczało 20 atmosfer, zato mógł działać koloidalny chalcedon. Powtórzyłem więc eksperyment bez udziału chalcedonu, lecz i tu po odparowaniu koloidalnego roztworu kalcytowego wydzielił się aragonit. Przyczyną takiego wyniku mógł być już tylko wchłonięty z powietrza dwutlenek węglowy. Dlatego powtórzyłem doświadczenie poraz trzeci, zalewając miał kalcytowy, tuż przed zamknięciem autoklawu, wodą starannie wygotowaną i wolną od dwutlenku węglowego. Tym razem roztwór koloidalny kalcytu wydzielił po odparowaniu go na łaźni wodnej wyłącznie romboedry kalcytowe, zgodnie z drugiem prawem termodynamiki. W poprzedniem doświadczeniu obecność dwutlenku węglowego sprzyjała mianowicie wytworzeniu się roztworu rzeczywistego, złożonego z kwaśnego węglanu wapniowego. Ten zaś powyżej temperatury granicznej 29° krystalizuje się, jak wiadomo, w postaci aragonitowej.

St. J. Thugutt.

Sur la conduite de certains colloïdes mixtes chauffés environ à 200°.

Note présentée à la séance du 12 mars 1936.

RÉSUMÉ

Chauffant avec l'eau environ à 200° dans un vase clos deux substances chimiques réduites en poudre très ténue et

ayant la même charge électrique, comme par exemple la calcite et l'aragonite électropositive ou bien la cassitérite et l'anatase électronégative, on obtient une dissolution colloïdale mixte. Après avoir évaporé le dissolvant on regagne les deux phases solides non changées, inalterées (St. J. Thugutt. Arch. Min. *4* (1928) 148; *8* (1932) 122). Pour me convaincre comment vont se conduire deux individus chimiques doués d'une charge électrique inverse, j'ai chauffé dans des conditions pareilles deux dissolutions colloïdales — une de calcite de Kadzielnia près de Kielce et l'autre de calcédoine de Janowa Dolina, mais sans aucun succès. Contre l'attente le silicate de chaux ne s'est pas formé. Le liquide après son évaporation déposa un résidu gélatineux de calcédoine et au lieu de la calcite cristallisa l'aragonite. Résultat contradictoire à la seconde loi de la thermodynamique, qui dit: une phase solide ne peut en aucune façon être transformée en une phase moins stable et plus soluble. Néanmoins G. Tammann (Krystallisieren und Schmelzen. Leipzig (1903) 112) et Foote (Z. f. phys. Chem. *33* (1900) 314) prévoyaient une pareille possibilité en cas de haute pression et en présence d'un kataliseur (soit $CaCl_2$, soit Na_2CO_3). L'essai entrepris dans ce but par J. Johnston et L. H. Adams (Z. f. phys. Chem. *80* (1913) 314) resta sans résultat. Même une pression de 15000 atmosphères n'était pas suffisante pour transformer la calcite hexagonale en aragonite rhombique. La pression dans mon expérience ne surpassait pas 20 atm., mais on a pu penser que la calcédoine pourrait donc exercer une certaine influence. Après avoir éliminé la calcédoine je repris pour la seconde fois mon essai. Le résultat était le même. Au lieu de la calcite cristallisa de nouveau l'aragonite. Alors l'idée m'est venu, que c'est peut être l'acide carbonique qui produit cette complication. Je repris pour la troisième fois mon expérience, avec l'eau préalablement bien boullie et exempte de CO_2. Cette fois le liquide colloïdale déposa après son évaporation seulement des rhomboèdres primitifs de la calcite. La présence de CO_2 accusa ci-devant la formation du carbonate calcique acide. Celui-ci, après avoir dépassé la limite do 29°, devait donc cristalliser sous forme d'aragonite.

Ludwik Szperl i Aleksandra Chmielnicka.

O działaniu siarki na kumarynę.

Przedstawił L. Szperl dn. 12 marca 1936 r.

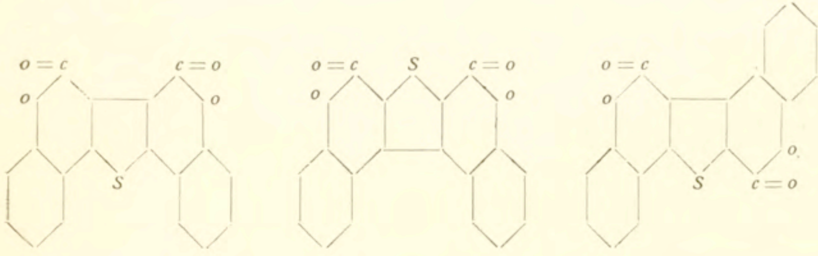
Sur l'action du soufre sur la coumarine.

Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 12 mars 1936.

STRESZCZENIE

Przez ogrzewanie do temp. 220 — 230° w ciągu 48 godzin kumaryny z siarką otrzymaliśmy, nie licząc wydzielonego siarkowodoru, brunatną twardą masę. Oczyściliśmy ją zapomocą ekstrakcji ksylenem, a następnie krystalizacyj z chloroformu. Produkt czysty miał wygląd białych lśniących blaszek krystalicznych. Zawierały one na cząsteczkę substancji cząsteczkę krystalizacyjnego chloroformu. Po jego usunięciu — biały matowy proszek topniał w temp. 331 — 331,5°. Jest on trudno rozpuszczalny w pospolicie używanych rozczynnikach, dobrze natomiast rozpuszcza się na gorąco w pirydynie, glicerynie, bromku etylenu. Na podstawie wyników analiz i pomiaru ciężaru cząsteczkowego związkowi temu przypada wzór $C_{18}H_8O_4S$.

Aczkolwiek ściślejszych badań doświadczalnych nad budową tego związku nie przeprowadzaliśmy, to jednak jesteśmy przekonani na podstawie całości zaobserwowanych zjawisk, że otrzymana substancja jest pochodną tiofenu, powstałą z odpowiednio odwodornionych dwóch reszt kumaryny, i że jej budowa odpowiada jednemu z trzech niżej podanych wzorów izomerycznych.



Praca in extenso będzie drukowana w Rocznikach Chemji.

Marja Kołaczkowska.

O komórce elementarnej kwarcu i chalcedonu.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 12 marca 1936 r.

STRESZCZENIE

Minerały o jednakowym składzie chemicznym, lecz różniące się czy to cechami fizycznemi, czy też własnościami chemicznemi, mogą krystalizować się bądź w tym samym, bądź w różnych układach, bądź też tworzyć odmiany bezpostaciowe, zależnie od budowy wewnętrznej.

Metody rentgenogramometryczne umożliwiają w wielu razach rozwikłanie tej budowy i wyznaczenie stałych sieciowych. Na tej drodze można dokładnie wyróżnić heksagonalny kwarc od rombowego trydymitu i regularnego krystobalitu. Natomiast różnice pomiędzy chalcedonem, kwarcem pochodzenia wodnego i kwarcem pochodzenia ogniowego nie są tak wyraźne. Zdjęcia rentgenowskie chalcedonu z Janowej Doliny w rozmaitym stanie rozdrobnienia, jakteż wydzielonego z roztworu koloidalnego (St. J. Thugutt, Arch. Miner. *12* (1936) 64) niczem się między sobą nie różniły. To dowodzi, że zarówno rozcieranie, jak i stan koloidalny nie wpływają na strukturę wewnętrzną chalcedonu.

Pozatem wykonano rentgenogramy kwarcu hydrogenicznego z Delfinatu i z nieskazitelnie przezroczystego otoczaka niewiadomego pochodzenia, wreszcie kwarcu pirogenicznego z granitu tatrzańskiego. Zdjęcia wykonano w warunkach identycznych tak co do czasu, jak i co do woltażu i amperażu, pozatem w tej samej kamerze. Były one we wszystkich przypadkach jednakowe zarówno pod względem kolejności, wzajemnego rozmieszczenia jak też i względnego natężenia prążków. Różnica zachodzi tylko w odległościach pomiędzy odpowiedniemi prążkami. Prążki chalcedonu są najbardziej rozsunięte, kwarcu delfinackiego mniej, a najmniej kwarcu tatrzańskiego.

Stąd wniosek, że wielkość komórki elementarnej chalcedonu musi być najmniejsza, kwarcu zaś tatrzańskiego największa. W ujęciu liczbowem wielkości komórek elementarnych chalcedonu, kwarcu delfinackiego i kwarcu tatrzańskiego wynoszą: 102,20; 112,28; i 115,93 Å.[3].

Marie Kołaczkowska.

La cellule fondamentale du quartz et de la calcédoine.

Note présentée par M. St. J. Thugutt à la séance du 12 mars 1936.

RÉSUMÉ

L'étude des radiogrammes de la caldédoine, du quartz d'onigine ignée et aqueuse (éffectués par la méthode de Debye-Scherrer) ne manifesta aucune différence dans l'arrangement des atomes seulement dans les dimensions de la cellule fondamentale des ces minéraux. Notamment la plus petite cellule de la calcédoine donna 102,20 A^3, celle du quartz dauphinois hydrothermal 112,28 et enfin celle du quartz pyrogénique 115,93.

V. W. Adkisson.

Skończone grupy związane z pewnemi krzywemi cyklicznemi.

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu w dniu 12 marca 1936 r.

Praca stanowi dalszy ciąg Tezy drukowanej w Sprawozdaniach t. XXIII (1930). Autor bada grupę homeomorfizmów dla krzywych cyklicznych rozważanych w Tezie.

V. W. Adkisson.

Finite groups associated with certain cyclic curves[1]).

Mémoire présenté par M. C. Kuratowski dans la séance du 12 mars 1936.

In my thesis published in 1930 [2]) all the cyclicly connected continuous curves having only a finite number of simple closed

---

[1]) Presented to the American Mathematical Society Jan. 1, 1936.

[2]) *Cyclicly connected continuous curves whose complementary domain*

curves and such that the complementary domain boundaries are homeomorphic, including branch points, were determined. If such a curve lies on the sphere there exists a finite group of continuous (1 — 1) transformations of the map into itself.

The transformations considered here are (1—1) continuous, and such that sense is proserved on the complementary domain boundaries of the curve [1]. Any transformation that leaves invariant each of the branch points of the curve is considered as the identity operator of the group. It is the purpose of this paper to determine the group of such transformations associated with each of the above curves (or maps). The groups obtained are the same as the groups of rotations of the regular polyhedra and the dihedral groups.

Since the transformations can be extended to the sphere [2], and sense is preserved on the domain boundaries there will exist one invariant point on the sphere [3]. Then making use of the fact that the map goes into itself under the transformation it is easily shown there will exist a second invariant point of the sphere. These two invariant points are somewhat analagous to the ends of an axis of rotation of the regular solids. Now considering the three cases (1) one of the invariant points lies in a complementary domain of the curve (2) on an arc of the curve (3) or on a branch point, we are able to determine the transformations of the curve into itself, and consequently the corresponding group.

We list below the group associated with each curve and the invariant subsets of the curve.

---

boundaries are homeomorphic, preserving branch points, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie XXIII (1930) Classe III.

[1]) If A, B and C are three distinct points on a domain boundary J, and T(A), T(B), T(C) have the same sense on T(J) with respect to the complementary domain bounded by T(J) as the sense ABC on J with respect to the complementary domain bounded by J, we shall say that T preserves sense on J.

[2]) Thesis, theorem 3, loc. cit. p. 5.

[3]) B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie I,* (1923), p. 193.

(1) $\alpha = \beta = \gamma = 3$[1]. This curve obviously has the group of the regular tetrahedron.

(3.1) $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 4$, has the dihedral group of order 6.

(3.2) $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 6$, has the group of the regular tetrahedron. There are two proper subsets of this curve invariant under each transformation. One is homeomorphic with the edges and vertices of the regular tetrahedron, the other with the cube.

(3.3) $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 8$, has the octahedral group. The two invariant subsets are homeomorphic with the regular octahedron and the curve in (11.1) where $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 4$.

(3.4) $\alpha = 3$. $\beta = \gamma = 10$, has the icosahedral group. One invariant subset homeomorphic with the icosahedron, the other with the curve in (11.2).

(4) $\alpha = \beta = \gamma = 4$, has the octahedral group.

(5) $\alpha = \beta = 4$, $\gamma > 4$, has the dihedral group of order $2\,\gamma$.

(6.1) $\alpha = 4$, $\beta = \gamma = 6$, has the octahedral group. One invariant subset homeomorphic with the cube, the other with the curve in (11.1).

(7.1) $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 8$, has the octahedral group. Three invariant subsets, one homeomorphic with the octahedron, one with the cube, and one with (11.1).

(7.2) $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 10$. has the icosahedral group. Three invariant subsets, one homeomorphic with the icosahedron, one with the dodecahedron, and one with the curve (11.2).

(8.1) $\alpha = \beta = 6$, $\gamma = 5$, has the icosahedral group. One invariant subset homeomorphic with the dodecahedron, and one with (11.2).

(9) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 3$, has the octahedral group.

(10) $\alpha = \beta = \gamma = 3$, $\delta > 3$, has the dihedral group of order $2\,\delta$.

(11.1) $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 4$. has the octahedral group.

(11.2) $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 5$, the icosahedral group.

(12) $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = \delta = 4$. This curve is not unique[2]).

---

[1]) The numbering here is the same as that for the corresponding curves in the thesis, loc. cit. The Greek letters represent the orders of the branch points on the domain boundaries.

[2]) See thesis, case 12′, loc. cit. p. 27.

There are two curves of this type. One (12a) has the octahedral group, the other (12b) has the dihedral group of order 8. The curve (12a) has two invariant subsets, one homeomorphic with the octahedron, the other the cube. The curve (12b) has two invariant subsets, one homeomorphic with the curve 10 ($\delta = 4$), and the other a disconnected subset consisting of two distinct connected sets.

(14) $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 4$, $\delta = 5$, has the icosahedral group. One invariant subset homeomorphic with the icosahedron, the other with the dodecahedron.

(16) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 3$, the icosahedral group.

(17.1) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 3$, $\varepsilon = 4$, has the octahedral group. One invariant subset homeomorphic with the cube, and one disconnected invariant subset consisting of six connected sets that are permuted among themselves by operations of the group.

(17.2) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 3$, $\varepsilon = 5$, has the icosahedral group. One invariant subset homeomorphic with the dodecahedron, and one disconnected subset consisting of 12 connected subsets that are permuted among themselves by operations of the group.

University of Arkansas
Fayetteville, Arkansas.

A. Liapounoff.

O pewnych własnościach rzeszot prostolinjowych i zbiorów „C".

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu w dniu 12 marca 1936 r.

Autor rozważa zbiory, dające się rozłożyć na ciąg pozaskończony zbiorów borelowskich, i ich zachowanie się względem operacji rzeszota. W szczególności badane są rozkłady zbiorów „C".

Alexis Liapounoff.

Sur quelques propriétés des cribles rectilignes et des ensembles „C“.

Mémoire présenté par M. C. Kuratowski dans la séance du 12 mars 1936.

Il est bien connu que tout ensemble „C“ [1]) peut être considéré comme une somme transfinie d'ensembles mesurables B sans points communs deux à deux. D'ailleurs cette décomposition exige la connaissance d'un ensemble transfini de cribles mesurables B, indépendants les uns des autres. C'est pourquoi la décomposition en question ne peut être considérée comme effective. M. Lusin m'a posé le problème de décomposer effectivement tout ensemble „C“ en une somme transfinie d'ensembles disjoints mesurable B. C'est lui, également qui m'a guidé dans mes recherches et je profite de l'occasion pour lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Pour simplifier le langage nous allons introduire la définition suivante:

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble qui peut être décomposé d'une manière effective et d'ailleurs quelconque en une suite transfinie d'ensembles mesurables B

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots\ldots / \Omega$$

tous les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ étant sans points communs deux à deux. Nous dirons alors que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un ensemble *décomposable*, et que les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ sont les *constituantes* de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Dans le cas où le complémentaire de $\mathcal{E}$ est encore décomposable, nous dirons que $\mathcal{E}$ est un ensemble *bidécomposable*. Nous appelerons les constituantes de $C\mathcal{E}$ — constituantes extérieures de $\mathcal{E}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Tout ensemble E situé sur l'axe OX et criblé au moyen d'un ensemble décomposable $\mathcal{E}$ de points du*

[1]) Cf. M. N. Lusin „Leçons sur les ensembles analytiques“ Paris 1930 p. 289, ou E. Selivanowski Rec. Math. de Moscou t. XXXV p. p. 379 — 413 (en russe).

plan OXY, qui est coupé par chaque parallèle à l'axe OY en un ensemble dénombrable de points au plus est encore un ensemble décomposable.

Démonstration: Posons:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_\alpha + \dots\dots / \Omega$$

tous les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ étant mesurables B, et n'ayant pas de points communs deux à deux.

Désignons par R_{x_0} l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ situé sur la droite $x = x_0$. Puisque R_{x_0} est dénombrable, il existe un nombre ν tel que R_{x_0} est contenu dans l'ensemble

$$\Xi_\nu = \sum_{\nu' < \nu} \mathcal{E}_{\nu'}$$

Dans le cas où x_0 appartient à E, il appartient encore à l'ensemble analytique E^ν, criblé au moyen de l'ensemble Ξ_ν. Considérons maintenant un nombre transfini α et une représentation quelconque de ce nombre de la forme:

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{1}$$

Il existe un ensemble dénombrable au plus de telles représentations.

Formons maintenant la somme

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{\mu<\gamma} E^\beta_\mu = Q_\alpha$$

E^β_γ étant la constituante de l'ensemble E^β d'indice γ, définie au moyen du crible Ξ_β, et la première somme étant étendue à toutes les représentations possibles du nombre α de la forme (1).

Il suit de ce qui précède que tous les ensembles Q_α sont mesurables B et que tout point x_0 faisant partie de l'ensemble E est contenu dans l'un au moins des ensembles Q_α.

Posons:

$$E_\alpha = Q_\alpha - \sum_{\alpha' < \alpha} Q_{\alpha'} \tag{2}$$

Il est évident que la formule

$$E = E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha + \ldots\ldots /\Omega$$

prouve que E est décomposable.

C. Q. F. D.

R e m a r q u e: On voit que les ensembles criblés au moyen des complémentaires analytiques ayant un ensemble dénombrable de points sur chaque parallèle à l'axe OY satisfont aux conditions du théorème précédent. Afin de résoudre le problème concernant les ensembles „C" nous démontrerons un théorème analogue pour les ensembles bidécomposables.

Désignons par T l'ensemble de tous les points, situés sur toutes les droites $y = r$, r étant un nombre rationnel.

Avec cette notation nous avons le théorème suivant:

T h é o r è m e II: *Tout ensemble E de points de l'axe OX criblé au moyen d'un ensemble bidécomposable $\mathcal{E}$ contenu dans l'ensemble T, est encore bidécomposable.*

D é m o n s t r a t i o n: Tout d'abord il suit du théorème I que E est décomposable. Il suffit donc de démontrer que CE l'est aussi.

Posons:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots\ldots /\Omega$$

$$T \times C\mathcal{E} = \mathcal{E}^e_0 + \mathcal{E}^e_1 + \mathcal{E}^e_2 + \cdots + \mathcal{E}^e_\alpha + \ldots\ldots /\Omega$$

les ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}^e_\alpha$ étant tous mesurables B et n'empiétant pas les uns sur les autres.

L'indice „e„ de l'ensemble $\mathcal{E}^e_\alpha$ doit rappeler le fait, que cet ensemble est une constituante extérieure de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Nous conservons d'ailleurs toutes les notations de la démonstration du théorème I.

Il est évident que dans le cas où le point x_0 appartient à CE il existe un nombre ν tel que les ensembles R_{x_0} et $R^e_{x_0}$ sont respectivement enfermés dans les ensembles Ξ_ν et Ξ^e_0, où l'on entend par $R^e_{x_0}$ l'ensemble des points de $T . C\mathcal{E}$ situés sur la droite $x = x_0$ et par Ξ^e_ν la somme des ν premières constituantes de $T . C\mathcal{E}$

$$\Xi^e = \sum_{\nu'<\nu} \mathcal{E}^e_{\nu'}$$

Désignons par Λ_ν la projection sur l'axe OX de l'ensemble

$$T \times C\left(\Xi_\nu + \Xi^e_\nu\right)$$

Il est évident ;ue tous les Λ_ν sont mesurables B.

Soit maintenant α un nombre transfini, $\alpha = \beta + \gamma$. Soit $E^{\nu e}_\mu$ la constituante extérieure d'indice μ de l'ensemble E^ν.

Formons l'ensemble:

$$Q^e_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_{\mu<\gamma} E^{\beta e}_\mu \times C\Lambda_\beta$$

On voit immédiatement que tous les ensembles Q^e_α sont mesurables B, qu'ils sont contenus dans l'ensemble CE et que tout point de cet ensemble fait partie de l'un au moins des ensembles Q^e_α.

Posons

$$E^e_\alpha = Q^e_\alpha - \sum_{\alpha'<\alpha} Q^e_{\alpha'}$$

La formule:

$$CE = E^e_0 + E^e_1 + \ldots + E^e_\alpha + \ldots\ldots / \Omega$$

prouve que E est bidécomposable.

R e m a r q u e: Il est évident que les ensembles „C" satisfont à toutes les conditions de ce théorème.

Pour le cas d'un ensemble analytique ou bien d'un complémentaire analytique défini au moyen d'un crible rectiligne $\mathcal{E}$ mesurable B, il suffit de poser $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ et $T.C\mathcal{E} = \mathcal{E}^e_0$ pour tirer des formules (2) et (3) les constituantes réelles de cet ensemble.

Nous dirons que les développements de E et de CE que nous fournissent les formules (2) et (3) sont les développements derivés des développements des ensembles $\mathcal{E}$ et $T.C\mathcal{E}$.

Nous allons maintenant étudier quelques relations entre les développements primitifs et les développements derivés.

D é f i n i t i o n: Le développement d'un ensemble est dit *régulier par rapport à la mesure (catégorie)* s'il existe un nombre transfini $\alpha < \Omega$, tel que la somme des constituantes d'indices $\geq \alpha$ est un ensemble de mesure O (de première catégorie).

Il est bien connu, que les développements des ensembles analytiques et de leurs complémentaires en constituantes réelles sont réguliers par rapport à la mesure, ainsi que par rapport à la catégorie.

Nous allons montrer, que les développements des ensembles „C" en constituantes mesurables B que nous avons considerés dans les théorèmes I et II jouissent des mêmes propriétés.

T h é o r è m e III:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_\alpha + \dots\dots / \Omega \qquad (*)$$

etant un développement régulier par rapport à la mesure d'un crible rectiligne $\mathcal{E}$, le développement $E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_\alpha + \dots / \Omega$ derivé de (*) de l'ensemble E criblé au moyen de $\mathcal{E}$ jouit de la même propriété.

D é m o n s t r a t i o n: Soit $\mathcal{E}_{r_n}$ l'élément du crible $\mathcal{E}$, situé sur la droite $y = r_n$. Soit

$$\mathcal{E}_{r_n} = \mathcal{E}_0^{r_n} + \mathcal{E}_1^{r_n} + \dots + \mathcal{E}_\alpha^{r_n} + \dots\dots / \Omega$$

un développement de $\mathcal{E}_{r_n}$, régulier par rapport à la mesure. Il existe alors un nombre γ tel que toutes les sommes

$$\mathcal{E}_{\gamma+1}^{r_n} + \mathcal{E}_{\gamma+2}^{r_n} + \dots + \mathcal{E}_{\gamma+\alpha}^{r_n} + \dots\dots / \Omega$$

sont de mesure nulle, quel que soit le nombre r_n.

Il est évident que l'ensemble E' criblé au moyen du crible $\mathcal{E}'$ dont les éléments $\mathcal{E}'_{r_n}$ sont de la forme

$$\mathcal{E}'_{r_n} = \mathcal{E}_0^{r_n} + \mathcal{E}_1^{r_n} + \dots + \mathcal{E}_\gamma^{r_n} \tag{4}$$

diffère de l'ensemble E, d'un ensemble de mesure nulle au plus. D'ailleurs l'ensemble E' est un ensemble analytique. Donc d'après un théorème de E. Selivanowski [1]), il existe un nombre β, tel que la somme des β premières constituantes de E' a une mesure égale à la mesure de l'ensemble E' lui même. En posant $\gamma + \beta = \alpha$ on voit que la somme des α premières constituantes de E possède une mesure précisément égale à la mesure de E.

C. Q. F. D.

Théorème IV: *Si dans les conditions du théorème III l'ensemble $\mathcal{E}$ est bidécomposable et le développement de $T.C\mathcal{E}$ est régulier par rapport à la mesure le développement de CE jouit de la même propriété.*

Démonstration:

Posons

$$\mathcal{E}_{r_n} = \mathcal{E}_0^{r_n} + \mathcal{E}_1^{r_n} + \ldots + \mathcal{E}_\alpha^{r_n} + \ldots\ldots / \Omega$$

$$C\mathcal{E}_{r_n} = \mathcal{E}_0^{er_n} + \mathcal{E}_1^{er_n} + \ldots + \mathcal{E}_\alpha^{er_n} + \ldots\ldots / \Omega$$

le complèmentaire $C\mathcal{E}_{r_n}$ étant pris par rapport à la droite $y = r_n$. Il existe alors un nombre γ tel que tous les ensembles

$$N_{r_n} = \mathcal{E}_{\gamma+1}^{r_n} + \mathcal{E}_{\gamma+2}^{r_n} + \ldots + \mathcal{E}_{\gamma+\alpha}^{r_n} + \ldots\ldots / \Omega$$

ainsi que les ensembles

$$N'_{r_n} = \mathcal{E}_{\gamma+1}^{er_n} + \mathcal{E}_{\gamma+2}^{er_n} + \ldots + \mathcal{E}_{\gamma+\alpha}^{er_n} + \ldots\ldots / \Omega$$

sont de mesure nulle, quel que soit le nombre r_n soit Λ la somme de toutes les projections des ensembles N_{r_n} et N'_{r_n} sur l'axe OX. Il est évident que $C\Lambda$ est un ensemble mesurable B de mesure égale à 1.

---

[1]) Fund. Math. t. XX p. p. 20 — 28.

D'autre part le complèmentaire de l'ensemble E' criblé au moyen du crible $\mathcal{E}'$ dont les éléments sont définis par la formule (4), diffère d'un ensemble de mesure nulle au plus de l'ensemble CE.

D'après un théorème de M. N. Lusin [1]) il existe un nombre β tel que la somme Π des β premières constituantes de E' possède une mésure égale à celle de E.

On voit que l'ensemble mesurable $B\Lambda \times \Pi$ possède une mesure égale à celle de CE, et que cet ensemble fait partie des α premières consituantes extérieures de E, où l'on suppose $\alpha = \beta + \gamma$

C. Q. F. D.

En répétant à peu près les mêmes raisonnements il est aisé de démontrer les théorèmes V et VI que l'on déduit des théorèmes III et IV en y remplaçant partout les mots „par rapport à la mesure" et „de mesure nulle" par les mots „par rapport à la catégorie" et „de première catégorie".

Il est évident que les ensembles „C" vérifient les conditions des théorèmes III — VI.

---

[1]) M. N. Lusin „Leçons..." p. p. 183 — 185