COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE
Classe III
XXVIII Année 1935 Fascicule 7—9

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVIII 1935 Zeszyt 7—9

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1936

DZIEWULSKI
WARSZAWA

TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 24 października 1935 r.

L. Szperl i L. Oziębło.

O działaniu siarkowodoru na chlorek as-o-ksyloylu.

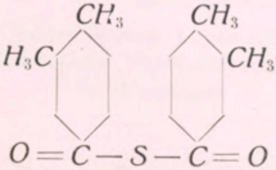
Przedstawił L. Szperl dn. 24 października 1935 r.

Sur l'action de l'hydrogène sulfuré sur le chlorure de as-o-xyloile.

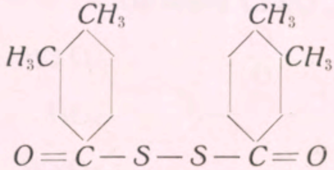
Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 24 octobre 1935.

Streszczenie.

W pracy niniejszej dokonano syntezy kwasu 1,2-dwumetylo-4-benzoesowego drogą reakcji Grignarda z 1,2-dwumetylo-4-bromobenzenu, opierając się na analogji z otrzymywaniem kwasu α-naftoesowego z α-bromonaftalenu. Chlorobezwodnik kwasu 1,2-dwumetylo-4-benzoesowego poddano działaniu siarkowodoru; powstała mieszanina, nienotowanych dotychczas w literaturze, jednosiarczku (I) i dwusiarczku (II) dwu-as-o-ksyloylu z przewagą jednosiarczku — bezbarwnej substancji krystalicznej o temper. topn. 119—120°.



I



II

Dwusiarczek dwu-as-o-ksyloylu, podobnie jak i jednosiarczek, bezbarwny i krystaliczny, topniejący w temp. 127—128°, został wyodrębniony z mieszaniny przez rozkład jednosiarczku alkoholowym roztworem amonjaku. Stwierdzono również, że jednosiarczek dwu-as-o-ksyloylu pod działaniem alkoholowego roztworu amonjaku rozkłada się z wytworzeniem aminy kwasu 1,2-dwumetylo-4-benzoesowego i soli amonowej kwasu 1,2-dwumetylo-4-tiobenzoesowego.

Praca będzie drukowana in extenso w Rocznikach Chemji.

Irena Chmielewska.

O barwnikach fioletowo-zabarwionych ziemniaków.

Przedstawił W. Lampe dn. 24 października 1935 r.

Sur les colorants de pommes de terre violettes.

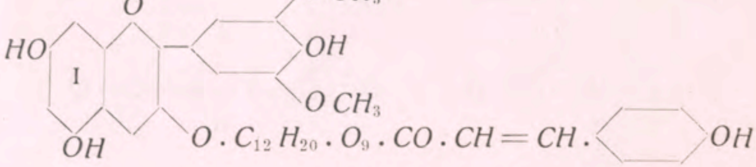
Mémoire présenté par M. V. Lampé dans la séance du 24 octobre 1935

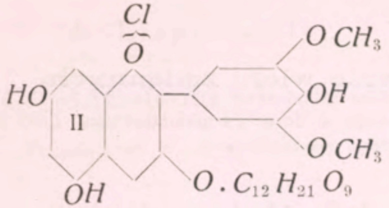
Streszczenie.

Z fioletowo-zabarwionych ziemniaków zostały wyodrębnione, rozdzielone i zbadane dwa nieznane dotychczas antocyjany.

Mieszaninę barwników wyciągnięto z suszu metanolem, zawierającym 2% chlorowodoru, a następnie wytrącono eterem. Rozdzielenie barwników udało się przeprowadzić dzięki ich niejednakowej rozpuszczalności w rozcieńczonym kwasie solnym. Barwnik trudniej rozpuszczalny — chlorek negreteiny — o wzorze sumarycznym $C_{38}H_{41}O_{18}Cl$ został oczyszczony za pomocą połączenia z kwasem pikrynowym. Jest on 3-metylopentozo (izorodeozo) glukozydem chlorku malwidyny (syryngidyny), zawierającym związany estrowo kwas p-oksycynamonowy (wzór I).

Podczas hydrolizy 2 n. ługiem sodowym odszczepia się od barwnika kwas p-oksycynamonowy — powstaje pierwszy produkt odbudowy — chlorek negretyny — o wzorze sumarycznym $C_{29}H_{35}O_{16}Cl$ (wzór II).

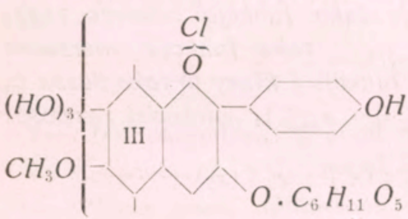


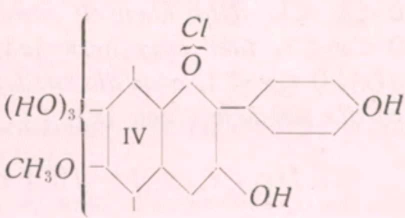


Oba barwniki analizowane były w postaci jednowodzianów, bowiem jedna cząsteczka wody krystalizacyjnej nie zostaje odszczepiona nawet podczas suszenia w próżni w temp. 105^0.

Chlorek aglukonu barwnika został otrzymany w postaci dwuch wodzianów, z których jeden ma własności chlorku malwidyny (syryngidyny) drugi — chlorku önidyny; dzięki zastosowaniu krystalizacji z różnych rozpuszczalników udało się przeprowadzić pierwszy wodzian w drugi i odwrotnie.

Drugi barwnik — chlorek tuberyny — o wzorze sumarycznym $C_{22}H_{23}O_{12}Cl$ (wzór III) został oczyszczony za pomocą trudno rozpuszczalnej w wodzie soli ołowiawej. Jest on 3-monoglukozydem chlorku tuberydyny, aglukonu o wzorze sumarycznym $C_{16}H_{13}O_7Cl$ (wzór IV). Na zasadzie zbadania produktów odbudowy, stwierdzono, że chlorek tuberydyny jest jednometylowym eterem niewyodrębnionego dotychczas chlorku 3.5.6.7.8.4′ sześciooksyflawyljowego, przyczem grupa metylowa znajduje się w części fenolowej barwnika.





Praca ogłoszona zostanie w „Rocznikach Chemji".

Zakład Chemji Organicznej
Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego
w Warszawie

Stanisław Ruziewicz.

O funkcjach nieskończenie wielu zmiennych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 24 października 1935 r.

Sur les fonctions d'une infinité de variables.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 24 octobre 1935.

Streszczenie.

W związku z pracami L. Bieberbacha, A. Lindenbauma, W. Sierpińskiego, oraz własnemi, autor otrzymał następujące dwa twierdzenia, których dowód szczegółowy ukaże się w 26-tym tomie *Fundamenta Mathematicae* (w. r. 1936):

I. *Niech F oznacza zbiór wszystkich funkcyj przeliczalnej mnogości zmiennych* $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ *określonych dla* $0 < x_i < 1$. *Dla zbioru F istnieje taka funkcja rosnąca* $\varphi(x)$, $0 < x < 1$, *taki ciąg liczb* $\{c_i\}_{i=1,2,\dots}$ *oraz dla każdej funkcji f zbioru F taka funkcja mierzalna* $g(x)$, $0 < x < 1$, *że dla każdego ciągu* $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ $0 < x_i < 1$, *zachodzi równość:*

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = g(c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) + \cdots).$$

II. *Niech* Φ *oznacza klasę mocy continuum funkcyj przeliczalnej mnogości zmiennych* $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ *określonych dla* $0 < x_i < 1$. *Dla klasy* Φ *istnieje taka funkcja rosnąca* $\varphi(x)$, $0 < x < 1$, *taki ciąg liczb* $\{c_i\}_{i=1,2,\dots}$ *taka funkcja mierzalna* $g(x)$, $0 < x < 1$, *oraz dla każdej funkcji f klasy* Φ *taka liczba t, że dla każdego ciągu* $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ $0 < x_i < 1$, *zachodzi równość:*

$$f(x_1, x_2, \dots) = g(t + c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) + \cdots).$$

A. Liapounoff.

O oddzielaniu wielokrotnem zbiorów mierzalnych B.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 24 października 1935 r.

A. Liapounoff.

Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 24 octobre 1935.

Dans le t. XXIII des *Fundamenta Mathematicae* (p. 292–303) M. W. Sierpiński a publié un article sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B. Le but de cette note est de donner un procédé pour démontrer quelques uns des théorèmes y établis et même pour généraliser l'un d'eux.

Théorème I. *Etant donné, dans le domaine fondamental* I_x, *un système d'éléments* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *de classe* α *tel que* $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n \times \cdots = 0$ *on peut trouver un système d'ensembles* $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ *de classes* $< \alpha$ *ou bien de la base* α *tel que* H_n *renferme* E_n *et* $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \times \cdots = 0$.

Démonstration. Tout d'abord nous aurons:

$$E_n = \eta_1^n \times \eta_2^n \times \cdots \times \eta_k^n \times \cdots$$

tous les ensembles η_k^n étant de classes $< \alpha$ ou bien de la base α; d'ailleurs $\eta_{k'}^n > \eta_{k''}^n$ quand $k' < k''$.

Cela posé, définissons une suite d'ensembles $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de classe $< \alpha$ ou bien de la base α, de la manière suivante:

$$\varepsilon_n = \eta_n^1 \times \eta_n^2 \times \cdots \times \eta_n^n \times \eta_n^{n+1}.$$

Ces ensembles sont sans partie commune, puisque les E_n le sont.

Considérons maintenant la série alternée

$$\eta_1^m - \eta_1^m \varepsilon_1 + \eta_2^m \varepsilon_1 - \eta_2^m \varepsilon_2 + \cdots + \eta_n^m \varepsilon_{n-1} - \eta_n^m \varepsilon_n + \cdots$$

parceque son terme général tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, elle est convergente [1]). Soit H_m la somme de cette série. D'après un théorème de M. N. Lusin, tous les ensembles H_m sont de classe $< \alpha$ ou bien de la base α [2]). Il est évident que l'ensemble H_m renferme E_m.

Je dis maintenant que $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m \times \cdots = 0$. Prenons un point quelconque x du domaine I_x et supposons qu'il appartient à k ensembles η_n^m et à j ensembles ε_n. On voit, que le point x appartient à H_m dans le cas où $k > j$, et dans ce cas seulement.

Supposons, que le point x fait partie de tous les ensembles H_m. Alors il doit appartenir à tous les ensembles η_n^m et par suite à tous les ensembles ε_n qui sont sans partie commune. Nous aboutissons à une contradiction. Donc

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m \times \cdots = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. *Si l'on supprime de chacun des éléments $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de classe α leur partie commune, les parties restantes sont toujours séparables multiplement au moyen d'ensembles accessibles inférieurement de classe α.*

Démonstration. Conservons les notations du théorème précédent. Considérons la série à termes positifs

$$(\eta_1^m - \varepsilon_1) + (\eta_2^m - \varepsilon_2) + \cdots + (\eta_n^m - \varepsilon_n) + \cdots.$$

Soit H_m la somme de cette série. On s'assure immédiatement que les ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_m, \ldots$ satisfont au théorème énoncé C. Q. F. D.

---

1) Cf. N. Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques.* Paris 1930 p. 16 ou encore N. Lusin *„Analogies entre les ensembles analytiques et les ensembles mesurables B".* *Fundamenta Mathem.* T. XVI p. 57.

La voie, que je suit dans la présente note est au fond identique à celle dont M. N. Lusin s'est servi pour établir les deux principes de séparabilité pour le cas de deux éléments de classe α.

2) Voir N. Lusin. *Leçons*.. pp. 60 et 67.

Posiedzenie

z dnia 18 listopada 1935 r.

A. Łuniewski.

Kreda środkowa pod Iłżą i uwagi nad jej podłożem.

Przedstawił J. Lewiński na posiedzeniu w dniu 18 listopada 1935 r.

W roku 1925 stwierdziłem występowanie utworów cenomanu i turonu pod wsią Chwałowice na *NW* od Iłży [1]). W parę lat później Samsonowicz [2]) potwierdza występowanie w tem miejscu turonu oraz cenomanu górnego pod postacią bądź wapieni glaukonitycznych z konkrecjami fosforytów, bądź wapieni z ziarnami kwarcu. Ze skał tych autor przytacza *Rhynchonella Grasiana* d'Orb. oraz trzy formy brachiopodów i małży, gatunkowo nieokreślonych. Pozatem autor powyższy zalicza piaski z konkrecjami leżące bezpośrednio na jurze do cenomanu dolnego, wyrażając przypuszczenie, że ich część dolna może należeć już do wrakonu.

Odsłonięcia kredy środkowej na badanym obszarze są skąpe i ograniczone do bezpośrednich okolic Chwałowic. W odległości pół km. na *SW.* od tej miejscowości w lewym brzegu rzeczki, wpadającej do Iłżanki, przy drodze, wiodącej do Iłży, widoczny jest profil następujący:

1. Morena denna.
2. Rumosz moreny lokalnej składający się z druzgotu margli turońskich z szaremi krzemieniami oraz z rzadkiemi narzutniakami północnemi.

---

[1]) Spraw. sekcji geologicznej ośrodka warszawskiego. Spraw. Kom. Fizjog. Akad. Um. t. 60, str. XXXII.

[2]) J. Samsonowicz. Przebieg i charakter granicy między jurą a kredą na płn. wsch. zboczu Łysogór. Spraw. Państw. Inst. Geol. 1932.

3. Margle zdjaklazowane, zawierające w górnej części krzemienie z otoczką brunatną; 60 cm.

4. Twarde zbite wapienie o habitusie wapieni jurajskich zawierają spore rozproszone ziarna glaukonitu; 50 cm. Warstwy występujące poniżej nie są widoczne na powierzchni, zostały one odsłonięte przeze mnie wkopem 2 m. głębokości.

5. Twarde gruzełkowane wapienie skrzemionkowane z gniazdami brunatnemi krzemionkowo-fosforanowemi; 40 cm.

6. Margle silnie piaszczyste i glaukonityczne, stąd zielonkawe; zawierają liczne nieregularne konkrecje fosforytowe[1]) pod postacią drobnych utworów brunatnych, lub jasnych kulistych wielkości orzecha włoskiego, bądź wreszcie pod postacią wydłużonych kanciastych utworów. Skała jest krucha, chropowata od wielkiej domieszki piasku. Lepiszcze jej stanowi węglan wapnia wraz z fosforanem wapnia. Skamieniałości występują tu pod postacią ośródek barwy brunatnej, silnie sfosforytyzowanych.

7. Margle mniej piaszczyste i mniej glaukonityczne.

8. Piaski żółtawe i białe.

Upad *ENE* pod kątem 4^0.

Profil powyższy zawiera następującą faunę:

W warstwie 2-ej występuje: *Holaster suborbicularis* Defr., *Terebratula obesa* Sow., *Inoceramus Lamarcki* Park.

W warstwie 4-ej znajdują się ułamki inoceramów oraz dość licznie *Rhynchonella Cuvieri* d'Orb.

Najobfitszą faunę zawiera warstwa 6-ta. Okazy stanowią tylko ośrodki sfosforytyzowane barwy brunatnej. W górnej części tej warstwy o barwie jaśniejszej, zawierającej mniej glaukonitu występują: *Polycoelia* sp., *Thecidea* sp., *Terebratula striatula* Mant., *Spondylus striatus* Sow., *Inoceramus labiatus* (Schl.), *Holaster planus* Mant., *Ptychodus mamillaris* Ag., *Oxyrhina Mantelli* Ag., *Lamna (Otodus) appendiculata* Ag.

W części dolnej warstwy powyższej, silnie glaukonitycznej, występuje: *Amorphospongia globosa* v. Hag., *Calamophylla* sp. n. Blain., *Plocoscyphia* cf. *cavernosa* Rom., *Plocoscyphia* cf. *pertusa* Gein., *Serpula* sp. *Terebratula striatula* Mant., *Terebratula subrotunda* Sow., *Kingena lima* Defr., *Rhynchonella*

[1]) Analizę mikroskopową powyższych fosforytów wykonał: A. Morawiecki. Badania mikroskopowe fosforytów polskich. Spr. z Pos. Tow. Nauk. Warsz. 1930.

Grasiana d'Orb. (licznie), *Rh. plicatilis* var. *Woodwardi* Dav., *Exogyra conica* Sow. (b. licznie), *Ostrea hippopodium* Nil., *Inoceramus bohemicus* Leonh., *Pecten orbicularis* Sow., *Arca* sp., *Lucina* sp., *Opis* sp., *Avellana cassis* d'Orb., *Pleurotomaria tourtiae* Tsn., *Pleutomaria Ewaldi* Tsn., *Turbo impar* Tsn., *Trochus* sp., *Baculites baculoides* Mant., *Hamites implex* d'Orb., *Turrilites acutus* Passy, *Turrilites costatus* Lam., *Schloenbachia varians* Sow., *Actinocamax plenus* Blainv., *Nautilus* sp., *Holaster subglobosus* (Leske), *Oxyrhina Mantelli* Ag., *Lamna appendiculata* Ag.

Pod Chwałowicami w dnie doliny rzeczki wpadającej do Iłżanki, wzdłuż jej lewego brzegu występują białe kredowate margle z szaremi krzemieniami, te same, które znajdują się na złożu wtórnem (morena lokalna) w profilu opisanym powyżej (str. 119 war. 2).

Utwory senońskie ukazują się dopiero o parę km. na *NE* na linji Stoki, Wólka Maziarska, Antoniów, Marjanów, Bieliny, Wólka Pawlicka, Osinki, Wyględów, Jawór Solecki, Wola Jaworska. Zawierają one zwykłą faunę senońską (mukronatową) z pośród której na uwagę zasługują wielkie pachidyski (50 cm. średnicy) oraz wielkie ananchitesy w marglach z konkrecjami kwarcytowemi (Góry Wielkie pod Antoniowem). Petrograficznie są to margle piaszczyste o charakterze siwaka (Stoki) lub bardzo lekkiej opoki (Antoniów).

Na polach wąskiego pasa wyniosłości w kierunku *NW—SW* pomiędzy utworami opisanemi w profilu, a wychodniami muszlowców jurajskich na Kolonji Iłżeckiej, widoczne są płyty piaskowca żelazistego. W trzech specjalnie wykonanych odsłonięciach o głębokóści 1,5 m. każde, a położonych jedno od drugiego co 30 m. na linji o kierunku *NE—SW* a więc w kierunku prostopadłym do upadu warstw jurajskich, stwierdziłem obecność piaskowców żelazistych płytowatych barwy rdzawej z przewarstewkami piasków żelazistych.

Pewne warstwy piaskowców żelazistych uległy wtórnej sylifikacji; w tym wypadku zawierają one spikule gąbek i są identyczne z analogicznemi utworami okolic Tomaszowa Mazow. które występują wśród piaskowców albskich [1]).

[1]) Według informacji ustnej p. Mgr. M. Kobyłeckiego, utwory te należą do najdolniejszego Albu środkowego.

Poniższy profil studni przy Szkole Rolniczej [1]) dostarcza danych, dotyczących spągowych utworów najniższych warstw profilu opisanego na str. 119—120.

Studnia położona jest na wyżej wspomnianym wązkim pasie wyniosłości nieco w stropie wychodni piaskowca żelazistego a w odległości 0,5 km. w kierunku *SE* od nich. Głębokość studni około 2 m.

1. Glina morenowa 2 m.
2. Ił łupkowaty popielaty 50 cm.
3. Piasek rdzawy 4 m.
4. Piasek biały 3 m.
5. Ił łupkowaty 1 m.
6. Piasek żelazisty rudonośny z dużemi bułami limonitu oraz drzewa. Gąbka *Plocoscyphia* sp. 2.50 m.
7. Piaskowce żelaziste 2 m.
8. Piaskowce żelaziste kwarcytowate o zlewnej strukturze, ku dołowi czarne.

W profilu drugiej studni, znajdującej się przy cegielni w odległości mniej więcej 2 km. w kierunku *SW* od poprzedniej występują według relacji robotników miejscowych następujące utwory:

1. Glina morenowa.
2. Piaski żółte żelaziste fosforonośne z konkrecjami piasczysto żelazistemi.
3. Muszlowiec typu Krogulczy 1 m.
4. Muszlowiec szary o lepiszczu wapienno fosforanowem, piaszczysty z domieszką glaukonitu. Zawiera *Exogyra* cf. *virgula* i ułamki innych ostryg 30 cm.
5. Ił ciemny, piaszczysty łupkowaty z miką, przepełniony szczątkami roślin 8 m. (nie przebito).

Piaskowce żelaziste oraz dane o utworach występujących w profilach studni powyższych, wypełniają w ten sposób w znacznej mierze lukę, istniejącą na pasie szerokim około 300 m. między wychodniami jury na Kolonji Iłżeckiej a utworami profilu pod Chwałowicami.

[1]) Dane cyfrowe oraz materjał profilu studni przy szkole zawdzięczam dzierżawcy folwarku Chwałowice.

Opierając się na wszystkich danych, profil kredy środkowej pod Chwałowicami przedstawiałby się w sposób następujący: Strop margle senońskie.

1. Margle kredowate z szaremi krzemieniami in situ pod Chwałowicami oraz jako morena lokalna z *Holaster suborbicularis, Inoceramus Lamarcki* i t. d.

2. Margle zdjaklazowane z krzemieniami z brunatną otoczką wietrzeniową.

3. Twarde wapienie o habitusie jurajskim z rozproszonemi ziarnami glaukonitu.

4. Wapienie gruzełkowate z gniazdami krzemionkowo fosforanowemi, z *Rhynchonella Cuvieri.*

5. Margle silnie piaszczyste i glaukonityczne z *Holaster planus,* i t. d. (w górze) i Holaster subglobosus, *Actinocamax plenus, Schloenbachia varians, Baculites baculoides, Exogyra conica, Inoceramus bohemicus, Pecten orbicularis, Kingena lima, Rh. Grasiana, Turrilites acutus, T. costatus* i t. d. (w dole).

6. Margle mniej piaszczyste i mniej glaukonityczne.

7. Piaski rdzawe i białe.

8. Ił łupkowaty.

9. Piaski fosforonośne z konkrecjami piasczysto żelazistemi.

10. Ił łupkowaty.

11. Piasek żelazisty z rudą, drzewem i *Plocoscyphia* sp.

12. Piaskowiec żelazisty z warstewkami piasków zawierających konkrecje kwarcytowate.

13. Piaskowce kwarcytowate białe i czarne o zlewnej kwarcytowatej strukturze.

* * *

Fauna występująca w poziomie 4-tym (patrz profil syntetyczny) oraz w górnej części poz. 5-go, charakteryzuje turon dolny poziom. *Inoc. labiatus.* Do tego poziomu zaliczam również poz. 3-ci, litologicznie związany z poziomem 4-tym. Margle kredowate z krzemieniami (poziom 1-y i 2-gi) stanowią wyższe warstwy turonu dolnego a mianowicie poziom *Inoc. Lamarcki.* Dolna część warstwy 5-tej oraz litologicznie z nią związana warstwa 6-ta należą do cenomanu górnego i środkowego jak wskazuje fauna w nich zawarta.

Co się tyczy utworów niższych, a więc piasków żółtych i białych, piasków fosforonośnych, piasków żelazistych z rudą i drzewem (poz. 8, 9, 10 i 11) to prawdopodobnie, jak zresztą przypuszcza Samsonowicz (l. c.), należą one do cenomanu dolnego, a może i do wrakonu. Danych paleontologicznych do poparcia tego poglądu nie mam żadnych, gdyż jedyny okaz gąbki z piasków żelazistych należy do rodzaju *Plocoscyphia* (rodziny *Meandrospongia*) istniejący przez cały cenoman aż do wrakonu włącznie; jedynie zatem ze względu na analogje położenia stratygraficznego i podobieństwa petrograficznego z utworami okolic Rachowa zaliczam te utwory do cenomanu dolnego i do wrakonu.

Piaskowce żelaziste, występujące zarówno na powierzchni jak w profilu studni przy Szkole Rolniczej oraz piaskowce kwarcytowate z tej że samej studni zaliczam do Albu. Ten ostatni wniosek stratygraficzny opieram na podstawie analogji petrograficznej zarówno z utworami Rachowa jak z okolicami Tomaszowa Mazowieckiego i zach. zbocza Gór Świętokrzyskich. Piaskowce albu środkowego Tomaszowa (patrz str. 121) zawierają identyczne wtórne skrzemienienia, jak piaski śród piaskowców żelazistych Chwałowic. Te ostatnie nie różnią się niczem od pewnych odmian piaskowców żelazistych okolic Małogoszczy. Uderzające jest również podobieństwo petrograficzne piaskowców kwarcytowatych z profilu studni z takiemiż piaskowcami hoplitowemi z Rachowa. Samsonowicz (l. c.) zalicza do Albu piaskowce kwarcytowate występujące w luźnych bryłach na wtórnem złożu śród utworów czwartorzędowych, a w bezpośredniem sąsiedztwie z kimerydem w okolicach Stanisławowa, Dąbrówki Zabłotnej, Krzyżanowic, Kolonji Iłżeckiej. Zważywszy, że w profilu studni mamy do czynienia z analogicznemi utworami, zdanie Samsonowicza znajduje tu swoje uzasadnienie.

Pod względem petrograficznym i faunistycznym oraz co do stanu i sposobu zachowania skamieniałości, kreda środkowa okolic Chwałowic zbliża się wybitnie do kredy okolic Rachowa. Charakter jednak fauny, a więc liczne ostrygi, drobne ślimaki, małże, gąbki płytkowodne oraz nieznaczny udział głowonogów świadczy, że (przynajmniej w obrębie turonu i cenomanu) obszar chwałowicki stanowił strefę bardziej przybrzeżną w stosunku do obszaru Rachowa należącego do strefy bardziej otwartego morza (liczne głowonogi).

Z faktów powyższych wynika, że ingresja morza kredowego na obszarze Chwałowic i prawdopodobnie na całym północno-wschodniem zboczu Gór Świętokrzyskich aż do okolic Stanisławowa odbyła się w tymże samym czasie co na obszarze Rachowa a więc w Albie.

* * *

Sprawa bezpośredniego podłoża utworów kredowych pod Chwałowicami jak wogóle na całem wschodniem zboczu Gór Świętokrzyskich przedstawia się niepewnie. Lewiński (l. c.) ostatecznie uważa za najwyższy człon utworów jurajskich na powyższym obszarze drobny druzgot muszlowy Krogulczej, zaliczając go do najwyższego kimerydu i stawiając go powyżej wapieni nerynejowych Zalesic i Krzyżanowic. Samsonowicz odwrotnie za najmłodszy utwór jurajski uważa wapienie nerynejowe, zalicza je do Bononu dolnego, zaś muszlowce Krogulczej do górnego kimerydu. Autor powyższy opiera się na fakcie wybitnej zmiany sedymentacji jaka zachodzi na granicy tych dwóch utworów. Prócz tego badacz ten przytacza następujące fakty dla poparcia swej tezy. A mianowicie w profilu studni przy Szkole Rolniczej stwierdza on na podstawie informacji robotników występowanie bezpośrednie pod utworami kredowemi wapieni dolomitycznych z temi samemi nerynejami które charakteryzują wapienie Krzyżanowic i mają stanowić ich poziom wyższy. Następnie wskazuje na fakt, że na zachód od drogi wiodącej z Helenowa do Dąbrówki Zabłotnej nad żółtawym zlepem muszlowym, głównie złożonym z ostryg, leżą wapienie nerynejowe typu krzyżanowickiego. Nie wchodząc w sprawę czy dolomityczne wapienie nerynejowe stanowią poziom wyższy od żółtych mniej dolomitycznych wapieni krzyżanowickich czy też tylko stanowią tych samych lokalną silniejszą dolomityzację w kierunku poziomym, zmuszony jestem zaznaczyć, że informacje robotników co do występowania wapienieni nerynejowych w profilu studni — były błędne. Istotnie na hałdzie przy studni znajdowały się liczne ułamki wapieni nerynejowych zwiezionych swego czasu do obudowy studni z pod Krzyżanowic. Jak wskazuje profil studni przy szkole rolniczej, kreda nie została przebita. Skolei profil następnej studni przy cegielni wykazuje, że utwory kredowe (piaski żółte z konkrecjami) leżą na białym druzgocie muszlowym. Muszlowiec ten ku dołowi przechodzi w ciemny muszlowiec ilasty fosforonośny z romboedrycznemi kryształkami dolomitu. Zawiera on liczne pogruchotane skorupki ostryg *(Exogyra* cf. *virgula)* i leży bezpośrednio na czarnej glinie mikowej przepełnionej szczątkami jakichś morszczyn morskich [1]). Dwa te ostatnie utwory nie były dotychczas znane w żadnym profilu jury wschodniego zbocza Gór Świętokrzyskich.

Biały muszlowiec ze studni jak i cała serja dolniejsza analogicznych muszlowców widocznych w licznych kamieniołomach na Kolonji Iłżeckiej, różni się od muszlowców Krogulczej brakiem otoczonych ziarn kwarcu, obecnością piasku kwarcowego drobnoziarnistego, silniejszym rozdrobnieniem szczątków organicznych. Składa się on prawie że wyłącznie ze skorupek doskonale obtoczonych ostryg, podczas gdy w muszlowcach typu Krogulczej znaczny udział biorą inne małże oraz ślimaki. Nie wypowiadam się stanowczą co do położenia stratygraficznego muszlowców w stosunku do wapieni nerynejowych Krzyżanowic z braku dostatecznych dowodów bezpośredniego styku tych utworów, sądzę jedynie tylko, że wapienie nerynejowe tworzą raczej wkład wśród muszlowców, stanowiąc epizod sedymentacyjny związany z czasowem pogłębieniem się morza. Przeciwnie, muszlowce Krogulczej, Krzyżanowic, Chwałowic zawierające dokładnie obtoczone ziarna kwarcu i dokładnie ogładzone szczątki muszli, co ma miejsce w strefie kipielowej, stanowią utwór wybitnie plażowy.

Co się tyczy wieku powyższych utworów to sprawa przedstawia się następująco. Wapienie nerynejowe nie dostarczają żadnego dokumentu paleontologicznego, który pozwalałby zaliczyć je do bononu, przyczem położenie ich stratygraficzne względem górnej części muszlowców jest niezdecydowane [2]). Z powodów

---

[1]) Z moich obserwacji w paśmie Przedborskiem, w odkrywce znajdującej na południowym krańcu Przedborza występują bezpośrednio pod utworami piaskowca kredy środkowej (alb ?) podobne iły ze szczątkami roślin.

[2]) Pod Krogulczą Suchą w odległości 1 km. na wschód od tej wysokości na krawędzi lasu w rowie występują kawałki muszlowca solitycznego z licznemi serpulami, małemi limami (*Lima* cf. *suprajurensis* Contj.) szczątkami *Ostrea* sp., oraz *Orthostoma dolium* P. de Lor. Ze względu na występowanie powyższego gatunku w portlandzie dol. Boulogne sur Mer oraz na specjalny charakter petrograficzno-faunistyczny i położenie stratygraficzne, uważałbym powyższe muszlowce jako należące do bononu dolnego.

Być może utwór ten jest współrzędny z wapieniami marglistemi Korablewa (okolice Widawy), które zawierają faunę drobnych ślimaków, oraz *Astarte Saemanni* P. de Loriol i zaliczone są przez Premika (Rocznik P. F. G. tom 7, str. 143) do portlanda dolnego.

powyższych zaliczam muszlowce Krogulczy, Krzyżanowic, Chwałowic, iły ze szczątkami roślin oraz wapienie nerynejowe do najwyższego kimerydu.

Spłycanie się morza na wchodniem zboczu Gór Świętokrzyskich zaznacza się w okolicach Chwałowic już w dolnym kimerydzie, gdzie mamy do czynienia w przeważającej mierze z utworami marglisto ilastemi, z fauną wybitnie brzegową i z licznemi ławicami ostryg. Uderzającą rzeczą jest brak całkowity głowonogów. Pod koniec kimerydu spłycanie się morza wzrasta, powstają utwory przybrzeżne lub typowo plażowe przerwane krótką fazą morza głębszego.

Ta stała w czasie całego kimerydu tendencja do wynurzenia się dna morskiego na wschodniem zboczu Gór Świętokrzyskich doprowadza wreszcie do przerwy sedymentacyjnej i niezgodności kątowej między kimerydem a bononem w okolicach Tomaszowa Mazowieckiego.

Z Zakładu Geologji i Paleontologji
Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego
w Warszawie

Spis fauny kredy środkowej okolic Chwałowic.

	Nazwa gatunku	Cenoman		Turon
		środ. moyen	gór. sup	
1	*Maeandroptychium* cf. *pyramidale* Sinz.		×	
2	*Plocoscyphia* cf. *cavernosa* Rom.	×		
3	*Plocoscyphia* cf. *pertusa* Gein.	×		
4	*Amorphospogia globosa* v. Hag.	×		
5	*Calamophyllia* sp.	×		
6	*Parasmillia* sp.	×		
7	*Holaster planus* Mant.			×
8	*Holaster subglobosus* (Leske)	×		
9	*Holaster suborbicularis* Defr.			×
10	*Surpula* sp.			
11	*Terebratula striatula* Mant.	×	×	
12	*Terebratula obesa* Sow.			×
13	*Rhynchonella Grasiana* d'Orb.	×		
14	*Rhynchonella Cuvieri* d'Orb.			×
15	*Rhynchonella plicatilis* var. Woodwardi Dav.	×		
16	*Terebratula subrotunda* Sow.	×		
17	*Kingena lima* Defr.	×		
18	*Thacidea* sp.			×
19	*Inoceramus bohemicus* Leon.	×		
20	*Inoceramus labiatus* Schl.			×
21	*Inoceramus Lamarcki* Park.			×
22	*Ostrea hippodium* Nil.	×		
23	*Exogyra conica* Sow.	×		
24	*Pecten orbicularis* Sow.	×		
25	*Spondylus striatus* Sow.			×
26	*Cardium* sp.	×		
27	*Arca* sp.	×		
28	*Lucina* sp.	×		
29	*Opis* sp.		×	
30	*Avellana cassis* d'Orb.	×		
31	*Pleurotomaria Tourtiae* Tsn.	×		
32	*Pleurotomaria Ewaldi* Tsn.	×		
33	*Turbo impar* Tsn.	×		
34	*Turbo tricinctus* Tsn.	×		
35	*Solarium* sp.	×		
36	*Trochus* sp.	×		
37	*Baculites baculoides* (Mant)	×	×	
38	*Hamites simplex* d'Orb.	×		
39	*Turrilites acutus* Passy	×		
40	*Turrilites costatus* Lam.	×		
41	*Schloenbachia varians* Sow.	×		
42	*Pachydiscus* cf. *peramplus*			×
43	*Actinocamax plenus* Blainv.		×	
44	*Nautilus* sp.	×		
45	*Oxyrhina Mantelli* Ag.	×	×	
46	*Lamna (Otodus) appendiculata* Ag.	×	×	
47	*Ptychodus mammillaris* Ag.		×	

A. Łuniewski.

Le Mésocrétacé sur le versant NE de Łysogóry et son substratum.

Mémoire présenté par M. J. Lewiński à la séance du 18 novembre 1935.

Résumé.

Les affleurements du Mésocrétacé se trouvent aux environs d'Iłża tout près du village de Chwałowice sur le versant *NE* du massif de Łysogóry.

Turonien. Deux niveau du Turonien sont à signaler, celui de *l'Inoceramus Lamarcki* et de *l'Inocer. labiatus*. Le premier est représenté par des marnes à silex gris avec *Inoc. Lamarcki* Park. et *Holaster suborbicularis* Defr. Le niveau suivant consiste de calcaires durs à rares gros grains de glauconie qui réposent sur des calcaires silifiés avec *Rhynchonella Cuvieri* d'Orb. Au dessous se trouvent des marnes sabloneuses, glauconifères renferment des nodules de phosphorites. Dans ces marnes se trouvent *Inoceramus labiatus* Schl. et *Holaster planus* Mant.

Cénomanien. Les mêmes marnes glauconifères faisant part du turonien inférieur se continuent vers le bas de la série, mais elles contiennent une faune différante qui indique le Cenomanien supérieur (voir table des éspèces). Les couches sousjacentes se composent de sables jaunâtres à minerai de fer chargés de phosphates de chaux. Elles ne contiennent que des tronçons d'arbres et des spongieres du genre *Plocoscyphia*. Elles appartiennent probablement au Cenomanien inférieur et au vraconien. Cette attribution est basé sur leur position stratigraphique et sur les caractères petrographique similaires aux couches de Rachów bien définies par Samsonowicz au point de vue stratigraphique.

Albien. Les sables si-dessus réposent sur des grés ferrigineux bruns avec des intercalations des bandes minces de sables qui recouvrent a leur tour les quarzites blancs. Cette série du Mésocrétacé n'enferme guère de restes organiques. En leurs atribuant l'âge albien nous avons du avoir recours une fois de plus aux conditions géologiques de Rachów où les quarzites analogues renferment une Faune *d'Hoplites* d'age Albien. Le substratum du Mésocrétacé des environs d'Iłża est formé par le

suprajurassique qui se compose de lumachelles et argiles marneuses à *Exogira virgula* et *Ostrea multiformis* aussi que de calcaires a grandes Nerinées (parmis les autres *Nerinea Gosée, N. piramidalis* et *subpiramidalis*). Suivant l'auteur les calcaires à nerinées ne forment que des bandes au milieu des lumachelles, et leur formation corresponde aux affaisements temporaires et locaux du fond de la mer.

Du Laboratoire de Géologie et de Paléontologie
à l'Université Józef Piłsudski à Varsovie

A. Swaryczewski.

Konoskopowe oznaczenie położeń binormalnych w krysztale trójskośnym bez oznaczania spółczynnika n_β.

Przedstawił T. Woyno dn. 18 listopada 1935 r.

La détermination conoscopique de la position des axes optiques dans un cristal triclinique sans connaissance de l'indice n_β.

Note présenté par M. T. Woyno à la séance du 18 novembre 1935.

Streszczenie.

Opisana przez Wülfinga metoda oznaczania położeń binormalnych w kryształach trójskośnych przy pomocy aparatu do pomiaru kąta osi optycznych wymaga znajomości spółczynnika n_β. Autor modyfikuje wspomnianą metodę tak, iż znajomość n_β staje się zbędną. Jako przykład podaje oznaczenia na krysztale związku $12\,WO_3 \,.\, Si\,O_2 \,.\, 2\,Zn\,O \,.\, 18\,H_2\,O$.

Oznaczenie wymaga dwóch rodzajów płytek płaskorównoległych i takich, aby na obu były widoczne obrazy interferencyjne obu binormalnych. Na każdej płytce mierzy się, stosując autokolimację, kąty między binormalnemi a normalnemi dwóch ścian. Rozwiązanie odpowiednich trójkątów sferycznych prowadzi do oznaczenia położeń binormalnych oraz ich kąta.

W. Sierpiński.

Pewne twierdzenie z ogólnej teorji mnogości i jego zastosowania.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 18 listopada 1935 r.

Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses applications.

Note présentée dans le séance du 18 novembre 1935.

Le but de cette Note est de démontrer un théorème de la théorie générale des ensembles et d'en déduire à l'aide de l'hypothèse du continu quelques conséquences.

Théorème. *Soit E un ensemble de puissance* $\aleph_1$ (formé d'éléments quelconques) *et soient Φ une famille de $\aleph_1$ sous-ensembles de E et G un groupe de $\aleph_1$ transformations biunivoques de l'ensemble E en lui-même*[1]*), tels que $f_i\,(i=1, 2, 3, \ldots)$ étant une suite infinie quelconque de transformations de G et $H_i\,(i=1, 2, \ldots)$ une suite infinie quelconque des ensembles de la famille Φ, l'ensemble $E-\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(H_i)$ est toujours indénombrable; dans ces conditions E contient un sous-ensemble indénombrable N qui n'admet avec tout ensemble de la famille Φ qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs et tel que pour toute transformation f de la famille F l'ensemble $f(N)-N$ est au plus dénombrable.*

Démonstration [2]).

Soient

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

tous les éléments (différents) de l'ensemble E,

[1]) c'est-à-dire si $f \in G$ et si f^* est la transformation inverse de f, on a $f^* \in G$, et si l'on a $f \in G$ et $g \in G$, on a aussi $fg \in G$.

[2]) Cf. S. Banach, *Fund. Math.* t. XIX, p. 10—14; W. Sierpiński *Fund. Math.* t. XIX, p. 24—27 et *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* Ser. II, vol. IV p. 43—46.

(2) $E_1, E_2, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$

tous les ensembles de la famille Φ et

(3) $f_1 = 1$[1]$, f_2, \ldots, f_\omega, f_{\omega+1}, \ldots, f_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$

tous les transformations du groupe G.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'éléments de E comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné compris entre 1 et Ω et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments p_ξ, où $\xi < \alpha$: leur ensemble P_α est au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$.

Or, désignons par T_α la somme de tous les ensembles

(4) $$f_{\xi_n}^* f_{\xi_{n-1}}^* \cdots f_{\xi_2}^* f_{\xi_1}^* (E_\xi),$$

où $\xi_1 \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $< \alpha$.

Comme $\alpha < \Omega$, l'ensemble de telles suites est évidemment au plus dénombrable. Or, les transformations (3) formant un groupe G, les ensembles (4) sont des transformations du groupe G des ensembles de la famille Φ, donc, d'après la propriété de cette famille, l'ensemble $E - T_\alpha$ est indénombrable et on a $E - (T_\alpha + P_\alpha) \neq 0$. Il existe donc dans la suite (1) des termes qui sont des éléments de l'ensemble $E - (T_\alpha + P_\alpha)$ et c'est le premier de ces termes que nous désignerons par p_α.

La suite transfinie

(5) $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$

se trouve ainsi définie par l'induction transfinie et il est évident que tous les termes de cette suite sont distincts.

Ceci établi, désignons par N l'ensemble formé de p_1 et de tous les éléments de la forme

(6) $$f_{\xi_1} f_{\xi_2} \cdots f_{\xi_n} (p_\alpha),$$

où $1 < \alpha < \Omega$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux $< \alpha$. Comme $f_1 = 1$, l'ensemble N ainsi

[1]) C'est-à-dire f_1 désigne la transformation identique: $f_1(p) = p$ pour $p \in E$.

défini contient évidemment tous les termes de la suite (5). Par conséquent il est indénombrable.

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque $<\Omega$. Je dis que l'ensemble NE_λ est au plus dénombrable. En effet, supposons que $p \neq p_1$ est un élément de l'ensemble NE_λ. Comme élément de N autre que p_1, l'élément p est de la forme (6). Or, je dis que $\alpha \leqslant \lambda$. Admettons, par contre, que $\alpha > \lambda$. D'après la définition de l'ensemble T_α on a pour $\alpha > \lambda$ (les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant $<\alpha$):

$$f_{\xi_n}^* f_{\xi_{n-1}}^* \cdots f_{\xi_2}^* f_{\xi_1}^* (E_\lambda) \subset T_\alpha \tag{7}$$

or, d'après $p \in E_\lambda$, p étant de la forme (6), on a:

$$f_{\xi_1} f_{\xi_2} \cdots f_{\xi_n}(p_\alpha) \in E_\lambda,$$

d'où

$$p_\alpha \in f_{\xi_n}^* f_{\xi_{n-1}}^* \cdots f_{\xi_1}^* (E_\lambda),$$

donc, d'après (7)

$$p_\alpha \in T_\alpha,$$

contrairement à la définition de l'élément p_α.

Donc, si $p \neq p_1$ est un élément de l'ensemble NE_λ, p est de la forme (6), où $\alpha \leqslant \lambda$. L'ensemble de tous les éléments (6), où $\alpha \leqslant \lambda$ étant, comme on voit sans peine, au plus dénombrable, il en résulte que l'ensemble NE_λ est au plus dénombrable.

L'ensemble N n'admet donc avec tout ensemble de la famille Φ qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

Soit maintenant f une transformation donnée quelconque appartenant au groupe G. Il existe donc un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $f = f_\mu$.

Etant donné un élément arbitraire $p \in f_\mu(N) - N$, on a selon la définition de N

$$p = f_\mu f_{\xi_1} f_{\xi_2} \cdots f_{\xi_n}(p_\alpha) \tag{8}$$

et, d'autre part, $\alpha \leqslant \mu$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à N.

Il est ainsi démontré que chaque élément p de l'ensemble $f_\mu(N) - N$ est de la forme (8), où $\alpha \leqslant \mu$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $<\alpha$. Or, l'ensemble de tous les éléments p de ce genre pour μ fixe est évidemment au plus dénombrable. L'ensemble $f(N)-N=f_\mu(N)-N$ est donc au plus dénombrable.

L'ensemble N satisfait donc aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Prenons comme E l'ensemble de tous les nombres réels, comme Φ la famille de tous les ensembles linéaires fermés non denses et comme G le groupe de toutes les transformations isométriques de la droite en elle-même, c'est-à-dire de toutes les translations (le long de la droite) et de toutes les rotations dans E (c'est-à-dire des transformations symétriques par rapport à un point quelconque de la droite). Les ensembles E, Φ et G satisfont évidemment (si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) aux conditions de notre théorème. Il existe donc un ensemble N remplissant les conditions de notre théorème. Cet ensemble N n'admet donc avec tout ensemble linéaire fermé non dense, donc aussi avec tout ensemble linéaire non dense qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs: il ne contient donc aucun sous-ensemble non dense indénombrable, c'est-à-dire est un ensemble de M. Lusin [1]). Nous avons ainsi ce

Corollaire 1: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble (linéaire) de Lusin, tel que chaque transformation isométrique de la droite en elle-même le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

Tout ensemble de Lusin jouissant de la propriété C [2]), il résulte tout de suite de notre Corollaire 1 ce

Corollaire 2: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété C et tel que chaque transformation isométrique de la droite en elle-même le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points* [3]).

---

[1]) Voir mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV), Warszawa 1934, p. 37.

[2]) voir mon livre cité, p. 39. (On dit qu'un ensemble linéaire jouit de la propriété C si, pour chaque suite infinie a_1, a_2, a_3, ... de nombres réels positifs il peut être couvert par une suite infinie d'intervalles d_1, d_2, ... tels que la longueur de l'intervalle d_n est a_n pour $n=1, 2, \ldots$).

[3]) Cf. mon Théorème I dans *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* Ser. II, vol. IV, p. 43.

D'autre part, en admettant encore que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et en conservant les définitions précédentes de l'ensemble E et du groupe G, prenons comme Φ la famille de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle. Les ensembles E, Φ et G satisfont aux conditions de notre théorème (si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$). Il existe donc un ensemble N remplissant les conditions de notre théorème. Cet ensemble N n'admet donc avec tout ensemble linéaire G_δ de mesure nulle, donc aussi avec tout ensemble linéaire de mesure nulle qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs: il ne contient donc aucun ensemble indénombrable de mesure nulle, c'est-à-dire jouit de la propriété S[1]). On a ainsi ce

Corollaire 3: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété* S, *tel que chaque transformation isométrique de la droite en elle-même le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

Tout ensemble jouissant de la propriété S étant toujours de 1re catégorie[2]), il résulte tout de suite de notre Corollaire 3 ce

Corollaire 4: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire indénombrable, toujours de 1re catégorie et tel que chaque transformation isométrique de la droite en elle-même le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points*[3]).

Or, le problème suivant reste ouvert:

Existe-t-il un ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété C et toujours de 1re catégorie[4]), tel que chaque transformation isométrique de la droite en elle-même le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points?

---

[1]) V. mon livre cité, p. 81.

[2]) Voir S. Saks, t. XI, p. 277; v. aussi mon livre cité, p. 85.

[3]) Cf. mon Théorème II dans les *Ann Pisa* Ser. II, vol. IV, p. 46.

[4]) L'existence des ensembles linéaires indénombrables jouissants de la propriété C et toujours de 1re catégorie peut être de duite de l'hypothèse du continu: voir mon livre cité, p. 68 (Proposition C_{16}).

Posiedzenie

z dnia 9 grudnia 1935 r.

I. E. Highberg i A. E. Taylor.

O niezależnym układzie postulatów dla abstrakcyjnych przestrzeni linjowych.

Przedstawił S. Saks dn. 9 grudnia 1935 r.

Streszczenie.

Autorzy ustalają pewien układ postulatów charakteryzujący ogólne przestrzenie linjowe. Praca zawiera dowód niezależności postulatów oraz dowód równoważności przyjętego układu z innemi układami traktowanemi w literaturze.

I. E. Highberg and A. E. Taylor.

An Independent Set of Postulates for Abstract Linear Spaces.

Presented by S. Saks at the meeting of December 9, 1935.

Postulates for linear spaces have been given by Banach, Fréchet and others[1]). This paper will be concerned with an independent set. Since equality so often enters as a defined relation other than identity, it seems desirable to incorporate it into the system on the same footing as the other primitive ideas. The situation in *normed* vector spaces is essentially different. There the notion of equality is intimately associated with that

---

[1]) Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, (1932) p. 26; Fréchet, *Les Espaces Abstraits*, (1928) p. 125—126.

of the norm, and, in fact, it is possible to regard equality as a defined, rather than a postulated, relation. This subject will be taken up in a later paper.

We shall be concerned in the following with a system consisting of a set of undefined elements S, a number system A which may be either the real numbers R, or the complex numbers C, two undefined functions, „$+$", „$\cdot$", and one undefined relation, „$=$". By a function, say $f(x, y)$, we mean an ordering which makes correspond to every pair x, y in a certain domain a unique third element. The function always stands for its value — thus $x_1 + y_1 = y_1 + x_1$ means that the element z_1 which is ordered to x_1, y_1 by the function $+$, bears the relation of equality to the element z_2 which is ordered to y_1, x_1 by the function $+$.

Equality is a relation which is defined for every pair of elements in S, and is or is not satisfied; in the former case we write $x = y$, in the latter case $x \neq y$.

We take for granted all the ideas, theorems, etc., in A, and in particular we regard equality in A as identity. This makes valid the substitution of any element in A for its equal, as for example, $0 \cdot x = (1 - 1) \cdot x$. It is evident that our postulates are for this reason incomplete in a certain sense, since we do not postulate the properties of A also.

1. The Postulates.

Definition. The universe of discourse composed of the class S, with its functions and relation, and the number system A, will be called a linear vector space, if it satisfies the following postulates 1—12.

1. $\exists x . x \in S$.
2. $x, y, z \in S . x = y . y = z : \supset . x = z$.
3. $x, y \in S . \supset . (x + y) \in S$.
4. $x, y, z, (x + y), (y + z), (x + y) + z, x + (y + z) \in S . \supset . (x + y) + z = x + (y + z)$.
5. $x, y, (x + y), (y + x) \in S . \supset . x + y = y + x$.
6. $a \in A . x \in S : \supset . a \cdot x \in S$.
7. $x, 1 \cdot x \in S . \supset . x = 1 \cdot x$.

8. $a, b \in A . x, y, a \cdot x, b \cdot x, (a \cdot x + b \cdot x), (a+b) \cdot x \in S :$
$\supset . (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x .$

9. $a, b \in A . x, y, x+y, ab \cdot (x+y), b \cdot x, b \cdot y, a \cdot (b \cdot x),$
$a \cdot (b \cdot y), a \cdot (b \cdot x) + a \cdot (b \cdot y) \in S : \supset . ab \cdot (x+y) =$
$a \cdot (b \cdot x) + a \cdot (b \cdot y) .$

10. $x, y, z, x+z, y+z \in S . x = y : \supset . y+z = x+z .$

11. $x, y, z, x+z, y+z \in S . x+z = y+z : \supset . x = y .$

12. $a \in A . x, y, a \cdot x, a \cdot y \in S . x = y : \supset . a \cdot x = a \cdot y .$

2. Consequences of the Postulates.

In this paragraph we shall prove that the postulates define a linear space, as that term is used by Banach[1]). To do this, we must establish the following relations:

$$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$$
$$a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$$

and we must prove that the abstract relation, $=$, is an equivalence relation.

Theorem 1. $x, y \in S . x = y : \supset . y = x .$

The proof is immediate, by Postulates 3, 10, 11.

Theorem 2. $x \in S . \supset . x = x .$

This follows at once from Postulates 6, 7, 2 and Theo. 1.

Theorem 3. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S . x_1 = y_1 . x_2 = y_2 : \supset . x_1 + x_2 = y_1 + y_2 .$

Proof:	$y_1 + y_2 = x_1 + y_2$	by 3, 10
	$y_2 + x_1 = x_2 + x_1$	by 3, 10
	$x_1 + y_2 = y_2 + x_1$	by 5
	$x_2 + x_1 = x_1 + x_2$	by 5
Therefore	$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$	by 2, Theo. 1.

Theorem 4. $a \in A . x, y \in S : \supset . a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y .$

Proof: Setting $a = 1$, and replacing b by a in Postulate 9, we

have	$a \cdot (x+y) = 1 \cdot (a \cdot x) + 1 \cdot (a \cdot y)$	
but	$1 \cdot (a \cdot x) = a \cdot x, \quad 1 \cdot (a \cdot y) = a \cdot y$	by 7, Theo. 1
	$1 \cdot (a \cdot x) + 1 \cdot (a \cdot y) = a \cdot x + a \cdot y$	by Theo. 3
	$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$	by 2.

---

1) Banach, loc. cit. p. 26.

In order to prove that $a\cdot(b\cdot x)=ab\cdot x$ we must establish several lemmas.

Lemma 1. $x\in S.\supset.x+0\cdot x=x.$

Proof: $1\cdot x=1\cdot x+0\cdot x$ by 8

$x=1\cdot x+0\cdot x$ by 7, 2

$x=x+0\cdot x$ by 7, 10, 2

$x+0\cdot x=x$ by Theo. 1.

Lemma 2. $x,\ y,\ z\in S.z+y=z:\supset.y=0\cdot x.$

Proof: $x=x+0\cdot x$ by Lemma 1, Theo. 1

$y+z=z$ by 5, 2, Theo. 1

$(y+z)+x=z+(x+0\cdot x)$ by Theo. 3

$y+(z+x)=(z+x)+0\cdot x$ by 4, 2, Theo. 1

$y+(z+x)=0\cdot x+(z+x)$ by 5, 2

$y=0\cdot x$ by 11.

Lemma 3. $x,\ y\in S.\supset.y+0\cdot x=y.$

Proof: $0\cdot x+x=x$ by 5, 2, Lemma 1

$(y+0\cdot x)+x=y+x$ by 4, 2, Theo. 3

$y+0\cdot x=y$ by 11.

Theorem 5. $a,\ b\in A.x\in S.\supset.ab\cdot x=a\cdot(b\cdot x).$

Proof: $x+0\cdot x=x$ by Lemma 1

$b\cdot(x+0\cdot x)=b\cdot x$ by 12

$b\cdot x+b\cdot(0\cdot x)=b\cdot x$ by Theo. 4

$b\cdot(0\cdot x)=0\cdot x$ by Lemma 2

$a\cdot(b\cdot(0\cdot x))=a\cdot(0\cdot x)$ by 12

$=0\cdot x$ by previous step

$ab\cdot(x+0\cdot x)=ab\cdot x$ by 12

$ab\cdot x=a\cdot(b\cdot x)+a\cdot(b\cdot(0\cdot x))$ by 9, 2

$ab\cdot x=a\cdot(b\cdot x)+0\cdot x$ by Theo. 3

$=a\cdot(b\cdot x)$ by Lemma 3.

We have now proved that Banach's postulates are deducible from our set; conversely, our set is deducible from his, if the usual properties of equality are taken for granted. This is because Postulate 9 is equivalent to Theorems 4 and 5 together. Due to the fact that our equality is not an identity, we cannot assert that there exists a unique zero element, but we can show that $0 \cdot x = 0 \cdot y = 0 \cdot z = \cdots$, and hence we can replace all these elements by an element which stands for any one in the class $(0 \cdot x, 0 \cdot y, 0 \cdot z, \ldots)$. That is, our equality sign performs a division into classes, and if we prefer we can deal with the identity of classes, as is done with the residue classes of algebraic theory.

3. Independence of the Postulates.

In this paragraph we present twelve examples of systems, each of which satisfies all of the postulates but one, thereby proving that postulate independent of the others. The details of checking the postulates for each system are simple, and will, for the most part, be left to the reader.

Example 1. Les S be a null set. Then the remaining postulates are satisfied vacuously.

Example 2. Let S be the class of complex number pairs $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$. We define

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$a \cdot x = (a \cdot x, a \cdot y)$$
$$x = y \quad \text{if either} \quad x_1 = y_1 \quad \text{or} \quad x_2 = y_2 .$$

Then equality is not transitive.

Example 3. Let m be a positive integer, and let S be the class of infinite one-rowed matrices of complex numbers, in which at most m elements are different from zero. If $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, etc. we define

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$
$$a \cdot x = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \ldots)$$
$$x = y \quad \text{if and only if} \quad x_i = y_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Then S is not closed under addition.

Example 4. Let S consist of elements of the form $c e_i$ where $c \in A$ and e_i is a type of vector, $i = 1, 2, 3$. If $x \sim c e_i$ and $y \sim d e_j$, we say $x = y$ if $c = d$ and $i = j$. If $x \sim c e_i$ we write $a \cdot x \sim (a c) e_i$, and we write $x + y \sim (c + d) e_k$ where $e_k = e_i + e_j$, and where $e_i + e_j$ is determined from the following matrix:

$e_i + e_j = e_j + e_i$, $e_i + e_i = e_i$, $e_1 + e_2 = e_3$, $e_1 + e_3 = e_2$ and $e_2 + e_3 = e_1$. The associativity postulate fails for $(e_1 + e_1) + e_2 \neq e_1 + (e_1 + e_2)$.

Example 5. Let S be a class of elements x of the same form as in the preceding example, except that $i = 1, 2$. Let the rule of addition of the vectors be as follows: $e_i + e_j = e_i$. Then $e_i + e_j \neq e_j + e_i$. That the system is associative may be verified by working out all the combinations. All the other postulates are satisfied.

Example 6. If A is R, let S be the rational numbers; if A is C, let S be the class of complex numbers $r_1 + i r_2$ where r_1, r_2 are rational. Define $+$, $\cdot$, $=$, as usual. Then S is not closed under multiplication.

Example 7. Let S be the complex numbers. Let $a \cdot x$ always be 0, and let the other definitions be as usual. Then $x \neq 1 \cdot x$, and all the other postulates are satisfied.

Example 8. Let S be the complex numbers. Let $a \cdot x$ always be x. Then $2 \cdot x \neq x + x$.

Example 9. We shall give two examples for this — one for the real case, the other for the complex case. Let S be the complex numbers.

1°. Let A be C. Define $a \cdot x$ as $R(a) \cdot x$ where $R(a)$ is the real part of a. Then $ab \cdot (x + y) \neq a \cdot (b \cdot x) + a \cdot (b \cdot y)$, since $R(ab) \neq R(a) R(b)$.

2°. Let A be R. Now define $a \cdot x$ as $f(a) \cdot x$ where $f(a)$ is one of Hamel's discontinuous solutions of the functional equation

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ [1]}.$$

If in Hamel's base we take $a = 1$, $b = 2$, and choose $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2$, then $f(p\sqrt{7}) = p\sqrt{7}$. However it is not true in general that $f(ab) = f(a) f(b)$. For example, $f(1 + \sqrt{2}) f(1 + \sqrt{2}) = 9$, but $f((1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})) = 7$.

Example 10. Let S consist of the one-rowed matrices (x_1, x_2) where x_1 is complex and x_2 is real and $x_2 \geqq 0$. Let addition

---

[1] G. Hamel, Math. Annalen, 60 (1905), p. 459. We are indebted to Prof. H. Bateman for calling this paper to our attention.

be defined as ordinarily, multiplication $a \cdot (x_1, x_2) \sim (a \cdot x_1, x_2)$, and equality $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ if $x_1 = y_1$ and $x_2 \leqslant y_2$.

Example 11. Let S consist of the same class as in example 5, except that $e_i + e_j = e_2$ if i, j are not both 1, $e_1 + e_1 = e_1$.

Example 12. Let S be the complex numbers. Let addition and multiplication by elements of A be defined as usual, and equality as, $x = y$ if x and y differ by a rational number.

California Institute of Technology.

A. E. Taylor i I. E. Highberg.

O układzie postulatów dla przestrzeni wektorowych unormowanych.

Przedstawił S. Saks dn. 9 grudnia 1935 r.

Streszczenie.

Praca ta, w której autorowie ustalają i dyskutują pewne układy postulatów dla przestrzeni linjowych unormowanych (rzeczywistych i zespolonych), uzupełnia poprzednią pracę tych autorów, poświęconą ogólnym przestrzeniom linjowym, niekoniecznie unormowanym. Autorowie udawadniają niezależność postulatów oraz równoważność traktowanych układów. Wyprowadzone są również elementarne własności działań arytmetycznych w rozważanych przestrzeniach.

A. E. Taylor and I. E. Highberg.

On Postulate Systems for Normed Vector Spaces.

Presented by S. Saks at the meeting of December 9, 1935.

In a previous paper we gave an independent set of postulates for abstract linear spaces [1]). In that postulate system the relation of equality (denoted by $=$) entered as a primitive notion, and certain properties were ascribed to it in the postulates.

[1]) I. E. Highberg and A. E. Taylor, *An Independent Set of Postulates for Abstract Linear Spaces*, this vol., pp. 136—142.

The present paper deals with postulate systems for normed vector spaces [1]), and it contains, essentially, four systems of postulates — two for complex vector spaces, and two for real spaces. It is worthy of note that the postulate systems for real spaces contain one less postulate than those for complex spaces.

A feature of especial interest in the paper is that in two of the postulate systems the equality relation is no longer a primitive notion, but is introduced as a relation defined in terms of the three undefined functions of the system. In other words, the equality relation, as an undefined idea, is not independent of the other undefined ideas of the system [2]). We have, accordingly, given postulate systems of two kinds — those in which equality is undefined, and those in which it is defined. Each system is independent.

1. The Postulates when Equality is Undefined.

We shall be concerned with a system consisting of a class K of undefined elements, a number system A which may be either the real numbers R or the complex numbers C, three undefined functions called *addition, scalar multiplication,* and *norm,* and one undefined relation called *equality*. The functions are denoted by $+$, $\cdot$, $\| \|$, respectively, while equality is denoted by $=$. By a function we mean a single-valued function, and the function stands for its value. Equality is a relation defined for every pair of elements in K, and given any pair of elements x, y from K, the relation $x = y$ is either true or false. In the latter case we write $x \neq y$. A is regarded as a known system, so that we do not postulate its properties here.

Definition. The universe of discourse composed of the class K with its functions and relation, and the number system A, will be called a complex linear vector space if A is C and if postulates 1—12 are satisfied. It will be called a *real linear vector space* if A is R and if Postulates 1—10 and 12 are satisfied.

---

[1]) S. Banach, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), pp. 133—181 and the papers of Fréchet. We have followed a set of postulates given by Prof. A. D. Michal in his 1933 lectures at the California Institute of Technology, and in which equality was treated.

[2]) For a discussion of questions of this sort, see J. C. C. Mc Kinsey, Bulletin of the American Math. Soc., 41 (1935), pp. 291—297.

1. $\exists x \cdot x \in K$.
2. $x, y \in K . \supset . (x+y) \in K$.
3. $a \in A . x \in K : \supset . a \cdot x \in K$.
4. $x \in K . \supset . \|x\| \in R$.
5. $a \in A . x, a \cdot x \in K . \|x\|, \|a \cdot x\| \in R : \supset . \|a \cdot x\| = |a| \, \|x\|$.
6. $x, y, (x+y) \in K . \|x\|, \|y\|, \|x+y\| \in R : \supset .$
$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
7. $x, y \in K . \|x\|, \|y\| \in R . x = y : \supset . \|x\| = \|y\|$.
8. $x, y, z, (y+z), (z+x) \in K . x = y : \supset . y + z = z + x$.
9. $x, y, z, (x+y), (y+z), (x+(y+z)), ((x+y)+z) \in K$.
$\supset . x + (y+z) = (x+y) + z$.
10. $a, b \in A . x, a \cdot x, b \cdot x, (a+b) \cdot x, (a \cdot x + b \cdot x) \in K :$
$\supset . (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$.
11. $a, b \in C . x, y, (x+y), b \cdot x, a \cdot (b \cdot x), ab \cdot y,$
$ab \cdot (x+y), (a \cdot (b \cdot x) + ab \cdot y) \in K : \supset . ab \cdot (x+y) =$
$a \cdot (b \cdot x) + ab \cdot y$.
12. $x, y, -1 \cdot y, (x + -1 \cdot y) \in K . \|x + -1 \cdot y\| \in R$.
$\|x + -1 \cdot y\| = 0 : \supset . x = y$.

2. Consequences of the Postulates.

In this paragraph we shall show that the postulates define a system with the usual vector space properties. The complex case will be treated first, using Postulate 11. In the case that A is R we deduce 11 as a theorem.

Theorem 1. $x \in K . \supset . 1 \cdot x = x$.

Proof: $0 \cdot x = 1 \cdot x + -1 \cdot x$ by 2, 3, 10

$0 = \|0 \cdot x\| = \|1 \cdot x + -1 \cdot x\|$ by 4, 5, 7

$1 \cdot x = x$ by 12.

Theorem 2. $x \in K . \supset . x = x$.

Proof: $0 \cdot x = -1 \cdot x + 1 \cdot x$ by 2, 3, 10

$x + -1 \cdot x = -1 \cdot x + 1 \cdot x$ by 8, Theo. 1

$\|x + -1 \cdot x\| = \|-1 \cdot x + 1 \cdot x\| = 0$ by 4, 7, 5

$x = x$ by 12.

Theorem 3. $x, y \in K . \supset . x + y = y + x$.

Proof: Obvious, by 8, Theo. 2,

Theorem 4. $x, y \in K . x = y : \supset . y = x$.

Proof:
$y + -1 \cdot x = -1 \cdot x + x$ by 2, 3, 8
$-1 \cdot x + x = x + -1 \cdot x$ by Theo. 3
$\| y + -1 \cdot x \| = \| x + -1 \cdot x \|$ by 4, 7
$\| x + -1 \cdot x \| = 0$ as in Theo. 2
$y = x$ by 12.

Theorem 5. $x, y \in K . x = y : \supset . \| x + -1 \cdot y \| = 0$.

Proof:
$y + -1 \cdot y = -1 \cdot y + x$ by 2, 3, 8
$-1 \cdot y + x = x + -1 \cdot y$ by Theo. 3
$\| y + -1 \cdot y \| = 0$ as in Theo. 2
$\| x + -1 \cdot y \| = 0$ by 7.

Theorem 6. $x, y, z \in K . x = y . y = z : \supset . x = z$.

Proof:
$y + -1 \cdot z = -1 \cdot z + x$ by 2, 3, 8
$-1 \cdot z + x = x + -1 \cdot z$ by Theo. 3
$\| x + -1 \cdot z \| = \| y + -1 \cdot z \| = 0$ by 4, 7, Theo. 5
$x = z$ by 12.

Theorem 7. $x, y, u, v \in K . x = y . u = v : \supset . x + u = y + v$.

Proof:
$x + u = u + y$ by 2, 8, Theo. 4
$u + y = y + v$ by 2, 8, Theo. 4
$x + u = y + v$ by Theo. 6.

Theorem 8. $x \in K . \supset . \| x \| \geqslant 0$.

Proof:
$0 \cdot x = 1 \cdot x + -1 \cdot x$ by 2, 3, 10
$0 = \| 0 \cdot x \| = \| 1 \cdot x + -1 \cdot x \| \leqslant 2 \| x \|$
by 4, 5, 6, 7
$0 \leqslant \| x \|$.

Theorem 9. $x \in K . \| x \| = 0 : \supset . x = 0 \cdot x$.

Proof:
$-1 \cdot x = 0 \cdot x + -1 \cdot x$ by 2, 3, 10
$\| -1 \cdot x \| = \| x \| = \| 0 \cdot x + -1 \cdot x \|$ by 4, 5, 7
$x = 0 \cdot x$ by hypoth., 12, Theo. 4.

Theorem 10. $x, y \in K . \supset . 0 \cdot x + y = y$.

Conversely, $x, y \in K . x + y = y : \supset . x = 0 \cdot x$.

Proof: We first prove that $0 \cdot x + y = y$.
$0 \cdot x + (y + -1 \cdot y) = (0 \cdot x + y) + -1 \cdot y$ by 2, 3, 9

$0 \leqslant \| (0 \cdot x + y) + -1 \cdot y \| \leqslant \| 0 \cdot x \| + \| y + -1 \cdot y \| = 0$

$0 \cdot x + y = y$ by Theo. 8, Theo. 5, 12.

Now let $x + y = y$. Then

$x + (y + -1 \cdot y) = y + -1 \cdot y$ by 9, Theo. 7

$y + -1 \cdot y = 0 \cdot (y + -1 \cdot y)$ by Theo. 5, Theo. 9

$x = y + -1 \cdot y = 0 \cdot (y + -1 . y)$ by the first part of the theorem

$x + -1 \cdot (0 \cdot x) = 0 \cdot (y + -1 \cdot y) + -1 \cdot (0 \cdot x)$ by Theo. 7

$\| x + -1 \cdot (0 \cdot x) \| = 0$ by 5, 6, 7

$x = 0 \cdot x$ by 12.

This theorem enables us to assert, not that the „zero element" in K is unique, but that all zero elements are equal, for we easily show that $0 \cdot x = 0 \cdot y = 0 \cdot z = \cdots$. When equality is not identity uniqueness is always replaced by uniqueness to within equal elements.

What we have done so far has not required the use of Postulate 11, and is therefore valid for our treatment of the real case. Three further theorems must be proved, and we shall do this first for the complex case.

Theorem 11. $a \in C . x , y \in K : \supset . a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y .$

Proof: Interchanging a and b in Postulate 11, and setting $b = 1$ we obtain the relation

$$a \cdot (x + y) = 1 \cdot (a \cdot x) + a \cdot y$$

and the result follows.

Lemma. $a \in C . x \in K : \supset . a \cdot (-1 \cdot x) = -1 \cdot (a \cdot x) .$

Proof: $-1 \cdot (a \cdot x) + -1 \cdot (a \cdot (-1 \cdot x)) = -1 \cdot (a \cdot x + a \cdot (-1 \cdot x))$ by Theo. 11

$a \cdot (x + -1 \cdot x) = a \cdot x + a \cdot (-1 \cdot x)$ by Theo. 11

$\| -1 \cdot (a \cdot x) + -1 \cdot (a \cdot (-1 \cdot x)) \| = | a | \, \| x + -1 \cdot x \| = 0$ by Theo. 5

$a \cdot (-1 \cdot x) = -1 \cdot (a \cdot x)$ by 12.

Theorem 12. $a \in C . x , y \in K . x = y : \supset . a \cdot x = a \cdot y .$

Proof: $a \cdot (x + -1 \cdot y) = a \cdot x + a \cdot (-1 \cdot y)$ by Theo. 11

$a \cdot (x + -1 \cdot y) = a \cdot x + -1 \cdot (a \cdot y)$ by Theo. 7, Lemma

$0 = |a| \, \| x + -1 \cdot y \| = \| a \cdot x + -1 \cdot (a \cdot y) \|$ by Theo. 5

$a \cdot x = a \cdot y$ by 12.

Theorem 13. $a, b \in C . x \in K : \supset . ab \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.

Proof: $ab \cdot (x + 0 \cdot x) = a \cdot (b \cdot x) + ab \cdot (0 \cdot x)$ by 11

$ab \cdot (x + 0 \cdot x) = ab \cdot x$ by Theo. 10, Theo. 12

$\| ab \cdot (0 \cdot x) \| = 0$ by 5

$a \cdot (b \cdot x) + ab \cdot (0 \cdot x) = a \cdot (b \cdot x)$ by Theo. 9, Theo. 10

$ab \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ by Theo. 4, Theo. 6.

These last theorems will now be *deduced,* in the real case, without the use of Postulate 11. A number of lemmas are required.

Lemma 1. $x, y, z \in K . x + z = y + z : \supset . x = y$.

Proof: $z + -1 \cdot z = 0 \cdot (z + -1 \cdot z)$ by Theo. 5, Theo. 9

$(x + z) + -1 \cdot z = (y + z) + -1 \cdot z$ by Theo. 7

$(x + z) + -1 \cdot z = x + (z + -1 \cdot z)$ by 9

$= x + 0 \cdot (z + -1 \cdot z)$ by Theo. 7

$= x$ by Theo. 3, 10.

Similarly $(y + z) + -1 \cdot z = y$.

Therefore $x = y$ by Theo. 4, Theo. 6.

Lemma 2. $x, y \in K . n$ an integer $> 0 : \supset . n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y$.

Proof: $1 \cdot (x + y) = (x + y) = 1 \cdot x + 1 \cdot y$ by Theorems 1, 4, 7.

The result then follows by induction, using 9, 10, Theorems 2, 7, 3.

Lemma 3. $b \in R . x \in K . n$ an integer $> 0 : \supset . n \cdot (b \cdot x) = nb \cdot x$.

Proof: $n \cdot (b \cdot x) = 1 \cdot (b \cdot x) + \cdots + 1 \cdot (b \cdot x)$ by 9, 10, induction

$= b \cdot x + \cdots + b \cdot x$ by Theo. 7, induction

$n \cdot (b \cdot x) = nb \cdot x$ by 10.

Lemma 4. $b \in R . x \in K : \supset . -b \cdot x = -1 \cdot (b \cdot x)$.

Proof: $-1 \cdot (b \cdot x) + b \cdot x = -1 \cdot (b \cdot x) + 1 \cdot (b \cdot x) = 0 \cdot (b \cdot x)$ by 10

$-b \cdot x + b \cdot x = 0 \cdot x = 0 \cdot (b \cdot x)$ by 10

$-b \cdot x = -1 \cdot (b \cdot x)$ by Lemma 1.

Lemma 5. $x, y \in K . \supset . -1 \cdot (x + y) = -1 \cdot x + -1 \cdot y$.

Proof: $-1 \cdot (x + y) + 1 \cdot (x + y) = 0 \cdot (x + y)$ by 10

$(-1 \cdot x + -1 \cdot y) + 1 \cdot (x + y) = -1 \cdot x + -1 \cdot y + 1 \cdot x + 1 \cdot y$ by 9, Lemma 2

$(-1 \cdot x + -1 \cdot y) + 1 \cdot (x + y) = 0 \cdot x + 0 \cdot y$ by 10, Theo. 3.

But $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \cdot (x + y)$ as is easily seen

$-1 \cdot (x + y) = -1 \cdot x + -1 \cdot y$ by Lemma 1.

Lemma 6. $x \in K$. n an integer $> 0 : \supset . n \cdot (-1 \cdot x) = -1 \cdot (n \cdot x)$.

Proof: $-1 \cdot (n \cdot x) + -1 \cdot (n \cdot (-1 \cdot x)) = -1 \cdot (n \cdot x + n \cdot (-1 \cdot x))$ by Lemma 5

$n \cdot x + n \cdot (-1 \cdot x) = n \cdot (x + -1 \cdot x)$ by Lemma 2

$\| -1 \cdot (n \cdot x) + -1 \cdot (n \cdot (-1 \cdot x)) \| = n \| x + -1 \cdot x \| = 0$ by Theo. 5

$-1 \cdot (n \cdot x) = n \cdot (-1 \cdot x)$ by 12.

Lemma 7. $x, y \in K . x = y . \supset . -1 \cdot x = -1 \cdot y$.

Proof: $-1 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x$ by 10

$0 \cdot y = -1 \cdot y + 1 \cdot y = -1 \cdot y + y$ by Theo. 1

$0 \cdot y = -1 \cdot y + 1 \cdot y = -1 \cdot y + x = -1 \cdot y + 1 \cdot x$.

But $0 \cdot y = 0 \cdot x$.

Therefore $-1 \cdot y = -1 \cdot x$. by Lemma 1

Lemma 8. $x, y \in K . n$ a positive integer $: \supset . n \cdot x = n \cdot y$.

Proof: $n \cdot x + -1 \cdot (n \cdot y) = n \cdot x + n \cdot (-1 \cdot y)$ by Lemma 6

$= n \cdot (x + -1 \cdot y)$ by Lemma 2

$\| n \cdot x + -1 \cdot (n \cdot y) \| = n \| x + -1 \cdot y \| = 0$ by Theo. 5

$n \cdot x = n \cdot y$ by 12.

Lemma 9. $b \in R . x \in K . n$ a positive integer:

$\supset . -n \cdot (b \cdot x) = -nb \cdot x$.

Proof: $-n \cdot (b \cdot x) = -1 \cdot (n \cdot (b \cdot x))$ by Lemma 4

$= -1 \cdot (nb \cdot x)$ by Lemmas 3, 7

$= -nb \cdot x$ by Lemma 4.

Lemma 10. $x, y \in K . n$ a positive integer $: \supset$
$. -n \cdot (x+y) = -n \cdot x + -n \cdot y .$

Proof: $\quad -n \cdot (x+y) = -1 \cdot (n \cdot (x+y))$ by Lemma 4
$= -1 \cdot (n \cdot x + n \cdot y)$ by Lemmas 2, 7
$= -1 \cdot (n \cdot x) + -1 \cdot (n \cdot y)$ by Lemma 5
$= -n \cdot x + -n \cdot y$ by Lemma 4.

Lemma 11. $b \in R . x \in K . r$ a rational number $. \supset . r \cdot (b \cdot x) = r b \cdot x .$

Proof: The statement is obvious if $r = 0$. Hence let $r = n/m$, where m and n are integers, $\neq 0$. Then

$m \cdot (r \cdot (b \cdot x) + -1 \cdot (r b \cdot x)) = m \cdot (r \cdot (b \cdot x)) +$
$m \cdot (-1 \cdot (r b \cdot x))$ by Lemma 2 or 10
$= n \cdot (b \cdot x) + -m \cdot (r b \cdot x)$ by Lemma 3 or 9
$m \cdot (r \cdot (b \cdot x) + -1 \cdot (r b \cdot x)) = n b \cdot x + -n b \cdot x$
by Lemma 3 or 9
$= 0 \cdot x$ by 10.

Taking norms, we conclude that $r \cdot (b \cdot x) = r b \cdot x$, by 12.

Lemma 12. $x, y \in K . r$ a rational number $: \supset . r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y .$

Proof: We dismiss the case that $r = 0$, and let $r = n/m$ as in the previous lemma. Then

$m \cdot (r \cdot (x+y) + -1 \cdot (r \cdot x + r \cdot y)) = m \cdot (r \cdot (x+y)) +$
$m \cdot (-1 \cdot (r \cdot x + r \cdot y))$ by Lemma 2 or 10
$= n \cdot (x+y) + -m \cdot (r \cdot x + r \cdot y)$ by Lemma 3 or 9
$= n \cdot (x+y) + (-m \cdot (r \cdot x) + -m \cdot (r \cdot y))$
by Lemma 2 or 10
$= n \cdot (x+y) + (-n \cdot x + -n \cdot y)$ by Lemma 3 or 9
$= 0 \cdot (x+y)$ by 10 and Lemma 2 or 10.

Taking norms on both sides we have the desired result.

Theorem 14. $a, b \in R . x \in K : \supset . a \cdot (b \cdot x) = a b \cdot x .$

Proof: We may suppose that a is irrational, and let $\{a_n\}$ be a sequence of rationals converging to a. Then

$a_n \cdot (b \cdot x) = (a_n b) \cdot x$ by Lemma 11
$a \cdot (b \cdot x) + -1 \cdot (a b \cdot x) = a \cdot (b \cdot x) + -1 \cdot (a b \cdot x) +$
$a_n b \cdot x + -1 \cdot (a_n \cdot (b \cdot x))$ by Theo. 5, Theo. 10

$$= a\cdot(b\cdot x) + - a_n\cdot(b\cdot x) + a_n b\cdot x + - a b\cdot x$$
by Lemma 4

$$= (a - a_n)\cdot(b\cdot x) + (a_n b - a b)\cdot x \quad \text{by } 10$$

$$0 \leqslant \| a\cdot(b\cdot x) + -1\cdot(a b\cdot x)\| \leqslant 2|a_n - a||b|\|x\|.$$

Letting $n \to \infty$, $|a_n - a| \to 0$, and the proof is achieved.

Theorem 15. $a \in R . x, y \in K : \supset . a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$.

Proof: We may again assume that a is irrational, and let $\{a_n\}$ be a sequence of rationals tendind to a. Then

$$a_n\cdot(x+y) = a_n\cdot x + a_n\cdot y \qquad \text{by Lemma 12.}$$

As in the previous theorem, using Lemmas 4, 5

$$a\cdot(x+y) + -1\cdot(a\cdot x + a\cdot y) = (a - a_n)\cdot(x+y) + (a_n - a)\cdot x + (a_n - a)\cdot y.$$

From this we easily conclude the statement of the theorem.

Theorem 16. $a \in R . x, y \in K . x = y : \supset . a\cdot x = a\cdot y$.

Proof: $a\cdot x + -1\cdot(a\cdot y) = a\cdot x + -a\cdot y$ by Lemma 4

$= a\cdot x + a\cdot(-1\cdot y)$ by Theo. 14

$= a\cdot(x + -1\cdot y)$ by Theo. 15

$\| a\cdot x + -1\cdot(a\cdot y)\| = |a|\,\| x + -1\cdot y\| = 0$
by Theo. 5

$a\cdot x = a\cdot y$ by 12.

The assertion of Postulate 11, when $a, b \in R$, is an immediate consequence of Theorems 14 and 15.

3. The Postulates when Equality is Defined.

Consider a system consisting of the class K, the number system A, and the three undefined functions „$+$", „$\cdot$", $\| \|$, subject to the following ten postulates. For brevity and clarity we have omitted the premise that 2, 3, 4 are satisfied in the remaining postulates.

1. $\exists x . x \in K$.
2. $x, y \in K : \supset : (x+y) \in K$.
3. $a \in A . x \in K : \supset . a\cdot x \in K$.
4. $x \in K . \supset . \|x\| \in R$.

5. $a \in A \,.\, x \in K : \supset . \, \| a \cdot x \| = |a| \, \| x \| \,.$
6. $x, y \in K . \supset . \, \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \,.$
7. $x, y, z \in K . \, \| x + -1 \cdot y \| = 0 : \supset . \, \| (y + z) + -1 \cdot (z + x) \| + | \, \| x \| - \| y \| \, | = 0 \,.$
8. $x, y, z \in K . \supset . \| (x + (y + z)) + -1 \cdot ((x + y) + z) \| = 0.$
9. $a, b \in A \,.\, x \in K : \supset . \, \| (a + b) \cdot x + -1 \cdot (a \cdot x + b \cdot x) \| = 0.$
10. $a, b \in A \,.\, x, y \in K : \supset . \, \| a b \cdot (x + y) + -1 \cdot (a \cdot (b \cdot x) + a b \cdot y) \| = 0 \,.$

Definition. If $x, y \in K$, we shall say that x is equal to y, and write $x = y$, if and only if $\| x + -1 \cdot y \| = 0$.

Theorem. *The universe of discourse composed of the class K with its functions, the number system A, and the defined relation $=$, is a complex linear vector space if A is C and if it satisfies Postulates 1—10. It is a real linear vector space if A is R and Postulates 1—9 are satisfied.*

Proof: The equality relation is well-defined, for given any elements $x, y \in K$, the statement $\| x + -1 \cdot y \| = 0$ is either true or false, by 2, 3, 4. By taking $a = b = 1/4$ in 9 we readily infer that

$$0 \leqslant |1/4 + 1/4| \, \| x \| + 1/4 \cdot \| x \| + 1/4 \cdot \| x \| = \| x \| \,.$$

Using this result, and Postulate 7, we see that $x = y$ implies $y + z = z + x$, and $\| x \| = \| y \|$. It is then seen at once that this postulate system is equivalent to the system of § 2, in view of Postulate 12 and Theorem 5. This establishes the theorem.

4. The Independence of the Postulates.

In this section we shall give examples which show the independence of all four sets of postulates. The details of checking each example will be left to the reader. We consider first the sets with undefined equality.

Example 1. $\exists x \,.\, x \in K$. Let K be any null class.

Example 2. $(x + y) \in K$. Let M be a positive integer, and consider the class K of infinite one-rowed matrices of complex numbers $x \sim (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ in which at most M elements are different from zero. Define $x + y \sim (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$, $a \cdot x \sim (a x_1, \ldots)$ $\| x \| = \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $x = y$ if and only if $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Example 3. $a \cdot x \in K$. Let K be the class of „rational complex" numbers $r_1 + r_2 i$ (r_1, r_2 rational, real). Define $\| x \| = | x |$, and let the other definitions be as usual.
Example 4. $\| x \| \in R$. Let K be the class of complex number pairs $x \sim (x_1, x_2)$, with addition, multiplication, and equality defined as usual, but define $\| x \| = x$. Then $\| x \|$ is not in R.
Example 5. $\| a \cdot x \| = | a | \, \| x \|$. Let K be the class of complex numbers, and define $\| x \| = | x | + 1$, with the other definitions as usual. Then Postulate 12 is satisfied vacuously.
Example 6. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$. Let K be the class of complex numbers, and define $\| x \| = - | x |$, with the other definitions as usual.
Example 7. $x = y . \supset . \| x \| = \| y \|$. Let K be the class of complex-valued functions $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, such that $| x(t) |$ is bounded in the interval (a, b). Define $\| x \| =$ upp. b. $| x(t) |$, and define $x = y$ if $x(t) = y(t)$ almost everywhere in (a, b). Then if addition and multiplication are defined as usual, all the postulates are satisfied but 7.
Example 8. $x = y . \supset . y + z = z + x$. Let K be the class of complex numbers. Define $x = y$ if and only if $| x | = | y |$; let $\| x \| = | x |$; other definitions as usual.
Example 9. $x + (y + z) = (x + y) + z$. Let K consist of the class of complex number pairs $x \sim (x_1, x_2)$. Two elements x, y will be said to be linearly dependent if and only if numbers $\alpha \in A$, $\beta \in A$, not both zero, exist such that $\alpha x_1 + \beta y_1 = 0$, $\alpha x_2 + \beta y_2 = 0$. We then define

$x + y \sim (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ if x and y are linearly dependent;
$x + y \sim \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2} \right)$ if x and y are *not* linearly dependent. Other definitions as usual.
Example 10. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$. If A is R, then Postulate 11 is absent. Let K be the class of complex numbers, and define $a \cdot x = | a | x$ if $a \neq -1$, $-1 \cdot x = -x$.

If A is C, Postulate 11 must be taken into account. Let K be the class of complex numbers. Define $a \cdot x = a e^{i \log |a|} x$, and let the other definitions be as usual.
Example 11. $a b \cdot (x + y) = a \cdot (b \cdot x) + a b \cdot y$ (complex case only). Let K be the class of complex numbers. Addition, equality, and norm are defined as usual, but we define $a \cdot x = \bar{a} x$

when x is pure imaginary, and $a \cdot x = a x$ in all other cases ($\bar{a}$ is the complex conjugate of a).

Example 12. $\| x + -1 \cdot y \| = 0 . \supset . x = y$. Let K be the class of complex-valued functions $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, such that $x(t)$ is integrable in the Lebesgue sense. Define $\| x \| = \left(\int\limits_0^1 | x(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$ and define $x = y$ if and only if $x(t) \equiv y(t)$. Other definitions as usual.

Finally, we give independence examples for the second postulate system (when equality is defined). Examples 1, 2, 3, 4, 6 of the set just given will also serve in the present case. Examples 9, 10, and 11 of the previous set may be applied to prove the independence of Postulates 8, 9 and 10 of the set under consideration. This leaves only 5 and 7 to be considered.

Example 5. $\| a \cdot x \| = | a | \, \| x \|$. Let K be the class of complex numbers, and define $\| x \| = R(x)$, the real part of x, with the other definitions as usual.

Example 7. $\| x + -1 \cdot y \| = 0 . \supset . \| (y + z) + -1 \cdot (z + x) \| + | \| x \| - \| y \| | = 0$.

Let K be the class of complex numbers, and define $x + y = 0$, with the other definitions as usual.

In connection with Postulate 5, Professor A. D. Michal[1]) has considered „semi-vector spaces" in which the postulate $\| a \cdot x \| = | a | \, \| x \|$ is replaced by $\| a \cdot x \| \leqslant | a | \, \| x \|$.

In example 11 it is to be noticed that the definition of multiplication can be written as $a \cdot x \sim \varphi(a, x)$, where $\varphi(a, x)$ is a function of the complex variables a, x satisfying the equation

$$\varphi(a + b, x) = \varphi(a, x) + \varphi(b, x).$$

If $a = \alpha + i \beta$ and $x = \xi + i \eta$, we can write

$$\varphi(a, x) = (\alpha + i \beta I(\xi)) \, (\xi + i \eta)$$

where $I(0) = -1$, $I(\xi) = 1$ for $\xi \neq 0$. $\varphi(a, x)$ is continuous in a for fixed x, but is discontinuous as a function of x.

California Institute of Technology.

---

[1]) A. D. Michal, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 40 (1934), abstract 383, p. 814.

W. Sierpiński.

O zbiorze linjowym niemierzalnym, kompletnie jednorodnym.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 9 grudnia 1935 r.

Streszczenie.

Autor dowodzi przy pomocy t. zw. *bazy* Hamela istnienia zbioru linjowego niemierzalnego (w znaczeniu Lebesgue'a), będącego przestrzenią metryczną kompletnie jednorodną.

W. Sierpiński.

Sur un ensemble linéaire non mesurable complètement homogène.

Note présentée dans la séance du 9 décembre 1935.

Nous disons qu'un espace métrique M est *complètement homogène,* si toute isométrie entre deux sous-ensembles (superposables) quelconques E_1 et E_2 de M (formés d'un nombre quelconque $\geqslant 1$ de points) peut être étendue à une transformation isométrique de l'espace M en lui-même (qui transforme E_1 en E_2) [1]).

Le but de cette Note est de démontrer (en utilisant la *base* de M. Hamel) qu'*il existe un ensemble linéaire non mesurable qui est complètement homogène* (lorsqu'on le considère comme un espace métrique avec la définition ordinaire de la distance).

Soit B la *base* de M. Hamel [2]) et soit $b \neq 0$ un élément de la base B. Désignons par Q l'ensemble de tous les nombres réels dans le développement desquels (à l'aide d'un nombre fini d'éléments de la base B avec les coefficients rationnels) ne figure pas l'élément b de la base B. Comme j'ai démontré, l'ensemble Q est (pour toute base B de M. Hamel) non mesurable L [3]).

---

[1]) Cf. ma note dans les *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXVIII, p. 17. (séance du 18 Mars 1935).

[2]) Voir G. Hamel, Math. Ann. 60, p. 459; cf. ma note dans *Fund. Math.* t. I, p. 105.

[3]) l. c., p. 108.

Je dis que l'ensemble Q (avec la définition ordinaire de la distance) est un espace complètement homogène [1]).

Comme on voit sans peine, si E_1 et E_2 sont deux ensembles linéaires isométriques (formés d'un nombre quelconque $\geqslant 1$ de points) et si au point x_1 de E_1 correspond dans l'isométrie entre E_1 et E_2 le point x_2 de E_2, cette isométrie peut être établie ou bien par la transformation $f(x) = x + x_2 - x_1$ (c'est-à-dire par une translation), ou bien par la transformation $g(x) = -x + x_1 + x_2$ (c'est-à-dire par une rotation) [2]).

Il suffira donc de démontrer que si x_1 et x_2 sont deux points donnés quelconques de l'ensemble Q, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ transforment l'ensemble Q en lui-même. Or, c'est évident, puisque si les nombres x, x_1 et x_2 ne contiennent dans leurs développement (à l'aide des éléments de la base B) l'élément b de la base B, il en est de même des nombres $x + x_1 - x_2$ et $-x + x_1 + x_2$.

L'ensemble Q est donc complètement homogène, c. q. f. d.

Comme on voit sans peine, tout corps de nombres réels est un ensemble complètement homogène. Le corps non mesurable de nombres réels, dont l'existence a été démontrée (à l'aide du théorème de M. Zermelo) par M. Souslin [3]) est donc aussi un ensemble linéaire non mesurable complètement homogène.

D'autre part, comme l'a démontré Souslin [4]), on peut définir effectivement un corps de nombres réels qui est un F_σ de mesure nulle. Donc *il existe des ensembles linéaires F_σ de mesure nulle qui sont complètement homogènes.*

---

1) Cf. A. Łomnicki, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* Cl. III, A. XI, p. 833.

2) On démontre d'ailleurs sans peine que tout ensemble linéaire qui est (avec la définition ordinaire de la distance) simplement homogène, est complètement homogène.

3) Mémoire posthume rédigé par C. Kuratowski, *Fund. Math.* t. IV, p. 315.

4) l. c., p. 311—314.

Kazimierz Kuratowski.

O pewnym warunku metrycznym na retrakcję zbiorów.

Komunikat przedstawiony dn. 9 grudnia 1935 r.

Une condition métrique pour la rétraction des ensembles.

Note présentée le 9 Décembre 1935.

On doit à M. Borsuk [1]) la notion importante de la *rétraction* des ensembles: on dit qu'un ensemble A situé dans un espace $\mathfrak{X}$ en est un rétracte lorsqu'il existe une fonction continue $r(x)$, la „rétraction", qui transforme l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier en A et qui laisse invariants les points de A; c.-à-d. que $r(x)=x$ pour x appartenant à A. Nous allors caractériser la rétraction à l'aide du théorème suivant:

Théorème. *$\mathfrak{X}$ étant un espace compact, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé A de $\mathfrak{X}$ en soit un rétracte, est que l'espace $\mathfrak{X}$ se laisse métriser sans altérer sa topologie de telle façon qu'à chaque point x de $\mathfrak{X}$ corresponde dans A un et un seul point qui soit le plus rapproché de x.*

1. *Démonstration de la suffisance*. Cette démonstration ne présente pas de difficulté. Désignons, en effet, par $r(x)$ le point de A le plus rapproché de x. La fonction $r(x)$ est une rétraction de $\mathfrak{X}$ en A.

Pour s'en convaincre, il suffit de démontrer que la fonction $r(x)$ est continue. L'espace $\mathfrak{X}$ étant compact, cela revient à démontrer que les conditions $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n=\infty} r(x_n) = y$ entraînent $r(x)=y$.

Or ces deux conditions impliquent que $\lim\limits_{n=\infty} |x_n - r(x_n)| = |x-y|$ [2]) et, comme par hypothèse $|x_n - r(x)| \geqslant |x_n - r(x_n)|$, il vient $|x - r(x)| = \lim\limits_{n=\infty} |x_n - r(x)| \geqslant |x-y|$. D'autre part,

---

[1]) Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 153.

[2]) $|x-y|$ désigne la distance de x à y.

y appartenant à A, on a, par hypothèse, $|x-r(x)| \leqslant |x-y|$ et finalement $|x-r(x)|=|x-y|$, d'où $r(x)=y$. C.Q.F.D.

Remarque. L'hypothèse de compacité est essentielle, comme on peut constater sur l'exemple suivant. Soit, sur le plan de la variable complexe, $\mathfrak{X}$ l'ensemble composé des trois parties: 1° de la circonférence $\rho=2$, 2° de la circonférence $\rho=1$ diminuée du point (1,0), 3° du point (3,0). Les parties 2° et 3° constituent l'ensemble A.

2. *Démonstration de la nécessité.* Remarquons d'abord que *chaque espace métrique peut être métrisé de façon que, quels que soient trois points différents x, y et z, la distance de x à z soit inférieure à la somme des distances de x à y et de y à z.* Il suffit, en effet, de remplacer la distance donnée $|x-y|$ par $\sqrt{|x-y|}$, car l'inégalité évidente $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>\sqrt{\alpha+\beta}$ pour $\alpha \neq 0 \neq \beta$ donne

$$\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}>\sqrt{|x-y|+|y-z|} \geqslant \sqrt{|x-z|}.$$

En remplaçant la distance $|x-y|$ par $\sqrt{|x-y|}$, on transforme l'espace donné par homéomorphie, puisque les conditions $\lim\limits_{n=\infty}|x_n-x|=0$ et $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt{|x_n-x|}=0$ sont évidemment équivalentes.

Ceci établi, soit $r(x)$ une rétraction de l'espace métrique[1] $\mathfrak{X}$ en l'ensemble A, et admettons que la distance dans l'espace $\mathfrak{X}$ satisfasse à la condition considérée tout-à-l'heure, c.-à-d. que

$$(1) \qquad |x-y|+|y-z|>|x-z| \quad \text{pour} \quad x \neq y \neq z \neq x.$$

Posons pour la „nouvelle" distance $\|x-x'\|=|x-x'|+$ $+|r(x)-r(x')|$.

Autrement dit, nous métrisons le produit des espaces $\mathfrak{X}$ et A (c.-à-d. l'ensemble des couples (x, a) avec $x \varepsilon \mathfrak{X}$ et $a \varepsilon A$) en admettant pour distance des points (x, a) et (x', a') la somme $|x-x'|+|a-a'|$ et nous définissons la „nouvelle" distance $\|x-x'\|$ comme égale à la distance des points $[x, r(x)]$ et $[x', r(x')]$ situés sur la „courbe" $y=r(x)$.

La fonction $r(x)$ étant continue, cette courbe est homéomorphe à l'espace $\mathfrak{X}$. Par conséquent, en métrisant l'espace $\mathfrak{X}$ par la nouvelle distance $\|x-x'\|$, on n'altère pas la topologie de cet espace.

---

[1]) Dans cette partie de la démonstration, l'hypothèse de la compacité de l'espace $\mathfrak{X}$ est superflue.

Notre théorème sera donc établi dès que nous aurons démontré que le point $r(x)$ est, parmi les points de A, le point le plus rapproché de x (par rapport à la distance $\|x-x'\|$).

Or, $r(x)$ étant une rétraction, on a, pour $x' \varepsilon A$, $r(x')=x'$; en particulier, $r[r(x)]=r(x)$. Il vient ainsi

$$\|x-r(x)\|=|x-r(x)|+|r(x)-r[r(x)]|=|x-r(x)|$$

et, pour $x' \varepsilon A$, $\|x-x'\|=|x-x'|+|r(x)-x'|$; d'où en vertu de (1), on a, pour $x' \neq r(x)$ et $x' \varepsilon A$,

$$\|x-x'\|>|x-r(x)|=\|x-r(x)\|.$$

St. J. Thugutt.

O pinicie boliwijskim z Chacaltaya.

Komunikat zgłoszony 9 grudnia 1935 r.

Sur la pinite bolivienne de Chacaltaya.

Note présentée à la séance du 9 décembre 1935.

Streszczenie.

Na tle łupków dewońskich kopalni Cabaleras w Chacaltaya łącznie z szeregiem minerałów kruszcowych i płonnych występuje jako utwór wtórny żyłowy bladozielono zabarwiony nerkowaty minerał, sładający się z igiełek ułożonych promienisto i gaszących światło prosto. Jego skład chemiczny i własności fizyczne przypominają mikę potasową, od której różni się on głównie swoistą postacią. Pochodzenie jego nie jest wiadome. Minerałem macierzystym mógł być np. andaluzyt, kordjeryt, skaleń potasowy, eleolit lub biotyt. Biotyt ma najwięcej prawdopodobieństwa za sobą ze względu na stwierdzoną obecność fluoru w produkcie przeobrażenia. Jak wiadomo cząsteczka biotytowa przekształca się przez częściową utratę ortokrzemianów żelaza, manganu, wapnia i magnezu w muskowit. Czy omawiany przez nas minerał stanowi odmianę włóknistą muskowitu, czy też jest on utworem samodzielnym, zdecydują przyszłe badania rentgenogramometryczne. Narazie można przyjąć nazwę pinitu, składem swym w pewnych odmianach harmonizującego z muskowitem i wykazującego niekiedy postać promienisto włóknistą.

St. J. Thugutt.

O koloidalnym roztworze chalcedonitu.

Komunikat zgłoszony 9 grudnia 1935 r.

Sur la solution colloidale de la calcédonite.

Note présentée à la séance du 9 décembre 1935.

Streszczenie.

Stwierdzona przez S. Jaskólskiego różnica w warunkach występowania kwarcu i chalcedonitu w złożach cynowosrebrowych Potosi i Chocaya w Boliwji skłoniła mnie do podjęcia badań nad rozpuszczalnością chalcedonitu w wodzie. Fakt przechodzenia kwarcu w temperaturze 220^0 do roztworu wodnego w postaci koloidalnej stwierdziłem już w roku 1928. Tę samą metodę zastosowałem obecnie do chalcedonitu z Janowej Doliny na Wołyniu, odznaczającego się niezwykłą czystością. Okazało się, iż chalcedonit ten już w temperaturze 185^0 rozpuszcza się w wodzie dwa razy łatwiej od kwarcu, przyczem otrzymany roztwór jest natury koloidalnej z cechami elektroujemnemi.

Poglądy wyrażone przez F. Walleranta, H. Heina, H. Leitmeiera i innych, iż chalcedonit nie jest minerałem samodzielnym, jeno włóknistą odmianą kwarcu, nie wydaje mi się słuszny. Zbyt go bowiem wyróżnia wysoki spółczynnik rozpuszczalności w wodzie, mniejsza twardość, odmienny znak optyczny, spółczynnik załamania światła i stała zawartość wody. Tożsamość rentgenogramów niezawsze dowodzi tożsamości ustroju wewnętrznego, sądząc przynajmniej z świeżo ogłoszonych badań o ustroju kaolinu i haloizytu [2]).

---

[1]) S. Jaskólski. Archiwum Mineralogiczne **9** (1933) 76 i **11** (1935) 78.
[2]) St. J. Thugutt. Arch. Min. **11** (1935) 122.

St. J. Przyłęcki, J. Cichocka i H. Rafałowska.

Badania nad wiązaniem aminokwasów i peptydów z wielocukrami Cz. VIII i IX.

Przedstawił St. J. Przyłęcki dn. 9 grudnia 1935 r.

Recherches sur les complexes des acides aminés et des peptides avec les polysaccharides VIII et IX.

Mémoire présenté par M. St. J. Przyłęcki à la séance du 9 désembre 1935.

Streszczenie.

VIII. Przeprowadziliśmy badania nad wiązaniem amylozy z oksyproliną, argininiņą, histydyną, lizyną oraz kreatyniną. Stosowano głównie metodę polarymetryczną, porównywając kąt skręcenia mieszaniny (amyloza + aminokwas) oraz sumy kątów (amyloza + H_2O) i (aminokwas + H_2O).

Tylko w przypadku zmieszania amylozy z argininą przy $p_H 7$ i wyższych stwierdzono wyraźne odhylenie od α_D obliczonego. Różnica wzrastała w miarę zwiększania stężenia amylozy i argininy. Przy p_n 7,5 i zastosowaniu 2 dm rury różnica dla 2% roztworu anylozy i argininy wynosiła — 0.15^0 zaś w przypadku 3.7% argininy — 0.22^0.

Żaden z wymienionych związków azotowych zmieszany z amylozą nie daje bezpośrednio osadów w granicach p_n 2—14.

Otrzymane wyniki w połączeniu z poprzednimi wykazują, że z pośród aminokwasów, będących składowemi częściami białek, zaledwie dwa arginina i tyrozyna dają cząsteczkowe połączenia z niezawierającemi zjonizowanych grup wielocukrami.

Arginina posiada w określonych p_H grupę $\begin{array}{l} \diagup NH_2 \\ C{=}NH \\ \diagdown NH \end{array}$ zawierającą 3 azoty trójwartościowe z samotnymi elektronami.

Grupa powyższa posiada specjalne wartościowości uboczne, dające połączenia z wielowartościowymi alkoholami po przez wodór wielocukru. Podobnie zachowuje się guanidyna $NH{=}C\begin{array}{l} \diagup NH_2 \\ \diagdown NH_2 \end{array}$

Już kreatyna wiązań nie daje.

Tyrozyna daje połączenia dzięki obecności grupy fenolowej a właściwie wodoru grupy wodoro-tlenowej. Fenyloalanina podobnych połączeń nie daje. Atomem węglowodanu, wchodzącym w połączenie jest prawdopodobnie tlen eterowego wiązania $C-O-C$.

IX. Po za resztami aminokwasów białko zawiera szereg polipeptydowych wiązań $CO\,NH$. Dzięki wielkiej uprzejmości profesora Abderhaldena otrzymaliśmy preparat sześciopeptydu— pentaglycylglicynę. Jednocześnie wykonaliśmy szereg doświadczeń z bezwodnikiem glikokolu, glicylglicyną, alanylglicyną i tyrozylglicyną. Stosowaliśmy metodę krystalizacji z mieszanin, adsorbcji na polipeptydzie i bezwodniku lub na amylazie oraz ulrafiltracji.

Otrzymane wyniki wykazały, że grupy $CO\,NH$ nie biorą żadnego udziału w wiązaniu. Z pośród stosowanych peptydów otrzymaliśmy tylko z tyrozylglicyną wynik dodatni, potwierdzający udział tyrozyny w powstawaniu związków cząsteczkowych peptydo - amylozowych.

ERRATA

Zesz. 4—6, wydz. III, T. XXIX, 1936.

Str.	Wiersz	Zamiast	Winno być
42	5 od dołu	*Glyhaea*	*Glyphaea*
43	6 od góry	*ungustidens*	*angustidens*
47	5 od dołu	minumusowe	minimusowe
55	14 od dołu	Ibid.	Pos. P. I. G.
57	20 od góry	*ultimoiles*	*ultimoides*