COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
XXIX Année 1936 Classe III Fascicule 7—9

# SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
# TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

## Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIX 1936 Zeszyt 7—9

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1937

Drukarnia i Litografia
JAN COTTY
Warszawa, Kapucyńska 7

## TREŚĆ ZESZYTU 7—9

Str

**J. Lewiński.** Z geologji okolic Kalisza . . . . . . . . . . . . . . 81

**W. Pożaryski.** Kreda okolic Uniejowa . . . . . . . . . . . . . . 86

**S. Piccard.** Uogólnienie pewnego twierdzenia p. Sierpińskiego z teorji stosunków . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

**S. Braun.** O uniformizacji zbiorów mierzalnych $B$ . . . . . . . . . 102

**A. D. Michal i E. W. Paxson.** O różniczce w przestrzeni linjowej abstrakcyjnej . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

**A. Polak.** Uwagi o ciągłych przekształceniach . . . . . . . . . . 121

**J. Ridder.** O całce Cesàro-Perrona . . . . . . . . . . . . . . . 126

**D. L. Webb.** Algebra n-wartościowej logiki . . . . . . . . . . . 153

**J. Gadomski.** T. V. Cassiopeiae . . . . . . . . . . . . . . . . . 169

## TABLE DES MATIÈRES

Page

**J. Lewiński.** Note sur la géologie des environs de Kalisz . . . . . . 81

**W. Pożaryski.** Le crétacé des environs d'Uniejów . . . . . . . . . 86

**S. Piccard.** Généralisation d'un théorème de M. Sierpiński de la théorie des relations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

**S. Braun.** Sur l'uniformisation des ensembles mesurables $B$. . . . . . 102

**A. D. Michal and E. W. Paxson.** The differential in abstract linear spaces with a topology . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

**A. Polak.** Einige Bemerkungen über stetige Abbildungen . . . . . . 121

**J. Ridder.** Cesàro-Perron Integration . . . . . . . . . . . . . 126

**D. L. Webb.** The algebra of n-valued logic. . . . . . . . . . . . 153

**J. Gadomski.** T. V. Cassiopeiae. . . . . . . . . . . . . . . . . 169

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

## Posiedzenie
z dnia 27 października 1936 r.

Jan Lewiński.

# Z geologji okolic Kalisza.

Komunikat zgłoszony dn. 27 października 1936 r

**Note sur la géologie des environs de Kalisz**

Présenté à la séance du 27 octobre 1936.

W Kaliszu i jego bezpośredniej okolicy wywiercono sporo otworów świdrowych, wszystkie jednak były wykonane w sposób niedbały, bez fachowego nadzoru; próbek nie zbierano wcale lub też w zupełnie przypadkowy sposób, skutkiem czego nawet rysy zasadnicze budowy geologicznej były wadliwie interpretowane, a bardzo interesujące szczegóły uchodziły uwadze.

Dokoła Kalisza rozpościera się wyżyna dyluwjalna, wznosząca się do 137 m n. p. m. w Szczypiornie, do 138,9 m w Skalmierzycach; grubość dyluwjum na wyżynie jest zmienna, do 31 m w Skalmierzycach, do 18,3 w Szczypiornie. W wyżynę tą prawie na 70 m (najgłębiej, bo do 64,3 m. n. p. m., w Gazowni miejskiej w Kaliszu) została wcięta pradolina Prosny, na której zboczach powłoka dyluwjum znika szybko, plioceńskie iły zaś zbliżają się do powierzchni (przedmieście Korczak, pliocen 114 m n. p. m. pod 2,8 m piaszczystych deluwjów).

Głęboko wcięta pradolina Prosny została do 110 m n. p. m. zasypana różnorodnemi piaskami, w których Prosna obecnie wymyła sobie niezbyt szeroką dolinę do 8 m głęboką (102 m n. p. m.), obrzeżoną tarasami ze starych piasków dolinowych. Pradolina wcina się głęboko w pstre iły plioceńskie, podścielające dyluwjum: powierzchnia pliocenu wznosi się w Skalmierzycach do 108,9 m n. p. m., w Szczypiornie do 118,7 m, na przedmieściu Korczak do 114 m, w pradolinie natomiast obniża się znacznie (idąc z zach. na wsch.): w Szpitalu Świętej Trójcy w nowem wierceniu pliocen osiąga 88 m n. p. m., w starem wierceniu tamże + 74 m, w Towarzystwie Wzajemnego Kredytu + 74 m, w Gazowni miejskiej + 64,3 m n. p. m. W najgłębszem więc miejscu zasypanie pradoliny piaskami wynosiło 46 m (110 m do 64,3 m n. p. m.).

Grubość pliocenu, znaczna na wyżynie (Skalmierzyce 63,9 m, Szczypiorno 68 m) maleje szybko w głęboko wymytej dolinie i wynosi: w Szpitalu Świętej Trójcy (nowe wiercenie) 56 m, stare wiercenie tamże 40,2 m, Wzajemny Kredyt 15,6 m, Gazownia wszystkiego 9,3 m. Pliocen jest wykształcony typowo, składa się z iłów plastycznych błękitnych, szarych, żółtych, rzadko plamistych, czasami z niegrubą wkładką mułku.

Dolna granica pliocenu wykazuje niewielkie wahania: Skalmierzyce 45 m, Szczypiorno—54,7 m. Wzajemny Kredyt—58,4 m, Gazownia — 55 m, wszystko nad poziomem morza. Wyjątek stanowią wiercenia w Szpitalu Świętej Trójcy, nowy bowiem otwór napotkał miocen dopiero na głębokości 32 m n. p. m., stary zaś aż na 27,8 m n. p. m.

Stosunkowo znaczne wahania wykazuje grubość miocenu: wyjątkowo wielka w Skalmierzycach, ponad 42,3 m, jest ona naogół znacznie mniejsza: Szczypiorno 18,3 m, Wzajemny Kredyt 24,4 m, Gazownia 18,5 m, wyjątkowo zaś niska jest w Szpitalu Świętej Trójcy, 10 i 8,8 m. Miocen w Skalmierzycach jest wyjątkowo gruby; przyczynę stanowi zapewne bardzo znaczne obniżenie powierzchni mezozoicznej, wypełnione następnie miocenem.

Skład utworów mioceńskich w okolicach Kalisza odbiega nieco od powszechnie rozprzestrzenionego typu i zasługuje na baczną uwagę w przyszłych wierceniach, które mogą dać dalsze interesujące szczegóły. W kilku mianowicie otworach osady mioceńskie mogą być podzielone na dwie części, górną piaszczystę z węglem brunatnym lub lignitem, i dolną gliniastą. W otworze w Gazowni miejskiej w Kaliszu tuż pod iłami pliocenu leży 1,7 m węgla brunatnego, niżej idzie 1,2 m piasku, znowu 1,1 lignitu, wreszcie 4,7 m grubego piasku; dolna serja składa się z 1,1 m gliny zielonej, podesłanej bliżej nieokreślonym utworem wapnistym ('Łupek wapienny' profilu), pod którym leży twarda szara glina (razem 8,7 m). W Towarzystwie Wzajemnego Kredytu górną serję stanowi: piasek 1,7 m, i żwir— 0,7 m; dolną reprezentuje glina biała, 1,4 m, i 'grzyb', rodzaj sypkiego marglu jeziorowego grubości 0,9 m. Najpotężniej wszakże rozwinięta jest serja gliniasta w Skalmierzycach (p. J. Behr, Ergebnisse d. Bohrungen, Jb. G. L.-A. T. XXVIII); pod piaskiem średnioziarnistym — 2,0 m, żwirem — 2,5 m i znowu piaskiem — 9,5 m, występuje czarna glina piaszczysta (8,0 m), brunatny piasek gliniasty (2,0 m), wreszcie glina brunatna i brunatny piasek ilasty (1,9 i 14,7 m), przyczem obie te warstwy zawierają 'zerdrückte Schalreste', zapewne małży słodkowodnych. Wyjątkowo grube mioceńskie utwory słodkowodne wypełniły zapewne zagłębienie powierzchni podtrzeciorzędowej. Tak tedy w okolicach Kalisza występują pod właściwą formacją burowęglową jakieś bliżej nie poznane swoiste utwory słodkowodne, prawdopodobnie dolnomioceńskie. Jedynie w Szczypiornie miocen ma skład odmienny, nie daje się podzielić na dwa odcinki, zawiera węgiel brunatny w różnych poziomach, kończy się zaś u dołu typowemi podburowęglowemi żwirami lub grubemi piaskami. Oto profil: piasek drobny 7,0 m, ił piaszczysty — 2,7 m, kreda jeziorowa' (?) — 3,4 m, piasek z lignitem — 0,6 m, lignit — 3,4 m, żwir z szarych otoczaków kwarcowych do 1 cm średnicy z piaskiem burowęglowym — 1,2 m.

Utwory mezozoiczne wznoszą się do dość jednolitego poziomu (Szczypiorno 36,6 m n. p. m., Wzajemny Kredyt 34 m, pluszownia Millera 31 m, Gazownia 36,5 m), nie pozbawionego wszakże lokalnych obniżeń (Więzienie 23,5 m, Szpital Świętej Trójcy 22 m), może erozyjnego przedmioceńskiego pochodzenia. Powierzchnia mezozoiku obniża się natomiast znacznie ku zachodowi i w odległości 4 km od Szczypiorna od 36,6 m spada w Skalmierzycach conajmniej do poziomu morza, gdyż poniżej 2,3 m.

Utwory mezozoiczne, odwiercone w Kaliszu, uważano dotąd za jurę, której wychodnie na poziomie 120 m n. p. m. znane są w Szałem o 8 km na płd od Kalisza: w rzeczywistości jest to kreda, wykształcona w postaci szarawej, silnie wapnistej gezy. Według analizy J. E. Iwińskiego skała zawiera: $SiO_2$ — 42,85%, $Al_2O_3$ — 4,28%, $Fe_2O_3$ — 0,92%, FeO — 0,28%, $P_2O_5$ —

0,26%, CaO — 26,96%, MgO — 0,25%, $K_2O + Na_2O$ — 0,36%, S — 0,41%, $CO_2$ — 22,15%; strata przy prażeniu (substancja organiczna i woda) — 0,62%. Głównym więc składnikiem skały jest krzemionka, przeważnie w postaci najdrobniejszego pyłu kwarcowego i rzadkich większych ziarn piasku do 0,2 mm, w znacznej mierze w postaci bardzo licznych spikul gąbek. Dość obfity węglan wapniowy jest przeważnie pochodzenia organicznego, przedewszystkiem z otwornic z gatunków *Rotalina, Nodosaria, Dentalina, Frondicularia* i licznych odłamków i włókien inoceramów; prócz tego jest sporo kalcytu wtórnego, wypełniającego wnętrze otwornic i w małej ilości włączonego do lepiszcza. Pozatem obecny jest glaukonit i nieco wtórnego limonitu. Wobec braku makroskopowych skamieniałości wieku gezy ściśle oznaczyć nie można, lecz obecność czarnego krzemienia (pluszownia Millera, głębokość 132 — 134 m) przemawia za turońskim wiekiem dolnej części serji kredowej.

Kreda kończy się na głębokości około 170 m mn. w. (70 m pod p. m.), gdyż od p. Hoffmana, wiertnika Kaliskiego, dostałem nieregularne skupienia piasku, spojonego w buły dość twardym fosforytem; do buł tych przylega nieco zielonego piasku glaukonitowego. Próby te, fragmentaryczne i z nie dość ściśle oznaczonego poziomu wskazują na obecność cenomanu, który oddziela górnokredowe gezy od wapieni jurajskich. Odwiert mianowicie z jeszcze głębszych części otworów składa się z kańciastych okruchów czystego, cukrowatego, przekrystalizowanego żółtawego wapienia, identycznego z wapieniami górnojurajskiemi, ściślej sekwańskimi.

Tak więc kreda w Kaliszu ma około 100 m grubości (mn. w. od 30 m n. p. m. do 70 m poniżej p. m.) pod nią zaś występują wapienne pokłady górnej jury,w Szpitalu Świętej Trójcy nie przewiercone do głębokości 292,5 m. Powierzchnia jury zapada więc od Szałego ku północy bardzo łagodnie, gdyż na przestrzeni około 8 km poziom jej obniża się tylko o 200 m mniej więcej czyli o 2½%.

Kalisz nie leży jednak na bezpośredniem przedłużeniu północnem jurajskiego wypiętrzenia w Szałem, lecz leży na płn.-wsch. zboczu tego garbu, którego szczyt przebiega o 8 km na zachód od Kalisza, w Szczypiornie bowiem pod miocenem kredy niema, na wysokości natomiast 36,6 m n. p. m. występuje (od

100,6 do 103,7 m głębokości) już jura niewątpliwa, mianowicie biały zbity wapień z licznemi rurkami maleńkich serpul, czasami tylko z samych serpul złożony, podesłany przez 10 m wapieni twardych cukrowatych i 30 m (do 140,7 m głębokości) wapieni białych miękkich, może astarckich. Tak więc wał jurajski ciągnie się od Szałego dalej na półn.-zach., na Szczypiorno, i szybko zapada w obie strony — ku wschodowi pod kredę Kalisza, ku zachodowi zaś znika w głębi pod miocenem Skalmierzyc, pod któremi nie wiadomo czy ponownie występuje kreda, czy też wprost jura.

Z zakładu Geologji i Paleontologji Uniw. J. P. w Warszawie.

## RÉSUMÉ.

La ville de Kalisz est entourée par un plateau révetu de dépôts quaternaires, réposant sur des argiles bigarrées pliocènes de 60 quelques métres d'épaisseur. Dans ce plateau est enfoncée une profonde vallée ancienne de 70 m environ de profondeur, remblayée par quelques 40 m de sables alluviaux; la rivière actuelle a creusé dans ces sables son lit présent de 10 m de profondeur environ, encaissé dans des terrases sablonneuses. L'épaisseur du Pliocène est sensiblement moindre sous le lit ancien de la vallée, où il est par places réduit à 8,8 m seulement. Le Pliocène répose sur la formation lignitifère du Miocène supérieur qui récouvre à son tour de dépôts lacustres, parfois absents, composés d'argiles et de marnes lacustres. Le tout répose sur la surface presque unie du Mézozoïque à structure anticlinale; un anticlinal jurassique affleure à Szczypiorno sous le Miocène à 36 m 60 d'altitude, mais à Kalisz même, les forages n'ont atteint à cette altitude qu'une gaize crétacée qu'une couche peu épaisse de sable glauconieux du Cénomanien sépare à 70 m au dessous du niveau de la mer des calcaires cristallisés du Jurassique supérieur, voir du Séquanien. Le Jurassique forme un anticlinal dirigé vers le N-E.

Du Laboratoire de Géologie et de Paléontologie
de l'Université Joseph Piłsudski à Varsovie.

Władysław Pożaryski.

# Kreda okolic Uniejowa.

Przedstawił J. Lewiński dn. 27 października 1936 r.

## Le Crétacé des environs d'Uniejów.

Mémoire présenté par M. J. Lewiński à la séance du 27 octobre 1936.

### UWAGI WSTĘPNE.

Profesor J. Lewiński polecił mi w roku 1930 opracowanie wychodni kredy w okolicach Uniejowa nad Wartą. Zacząłem od uporządkowania i oznaczenia skamieniałości przywiezionych stamtąd przez p. J. Czekalskiego. Następnie podczas dwukrotnego pobytu w terenie w latach 1931 i 32 porobiłem obserwacje i dozbierałem drugie tyle okazów fauny kredowej.

Na południe i południozachód od Koła, we wsiach Rożniatów, Dąbrowa, Zaborów i Kraski, następnie w Sempułkach i Balinie, na południe od Uniejowa, oraz w Poddębicach i otaczających wsiach Sworawie, Byczynie i Chrapach występują pod warstwą moreny dennej margle kredowe. Naturalnych odsłonięć nigdzie nie zauważyłem, sztuczne są dość liczne, głównie w trzech pierwszych miejscowościach, skąd margiel kredowy jest rozwożony po okolicy jako materjał budowlany; białe domki z niego zbudowane można jeszcze spotkać w odległości kilkudziesięciu kilometrów od miejsca wydobycia tego naturalnego budulca. To też najliczniejsze łomy są tam, gdzie skała najlepiej nadaje się do budowy i gdzie jest przykryta najcieńszą warstwą utworów czwartorzędowych, mianowicie w okolicach Rożniatowa i w Poddębicach; stamtąd też zebrałem najwięcej skamieniałości. Łomy są niegłębokie, bo poziom wód gruntowych stanowi ich dno, i krótkotrwałe, gdyż położone wśród pól uprawnych wymiarami swemi są ograniczone do minimum i po wyeksploatowaniu natychmiast zasypywane i zaorywane. Profile poszczególnych odsłonięć są dość jednostajne i wyglądają następująco:

około 0,2 m. gleba.

0,3 — 2,5 m. morena denna w postaci piasków z głazami, glina morenowa, piaski warstwowane pogniecione i przemieszane ze żwirami i gliną.

0,5 — 2,0 m. rumowisko marglu kredowego zmieszane z piaskiem, z głazikami krystalicznemi, czasem zawiera kieszenie wypełnione żwirem z materjału północnego.
1,0 — 2,0 m. margiel kredowy połupany taflowo.
0,5 — 6,0 m. margiel kredowy poprzecinany diaklazami.
Maksymalna obserwowana wysokość ściany profilu wynosi 8 m.

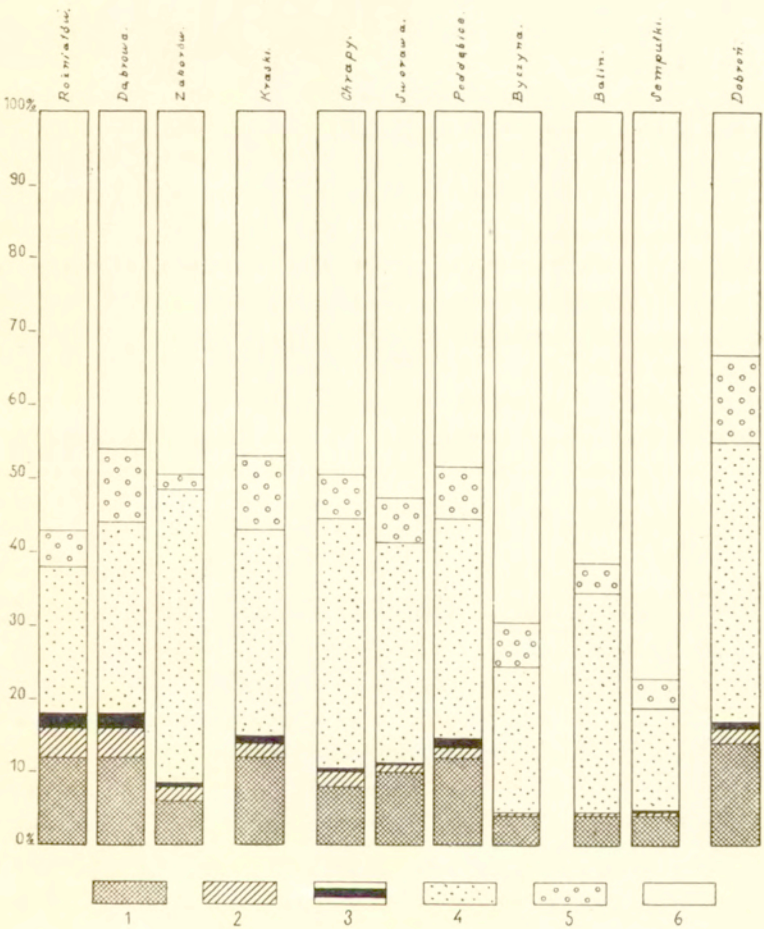

Rys. 1.

Występowanie kredy w okolicach Uniejowa znane było od dawna, wyczerpującego jednak opracowania nie posiada. S i e m i r a d z k i (8, Tom II, str. 89) był tu i zebrał kilka skamieniałości. Wymienia on stąd *Scaphites tridens* i *Inoceramus Cripssi.* Petrograficznie i faunistycznie przypomina mu tutejsza kreda opokę z Nagórzan. Wymienia miejscowości: Puczniew, Trzęśniew, Skęczniew, Brudzew, Paprotnia i Świnice. Jedynie w tej ostatniej były kiedyś odsłonięcia kredy od dawna zasypane, w pozostałych miejscowościach żadnych śladów marglu kredowego ani też dawnych łomów nie stwirdziłem. Znał następnie Siemiradzki wychodnie w Różniatowie i Zaborowie. Na całym badanym obszarze, szczególnie między Uniejowem i Koninem rozsypany jest margiel kredowy w postaci otoczaków w żwirach dyluwialnych. Tworzą one czasem skupienia prawie wyłącznie kredowych otoczonych głazów, głazików i żwiru, budujące nieraz całe pagórki, jak naprzykład w Paprotni. Wiek tej kredy jest mniejwięcej zgodny z wiekiem kredy uniejowskiej sądząc po występowaniu w otoczakach licznych *Belemnitella mucronata* Schloth, podobieństwo petrograficzne jest również znaczne. Być może powyższy fakt przyczynił się do niezgodnego z memi spostrzeżeniami poglądem Siemiradzkiego na rozprzestrzenenie wychodni kredy.

## PETROGRAFJA.

Skały kredowe występujące na badanym terenie są lekkim porowatym marglem tak miękkim, że daje się ciosać siekierą. Kwas solny działa nań słabo nie niszcząc spoistości. Wydobyty na powierzchnię rozpada się powoli na ostrokrawędziaste kawałki bardzo słabo lasując się i dzięki temu dobrze nadaje się na materjał budowlany. Margiel z Sempułek i Balina lasuje szybko na powietrzu i dlatego niezdatny jest do budowy. W odkrywkach obok miękkiego marglu są nieraz parodecymetrowej miąższości soczewkowate wkładki twardsze, różniące się tylko tem od poprzednich, że impregnowane są krystalicznym węglanem wapnia. Szczotki jego kryształów widoczne są nieraz w szczelinach spękań.

Przeglądając szlify mikroskopowe marglu z poszczególnych miejscowości uderza wielka monotonja w składzie mineralnym i faunistycznym. Na załączonej tablicy widać iż zmienia się tylko procentowy stosunek poszczególnych składników. Głównym minerałem detrytycznym jest kwarc w postaci ziarn słabo otoczonych, wielkości od 0,2 mm. do drobnych prawie niedostrze-




Rys. 2.

Skład petrograficzny kredy okolic Uniejowa.
Composition pétrographique de la craie des environs d'Uniejów.

| | |
|---|---|
| 1 — minerały detrytyczne, | 1 — minéraux détritiques, |
| 2 — „ autogeniczne, | 2 — „ autogénes, |
| 3 — skorupki mięczaków, | 3 — tests de Mollusques, |
| 4 — spikule gąbek, | 4 — spicules d'éponges, |
| 5 — otwornice, | 5 — Foraminifères, |
| 6 — lepiszcze. | 6 — ciment. |

galnych; wykazuje on często faliste znikanie światła. Są ziarna świeże o ostrych konturach oraz częściowo zresorbowane, o wielkości których sądzić można jedynie po przyległych próżniach pozostałych po rozpuszczeniu kwarcu. Znacznie rzadsze są cienkie blaszki muskowitu i w jeszcze mniejszej ilości występujące silnie zwietrzałe skalenie. Z minerałów autogenicznych jest przedewszystkiem glukonit, zbliżony wielkością do ziarn kwarcu lecz zwykle pięciokrotnie od niego rzadszy. Ma wygląd świeży lub zwietrzały, przeważnie tworzy samodzielne ziarna, lecz zdarza się też jako wypełnienie kanałów spikul gąbek lub komór otwornic. Te ostatnie są jednak częściej wypełnione bezpostaciowym fosforanem wapnia.

Organizmy stanowią ważny składnik budowy i są reprezentowane głównie przez gąbki i otwornice. Pierwsze z nich przedstawiają się jako spikule, a raczej próżnie po rozpuszczonych spikulach, czasem tylko wypełnione kalcytem lub opalem. Otwornice są liczne i to zarówno z grupy *Perforata* jak i *Imperforata*, form aglutynujących nie stwierdziłem. Szkielety otwornic zbudowane są z krystalicznego węglanu wapnia, wnętrza przeważnie zachowane jako próżnie, czasem wypełnione lepiszczem, bezpostaciowym fosforanem wapnia lub rzadziej glaukonitem. Skorupki mięczaków są nieliczne, wśród nich włókna inoceramów rzadko się spotykają. Lepiszcze ilasto-wapienno-krzemionkowe. Wzajemny stosunek wymienionych składników jest taki, że najwięcej miejsca zajmują igły gąbek, następnie ziarna kwarcu i foraminifery mniejwięcej po równo, pozostałe elementy i lepiszcze stanowi średnio pięćdziesiątkilka procent skały. Są jednak wyjątki: margiel z Sempułek i Byczyny zawiera mniej igieł i mniej ziarn kwarcu, skała z Balina też uboga jest bardzo w kwarc. W obu wypadkach ziarna tego ostatniego są mniejsze (do 0,15 mm.) lepiszcze jest bardziej ilaste, gdyż skała szybko lasuje się pod wpływem czynników atmosferycznych. Sujkowski (9, str. 526) omawiając kredę okolic Kazimierza i Nałęczowa podnosi fakt, iż ilość spikul gąbek jest odwrotnie proporcjonalna do ilości materjału klastycznego w skale. Na załączonej tablicy widać, że zależność ta sprawdza się tu całkowicie, jeśli pominiemy Sempułki, Balin i Byczynę, które jak wspomniałem różnią się jeszcze innymi cechami od pozostałych.

Procesy diagenetyczne wywarły silny wpływ na naszą skałę. Krzemionka z igieł gąbek i częściowo z ziarn kwarcu przewędrowała do lepiszcza, w którym można stwierdzić znaczną ilość opalu. Drugim ważnym procesem jest wędrówka węglanu wapnia, wypełniającego nieraz próżnie po igłach gąbek lub impregnującego całe partje skały, które stają się tak twarde, że robotnicy w kamieniołomach nazywają je „żelazem".

Margiel kredowy z okolic Uniejowa podpada całkowicie pod definicję podaną przez Sujkowskiego (9, str. 494) dla opoki i to opoki piaszczystej, którą identyfikuje on z gezą („gaize"). Od typowej gezy zdefinjowanej przez Cayeux (2) różni się nasza skała brakiem chalcedonu, oraz dużą ilością krystalicznego węglanu wapnia. Będzie to zatem wapnista odmiana gezy.

Zestawienie opoki uniejowskiej z innymi obszarami kredowymi jest trudne z powodu braku materjału nadającego się do porównania. Zwracając się znowu do pracy Sujkowskiego (9) znajdujemy tam na stronie 522 i 524 opis skały bardzo zbliżonej, zawierającej nieco większy procent spikul gąbek. Wiekowo jest ona nieco młodsza, gdyż osadziła się w poziomie górnomukronatowym.

Charakter morza w którym osadziła się opoka uniejowska da się ująć w trzy zasadnicze punkty. Po pierwsze jest to morze płytkie jak świadczy o tem obfita fauna denna z formami gruboskorupowymi. Po drugie brzeg był niedaleko, gdyż ilość materjału detrytycznego jest dość znaczna, a fakt, iż w Dobroniu skała tego samego wieku zawiera większy procent ziarn piasku wskazuje na to, że ląd był na południu. Po trzecie obecność licznych głowonogów pospolitych w warstwach górnokredowych w bróździe północno-europejskiej przemawia za dobrem połączeniem okolic Uniejowa z morzem otwartem.

## STRATYGRAFJA.

Brak wyraźnego uławicenia w odsłonięciach kredy, oraz małe i nieposiadające analogji z innymi obszarami zróżnicowanie petrograficzne skał, zmuszają do oparcia ścisłego podziału stratygraficznego jedynie na faunie. Skamieniałości są dość liczne i dobrze zachowane, choć skorupy zachowały się tylko u ramienionogów, kilku małży i jeżowców. Oznaczyłem 7 gatunków głowonogów, 32 małży, 6 ślimaków, 3 ramienionogów, 3 jeżowców, pozatem występują tu korale, liljowce, mszywioły, otwornice i ryby. Głowonogi dostarczyły dużej ilości okazów i są grupą najważniejszą, gdyż na nich opiera się podział kredy górnej w Niemczech. Pozatem mają znaczenie niektóre ramienionogi, jeżowce i małże.

Przechodząc do oznaczenia wieku kredy uniejowskiej zaznaczam, że pogląd Siemiradzkiego, iż występuje tu kreda mukronatowa potwierdził się całkowicie. We wszystkich odsłonięciach znalazłem *Belemnitella mucronata* Schl. Najlepiej wyrażony jest poziom z *Bostrychoceras polyplocum* Roem. Brak w kredzie uniejowskiej formy typowej, a występuje jedynie *B. polyplocum var. Schloenbachi* Favre, uznana przez Nowaka (6) za wiekowo równoważną typowej. Występuje ona w odsłonięciach Rożniatowa i Zaborowa. Zaliczam do tego poziomu także kredę w Dąbrowie, gdyż łomy te bezpośrednio przytykają do rożniatowskich i zawierają faunę prawie identyczną. Z ważniejszych głowonogów występuje licznie *Acanthoscaphites tridens* Kner. charakterystyczny dla wymienionego poziomu (Nowak 6), ale występujący i niżej (Holzapfel 3) oraz jeden odłamek *Pachydiscus* sp. rodzaju znanego z dolnego i środkowego poziomu kredy mukronatowej, brak go natomiast w górnym. W kredzie między Kazimierzem Dolnym i Józefowem nad Wisłą znalazłem rodzaj ten w warstwach przejściowych poziomu środkowego i górnego. Obok pospolitego gatunku *Belemnitella mucronata* Schloth. występuje w Rożniatowie, Dąbrowie i Zaborowie *Belemnitella lanceolata* Schloth. Nowak (6) uważa ją za przewodnią skamieniałość poziomu środkowego, znalazłem ją jednak we wspomnianych wyżej wychodniach kredy nad Wisłą w poziomie górnym i środkowym. Z ramienionogów wartość stratygraficzną posiada *Magas pumilus* Sow. występujący w tych samych odsłonięciach kredy uniejowskiej co poprzedni i właściwy poziomowi środkowo-mukronatowemu i niższym (Bubnoff 1). We wszystkich prawie odsłonięciach znalazłem głowonoga pospolitego w morzu górno-kredowem północnej Europy *Hoploscaphites constrictus* Sow. charakteryzujący razem z *Trigonosema pulchellum* Nils. górny poziom mukronatowy. Tej ostatniej skamieniałości jednak nie znalazłem.

| SPIS FAUNY | Kreda uniejowska | | | | | | | | | | R u g j a | Kreda Lwowska | | Kreda nad Wisłą | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rożniatów | Dąbrowa | Zaborów | Kraski | Chrapy | Sworawa | Poddębice | Byczyna | Sempułki | Balin | | Nagórzany | Lwów | Kazimierz | Kamień. Piotrawin. | Józefów |
| *Acanthoscaphites tridens* Kner | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | + | + | . | . | . | . |
| „ *aff.* „ Kner | . | . | . | + | . | + | + | . | . | + | . | . | . | . | + | . |
| *Hoploscaphites constrictus* Sow. | + | + | + | . | . | . | + | + | + | + | + | . | + | + | + | + |
| *Bostrychoceras polyplocum v. Schloenbachi* F. | + | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | . | . |
| *Pachydiscus* sp. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + |
| *Baculites anceps* Lam. | + | + | + | + | . | . | + | . | . | + | + | + | + | . | + | + |
| „ sp | + | + | + | + | . | . | + | + | + | . | . | . | . | + | + | + |
| *Belemnitella mucronata* Schloth. | . | . | + | + | + | . | . | . | . | . | + | + | + | + | + | + |
| „ „ m. *junior* Now. | + | + | . | + | . | + | + | + | + | . | . | . | + | . | . | . |
| „ „ m. *senior* Now. | + | + | . | + | . | . | + | . | . | . | . | + | . | . | . | . |
| „ *lanceolata* Schloth. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | + | + | . |
| „ „ m. *junior* Now. | + | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . |
| *Inoceramus tegulatus* Hag. | + | + | + | + | + | . | . | . | + | + | + | . | . | . | . | . |
| „ aff. *inconstans* Woods. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + |
| „ *planus* Goldf. | + | . | + | . | . | . | + | . | . | . | + | . | . | . | + | . |
| „ sp. | + | + | + | + | . | . | + | . | + | . | . | . | . | . | . | . |
| *Ostrea semiplana* v. *Merceyi* Coq. | . | . | . | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| „ „ Sow. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . | + |
| „ *vesicularis* Lam. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | + | + | + |
| „ *incurva* Nils. | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | + | . | + | . | . | + |
| „ sp. | + | + | + | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Pholadomya Esmarki* Nils. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . |
| „ *decussata* Mant. | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | + | + |
| *Pecten pulchellus* Nils. | + | + | + | . | . | . | + | . | . | . | + | . | + | . | + | . |
| „ *(Chlamys) cretosus* Defr. | + | + | + | . | . | . | + | . | . | . | + | . | + | + | + | + |
| „ „ *trisulcus* Hag. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | . | . | . |
| „ „ *Nilssoni* Goldf. | + | + | + | . | + | . | + | . | . | . | + | + | + | . | . | . |
| „ *(Neitea) striato-costata* Goldf. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . | + |
| „ „ cf. *quadri-costata* Sow | + | + | . | . | . | . | + | . | . | . | + | . | + | . | + | . |
| *Limopsis rhomboidalis* Alth. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | . | . | . |
| *Placanopsis undulata* J. Müll. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Spondylus Dutemplenus* d'Orb. | . | . | + | . | . | . | + | . | . | . | + | . | + | . | + | . |
| „ cf. *serratus* Wood | + | + | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . |
| *Crasatella* sp. | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Corbula* sp. | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Mutiella* sp. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Modiola* cf. *capitata* Zitt. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | . | . |
| *Arca Leopoliensis* Alth. | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | . | + | + | . | . |
| *Pinna decussata* Goldf. | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | + | . | . |
| *Gervillia solenoides* Defr. | + | . | . | + | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . | . |
| *Panopea mandibula* Sow. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . |
| „ aff. „ Sow. | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Leda producta* Nils. | . | . | + | + | . | . | . | . | . | . | + | + | + | . | + | + |
| *Nucula pectinata* Sow. | + | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | . |
| *Neaerea caudata* Nils. | + | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | + | + | + | . | + |
| *Lima (Plagiostoma) Hoperi* Mant. | + | + | + | + | . | . | . | . | + | . | + | + | + | + | . | + |
| „ „ *Dunkeri* Hag. | + | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | + | + | . |
| „ *(Limatula) decussata* Goldf. | + | + | + | + | . | + | + | . | + | . | + | + | + | . | + | . |
| „ *(Limea) granulata* Nils. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | + | . | + | . | + | . |
| *Pleurotomaria granulifera* Münst. | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + |
| *Trochus* aff. *polonicus* Favre. | . | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | + | + | . | + | . |
| „ sp. | . | + | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Natica (Gynodes) brunsvicensis* J. Müll. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Cinulia (Avellana) inversestriata* Kner. | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | . | + |
| *Aporrhais stenoptera* Goldf | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | + | + | . | + | + |
| „ sp. | . | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| *Voluta Kneri* Favr. | . | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . |
| *Terebratula carnea* Sow. | + | + | + | + | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | + | + |
| *Rhynchonella octoplicata* Sow. | + | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | + | + | . | + |
| *Magas pumilus* Sow. | + | + | + | . | . | . | . | . | . | . | + | + | . | . | . | . |
| *Echinocorys ovatus* Lesk. | + | + | + | + | + | . | . | + | . | . | + | | | | | |
| *Echinoconus vulgaris* Lesk. | . | + | . | . | . | . | . | . | . | . | + | | | | | |
| *Echinoconus Wollemani* Lamb. | . | . | . | . | . | . | . | + | . | . | . | | | | | |
| *Micraster* sp. | + | . | . | + | . | . | . | . | . | . | | | | | | |
| *Cidaris* sp. | + | + | + | . | . | + | . | . | . | . | | | | | | |

Z powyższego omówienia widać, że mogą tu występować warstwy górno- lub środkowo-mukronatowe. Fakt, iż są tu trzy wyżej wymienione formy, nigdy dotychczas nie znajdowane powyżej poziomu z *B. polyplocum* R., a tylko jedna przewodnia skamieniałość poziomu górnego, pozwala na zaliczenie do poziomu środkowego kredy z Różniatowa, Dąbrowy i Zaborowa, to znaczy z tych miejscowości w których wszystkie wymienione skamieniałości znaleziono.

Wypływa z tego ważny wniosek, iż *Hoploscaphites constrictus* Sow. nie jest przewodni dla górnej kredy mukronatowej, gdyż występuje i w zespole form poziomu środkowego. Jest to zgodne z przypuszczeniami Siemiradzkiego (8), Wolanskyej (10) i memi spostrzeżeniami w kredzie nad Wisłą.

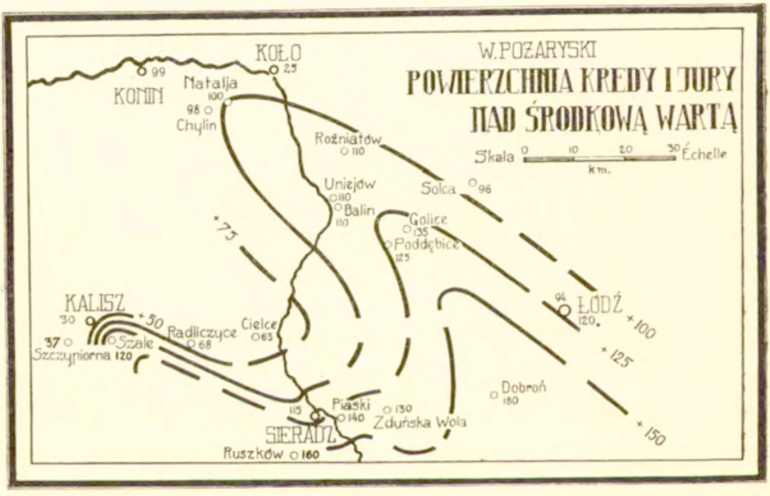
Jeśli przejdziemy do ustalenia wieku warstw z pozostałych miejscowości — to brak w znalezionej w nich faunie skamieniałości przewodnich utrudnia to w dużym stopniu. Ważnym jest fakt podkreślony przez Nowaka (6), że obok *Hoploscaphites constrictus* Sow., kilku bakulitów, nautilusów i *Belemnitella mucronata* Schl. brak w górnym poziomie głowonogów. Takich jednak stosunków w zespołach faunistycznych kredy uniejowskiej nie stwierdziłem. Wobec tego jeszcze, że brak tu *Trigonosema pulchellum* Nills. niema podstaw do wyróżnienia poziomu górnego. Zespół faunistyczny charakteryzujący warstwy z *B. polyplocum* R. także nie występuje już tu, ścisłe więc oznaczenie wieku jest niemożliwe. Jest jednak prawie we wszystkich odsłonięciach *Hoploscaphites constrictus* Sow., są dość liczne inoceramy i odłamki głowonogów zbliżonych do *Acanthoscaphites tridens* Kner. Zaliczam wszystkie odsłonięcia poza Rożniatowem Dąbrową i Zaborowem do warstw przejściowych środkowego i górnego poziomu. Konieczność takiej interpretacji wynika z tego, iż rozpoziomowanie kredy mukronatowej w istniejącej literaturze jest czysto schematyczne i brak jest ścisłej, cały zespół fauny uwzględniającej definicji granic poszczególnych poziomów. Można by się oprzeć jedynie na skamieniałościach przewodnich, jednak stwierdzone zachodzenie na siebie ich zasięgów występowania uniemożliwia takie rozumowanie. Jest jeszcze druga forma przewodnia górnego poziomu *Trigonosema pulchellum* Nills., lecz brak jej nie może być argumentem decydującym. Wyliczyłem wyżej kilka gatunków, których górna granica występowania zbiega się ze stropem poziomu *B. polyplocum*. Jest mało prawdopodobnem, żeby wymarły one wszystkie równocześnie, jedne z nich mogą nie dochodzić już do wyższych części poziomu środkowego, inne są może jeszcze w spągowych warstwach górnego. W literaturze nie znalazłem żadnych pewnych danych co do tego. Obserwacje moje w kredzie nad Wisłą dostarczają faktów uzasadniających wniosek co do wieku ostatnio wymienionych warstw opoki z okolic Uniejowa nad Wartą. Mianowicie w Józefowie nad Wisłą leżą warstwy z licznemi *B. polyplocum* i rzadkiemi *H. constrictus*. Ku północy, za upadem, w Piotrawinie brak już pierwszego, a drugi występuje jeszcze w małej ilości, obok niego głowonogi zbliżone do *A. tridens* i posiadające cechy wspólne z odłamkami znalezionemi w Poddębicach, Sworawie, Balinie w okolicach Uniejowa. W wyższych warstwach w Kamieniu nad Wisłą brak już tych ostatnich, są natomiast jeszcze inoceramy występujące też i w poprzednich miejscowościach. Dalej ku północy giną inoceramy, a *H. constrictus* staje się bardzo liczny. Zatem skafity spokrewnione z *A. tridens* występują bezpośrednio ponad *B. polyplocum*, a zasiąg inoceramów przekracza je ku górze. Potwierdza to całkowicie wniosek, iż w Chrapach, Sworawie, Poddębicach, Byczynie, Sempułkach i Balinie występuje opoka młodsza od rożniatowskiej. Ponieważ zaś, w Kamieniu i Piotrawinie nad Wisłą są reprezentowane rodzaje takie jak *Pachydiscus* i *Hamites*, więc nie jest tam jeszcze fauna typowa dla poziomu górnego — są to warstwy przejściowe; przez analogię przejściowymi są też warstwy z cytowanych miejscowości okolic Uniejowa.

Na południe od badanego obszaru są wychodnie opoki kredowej w okolicach Sieradza nad Wartą i w Dobroniu przy linji kolejowej Łódź — Kalisz. Petrograficznie jest ona prawie identyczna z uniejowską. Cytowane przez Premika (7) skamieniałości z okolic Sieradza z formami *B. mucronata* v. *junior* Now., *Baculites* sp., *Inoceramus* sp. i innymi przemawiają za przynależnością tej opoki prawdopodobnie do piętra środkowomukronatowego lub do warstw przejściowych do górno-mukronatowego. Lepiej jest scharakteryzowana skała z Dobronia, gdyż Lewiński (4) oznaczył stamtąd między innemi *Baculites*

*Faujasi* L a m., *Inoceramus* aff. *latus* M u n s t., zaś P r e m i k *Acanthoscaphites tridens trinodosus* K n e r. *Hoploscaphites* sp., *Inoceramus* sp. zatem odpowiada opoce rożniatowskiej.

## WNIOSKI OGÓLNE.

Kreda uniejowska leży na przedłużeniu ku północnemu-zachodowi pasm jurajsko-kredowych, obrzeżających od zachodu góry Świętokrzyskie, jak to wykazali L e w i ń s k i i S a m s o-n o w i c z (5). Oś wypiętrzenia przebiega od Dobronia, nieco na wschód od Poddębic, przez okolice Rożniatowa i Krasek. Na południo-zachód od tej linji przebiega depresja i w niej zachowały się utwory młodsze Balina i Sempułek. Na osi wypiętrzenia w okolicach Rożniatowa leżą utwory starsze.




Rys. 3.

La surface du Crétacé et du Jurassique dans la région du cours moyen de la Warta.

Izohipsy powierzchni Mezozoikum.——Isohypses de la surface du Mézozoique.

| | | |
|---|---|---|
| Wysokość w metrach nad poziom morza powierzchni | | L'altitude en métres au dessus de la mer de la surface |
| kredy | 110 | Crétacé |
| jury | 160 | Jurassique. |

Dość bogata fauna zbliża naszą opokę do kredy okolic Kazimierza i Józefowa nad Wisłą, gdyż mają one aż 40 gatunków wspólnych. Następnie idzie opoka z okolic Lwowa, 36 gatunków. Z kredą Rugji opoka uniejowska posiada 29 wspólnych form, i w tem ani jednego ślimaka. Wszystkich gatunków jest tu 51. Takie wielkie podobieństwo do sąsiednich terenów pozwala przypuścić, iż powstawały te fauny w jednem morzu otwartem w jednakowych warunkach i jedynie na Rugji zbliżonej już do lądu Skandynawji inna była facja.

P. prof. J. Lewińskiemu za bardzo życzliwe kierownictwo w pracy, oraz p. doc. Z. Sujkowskiemu za pomoc przy badaniu petrograficznem składam serdeczne podziękowanie.

Z zakładu Geologji i Paleontologji Uniw. J. P. w Warszawie.

---

## LITERATURA.

1. Bubnoff, S. 1935: „Geologie von Europa". B. II. T. 2. Berlin.
2. Cayeux, L. 1929: „Roche silicieuses". Mém. Carte. Géol. Paris.
3. Holzapfel, E. 1888—89: „Die Mollusken der Aaachener Kreide". I.—II. Abt. Paläontographica B. 34—35. Stuttgart.
4. Lewiński, J. 1904: „Sprawozdanie z badań geologicznych, dokonanych wzdłuż drogi żelaznej Warszawsko-Kaliskiej". Pam. Fizjogr. Tom XVIII. Warszawa.
5. — Samsonowicz, J. 1918: „Ukształtowanie powierzchni, skład i struktura podłoża dyluwjum niżu północno-europejskiego". Prace Tow. Nauk. Warszawa.
6. Nowak, J. 1913: „O kredzie zachodniej części Podola i Wołynia". Spraw. Tow. Nauk. Warszawa.
7. Premik, J. 1926: „Występowanie górnego senonu pod Sieradzem". Spraw. P. I. G. Tom 3. Warszawa.
8. Siemiradzki, J. 1909: „Geologja Polski" Tom II. Lwów.
9. Sujkowski, Z. 1930: „Petrografja kredy Polski". Spraw. P. I. G. Tom VI. Zeszyt 3. Warszawa.
10. Wolansky, Dora: 1932: „Die Cephalopoden und Lamellibranchiaten der Ober-Kreide Pommerns". Abh. aus dem geol.-paleontol. Instit. der Uniw. Greifswald. Heft IX.

RÉSUMÉ.

Aux environs de Koło, Uniejów sur Warta et Poddębice se trouvent plusieurs petites carrières ou l'on exploite des roches crétacées appliquées, comme pierres de construction. Siemiradzki qui les a connuees (8, tom II, page 89) les considérait comme analogues à la craie de Nagórzany.

Cette roche est une marne, légère, poreuse, parfois durcie par la présence de certaines quantités de $CaCO_3$ cristalisés. Les éléments mineraux sont: grains de quartz plus petits que 0,2 mm, rares feuilles de muscovite, très rares cristaux de feldspath décomposés, rares grains de glauconie et de phosphate de chaux amorphe; ciment calcaréo-argileux-siliceux. C'est donc selon la definition de Sujkowski (9, page 493—494) la „opoka" sableuse ou gaize calcaire.

Parmis les fossiles que j'ai recueilli dans les villages de Rożniatów, Dąbrowa et Zaborów les plus importants sont: *Belemnitella mucronata* Schloth. *Acanthoscaphites tridens* Kner. *Hoploscaphites constrictus* Sow. *Bostrychoceras polyplocum* v. *Schloenbachi* Favre. *Magas pumilus* Sow. qui permettent de paraleliser ces couches avec la zône *Bostrychoceras polyplocum* Roem. de Campanien. *Hopl. constrictus* quoique caracteristique pour une zône plus élévée est cité par Siemiradzki (8) et Dora Wolansky (10) comme existant déjà avec *B. polyplocum*. Dans d'autres carrières j'ai trouvé *Bel. mucronata, Hopl. constrictus, Acanthoscaphites* aff. *tridens* et du inocérames moins nombreux; je considère ces couches comme formant passage à la zône de *B. polyplocum* et *H. constrictus*.

La craie d'Uniejów est située sur l'axe d'une élévation qui constitue le prolongement des crêtes jurassiques-crétacées qui bordent les montagnes de Święty Krzyż à l'ouest suivant Lewiński et Samsonowicz (5).


Du Laboratoire de Géologie et de Paléontologie
de l'Université Joseph Piłsudski à Varsovie.

Sophie Piccard.

## Uogólnienie pewnego twierdzenia p. Sierpińskiego z teorji stosunków.

Komunikat przedstawiony przez p. W. Sierpińskiego dn. 27 października 1936 r.

STRESZCZENIE.

Autorka dowodzi następującego twierdzenia, będącego uogólnieniem dla liczb naturalnych $n$ twierdzenia, udowodnionego przez p. Sierpińskiego dla $n = 2$.

Jeżeli $n$ jest liczbą naturalną, zaś $E$ dowolnym zbiorem nieskończonym mocy $\mathfrak{m}$, wreszcie $R$ stosunkiem, takim, że dla każdego elementu $x$ zbioru $E$ istnieje mniej niż $n$ elementów $y$ zbioru $E$, dla których $x R y$, to istnieje część $H$ zbioru $E$ mocy $\mathfrak{m}$, której żadne dwa różne elementy nie są związane stosunkiem $R$.

Sophie Piccard.

## Généralisation d'un théorème de M. Sierpiński de la théorie des relations.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 27 octobre 1936.

**Théorème.** *Soit $n$ un nombre entier $\geq 1$ et soit $E$ un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ quelconque et $R$ une relation, telle que pour tout élément $x$ de $E$ il existe moins que $n$ éléments $y$ de $E$, tels que $x R y$. Dans ces conditions, il existe un sous-ensemble $H$ de $E$, de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation $R$.*

Démonstration[1]. Nous procéderons par l'induction. Notre théorème est évidemment vrai pour $n = 1$ (on peut alors poser $H = E$). Soit $m$ un nombre naturel $> 1$ et supposons que le théorème est vrai pour tout nombre naturel $n < m$. Soit $E$ un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ et $R$ une relation, telle que pour tout élément $x$ de $E$ il existe moins que $m$ éléments $y$ de $E$, tels que $x R y$.

[1]) Notre démonstration est basée sur la méthode que M. W. Sierpiński a employée en démontrant le cas particulier de notre théorème où $n = 2$: voir *Bull. Acad. Polonaise*, séance du 5 oct. 1936.

Posons, pour tout élément x de $E$:

(1) $$Z(x) = \underset{t}{\mathrm{E}}\left[t \varepsilon E, t R x\right]$$

Deux cas peuvent se présenter:

a) Il existe un sous-ensemble $Q$ de $E$ de puissance $< \mathfrak{m}$ et tel que l'ensemble $\sum_{x \varepsilon Q} Z(x)$ est de puissance $\mathfrak{m}$.

b) Quel que soit le sous-ensemble $Q$ de $E$ de puissance $< \mathfrak{m}$, l'ensemble $\sum_{x \varepsilon Q} Z(x)$ est de puissance $< \mathfrak{m}$.

Dans le cas a) posons

(2) $$T = \sum_{x \varepsilon Q} Z(x) - Q$$

— ce sera évidemment un sous-ensemble de $E$ de puissance $\mathfrak{m}$. Montrons que pour tout élément $x_0$ de $T$ il existe moins que m — 1 éléments y de $T$, tels que $x_0 R y$.

En effet, si $x_0 \varepsilon T$, il existe, d'après (2), un élément $x$ de $Q$ tel que $x_0 \varepsilon Z(x)$, donc, d'après (1), $x_0 R x$. Or, d'après $x \varepsilon Q$ et d'après (2) on a x non $\varepsilon$ $T$.
D'après l'hypothèse, il existe $\leqslant$ m — 1 éléments y de $E$, tels que $x_0 R y$: d'après $x_0 R x$, $x \varepsilon E$ et x non $\varepsilon$ $T$ il en résulte qu'il existe $\leqslant$ m — 2 éléments y de $T$, tels que $x_0 R y$. $x_0$ pouvant être un élément quelconque de $T$, nous voyons que l'ensemble $T$ (qui est de puissance $\mathfrak{m}$) satisfait aux conditions de notre théorème pour n = m — 1. Notre théorème étant, d'après l'hypothèse, vrai pour n = m — 1, il en résulte qu'il existe un sous-ensemble $H$ de $T$ (donc aussi de $E$) de puissance $\mathfrak{m}$ et dont aucun couple d'éléments distincts n'est lié par la relation $R$.

Dans le cas b) soit $\varphi$ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$ et soit

(3) $$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de $E$.

Nous définirons, par induction transfinie, une suite transfinie d'éléments de $E$

(4) $$p_1, p_2, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant $\alpha$ un nombre ordinal quelconque $> 1$ et $< \varphi$ et supposons que nous avons déjà défini les éléments $p_\xi$, où $\xi < \alpha$: leur ensemble $P_\alpha$ est donc de puissance $< \mathfrak{m}$ Il en est de même de l'ensemble $Q_\alpha$ formé de tous les éléments y de $E$, pour chacun desquels il existe au moins un élément $p_\xi$ de $P_\alpha$, tel que $p_\xi R y$, puisque, par hypothèse, à chaque élément $x$ de $E$ correspondent moins que $m$ éléments y de $E$, tels que $x R y$, $m$ étant un nombre entier fixe. Enfin l'ensemble $S_\alpha = \sum\limits_{\xi < \alpha} Z(p_\xi)$ est aussi de puissance $< \mathfrak{m}$, d'après la condition b).

L'ensemble $P_\alpha + Q_\alpha + S_\alpha$ est donc aussi de puissance $< \mathfrak{m}$ et, par suite, l'ensemble $T_\alpha = E - (P_\alpha + Q_\alpha + S_\alpha)$ est de puissance $\mathfrak{m}$, donc non vide. Nous définirons $p_\alpha$ comme étant le premier terme de la suite (3) qui appartient à $T_\alpha$.

La suite (4) est ainsi définie par l'induction transfinie et on voit sans peine qu'elle contient $\mathfrak{m}$ termes distincts. Soit $H$ l'ensemble de tous les termes de cette suite. L'ensemble $H$ satisfait aux conditions de notre théorème pour $n = m$.

En effet, soient $x$ et $y$ deux éléments distincts de $H$. Il existe donc deux nombres ordinaux distincts, $\alpha < \varphi$ et $\beta < \varphi$, tels que $x = p_\alpha$, $y = p_\beta$. Soit p. e. $\alpha < \beta$. D'après la définition de $p_\beta$, on a

$$(5) \qquad p_\beta \varepsilon E - (P_\beta + Q_\beta + S_\beta),$$

donc $p_\beta$ non $\varepsilon Q_\beta$. Or, par définition de $Q_\beta$. tout élément $y$ de $E$ tel que $p_\alpha R y$ appartient à $Q_\beta$, puisque $\alpha < \beta$. On ne saurait donc avoir $p_\alpha R p_\beta$. D'autre part, si l'on avait $p_\beta R p_\alpha$, on devrait, d'après (1), avoir $p_\beta \varepsilon Z(p_\alpha)$, et, comme $S_\beta = \sum\limits_{\xi<\beta} Z(p_\xi)$, donc $Z(p_\alpha) \subset S_\beta$, on aurait $p_\beta \varepsilon S_\beta$, contrairement à (5). Le raisonnement est tout à fait analogue si l'on suppose $\beta > \alpha$.

Notre théorème est ainsi démontré par l'induction [1]).

---

[1]) Pour la généralisation de notre théorème voir ma Note qui paraitra dans le t. 28 des *Fundamenta Mathematicae*.

Stefania Braun.

## O uniformizacji zbiorów mierzalnych *B*.

Komunikat przedstawiony przez p. W. Sierpińskiego dnia 27 października 1936 r.

STRESZCZENIE.

Autorka dowodzi istnienia zbioru płaskiego, będącego obrazem funkcji, określonej i ciągłej na zbiorze wszystkich liczb niewymiernych osi OX, której zbiorem wartości jest zbiór wszystkich liczb niewymiernych osi OY, nie dającego się zuniformizować względem osi OY zapomocą zbioru analitycznego.

Stefania Braun.

## Sur l'uniformisation des ensembles mesurables *B*.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 27 octobre 1936.

Dans sa Note: *„Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable (B)"* [1]) M. Lusin a construit *un ensemble borelien situé dans l'espace à trois dimensions OTXY dont la projection sur le plan OTX coïncide avec ce plan tout entier et qui ne peut pas être uniformisé au moyen d'un ensemble analytique relativement à l'axe OX.*

C'est notamment *la surface du deuxième degré* $y = \varphi\,(x, t)$ *universelle par rapport aux fonctions d'une variable réelle de première classe de Baire (pour t variable).*

Puis M. Novikoff [2]) a donné un exemple *d'un ensemble plan C mesurable B, tel que sa projection sur l'axe OX*

---

[1]) publiée dans les „Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris", vol. 189, séance du 16 Septembre 1929, p. 423.

Cf. aussi: N. Lusin, *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Aug. 1930), p. 60 et

N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques*. Fund. Math. t. 10, p. 65—66.

[2]) Cf.: P. Novikoff, *Sur les fonction implicites mesurables B*, Fund. Math., t. 17, p. 25.

*coïncide avec l'intervalle* (0,1) *et qui il n'existe aucune courbe uniforme mesurable B passant par C et définie pour tous les points de l'intervalle* (0,1).

Or, le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

**Théorème.** *Il existe un ensemble plan qui est l'image d'une fonction continue définie dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'axe OX, dont l'ensemble de valeurs est l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'axe OY* [1]) *et qui ne peut pas être uniformisé relativement à l'axe OY au moyen des ensembles analytiques.*

D é m o n s t r a t i o n [2]). Soient $E_1$ et $E_2$ *deux ensembles analytiques linéaires telles que leur somme est l'ensemble X de tous les nombres irrationnels*

$$E_1 + E_2 = X \tag{1}$$

et

(2) *qu'il n'existe aucune décomposition de l'ensemble X en deux ensembles analytiques disjoints contenus respectivement dans l'ensemble $E_1$ et $E_2$* [3]).

---

[1]) C'est donc un ensemble plan *fermé* dans le *carré combinatoire de l'ensemble X de tous les nombres irrationnels*, dont *la projection sur l'axe OY* coïncide avec l'ensemble *X*.

[2]) Notre démonstration est une modification de la démonstration de M. N o v i k o f f.

[3]) Les ensembles $E_1$ et $E_2$ sont donc deux ensembles analytiques ne satisfaisant au *théorème de réduction*.

*Les ensembles-complémentaires ( à X) de $E_1$ et $E_2$* sont *des complémentaires analytiques disjoints non séparables (A).*

Cf: C. K u r a t o w s k i, *Sur les théorèmes de séparation dans la Théorie des ensembles*, Fund. Math. t. 26, p. 183;

N. L u s i n, *Sur un principe général de la théorie des ensembles*, C. R. Acad. Sc., vol 189, séance du 2 Septembre 1929, p. 390;

N. L u s i n, *Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable B*, C. R. Acad. Sc., vol. 189, séance du 16 Septembre 1929, p. 423;

N. L u s i n, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, pp. 220, 260 et 263;

P. N o v i k o f f, *Sur les fonctions implicites mesurables B*, Fund. Math. t. 17, p. 25

et

W. S i e r p i ń s k i, *Sur deux complémentaires analytiques non séparables B*, Fund. Math. t. 17, p. 296.

Il en résulte que ces ensembles ne sont pas vides.

Tout ensemble analytique non vide étant une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels, donc aussi de l'ensemble de tous les nombres irrationnels positifs et de l'ensemble de tous les nombres irrationnels négatifs, il existe une fonction $f_1(x)$ définie dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels positifs et continue sur cet ensemble dont l'ensemble de valeurs est $E_1$ et une fonction $f_2(x)$ définie sur l'ensemble de tous les nombres irrationnels négatifs et continue sur cet ensemble dont l'ensemble de valeurs est $E_2$.

Posons

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{pour} \quad x \varepsilon X \text{ et } x > 0 \\ f(x) = f_2(x) & \text{pour} \quad x \varepsilon X \text{ et } x < 0. \end{cases}$$

La fonction $f(x)$ définie par les formules (3) dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels $X$ est continue sur cet ensemble et, d'après (1), l'ensemble de ses valeurs coïncide avec l'ensemble $X$.

Désignons par $I$ l'image de cette fonction est supposons que l'ensemble $I$ est uniformisé relativement à l'axe $OY$ par un ensemble $J$.

Posons

$$J_1 = J.\underset{(x,y)}{E}[x > 0],$$
$$J_2 = J.\underset{(x,y)}{E}[x < 0]$$

et désignons par $P_1$ et $P_2$ les projections de l'ensemble $J_1$ respectivement $J_2$ sur l'axe $OY$.

Chaque droite $y = y_0$ où $y_0 \varepsilon X$ rencontrant l'ensemble $J$ précisément en un point,

$$(4)\qquad P_1 + P_2 = X$$

et

$$(5)\qquad P_1 \cdot P_2 = 0.$$

Si $(x, y) \varepsilon J_1$, donc $x > 0$, on a, d'après $J \subset I$ et la première des formules (3), $y = f(x) \varepsilon E_1$, c. à d.

$$(6)\qquad P_1 \subset E_1.$$

Si $(x, y) \in J_2$, donc $x < 0$, on a, d'après $J \subset I$ *et la deuxième des formules* (3), $y = f(x) \in E_2$, c. à. d.

$$(7) \qquad P_2 \subset E_2 .$$

Si $J$ était *un ensemble analytique*, $J_1$ et $J_2$ *en seraient aussi, ainsi que leur projections* $P_1$ *et* $P_2$, ce qui est incompatible, d'après (1), (4), (5), (6) et (7), avec (2).

L'ensemble $J$ n'est pas donc un ensemble analytique.

Il est à remarquer que le théorème suivant est aussi vrai:

*Il existe une fonction semi-continue supérieurement (aussi qu'une fonction semi-continue inférieurement) d'une variable réelle dont l'ensemble de valeurs coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels et dont l'image ne peut pas être uniformisé relativement à l'axe OY au moyen des ensembles analytiques.*

Pour démontrer ce théorème il ne faut que modifier un peu la démonstration précédente en s'appuyant sur le lemme suivant:

*Pour chaque couple d'ensembles analytiques non vides (linéaires)* $E_1$ *et* $E_2$, *il existe une fonction* $f(x)$ *d'une variable réelle semi-continue supérieurement (respectivement inférieurement) et telle que: ou bien l'ensemble de ses valeurs pour* $x \geqslant 0$ *coïncide avec* $E_1$ *et l'ensemble de ses valeurs pour* $x < 0$ *coïncide avec* $E_2$, *ou bien l'ensemble de ses valeurs pour* $x \geqslant 0$ *coïncide avec* $E_2$ *et l'ensemble de ses valeurs pour* $x < 0$ *coïncide avec* $E_1$.

A. D. Michal i E. W. Paxson.

## O różniczce w przestrzeni linjowej abstrakcyjnej.

Przedstawił S. Saks na posiedzeniu w dniu 27 października 1936 r.

Autorzy rozważają abstrakcyjną przestrzeń topologiczną liniową $L$. Układ otoczeń zdefiniowany jest przez aksjomaty, w których pewne zbiory odpowiadające otoczeniom punktu $O$ są terminami nieoznaczonymi. Praca poświęcona jest w pierwszym rzędzie badaniu różniczki zupełnej funkcyj, określonych w przestrzeni $L$ i przyjmujących wartości należące również do tej przestrzeni. Definicja różniczki podana przez autorów polega na uogólnieniu znanej definicji Frécheta. Autorzy rozważają także funkcje zmiennej rzeczywistej, przyjmujące wartości należące do przestrzeni $L$. Dla funkcyj tych określona jest pochodna oraz całka Riemanna.

---

A. D. Michal and E. W. Paxson (Pasadena, California).

## The differential in abstract linear spaces with a topology *)

Mémoire présenté par M. S. Saks dans la séance du 27 octobre 1936.

### § 1.

We define herein a differential for functions on a rather general type of topological space to that space, and verify that it possesses the usual properties. The space concerned is linear in the customary sense and is topologized in a somewhat stronger fashion than that given recently by J. von Neumann [1]), to whose paper we refer the reader for notation and definitions of

*) A résumé of some of our results was given in the Comptes Rendus, Paris, v. 202 (1936), pp. 1741—1743.

[1]) Trans. Amer. Math. Soc., v. 37 (1935), pp. 1 — 20.

which we make frequent use. The novelty of this work lies, we believe, in the fact that the space considered is a non - metric one [2]).

The space $L$, is linear in the sense that its elements (points) which are of completely unspecified nature, form a space closed under the undefined operations of „addition" of elements and „multiplication" of elements by real numbers. The following postulates are to be fulfilled, ($f$, $g \varepsilon L$, $\alpha$ any real number, $\alpha f$, $f + g \varepsilon L$):

(1) $f + g = g + f$ (2) $(f + g) + h = f + (g + h)$
(3) $1 . f = f$ (4) $\alpha (\beta f) = (\alpha \beta) f$
(5) $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$ (6) $\alpha (f + g) = \alpha f + \alpha g$
(7) $f + g = h + g . \supset . f = h$.

The rules of computation for 0 and $- f = (-1) . f$ are readily deduced [1]).

We topologize $L$ by the following postulates, wherein „set" is the undefined notion. A set $\mathfrak{U}$ of sets $U \subset L$ is given such that)[3]:

(1) $U \varepsilon \mathfrak{U} . \supset . 0 \varepsilon U$,
(2) *there is a sequence* $U_1, U_2, \ldots \varepsilon \mathfrak{U}$ *such that* $P(U_1, U_2, \ldots) = (0)$,
(3) $U, V \varepsilon \mathfrak{U} . \supset : \exists (W \varepsilon \mathfrak{U}) . W \subset P(U, V)$,
(4) $U \varepsilon \mathfrak{U} . -1 \leqslant \alpha \leqslant +1 : \supset : \exists (V \varepsilon \mathfrak{U}) . \alpha V \subset U$,
(5) $U \varepsilon \mathfrak{U} . \supset : \exists (V \varepsilon \mathfrak{U}) . V + V \subset U$,
(6) $f \varepsilon L . U \varepsilon \mathfrak{U} : \supset : \exists (\alpha) . f \varepsilon \alpha U$,
(7) $V \varepsilon \mathfrak{U} . \alpha : \supset : \exists (U \varepsilon \mathfrak{U}) . \alpha V = U$ (any $\alpha \neq 0$)
(8) $U, V \varepsilon \mathfrak{U} . \supset : \exists (W \varepsilon \mathfrak{U}) . U + V = W$.

The first six of these are those given by von Neumann. We omit his convexity postulate, $U + U \subset 2 U$, and add two of our own, for which we give independence examples. In this work we do not require topological completeness for $L$. As yet

---

[2]) For treatements of the subject of General Topology, see:
a) Alexandroff-Hopf, Topologie Bd. 1 (Springer, 1935);
b) Fréchet, Les Espaces Abstraits (Gauthier-Villars, 1928);
c) Hausdorff, Mengenlehre, ed. 2, (de Gruyter, 1927);
d) Kuratowski, Topologie I, (Monografje Matematyczne, Warszawa — Lwów, 1933;
e) Sierpiński. General Topology. (Univ. of Toronto Press, 1934).

[3]) For the $P$ ( , , . . .) notation, see Def. 5, below.

we have not considered the independence of the first six postulates from the last two, but we do append two non-metric consistency examples for the set as a whole.

*Independence,* (7). Take for the set $\mathfrak{U}$ the set of all spheres of rational radius only in Banach space[4]) (by a sphere we mean the set of all $x$ with either $\| x \| < \delta$ (open), or $\| x \| \leqslant \delta$ (closed)). Then by taking an irrational $\alpha$, (7) is clearly violated, but it may be seen readily that the remaining postulates are satisfied.

*Independence,* (8). Consider the space of ordered number-pairs in the plane, subjected to the customary vector addition and multiplication by real numbers. Define the neighborhoods of the origin as those point sets bounded by closed, simple, origin-centered, symmetric curves whose minimal radius vectors occur on the axes and whose maximal ones occur on the lines $y = \pm x$.

(1), (3), (6) are clearly fulfilled. Ad (2): Take any one of the sets and consider the denumerable set formed by dividing all radius vectors by $n$. Let $n \to \infty$. Ad (4): Take $V = U$. Ad (5): Let $\rho$ designate the radius vector. Take a $V$ whose $V\rho_{\max} = \frac{1}{2} \cdot U\rho_{\min}$ of a $U$, and diminish all radii of $U$ in the same ratio, so that $V\rho_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{V\rho^2_{\min}}{U\rho_{\max}}\right)$. Then at worst in $V+V$ we have $\frac{1}{2}\sqrt{2}.\ U\rho_{\min}$ $(< U\rho_{\min})$. Ad (7): All radii multiplied by $\alpha$, $\alpha \neq 0$. Ad (8): Violated. Suppose $U + U = W$. Then $\frac{1}{2}\sqrt{2}\ (U\rho_{\max} + U\rho_{\max}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\ W\rho_{\max} = W\rho_{\min}$.

*Consistency Example 1.* Von Neumann shows[5]) that real Hilbert space in its weak topology furnishes a consistent example of the first six postulates. The definition of neighborhood is: for $n = 1, 2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varepsilon H$, $\delta > 0$, define $U_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$ as the set of all $f \varepsilon H$ with $|(f, \varphi_p)| \leqslant \delta$ for $p = 1, \ldots, n$. Ad (7): For $|(f, \varphi_p)| \leqslant \delta$ and a given $\alpha \neq 0$, we have $|(\alpha f, \varphi_p)| \leqslant |\alpha|\, \delta = \eta.\ \alpha f \varepsilon \overline{U}_2$. Ad (8): Take two neighborhoods $U_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$, $U_2(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_m; \overline{\delta})$ for which $|(f, \varphi_p)| \leqslant \delta, p = 1, \ldots, n$;

---

[4]) Banach. Les Opérations Linéaires. (Monografje Matematyczne. Lwów, 1932).

[5]) l. c. Def. 12b.

$|(\bar{f}, \bar{\varphi}_q)| \leqslant \bar{\delta}$, $q = 1, \ldots, m$. One must show that there exist $\bar{\varphi}_r$ and an $\eta > 0$ such that $|(f + \bar{f}, \bar{\varphi}_r)| < \eta$. Take $\bar{\varphi}_r = \varphi_p + \bar{\varphi}_q$, so $r \leqslant nm$. Now $|(f + \bar{f}, \varphi_p + \bar{\varphi}_q)| \leqslant \delta + \bar{\delta} + |(f, \bar{\varphi}_p)| + |(\bar{f}, \varphi_q)|$. By Schwarz' inequality, for any $f \varepsilon H$, $|(f, \bar{\varphi}_q)| \leqslant K_1 |(f, f)|^{1/2}$. Also $|(f, \varphi_p)| \leqslant K_2 |(f, f)|^{1/2}$. Hence for any $f \varepsilon U_2$, $f \neq 0$, $|(f, \bar{\varphi}_q)| \leqslant K_3 \delta$, $K_3 = \dfrac{K_1}{K_2}$. Similarly $|(\bar{f}, \varphi_p)| \leqslant \bar{K}_3 \bar{\delta}$, $\bar{K}_3 = \dfrac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2}$. So take $\eta = \delta + \bar{\delta} + K_3 \delta + \bar{K}_3 \bar{\delta}$, and $U_2 + \bar{U}_2 = \bar{\bar{U}}_2$.

*Consistency Example 2.* Let the space be as in the second independence example. Define, however, a non-denumerable neighborhood system of the origin with the following closed boundary: Let the curve in the first two quadrants be given by $y = f(x)$, a polynomial of any degree in $x$, $\geqslant 4$, subjected to the conditions: (1) $f(x)$ has two real roots only $x_1 = a$, $x_2 = -b$, (2) for $-b < x < a$, $y > 0$, (3) $f(x)$ has no nodes or cusps for $-b < x < a$. Hence $f(x)$ has at least two maxima, $-b < \bar{x}_1 < a$, $-b < \bar{x}_2 < a$. For the lower two quadrants let the bounding curve be similar, but $y < 0$. The first seven postulates are verified without difficulty. Ad (8): Let the curves for the two neighborhoods (upper quadrants) be $f_1(x)$, $f_2(\xi)$ with ranges $-b_1 < x < a_1$, $-b_2 < \xi < a_2$. Then the sum takes $x + \xi \rightarrow f_1(x) + f_2(\xi)$. Hence the situation is that of determining the envelope of the one parameter family $y - f_2(\xi) = f_1(x - \xi)$. The envelope is of the desired sort. We note that in this example no neighborhood is convex (in the usual sense). Hence one of Kolmogoroff's[6]) necessary and sufficient conditions for the metrisibility of a linear topological space is not fulfilled.

## § 2.

We proceed now to restate some fundamental definitions of point set theory prefatory to our definition of the differential.

**Def. 1.** *Given a set $S \subset L$. A point $p$ (not necessarily $\varepsilon S$) will be called a limit point of $S$, if for every $U \varepsilon \mathfrak{U}$, there exists a point $q \varepsilon S$, $q \neq p$, such that $q \varepsilon p + U_i$ ($U_i$ indicates the set of interior points of $U$).*

---

[6]) Kolmogoroff, Studia Math., t. 5 (1934), pp. 29 — 33.

**Theorem 1.** *If $f(x)$ has a differential $f(x_0; z)$ so also has $\alpha f(x)$, $\alpha$ a real number. It is given by $\alpha f(x_0; z)$.*

*Proof.* We must show that, for $\bar{\rho}$ arbitrary

$$\alpha f(x_0 + z) - \alpha f(x_0; z) \varepsilon \alpha f(x_0) + \bar{U}_i^{\bar{\rho} z}, \; z \varepsilon \bar{V}_i(\bar{\rho}), \; z \neq 0.$$

By hypothesis $f(x_0 + z) - f(x_0; z) \varepsilon f(x_0) + U_i^{\rho z}$, $z \varepsilon V_i(\rho)$, $z \neq 0$. Take $\bar{\rho} = \alpha\rho$. Then $V_i(\bar{\rho}/\alpha) = \bar{V}_i(\bar{\rho})$. For $z \varepsilon \bar{V}_i(\bar{\rho})$ then, we also have $\alpha f(x_0 + z) - \alpha f(x_0; z) \varepsilon \alpha f(x_0) + \alpha U_i^{\bar{\rho} z/\alpha}$. But by Lemma 1, $\alpha U_i^{\bar{\rho} z/\alpha} = \bar{U}_i^{\bar{\rho} z}$. Finally if $f(x_0; z)$ is linear, so also is $\alpha f(x_0; z)$.

**Theorem 2.** *If $f(x)$ and $g(x)$ have differentials $f(x_0; z)$ and $g(x_0; z)$ respectively, then $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ has a differential given by $\varphi(x_0; z) = g(x_0; z) + f(x_0; z)$.*

*Proof.* $f(x_0 + z) - f(x_0; z) \varepsilon f(x_0) + {}_1U_i^{\rho_1 z}$, $z \varepsilon {}_1V_i(\rho_1)$,

$g(x_0 + z) - g(x_0; z) \varepsilon g(x_0) + {}_2U_i^{\rho_2 z}$, $z \varepsilon {}_2V_i(\rho_2)$.

Hence $[f(x_0 + z) + g(x_0 + z)] - [f(x_0; z) + g(x_0; z)] \varepsilon [f(x_0) + g(x_0)] + [{}_1U_i^{\rho_1 z} + {}_2U_i^{\rho_2 z}]$ for $z \varepsilon \boldsymbol{P}({}_1V_i(\rho_1), {}_2V_i(\rho_2))$. Write $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Then by P3 we have $V_i(\rho) \subset \boldsymbol{P}[{}_1V_i(\rho), {}_2V_i(\rho)]$. Also by Lemma 3, ${}_1U_i^{\rho_1 z} + {}_2U_i^{\rho_2 z} = U_i^{2\rho z}$. Finally $\varphi(x_0; z) = f(x_0; z) + g(x_0; z)$ is the sum of two linear functions.

**Theorem 3.** *If $f(x)$ on $L$ to $L$ has a differential $f(x_0; z)$, then $f(x)$ is continuous at $x = x_0$.*

*Proof.* By definition $f(x_0 + z) - f(x_0; z) \varepsilon f(x_0) + U_i^{\rho z}$ for $z \varepsilon V_i(\rho)$. By P6, there exists a set of $\alpha$ such that $f(x_0; z) \varepsilon \alpha W$, $W \varepsilon \mathfrak{U}$, where $\alpha = \alpha(z, W)$. Since ($f(x_0; z)$ is linear, an open set $T$ determines an open set $S = S(T)$ such that for $f(x_0; z_0) \varepsilon T$ and $z_0 \varepsilon S$, $z \varepsilon S . \supset . f(x_0; z) \varepsilon T$. Because of the additivity $0 \varepsilon T$. Then we may take $T = W_i$, $z_0 = 0$. Thus

$$f(x_0; z) \varepsilon \alpha W, \; z \varepsilon V_i(\rho); \; f(x_0; z) \varepsilon W_i, \; z \varepsilon S(W).$$

Consequently $f(x_0; z) \varepsilon W_i$ for $z \varepsilon \boldsymbol{P}[V_i(\rho), S(W)] = I(\rho, W)$; $I$ is open, $0 \varepsilon I$. Then putting $x_0 + z = x$, $f(x) \varepsilon f(x_0) + W_i + U_i^{\rho z}$ for $z \varepsilon I(\rho, W)$. That is, $f(x) \varepsilon f(x_0) + R(z, \rho, W)$. But the values of $z$ depend, through $I$, on $\rho$ and $W$ also. Hence we may generate a fixed inclusive class $R = R(\rho, W)$, so that $f(x) \varepsilon f(x_0) + R(\rho, W)$ for $z \varepsilon I(\rho, W)$. Since $\rho$ and $W$ are arbitrary, make $W = W(\rho)$. Then $R = R(\rho)$, $I = I(\rho)$, dependence on $\rho$ alone. Reciprocally by choosing $R$ one may determine $\rho$. Now $I = I(R)$ and the conditions for the continuity of $f(x)$ at $x = x_0$, are satisfied.

Definition 7 extended the Fréchet differential to spaces more general in character than Banach spaces. It is also possible to define in $L$ an extended form of the Gateaux differential usually defined for normed vector spaces.

**Def. 9.** *Let $f(x)$ be on $L$ to $L$. Then if there exists a function $f(x, y)$ on $L \times L$ to $L$, such that given any $U \varepsilon \mathfrak{U}$ there is determined a $\delta = \delta(U)$ so that for all $|\lambda| < \delta(U)$,*

$$f(x_0 + \lambda y) - \lambda f(x_0, y) \varepsilon f(x_0) + \lambda U_i,$$

*then $f(x_0, y)$ will be called the differential (à la Gateaux) of $f(x)$ at $x = x_0$.*

**Theorem 4.** *If $f(x)$ on $L$ to $L$ has a differential at $x = x_0$ in the sense of Def. 7, then it has a differential at $x = x_0$ in the sense of Def. 9, and the two are equal.*

*Proof.* In Def. 7 (2) put $z = \lambda y$. Then

$$f(x_0 + \lambda y) - f(x_0; \lambda y) \varepsilon f(x_0) + U_i^{\rho \lambda y}, \ \lambda y \varepsilon V_i(\rho),$$

wherein $y$ is assumed to be held fixed. That is, $\lambda$ is varied to give a set $\lambda y \varepsilon V_i(\rho)$. Hence $\lambda = \lambda(\rho)$. Now by the continuity of $\lambda y$, $|\lambda| < \delta[V_i(\rho)] \,.\supset.\, \lambda y \varepsilon V_i(\rho)$. Due to the linearity of $f(x_0; z)$ and Lemma 1, $f(x_0 + \lambda y) - \lambda f(x_0; y) \varepsilon f(x_0) + \lambda(\bar{U}_i^{\rho y})$. Since $y$ is fixed, $\bar{U}_i^{\rho y} = \bar{U}_i(\rho)$. Conversely then, selecting $\bar{U}$, determines $\rho$ and hence $V$, so that $V = V(\bar{U})$. Finally

$f(x_0 + \lambda y) - \lambda f(x_0; y) \varepsilon f(x_0) + \lambda \bar{U}_i$ for $|\lambda| < \delta = \delta(V) = \bar{\delta}(\bar{U})$.

**Def. 10.** *A sequence $f_1, f_2, \ldots . \varepsilon L$, is convergent if, for every $U \varepsilon \mathfrak{U}$ an $f$ can be found such that there exists an $n_1 = n_1(U)$ so that $n > n_1(U) \,.\supset.\, f - f_n \varepsilon U_i$. Then $f$ is called the limit of the sequence.*

**Lemma 6.** *If $p \neq q$, $p, q \varepsilon L$, there exist $U, V \varepsilon \mathfrak{U}$ such that $P(p + V_i, q + U_i) = 0$, the null-class.*

*Proof.* Von Neumann proves (l. c.[1])) that P1—P6 imply that Hausdorff's axiom 6 (l. c.[2])) is fulfilled. By Lemma 5, the $U$'s may be imbedded in the sets of the axiom.

**Theorem 5.** *If a sequence $\{f_n\}$ converges to a limit $f$, then that limit is unique.*

*Proof.* Suppose $f^* \neq f$ is also a limit of the sequence. Then by Def. 10, $f - f_n \varepsilon U_i$, $n > n_1(U)$; $f^* - f_m \varepsilon U_i$, $m > n_2(U)$, using the same arbitrary $U$. Let $n_2 = \max(n_1, n_2)$. Then $f - f_m \varepsilon U_i$, $f^* - f_m \varepsilon U_i$, and $f - f^* \varepsilon U_i - U_i$, where $U_i - U_i \neq 0$ since it represents all possible element differences of $U_i$. By P4 if $V \varepsilon \mathfrak{U}$ there is a $U \varepsilon \mathfrak{U}$ such that $\pm U \subset V$. Select $U$ in this way and let $V$ become arbitrary. So $f - f^* \varepsilon V + V$. But by P5, if $W \varepsilon \mathfrak{U}$, there is a $V$ such that $V + V \subset W$. Select $V$ in this way and $W$ becomes arbitrary. Now $f - f^* \varepsilon W$, $W \varepsilon \mathfrak{U}$. Hence $f - f^*$ is in every member of the sequence of P2. Thus $f - f^*$ can only be 0. This is the contradiction.

We notice that it is possible to phrase Definition 9 as a limit. First write $\frac{1}{\lambda}\left[f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)\right] - f(x_0, y) \varepsilon U_i$ for $0 < |\lambda| < \delta(U)$. Now form the sequence

$$\{f_n\} \equiv \left\{\frac{\bar{\lambda}}{2^{n-1}}\left[f(x_0 + \frac{\bar{\lambda}}{2^{n-1}} y) - f(x_0)\right]\right\}$$

where $\bar{\lambda}$ is any fixed number. Hence whatever $\delta$ any $U$ selected determines, an $n_1$ is determined so that for $n \geqslant n_1(U)$, $|\lambda| < \delta(U)$. Thus $f(x_0, y)$ is the limit of $\{f_n\}$ as $n \to \infty$.

**Theorem 6.** *The differential of Def. 7 is unique.*

*Proof.* By Theorem 5, $f(x_0, y)$ is unique. But $f(x_0, y)$ is implied by $f(x_0; z)$ and the two are equal by Theorem 4. This completes the proof.

We digress briefly to consider boundedness, a notion here permitted to the topology by the linearity of the space.

**Def. 11** (von Neumann). *$S \subset L$ is bounded if for each $U \varepsilon \mathfrak{U}$, there is determined an $\alpha = \alpha(U, S)$, such that $S \subset \alpha U$. $0 \varepsilon S$.*

**Def. 12.** *$S \subset L$ is bounded if there exists no $x_0 \varepsilon S$ such that all $x \varepsilon \lambda x_0$ ($\lambda$ all values) $\varepsilon S$. $0 \varepsilon S$.*

In both of the preceding Definitions we took $0 \varepsilon S$, with no loss of generality, because of the linearity of the space.

**Def. 13.** *A function to $L$ is bounded if its set of values lies in a bounded set.*

**Def. 14.** *A set $L_c \subset L$ will be called convex, if for any two points $x_0, x_1 \varepsilon L_c$, the set of points $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, lies entirely within $L_c$.*

**Def. 15.** *A centered convex set is a set of points containing 0, and containing all points of all finite line segments through 0, i. e. $x_0 \varepsilon F(S)$, $x = \lambda x_0$, $|\lambda| \leqslant 1$, $x \varepsilon S$.*

**Lemma 7.** *Definition 11 is equivalent to Definition 12.*

*Proof.* Ad (11) $. \supset .$ (12) : Let $S$, $0 \varepsilon S$ be bounded (11). Suppose *non*-(12), i. e. $\exists\, x_0 \varepsilon S$, such that all $\lambda x_0 \varepsilon S$. Then for each $U \varepsilon \mathfrak{U}$. there is determined $\alpha = \alpha\ (U, S)$, such that $\lambda x_0 \varepsilon S \subset \alpha U$, all $\lambda$. Then $\bar{\lambda}\, x_0 \varepsilon U$ all $\bar{\lambda} (= \lambda/\alpha)$. Take $U = W_k$, $W_{k+1} \subset W_k$, $P(W_1, W_2, \ldots.) = (0)$. Then $\bar{\lambda}\, x_0 \varepsilon W_k$, all $\bar{\lambda}$. This is impossible. *non*-(12) $. \supset .$ *non*-(11), (11) $. \supset .$ (12). Ad (12) $. \supset .$ (11): Let $S$, $0 \varepsilon S$, be bounded (12). Then for every $x_0 \varepsilon S$ there exists a $\delta\ (x_0, S)$ such that no $x\ (= \mu\, x_0,\ \mu > \delta)\ \varepsilon\ S$. Take $\delta\, x_0 \varepsilon S$, since one may always take $\bar{S}$ (if $\bar{S}$ is bounded so also is $S_i$). Construct the set of $\delta$, $\triangle\ (S)$, that is let $x_0$ (parameter) range over $F\,(S)$. By P6, for $\delta\, x_0$, there is determined $\alpha = \alpha\ (x_0, U, S)$ such that $\delta\, x_0 \varepsilon \alpha U$, any $U \varepsilon \mathfrak{U}$. By P4, given $U \varepsilon \mathfrak{U}$, one determines $V = V\,(U)$, $\beta V \subset U$, $-1 \leqslant \beta \leqslant +1$. Hence $\nu V \subset \alpha U$, $-\alpha \leqslant \nu \leqslant +\alpha$. That is, if $z \varepsilon V$, $\nu z \varepsilon \alpha U$, $-\alpha \leqslant \nu \leqslant +\alpha$. Thus given any $U$, a centered convex inner set as large as desired may be constructed for $\alpha U$, by taking $\alpha$ as large as necessary. Consider, in $S$, the sheaf of line segments through the 0-element. By hypothesis the class $\triangle$ terminates these finitely. By isomorphic mapping derive a set of $\alpha$'s, A, so that $\alpha \backsim \delta$, $A \backsim \triangle$. Take l. u. b. $A = \alpha^* \varepsilon A$. Then $S \subset \alpha^* U$. This completes the equivalence.

## § 3.

It is now necessary to develop somewhat the theory of derivatives and generalized Riemann integrals for functions on $R$, the real number system, to the space $L$ [11]. Let $f\ (\alpha)$ be on $R$ to $L$. Then one defines a derivative as follows.

**Def. 16.** *If there exists a function $f'\,(\alpha)$ on $R$ to $L$, such that for all $U \varepsilon \mathfrak{U}$, $\frac{1}{\lambda}\ [f\,(\alpha_0 + \lambda) - f\,(\alpha_0)]\ \varepsilon\ f'\,(\alpha_0) + U_i$, for $|\lambda| < \delta\ (U)$, then $f'(\alpha_0)$ will be called the derivative of $f\,(\alpha)$ at $\alpha = \alpha_0$.*

**Theorem 7.** *$f'\,(\alpha_0)$, if it exists, is unique.*

*Proof.* As in the discussion following Theorem 5. We now have an existence theorem for $f'\,(\alpha)$.

---

[11]) A fuller discussion of this theory will be given by one of the authors in another paper.

**Theorem 8.** *If $f(x)$ on $L$ to $L$ has a differential in the sense of Def. 7 at all points $x$ in a convex set $L_c \subset L$, then $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$ has a derivative $\varphi'(t)$ for all $t$ in $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

*Proof.* Since $f(x; \delta x)$ exists for all $x \varepsilon L_c$, $f(x, \delta x)$ exists for all $x \varepsilon L_c$. Hence, phrasing $f(x, \delta x)$ as a sequential limit we have, putting

$$\lambda = 2^{n-1}\lambda_n, \quad \lim_{\lambda_n \to 0} \left[\frac{1}{\lambda_n}\left(f(x + \lambda_n \delta x) - f(x)\right)\right] = f(x, \delta x).$$

Since $L_c$ is convex, $\delta x = \delta t (x_1 - x_0)$. Thus

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \left[\frac{1}{\lambda_n}\Big(f(x_0 + t(x_1 - x_0) + \lambda_n \delta t (x_1 - x_0)) - f(x_0 + t(x_1 - x_0))\Big)\right] =$$

$$= f(x_0 + t(x_1 - x_0), \delta t (x_1 - x_0)),$$

or $$\lim_{\mu \to 0} \left[\frac{1}{\mu}\left(\varphi(t + \mu) - \varphi(t)\right)\right] = \varphi^*, \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

We emphasize that $x_0$, $x_1$ are only abstract parameters. Thus $\varphi^* = \varphi'(t)$ which exists for $0 \leqslant t \leqslant 1$.

We proceed to integrals of Riemann type.

**Def. 17.** *Let $f(\alpha)$ be bounded on $(\alpha_0, \alpha_1)$ to $L$ (Def. 13). Consider any subdivision $\pi$ of $(\alpha_0, \alpha_1)$, $\alpha_0 = \bar{\alpha}_1 \leqslant \bar{\alpha}_2 \leqslant \ldots \leqslant \bar{\alpha}_i \leqslant \ldots \leqslant \bar{\alpha}_n = \alpha_1$. Let $\beta_i$ be an arbitrary point in $(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i+1})$. Then, if given any $U \varepsilon \mathfrak{U}$ there is determined a $\delta = \delta(U)$ such that for all subdivisions $\pi$ with l. u. b. $(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \leqslant \delta(U)$ there exists an element $I \varepsilon L$ so that*

$$\sum_{\pi} f(\beta_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \;\varepsilon\; I + U_i$$

*is fulfilled for every choice of $\beta_i \varepsilon (\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i+1})$, $I$ is called the definite integral of $f(\alpha)$ from $\alpha_0$ to $\alpha_1$, and is denoted as usual by*

$$I = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(\alpha)\, d\alpha.$$

*$f(\alpha)$, in this event, is said to be integrable.*

**Theorem 9.** *I, if it exists, is unique.*

*Proof.* A $\delta$-subdivision determines an $n$-subdivision, i. e. $(\alpha_0, \alpha_1)$ into $n-1$ parts with $n \geqq n_1 = n_1(U)$ such that

$$\sum_{i=1}^{n-1}{}_s f(\beta_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \varepsilon I + U_i \, .$$

Hence the sequence of partial sums,

$$\left\{\sigma_n\right\} \equiv \left\{\sum_{i=1}^{n-1}{}_s f(\beta_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i)\right\}$$

has $I$ for a limit. Uniqueness by Theorem 5.

**Theorem 10.** *If $f(\alpha)$ on $(\alpha_0, \alpha_1)$ to $L$ has a derivative on $(\alpha_0, \alpha_1)$ which is integrable on, $(\alpha_0, \alpha_1)$ then* $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f'(\alpha)\, d\alpha = f(\alpha_1) - f(\alpha_0)$.

*Proof.* Take $\alpha_0 < \alpha_1$. Let $U \varepsilon \mathfrak{U}$ be arbitrary. Then there is determined a $\delta = \delta(U)$ such that, for every subdivision $\pi$ with l. u. b. $(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \leqq \delta$ and for every $\beta$ in $(\alpha_0, \alpha_1)$ of $\pi$,

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\pi} f'(\beta_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f'(\alpha)\, d\alpha \;\varepsilon\; U_i \, .$$

For each $\beta \varepsilon (\alpha_0, \alpha_1)$ there exists a $t_\beta$, $0 < t_\beta \leqq \delta$, such that for each point $\beta' \varepsilon (\alpha_0, \alpha_1)$ satisfying $|\beta' - \beta| < t_\beta$,

$$\text{(B)} \qquad f(\beta') - f(\beta) - (\beta' - \beta) f'(\beta) \;\varepsilon\; |\beta' - \beta| \,.\, U_i$$

The open intervals $I_\beta \equiv (\beta - t_\beta < \beta' < \beta + t_\beta)$ constitute a set covering $(\alpha_0\ \alpha_1)$. Applying the Heine-Borel theorem, a finite set of them, with centers at $\rho_1 < \rho_2 < \ldots\ldots < \rho_m$ also cover $(\alpha_0, \alpha_1)$, $(\rho_1 = \alpha_0, \rho_m = \alpha_1)$. For each $I_k$, when $\beta \varepsilon I_k$ or is an end-point of $I_k$ by (B) we have

$$\text{(C)} \qquad f(\beta) - f(\rho_k) - f'(\rho_k)(\beta - \rho_k) \;\varepsilon\; |\beta - \rho_k|\, U_i \, .$$

Then by Graves' reasoning[12]),

[12]) L. M. Graves, Trans. Amer. Math. Soc., v. 29 (1927), p. 171.

(D) $\quad f(\bar{\alpha}_{i+1}) - f(\bar{\alpha}_i) - f'(\rho_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \,\varepsilon\, (\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i)\, U_i$

for every $i$. Hence from (D), P7, P8, ($W$ now arbitrary),

(E) $$\sum_{\pi} \left\{ f(\bar{\alpha}_{i+1}) - f(\bar{\alpha}_i) - f'(\rho_i)(\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i) \right\} \,\varepsilon\, W_i .$$

So that with (A)

$$\sum_{\pi} \left\{ f(\bar{\alpha}_{i+1}) - f(\bar{\alpha}_i) \right\} - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f'(\alpha)\, d\alpha \,\varepsilon\, U_i + W_i = \overline{W}_i .$$

But for any $\pi$,

$$f(\bar{\alpha}_1) - f(\alpha_0) + f(\bar{\alpha}_2) - f(\bar{\alpha}_1) + \ldots + f(\alpha_1) - f(\bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1) - f(\alpha_0).$$

Hence $$g = f(\alpha_1) - f(\alpha_0) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f'(\alpha)\, d\alpha \,\varepsilon\, \overline{W}_i .$$

But $\overline{W}$ is now arbitrary. Hence $g$ must be in each member of the sequence of P2. Thus $g$ can only be the 0-element. This completes the proof.

The main purpose of this section was to obtain.

**Theorem 11.** *Let $f(x)$ on $L$ to $L$ have a vanishing differential $f(x; z)$ (Def. 7) at all points $x$ of a convex set $L_c \subset L$. Then $f(x)$ is an abstract constant on this region.*

*Proof.* $\varphi'(t)$ exists by Theorem 8, and $\varphi'(t) = 0$ for $0 \leqslant t \leqslant 1$. Hence $\varphi'(t)$ is integrable and by Theorem 10, $\varphi(1) - \varphi(0) = 0$. Since $\varphi'(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$, $f(x_1) = f(x_0)$. But $x_1$, $x_0$ are any two points in $L_c$. Hence $f(x)$ is constant over $L_c$.

## § 4.

The question of the differentiability of iterations of differentiable functions appears to be, in spaces such as $L$, difficult to answer affirmatively with complete generality. The following theorem furnishes, however, a necessary and sufficient condition for such differentiability.

**Theorem 12.** *Let $f(y)$ be on $L^1$ to $L^2$, and let it possess a differential on its domain $L^1$. Let $y = g(x)$ be on $L^0$ to $L^1$ and let it possess a differential on its domain also. Then $\varphi(x) =$*

$= f(g(x))$ *on* $L^0$ *to* $L^2$ *possesses a differential on* $L^0$ *if, and only if, for* $\tau > 0$, *and some* $U \varepsilon \mathfrak{U}$ *that has* $\tau z$ *as a frontier point,*

$$f(g(x_0 + z)) \varepsilon f(g(x_0) + g(x_0; z)) + U_i^{\tau z} \text{ for } z \varepsilon V_i(\tau).$$

*The differential is given by* $\varphi(x_0; z) = f(g(x_0); g(x_0; z))$.

*Proof.* By hypothesis $f(y_0 + w) - f(y_0; w) \varepsilon f(y_0) + U_i^{\rho w}$ for $w \varepsilon V_i(\rho)$. We may write

$f(g(x_0) + g(x_0; z)) - f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon f(g(x_0)) + U_i^{\rho g(x_0; z)}$ for $g(x_0; z) \varepsilon V_i(\rho)$. By Def. 7, $g(x_0; z)$ is continuous in $z$ in the neighborhood of 0. Taking $V_i(\rho)$ arbitrary, there exists an open set $S$, $0 \varepsilon S$ ($S(V(\rho)) = S(\rho)$, dependence) so that $z \varepsilon S$ implies $g(x_0; z) \varepsilon V_i(\rho)$. By Lemma 5, there exists a $\overline{V}$, $\overline{V}_i \subset S$. Consider via P3, $\overline{\overline{V}}_i(\rho) \subset \boldsymbol{P}(\overline{V}_i, V_i)$. Finally for $z \varepsilon \overline{\overline{V}}_i(\rho)$, $z \neq 0$,

(A) $f(g(x_0 + z)) - f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon f(g(x_0)) + U_i^{\rho z}$.

Ad sufficiency: By hypothesis, taking $\tau = \rho > 0$,

(B) $f(g(x_0 + z)) \varepsilon f(g(x_0) + g(x_0; z)) + U_i^{\rho z}$.

Both (A) and (B) hold (P3) for $z \varepsilon V_i^*(\rho) \subset \boldsymbol{P}(V_i(\rho), \overline{\overline{V}}_i(\rho))$.

Hence using Lemma 3,

$f(g(x_0 + z)) - f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon f(g(x_0)) + U_i^{\mu z}$, $\mu = 2\rho$.

That is, $\varphi(x_0 + z) - f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon \varphi(x_0) + U_i^{\mu z}$ for $z \varepsilon V_i^*(\mu), z \neq 0$.

This proves the sufficiency.

Ad necessity: Suppose $f(g(x_0 + z)) - f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon f(g(x_0)) + U_i^{\mu}$ for $z \varepsilon V_i^*(\mu)$, $z \neq 0$. (A) may be written

$-f(g(x_0) + g(x_0; z)) + f(g(x_0); g(x_0; z)) \varepsilon - f(g(x_0)) - (U_i^{\mu z})$ for $z \varepsilon V_i^*(\mu)$.

Then by P7, $-(U_i^{\mu z}) = W_i^{\overline{\mu} z}$.

Hence $f(g(x_0 + z)) \varepsilon f(g(x_0) + g(x_0; z)) + U_i^{\mu z} + W_i^{\overline{\mu} z}$ for $z \varepsilon V_i^*(\mu)$.

And by Lemma 3, $f(g(x_0 + z)) \varepsilon f(g(x_0) + g(x_0; z)) + \overline{U}_i^{\lambda z}$, $z \varepsilon V_i^*(\lambda)$.

This completes the proof.

As a rapid corrollary we note that if $g(x)$ is a linear function, $f(g(x_0 + z)) = f(g(x_0) + g(z))$ and $g(x_0; z) = g(z)$ so that $f(g(x_0) + g(x_0; z)) = f(g(x_0) + g(z))$. Thus the condition of Theorem 12 is trivially satisfied. Further a linear function is clearly differentiable in our sense.

## § 5.

We discuss briefly the matter of total and partial differential of functions with a finite number of arguments.

**Def. 18.** *Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be on $L^{(n)}$ to $L$. If there exists a function $f(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_n)$ on $L^{(2n)}$ to $L$, that satisfies the following conditions,*

(1) *$f(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_n)$ is additive and continuous in the set $z_1, \ldots, z_n$,*

(2) *if, given $\rho > 0$, there is determined a set ${}_kV_i(\rho) \varepsilon \mathfrak{U}$, $k = 1, \ldots, n$, such that for some set ${}_kU \varepsilon \mathfrak{U}$, $k = 1, \ldots, n$, with $\rho z_k$ a frontier point of ${}_kU$, $z_1 \varepsilon {}_1V_i(\rho), \ldots, z_n \varepsilon {}_nV_i(\rho)$ implies*

$$f(x_1^0 + z_1, \ldots, x_n^0 + z_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0; z_1, \ldots, z_n) \varepsilon f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + {}_1U_i^{\rho z_1} + \cdots + {}_nU_i^{\rho z_n}$$

*wherein not all of the $z_k$ are 0, then we say that $f(x_1, \ldots, x_n)$ has a total differential $f(x_1^0, \ldots, x_n^0; z_1, \ldots, z_n)$ at $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$.*

**Theorem 13.** *If the total differential $f(x_1^0, \ldots, x_n^0; z_1, \ldots, z_n)$ exists, so do all the partial differentials.*

*Proof.* By Lemma 3, ${}_1U_i^{\rho z_1} + \cdots + {}_nU_i^{\rho z_n} = W_i^{\rho(z_1 + \ldots + z_n)}$.
Hence take $z_1 = \ldots = z_{k-1} = z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$.
Then we have $z_k \varepsilon {}_kV_i(\rho)$, $z_k \neq 0$ implies

$$f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + z_k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0; 0, \ldots, z_k, \ldots, 0) \varepsilon f(x_1^0, \ldots, x_n^0) + W_i^{\rho z_k}.$$

Thus $f(x_1^0, \ldots, x_n^0; 0, \ldots, z_k, \ldots, 0) = f(x_1^0, \ldots, x_n^0; z_k)$.

**Theorem 14.** *If the total differential exists, it is the sum of the partial differentials.*

*Proof.* For simplicity take $n = 2$. The finite induction will be immediate. $f(x_1^0, x_2^0; z_1, z_2)$ is linear in the set $z_1, z_2$. Hence

$$f(x_1^0, x_2^0; z_1, z_2) = f(x_1^0, x_2^0; z_1, 0) + f(x_1^0, x_2^0; 0, z_2).$$

And, (vide proof of Theorem 13)

$$f(x_1^0, x_2^0; z_1, z_2) = f(x_1^0, x_2^0; z_1) + f(x_1^0, x_2^0; z_2).$$

**Theorem 15.** *If the total differential exists, it is unique.*

**Proof.** By Theorems 14 and 6, it is the sum of unique functions.

§ 6.

In conclusion, we remark that most of the above theory remains valid, if the space $L$ be one with complex multipliers. One changes the postulates in an obvious manner. For P4, take $|\alpha| \leqslant |1|$. In P6, P7 permit the $\alpha$ to be complex.

California Institute of Technology
Pasadena, California
March, 1936.

A. Polak.

## Uwagi o ciągłych przekształceniach.

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu dn. 27 października 1936 r.

Autor bada przekształcenia ciągłe, dla których pojęcie zbioru otwartego (wzgl. domkniętego) jest niezmiennikiem.

A. Polak.

## Einige Bemerkungen über stetige Abbildungen.

Note présentée par M. C. Kuratowski dans la séance du 27 octobre 1936.

§ 1.

1. Bekanntlich spielen unter den stetigen Abbildungen die *abgeschlossenen* und die *offenen* Abbildungen eine besonders wichtige Rolle. Eine stetige Abbildung des topologischen Raumes $X$ auf den topologischen Raum $Y$ heisst abgeschlossen bzw. offen, wenn das Bild jeder abgeschlossenen bzw. jeder offenen Teilmenge von $X$ eine in $Y$ abgeschlossene bzw. offene Punktmenge von $Y$ ist. Eine Abbildung soll *perfekt* heissen, wenn sie abgeschlossen und offen ist. In dieser Note untersuchen wir die offenen Abbildungen insbesondere der höchstens eindimensionalen Räume.

Wir beginnen mit der folgenden fast selbstverständlichen Bemerkung über abgeschlossene Abbildungen:

I. *Eine Abbildung $f$ von $X$ auf $Y$ ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn bei jeder Wahl der Punktmenge $A \subset X$ gilt:*

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}. \tag{1}$$

B e w e i s. Bekanntlich bedeutet die Inklusion

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

die Stetigkeit von $f$. Somit bleibt übrig zu zeigen, dass die Relation (1) (auf alle $A \subset X$ angewendet) die abgeschlossenen Abbildungen unter den stetigen auszeichnet. Ist $f$ nicht abgeschlossen, so gibt es eine abgeschlossene Menge $A = \bar{A}$ mit nicht abgeschlossenem Bilde, so dass

$$f(\bar{A}) = f(A) \neq \overline{f(A)}$$

ist, und (1) nicht erfüllt ist. Ist andererseits $f$ abgeschlossen und $A \subset X$ beliebig, so ist wegen der Stetigkeit von $f$ zuerst

$$f(A) \subset f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)},$$

also, da $f(\bar{A})$ abgeschlossen und $\overline{f(A)}$ die kleinste abgeschlossene Menge über $f(A)$ ist, notwendig $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

II. *Eine Abbildung $f$ von $X$ auf $Y$ ist dann und nur dann offen, wenn bei jeder Wahl der Punktmenge $B \subset Y$ gilt:*

$$f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)} \tag{2}$$

B e w e i s. Ist $f$ nicht offen, so gibt es eine Umgebung $U$ eines Punktes $a$ von $X$ derart, dass $b = f(a)$ kein innerer Punkt von $f(U)$ ist. Somit ist $b$ Berührungspunkt von $B = Y - f(U)$, $b \subset \bar{B}$. Nun ist aber

$$f^{-1}(B) \,.\, U(a) = 0,$$

also $a$ nicht in $\overline{f^{-1}(B)}$ enthalten, während andererseits $a \subset f^{-1}(\bar{B})$ ist. Die Bedingung (2) ist also nicht erfüllt.

Es sei jetzt $f$ offen und $b \subset \overline{B}$, $b = f(a)$, $A = f^{-1}(B)$ $U$ eine beliebige Umgebung von $a$. Wegen $f(U) \supset V(b)$ wobei $V(b)$ eine gewisse Umgebung von $b$ ist, muss $U$ Punkte von $A$ enthalten (denn sonst würde in $V(b)$ kein Punkt von $B$ liegen). Somit ist $a \subset \overline{A}$, d. h. $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$. Andererseits ist $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$, folglich — wegen der Abgeschlossenheit von $f^{-1}(\overline{B})$ —

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B}),$$

also (II) bewiesen.

2. Ist $f$ eine offene Abbildung von $X$ auf $Y$ und $A$ eine Punktmenge von $X$, so braucht die Abbildung $f$ von $A$ auf $f(A)$ natürlich keine offene Abbildung zu sein. Wohl aber gilt

III. *Ist $A = f^{-1}(B)$, wobei $B \subset Y$ beliebig ist, so ist die Abbildung $f$ von $A$ auf $B$ offen.*

Denn ist $H$ eine in $A$ offene Menge, also $H = A . G$ mit in $X$ offenem $G$, so ist — wegen $A = f^{-1}(B)$ — nicht nur $f(H) = f(A . G) \subset f(A) . f(G)$, sondern auch

$$f(A . G) = f(A) . f(G) = B . f(G),$$

woraus angesichts der Offenheit von $f(G)$ die Behauptung folgt.

Wir bemerken schliesslich noch:

IV. *Ist $f$ eine offene Abbildung von $X$ auf $Y$ und $A$ offen in $X$, so ist die Begrenzung von $R = f(A)$ in dem Bilde der Begrenzung von $A$ enthalten; ist darüber hinaus $A = f^{-1}(B)$, so wird die Begrenzung von $A$ sogar auf die Begrenzung von $B$ abgebildet.*

V. *Ist $B$ eine abgeschlossene nirgendsdichte Punktmenge in $Y$, so ist ihr Urbild $A = f^{-1}(B)$ bei der offenen Abbildung $f$ von $X$ auf $Y$ nirgendsdicht in $X$.*

Die Beweise von IV und V dürfen dem Leser überlassen bleiben.

## § 2.

Wir wenden jetzt die obigen Resultate auf die höchstens eindimensionalen Räume an. Wir gehen von der Urysohn-Mengerschen Definition der Verzweigungsordnung aus, ergänzen aber diese Definition sinngemäss dadurch, dass wir sagen, dass $R$ in seinem Punkte $a$ die Ordnung Null hat, wenn $R$ in diesem Punkte nulldimensional ist.

Sodann folgt aus der Definition der Verzweigungsordnung, der Definition der Offenheit (bzw. Perfektheit) einer Abbildung und den obigen Sätzen I und IV:

VI. *Bei einer perfekten Abbildung eines topologischen Raumes wird die Ordnung keines Punktes erhöht.*

D. h. es ist $\mathrm{ord}_x X \geq \mathrm{ord}_{f(x)} f(X)$.

Hierin ist enthalten:

VI′. *Bei einer offenen Abbildung eines Kompaktums wird die Ordnung keines Punktes erhöht.*

VI″. *Das perfekte Bild eines nulldimensionalen Raumes ist nulldimensional.*

Korollar II. *Das offene Bild einer rationalen Kurve ist eine rationale Kurve oder ein Punkt.*

Korollar III. *Das offene Bild einer geschlossenen Jordankurve ist entweder eine geschlossene Jordankurve oder ein Jordanbogen oder ein Punkt. Das offene Bild eines Jordanbogens ist ein Jordanbogen oder ein Punkt.*

2. Noch eine Bemerkung über Kontinua, die keine Häufungskontinua (d. h. keine nirgendsdichten Teilkontinua) enthalten. Urysohn hat die Struktur dieser Kontinua vollständig geklärt. Wir beweisen:

VII. *Ist $f$ eine offene Abbildung von $X$ auf $Y$ und $X$ ein Kontinuum ohne Häufungskontinua, so ist auch $Y$ ein Kontinuum ohne Häufungskontinua.*

Denn wäre $C$ ein Häufungskontinuum von $Y$, d. h. ein in $Y$ nirgensdichtes Teilkontinuum, so wäre $f^{-1}(C)$ ein in $X$ nirgendsdichtes Kompaktum, welches nach III mittels $f$ auf $C$ offen abgebildet wäre. Nach VI″ kann $f^{-1}(C)$ nicht nulldimensional sein, muss folglich ein Teilkontinuum enthalten, welches erst recht nirgendsdicht in $X$ ist.

3. Zum Schluss zeigen wir durch ein Beispiel, *dass es offene (jedoch nicht perfekte) Abbildungen gibt, die eine nulldimensionale Menge auf eine geradlinige Strecke abbilden.* Es sei $Q$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$.

Die Menge der Punkte von $Q$, deren beide Koordinaten irrational sind, bezeichnen wir mit $X$; das ist eine nulldimensionale Menge. $Q$ zerfällt in natürlicher Weise in kongruente parallele Strecken, die einer Seite von $Q$, also einer Winkelhalbierenden der Koordinatenwinkel, etwa der Geraden $y = x$, parallel sind. Wie leicht ersichtlich, ist $A$ auf jeder dieser Strecken überalldicht. Hieraus folgt leicht, dass die Parallelprojektion auf die $x$-Achse in der Richtung $y = x$ eine offene Abbildung von $A$ auf die Strecke $(-1; 1)$ der Zahlengerade liefert, w. z. b. w.

---

Moskau, April 1936.

Posiedzenie

z dnia 24 listopada 1936 r.

J. Ridder.

## O całce Cesàro-Perrona.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 24 listopada 1936 r.

STRESZCZENIE.

W definicji pochodnej Cesàro, autor zastępuje granicę zwykłą przez aproksymatywną, interpretując jednocześnie, występującą w ilorazie różnicowym Cesàro, całkę jako całkę Perrona ($\beta$) (ciągłą aproksymatywnie). Nawiązując do prac J. C. Burkilla (Proc. London Math. Soc. (2), **34** (1932), 314—322) i A. Denjoy (Fundam. Math. **25** (1935), 273—326), autor rozważa zagadnienia odwrotne — poszukiwania funkcji pierwotnej — względem tak uogólnionego różniczkowania Cesàro.

J. Ridder (Groningen).

## Cesàro-Perron Integration.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 24 Novembre 1936.

EINLEITUNG

In den Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1932), p. 314—322, führt J. C. Burkill ein Integrationsverfahren ein (vom ihm Cesàro-Perronsches Integrationsverfahren genannt), das gestattet jede (nicht notwendig stetige) Funktion $f(x)$, welche in den Punkten eines abgeschlossenen Intervalls $(a, b)$ eine endliche Cesàro-Ableitung, $CDf(x)$, hat, bis auf eine additive Konstante zurückzuerhalten, falls diese Ableitung fast überall bekannt ist. Dabei ist

$$(1) \qquad CDf(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)}{\frac{1}{2}h};$$

da aus der Existenz einer endlichen $C$-Ableitung in jedem Punkte von $(a, b)$ unmittelbar hervorgeht, dass $f(x)$ Ableitung einer stetigen Funktion ist und da jede endliche Ableitung im Perronschen Sinne integrierbar ist, liegt es auf der Hand, mit Burkill, das in (1) auftretende Integral als Perronsches Integral (oder, was bekantlich auf dasselbe hinauskommt, als spezielles Denjoysches Integral) aufzufassen.

In einer in Fund. Math. **25** (1935), S. 273—326, erschienenen Arbeit von A. Denjoy wird für jede natürliche Zahl $n$ ein Integrationsverfahren definiert, das für $n = 2$ zur Lösung des folgenden Problems führt. $F(x)$ sei eine im abgeschlossenen Intervall $(a, b)$ stetige Funktion mit einer überall endlichen Ableitung $F_1(x)$. Wenn ausserdem in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ ein endlicher Grenzwert

$$(2) \qquad F_2(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - hF_1(x)}{\frac{1}{2}h^2}$$

existiert, so wird in jeder Umgebung von $x$ $F(x+h)$ gleich

$$F(x) + h\,[F_1(x) + \varepsilon_1(x, h)]$$

sein mit

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(x, h) = 0,$$

wie auch gleich

$$F(x) + \frac{h}{1!}F_1(x) + \frac{h^2}{2!}[F_2(x) + \varepsilon_2(x, h)]$$

mit

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_2(x, h) = 0.$$

Denjoy legt sich nun die Aufgabe vor $F(x)$ zu bestimmen, wenn $F_2(x)$ bekannt ist. Das von ihm eingeführte Integrationsverfahren liefert die Lösung; dabei zeigt sich, dass $F(x)$ durch die Kenntnis von $F_2(x)$ nur bis auf eine (additive) willkürliche lineare Funktion bestimmt ist.

Es wird deutlich sein, dass die von Burkill und Denjoy behandelten Probleme nebst ihren Lösnngen auf dasselbe hinauslaufen. Denn, wenn es in $(a, b)$ eine endliche, zu $F(x)$ gemäss (2) definierte Funktion $F_2(x)$ gibt, so wird

$$F_2(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F_1(x)}{{}^1\!/_2\, h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (P)\, F_1(t)\, dt - F_1(x)}{{}^1\!/_2\, h}$$

sein, wobei das im letzten Gliede auftretende Integral ein Perronsches ist; $F_2(x)$ lässt sich somit betrachten als Cesàro-Ableitung, $CDF_1(x)$, der Funktion

$$F_1(x) = \int_a^x (CP)\, F_2(t)\, dt + C_1,$$

wobei das Integral ein Cesàro-Perronsches (im Sinne von Burkill) und $C_1$ eine willkürliche Konstante ist; Anwendung von Perron-Integration liefert schliesslich

$$F(x) = \int_a^x (P)\, F_1(t)\, dt + C_1 x + C_2,$$

wobei auch $C_2$ willkürlich ist. Die Burkillsche $CP$-Integration und die Perron-Integration führen somit zusammen, ebenso wie die neue Denjoy-Integration, von $F_2(x)$ zu $F(x)$.

Wenn, umgekehrt, die Funktion $f(x)$ in $(a, b)$ eine endliche $C$-Ableitung, $CDf(x)$, hat, so lässt sich $CDf(x)$ betrachten als eine Denjoysche Funktion $F_2(x)$, wobei $F(x) = \int_a^x (P) f(t)\, dt + C$; die Denjoy-Integration von $CDf(x)$ liefert $F(x)$, auch wenn die $C$-Ableitung nur fast überall bekannt ist, und darauf folgende Differentiation von $F(x)$ führt zu der bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktion $f(x)$.[1])

[1]) Das Denjoysche Integrationsverfahren für $n = 2$ wie auch die nacheinander angewandten Verfahren von Burkill und Perron führen, ausgehend von in $(a, b)$ eindeutigen Funktionen, zu bis auf eine willkürliche lineare Funktion bestimmten, stetigen Funktionen, die sich beidesmal als unbestimmte Integrale auffassen lassen. Wir weisen hier auf das Problem hin die gegenseitigen Verhältnisse dieser beiden unbestimmten Integrale näher zu untersuchen; jedenfalls sind sie einander nicht aequivalent.

Man erhält eine Verallgemeinerung des Denjoyschen Problems, wenn in (2) $F_1(x)$ die approximative Ableitung einer stetigen Funktion $F(x)$ darstellt und $F_2(x)$ der *approximative* Limes des in (2) auftretenden Quotienten[1]) ist, die Fragestellung übrigens dieselbe bleibt. Eine Verallgemeinerung des Burkillschen Problems führt zu der Frage, in $(a, b)$ die endliche Funktion $f(x)$ zu bestimmen, wenn in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ statt $CDf(x)$ die endliche *approximative* Cesàro-Ableitung

$$(3) \qquad CD_{\text{appr.}} f(x) = \lim_{h \to 0} \text{appr.} \frac{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)}{{}^1/_2 h}$$

bekannt ist und das hierbei auftretende Integral $\int_a^x f(t)dt$ stetig von $x$ abhängt; da $f(x)$ nun die endliche approximative Ableitung einer (approximativ) stetigen Funktion ist und derartige Ableitungen immer $\beta$-integrierbar[2]) sind, wollen wir das in (3) auftretende Integral als $\beta$-Integral auffassen.

Im folgenden wird ein Integrationsverfahren behandelt, das als Erweiterung des Burkillschen Integrationsverfahrens zu betrachten ist und das gestattet auch diese beiden Probleme in einfacher Weise zu erledigen.

In den Anfangsparagraphen behandeln wir vorher einige, wie es uns scheint, auch an sich interessante Eigenschaften der approximativen Cesàro-Ableitungen und der unteren und oberen approximativen Cesàro-Derivierten.

---

[1]) Es ist sehr wohl möglich, dass es in einem Punkte $x_0$ einen endlichen $F_2$-Wert gibt, während $F''_{\text{appr.}}(x_0)$ nicht existiert; dies folgt sofort aus einem von Denjoy, Fund. Math. **25** (1935), S. 277 gegebenes Beispiel: $F(0) = 0$, $F(x) = x^{2+\alpha} \sin \frac{1}{x^{1+\alpha}}$ für $x \neq 0$ $(0 < \alpha < 1)$, bei welchem $F_1(0) = F_2(0) = 0$ ist und $F''_{\text{appr.}}(0)$ nicht existiert.

[2]) Die $\beta$-Integration behandelten wir in zwei Arbeiten: Fund. Math. **21** (1933), S. 1—10 und Fund. Math. **22** (1934), S. 136—162. Da $\int_a^x f(t)dt$ stetig sein soll, könnte man hier auch die allgemeine Denjoy-Integration anwenden.

## Definitionen und Eigenschaften der approximativen C-Derivierten.

§ 1. **Definition A.** Eine für $a \leqq x \leqq b$ endlichwertige Funktion $f(x)$ sei $\beta$-integrierbar über $(a, b)$. *Die rechte obere approximative C-Derivierte von* $f(x)$, $\overline{CD}^{+}_{\text{appr.}} f(x)$, *in einem Punkte* $x$, mit $a \leqq x < b$, sei die untere Schranke der Zahlen $z$, für die die Menge $E_y \left[ \dfrac{\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt - f(x)}{{}^1/_2(y-x)} \leqq z;\ y > x \right]$ in $x$ die rechte Dichte 1 hat; das hierbei auftretende Integral soll ein $\beta$-Integral sein.

**Definition B.** Zu der für $a \leqq x \leqq b$ endlichwertigen, über $(a, b)$ $\beta$-integrierbaren Funktion $f(x)$ sei *in* $x$, mit $a \leqq x < b$ *die rechte obere approximative* $C_\lambda$*-Derivierte von* $f(x)$, $\overline{CD}^{+}_{\text{appr.};\lambda} f(x)$, gleich der unteren Schranke derjenigen Zahlen $z$, für die die Menge $E_y \left[ \dfrac{\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt - f(x)}{{}^1/_2(y-x)} \geqq z;\ y > x \right]$ in $x$ eine rechte obere Dichte $\leqq \lambda$ hat; hierbei ist das Integral ein $\beta$-Integral und $o < \lambda < 1$.[4])

Mit der Definition $A$ ist gleichwertig die

**Definition A*.** Für die in Definition $B$ betrachtete Funktion $f(x)$ existiert in $x$

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{CD}^{+}_{\text{appr.};\lambda} f(x).$$

Dieser Linies definiere nun *die rechte approximative C-Derivierte*, $\overline{CD}^{+}_{\text{appr.}} f(x)$, *von* $f(x)$ *in* $x$.

In analoger Weise lassen sich die übrigen, extremen approximativen $C$-Derivierten, $\underline{CD}_{\text{appr.}+} f(x)$, $\overline{CD}^{-}_{\text{appr.}} f(x)$, $\underline{CD}_{\text{appr.}-} f(x)$, einführen.

**Definition C.** Die grössere der oberen approximativen $C$-Derivierten: $\overline{CD}^{+}_{\text{appr.}} f(x)$ und $\overline{CD}^{-}_{\text{appr.}} f(x)$ sei *die obere approximative C-Derivierte*, $\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x)$, *von* $f(x)$ *in* $x$; die kleinere der unteren approximativen $C$-Derivierten: $\underline{CD}_{\text{appr.}+} f(x)$ und $\underline{CD}_{\text{appr.}-} f(x)$ sei *die untere approximative C-Derivierte*, $\underline{CD}_{\text{appr.}} f(x)$,

---

[4]) Man vergleiche die Definitionen der extremen approximativen $\lambda$-Derivierten bei J. C. Burkill and U. S. Haslam Jones, Proc. Lond. math. Soc. (2) **32** (1931), p. 347.

*von f(x) in x*. Wenn $\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x)$ und $\underline{CD}_{\text{appr.}} f(x)$ einander gleich sind, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die approximative C-Ableitung*, $CD_{\text{appr.}} f(x)$, *von* $f(x)$ *in* $x$.

**Hilfssatz 1.** *Wenn für* $0 < \alpha < 1$, $h > 0$ ($\alpha$ *und* $h$ *fest*) $m_\alpha^{(z)}(x, x+h)$ *das Mass derjenigen Teilmenge von* $(x, x+h)$ *andeutet, in deren Punkten* $\xi$:

1° $$x + \alpha\, h < \xi < h + x; \text{ und:}$$

2° $$\frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f(t)dt - {}^1\!/_2\, z\,(\xi - x) \geqq f(x)$$

*ist, wobei das Integral ein* $\beta$*-Integral der endlichen Funktion* $f(x)$ *darstellt und* $z$ *willkürlich, aber fest ist, so wird* $m_\alpha^{(z)}(x, x+h)$ *eine in* $(a, b)$ *messbare Funktion von* $x$ *sein.*

$m_\alpha^{(z)}(x, x+h)$ *wird messbar (B) sein, wenn* $f(x)$ *messbar (B) ist.*

**Beweis.** Zum Beweise der ersten Hälfte genügt es zu zeigen, dass für jedes $\lambda$ mit $0 < \lambda < 1$ die Menge $E$, in deren Punkten $m_\alpha^{(z)}(x, x+h) < \lambda(1-\alpha).h$ ist, messbar ist. $\varphi_\lambda(x)$ sei die obere Schranke der Zahlen $a_x$, für die das Mass der Menge von Punkten $\xi$ in $(x + \alpha h, x + h)$, in deren jedem $\frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f(t)dt - {}^1\!/_2\, z\,(\xi - x) \geqq a_x$ ist, grösser als oder gleich $\lambda(1-\alpha).h$ ist. Dann wird die Menge $E$ zusammenfallen mit der Menge der Punkte $x$, in welchen

$$f(x) > \varphi_\lambda(x)$$

ist. $E$ wird somit messbar sein, wenn $\varphi_\lambda(x)$ eine messbare Funktion ist.

Es lässt sich zeigen, dass $\varphi_\lambda(x)$ halbstetig nach oben ist auf einer jeden der abzählbar vielen perfekten Mengen $E_j$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$), welche, wie aus der Definition des $\beta$-Integrals hervorgeht, $(a, b)$ bis auf eine abzählbare Menge überdecken und auf deren jeder das $\beta$-Integral $\int_a^x f(t)dt$ totalstetig ist. $x_0$ sei ein willkürlicher Punkt einer Menge $E_j$. Aus der Definition von $\varphi_\lambda(x)$ geht hervor, dass bei willkürlich positivem $\varepsilon$ die Teilmenge von $(x_0 + \alpha h, x_0 + h)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{1}{\xi - x_0}\int_{x_0}^\xi f(t)dt - {}^1\!/_2\, z\,(\xi - x_0) \geqq \varphi_\lambda(x_0) + \varepsilon$$

ist, ein Mass hat kleiner als $\lambda(1-\alpha).h$. Aus der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{\xi} f(t)dt$ auf $E_j$ als Funktion von $\xi$ folgt, dass es eine postive Zahl $\delta$ gibt derart, dass für $|x-x_0|<\delta$, $x$ in $E_j$ das Mass der Teilmenge von $(x+\alpha h,\ x+h)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{1}{\xi-x}\int_x^{\xi} d(t) - {}^1/_2\, z\,(\xi-x) \geqq \varphi_\lambda(x_0) + {}^1/_2\,\varepsilon$$

ist, ebenfalls kleiner als $\lambda(1-\alpha).h$ ist. Somit wird in den Punkten $x$ von $E_j$ mit $|x-x_0|<\delta$:

$$\varphi_\lambda(x) < \varphi_\lambda(x_0) + {}^1/_2\,\varepsilon$$

sein; $\varphi_\lambda(x)$ ist halbstetig nach oben auf $E_j$ und dadurch messbar $(B)$ in $(a, b)$.

Der Beweis des zweiten Teiles ist hiernach evident.

**Hilfssatz 2.** *Wenn für festes $h>0$ und willkurlich, aber fest gewähltes $z$ $m^{(z)}(x, x+h)$ das Mass derjenigen Teilmenge von $(x, x+h)$ andeutet, in deren Punkten $\xi$*

$$\frac{1}{\xi-x}\int_x^{\xi} f(t)dt - \tfrac{1}{2}\, z\,(\xi-x) \geqq f(x)$$

*ist, wobei das Integral ein $\beta$-Integral der endlichwertigen Funktion $f(x)$ ist, so wird $m^{(z)}(x, x+h)$ eine in $(a, b)$ messbare Funktion von $x$ sein. $m^{(z)}(x, x+h)$ wird messbar $(B)$ sein, wenn $f(x)$ messbar $(B)$ ist.*

Dies folgt aus Hilfssatz 1 mit $\alpha \to 0$.

**Hilfssatz 3.** *Wenn bei fest gewähltem $z$ $O_z(x)$ und $U_z(x)$ die obere bzw. untere rechte Dichte in $x$ der Punkte $\xi > x$ andeuten, in welchen*

$$\frac{1}{\xi-x}\int_x^{\xi} f(t)dt - {}^1/_2\, z\,(\xi-x) \geqq f(x)$$

*ist, so werden diese Funktionen $O_z(x)$, $U_z(x)$ in $(a, b)$ messbar sein.*

*Sie sind in $(a, b)$ messbar $(B)$, falls $f(x)$ messbar $(B)$ ist.*

**Beweis.** $O_z(x)$ und $U_z(x)$ sind oberer bzw. unterer Limes der nach Hilfssatz 2 messbaren Funktionen $\dfrac{m^{(z)}(x,\ x+h_n)}{h_n}$ ($h_n$ positiv und rational) für $h_n \to 0$. Daraus folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes 3.

**Satz I.** *Die zu einer über $(a, b)$ $\beta$-integrierbaren, endlichwertigen Funktion $f(x)$ gehörenden, extremen approximativen*

*$C_\lambda$-Derivierten und extremen approximativen C-Derivierten sind messbar in $(a, b)$. Ist $f(x)$ messbar $(B)$, so werden auch jene Derivierten messbar $(B)$ sein.*

**Beweis.** Bei fest gewähltem $\lambda$, mit $0 < \lambda < 1$, und willkürlichem $z$ sei $E$ die Menge der Punkte $x$, in denen

$$CD^{+}_{\mathrm{appr}\,;\,\lambda}\, f(x) \leqq z$$

ist. Es genügt zu zeigen, dass $E$ messbar [messbar $(B)$] ist.

Wenn $\{z_n\}$ eine monoton abnehmende, nach $z$ konvergierende Folge ist, wird jede Menge $E_n$ von Punkten $x$, zu deren jedem die Menge von Punkten $\xi > x$, für die

$$\frac{1}{\xi - x}\int_x^{\xi} f(t)dt - \tfrac{1}{2}\, z_n(\xi - x) \geqq f(x)$$

ist, in $x$ eine obere rechte Dichte $\leqq \lambda$ hat, messbar [messbar $(B)$] sein, wie aus Hilfssatz 3 hervorgeht. Da $E = \lim\limits_{n \to \infty} E_n$, wird auch $E$ messbar [messbar $(B)$] sein.

**Definition D.** Die über $(a, b)$ $\beta$-integrierbare Funktion $f(x)$ ist *in $(a, b)$ C-approximatix stetig*, wenn für jedes $x$ mit $a \leqq x \leqq b$:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \mathrm{appr.}\ \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

und endlich ist, wobei das Integral ein $\beta$-Integral sein soll. [5])

---

[5]) Das unbestimmte *CP*-Integral von Burkill [siehe Proc. Lond. math. Soc. (2) **34** (1932), p. 314—322] ist *C-stetig*, d. h. endliche Ableitung einer stetigen Funktion. Dasselbe gilt von dem unbestimmten Verblunsky-Integral [siehe S. Verblunsky, Fund. Math. **23** (1934), S. 193–236, oder auch Ridder, Math. Ztschr. **41** (1936)]. In dem Bull. Soc. math. de Fr. 43 (1915), p. 174 definierte Denjoy eine eindeutige Funktion $\varphi(x)$ in einem den Nullpunkt enthaltenden Intervall $(a, b)$, welche approximativ stetig ist in $(a, b)$ mit $\varphi(0) = 0$, und Ableitung einer stetigen Funktion mit $\varphi(0) = 1$. Man sieht leicht ein, dass $\varphi(x)$ mit $\varphi(0) = 1$ ein unbestimmtes Verblunsky-Integral ihrer fast überall existierenden Ableitung $\varphi'(x)$ ist, während sie mit $\varphi(0) = 1$ das unbestimmte $\alpha$- und somit auch das unbestimmte $\beta$-Integral von $\varphi'(x)$ ist [siehe die Definitionen der (*approximativ stetigen*) $\alpha$- und $\beta$-Integrale loc. cit. [3]) (zweites Zitat)]. — In den Definitionen der Majoranten und Minoranten bei der eben erwähnten Burkillschen *CP*-Integration wird angenommen, dass ihre unteren bzw. ihre oberen *C*-Derivierten nirgends $-\infty$ bzw. nirgends $+\infty$ sind. Wir bemerken, dass das Burkillsche Integrationsverfahren anwendbar bleibt, wenn hier reduzible Ausnahmemengen zugelassen werden. Dann wird die Denjoysche Funktion $\varphi(x)$ mit $\varphi(0) = 1$ auch unbestimmtes *CP*-Integral ihrer fast überall existierenden Ableitung sein.

Aus der deskriptiven Definition des $\beta$-Integrals folgt, dass $(a, b)$ sich bis auf eine abzählbare Menge überdecken lässt durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $\int_a^x f(t)dt$ eine (total)stetige Funktion von $x$ ist; sie ist somit messbar $(B)$ in $(a, b)$. Daraus folgt der

**Satz II.** *Jede in $(a, b)$ C-approximativ stetige Funktion $f(x)$ ist messbar $(B)$ in $(a, b)$.*

Denn jede approximative Ableitung einer Funktion, welche messbar $(B)$ ist, ist wieder messbar $(B)$. [6])

Aus den Sätzen I und II folgt:

**Satz III.** *Ist $f(x)$ in $(a, b)$ C-approximativ stetig, so sind ihre extremen approximativen $C_\lambda$-Derivierten und ihre extremen approximativen C-Derivierten messbar $(B)$ in $(a, b)$.*

§ 2. **Satz IV.** *$f(x)$ sei C-approximativ stetig im abgeschlossenen Intervall $(a, b)$. Dann gibt es, wenn das $\beta$-Interval $\int_a^x f(t)dt$ eine in $(a, b)$ stetige Funktion von $x$ ist,* [7]) *innere Punkte $\xi_1$, $\xi_2$ von $(a, b)$ mit*

$$\underline{CD}_{\text{appr.}}\, f(\xi_1) \geqq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqq \overline{CD}_{\text{appr.}}\, f(\xi_2).$$

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, dass es zu der in $(a, b)$ definierten Funktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a)$$

innere Punkte $\xi_1$, $\xi_2$ von $(a, b)$ gibt mit

$$\underline{CD}_{\text{appr.}}\, g(\xi_1) \geqq 0 \geqq \overline{CD}_{\text{appr.}}\, g(\xi_2).$$

$g(x)$ ist $C$-approximativ stetig in $(a, b)$ und man hat:

$$g(a) = g(b). \tag{4}$$

---

[6]) Siehe Burkill and Haslam-Jones, loc. cit. [4]), p. 349 (Lemma 3). Das Lemma ist bewiesen für den Fall des Lebesgueschen Masses. Der Beweis lässt sich aber unmittelbar übertragen auf den Fall von Funktionen, welche messbar $(B)$ sind.

[7]) Dass kommt auf dasselbe hinaus wie die Forderung: $f(x)$ sei über $(a, b)$ integrierbar nach der allgemeinen Denjoyschen Definition.

Wir betrachten eine Funktion $\varphi(x)$ mit

$$(5) \qquad \varphi(a) = g(a) \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt \text{ für } a < x \leqq b.$$

Da das hier auftretende $\beta$-Integral im abgeschlosenen Intervall $(a, b)$ stetig ist und da $g(x)$ $C$-approximativ stetig ist in $a$, wird $\varphi(x)$ stetig sein für $a < x \leqq b$ und approximativ stetig in $x = a$.

Ist $\varphi(x)$ in $(a, b)$ konstant, so wird immer

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} g(t)dt = g(a)$$

sein mit $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$; da $g(x)$ $C$-approximativ stetig ist, wird dann auch $g(x)$ eine Konstante sein, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Ist $\varphi(x)$ nicht konstant, so können wir uns beschränken auf den Fall, in welchem es einen Punkt $\xi$ gibt mit $\varphi(\xi) > \varphi(a)$. Da $\varphi(x)$ approximativ stetig ist in $a$, gibt es dann einen Punkt $a'$ mit

$$a < a' < \xi \quad \text{und} \quad \varphi(a') < \varphi(\xi).$$

Im abgeschlossenen Intervall $(a', b)$ hat $\varphi(x)$ eine endliche obere Schranke $M \geqq \varphi(\xi)$, welche in einem oder in mehreren Punkten von $(a', b)$ angenommen wird. Es sei $\xi_2$ die untere Schranke dieser Punkte. Dann ist $a' < \xi_2$ und

$$(6) \qquad M = \varphi(\xi_2) = \frac{1}{\xi_2 - a}\int_a^{\xi_2} g(t)dt,$$

während

$$(7a) \qquad \frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt < M \text{ für } a' \leqq x < \xi_2$$

und

$$(7b) \qquad \frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt \leqq M \text{ für } \xi_2 < x \leqq b$$

ist. Aus (6), (7a) und (7b) folgt:

$$(8a) \qquad \frac{1}{\xi_2 - x}\int_x^{\xi_2} g(t)dt > M \text{ für } a' \leqq x < \xi_2$$

und

$$\text{(8b)} \qquad \frac{1}{x-\xi_2}\int_{\xi_2}^{x} g(t)dt \leqq M \text{ für } \xi_2 < x \leqq b.$$

Hieraus folgt wegen der $C$-approximativen Stetigkeit von $g(x)$ in $\xi_2$ und wegen (4) und (5):

$$\text{(9)} \qquad \xi_2 \neq b \quad \text{und} \quad g(\xi_2) = M.$$

Es ist somit $\xi_2$ innerer Punkt von $(a, b)$. Ausserdem folgt aus (8a), (8b) und (9):

$$\overline{CD}_{\text{appr.}}\, g(\xi_2) \leqq 0.$$ [8]

Wir müssen also nur noch einen Punkt $\xi_1$ anweisen mit

$$a < \xi_1 < b \quad \text{und} \quad \underline{CD}_{\text{appr.}}\, g(\xi_1) \geqq 0.$$

Dazu betrachten wir die in $(a, \xi_2)$ definierte Funktion $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{\xi_2 - x}\int_{x}^{\xi_2} g(t)dt \text{ für } a \leqq x < \xi_2;\ \psi(\xi_2) = g(\xi_2).$$

Aus (8a), (6) und (9) folgt, dass es einen inneren Punkt $\xi'$ von $(a, \xi_2)$ gibt mit

$$\psi(\xi') > M = \psi(a) = \psi(\xi_2).$$

Da $g(x)$ $C$-approximativ stetig- und $\psi(x)$ somit linksseitig approximativ stetig ist in $\xi_2$ ist, gibt es einen Punkt $\xi'_2$ mit

$$\xi' < \xi'_2 < \xi_2 \quad \text{und} \quad \psi(\xi') > \psi(\xi'_2).$$

Im abgeschlossenen Intervall $(a, \xi'_2)$ ist $\psi(x)$ stetig und hat somit eine endliche obere Schranke $N \geqq \psi(\xi')$. Es sei $\xi_1$ die obere Schranke der Punkte von $(a, \xi'_2)$, in welchen $\psi$ den Wert $N$ hat.

---

[8]) Man hat sogar: $\limsup\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{h}\int_{\xi_2}^{\xi_2+h} g(t)dt - g(\xi_2)}{\frac{1}{2}h} \leqq 0.$

Dann ist $a < \xi_1 < \xi'_2$, und dasselbe Verfahren, das zu (8a) und (8b) führte, liefert hier:

(10a) $$\frac{1}{x-\xi_1}\int_{\xi_1}^{x} g(t)dt \geqq N \text{ für } \xi_1 < x \leqq \xi'_2$$

und

(10b) $$\frac{1}{\xi_1 - x}\int_{x}^{\xi_1} g(t)dt \leqq N \text{ für } a \leqq x < \xi_1.$$

Es folgt:

$$g(\xi_1) = N.$$

Daraus und aus (10a) und (10b) schliesst man weiter:

$$\underline{CD}_{\text{appr.}}\, g(\xi_1) \geqq 0.$$

Durch Anwendung des vorigen Satzes folgt unmittelbar:

**Satz V.** *Jede im abgeschlossenen Intervall $(a, b)$ C-approximativ stetige Funktion $f(x)$, für die in den Punkten von $(a, b)$ die obere approximative C-Derivierte, $\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x)$, grösser als oder gleich Null ist, wird, wenn das β-Integral $\int_a^x f(t)dt$ eine in $(a, b)$ stetige Fuuktion von $x$ ist,* [7]) *nicht-abnehmend sein in $(a, b)$.* [9])

Aus der $C$-approximativen Stetigkeit und der Monotonie von $f(x)$ folgt, dass diese Funktion nun auch stetig ist in $(a, b)$.

**Korollar.** *Wenn $f(x)$ über $(a, b)$ integrierbar ist nach der allgemeinen Denjoyschen Definition, C-approximativ stetig für $a \leqq x \leqq b$ und wenn in jedem Punkte von $(a, b)$ $\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x) \neq -\infty$ ist, während fast überall in $(a, b)$ $\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x) \geqq 0$ ist, dann wird $f(x)$ nicht-abnehmend sein in $(a, b)$.*

Denn zu willkürlich positivem $\varepsilon$ lässt sich eine in $(a, b)$ nicht-abnehmende, stetige Funktion $\chi(x)$ konstruieren, welche in den Punkten der Menge $E\,[\overline{CD}_{\text{appr.}} f(x) < 0]$ eine Ableitung $= +\infty$ hat und deren Wert in $a$ gleich Null, in $b$ kleiner als $\varepsilon$ ist. Auf $f(x) + \chi(x)$ lässt sich Satz V anwenden; für $\varepsilon \to 0$ folgt daraus das Korollar.

---

[9]) Man vergleiche bei $C$-stetigen Funktionen das Theorem II (p. 239) in der Arbeit von W. L. C. Sargent: Proc. Lond. math. Soc. (2) **40** (1935), p. 235—254.

§ 3. **Hilfssatz 4.** *Wenn in den Punkten einer messbaren Teilmenge $E_0$ von $(a, b)$ für die über $(a, b)$ β-integrierbare, endlichwertige Funktion $f(x)$*

$$CD_{\text{appr.}-} f(x) > -\infty, \qquad CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) < +\infty \text{ und } ADf(x) = 0$$

*ist, so wird in fast allen Punkten von $E_0$:*

$$CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) \leqq 0 \leqq CD_{\text{appr.}-} f(x)$$

*sein.*

**Beweis.** Die Teilmenge $E_1$ von $E_0$, in deren Punkten $CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) > 0$ ist, hat das Mass Null. Zum Beweise zeigen wir, dass die entgegengesetzte Annahme zu einem Widerspruch führt.

Wir betrachten dazu die Punkte $x$ von $E_1$, zu deren jedem bei vorher willkürlich, aber fest gewählten, positiven Zahlen $M$ und $\eta$ die Teilmenge des offenen Intervalls $(x, x+\eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{1}{\xi - x}\int_x^{\xi} f(t)dt - {}^1\!/_2 M(\xi - x) < f(x)$$

ist, ein Mass $\geqq {}^3\!/_4\,\eta$ hat; diese Punkte $x$ bilden, nach Hilfssatz 2, eine messbare Teilmenge $E(M; \eta)$ von $E_1$. Die Menge $E(M)$ der Punkte von $E_1$, für die bei willkürlich positivem $M$ und für jedes offene Intervall $(x, x+\eta)$ mit $0 < \eta \leqq \dfrac{1}{M}$ die Teilmenge von $(x, x+\eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{2}{(\xi - x)^2}\int_x^{\xi} [f(t) - f(x)]\, dt < M$$

ist, ein Mass $\geqq {}^3\!/_4\,\eta$ hat, ist die Produktmenge $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E\left[M; \dfrac{1}{M+k_n}\right]$, wenn die positiven Zahlen $k_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in der Menge der positiven reellen Zahlen überall dicht liegen; auch diese Menge wird somit messbar sein. Da $E_1 = \lim\limits_{M\to\infty} E(M)$ ist, gibt es eine positive Zahl $M_1$ derart, dass

$$m\{E(M)\} > {}^1\!/_2\, m(E_1) \text{ ist für jedes } M \geqq M_1.$$

Wenn bei positivem $N \neq F(N)$ die Teilmenge von $E_1$ andeutet, zu deren Punkten $x$ für jedes offene Intervall $(x-\eta, x)$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{N}$ die Teilmenge von $(x - \eta, x)$, in deren Punkten $\xi$:

$$\frac{2}{(x-\xi)^2}\int_\xi^x [f(x) - f(t)]\, dt > -N$$

ist, ein Mass $\geqq {}^3/_4\, \eta$ hat, so wird $E_1 = \lim\limits_{N\to\infty} F(N)$ sein. $F(N)$ ist messbar. Es gibt somit eine positive Zahl $N_1$ mit

$$m\{F(N)\} > \tfrac{1}{2}\, m\,(E_1) \text{ für jedes } N \geqq N_1.$$

Wenn $\nu_1$ die grössere der Zahlen $M_1$ und $N_1$ ist, wird $E(\nu_1).F(\nu_1)$ positives Mass haben.

Dieselbe Methode, welche zu $\nu_1$ und der Menge $E(\nu_1).F(\nu_1)$ führte, gibt uns, ausgehend von $ADf(x) = 0$ in den Punkten von $E(\nu_1).F(\nu_1)$, zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ eine positive Zahl $\nu(\varepsilon)$ und eine Teilmenge $G(\varepsilon)$ von $E(\nu_1).F(\nu_1)$, vom Masse $\geqq [E(\nu_1).F(\nu_1)] - \varepsilon$, derart, dass zu jedem Punkte $x$ von $G(\varepsilon)$ und zu jedem $\eta$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{\nu(\varepsilon)}$:

1° die Teilmenge von $(x, x + \eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon\,(\xi - x) \tag{11a}$$

ist, ein Mass $\geqq {}^3/_4\, \eta$ hat, und:

2° die Teilmenge von $(x - \eta, x)$, in deren Punkten $\xi'$

$$|f(\xi') - f(x)| < \varepsilon\,(x - \xi') \tag{11b}$$

ist, ebenfalls ein Mass $\geqq {}^3/_4\, \eta$ hat.[10])

---

[10]) Statt des Hilfssatzes 2 soll hier das Lemma angewandt werden: *Wenn die endliche Funktion $f(x)$ messbar ist in $(a, b)$ und $m^{(\varepsilon)}(x, x+h)$ bei fest gewählten positiven Zahlen $\varepsilon$ und $h$ das Mass derjenigen Teilmenge von $(x, x+h)$ andeutet, in deren Punkten $\xi$:*

$$f(\xi) - f(x) < \varepsilon(\xi - x) \;\text{[oder: } f(\xi) - f(x) \leqq -\varepsilon(\xi - x)]$$

*ist, so wird $m^{(\varepsilon)}(x, x+h)$ eine in $(a, b)$ messbare Funktion von $x$ sein.* Man vergleiche: Burkill and Haslam-Jones, loc. cit. [4]), p. 347 (Lemma 1).

Zu jeder Zahl der Folge $\{\varepsilon_n\}$, mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots = {}^1\!/_2 m\,[E(\nu_1).F(\nu_1)]$, gibt es eine Zahl $\nu(\varepsilon_n)$ und eine Menge $G(\varepsilon_n)$ der oben angegebenen Art. Die Mengen $\{G(\varepsilon_n)\}$ haben eine Durchschnittsmenge $D$ von positivem Masse. $D$ enthält wieder eine perfekte Teilmenge $P$ von positivem Masse.

Zu je zwei Punkten $x$, $x'$ von $P$ mit $0 < x' - x < \dfrac{1}{\nu(\varepsilon_n)}$ gibt es einen Punkt $\xi$ zwischen $x$ und $x'$ derart, dass für $x$, $\xi$ und $x'$, $\xi$ Ungleichungen wie (11a) bzw. (11b) erfüllt sind, mit $\varepsilon_n$ statt $\varepsilon$. Daraus folgt für $x$, $x'$ in $P$ immer

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon_n\,|x' - x|, \tag{12}$$

wenn nur $|x' - x| < \dfrac{1}{\nu(\varepsilon_n)}$ ist.[11])

Da $f(x)$ $\beta$-integrierbar ist über $(a, b)$, gibt es eine perfekte Teilmenge $Q$ von $P$, mit $m(Q) > 0$, auf welcher $\int_a^x f(t)dt$ totalstetig ist; dies bringt mit sich die Integrierbarkeit von $f(x)$ über $Q$ im Sinne von Lebesgue und die absolute Konvergenz der Reihe der Variationen von $\int_a^x f(t)dt$ über die zu $Q$ komplementären Teilintervalle von $(a, b)$.

$x_0$ sei einer der Punkte von $Q$, in welchen $Q$ die Dichte 1 hat. Dann gibt es bei willkürlich positivem $\alpha$ eine Zahl $\delta$ derart, dass zu jedem $h$ mit $0 < h \leq \delta$ die Teilmenge $w_h$ von $Q$ in $(x_0, x_0 + h)$ ein Mass

$$> \left(1 - \frac{\alpha}{\nu_1 + 2\alpha}\right).h \tag{13}$$

hat. Es gibt eine natürliche Zahl $n'$, so dass der zugehörige $\varepsilon_{n'}$-Wert kleiner als $\alpha$ ist.

---

[11]) Man hat somit in jedem Punkte $x$ von $P$:

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \to 0 \text{ bei } t \text{ in } P \text{ und } t \to x,$$

und gelangt so zu einem schon von A. Khintchine in den Fund. Math. 9 (1927), S. 228, 229 beweisenen Lemma.

$h$ sei nun ausserdem so gewählt, dass sein Wert $\leqq \frac{1}{\nu_1}$ und $< \frac{1}{\nu(\varepsilon_{n'})}$ ist und dass $x_0 + h$ zu $Q$ gehört. Die zu $w_h$ komplementären Teilintervalle von $(x_0, x_0 + h)$ seien $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, ..., $(a_n, b_n)$, .... Jedes Intervall $(a_n, b_n)$ enthält einen Punkt $\tau_n$ mit

$$\frac{2}{(\tau_n - a_n)^2} \int_{a_n}^{\tau_n} [f(t) - f(a_n)]\, dt < \nu_1$$

und

$$\frac{2}{(b_n - \tau_n)^2} \int_{\tau_n}^{b_n} [f(b_n) - f(t)]\, dt > -\nu_1.$$

Daraus und aus (12) folgt:

$$\int_{a_n}^{b_n} [f(t) - f(a_n)]\, dt = \int_{a_n}^{\tau_n} [f(t) - f(a_n)]\, dt +$$
$$+ \int_{\tau_u}^{b_n} [f(t) - f(b_n)]\, dt + \int_{\tau_n}^{b_n} [f(b_n) - f(a_n)]\, dt < \tfrac{1}{2}\nu_1 (\tau_n - a_n)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\nu_1 (b_n - \tau_n)^2 + \alpha(b_n - a_n)(b_n - \tau_n) < (\nu_1 + \alpha)(b_n - a_n)^2.$$

Dadurch ist weiter:

$$\int_{a_n}^{b_n} [f(t) - f(x_0)]\, dt = \int_{a_n}^{b_n} [f(t) - f(a_n)]\, dt +$$
$$+ \int_{a_n}^{b_n} [f(a_n) - f(x_0)]\, dt < (\nu_1 + \alpha)(b_n - a_n)^2 +$$
$$+ \alpha(a_n - x_0)(b_n - a_n) < (\nu_1 + 2\alpha)(b_n - a_n)\,.\,h.$$

Aber dies, (12) und (13) führen zu:

$$\int_{x_0}^{x_0 + h} [f(t) - f(x_0)]\, dt = \int_{w_h} (L)\, [f(t) - f(x_0)]\, dt +$$
$$+ \sum_{(n)} \int_{a_n}^{b_n} [f(t) - f(x_0)]\, dt < \alpha\,. \int_{x_0}^{x_0 + h} (t - x_0)\, dt +$$
$$+ h\,.\,(\nu_1 + 2\alpha) \sum_{(n)} (b_n - a_n) < \tfrac{1}{2}\alpha h^2 + \alpha h^2 = {}^3/_2\, \alpha h^2,$$

oder:

$$\frac{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)}{\frac{1}{2}h} < 3\alpha.$$

Da $\alpha$ willkürlich positiv ist, wäre somit

$$CD^{+}_{\text{appr.}} f(x_0) \leqq 0,$$

während doch in jedem Punkte von $E_1$, und somit auch von $Q$, $CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) > 0$ sein sollte. Die Annahme $m(E_1) > 0$ führt somit zu einem Widerspruch; es ist in fast allen Punkten von $E_0$

$$CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) \leqq 0.$$

Durch Betrachtung von $f(-x)$ folgt hieraus sofort, dass auch in fast allen Punkten von $E_0$ gilt:

$$CD_{\text{appr.}-} f(x) \geqq 0.$$

**Hilfssatz 5.** *Wenn in den Punkten einer messbaren Teilmenge $E$ von $(a, b)$ die über $(a, b)$ β-integrierbare, endliche Funktion $g(x)$ approximativ differenzierbar ist und*

$$CD_{\text{appr.}-} g(x) > -\infty, \quad CD^{+}_{\text{appr.}} g(x) < +\infty$$

*ist, so wird in fast allen Punkten von $E$:*

$$CD^{+}_{\text{appr.}} g(x) \leqq ADg(x) \leqq CD_{\text{appr.}-} g(x)$$

*sein.*

**Beweis.** Nach einem Satze von N. Lusin [12]) gibt es eine in $(a, b)$ stetige Funktion $g_1(x)$, welche in fast allen Punkten von $E$ eine mit $ADg(x)$ zusammenfallende Ableitung hat. Da $g_1(x)$ in jedem Punkte, in welchem sie eine endliche Ableitung hat, auch eine Cesàro-Ableitung von gleichem Werte besitzt, wird die Funktion $f(x) \equiv g(x) - g_1(x)$ den Bedingungen des vorigen Hilfssatzes für eine massgleiche Teilmenge $E_0$ von $E$ genügen. Daraus folgt Hilfssatz 5 jedoch unmittelbar.

Aus Hilfssatz 5 folgt der

---

[12]) Siehe z. B. E. W. Hobson, Theory of functions II (Sec. Ed. 1926), p. 284.

**Satz VI.** *Wenn die über $(a, b)$ β-integrierbare, endliche Funktion $f(x)$ in den Punkten $x$ einer messbaren Teilmenge $E$ eine approximative Ableitung $ADf(x)$ hat, während ausserdem in diesen Punkten*

$$-\infty < \underline{CD}_{\text{appr.}} f(x) \leqq \overline{CD}_{\text{appr.}} f(x) < +\infty$$

*ist, so wird fast überall auf $E$ die approximative Cesàro-Ableitung $CD_{\text{appr.}} f(x)$ existieren und gleich $ADf(x)$ sein.*

Denn es ist, nach Hilfssatz 5, in fast allen Punkten von $E$ für die Funktion $f(x)$:

$$CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) \leqq AD\, f(x) \leqq CD_{\text{appr.}\,-} f(x) \tag{14}$$

und für die Funktion $-f(-x)$:

$$CD^{+}_{\text{appr.}} \{-f(-x)\} \leqq AD\, \{-f(-x)\} \leqq CD_{\text{appr.}\,-} \{-f(-x)\},$$

somit wieder für $f(x)$:

$$CD^{-}_{\text{appr.}} f(x) \leqq ADf(x) \leqq CD_{\text{appr.}\,+} f(x). \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt die Behauptung des Satzes.

Eine Verschärfung des vorigen Satzes ist der

**Satz VII.** *Wenn für die über $(a, b)$ β-integrierbare, endliche Funktion $f(x)$ in den Punkten $x$ einer messbaren Teilmenge $E$ von $(a, b)$:*

$$-\infty < \underline{CD}_{\text{appr.}} f(x) \leqq \overline{CD}_{\text{appr.}} f(x) < +\infty$$

*ist, so wird fast überall auf $E$:*

$$CD_{\text{appr.}} f(x) = ADf(x)$$

*sein.*

Es genügt zu beweisen den

**Hilfssatz 6.** *Wenn für die über $(a, b)$ β-integrierbare, endliche Funktion $f(x)$ in den Punkten $x$ einer messbaren Teilmenge $E$:*

$$-\infty < CD_{\text{appr.}\,+} f(x) \leqq CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) < +\infty$$

*ist, so existiert $ADf(x)$ in fast allen Punkten von $E$.*

**Beweis.** Aus $CD^{+}_{\text{appr.}} f(x) < +\infty$ in den Punkten von $E$ folgt, dass es bei willkürlich positivem $\varepsilon$ eine positive Zahl $M_1$ und eine Teilmenge $E_1$ von $E$, mit $m(E_1) > m(E) - {}^1/_2\,\varepsilon$, gibt, derartig, dass für jeden Punkt $x$ von $E_1$ und für jedes $M \geqq M_1$ zu jedem $\eta$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{M}$ die Teilmenge von $(x, x + \eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{2}{(\xi - x)^2} \int_x^\xi [f(t) - f(x)]\, dt < M$$

ist, ein Mass $\geqq {}^{15}/_{16}\,\eta$ hat.[13]

Aus $CD_{\text{appr.}+} f(x) > -\infty$ in den Punkten von $E$ folgt, dass es eine positive Zahl $M_2$ und eine Teilmenge $E_2$ von $E$, mit $m(E_2) > m(E) - {}^1/_2\,\varepsilon$, gibt, derartig, dass für jeden Punkt $x$ von $E_2$ und für jedes $M > M_2$ zu jedem $\eta$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{M_2}$ die Teilmenge von $(x, x + \eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$\frac{2}{(\xi - x)^2} \int_x^\xi [f(t) - f(x)]\, dt > -M$$

ist, ein Mass $\geqq {}^{15}/_{16}\,\eta$ hat.

Ist $\mu$ die grössere der Zahlen $M_1$, $M_2$, so wird für jeden Punkt $x$ der Menge $E_1 \cdot E_2$ (deren Mass $> m(E) - \varepsilon$ ist) und zu jedem $\eta$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{\mu}$ die Teilmenge von $(x, x + \eta)$, in deren Punkten $\xi$

$$\left| \frac{2}{(\xi - x)^2} \int_x^\xi [f(t) - f(x)]\, dt \right| < \mu$$

ist, ein Mass $> {}^3/_4\,\eta$ haben.

$x_0$ sei ein Punkt von $E_1 \cdot E_2$, in welchem diese Menge die Dichte 1 hat. Es gibt eine positive Zahl $\delta \leqq \frac{1}{2\mu}$ derart, dass für jedes positive $\eta \leqq \delta$ das Mass der Teilmenge von $E_1 \cdot E_2$, enthalten im Intervall $(x_0, x_0 + \eta)$, $> {}^3/_4\,\eta$ ist; $(x_0, x_0 + \eta)$ enthält

---

[13]) Man vergleiche den Anfang des Beweises von Hilfssatz 4.

somit eine zu $E_1 . E_2$ gehörende Teilmenge $T(\eta)$, von einem Masse $> {}^1/_2\, \eta$, in deren Punkten $\xi$:

$$(16)\qquad \left| \frac{2}{(\xi - x_0)^2} \int_{x_0}^{\xi} [f(t) - f(x_0)]\, dt \right| < \mu$$

ist.

Zu jedem Punkte $\xi$ von $T(\eta)$ gibt es einen Punkt $\tau$ mit $\xi + {}^1/_2 (\xi - x_0) < \tau < \xi + (\xi - x_0)$, in welchem sowohl

$$(17)\qquad \left| \frac{2}{(\tau - \xi)^2} \int_{\xi}^{\tau} [f(t) - f(\xi)]\, dt \right| < \mu$$

wie

$$(18)\qquad \left| \frac{2}{(\tau - x_0)^2} \int_{x_0}^{\tau} [f(t) - f(x_0)]\, dt \right| < \mu$$

ist.

Aus (16), (17) und (18) folgt:

$$\left| \int_{x_0}^{\tau} [f(t) - f(x_0)]\, dt - \int_{x_0}^{\xi} [f(t) - f(x_0)]\, dt - \int_{\xi}^{\tau} [f(t) - f(\xi)\, dt \right| <$$
$$< {}^1/_2\, \mu\, [4 (\xi - x_0)^2 + (\xi - x_0)^2 + (\xi - x_0)^2],$$

oder

$$|(\tau - \xi) [f(\xi) - f(x_0)]| < 3 \mu (\xi - x_0)^2,$$

und, mit $\tau - \xi > {}^1/_2 (\xi - x_0)$, folgt weiter:

$$\left| \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \right| < 6 \mu.$$

Zu fast jedem Punkte $x_0$ von $E_1 . E_2$ und somit auch zu fast jedem Punkte $x_0$ von $E$ gibt es hierdurch eine Menge von Punkten $\xi$ mit einer unteren rechten Dichte $\geqq {}^1/_2$ in $x_0$, für die die zugehörigen Differenzenquotienten $\dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$ beschränkt sind. Daraus folgt jedoch, nach einem Satze von Denjoy-Khintchine [14]), dass $f(x)$ in fast allen Punkten von $E$ eine approximative Ableitung besitzt.

---

[14]) Siehe Khintchine, loc. cit. [11]), S. 212.

## Definition und Eigenschaften der approximativen C-P Integration.

§ 4. **Definition E.** $f(x)$ sei fast überall endlich im abgeschlossenen Intervall $(a, b)$. Dann wird die in $(a, b)$ endliche Funktion $\psi(x)$ *eine in $(a, b)$ zu $f(x)$ adjungierte approximative CP-Majorante* sein, wenn sie über $(a, b)$ integrierbar ist nach der allgemeinen Denjoyschen Definition und daneben den Bedingungen genügt: $\alpha$) sie ist in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ $C$-approximativ stetig; $\beta$) $\psi(a) = 0$; $\gamma$) in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ ist $\underline{CD}_{\text{appr.}}\, \psi(x) \neq -\infty$; $\delta$) fast überall in $(a, b)$ gilt $\underline{CD}_{\text{appr.}}\, \psi(x) \geqq f(x)$.

**Definition F.** $\varphi(x)$ wird *eine in $(a, b)$ zu $f(x)$ adjungierte approximative CP-Minorante* sein, wenn sie endlich und über $(a, b)$ integrierbar ist nach der allgemeinen Denjoyschen Definition und daneben den Bedingungen genügt: $\alpha$) sie ist in jedem Punkte von $(a, b)$ $C$-approximativ stetig; $\beta$) $\varphi(a) = 0$; $\gamma$) in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ ist $\overline{CD}_{\text{appr.}}\, \varphi(x) \neq +\infty$; $\delta$) fast überall in $(a, b)$ gilt $\overline{CD}_{\text{appr.}}\, \varphi(x) \leqq f(x)$.

**Satz VIII.** *Die Differenz einer jeden approximativen CP-Majorante $\psi(x)$ und einer jeden approximativen CP-Minorante $\varphi(x)$, die zu der in $(a, b)$ fast überall endlichen Funktion $f(x)$ adjungiert sind, ist eine nicht-abnehmende Funktion.*

Dies folgt sofort aus dem Korollar zu Satz V. [15])

**Definition G.** $f(x)$ sei eine in $(a, b)$ fast überall endliche Funktion, zu welcher daselbst approximative $CP$-Majoranten und -Minoranten, $\psi(x)$ bzw. $\varphi(x)$, adjungiert sind. Wenn dann die untere Schranke aller $\psi(b)$-Werte und die obere Schranke aller $\varphi(b)$-Werte einander gleich sind, so definiere ihr gemeinsamer

---

[15]) In den Definitionen $E$ und $F$ darf man in den Bedingungen $\gamma$) reduzible Ausnahmemengen zulassen, ohne dass dabei Satz VIII seine Gültigkeit verliert. Die in dieser Weise abgeänderte Definition $G$ des approximativen $CP$-Integrals umfasst das in Fussn. 5) abgeänderte Burkillsche $CP$-Integrationsverfahren.

Wert *das approximative CP-Integral von* $(fx)$ *über* $(a, b)$: $\int_a^b (CP_{\text{appr}})\, f(x)\, dx$.[16])

---

[16]) Jede nach Burkill $CP$-integrierbare Funktion hat auch ein approximatives $CP$-Integral; die Integralwerte sind einander gleich. Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht, umgekehrt, jede Funktion, welche integrierbar ist nach Definition $G$, es auch ist nach der Burkillschen Definition. (Somit ist die hier behandelte Integration eine Erweiterung der Burkillschen).

Zur Konstruktion des Beispiels gehen wir aus von einer stetigen, nicht identisch verschwindenden Funktion, welche in jedem Punkte eines abgeschlossenen Intervalls $(p, q)$ eine endliche Ableitung hat. Mit Hilfe dieser Funktion lässt sich ein abgeschlossenes Intervall $(a, b)$ und eine in $(a, b)$ zweimal differenzierbare Funktion $f(x)$ angeben, mit von Null verschiedenen oberer und unterer Schranke, bei der die Differentiationen immer endliche Grenzwerte liefern, während in $a$ und $b$ die Werte der Funktion und der ersten und zweiten Ableitungen alle Null sind.

Auf $(0, +c)$ betrachten wir eine Folge von abgeschlossenen, einander fremden Intervallen $(a_n, b_n)$, deren Punkte mit zunehmendem $n$ nach $x = 0$ konvergieren und die zusammen eine Menge $E$ liefern, welche in $x = 0$ die (rechte) Dichte Null hat. Wir bilden das Intervall $(a, b)$ ähnlich auf ein jedes der Intervalle $(a_n, b_n)$ ab; dabei geht die Funktion $f(x)$ auf $(a, b)$ über in eine Funktion $f_n(x)$ auf $(a_n, b_n)$, wenn man für beide in einander entsprechenden Punkten gleiche Werte fordert. Es ist möglich für jedes Intervall $(a_n, b_n)$ durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten $K_n$ aus $f_n(x)$ eine Funktion $g_n(x)$ abzuleiten, für die in jedem Punkte $x$ von $(a_n, b_n)$ $x - g_n(x)$ und $x + g_n(x)$ immer nicht-negativ sind, während in mindestens einem Punkte von $(a_n, b_n)$ entweder der erte oder der zweite Ausdruck gleich Null wird. Definieren wir schliesslich auf $(0, +c)$ eine Funktion $F(x)$, welche für jedes Intervall $(a_n, b_n)$ mit der zugehörigen Funktion $g_n(x)$ zusammenfällt und gleich Null ist in den übrigen Punkten von $(0, +c)$, so wird diese Funktion $F(x)$ die folgenden Eigenschaften haben: 1⁰ sie ist stetig in $(0, +c)$; 2⁰ sie ist zweimal differenzierbar in jedem Punkte von $(0, +c)$, ausgenommen in $x = 0$ wo sie eine approximative Ableitung gleich Null hat; für jeden von $x = 0$ verschiedenen Punkt $x_0$ lässt sich somit schreiben:

$$F''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - hF'(x_0)}{h^2/2};$$

3⁰ in $x = 0$ ist

$$\lim_{h \to 0} \text{appr} \frac{F(h) - F(0) - hF'_{\text{appr.}}(0)}{h^2/2} = 0.$$

Ausgehend von einer Funktion $F_2(x)$, welche in $x = 0$ den Wert Null hat und in den übrigen Punkten von $(0, c)$ mit $F''(x)$ zusammenfällt, liefert die Definition $G$ uns das Integral $\int_0^x (CP_{\text{appr.}})\, F_2(t)\, dt$, das in $x = 0$ den Wert $F'_{\text{appr.}}(0) = 0$ hat, übrigens mit $F'(x)$ zusammenfällt; Anwendung der Burkillschen Integraldefinition wäre nicht möglich gewesen. Weitere Denjoy-Integration von $\int_0^x (CP_{\text{appr.}})\, F_2(t)\, dt$ wird schliesslich $F(x)$ zurückliefern.

§ 5. **Satz IX.** *Wenn die in (a, b) fast überall endliche Funktion f(x) ein approximatives CP-Integral über (a, b) hat, so hat sie es auch über jedes Teilintervall von (a, b). Für* $a<c<b$ *wird das Integral über (a, b) gleich der Summe der Integrale über (a, c) und (c, b) sein.*

**Satz X.** *Wenn die fast überall endliche Funktion f(x) über (a, b) ein approximatives CP-Integral hat, so sind für willkürliche* $\psi(x)$ *und* $\varphi(x)$ *die Differenzen* $\psi(x) - \int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$ *und* $\int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt - \varphi(x)$ *nicht-abnehmende, stetige Funktionen von x.*

**Satz XI.** *Wenn die Funktionen* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *fast überall in (a, b) endlich und über (a, b)* $CP_{\text{appr.}}$ *– integrierbar sind, so wird bei willkürlichen Konstanten* $a_1$, $a_2$:

$$\int_a^b (CP_{\text{appr.}}) \{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\} dx = a_1 \int_a^b (CP_{\text{appr.}}) f_1(x)dx + \\ + a_2 \int_a^b (CP_{\text{appr.}}) f_2(x)dx$$

*sein.*

**Satz XII.** $\int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$ *ist eine in (a, b) C-approximativ stetige Funktion; sie hat in fast allen Punkten von (a, b) eine approximative Ableitung*[17]) *und eine approximative C-Ableitung, beide gleich f(x).*

**Beweis.** Aus

$$\int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt = \psi(x) - [\psi(x) - \int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt]$$

folgt, da $\psi(x)$ $C$-approximativ stetig und $\psi(x) - \int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$, nach Satz X, stetig ist, die erste Behauptung von Satz XII.

Zum Beweise des zweiten Teiles betrachten wir eine willkürliche Majorante $\psi(x)$ und eine willkürliche Minorante $\varphi(x)$. Da $\underline{CD}_{\text{appr.}}\, \psi(x) \neq -\infty$ ist in allen Punkten von $(a, b)$ und $\psi(x) - \int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$ in fast allen Punkten von $(a, b)$ eine

[17]) Daraus folgt, nach Khintchine, loc. cit. 11), S. 256, dass $(a, b)$ sich, ausgenommen in den Punkten einer Nullmenge, überdecken lässt durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $\int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$ totalstetig ist.

endliche Ableitung, somit auch eine endliche (approximative) $C$-Ableitung (von gleichem Werte) hat, wird $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ in fast allen Punkten von $(a, b)$ eine von $-\infty$ verschiedene untere approximative $C$-Derivierte haben. Aus $\overline{CD}_{\text{appr.}}\ \varphi(x) \neq +\infty$ in allen Punkten von $(a, b)$ folgt in analoger Weise, dass die obere approximative $C$-Derivierte von $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ in fast allen Punkten von $(a, b)$ von $+\infty$ verschieden ist. Da ausserdem das unbestimmte Integral $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ als Differenz einer nach der allgemeinen Denjoy-Integration integrierbaren Funktion und einer stetigen Funktion auch über $(a, b)$ integrierbar ist nach der allgemeinen Denjoy-Integration, lässt sich in $(a, b)$ Satz VII auf das unbestimmte $CP_{\text{appr.}}$-Integral anwenden; dieses besitzt somit fast überall in $(a, b)$ eine approximative Ableitung und eine approximative $C$-Ableitung von gleichem Werte.

Auch jede Funktion $\psi(x)$ und jede Funktion $\varphi(x)$ wird dadurch in $(a, b)$ fast überall eine approximative Ableitung und eine approximative $C$-Ableitung von gleichem Werte haben.

Wir betrachten nun eine Folge von Majoranten $\{\psi^{(k)}(x)\}$ und eine Folge von Minoranten $\{\varphi^{(k)}(x)\}$, welche mit zunehmendem $k$ nach $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ konvergieren. In einem massgleichen Kerne $K$ von $(a, b)$ haben das unbestimmte Integral, alle $\psi^{(k)}$ und alle $\varphi^{(k)}$ endliche approximative Ableitungen.

Bei positivem $\varepsilon$ sei $K_j(\varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte von $K$, in welchen die approximativen Ableitungen von $\psi^{(j)}$ und $\varphi^{(j)}$ eine Differenz $\geqq \varepsilon$ haben. Das Mass dieser Menge wird mit zunehmendem $j$ nach Null konvergieren. Sonst existierte eine positive Zahl $\delta$ derart, dass für unendlich viele Werte $(j')$ $m\,[K_{j'}(\varepsilon)] \geqq \delta$ wäre. Dies ist unmöglich. Denn Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes würde zeigen, dass für die nicht-abnehmenden Funktionen $\{\psi^{(j')} - \varphi^{(j')}\}$

$$\psi^{(j')}(b) - \varphi^{(j')}(b) \geqq \delta\,.\,\varepsilon$$

sein müsste, während doch

$$\lim_{j' \to \infty} \{\psi^{(j')}(b) - \varphi^{(j')}(b)\} = 0$$

ist. Die approximative Ableitung von $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ weicht somit fast überall in $(a, b)$ um weniger als $\varepsilon$ von $f(x)$ ab.[18]) Da $\varepsilon$ willkürlich ist, wird die approximative Ableitung des unbestimmten Integrals fast überall in $(a, b)$ gleich $f(x)$ sein.

**Satz XIII.** *Wenn die in $(a, b)$ endliche Funktion $F(x)$ über $(a, b)$ integrierbar ist nach der allgemeinen Denjoyschen Definition und in jedem Punkte von $(a, b)$ eine endliche approximative C-Ableitung, $CD_{\text{appr.}}\, F(x)$, hat, so wird diese über $(a, b)$ $CP_{\text{appr.}}$ — integrierbar sein, und es ist:*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, CD_{\text{appr.}}\, F(x)dx.$$

Aus diesem Satze folgt sofort, dass die in der Einleitung besprochenen Probleme sich mit Hilfe der approximativen $CP$-Integration vollständig lösen lassen.

§ 6. **Satz XIV.** *Eine in einem Intervall $(a, b)$ ihr Vorzeichen nicht wechselnde, fast überall endliche Funktion $f(x)$ hat daselbst gleichzeitig ein Lebesguesches Integral und ein approximatives CP-Integral, und diese sind dann einander gleich.*

**Beweis.** Nehmen wir $f(x) \geqq 0$ an. Da $\int_a^x (L)\; f(t)dt$ auch das Integral von $f(x)$ im Perronschen Sinne, jedes Perronsche Integral einer Funktion aber zugleich das approximative $CP$-Integral dieser Funktion ist (wie aus den Definitionen der zu diesen Integrationen gehörenden Majoranten und Minoranten hervorgeht), so ist $\int_a^x (L)\; f(t)dt$ zugleich das approximative $CP$-Integral von $f(x)$.

Wenn, umgekehrt, $\int_a^x (CP_{\text{appr.}}) f(t)dt$ existiert, so wird $\varphi(x) \equiv 0$ eine approximative $CP$-Minorante sein. Aus Satz X folgt dadurch, dass $\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ in $(a, b)$ nicht-abnehmend sein wird. Dieses Integral besitzt somit fast überall in $(a, b)$ eine endliche, nach

[18]) Denn in fast jedem Punkte von $(a, b)$ gilt:

$$AD\varphi^{(k)}(x) = CD_{\text{appr.}}\, \varphi^{(k)}(x) \leqq f(x) \leqq CD_{\text{appr.}}\, \psi^{(k)}(x) =$$
$$= AD\,\psi^{(k)}(x) \text{ und } AD\,\varphi^{(k)}(x) \leqq AD\left[\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\; f(t)dt\right] \leqq AD\psi^{(k)}(x).$$

Lebesgue integrierbare Ableitung, welche nach Satz XII fast überall gleich $f(x)$ ist. Also muss, nach der ersten Hälfte dieses Beweises,

$$\int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt = \int_a^x (L)\, f(t)dt$$

sein.

**Satz XV.** *Wenn die fast überall endlichen Funktionen* $\{f_n(x)\}$ *über* $(a, b)$ $CP_{\text{appr.}}$*-integrierbar sind und mit zunehmendem* $n$ *wachsend gegen eine fast überall endliche Funktion* $f(x)$ *konvergieren, so folgt aus der Endlichkeit von*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f_n(x)dx$$

*die Existenz des approximativen CP-Integrals* $\int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f(x)dx$; *und umgekehrt. Überdies wird dann*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f_n(x)dx = \int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f(x)dx$$

*sein.*

Der Beweis folgt aus dem übereinstimmenden Satze für Lebesguesche Integrale durch Betrachtung der Funktionen $\{f_n(x) - f_1(x)\}$; denn nach Satz XIV sind diese Funktionen nach Lebesgue integrierbar.

**Satz XVI.** *Es existiere das approximative CP-Integral über* $(a, b)$ *für jede der fast überall endlichen Funktionen* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., *konvergierend nach* $f(x)$. *Wenn für jedes* $n$ *und jedes* $x$ *in* $(a, b)$:

$$g(x) \leqq f_n(x) \leqq h(x)$$

*ist, und* $g(x)$ *und* $h(x)$ *fast überall endliche, über* $(a, b)$ $CP_{\text{appr.}}$*-integrierbare Funktionen sind, so wird auch* $f(x)$ *über* $(a, b)$ $CP_{\text{appr.}}$*-integrierbar sein, und es ist*:

$$\int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f_n(x)dx. \tag{19}$$

**Beweis.** Nach Satz XIV sind die nicht-negativen Funktionen $\{f_n - g\}$ und $h - g$ $L$-integrierbar. Da $f_n - g \leqq h - g$ ist, wird auch $f - g$ $L$-integrierbar sein, und es ist:

$$\int_a^b (L)\,[f - g]\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b (L)\,[f_n - g]\,dx.$$

Daraus folgt leicht die Gültigkeit von (19). [19]

---

[19]) Ein von Burkill, loc. cit. 5), p. 320—322, beweisener Satz über partielle Integration beim $CP$-Integral lässt sich übertragen auf das approximative $CP$-Integral: *Wenn die in $(a, b)$ fast überall endliche Funktion $f(x)$ in $(a, b)$ ein approximatives CP-Integral $F(x) \equiv \int_a^x (CP_{\text{appr.}})\, f(t)dt$ hat, wobei $F(x)$ in $(a, b)$ C-stetig sein soll* [d. h. in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ ist $F(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (P) F(t) dt$], *und wenn $g(x)$ in $(a, b)$ von beschränkter Variation ist, so wird $f(x).\, G(x)$, wobei $G(x) \equiv \int^x g(t)\,dt$, $CP_{\text{appr.}}$-integrierbar sein über $(a, b)$, und es ist:*

$$\int_a^b (CP_{\text{appr.}})\, f.\,G dx = F(b).\,G(b) - F(a).\,G(a) - \int_a^b (P) F.\,g dx.$$

Der Beweis verläuft wie der des zitierten Satzes.

Donald L. Webb.

## Algebra n-wartościowej logiki.

Przedstawił K. Kuratowski na posiedzeniu dn. 24 listopada 1936 r.

Autor analizuje podstawowe działania w systemie $n$-wartościowej logiki. W szczególności badane są różne rodzaje implikacji. Wiele twierdzeń algebry Boole'a jest uogólnionych.

---

Donald L. Webb.

## The algebra of n-valued logic [1]).

Mémoire présenté par M. C. Kuratowski dans la séance du 24 novembre 1936.

**Introduction.** In 1920 Łukasiewicz [2]) defined in terms of a matrix a „three-valued logic". A year later Post [3]) generalized two-valued truth systems, giving an $n$-valued system. This system was defined in terms of two operators which were generalizations of the negation and disjunction of two-valued logic. Łukasiewicz [2]) gave a short characterization of an $n$-valued system in 1922. This was followed by a paper [4]) in 1930 defining implication and negation for an $n$-valued system. Lewis an Langford [5]) extended the results concerning the three-valued logic given by Łukasiewicz and Tarski in their papers by using the truth-tables in terms of which Post had defined his $n$-valued system.

---

[1]) Presented to the Amer. Math. Soc. on April 11, 1936.

[2]) See J. Łukasiewicz and A. Tarski, „Untersuchungen über den Aussagenkalkül", *C. R. Soc. d. Sc. et. d. Let. de Varsovie*, XXIII (1930), Classe III, p. 32, footnote 5; p. 39, footnote 17. This paper is referred to as *LT* in subsequent references.

[3]) E. L. Post, „Introduction to a General Theory of Propositions", *Amer. Jour. of Math.*, XLIII (1921), pp. 163—185. See particularly pp. 180—185. Henceforth referred to as *P*.

[4]) Łukasiewicz, „Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", *C. R. Soc. d. Sc. et d. Let. de Varsovie*, XXIII (1930), Classe III, pp. 51 ff. Called *L*.

[5]) Lewis and Langford: *Symbolic Logic*, Century Co. 1932. See in particular Chapter VII. Henceforth called *LL*.

The methods of trial and error developed for the Boolean algebra [6]) become impractical in the treatment of $n$-valued logic. When $n$ is 2 there are 16 binary operations on 2 elements definable such that the result of the operation is again one of 2 elements. When $n$ is 3 the number of possible binary operations increases to 16,183.

Lewis and Langford [7]) have proven propositions in 3-valued logic. To do this they made a table in which they placed the results of applying each of three truth-values to the proposition. If the proposition had the truth value „certainly true" in each case, then the proposition was said to be assertable. It is obvious that for the case of a general $n$ we cannot make out a table of this sort. Besides, this would involve the proving of a proposition for each value of $n$. Because of these difficulties we abandon this method and develop a more general one. Then we prove propositions which will hold for any finite integral value of $n$.

Summarizing briefly the results of the following sections, we have:

(1) Generalized many of the results of the Boolean Algebra, obtaining a single binary operation which will generate all of the remaining operations of the logic; generalized the Boolean expansion.

(2) Obtained more completely the properties of five types of implication, one of which was defined by Łukasiewicz.

(3) Determined which of the propositions listed as the most important by Whitehead and Russell in the *Principia Mathematica*, sections 2 to 5 (inclusive), carry over to $L_n$ for five different types of implication.

## I. The development of the algebra of n-valued logic.

In this section we define the implication and negation of Łukasiewicz in terms of the negation and disjunction of Post. These in turn are defined in terms of a single operator [8]), $p \mid q$.

---

[6]) See E. Żyliński, *Fund. Math*, 7 (1925), pp. 203—209.

[7]) *LL* Chapter VII.

[8]) Webb, „Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in Terms of one Binary Operation", *Amer. Jour. of Math.*, LVIII (1936), *pp.* 193—194. Post was familiar with a result of this nature. See *P p.* 183, § 15. His operator was defined by $p \mid q \, . \equiv . \sim_m p \, . \, V_m \, . \sim_m q$. The difinition in the paper cited above was $p \mid q \, . \equiv . \sim_m (p \, V_m \, q)$.

The operators of Post are introduced since they will allow us to generate the matrix of any order function on $n$ truth-values. This statement may not be made about the implication and negation of Łukasiewicz since they are not symbolically complete[9]). To the above operators we add three others, equivalence and two products, $pq$ and $p \times q$. With these relations we develop an extension of the algebra on two truth-values to $n$ truth-values. A large portion of the theorems of Chapter II of *LL* have been generalized. By generalization we mean that in the case when $n$ is 2 the generalized property becomes the Boolean property of which it is the generalization.

The notation used follows that of Whitehead and Russell. $Np$ was introduced instead of $\sim p$ to avoid confusion with Post's negation. It is more convenient to have the subscript of the truth-values, $t_i$, range $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ than in the traditional manner since this allows the use of congruences.

**Notation and definitions.** Let $L_n$ be a logic of $n$ truth-values $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, where $n$ is a positive integer. The $t_i$ are marks such that to each of the $t_i$ any one of the $n$ truth-values of the system may be assigned. One interpretation that may be given to them is that $t_i$ is less likely to be true than $t_j$ if $i < j$, $t_i$ is as likely to be true as $t_j$ if $i = j$, and $t_i$ is more likely to be true than $t_j$ if $i > j$. Then $t_{n-1}$ is taken to be certainly true and $t_0$ certainly false. During the remainder of this paper $t_{n-1}$ may be interpreted as certainly true since we accept a proposition as being assertable when we can show that it has the truth-value $t_{n-1}$ for all possible truth-values that the component elementary propositions may assume. Since these demonstrations depend upon the subscripts and not upon the truth values correlated to the subscript, we can correlate any truth-value to $t_{n-1}$ and obtain a series of propositions having the truth-value correlated to $t_{n-1}$ for all possible truth values of its component propositions.

Let $\mathfrak{L}_n$ be the logic based on the implication and negation of Łukasiewicz[10]) and in the case of $\mathfrak{L}_3$, as modified by Lewis

[9]) For this statement I am indebted to Mr. J. C. C. Mc Kinsey of the University of California. For the defnition of „symbolically complete" see *LL* page 231.

[10]) See *LT* and *L*.

and Langford[11]). $P_n$ represents the logic of Post[12]) . $p, q, r, x, y$, and $z$ are elementary propositions in $L_n$, $\mathfrak{L}_n$ and $P_n$ . $p \varepsilon L_n$ signifies that $p$ is in $L_n$, etc.

By the expression „an operator is on $n$ elements to $n$ elements" we mean the result of the operation on $n$ elements is again one of the $n$ elements.

In place of the matrices of Lewis and Langford, we adopt arithmetical methods of showing what values the matrix posseses. We denote this arithmetic, which includes the ordinary operations of $+, -, \cdot, =, <, >$, defined as usual, and the integers $a, b, \ldots, e, h, i, j, k$ by $A$. To associate the truth-values $t_i \varepsilon L_n$ with $i \varepsilon A$, we use the following two symbols:

1.001 If $p$ has the truth-value $t_i$, then $[p]' = i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. $Df$

1.002 The expression $[f(p, q, \ldots, r; a, b, \ldots, e)]$ indicates that

1. $f(p, q, \ldots, r; a, b, \ldots, e)$ is considered as a convenient method of writing $f([p]', [q]', \ldots, [r]'; a, b, \ldots, e)$ where $p, q, \ldots, r \varepsilon L_n$; $a, b, \ldots, e \varepsilon A$.
2. $f([p]', [q]', \ldots, [r]'; a, b, \ldots, e)$ is any rational polynomial with arguments and operations in $A$.
3. If for $[p]' = i$, $[q]' = j, \ldots, [r]' = k$ $(i, j, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n-1)$ $f([p[', [q]', \ldots, [r]'; a, b, \ldots, e) = c$, then $[f(p, q, \ldots, r; a, b, \ldots, e)] = d$ where $c \equiv d \bmod n$, $0 \leqq d < n$. $Df$

If we enclose a system of brackets in another set of brackets, we shall consider the expression to mean that we shall operate with the inner brackets before considering the outer set of brackets; *e. g.* by $[[t_i] + j]$ we mean $[i + j]$. The chief difference between $[\ ]$ and $[\ ]'$ is that all operations indicated in $[\ ]'$ are in $L_n$ while all operations indicated in $[\ ]$ are in $A$. An example is $[p \supset q]' = [n - 1 + q - p]$ if $[p] > [q]$. This statement might be written as follows: If $p$ has the truth value $t_i$ and $q$ the truth-value $t_j$, where $i > j$, the truth-value of $p \supset q$ is $t_k$ where $k = n - 1 + j - i$. When we make such a statement we do not mean to restrict it to particular values for $i$ and $j$ such that $i > j$, but rather wish to express that this statement holds for any pair of values $i, j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n-1)$ such that $i > j$.

---

11) See *LL* Chapter VII.

12) See *P*.

It is convenient to define:

1.003 If $[p]=i$, $[q]=j$, then *Df*

$[\max(p, q)]=j$ where $i \leqq j$

$=i$ where $i>j$. *Df*

1.004 If $[p]=i$, $[q]=j$, then

$[\min^{*}(p, q)]=j$ where $i \geqq j$

$=i$ where $i<j$.

It is evident from the properties of congruences that $[[a]+b]$ may be written as $[a+b]$. Accordingly, we shall consider $[a+ + \max(p, q)]$ to mean $[a+[\max(p, q)]]$, etc.

Dots are used here as in the two-valued logic for punctuation.

We shall define all operations of $L_n$ in terms of $p|q$. The truth-table for $p|q$ is given by:

1.01 $[p|q]'=[1+\max(p, q)]$ *Df*

Other operations in $L_n$ to be used are defined as follows:

1.02 $p^0 .=. p, \quad p^{i+1} .=. p^i | p^i \qquad (i=0,1,\ldots, n-2)$ *Df*

1.03 $p \vee q .=. (p|q)^{n-1}$ *Df*

1.04 $Np .=. p^{[2n-2P-1]}$ *Df*

1.05 $pq .=. N(Np . \vee . Np)$ *Df*

We shall at times find it more convenient to use $p . q$ than $pq$. In such instances $p . q$ will be considered as merely another way of writing $pq$.

1.06 $p \supset q .=. (pq)^{[n-1-P]}$ *Df*

1.07 $p \equiv q .=: p \supset q . q \supset p$ *Df*

1.08 $p \times q .=. (p^{n-1} \vee q^{n-1})^1$ *Df*

**Theorems readily deducible.** From the preceding definitions we can readily prove the following theorems concerning their properties.

1.1 $[p^h]=[p+h]$

Proof: $[p^h]'=[p^{h-1}|p^{h-1}]'=[1+\max([p^{h-1}]',[p^{h-1}]')]$

$=[1+[p^{h-1}]']$ (1.02,1.01)

Continuing this process

$[p^h]'=[1+[p^{h-1}]']=[2+[p^{h-2}]']=\ldots=[h+[p^0]']$

Or $[p^h]'=[h+p]$.

1.2 $[p \vee q]=[\max(p, q)]$

Proof: $[p \vee q]'=[(p|q)^{n-1}]'=[1+\max(p, q)+n-1]=$

$=[\max(p, q)]$ (1.03,1.1).

1.3 $[Np]'=[n-1-p]$

Proof: $[Np]' = [p + 2n - 2p - 1] = [n - 1 - p]$ (1.04,1.1).

1.4 $[pq] = [\min(p, q)]$

Proof: $[pq]' = [n - 1 - \max(n - 1 - p, n - 1 - q)]$ (1.05,1.3,1.2)

If $[p] < [q]$, $[n-1-p] > [n-1-q]$ and $[pq]' = [p]$

If $[p] > [q]$, $[n-1-p] < [n-1-q]$ and $[pq]' = [q]$

If $[p] = [q]$, $[n-1-p] = [n-1-q]$ and $[pq]' = [p] = [q]$

Hence $[pq]' = [\min(p, q)]$.

1.5 $[p \supset q]' = n - 1$ if $[p] \leqq [q]$

$= [n - 1 + q - p]$ if $[p] > [q]$

Proof: Similar in method to preceding proofs.

1.6 $[p \equiv q]' = n - 1$ if and only if $[p] = [q]$

$= [n - 1 + q - p]$ if $[p] > [q]$

$= [n - 1 + q - q]$ if $[p] < [q]$

Proof: (1.07,1.4,1.5).

From this result we readily see that 1.07 implies that two propositions may be asserted as equivalent when and only when they have the same truth-table. Using 1.6 and the preceding theorems we immediately get the following relations of equivalence between the operations in $L_n$ with those of $\mathfrak{L}_n$ and $P_n$. The difference in notation of truth-values must be considered. $t_m$ in $L_n$ becomes $\frac{m}{n-1}$ in $\mathfrak{L}_n$ and $t_{n-m}$ in $P_n$. Thus $[n - 1 + q - p]$ in $L_n$ becomes $[1 + q - p]$ in $\mathfrak{L}_n$ and $[1 + p - q]$ in $P_n$. If we consider this difference in notation, the proofs of theorems 1.7 to 1.14, inclusive, are immediately evident.

1.7 [13]) $p \supset q . \equiv . pCq$; $p \supset q . \varepsilon L_n$, $pCq . \varepsilon \mathfrak{L}_n$.

1.8 [14]) $Np . \equiv . (Np)$; $Np \varepsilon L_n$, $(Np) \varepsilon \mathfrak{L}_n$.

1.9 [14]) $p \equiv q . \equiv . pEq$, $p \equiv q . E . pEq$; $p \equiv q . \varepsilon L_3$, $pEq . \varepsilon \mathfrak{L}_3$.

1.10 $p \supset q . \supset q : \equiv . p \vee q$

Proof: $[p \supset q . \supset q]' = [n - 1 + q - (n - 1)] = [q]$ if $[p] \leqq [q]$.

Since $[n - 1 + q - p] > [q]$ if $[p] \neq n - 1$

$= [q]$ if $[p] = n - 1$, we have

$[p \supset q . \supset q]' = [n - 1 + q - (n - 1) - q + p] = [p]$ if $[p] > [q]$

Hence, $[p \supset q . \supset q]' = [\max(p, q)] = [p \vee q]'$.

---

[13]) See *LL* p 213 footnote or *L* p. 72

[14]) See *LL* p. 214. *pEq* is undefined for $\mathfrak{L}_n$.

1.11 [15]) $p \vee q \cdot\equiv\cdot pOq$; $p \vee q . \varepsilon L_3$, $pOq . \varepsilon \mathfrak{L}_3$.

1.12 [15]) $pq \cdot\equiv\cdot pAq$; $pq . \varepsilon L_3$, $pAq . \varepsilon \mathfrak{L}_3$.

1.13 [16]) $p^1 \cdot\equiv\cdot \sim_n p$, $p^i \cdot\equiv\cdot \sim_n^i p$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$; $p^1, p^i . \varepsilon L_n$;
$\sim_n p, \sim_n^i p . \varepsilon P_n$.

1.14 [16]) $p \vee q \cdot\equiv\cdot p \vee_n q$; $p \vee q . \varepsilon L_n$, $p \vee_n q . \varepsilon P_n$.

1.15 $[p \times q]' = 0$ if $[pq]' = 0$
$= [\max(p, q)]$ if $[pq]' \neq 0$

Proof: $[p \times q]' = [1 + \max([n-1+p], [n-1+q])]$
(1.08,1.1,1.2)

If $[pq]' = 0$, $[p \times q]' = [1 + n - 1] = 0$
If $[pq]' \neq 0$, $[\max([n-1+p], [n-1+q])] =$
$= [n - 1 + \max(p, q)]$
Or $[p \times q]' = [1 + n - 1 + \max(p, q)] = [\max(p, q)]$
if $[pq]' \neq 0$.

Many of the proofs of the following theorems have been omitted because they are immediate.

1.16 $p \vee q \cdot\equiv\cdot q \vee p$

1.17 $(p \vee q) \vee r \cdot\equiv\cdot p \vee (q \vee r)$

1.18 $pq \cdot\equiv\cdot qp$

1.19 $(pq)\, r \cdot\equiv\cdot q\, (pr)$

1.20 $p \times q \cdot\equiv\cdot q \times p$

1.21 $p \times (q \times r) \cdot\equiv\cdot (p \times q) \times r$

1.22 $p\,(q \vee r) \cdot\equiv\cdot pq . \vee . pr$

Proof: By 1.16 without loss of generality we can take $[q] \geqq [r]$.
If $[p] \geqq [q] \geqq [r]$, then $[p\,(q \vee r)]' = [q]$ and $[qp . \vee . pr]' = [q]$.
If $[q] > [p] \geqq [r]$, then $[p\,(q \vee r)]' = [p]$ and $[pq . \vee . pr]' = [p]$.
If $[q] \geqq [r] > [p]$, then $[p\,(q \vee r)]' = [p]$ and $[pq . \vee . pr]' = [p]$.

1.23 $p \vee (qr) \cdot\equiv\cdot (p \vee q)\,(p \vee r)$

Proof: Similar to that of. 1.22.

1.24 $p \vee (q \vee r) \cdot\equiv\colon p \vee q . \vee . p \vee r$

Proof: $[\max\{p, \max(q, r)\}] = [\max\{\max(p, q), \max(p, r)\}]$.

1.25 $p \times (q \vee r) \cdot\equiv\colon p \times q . \vee . p \times r$

Proof: If $[p] = 0$, $[p \times (q \vee r)]' = 0$ and $[p \times q . \vee . p \times r]' = 0$
If $[q] = 0$, $[q \vee r]' = [r]$ and $[p \times q . \vee . p \times r]' = [p \times r]'$
Hence $[p \times (q \vee r)]' = [p \times q . \vee . p \times r]'$ if $[q] = 0$.
Similarly for $[r] = 0$.

---

[15]) See *LL* p. 214.

[16]) See *P* p. 180.

If $[p] \neq 0$, $[q] \neq 0$, $[r] \neq 0$, then we can replace $\times$ by $\vee$ and 1.25 becomes 1.24.

1.26 $p \cdot\!\equiv\!\cdot\, p \,.\vee.\, pq$

1.09 $p \vee q \vee r \cdot\!=\!\cdot\, p \vee (q \vee r), pqr \cdot\!=\!\cdot\, p\,(qr), p \times q \times r \cdot\!=\!\cdot\, p \times (q \times r)$ *Df*

1.010 $X_i \cdot\!=\!\cdot\, x^0 x^i \ldots x^{i-1} x^{i+1} \ldots x^{n-1}$ *Df*

1.011 $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot\!=\!\cdot\, x_0 \vee x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ similary for $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ldots$ $\ldots \sum_{k=0}^{n-1} x_{i,j,\ldots,k}$ where $x_i$ and $x_{i,j,\ldots,k}$ $(i, j, \ldots, k = 0,1,\ldots n-1)$ are any elementary propositions. *Df*

1.27 $[X_i]' = 1$ if $[x] = n - i$
$= 0$ if $[x] \neq n - i$

Proof: If $[x] = n - j$ where $j \neq i$ then $[x^j]' = [n - j + j] = 0$. But $x^j$ occurs in $X_i$, hence $[X_i]' = 0$ if $[x] \neq n - i$ (1.4,1.09,1.010,1.18). If $[x] = n - i$, $[x^i]' = 0$, $[x^{[i+1]}]' = 1$ and $[X_i]' = 1$, since $t_0$ does not occur in $X_i$.

1.28 $[X_i \times Y_j \times \ldots \times Z_k]' = 1$ if $[x] = n - i, [y] = n - j, \ldots, [z] = n - k$
$= 0$ otherwise. (1.27,1.15).

1.29 $X_i\, X_j \cdot\!\equiv\!\cdot\, t_0$ $\quad i \neq j.$ (1.4,1.27).

1.30 $X_i \times X_j \cdot\!\equiv\!\cdot\, t_0$ $\quad i \neq j.$ (1.15,1.27).

1.31 $\sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot\!\equiv\!\cdot\, t_1$

Proof: If $[x] = n - i$, $[X_i]' = 1$, $[X_0 \vee X_1 \vee \ldots \vee X_{i-1} \vee X_{i+1} \vee \ldots$ $\ldots \vee X_{n-1}]' = 0$

and $\left[\sum_{j=0}^{n-1} X_j\right]' = 1$ $\quad (i = 0,1,\ldots, n-1)$ (1.2,1.27).

1.32 $\left\{\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right\} \times \left\{\sum_{j=0}^{n-1} Y_j\right\} \times \ldots \times \left\{\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right\} \cdot\!\equiv\!\cdot\, t_1$ (1.31).

1.33 $\left\{\sum_{i=0}^{n=1} X_j\right\} \times \left\{\sum_{j=0}^{n-1} Y_j\right\} \times \ldots \times \left\{\sum_{k=0}^{n-1} Z_k\right\} \cdot\!\equiv\!\cdot$

$$\cdot\!\equiv\!\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ldots \sum_{k=0}^{n-1} (X_i \times Y_j \times \ldots \times Z_k)$$

(1.28,1.32,1.2,1.17).

1.012 By $F(x, y, \ldots, z)$ we represent any function of $x, y, \ldots z$. *Df*
Or to be more explicit, if $[x]=i$, $[y]=j, \ldots [z]=k$, then $F(x\, y, \ldots, z)$ has a definite value $h$. $F(t_i, t_j, \ldots, t_k)$ has the truth-value that $F(x, y, \ldots, z)$ has when $x, y, \ldots, z$ are replaced by $t_i, t_j, \ldots, t_k$ respectively.

1.013 If $F(x, y, \ldots, z) \cdot\equiv\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ldots \sum_{k=0}^{n-1} \{A_{i,j,\ldots,k} \times (X_{n-i} \times \times Y_{n-j} \times \ldots \times Z_{n-k})\}$ then $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ldots \sum_{k=0}^{n-1} \{A_{i,j,\ldots,k} \times \times (X_{n-i} \times Y_{n-j} \times \ldots \times Z_{n-k})\}$, where $A_{i,j,\ldots,k}$ represents some definite truth-value $t_h$ which depends upon $F(x, y, \ldots, z)$, is said to be the normal form for $F(x, y, \ldots, z)$. *Df*

1.34 $F(x) \cdot\equiv\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \{F(t_i) \times X_{n-i}\}$

Proof: $[F(t_i) \times X_{n-i}]' = F(t_i)$ if $[x]=i$

$\cdot = 0$ otherwise. (1.15,1.27).

Hence $\left[\sum_{i=0}^{n-1} \{F(t_i) \times X_{n-i}\}\right]' = [F(t_j)]'$ if $[x]=j$ $(j=0,1 \ldots n-1)$.

1.35 $F(x, y, \ldots, z) \cdot\equiv\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \ldots \sum_{k=0}^{n-1} \{F(t_i, t_j, \ldots, t_k) \times \times (X_{n-1} \times Y_{n-j} \times \ldots \times Z_{n-k})\}$

Proof: Generalization of that of 1.34.

The above is a proof that $F(x, y, \ldots, z)$ may always be expressed in normal form. $A_{i,j,\ldots,k}$ is $F(t_i, t_j, \ldots, t_k)$.

1.36 $x^i\, X_i \cdot\equiv\cdot t_0$, $x^i \times X_i \cdot\equiv\cdot t_0$

Proof: If $[x] = n - i$, $[x^i]' = 0$. Hence $[x^i\, X_i] = 0$ and $[x^i \times X^i]' = 0$ for $[x] = j$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. (1.4,1.27).

$X^i$ becomes $\sim x$ in $L_2$. This allows us to consider 1.36 as a generalization of $x(\sim x) = 0$ in $L_2$. 1.35 can be used as a proof that any function $F(x, y, \ldots, z)$ can be generated from $p|q$. In such a proof we would substitute $(t_0)^h$ where $h = [F(t_i, t_j, \ldots, t_k)]'$, for $F(t_i, t_j, \ldots, t_k)$ as the coefficient of $X_{n-i} \times Y_{n-j} \times \ldots \times Z_{n-k}$. Then, since we have obtained $t_0$ in terms of $p|q$, we have obtained $F(x, y, \ldots, z)$ in terms of $p|q$. This may also be considered as a means of determining an expression for any single valued function on a finite number of elements to a finite number of elements. We also see that in $L_2$ 1.35 becomes the Boolean expansion. Since by the above method the normal form is determined uniquely for each $F(x, y, \ldots, z)$ we can regard it as a generalization of the Boolean expansion.

## II. Implication.

In $L_2$ we find that $p \supset p$ and $p \supset q \,.\, q \supset r : \supset : p \supset r$ hold. However in $L_n$ the implication of Łukasiewicz fails to possess the latter property, that of transitivity. There are a great number of possible choices of matrices defining implication relations[17]). If by $pIq$ we mean „$p$ implies $q$" and if we take $[pIq]' = n - 1$ if and only if $[p] \leqq [q]$ it is interesting to discover the necessary and sufficient conditions that must be imposed upon $pIq$ before the proposition $pIp \,.\, qIr : I : pIr$ holds in $L_n$. Using our earlier interpretation for truth values we see that the condition $[pIq]' = n - 1$ if and only if $[p] \leqq [q]$ involves the principle „a proposition implies any which is equally or more probable; and is implied by any which is equally or less probable" [18]).

An investigation of the possibilities of $pIq$ defined in the above manner leads us to the following theorem:

1.50 If $[pIq]' = n - 1$ when and only when $[p] \leqq [q]$ then in order for $[pIq \,.\, qIr : I : pIr]' = n - 1$, or for the theorem to hold, where $p$, $q$, $r$ may assume any truth-value $t_i$, $t_j$, $t_k$, it is necessary and sufficient that

1. If $[p] > [q] > [r]$, then $[pIq]' \geqq [pIr]'$ and $[pIr]' \leqq [qIr]'$;
2. And if $p$, $q$, $r$ have particular truth-values, say $t_i$, $t_j$, and $t_k$ respectively, where $i > j > k$, then either $[qIr]' \geqq [pIr]'$ and $[pIq]' = [pIr]'$, or $[qIr]' = [pIr]$ and $[pIq]' \geqq [pIr]'$ but we cannot have both of the relations $[pIq]' > [pIr]'$ and $[qIr]' > [pIr]'$ holding simultaneously.

Proof:

1. $[p] \leqq [r]$. Then $[pIr]' = n - 1$, making $[pIq \,.\, qIr : I : pIr]' = n - 1$.
2. $[p] > [r]$.

(a). $[r] \geqq [q]$.

---

17) See in particular *LL* pp. 229 and 230.

18) *LL* p. 230.

Then $[pIq \,.\, qIr : I : pIr]'$ becomes $[pIq \,.\, I \,.\, pIr]'$ since $[qIr]' = n - 1$. Hence, if $[p] > [r] \geqq [q]$, then $[pIq]' \leqq [pIr]'$ in order for the proposition $pIq \,.\, qIr : I : pIr$ to hold since by hypothesis $[pIq]' = n - 1$ if and only if $[p] \leqq [q]$.

(b). $[q] \geqq [p] > [r]$.

$[pIq \,.\, qIr : I : pIr]'$ becomes $[qIr \,.\, I \,.\, pIr]'$ since $[pIq]' = n - 1$. Hence, as above, if $[q] \geqq [p] > [r]$ then $[qIr]' \leqq [pIr]'$.

(c). $[p] > [q] > [r]$.

In $pIq \,.\, qIr : I : pIr$ from (a) and (b) we see that the conditions $[qIr]' \geqq [pIr]'$ and $[pIq]' \geqq [pIr]'$ must hold. If these conditions hold, $[pIq \,.\, qIr]' \geqq [pIr]'$. However, it is necessary that the equality sign hold in this statement, otherwise by hypothesis $[pIq \,.\, qIr : I : pIr]' \neq n - 1$. Then, in order for the equality sign to hold, for a particular set of truth-values such that $[p] > [q] > [r]$, it is necessary that either $[qIr]' = [pIr]'$, $[pIq]' \geqq [pIr]'$ or $[qIr]' \geqq [pIr]'$, $[pIq]' = [pIr]'$.

The above conditions are evidently sufficient.

$p \supset q$ does not satisfy the conditions for transitivity when $n > 2$ since if $[p] = 2$, $[q] = 1$, $[r] = 0$; $[p \supset r]' = [n - 1 + 0 - 2] = n - 3$, $[p \supset q \,.\, q \supset r] = n - 2$. Hence $[p \supset q \,.\, q \supset r : \supset : p \supset r]' = [n - + n - 3 - n + 2] = n - 2$. In other words, for these particular values of $p$, $q$, $r$ $[p \supset q]' > [p \supset r]'$, and $[q \supset r]' > [p \supset r]'$.

There are many operations which satisfy 1.50. In particular we shall study three of these operations ($I_2$, $I_3$, $I_4$). Define

1.050 $pI_1q \;.{=}.\; p \supset q$ *Df*

1.051 $pI_2q \;.{=}.\; N\{pI_1q \,.\, I_1 \,.\, (pI_1q)^1\}$ *Df*

1.052 $pI_3q \;.{=}:\; pI_2q \,.\vee\, q$ *Df*

1.053 $pI_4q \;.{=}:\; pI_2q \,.\vee.\, Np$ *Df*

1.054 $pI_5q \;.{=}:\; pI_2q \,.\vee.\, q \,.\vee.\, Np$ *Df*

From these definitions by means of the theorems of the preceding section, we determine their truth values.

1.51 $[pI_1q]' = n - 1$ if $[p] \leqq [q]$

$= [n - 1 + q - p]$ if $[p] > [q]$ (1.5).

1.52 $[pI_2q]' = n - 1$ if $[p] \leqq [q]$

$= 0$ if $[p] > [q]$

Proof: If $[p] \leqq [q]$ then $[pI_1q]' = n-1$ and $[pI_1q . I_1 . (pI_1q)^1]' = 0$.
Hence $pI_1q = [N\{pI_1q . I_1 . (pI_1q)^1\}]' = n-1$ if $[p] \leqq [q]$.
If $[p] > [q]$ then let $[pI_1q]' = i$ where $i \neq n-1$.
Then $[pI_2q]' = [N\{t_i \; I_1 \; t_{i+1}\}]' = [n-1-(n-1)] = 0$.

1.53 $[pI_3q]' = n-1$ if $[p] \leqq [q]$
$= \quad [q]$ if $[p] > [q]$

Proof: $[pI_2q]' = n-1$ if $[p] \leqq [q]$, hence $[pI_2q . \vee . q]' = n-1$.
$[pI_2q]' = 0$ if $[p] > [q]$, hence $[pI_2q . \vee . q] = [q]$ in this case.

1.54 $[pI_4q]' = n-1$ if $[p] \leqq [q]$
$= [n-1-p]$ if $[p] > [q]$

Proof: Same type as in 1.53.

1.55 $[pI_5q]' = n-1$ if $[p] \geqq [q]$
$= [Np . \vee . q]'$ if $[p] > [q]$ (1.52,1.2).

By theorems 1.52,1.53,1.54 it is evident that $pI_2q$, $pI_3q$, and $pI_4q$ satisfy the necessary and sufficient conditions of 1.50 making each of these types of implication transitive. If we check the conditions for $pI_5q$ in 1.50 for the particular values of $[p] = n-1$, $[q] = n-2$, $[r] = 0$, we find when $n > 2$ that $[pI_5q]' > [pI_5r]'$ and $[qI_5r]' > [pI_5r]'$ contrary to conditions 1.50 part 2. Thus we can say that $pI_5q$ is not transitive.

It is interesting to determine which of the propositions listed as the most important by Whitehead and Russell in divisions 2, 3, 4, and 5 of *Principia Mathematica* hold in $L_n$ when the operations $\supset$, $\equiv$, $\sim$, $\vee$, $\cdot$ are replaced by the operations $I$, $E$, $N$, $\vee$, . (the . may be omitted, see 1.05) respectively. The latter operations reduce to the former when $n$ is 2. In any one of these propositions, which are listed below, every $I$ and $E$ in the proposition is to be replaced by $I_i$ and $E_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) respectively, where $pE_iq . = . pI_iq . qI_ip \; Df$ (4 01).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.02 | $q . I . pIq$ | 3 2 | $p . I : q . I . pq$ |
| 2.03 | $pI . Nq : I : qI . Np$ | 3.26 | $pq . I . p$ |
| 2.15 | $Np . Iq : I : Nq . Ip$ | 3.27 | $pq . I . q$ |
| 2.16 | $pIq . I : Nq . I . Np$ | 3.3 | $pq . I . r : I : p . I . qIr$ |
| 2.17 | $Nq . I . Np : I . pIq$ | 3.31 | $p . I . qIr : I : pq . Ir$ |
| 2.04 | $p . I . qIr : I : q . I . pIr$ | 3.33 | $pIq . qIr : I : pIr$ |
| 2.05 | $qIr . I : pIq . I . pIr$ | 3.35 | $p . pIq : I . q$ |
| 2 06 | $pIq . I : qIr . I . pIr$ | 3.43 | $pIq . pIr : I : p . I . qr$ |
| 2.08 | $pIp$ | 3.45 | $pIq . I : pr . I . qr$ |
| 2.21 | $Np . I . pIq$ | 3.47 | $pIr . qIs : I : pq . I . rs$ |

4.01 $pEq \cdot = \cdot pIq \,.\, qIp$ Df
4.1 $pIq \,.\, E : Nq \,.\, I \,.\, Np$
4.11 $pEq \,.\, E : Np \,.\, E \,.\, Nq$
4.13 $p \,.\, E \,.\, N(Np)$
4.2 $pEp$
4.21 $pEq \,.\, E \,.\, qEp$
4.22 $pEq \,.\, qEr : I : pEr$
4.24 $p \,.\, E \,.\, pp$
4.25 $p \,.\, E \,.\, p \vee p$
4.3 $pq \,.\, E \,.\, qp$
4.31 $p \vee q \,.\, E \,.\, q \vee p$
4.32 $(pq)\, r \,.\, E \,.\, p\,(qr)$
4.33 $(p \vee q) \vee r \,.\, E \,.\, p \vee (q \vee r)$
4.4 $p \,.\, q \vee r : E : pq \,.\, \vee \,.\, pr$
4.41 $p \,.\, \vee \,.\, qr : E : p \vee q \,.\, p \vee r$
4.71 $pIq \,.\, E : p \,.\, E \,.\, pq$
4.73 $q \,.\, I : p \,.\, E \,.\, pq$
5.1 $pq \,.\, I \,.\, pEq$
5.32 $p \,.\, I \,.\, qEr : E : pq \,.\, E \,.\, pr$
5.6 $p \,.\, Nq : I \,.\, r \,.\, : E : p \,.\, I \,.\, q \vee r$

From definition 4.01 $pE_iq \cdot = \cdot pI_iq \,.\, qI_ip$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ we obtain the following theorems concerning the truth-tables of $pE_iq$:

1.56 $[pE_2q]' = n - 1$ if $[p] = [q]$
$= 0$ otherwise.

1.57 $[pE_3q]' = n - 1$ if $[p] = [q]$
$= [pq]'$ otherwise.

1.58 $[pE_4q]' = n - 1$ if $[p] = [q]$
$= [Np \,.\, Nq]'$ otherwise.

1.59 $[pE_5q]' = n - 1$ if $[p] = [q]$
$= [(Np \,.\, \vee \,.\, q)\,(Nq \,.\, \vee \,.\, p)]'$ otherwise.

Utilizing the results of theorems 1.51, ..., 1.59, as well as those in the preceding section, we obtain the following table of results. $A$ stands for assertable and $N$ for not assertable. Thus, in the table we find $A$ opposite 4.1 and under $pI_1q$. That means if we replace each $I$ by $I_1$ and each $E$ by $E_1$ in 4.1 above, the proposition is assertable for $L_n$. The rest of the table reads in the same manner.

| | $pI_1q$ | $pI_2q$ | $pI_3q$ | $pI_4q$ | $pI_5q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.02 | A | N | A | N | A |
| 2.03 | A | A | N | N | A |
| 2.15 | A | A | N | N | A |
| 2.16 | A | A | N | N | A |
| 2.17 | A | A | N | N | A |
| 2.04 | A | N | A | N | A |
| 2.05 | A | A | A | N | A |
| 2.06 | A | A | A | N | A |
| 2.08 | A | A | A | A | A |
| 2.21 | A | N | N | A | A |
| 3.2 | A | N | A | N | A |
| 3.26 | A | A | A | A | A |
| 3.27 | A | A | A | A | A |
| 3.3 | A | N | A | N | A |
| 3.31 | N | A | A | N | N |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.33 | *N* | *A* | *A* | *A* | *N* |
| 3.35 | *N* | *A* | *A* | *N* | *N* |
| 3.43 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 3.45 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 3.47 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.1 | *A* | *A* | *N* | *N* | *A* |
| 4.11 | *A* | *A* | *N* | *N* | *A* |
| 4.13 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.2 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.21 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.22 | *N* | *A* | *A* | *A* | *N* |
| 4.24 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.25 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.3 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.31 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.32 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.33 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.4 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.41 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.71 | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| 4.73 | *A* | *N* | *A* | *N* | *A* |
| 5.1 | *A* | *N* | *A* | *N* | *A* |
| 5.32 | *N* | *N* | *A* | *N* | *N* |
| 5.6 | *N* | *N* | *N* | *N* | *N* |
| Total of *A*'s | 33 | 30 | 31 | 21 | 33 |

The proofs of three of the more complicated of these propositions are given presently. They indicate the method of proof followed in the remaining propositions.

The five propositions which Łukasiewicz[19] states as being a sufficient condition that the system $\mathfrak{L}_n$ may be put on a postulational basis hold in $L_n$ for $pI_1q$. They follow:

$$p\,.\,I_1\,.\,qIp_1, \quad pI_1q\,.\,I_1:qI_1r\,.\,I_1\,.\,pI_1r, \quad pI_1q\,.\,I_1q:I_1:qI_1p\,.\,I_1p,$$
$$pI_1q\,.\,I_1\,.\,qI_1p:I_1\,.\,qI_1p, \quad Np\,.\,I_1\,.\,Nq:I_1\,.\,qI_1p.$$

We now verify 2.05, 3.3, and 3.47. We first list the proposition number and then have five sub-numbers under this heading. Preceding the first subnumber are listed the ranges of truth-values for which the proposition holds when $I_i$ and $E_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) replace $I$ and $E$ respectively. The first subnumber refers to the verification of the result listed under $pI_1q$

[19]) See *LT* p. 41 (following theorem 26).

for this proposition in the preceding table, the second sub-number refers to the verification of the result under $pI_2q$, etc.

2.05 $qIr.I:pIq.I.pIr$

Holds if $[p] \leqq [r]$.

1. $[p] > [r]$.

$[q] \geqq [p] > [r]$, $[pI_1q]' = n-1$ and $[pI_1r]' = [n-1+r-p]$ making $[pI_1q.I_1.pI_1r]' = [n-1+r-p].[qI_1r]' = [n-1+r-q]$, but $[n-1+r-q] \leqq [n-1+r-p]$, making theorem hold for this case. $[p] > [q] > [r]$, $[pI_1q.I_1.pI_1r]' = [n-1+r-q] = [qI_1r]'$, so the theorem holds for this case.

$[p] > [r] \geqq [q]$, $[pI_1r]' \geqq [pI_1q]'$ so theorem holds.

2. Evidently holds.

3. $[p] > [r]$, $[pI_3r]' = [r]$.

$[q] \leqq [r]$, holds since then $[pI_3q.I_3.pI_3r]' = n-1 = [qI_3r]'$.

$[q] \geqq [p] > [r]$, $[pI_3q.I_3.pI_3r]' = [r] = [qI_3r]'$.

$[p] > [q] > [r]$, $[pI_3q.I_3.pI_3r]' = [r] = [qI_3r]'$.

4. Not assertable for $n > 2$ when $[p] = 1$, $[q] = 1$, $[r] = 0$.

5. $[p] > [r]$, then $[pI_5r]' = [Np.\vee.r]'$.

$[q] \leqq [r]$ holds since $[pI_5q]' = [Np.\vee.q]'$ and $[Np.\vee.q]' \leqq [Np.\vee.r]'$.

$[p] > [q] > [r]$, $[Np.\vee.q]' \geqq [Np.\vee.r]'$.

Theorem holds if equality sign holds. Let $[Np.\vee.q]' > [Np.\vee.r]'$, or then $[q] > [Np.\vee.r]'$.

Hence $[pI_5q.I_5.pI_5r]' = [Nq.\vee.Np.\vee.r]'$.

Since $[qI_5r]' = [Nq.\vee.r]'$, and $[Np.\vee.r]' \leqq [Nq.\vee.Np.\vee.r]'$, the theorem holds for this case.

$[q] \geqq [p] > [r]$, $[pI_5q.I_5.pI_5r]' = [Np.\vee.r]'$ and $[qI_5r]' = [Nq.\vee.r]'$.

$[Np]' \geqq [Nq]'$, hence $[Nq.\vee.r]' \leqq [Np.\vee.r]'$ and the theorem holds.

3.3 $pq.I.r:I:p.I.qIr$

Holds if $[q] \leqq [r]$.

1. $[q] > [r]$, $[qI_1r]' = [n-1+r-q]$.

$[p] \leqq [n-1+r-q]$, theorem holds.

$[p] > [n-1+r-q]$, then $[p.I_1.qI_1r]' = [n-1+n-1+r-q-p]$.

Since $[p] > [r]$, $[pq.I_1.r]' = [n-1+r-\min(p, q)]$.

Hence $[pq.I_1.r]' \leqq [p.I_1.qI_1r]'$ and theorem holds.

2. Not assertable for $n > 2$ when $[p] = 1$, $[q] = 2$, $[r] = 1$.
3. $[q] > [r]$, $[qI_3r]' = [r]$.
   Holds if $[p] \leqq [r]$.
   $[p] > [r]$, $[pI_3 . qI_3r]' = [r]$, $[pq . I_3 . r]' = [r]$, so theorem holds.
4. Not assertable for $n > 2$ when $[p] = n - 1$, $[q] = n - 2$, $[r] = 0$.
5. $[q] > [r]$, $[qI_5r]' = [Np . \vee . r]'$.
   $[p] \leqq [Nq . \vee . r]'$ holds.
   $[p] > [Nq . \vee . r]'$, so $[p] > [r]$, and $[p . I_5 . qI_5r]' = = [Np . \vee . Nq . \vee . r]'$. Also $[pq]' > [r]$, so $[pq . I_5 . r]' = = [Np . \vee . Nq . \vee . r]'$, making proposition hold.

3.47 $pIr . qIs : I : pq . I . rs$

Holds if $[pq]' \leqq [rs]'$.

1. $[pq]' > [rs]'$ and take $[p] \leqq [q]$.
   $[s] \leqq [r]$, $[s] < [p]$, then $[pq . I_1 . rs]' = [n - 1 + s - p]$ $[qI_1s]' = [n - 1 + s - q] \leqq [n - 1 + s - p]$.
   Hence $[pI_1r . qI_1s]' \leqq [pq . I_1 . rs]'$. $[r] < [s]$, $[r] < [p]$, then $[pq . I_1 . rs]' = [n - 1 + r - p]$ and $[pI_1r]' = [n - 1 + r - p]$, so $[pI_1r . qI_1s]' \leqq [pq . I_1 . rs]'$. Since the proposition is symmetric in $p$ and $q$ the proof for $[p] > [q]$ is the same as in the above case, making the proposition hold for all cases.
2. If $[pq]' > [rs]'$ then either $[pI_2r]' = 0$, or $[qI_2s]' = 0$, making the proposition hold for all cases.
3. $[pq]' > [rs]'$, $[s] \leqq [r]$, then $[pq . I_3 . rs]' = [s]$, $[pI_3r . qI_3s]' = = [s]$. The treatment is the same for $[s] > [r]$.
4. $[pq]' > [rs]'$, $[s] \leqq [r]$, then $[pq . I_4 . rs]' = [Np . \vee . Nq]'$ and $[qI_4s]' = [Nq]'$, making $[pI_4r . qI_4s]' \leqq [Np . \vee . Nq]'$. The treatment is the same for $[s] > [r]$.
5. $[pq]' > [rs]'$, $[s] \leqq [r]$, then $[pq . I_5 . rs]' = [Np . \vee . Nq . \vee . s]'$ but $[qI_5s]' = [Np . \vee . s]' \leqq [Np . \vee . Nq . \vee . s]'$, making the theorem hold for this case.
   The treatment for $[s] > [r]$ is of the same type.

The proofs for the remaining theorems of Whitehead and Russell, and Łukasiewicz are of the same character as those given. They are omitted to save space.

---

The California Institute of Technology, Pasadena.

J. Gadomski.

## TV Cassiopeiae.

**(Bearbeitung der in den Jahren 1923--1928 angestellten Beobachtungen).**

Mémoire présenté par M. M. Kamieński à la séance du 24 novembre 1936.

## TV Cassiopeiae.

**(Opracowanie obserwacyj z lat 1923—1928).**

Przedstawił M. Kamieński dn. 24 listopada 1936 r.

Die vorliegende Arbeit enthält die definitive Bearbeitung meiner bis jetzt nicht veröffentlichten 311 Beobachtungen des Lichtwechsels des Bedeckungsveränderlichen TV Cassiopeiae, die ich mit Hilfe der Argelanderschen Methode in dem Zeitraume von 1923 Juli 11 bis 1928 Februar 15 in 64 Nächten angestellt habe. Die Beobachtungen Nr. 1—149 wurden auf der astronomischen Bergstation auf dem Gipfel von Łysina (jetzt Lubomir), 912 Meter über dem Meeresniveau, die Nr. 150—303 in der Krakauer und die Nr. 305—311 in der Warschauer Universitäts-Sternwarte durchgeführt. In der Regel (insgesamt 288 Beobachtungen) habe ich einen Kometensucher der Firma Steinheil, 134 mm Objektivdurchmesser, 137 cm Brennweite, Vergr. 18, verwendet. Ausnahmsweise (zusammen 23 Beobachtungen) wurden die Schätzungen Nr. 282—283 mit Hilfe eines kleinen Fraunhoferschen Kometensuchers (Objektivdurchm. 76 mm), Nr. 208 — 209 mit Hilfe eines analogen Zeissschen Suchers, Nr. 304—311 mit Hilfe eines Refraktors der Firma Cooke (Objektivdurchm. 134 mm) und Nr. 210, 231, 234—239, 241 und 295 mit Hilfe eines parallaktischen Refraktors (Objektivdurchm. 203mm) angestellt.

Die Helligkeiten der Vergleichsterne sind in der Tabelle I zusammengestellt.

# TABELLE I.

Vergleichsterne (Harvard-System)

| Bezeichnung | B D | 1855.0 | | Gr. | Stufen | Gr.′ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | α | δ | | | |
| v | + 58° 30 | $0^h\ 11^m\ 32^s.2$ | + 58° 20′.0 | var. | var. | var. |
| b | + 59° 15 | 0 6 17.0 | + 59 11.5 | $6.^m86$ | $0.^{st}0$ | $6.^m85$ |
| c | + 58° 24 | 0 10 5.6 | + 58 15.1 | 7.72 | 11.6 | 7.60 |
| d | + 58° 28 | 0 11 25.6 | + 58 54.8 | 7.87 | 15.6 | 7.85 |
| e | + 58° 22 | 0 8 7.1 | + 58 38 4 | 7.90 | 17.1 | 7.95 |
| f | + 58° 18 | 0 7 33.7 | + 58 59.5 | 7.92 | 19.1 | 8.08 |
| g | + 59° 31 | 0 11 35.0 | + 59 17.8 | — | 23.3 | 8.35 |
| m | + 58° 38 | 0 14 39.6 | + 58 52.1 | — | 26.7 | 8.57 |
| h | + 58° 31 | 0 11 43.2 | + 58 18.3 | 8.89 | 30.4 | 8.81 |
| i | + 59° 30 | 0 11 14.0 | + 59 31.4 | — | 30.8 | 8.83 |

In der fünften Kolumne der Tabelle I sind die Helligkeiten nach Messungen von Prof. K. Graff, in der siebenten dagegen die mit der eigenen Stufenskala ausgeglichenen Helligkeiten angegeben, die nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungen Nr. 1—202 berechnet wurde. (Die Summe der Differenzen der Helligkeiten der fünften und siebenten Kolumne beträgt: $+ \overset{m}{0.02}$).

Die Tabelle II enthält die chronologische Zusammenstellung aller Beobachtungen. Das Gewicht (G) der einzelnen Beobachtungen wurde direkt am Fernrohr während der Beobachtungen bestimmt. Die in der Tabelle II angegebenen Grössen (Gr.) des Veränderlichen beruhen auf den ausgeglichenen Helligkeiten der Vergleichsterne. Meine Stufe betrug in dem Beobachtungszeitraume im Mittel $\overset{m}{0.066}$.

Die Beobachtungen Nr. 1—202, die zeitlich verhältnismässig zusammengedrängt sind (1923 Juli 11 — 1924 Dezember 16), wurden mit Hilfe der Lichtwechselselelemente von J. Hellerich:

Min. helioz. m. Z. Gr. 2420117.7464 + $\overset{d}{1.8126096}$ × E (A. N. 5295) auf die Normalepoche E = + 2062 reduziert.

# TABELLE II.

## Beobachtungen.

| Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. | Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2423... | | | m | | | 2423... | | | m | |
| 1 | 612.4496 | e 3.5 v 8 h | 3 | 8.21 | 1,2 | 46 | 650.5095 | d 4 v 9 h | 1 | 8.15 | 9 |
| 2 | 612.4510 | d 5 v 8 h | 3 | 8.22 | | | | | | | |
| 3 | 612.4524 | f 3 v 8 h | 3 | 8.28 | | 47 | 712.2140 | c 4.5 v 2 d | 2 | 7.77 | 10 |
| 4 | 612.4656 | d 4 v 8 h | 3 | 8.17 | | 48 | 712.2161 | c 3 v 3.5 e | 2 | 7.76 | |
| 5 | 612.4663 | f 3.5 v 7 h | 3 | 8.32 | | 49 | 712.2182 | c 3 v 6 f | 2 | 7.76 | |
| 6 | 612.4677 | e 5 v 7 h | 3 | 8.31 | | 50 | 712.2342 | c 1 v 3.5 d | 1 | 7.66 | 8 |
| 7 | 612.4802 | d 2.5 v 8 h | 3 | 8.08 | | 51 | 712.2355 | c 1 v 3.5 e | 2 | 7.68 | |
| 8 | 612.4822 | e 4 v 8 h | 3 | 8.24 | | 52 | 712.2369 | c o v | 2 | 7.60 | |
| 9 | 612.4850 | f o v, c 3 e 2 f | 3 | 8.08 | | 53 | 712.2606 | b 9 v 3.5 c | 2 | 7.39 | |
| 10 | 612.5003 | d 1 v 2.5 f | 3 | 7.92 | | 54 | 712.2619 | b 8 v 5 d | 2 | 7.47 | |
| 11 | 612.5010 | e o v | 2 | 7.95 | | 55 | 712.2626 | b 8 v 7 e | 1 | 7.44 | 5 |
| 12 | 612.5072 | d o v | 2 | 7.85 | | 56 | 712.3001 | b 6 v 5 c | 1 | 7.26 | 2,11 |
| 13 | 612.5086 | e o v | 2 | 7.95 | 3 | | | | | | |
| 14 | 612.5100 | c 3 v 2 f | 2 | 7.89 | | 57 | 730.2055 | c 1 v 3 d | 2 | 7.66 | 6,11 |
| 15 | 612.5183 | b 9 v 2 d | 2 | 7.67 | | 58 | 730.2090 | c 2.5 v 3.5 f | 2 | 7.80 | |
| 16 | 612.5190 | c o v | 2 | 7.60 | | 59 | 730.2110 | e o v | 3 | 7.95 | 6 |
| 17 | 612.5260 | c o v | 1 | 7.60 | 3,4 | 60 | 730.2249 | c 6 v 1.5 e | 3 | 7.88 | |
| | | | | | | 61 | 730.2409 | e 5 v 12 h | 2 | 8.20 | 5 |
| 18 | 639.4041 | b 4 v 5.5 c | 3 | 7.17 | 5 | 62 | 730.2860 | d 5 v 8 m 6 h | 3 | 8.13 | 12 |
| | | | | | | 63 | 730.2895 | f 4 v 8 m 6 h | 3 | 8.24 | 13 |
| 19 | 641.3292 | b 7 v 3 c | 3 | 7.38 | 6 | 64 | 730.3006 | d 4 v 9 m 5 h | 2 | 8.10 | 7 |
| 20 | 641.3347 | b 8 v 3.5 c | 3 | 7.37 | | 65 | 730.3027 | e 5 v 9 m 6 h | 2 | 8.17 | |
| 21 | 641.3549 | b 9 v 2.5 c | 4 | 7.44 | | 66 | 730.3034 | f 3 v 9 m 6 h | 2 | 8.20 | |
| 22 | 641.3813 | c 1 v 2 d | 4 | 7.68 | | 67 | 730.3353 | c 2.5 v 4.5 e | 2 | 7.73 | |
| 23 | 641.3868 | c 1 v 2.5 e | 4 | 7.70 | | 68 | 730.3367 | c 2.5 v 7.5 f | 2 | 7.72 | 7 |
| 24 | 641.3889 | c 1 v 3.5 f | 4 | 7.71 | | 69 | 730.3374 | c 2.5 v 4 d | 2 | 7.70 | |
| 25 | 641.4146 | c 4 v 1 f | 4 | 7.98 | | 70 | 730.3472 | b 9 v 1.5 c | 2 | 7.49 | 6.7 |
| 26 | 641.4271 | c 4 d 2.5 v | 4 | 8.01 | | 71 | 730.3583 | b 9 v 5 c | 2 | 7.33 | |
| 27 | 641.4299 | c 4 e 5 v | 4 | 8.34 | | 72 | 730.3888 | b 8.5 v 5 c | 2 | 7.32 | |
| 28 | 641.4306 | f 2.5 v 10 h | 4 | 8.23 | | | | | | | |
| 29 | 641.4584 | d 7 v 8 h | 4 | 8.30 | | 73 | 759.1779 | b 7 v 4 c | 2 | 7.33 | 2 |
| 30 | 641.4597 | e 6 v 8 h | 4 | 8.32 | | 74 | 759.1800 | b 8 v 7 d | 2 | 7.38 | |
| 31 | 641.4604 | f 3.5 v 8 h | 4 | 8.30 | | 75 | 759.1814 | b 8 v 5.5 e | 2 | 7.50 | |
| 32 | 641.4757 | f 4 v 9 h | 4 | 8.30 | | 76 | 759.1828 | b 8 v 9 f | 2 | 7.43 | |
| 33 | 641.4764 | e 5.5 v 8 h | 4 | 8.30 | | 77 | 759.2196 | c 2.5 v 4 f | 2 | 7.78 | |
| 34 | 641.4785 | d 4 v 8 h | 3 | 8.17 | 2 | 78 | 759.2230 | c 3 v 1 d | 1 | 7.79 | 14 |
| 35 | 641.4938 | d 2 v 3 f | 3 | 7.94 | | 79 | 759.2258 | c 3.5 v 2 e | 2 | 7.82 | 2 |
| 36 | 641.4945 | c 5 v 1 e | 3 | 7.89 | | 80 | 759.3071 | d 5 v 8 m 9 h | 2 | 8.13 | 2 |
| 37 | 641.5153 | c 4 v 3 e | 3 | 7.80 | | 81 | 759.3092 | d 4 v 8 m 8 h | 2 | 8.10 | |
| 38 | 641.5160 | c 3.5 v 7 f | 3 | 7.76 | | 82 | 759.3112 | e 3.5 v 9 m 7 h | 2 | 8.14 | |
| 39 | 641.5167 | c 3.5 v 4.5 d | 2 | 7.71 | 7 | 83 | 759.3147 | d 4 v 1 f | 2 | 8.03 | |
| 40 | 641.5320 | b 8 v 1 c | 2 | 7.52 | | 84 | 759.3814 | b 8 v 4 c | 2 | 7.35 | |
| | | | | | | 85 | 759.4154 | b 7.5 v 6 c | 2 | 7.27 | |
| 41 | 650.4929 | f 1 v 9 h | 3 | 8.15 | 1,2 | | | | | | |
| 42 | 650.4956 | e 2 v 9 h | 3 | 8.11 | | 86 | 795.4844 | e 2.5 v | 3 | 8.11 | 9 |
| 43 | 650.4970 | d 4 v 10 h | 3 | 8.12 | | 87 | 795.4844 | f 1 v | 3 | 8.14 | |
| 44 | 650.5075 | f 2 v 8 h | 2 | 8.23 | 8 | 88 | 795.4997 | e 4 v | 2 | 8.21 | 8 |
| 45 | 650.5081 | e 3 v 8 h | 2 | 8.18 | | | | | | | |

| Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. | Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2423... | | | m | | | 2423... | | | m | |
| 89 | 799.2112 | c 3 v 2.5 d | 2 | 7.74 | 2 15 16 | 138 | 866.3012 | v 0 c | 2 | 7.60 | |
| 90 | 799.2362 | b 10 v 1 c | 2 | 7.53 | | 139 | 866.3036 | v 3 e | 2 | 7.76 | |
| 91 | 799.2807 | b 7 v 6 c | 2 | 7.25 | 2 | 140 | 866.3039 | v 2.5 d | 1 | 7.69 | 11 |
| 92 | 799.2890 | b 7.5 v 8 c | 2 | 7.21 | | 141 | 866.3199 | v 3 c 2.5 e | 2 | 7.18 | |
| | | | | | | 142 | 866.3227 | v 4.5 d 8 g | 2 | 7.57 | |
| 93 | 855.2676 | b 10 v 2 c | 4 | 7.47 | 17 | 143 | 866.3421 | b 8 v 5.5 c | 2 | 7.29 | |
| 94 | 855.2746 | c 0 v | 4 | 7.60 | | 144 | 866.3671 | b 8 v 6 c | 2 | 7.28 | |
| 95 | 855.2808 | c1v2e, c3e, | 4 | 7.72 | | | | | | | |
| 96 | 855.2829 | d 2 v 6.5 f | 4 | 7.90 | | 145 | 884.2840 | d2.5v1e, d3.5e | 3 | 7.92 | 16 |
| 97 | 855.2885 | c 3.5 v 4.5 f | 4 | 7.81 | | 146 | 884.4097 | c 5 v | 3 | 7.92 | |
| 98 | 855.2906 | e 1.5 v 4.5 f | 4 | 7.98 | | 147 | 884.4271 | v 0 c | 3 | 7.60 | |
| 99 | 855.2919 | d 3 v 4 f | 4 | 7.95 | | 148 | 884.4312 | v 0 c | 3 | 7.60 | |
| 100 | 855.2996 | c 7 v 3 f | 4 | 7.94 | | 149 | 884.4458 | v 2 c 4 f | 2 | 7.36 | 8 |
| 101 | 855.3017 | e 1 v 3.5 g | 3 | 8.04 | | | | | | | |
| 102 | 855.3038 | d 4.5 v 3 g | 3 | 8.15 | | 150 | 920.4207 | b8.5 v 5.5 c | 2 | 7.31 | 10 |
| 103 | 855.3232 | e 1 v 3.5 g | 3 | 8.04 | | 151 | 920.4450 | b8.5 v 4.5 c | 2 | 7.34 | |
| 104 | 855.3253 | f 3 v 8 i | 3 | 8.28 | | 152 | 920.4721 | b 10 v 5 c | 2 | 7.35 | |
| 105 | 855.3274 | d 5 v 3 g | 3 | 8.16 | | 153 | 920.4943 | b 8 v 3.5 c | 2 | 7.37 | |
| 106 | 855.3413 | e 3 v 9 i | 3 | 8.17 | | | | | | | |
| 107 | 855.3433 | g 1 v 9 i | 3 | 8.40 | | 154 | 940.3616 | b 7 v 6 c | 1 | 7.25 | 19, 20 |
| 108 | 855.3447 | f 5 v 8 i | 3 | 8.37 | | 155 | 940.3769 | b 7.5 v 6 c | 2 | 7.27 | |
| 109 | 855.3461 | d 6 v 9 i | 3 | 8.24 | 6 | 156 | 940.3942 | b 8.5 v 5 c | 2 | 7.32 | |
| 110 | 855.3774 | c 8 v 3.5 g | 3 | 8.12 | | | | | | | |
| 111 | 855.3794 | e 2.5 v 3.5 g | 3 | 8.12 | | 157 | 971.3770 | d 5 e 1 v | 3 | 7.97 | 23 |
| 112 | 855.3815 | f 2.5 v 4 g | 3 | 8.18 | | 158 | 971.3964 | d 3.5 v 3 f | 3 | 7.97 | |
| 113 | 855.3822 | d 5 v 3 g | 3 | 8.16 | | 159 | 971.4193 | c 1 v 5 e | 3 | 7.66 | |
| 114 | 855.3892 | e 0 v | 3 | 7.95 | | 160 | 971.4291 | c 0 v | 3 | 7.60 | |
| 115 | 855.3906 | f 0 v | 3 | 8.08 | | 161 | 971.4409 | v 3 c 6 e | 2 | 7.43 | |
| 116 | 855.3919 | d 2 v 4 g | 3 | 8.02 | | | | | | | |
| 117 | 855.3933 | c 5.5 v 3.5 g | 3 | 8.06 | | 162 | 980.3887 | d 2 e 4 v | 2 | 8.15 | 16 |
| 118 | 855.4065 | c 3 v 6 g | 3 | 7.85 | | 163 | 980.3901 | d 2.5 f 3.5 v | 3 | 8.40 | |
| 119 | 855.4169 | c 1 v 3.5 e | 3 | 7.69 | | 164 | 980.4005 | d 2 e 4 v | 2 | 8.15 | |
| 120 | 855.4183 | c 0 v, v 4.5 f | 3 | 7.66 | | 165 | 980.4283 | c 4.5 e 6 v | 1 | 8.42 | 14, 21 |
| 121 | 855.4294 | c 0 v | 3 | 7.60 | | 166 | 980.4373 | c 5 e 6.5 v | 1 | 8.41 | |
| 122 | 855.4364 | b 9 v 1 c | 3 | 7.53 | | 167 | 980.4540 | c 6 d 3.5 v | 1 | 8.00 | |
| 123 | 855.4385 | v 4 d 7.5 g | 3 | 7.58 | | 168 | 980.4616 | c 5 e 4 v | 1 | 8.23 | |
| 124 | 855.4545 | b 8.5 v 3.5 c | 3 | 7.38 | | | | | | | |
| | | | | | | | 2424... | | | | |
| 125 | 864.2714 | b 8 v 5 c | 3 | 7.31 | | 169 | 047.2896 | b 4 v 7 c | 4 | 7.12 | 13 |
| 126 | 864.3436 | c 2 v 4 f | 2 | 7.76 | 18 | 170 | 047.3466 | b 8 v 5 c | 3 | 7.31 | 16 |
| 127 | 864.3624 | c 6 v 2.5 f | 2 | 7.94 | | 171 | 047.4014 | b 8 v 1 c | 2 | 7.52 | 2 15 16 |
| 128 | 864.3728 | e 3 v 5 g | 2 | 8.10 | | 172 | 047.4132 | c 3 v 4 d | 2 | 7.71 | 2, 15 |
| 129 | 864.3985 | d 6.5 v 3.5 g | 2 | 8.17 | | 173 | 047.4292 | c 2.5 v 5 d | 2 | 7.68 | 2, 15 |
| 130 | 864.4068 | e 5 v 3.5 g | 1 | 8.19 | 11 | 174 | 047.4556 | c 4 v 0.5 f | 2 | 8.03 | 7, 15 |
| 131 | 866.2678 | c 5 v 3.5 f | 2 | 7.88 | 10 | 175 | 047.4667 | d 4 v 1.5 g | 2 | 8.21 | |
| 132 | 866.2692 | v 0 e | 2 | 7.95 | | 176 | 047.4896 | g 3 v 7 i | 2 | 8.49 | 2, 15 |
| 133 | 866.2713 | d 3 v 4.5 g | 3 | 8.05 | 6 | 177 | 047.4966 | g 3 v 8 i | 2 | 8.48 | |
| 134 | 866.2776 | c 5 v 1.5 e | 3 | 7.87 | | | | | | | |
| 135 | 866.2783 | d 3 v 5 f | 3 | 7.94 | | 178 | 049.3001 | v 0 g | 4 | 8.35 | 13 |
| 136 | 866.2914 | c 2 v 4 e | 2 | 7.72 | 11 | 179 | 049.3196 | d 3 v 3 g | 4 | 8.10 | |
| 137 | 866.2935 | d 1 v 7 g | 1 | 7.91 | 10 | 180 | 049.3314 | c 5.5 v 1 d | 4 | 7.81 | 12 |

| Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr | Bemer. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2424... | | | m | |
| 181 | 049.3534 | c 4 v 3 d | 3 | 7.74 | 2,15 |
| 182 | 049.3640 | c 3 v 1.5 d | 3 | 7.77 | 2 |
| 183 | 049.3946 | b 8 v 1.5 c | 2 | 7.48 | 2,22 |
| 184 | 049.4078 | b 7.5 v 2.5 c | 2 | 7.41 | |
| 185 | 056.4497 | b 6.5 v 4.5 c | 3 | 7.29 | |
| 186 | 067.2555 | b 8 v 6.5 c | 2 | 7.26 | 9 |
| 187 | 067.2763 | b 7 v 5 c | 3 | 7.29 | 13, 23 |
| 188 | 067.2916 | b 6 v 6 c | 3 | 7.23 | |
| 189 | 069.2278 | v 0 g | 2 | 8.35 | 4,18 |
| 190 | 069.2292 | f 4.5 v 8 i | 2 | 8.35 | |
| 191 | 069.2424 | f 4 v 3.5 g | 2 | 8.22 | |
| 192 | 069.2466 | f 3.5 v 2.5 g | 2 | 8.24 | |
| 193 | 069.2549 | f 2.5 v 6.5 g | 2 | 8.15 | |
| 194 | 069.2618 | f 2.5 v 8 g | 2 | 8.14 | |
| 195 | 069.2688 | f 0 v | 2 | 8.08 | |
| 196 | 069.2785 | d 2.5 v 3 f | 2 | 7.95 | |
| 197 | 069.2896 | c 7 v 4.5 d | 2 | 7.75 | 2,15 |
| 198 | 076.4307 | 0 v c | 1 | 7.60 | 14, 18, 24 |
| 199 | 098.2008 | d 3 v 7 g | 3 | 8.00 | 16, 17 |
| 200 | 098.2182 | d 3 v 7 g | 3 | 8.00 | |
| 201 | 098.2460 | d 4 v 3.5 g | 3 | 8.12 | 7,15 |
| 202 | 098.2862 | c 5 v 0.5 d | 2 | 7.83 | 7,15 |
| 203 | 136.2967 | e 3 v 5 i | 3 | 8.28 | 7,15 |
| 204 | 196.2244 | b 8 v 4 c | 3 | 7.35 | 13, 25 |
| 205 | 196.2522 | b 6 v 5.5 c | 3 | 7.24 | 6 |
| 206 | 205.2308 | d 3 v 2.5 f | 2 | 7.93 | 5 |
| 207 | 205.2420 | c 0 v | 4 | 7.60 | 13 |
| 208 | 223.3904 | c 3 v 6.5 f | 2 | 7.75 | 26 |
| 209 | 223.4181 | b 8 v 4 c | 3 | 7.35 | |
| 210 | 243.4216 | b 6 v 4 c | 2 | 7.30 | 27 |
| 211 | 386.4804 | c 4 v 5 g | 2 | 7.93 | 2,15,28 |
| 212 | 386.4960 | c 4 v 2.5 e | 3 | 7.82 | 2,13,15 |
| 213 | 386.5058 | c 0 v | 3 | 7.60 | |
| 214 | 386.5127 | v 1.5 c | 4 | 7.50 | |
| 215 | 408.3110 | b 7 v 3.5 c | 3 | 7.35 | 20 |
| 216 | 408.3548 | b 7 v 5 c | 3 | 7.29 | |
| 217 | 426.2971 | f 4 v 8 g | 4 | 8.17 | 16, 29 |
| 218 | 426.3262 | f 4.5 v 3 g | 3 | 8.24 | |

| Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2424... | | | m | |
| 219 | 426.3825 | c 1 v | 2 | 7.63 | |
| 220 | 433.4591 | b 3.5 v 4 c | 3 | 7.20 | 15 |
| 221 | 433.4938 | b 6 v 3.5 c | 4 | 7.32 | 2 |
| 222 | 444.3764 | v 0 c | 3 | 7.60 | 2,15 |
| 223 | 444.4167 | f 1 v 4 g | 3 | 8.13 | 15 |
| 224 | 444.4528 | g 1 v 5 i | 3 | 8.43 | 7,30 |
| 225 | 444.4723 | f 3 v 0.5 g | 3 | 8.13 | 31 |
| 226 | 444.5139 | b 5.5 v 1.5 c | 3 | 7.44 | 31 |
| 227 | 446.3036 | c 2.5 v 3 d | 2 | 7.85 | 2,6 |
| 228 | 446.3244 | c 0 v | 3 | 7.60 | 15 |
| 229 | 448.2614 | b 6 v 1 c | 3 | 7.49 | 6,27 |
| 230 | 464.2967 | v 1.5 c | 4 | 7.50 | |
| 231 | 598.4434 | b 6.5 v 1 c | 3 | 7.50 | 6,27 |
| 232 | 598.4844 | f 3 v 0 g | 2 | 8.35 | 32 |
| 233 | 598.4934 | g 2 v 7 i | 2 | 8.46 | |
| 234 | 600.3371 | g 1.5 v 5 i | 4 | 8.46 | 16, 33 |
| 235 | 600.3871 | c 3 v 0.5 d | 2 | 7.87 | |
| 236 | 600.3885 | e 0 v | 3 | 7.95 | |
| 237 | 600.3899 | c 2 v 3.5 f | 3 | 7.74 | |
| 238 | 600.3906 | c 2.5 v 5 g | 3 | 7.85 | |
| 239 | 600.4031 | b 5.5 v 2 c | 2 | 7.40 | 27 |
| 240 | 618.3179 | b 7 v 4 c | 4 | 7.33 | |
| 241 | 618.3832 | c 2.5 v 1 d | 2 | 7.76 | |
| 242 | 618.3936 | c 3.5 v 5 g | 2 | 7.91 | 32 |
| 243 | 618.4360 | g 3.5 v 6.5 i | 3 | 8.52 | |
| 244 | 618.4485 | g 0 v | 2 | 8.35 | 20 |
| 245 | 618.4561 | e 4 v 3 g | 4 | 8.18 | |
| 246 | 618.4686 | e 3.5 v 4 g | 2 | 8.14 | |
| 247 | 618.4936 | e 2 v 4.5 g | 4 | 8.07 | |
| 248 | 620.3520 | c 1.5 v 2 e | 2 | 7.75 | 7 |
| 249 | 658.3647 | f 4 v 2 g | 3 | 8.26 | 16 |
| 250 | 658.3765 | f 5 v 4 g | 3 | 8.23 | 16 |
| 251 | 658.3824 | f 4.5 v 6 g | 2 | 8.20 | 21 |
| 252 | 765.2927 | e 4 v 4 g, e 0 f | 3 | 8.15 | |
| 253 | 765.2989 | f 2.5 v 4 g | 3 | 8.18 | |
| 254 | 765.3184 | f 1 v 6.5 g | 3 | 8.12 | |
| 255 | 765.3288 | c 4 v 1.5 f | 3 | 7.95 | |
| 256 | 765.3371 | c 3 v 3.5 f | 3 | 7.82 | |
| 257 | 765.3545 | c 2 v 4.5 e | 3 | 7.71 | |
| 258 | 765.3878 | v 0 c | 3 | 7.60 | |

| Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. | Nr | J. D. helioz. | Schätzungen | G | Gr. | Bemer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2424... | | | m | | | 2424... | | | m | |
| 259 | 765.4107 | b 4.5 v 2 c | 2 | 7.37 | 15 | 286 | 843.2332 | v 0 d | 3 | 7.85 | 2,15 |
| | | | | | | 287 | 843.2443 | e 3 v 0.5 d | 2 | 8.04 | 2,15 |
| 260 | 776.3395 | b 4 v 4 c | 4 | 7.23 | 13 | 288 | 843.2582 | e 1 v 2d | 2 | 8.01 | 2,15 |
| | | | | | | 289 | 843.2901 | c 3.5 v 3 e | 2 | 7.79 | 14 |
| 261 | 794.2617 | d 2 v 7 g | 2 | 7.96 | 13,34 | | | | | | |
| 262 | 794.2812 | d 3.5 v 3 g | 2 | 8.12 | | 290 | 850.3580 | b 1 v 6 c | 3 | 6.96 | |
| 263 | 794.3145 | c 4.5 v 1.5 d | 1 | 7.95 | 2,15 | | | | | | |
| 264 | 794.3409 | c 3 v 6 d | 2 | 7.83 | 15 | 291 | 863.2380 | b 5.5 v 2.5 c | 3 | 7.37 | 7,15 |
| 265 | 794.3666 | c 2 v 6 d | 2 | 7.75 | 2,15 | | | | | | |
| 266 | 794.4034 | b 3.5 v 4 c | 3 | 7.20 | 2,15 | 292 | 909.2533 | b 3 v 5 c | 4 | 7.13 | 13 |
| 267 | 796.2430 | b 4 v 2.5 c | 4 | 7.31 | 13,15 | 293 | 910.3402 | b 5 v 1 c | 2 | 7.48 | |
| | | | | | | 294 | 916.2459 | b 4 v 5.5 c | 4 | 7.17 | 29 |
| 268 | 814.2280 | f 6.5 v 1 g | 4 | 8.31 | 6,15 | | | | | | |
| 269 | 814.2586 | v 0 f | 2 | 8.03 | 2,15 | 295 | 957.3410 | b 7 v 3 c | 2 | 7.38 | 27 |
| 270 | 814.2863 | c 2.5 v 4 d | 1 | 7.74 | | | | | | | |
| 271 | 814.2995 | c 1.5 v 5 d | 2 | 7.68 | | 296 | 958.3534 | b 4 v 4 c | 2 | 7.23 | 27 |
| 272 | 814.3148 | b 4 v 1 c | 2 | 7.45 | 2,15 | | | | | | |
| | | | | | | | 2425... | | | | |
| 273 | 817.3627 | b 2 v 5 c | 4 | 7.06 | 13,15 | 297 | 033.3907 | b 5.5 v 2.5 c | 3 | 7.37 | |
| | | | | | | 298 | 033.4122 | b 5.5 v 3.5 c | 2 | 7.31 | |
| 274 | 823.2392 | d 1 v 7 g | 2 | 7.70 | 13 | | | | | | |
| 275 | 823.2696 | e 3 v 1 d | 2 | 8.10 | 2 | 299 | 035.3616 | g 1 v 5 i | 4 | 8.43 | |
| 276 | 823.3022 | c 5 v 3 d | 2 | 7.86 | 13 | 300 | 035.3706 | e 2.5 v 2.5 g | 3 | 8.15 | |
| 277 | 823.3279 | c 2.5 v 4 e | 3 | 7.75 | 8 | 301 | 035.3769 | e 3.5 v 3.5 g | 3 | 8.15 | |
| | | | | | | 302 | 035.3838 | e 1.5 v 4.5 g | 3 | 8.05 | |
| 278 | 826.3050 | b 3 v 3 c | 2 | 7.22 | 32 | 303 | 035.4116 | e 1 v 5 g | 2 | 8.02 | 35 |
| 279 | 832.2362 | c 2.5 v 2 e | 2 | 7.79 | 21 | 304 | 276.3441 | v 0 c | 4 | 7.60 | |
| 280 | 832.3251 | e 1 v 4 g | 3 | 8.03 | 2,15 | 305 | 276.3546 | v 0 c | 3 | 7.60 | |
| 281 | 832.3717 | c 0 v | 2 | 7.60 | | 306 | 276.3935 | c 3 v 1 g | 2 | 8.16 | 27 |
| | | | | | | 307 | 276.3955 | d 2 v 1.5 g | 2 | 8.17 | |
| 282 | 839.2076 | b 4 v 4 c | 3 | 7.23 | 2 | 308 | 276.4025 | d 3 v 6.5 i | 2 | 8.03 | |
| | | | | | | 309 | 276.4053 | g 1 v 4.5 i | 2 | 8.44 | |
| 283 | 841.2416 | b 3 v 2.5 c | 2 | 7.26 | 7,15 | 310 | 276.4108 | g 1 v 4 i | 2 | 8.45 | 27 |
| 284 | 843.2165 | d 1.5 v 4 g | 2 | 8.09 | 34 | 311 | 292.2522 | v 0 c | 2 | 7.60 | 27 |
| 285 | 843.2262 | e 2.5 v 0.5 d | 2 | 8.11 | | | | | | | |

Bemerkungen: 1. Luft sehr durchsichtig. 2. Stellung des Beobachters unbequem. 3. Morgendämmerung. 4. Himmelsgrund hell. 5. Bilder mässig. 6. Bilder sehr gut. 7. Stellung des Beobachters sehr unbequem. 8. Der Himmel bedeckt sich mit Wolken. 9. In der Nähe Wolken. 10. Mondlicht stört. 11. Instrument zittert unter dem Winddruck. 12. Die Bilder haben sich gebessert. 13. Bilder gut. 14. Bilder schwach. 15. Beobachtung in Zenitnähe. 16. Mondlicht stört wenig. 17. Luft durchsichtig. 18. Mondlicht stört sehr. 19. Abenddämmerung. 20. Die Bilder zittern. 21. Beobachtung durch dünne Zirrus-Wolken. 22. Mond ist aufgegangen. 23. Heiter. 24. Neblig. 25. Hie und da Wolken. 26. Wegen Mondlicht heller Himmelsgrund. 27. Gesichtsfeld zu klein. 28. Bilder schwach. 29. Vollmond. 30. Okular „schwitzt". 31. Stellung des Beobachters schwierig. 32. Beobachtung in Horizontnähe. 33. Mond nach ersten Viertel. 34. Himmelsgrund dunkel. 35. Lichter der Stadt stören.

Ich erhielt folgende 31 Normalhelligkeiten (Tabelle III), deren Verlauf in der Zeichnung dargestellt ist.

TABELLE III.

Normalhelligkeiten von TV Cassiopeiae.

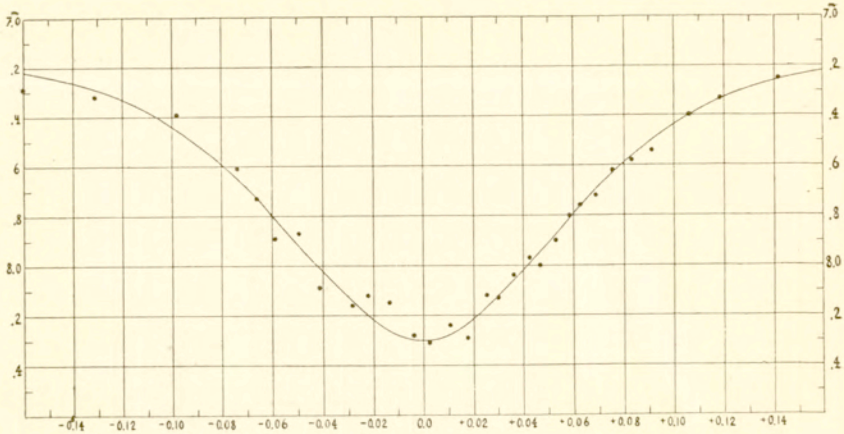
| Nr | Phase | n | Gewicht | Gr. | Nr | Phase | n | Gewicht | Gr. | Nr | Phase | n | Gewicht | Gr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2423... | | | m | | 2423... | | | m | | 2423... | | | m |
| 1 | 855.1323 | 2 | 7 | 7.14 | 12 | 855.3316 | 7 | 14 | 8.15 | 23 | 855.4032 | 7 | 19 | 7.80 |
| 2 | 855.1847 | 6 | 12 | 7.29 | 13 | 855.3413 | 8 | 20 | 8.28 | 24 | 855.4073 | 7 | 16 | 7.76 |
| 3 | 855.2138 | 7 | 19 | 7.32 | 14 | 855.3473 | 7 | 23 | 8.31 | 25 | 855.4136 | 7 | 16 | 7.72 |
| 4 | 855.2466 | 7 | 17 | 7.39 | 15 | 855.3557 | 7 | 19 | 8.24 | 26 | 855.4200 | 7 | 17 | 7.62 |
| 5 | 855.2713 | 6 | 20 | 7.61 | 16 | 855.3624 | 7 | 19 | 8.29 | 27 | 855.4280 | 7 | 15 | 7.58 |
| 6 | 855.2788 | 5 | 14 | 7.73 | 17 | 855.3700 | 7 | 18 | 8.12 | 28 | 855.4360 | 7 | 15 | 7.54 |
| 7 | 855.2859 | 7 | 21 | 7.89 | 18 | 855.3752 | 7 | 16 | 8.13 | 29 | 855.4510 | 7 | 15 | 7.40 |
| 8 | 855.2953 | 7 | 18 | 7.87 | 19 | 855.3812 | 7 | 20 | 8.04 | 30 | 855.4633 | 5 | 9 | 7.33 |
| 9 | 855.3036 | 7 | 20 | 8.09 | 20 | 855.3875 | 7 | 18 | 7.97 | 31 | 855.4866 | 4 | 7 | 7.25 |
| 10 | 855.3164 | 7 | 22 | 8.16 | 21 | 855.3920 | 7 | 15 | 8.00 | | | | | |
| 11 | 855.3226 | 7 | 20 | 8.12 | 22 | 855.3979 | 6 | 13 | 7.90 | | | | | |

Auf Grund der Normalhelligkeiten der Tabelle III habe ich, nach graphischer sowie rechnerischer Ausgleichung, die folgende Lichtkurve in der Nähe des Hauptminimums erhalten (Tabelle IV und die beigefügte Zeichnung).

TABELLE IV.

Lichtkurve von TV Cassiopeiae.

| Phase | Gr. | | Phase | Gr. | | Phase | Gr. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | m | | d | m | 12 | d | m | 5 |
| 0.00 | 8.30 | 2 | ±0.06 | 7.79 | 11 | ±0.12 | 7.33 | 4 |
| ±0.01 | 8.28 | 7 | ±0.07 | 7.68 | 9 | ±0.13 | 7.29 | 3 |
| ±0.02 | 8.21 | 9 | ±0.08 | 7.59 | 8 | ±0.14 | 7.26 | 2 |
| ±0.03 | 8.12 | 10 | ±0.09 | 7.51 | 7 | ±0.15 | 7.24 | 2 |
| ±0.04 | 8.02 | 11 | ±0.10 | 7.44 | 6 | ±0.16 | 7.22 | |
| ±0.05 | 7.91 | 12 | ±0.11 | 7.38 | 5 | | | |




Normalepoche: Min. helioz. m. Z. Gr. 2423855.3448 E = +2062

$M = 7^{m}.2$ $m = 8^{m}.30$ $m - M = 1^{m}.1$ $D = 0^{d}.32$ $d = 0^{d}.00$

Der Verlauf der Lichtkurve im Hauptminimum ist symmetrisch.

Die zwischen den Helligkeiten des Variablen in der Tabelle IV gedruckten Zahlen geben die Geschwindigkeit des Lichtwechsels des Veränderlichen binnen $0^{d}.01$ ausgedrückt in Hundertsteln der Grössenklasse.

Auf Grund der Lichtkurventabelle (IV) habe ich das ganze Beobachtungsmaterial der Tabelle I von neuem in der Absicht bearbeitet, die Momente der einzelnen von mir beobachteten Minima hinsichtlich etwaiger Abweichungen von den linearen Lichtwechselelementen rechnerisch möglichst genau zu bestimmen. Zu diesem Zwecke habe ich die Methode verwendet, die sich schon bei der Bearbeitung meiner Beobachtungen von Z Vulpeculae (Extrait du Bulletin de l'Acad. Polonaise d. Sciences et d. Lettres, Sér. A, 1927, pg. 31), U Cephei (Public. Observ. Warsaw, Vol. 5, pg. 43) und U Coronae Borealis (Public. Observ, Warsaw, Vol. 6, pg. 7) als zweckmässig erwiesen hat.

Ich erhielt auf diese Weise folgende 52 heliozentrische Minima (Tabelle V):

## TABELLE V.

### Heliozentrische Minima von TV Cassiopeiae.

| E | B<br>J. D. (m. Z. Gr.) | Mittlerer<br>Fehler | n | Gewicht | B — R |
|---|---|---|---|---|---|
| | 242... | d | | | d |
| + 1928 | 3612.4537 | ± 0.0021 | 17 | 3310 | — 0.0040 |
| + 1944 | 3641.4534 | ± 0.0014 | 22 | 5279 | — 0.0061 |
| + 1949 | 3650.5263 | ± 0.0020 | 6 | 1127 | + 0.0038 |
| + 1983 | 3712.1575 | ± 0.0014 | 10 | 1379 | + 0.0063 |
| + 1993 | 3730.2686 | ± 0.0023 | 16 | 3227 | — 0.0087 |
| + 2009 | 3759.2798 | ± 0.0014 | 13 | 1695 | + 0.0007 |
| + 2029 | 3795.5158 | ± 0.0016 | 3 | 590 | — 0.0155 |
| + 2031 | 3799.1468 | ± 0.0019 | 4 | 386 | — 0.0097 |
| + 2062 | 3855.3481 | ± 0.0016 | 32 | 9194 | + 0.0007 |
| + 2067 | 3864.4110 | ± 0.0039 | 6 | 975 | + 0.0006 |
| + 2068 | 3866.2284 | ± 0.0025 | 14 | 2699 | + 0.0053 |
| + 2078 | 3884.3476 | ± 0.0056 | 5 | 1262 | — 0.0015 |
| + 2098 | 3920.5858 | ± 0.0126 | 3 | 150 | — 0.0155 |
| + 2109 | 3940.5167 | — | 1 | 32 | — 0.0233 |
| + 2126 | 3971.3445 | ± 0.0040 | 5 | 1284 | — 0.0099 |
| + 2131 | 3980.4207 | ± 0.0044 | 7 | 508 | + 0.0032 |
| + 2168 | 4047.4885 | ± 0.0029 | 9 | 966 | + 0.0045 |
| + 2169 | 4049.2876 | ± 0.0044 | 7 | 1888 | — 0.0090 |
| + 2173 | 4056.5797 | — | 1 | 27 | + 0.0326 |
| + 2179 | 4067.4187 | ± 0.0186 | 2 | 39 | — 0.0040 |
| + 2180 | 4069.2303 | ± 0.0013 | 9 | 1220 | — 0.0050 |
| + 2184 | 4076.5096 | — | 1 | 81 | + 0.0238 |
| + 2196 | 4098.2394 | ± 0.0092 | 4 | 1257 | + 0.0023 |
| + 2217 | 4136.3067 | — | 1 | 48 | + 0.0048 |
| + 2250 | 4196.1075 | ± 0.0021 | 2 | 87 | — 0.0105 |
| + 2255 | 4205.1745 | ± 0.0133 | 2 | 566 | — 0.0065 |
| + 2265 | 4223.3209 | ± 0.0105 | 2 | 317 | + 0.0138 |
| + 2355 | 4386.4317 | ± 0.0037 | 4 | 1113 | — 0.0103 |
| + 2367 | 4408.1950 | — | 1 | 363 | + 0.0017 |
| + 2377 | 4426.3152 | ± 0.0046 | 3 | 633 | — 0.0042 |
| + 2381 | 4433.6167 | ± 0.0010 | 2 | 76 | + 0.0468 |
| + 2387 | 4444.4444 | ± 0.0099 | 5 | 609 | — 0.0011 |
| + 2388 | 4446.2470 | ± 0.0016 | 2 | 531 | — 0.0111 |
| + 2398 | 4464.3881 | — | 1 | 196 | + 0.0039 |
| + 2472 | 4598.5317 | ± 0.0030 | 3 | 157 | + 0.0144 |
| + 2473 | 4600.3301 | ± 0.0036 | 6 | 1591 | + 0.0002 |
| + 2483 | 4618.4450 | ± 0.0027 | 8 | 1445 | — 0.0110 |
| + 2484 | 4620.2884 | — | 1 | 242 | + 0.0198 |
| + 2505 | 4658.3571 | ± 0.0032 | 3 | 456 | + 0.0237 |
| + 2564 | 4765.2842 | ± 0.0042 | 8 | 2180 | + 0.0068 |
| + 2580 | 4794.2814 | ± 0.0128 | 5 | 1093 | + 0.0022 |
| + 2581 | 4796.1180 | — | 1 | 64 | + 0.0262 |
| + 2591 | 4814.2245 | ± 0.0022 | 5 | 633 | + 0.0066 |
| + 2596 | 4823.2826 | ± 0.0147 | 4 | 1427 | + 0.0017 |
| + 2601 | 4832.3244 | ± 0.0242 | 3 | 704 | — 0.0196 |
| + 2607 | 4843.2200 | ± 0.0076 | 5 | 1084 | + 0.0004 |
| + 2618 | 4863.1260 | — | 1 | 75 | — 0.0323 |
| + 2644 | 4910.2459 | — | 1 | 98 | — 0.0403 |
| + 2670 | 4957.4510 | — | 1 | 50 | + 0.0370 |
| + 2712 | 5033.5130 | ± 0.0089 | 2 | 107 | — 0.0306 |
| + 2713 | 5035.3520 | ± 0.0051 | 5 | 990 | — 0.0042 |
| + 2846 | 5276.4284 | ± 0.0036 | 7 | 1137 | — 0.0049 |

Die gewichteten Mittel der B-R der Tabelle V ergaben folgende Normalminima (Tabelle VI):

TABELLE VI.

Normalminima von TV Cassiopeiae.

| E | B<br>J. D. (m. Z. Gr.) | n | G | B — R |
|---|---|---|---|---|
| | 242... | | | d |
| + 1965 | 3679.5200 | 91 | 16993 | — 0.0 43 |
| + 2086 | 3898.8497 | 90 | 18905 | — 0.0003 |
| + 2207 | 4118.1754 | 23 | 3615 | — 0.0004 |
| + 2374 | 4420.8771 | 18 | 3521 | — 0.0045 |
| + 2481 | 4614.8314 | 21 | 3891 | + 0.0006 |
| + 2587 | 4806.9684 | 32 | 74[illegible]8 | + 0.0010 |
| + 2780 | 5156.7953 | 14 | 2234 | — 0.0058 |

Der Verlauf der B-R der Tabelle VI scheint auf kleine (Amplitude ca. $0\overset{d}{.}007$) kurzperiodische (Periode ca. 400 $\times$ P) Schwankungen der Länge der Periode der Bedeckung zu weisen, die aber noch bestätigt werden müssen.

Die Rechnungen zu dieser Arbeit wurden unter meiner Leitung vom Magistrant A. P o l a k o w s k i durchgeführt.

---

Warszawa, Universitäts-Sternwarte, November 1936.