COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXVI Année 1933 Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVI 1933 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1933

Redaktor

Bolesław Hryniewiecki

Adres Redakcji: Warszawa, Nowy-Świat 72.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXVI Année 1933 Fascicule 1—3

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVI 1933 Zeszyt 1—3

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1933

J. DZIEWULSKI
WARSZAWA

TREŚĆ ZESZYTU 1—3.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 28 stycznia 1933 r.

W. Sierpiński.

Uwaga o superpozycjach funkcji ciągłych.

Komunikat, przedstawiony dnia 28 stycznia 1933 r.

Streszczenie.

Autor dowodzi, że nie każda funkcja klasy pierwszej jest granicą ciągu superpozycji funkcji ciągłych.

W. Sierpiński.

Remarque sur les superpositions de fonctions continues.

Présenté dans la séance du 28 janvier 1933.

Soit

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots.$$

une suite infinie donnée de fonctions continues d'une variable réelle et posons

(2) $$\varphi_1(x)=f_1(x) \text{ et } \varphi_n(x)=f_n(\varphi_{n-1}(x)) \text{ pour } n=2,3,4,\ldots$$

— ce seront évidemment des fonctions continues d'une variable réelle.

Si la suite infinie de fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ converge pour x réels, sa limite

(3) $$\varphi(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x)$$

est évidemment une fonction de classe $\leqslant 1$ de Baire.

Or, le problème se pose: $\varphi(x)$ *étant une fonction d'une variable réelle de classe* $\leqslant 1$ *donnée quelconque, existe-t-il toujours une suite infinie* (1) *de fonctions continues, telle qu'en définissant les fonctions* $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *par les formules* (2), *on ait la formule* (3) (pour x réels)?

Le but de cette Note est de démontrer que *la réponse y est négative.*

En effet, soit $\varphi(x)$ la fonction définie comme il suit: $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi(x) = 1$ pour $x > 0$: c'est évidemment une fonction de classe 1 (avec un seul point de discontinuité).

Admettons qu'il existe une suite infinie (1) de fonctions continues, telle qu'en définissant les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ par les formules (2), on a la formule (3) pour x réels.

De la définition de la fonction $\varphi(x)$ résulte que $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(0) = 2$ et $\varphi(1) = 1$: on déduit donc facilement de (3) qu'il existe un indice p, tel que $\varphi_p(-1) < \frac{1}{2}$, $\varphi_p(0) > \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} < \varphi_p(1) < \frac{3}{2}$, donc

$$\varphi_p(-1) < \varphi_p(1) < \varphi_p(0).$$

La fonction $\varphi_p(x)$ étant continue, il existe donc un nombre x_0, tel que $-1 < x_0 < 0$ et $\varphi_p(x_0) = \varphi_p(1)$. D'après (2) il en résulte tout de suite que

$$\varphi_n(x_0) = \varphi_n(1), \quad \text{pour} \quad n \geqslant p,$$

donc, d'après (3):

$$\varphi(x_0) = \varphi(1),$$

ce qui est impossible, puisque $x_0 < 0$, et, d'après la définition de $\varphi(x)$, on a $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\varphi(1) = 1$.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Voici encore une autre démonstration de notre assertion due à M. Eilenberg.

Soit $\varphi(x)$ une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes et supposons qu'on a les formules (2) et (3), où (1) sont des fonctions continues. De (2) et de (3) résulte tout de suite que les fonctions (2) sont nécessairement toutes à valeurs distinctes (puisque de $\varphi_p(a) = \varphi_p(b)$ et de (2) et (3) résulte $\varphi(a) = \varphi(b)$), donc monotones (en tant que continues), d'où résulte (d'après (3)) que la fonction $\varphi(x)$ est aussi monotone.

Il suffit donc de prendre pour $\varphi(x)$ une fonction de 1re classe à valeurs distinctes, mais non monotone, pour qu'elle ne puisse être représentée par la formule (3) (où les fonctions $\varphi_n(x)$ sont définies par les formules (2) et où les fonctions (1) sont continues). Telle est p. e. la fonction $\varphi(x)$ définie comme il suit: $\varphi(x)=x+1$ pour $x<0$ et $\varphi(x)=x$ pour $x\geqslant 0$.

Si les fonctions (1) sont toutes de classe 1, la fonction (3) est, comme on voit sans peine, de classe $\leqslant \omega$. Or, MM. A. Lindenbaum et E. Szpilrajn ont posé le problème s'il existe pour toute fonction donnée $\varphi(x)$ d'une variable réelle de classe ω une suite infinie (1) de fonctions de classe 1, telle qu'en définissant les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ par les formules (2), on ait la formule (3) (pour x réels).

F. Leja.

O pewnej własności podwójnych szeregów Dirichleta.

Komunikat zgłoszony dn. 28 stycznia 1933 r.

Streszczenie.

Przedmiotem tego komunikatu jest dowód następujących własności podwójnych szeregów Dirichleta:

I. Jeśli szereg podwójny

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\, e^{-p_\mu x - q_\nu y}, \tag{1}$$

gdzie $p_\mu < p_{\mu+1}$, $q_\nu < q_{\nu+1}$, $p_\mu \to \infty$ i $q_\nu \to \infty$, jest zbieżny w punktcie (x_0, y_0) i jeśli wszystkie wiersze tego szeregu t. j. szeregi pojedyńcze $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\, e^{-p_\mu x}$, $\nu=0, 1, \ldots$, są zbieżne punktcie x_0, wówczas szereg (1) jest zbieżny we wszystkich punktach postaci (x_0, y) gdzie część rzeczywista różnicy $(y-y_0)$ jest dodatnia.

II. Jeśli szereg (1) jest zbieżny w punktach postaci (x_0, y) gdzie x_0 jest stałe, zaś y przebiega pewien nieskończony zbiór liczb, wówczas wszystkie wiersze szeregu (1) są zbieżne w punktcie x_0.

Twierdzenia te są w pewnem znaczeniu odwrotne względem siebie; pierwsze z nich jest uogólnieniem analogicznego twierdzenia F. Hartogsa (Dissertation, München 1904 r., str. 22), podanego dla szeregów potęgowych podwójnych.

F. Leja.

Sur une propriété des séries de Dirichlet doubles.

Mémoire présenté dans la séance du 28 janvier 1933.

1. Soit

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\, e^{-p_\mu x - q_\nu y} \tag{1}$$

une série de Dirichlet double c'est-à-dire telle dans laquelle les coëfficients $\{a_{\mu\nu}\}$ forment une suite double quelconque et les suites simples $\{p_\mu\}$ et $\{q_\nu\}$ sont réelles et remplissent les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &p_\mu < p_{\mu+1} \quad \text{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots \quad \text{et} \quad p_\mu \to \infty, \\ &q_\nu < q_{\nu+1} \quad \text{pour} \quad \nu = 0, 1, \ldots \quad \text{et} \quad q_\nu \to \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

On sait qu'une série double quelconque $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}$ peut converger bien que ses lignes $\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}$ et ses colonnes $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}$ divergent [1]). Or, les séries de Dirichlet doubles [2]) jouissent des deux propriétés suivantes dont chacune est, dans un certain sens, inverse par rapport à l'autre. Voici la prémière d'elles:

---

[1]) Une série double $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}$ est dite convergente, si la suite double $s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} c_{\mu\nu}$ tend vers une limite s, c'est-à-dire si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre p tel que, pour $m > p$ et $n > p$, on a $|s_{mn} - s| < \varepsilon$. Or, si la série $\sum c_{\mu\nu}$ est telle qu'on ait $s_{mn} = \frac{(-1)^m}{m+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$ cette série converge bien que toutes ses lignes et toutes ses colonnes divergent.

[2]) Le domaine de convergence de ces séries a été examiné dans un travail inséré dans le livre: Comptes Rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves 1929, Warszawa 1930, p. 140—158.

I. *Si la série* (1) *converge en un point* (x_0, y_0) *et si toutes ses lignes*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} e^{-p_\mu x}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

convergent au point x_0 *cette série converge en tout point* (x_0, y), *où* [1])

$$Ry > Ry_0. \tag{4}$$

Pour énoncer plus brièvement la propriété seconde appelons *ensemble d'unicité* chaque ensemble (E) des points du plan d'une variable complexe z tel que, si deux séries de Dirichlet simples

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu e^{-p_\mu z} \quad \text{et} \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu e^{-p_\mu z}$$

convergent et prennent les mêmes valeurs en tout point de l'ensemble (E), ces séries sont toujours identiques, c'est-à-dire on a $a_\mu = b_\mu$ pour $\mu = 0, 1, \ldots$ [2]). Voici la seconde des propriétés annoncées:

II. *Si la série* (1) *converge aux points* (x_0, y), *où* x_0 *est fixe et* y *parcourt un ensemble d'unicité, toutes les lignes* (3) *de cette série convergent aussi au point* x_0.

Observons que l'ensemble des points y remplissant la condition (4) est toujours un ensemble d'unicité donc les propositions I et II sont en quelque sorte inverses. Le but de ce travail est d'établir ces deux propositions; elles constituent la généralisation de deux propositons analogues concernant les séries entières doubles, dont l'une est dûe à M. F. Hartogs [3]).

2. Démonstration de la proposition I. Sans restreindre la généralité on peut supposer que

$$x_0 = y_0 = 0$$

---

[1]) Ry désigne la partie réelle de y.

[2]) Par exemple, toute suite de points $\{z_n\}$ ayant un point d'accumulation a tel qu'on ait $Ra > Rz_n$ pour certaines valeurs de n est un ensemble d'unicité.

[3]) F. Hartogs: Dissertation, München 1904, p. 22,
F. Leja: C. R. des séances de l'Acad. Paris t. 185, 1927, p. 1103-5.

car, dans le cas contraire, il suffirait de remplacer dans la série (1) x par x_0+x et y par y_0+y. Supposons donc que la série double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \tag{5}$$

soit convergente et que toutes ses lignes

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \qquad \nu=0,\ 1,\ \ldots \tag{6}$$

convergent elles aussi. Il faut démontrer que la série

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\, e^{-q_\nu y} \tag{7}$$

converge en tout point du domaine

$$Ry>0\,.$$

Pour ce but posons

$$s_{\mu\nu}(y)=\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}\, e^{-q_j y}=\sum_{j=0}^{\nu}\left(\sum_{i=0}^{\mu} a_{ij}\right) e^{-q_j y} \tag{8}$$

et

$$s_{\mu\nu}=s_{\mu\nu}(0)\,. \tag{9}$$

Etant $\sum_{i=0}^{\mu} a_{ij}=s_{\mu j}-s_{\mu j-1}$ pour $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$ on a

$$s_{\mu\nu}(y)=\sum_{j=0}^{\nu-1} s_{\mu j}\left(e^{-q_j y}-e^{-q_{j+1} y}\right)+s_{\mu\nu}\cdot e^{-q_\nu y}$$

et

$$s_{\mu+p,\,\nu+q}(y)=\sum_{j=0}^{\nu+q-1} s_{\mu+p,\,j}\left(e^{-q_j y}-e^{-q_{j+1} y}\right)+s_{\mu+p,\,\nu+q}\cdot e^{-q_{\nu+q} y}$$

d'où résulte immédiatement la formule suivante

$$\begin{aligned}s_{\mu+p,\,\nu+q}(y)-s_{\mu\nu}(y)&=\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(s_{\mu+p,\,j}-s_{\mu j}\right)\left(e^{-q_j y}-e^{-q_{j+1} y}\right)+\\&+\sum_{j=\nu}^{\nu+q-1} s_{\mu+p,\,j}\left(e^{-q_j y}-e^{-q_{j+1} y}\right)+s_{\mu+p,\,\nu+q}\cdot e^{-q_{\nu+q} y}-s_{\mu\nu}\cdot e^{-q_\nu y}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

La proposition peut être déduite de cette dernière formule. En effet, soit y un point tel qu'on ait

$$Ry = \eta > 0,$$

et soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque mais fixe. Considérons l'inégalité connue [1])

$$(11) \qquad |e^{-q_j y} - e^{-q_{j+1} y}| \leqq \frac{|y|}{\eta}(e^{-q_j \eta} - e^{-q_{j+1} \eta})$$

et observons que, la suite double (9) étant convergente d'après l'hypothèse, on a quels que soient p et $q = 0, 1, \ldots$

$$|s_{\mu+p, \nu+q} - s_{\mu, \nu}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu > M_1 \quad \text{et} \quad \nu > N_1,$$

où M_1 et N_1 sont des nombres dépendant de ε. En particulier, on a quel que soit $p = 0, 1, \ldots$

$$(12) \qquad |s_{\mu+p, \nu} - s_{\mu, \nu}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu > M_1 \quad \text{et} \quad \nu > N_1.$$

Mais, les séries (6) étant convergentes, il en résulte que l'inégalité (12) a lieu aussi pour $\nu = 0, 1, \ldots, N_1$ pourvu que l'indice μ soit suffisamment grand donc on a finalement quels que soient p et $\nu = 0, 1, \ldots$.

$$(13) \qquad |s_{\mu+p, \nu} - s_{\mu, \nu}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu > M_2 \geqq M_1$$

où M_2 est un nombre ne dépendant que de ε.

Observons maintenant que, la suite $s_{\mu, \nu}$ étant convergente, elle est bornée pour tous les μ et ν suffisamment grands [2]) donc il existe un nombre K tel qu'on ait

$$(14) \qquad |s_{\mu, \nu}| < K, \quad \text{pour} \quad \mu > M_3 \quad \text{et} \quad \nu > N_3,$$

où les nombres M_3 et N_3 sont fixes. Posons

$$M = \max(M_2, M_3), \quad N = N_3.$$

De (10), (11), (13) et (14) on obtient, pour $\mu > M$ et $\nu > N$, l'inégalité

---

[1]) Voir G. H. Hardy et M. Riesz: The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915, p. 3.

[2]) La suite $s_{\mu, \nu}$ peut n'être pas bornée quels que soient μ et $\nu = 0, 1, \ldots$ car il existe des suites doubles convergentes et non bornées.

$$|s_{\mu+p,\,\nu+q}(y)-s_{\mu\nu}(y)|<\varepsilon\frac{|y|}{\eta}\sum_{j=0}^{\nu-1}(e^{-q_j\eta}-e^{-q_{j+1}\eta})+$$
$$+K\frac{|y|}{\eta}\sum_{j=\nu}^{\nu+q-1}(e^{-q_j\eta}-e^{-q_{j+1}\eta})+K(e^{-q_{\nu+q}\eta}+e^{-q_\nu\eta}),$$

d'où résulte la suivante

$$|s_{\mu+p,\,\nu+q}(y)-s_{\mu\nu}(y)|<\varepsilon\cdot\frac{|y|}{\eta}(e^{-q_0\eta}-e^{-q_\nu\eta})+$$
$$+K\frac{|y|}{\eta}(e^{-q_\nu\eta}-e^{-q_{\nu+q}\eta})+K(e^{-q_{\nu+q}\eta}+e^{-q_\nu\eta}).$$

Or, la suite $\{q_\nu\}$ tendant vers l'infini, les expressions $e^{-q_\nu\eta}$ et $e^{-q_{\nu+q}\eta}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$ donc le prémier membre de la dernière inégalité est arbitrairement petit pour tous les p et $q=0, 1, \ldots$ pourvu que les indices μ et ν soient suffisamment grands. Il en suit que la suite $\{s_{\mu\nu}(y)\}$ tend vers une limite si $Ry>0$ et, par suite, la proposition I est démontrée.

3. Démonstration de la proposition II. Sans nuir à la généralité on peut supposer que $x_0=0$. Soit

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}\,e^{-q_\nu y}\tag{15}$$

une série de Dirichlet double convergente pour tous les y appartenant à un ensemble d'unicité (E); il faut démontrer que toutes les séries simples

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu},\qquad \nu=0,\,1,\,\ldots\tag{16}$$

convergent, elles aussi.

La suite double (8) étant convergente, d'après l'hypothèse, dans l'ensemble (E), supposons qu'on ait dans (E)

$$s_{\mu\nu}(y)=\sum_{j=0}^{\nu}\left(\sum_{i=0}^{\mu}a_{ij}\right)e^{-q_j y}\to s(y),\quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu\to\infty,\tag{17}$$

et posons

$$\sigma_\mu^{(\nu)}=\sum_{i=0}^{\mu}a_{i\nu}\quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu=0,\,1,\,\ldots.$$

Je dis d'abord que, ν étant quelconque mais fixe, la suite simple

(18) $$\sigma_0^{(\nu)},\ \sigma_1^{(\nu)},\ \ldots,\ \sigma_\mu^{(\nu)},\ \ldots$$

est **bornée**. En effet, d'après (17) on a

$$s_{\mu\nu}(y) - s_{\mu,\nu-1}(y) = \sigma_\mu^{(\nu)} e^{-q_\nu y} \to 0, \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu \to \infty,$$

donc, y_0 étant un point fixe de (E), il existe un nombre p tel qu'on a

$$|\sigma_\mu^{(\nu)} \cdot e^{-q_\nu y_0}| < 1, \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu > p$$

et cette inégalité prouve que toutes les suites (18) pour lesquel

$$\nu > p$$

sont bornées.

Considérons $p+1$ points différents

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_p$$

appartenant à E et tels que le déterminant de l'ordre $p+1$

(19) $$\begin{vmatrix} e^{-q_0 y_0}, & e^{-q_1 y_0}, & \ldots, & e^{-q_p y_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-q_0 y_p}, & e^{-q_1 y_p}, & \ldots, & e^{-q_p y_p} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. D'après (17) on peut trouver un indice $q \geqq p$ tel que l'inégalité

$$|\sigma_\mu^{(0)} e^{-q_0 y} + \cdots + \sigma_\mu^{(\nu)} e^{-q_\nu y} - s(y)| < 1$$

ait lieu pour tous les valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_p$ de y et pour tous les indices $\mu \geqq q$ et $\nu \geqq q$ donc l'inégalité

(20) $$|\sigma_\mu^{(0)} e^{-q_0 y} + \cdots + \sigma_\mu^{(p)} e^{-q_p y}| < 1 + |\sigma_\mu^{(p+1)} e^{-q_{p+1} y} + \cdots + \sigma_\mu^{(q)} e^{-q_q y}|$$

a lieu pour tous les $y = y_0, y_1, \ldots, y_p$ et pour tous les $\mu \geqq q$. Mais, les suites

$$\{\sigma_\mu^{(p+1)}\},\ \{\sigma_\mu^{(p+2)}\},\ \ldots,\ \{\sigma_\mu^{(q)}\}, \quad \text{où } \mu = 0, 1, \ldots,$$

étant bornées d'après ce qui précède, le second membre de (20) est borné, quel que soit $\mu = 0, 1, \ldots,$ pour $y = y_0, y_1, \ldots, y_p$ d'où résulte immédiatement que les suites

$$\{\sigma_\mu^{(0)}\},\ \{\sigma_\mu^{(1)}\},\ \ldots,\ \{\sigma_\mu^{(p)}\}$$

sont bornées car le déterminant (19) est différent de zéro.

Je dis maintenant que, quel que soit ν, la suite (18) est convergente. En effet, admettons que cette assertion soit fausse et que, en particulier, on ait pour $\nu = \lambda$

(21) $$\sigma_{p_k}^{(\lambda)} \to a_\lambda \quad \text{et} \quad \sigma_{q_k}^{(\lambda)} \to b_\lambda \neq a_\lambda, \quad \text{si } k \to \infty$$

où $\{p_k\}$ et $\{q_k\}$ sont deux suites partielles croissantes de la suite 0, 1, 2, ...

Considérons la suite $\{\sigma_{p_k}^{(0)}\}$ et extrayons d'elle une suite partielle, que je désignerai par $\{\sigma_{k0}^{(0)}\}$, convergente vers une limite finie a_0, ce qui est possible car la suite $\{\sigma_{p_k}^{(0)}\}$ est bornée. Désignons par $\sigma_{k0}^{(\nu)}$, $k = 0, 1, \ldots$, la suite partielle de $\sigma_{p_k}^{(\nu)}$, $k = 0$, $1, \ldots$, correspondant à $\{\sigma_{k0}^{(0)}\}$ et extrayons de $\{\sigma_{k0}^{(1)}\}$ une suite partielle, qui sera désignée par $\{\sigma_{k1}^{(1)}\}$, convergente vers une limite a_1; puis, $\sigma_{k1}^{(\nu)}$, $k = 0, 1, \ldots$, désignant la suite partielle de $\{\sigma_{k0}^{(\nu)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$, correspondant à $\{\sigma_{k1}^{(1)}\}$, extrayons de $\{\sigma_{k1}^{(2)}\}$ une suite partielle, que je désignerai par $\{\sigma_{k2}^{(2)}\}$, convergente vers une limite a_2 et ainsi de suite.

On a ainsi construit, pour tout ν, une suite de suites simples que voici:

(22) $$\begin{array}{l} \sigma_{00}^{(\nu)}, \sigma_{10}^{(\nu)}, \ldots, \sigma_{k0}^{(\nu)}, \ldots \\ \sigma_{01}^{(\nu)}, \sigma_{11}^{(\nu)}, \ldots, \sigma_{k1}^{(\nu)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dont la prémière est partielle par rapport à la suite $\{\sigma_{p_k}^{(\nu)}\}$, $k = 0$, $1, \ldots$, dont chacune est partielle par rapport à la précédente et dont la $(\nu+1)$-ième converge vers a_ν. Il s'ensuit que la suite diagonale $\{\sigma_{kk}^{(\nu)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$, du tableau (22) converge vers a_ν, c'est-à-dire qu'on a

(23) $$\sigma_{kk}^{(\nu)} \to a_\nu, \quad \text{pour } k \to \infty.$$

Formons de la même manière, pour tout ν, une suite $\{s_{kk}^{(\nu)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$, partielle par rapport à $\{\sigma_{q_k}^{(\nu)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$, et convergente vers une limite b_ν

(24) $$s_{kk}^{(\nu)} \to b_\nu, \quad \text{pour } k \to \infty,$$

et considérons les deux séries de Dirichlet simples

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-q_\nu y}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu e^{-q_\nu y}.$$

Je dis que ces séries doivent être identiques. En effet, les deux suites (23) et (24) étant partielles de la suite (18) il existe deux suites croissantes d'indices $\{\alpha_k\}$ et $\{\beta_k\}$ telles qu'on a

$$\sigma_{kk}^{(\nu)} = \sigma_{\alpha_k}^{(\nu)}, \quad s_{kk}^{(\nu)} = \sigma_{\beta_k}^{(\nu)}, \quad \text{pour } k, \nu = 0, 1, \ldots .$$

D'autre part, on a d'après (17), pour tout y appartenant à l'ensemble (E) et pour k et $\nu \to \infty$,

$$s_{\alpha_k \nu}(y) = \sigma_{\alpha_k}^{(0)} \cdot e^{-q_0 y} + \cdots + \sigma_{\alpha_k}^{(\nu)} \cdot e^{-q_\nu y} \to s(y),$$

$$s_{\beta_k \nu}(y) = \sigma_{\beta_k}^{(0)} \cdot e^{-q_0 y} + \cdots + \sigma_{\beta_k}^{(\nu)} \cdot e^{-q_\nu y} \to s(y),$$

donc, étant $\sigma_{\alpha_k}^{(\nu)} \to a_\nu$ et $\sigma_{\beta_k}^{(\nu)} \to b_\nu$ pour $k \to \infty$, on doit avoir dans l'ensemble (E)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-q_\nu y} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu e^{-q_\nu y} .$$

Mais, (E) étant un ensemble d'unicité, il résulte de la dernière équation qu'on doit avoir $a_\nu = b_\nu$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, \lambda, \ldots$, contre l'hypothèse (21), donc le théorème est établi.

Posiedzenie

z dnia 25 lutego 1933 r.

W. Sierpiński.

O pewnem zagadnieniu p. Ruziewicza, dotyczącem superpozycyj funkcyj mierzalnych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 25 lutego 1933 r.

Streszczenie.

Autor rozstrzyga negatywnie pewne zagadnienie, postawione przez prof. Ruziewicza, dowodząc, że nie istnieje żadna funkcja zmiennej rzeczywistej $\varphi(x)$, taka, ażeby każda funkcja zmiennej rzeczywistej była funkcją φ z funkcji mierzalnej.

W. Sierpiński.

Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions des fonctions mesurables.

Présenté dans la séance du 25 Février 1933.

M. S. Ruziewicz a démontré qu'on peut fixer une fonction mesurable $\psi(x)$ (de classe 1 de Baire) de telle sorte que toute fonction d'une variable réelle soit une fonction mesurable de la fonction ψ [1]).

Or, il a posé récemment le problème si l'on peut fixer une fonction mesurable $\varphi(x)$ de telle sorte que toute fonction d'une variable réelle soit la fonction φ d'une fonction mesurable [2]).

---

[1]) Voir sa Communication au II Congrès des Mathématiciens Roumains à Turnu Severin, Mai 1932. Cf. aussi la Note de Eilenberg: ces Comptes rendus, Année XXV (1932), p. 93.

[2]) Cf. S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Mathematica*, vol. VII (Cluj 1933), p. 89.

Le but de cette Note est de démontrer (à l'aide du théorème de M. Zermelo) que *la réponse y est négative.*

Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction donnée quelconque d'une variable réelle qui n'est pas constante, donc qui prend au moins deux valeurs distinctes, soient a et $b \neq a$. Posons

$$M = \underset{x}{E}[\varphi(x) = a]. \tag{1}$$

Soit F la famille de tous les ensembles plans parfaits (non vides) qui ont au plus un point sur toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées.

La famille F est évidemment de puissance du continu. Soit

$$P_1, P_2, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \quad (\xi < \gamma) \tag{2}$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal possible formée de tous les ensembles de la famille F.

Il existe donc aussi une suite transfinie du type γ,

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \quad (\xi < \gamma) \tag{3}$$

formée de tous les nombres réels.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie du type γ de nombres réels t_ξ comme il suit.

Soit t_1 le premier terme de la suite (3), tel que la droite $x = t_1$ rencontre l'ensemble P_1.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \gamma$ et supposons que nous avons déjà défini les nombres t_ξ pour $\xi < \alpha$. L'ensemble P_α étant parfait et ayant au plus un point sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées, il existe évidemment un ensemble de puissance du continu de tels droites qui ont des points communs avec P_α. L'ensemble de tous les nombres t_ξ, où $\xi < \alpha$ étant de puissance inférieure à celle du continu (puisque $\alpha < \gamma$), il existe donc des termes t de la suite (3) qui sont $\neq t_\xi$ pour $\xi < \alpha$ et tels que la droite $x = t$ rencontre l'ensemble P_α: soit t_α le premier d'entre eux.

La suite transfinie t_ξ $(\xi < \gamma)$ est ainsi définie par l'induction transfinie et on voit sans peine que leurs termes sont tous distinctes et que la droite $x = t_\alpha$ a un point commun avec l'ensemble parfait P_α.

Définissons maintenant la fonction d'une variable réelle $f(x)$ comme il suit.

Soit x_0 un nombre réel donné. Si $x_0 \neq t_\xi$ pour $\xi < \gamma$, posons $f(x_0) = 0$. Si x_0 est un terme de la suite t_ξ $(\xi < \gamma)$, il existe un indice $\alpha < \gamma$ bien déterminé (par le nombre x_0), tel que $x_0 = t_\alpha$. La droite $x = t_\alpha$ rencontre, comme nous savons, l'ensemble parfait P_α en un point unique, soit (t_α, u_α). Si $u_\alpha \in M$, posons $f(x_0) = b$, si u_α non $\in M$, posons $f(x_0) = a$.

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tout x réel.

Soit maintenant $\psi(x)$ une fonction mesurable donnée quelconque. D'après un théorème bien connu de M. Lusin, la fonction $\psi(x)$ est continue quand on néglige un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut [1]). Il en résulte qu'il existe un ensemble parfait P sur lequel $\psi(x)$ est continue, et l'image géométrique de $\psi(x)$ pour $x \in P$ (c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) du plan, où $x \in P$ et $y = \psi(x)$) est évidemment un ensemble plan parfait qui est un terme de la suite (2), soit P_α. Posons

(4) $$\psi(t_\alpha) = u_\alpha:$$

la droite $x = t_\alpha$ rencontre donc l'ensemble P_α au point (t_α, u_α) et, d'après la définition de la fonction $f(x)$ on a

(5) $$f(t_\alpha) = b, \text{ si } u_\alpha \in M, \text{ et } f(t_\alpha) = a, \text{ si } u_\alpha \text{ non } \in M.$$

Or, de (1) résulte que

(6) $$\varphi(u_\alpha) = a, \text{ si } u_\alpha \in M, \text{ et } \varphi(u_\alpha) \neq a, \text{ si } u_\alpha \text{ non } \in M.$$

Les formules (4), (5) et (6) donnent tout de suite:

$$f(t_\alpha) = b \text{ et } \varphi(\psi(t_\alpha)) = a, \text{ si } u_\alpha \in M$$

et

$$f(t_\alpha) = a \text{ et } \varphi(\psi(t_\alpha)) \neq a, \text{ si } u_\alpha \text{ non } \in M.$$

Dans tous les deux cas on a donc (d'après $a \neq b$):

$$f(t_\alpha) \neq \varphi(\psi(t_\alpha)).$$

Donc, quelle que soit la fonction mesurable ψ, la fonction f ne coïncide pas avec la fonction φ de la fonction ψ.

Nous avons ainsi démontré *qu'il est impossible de fixer une fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$, telle que toute fonction d'une variable réelle soit la fonction φ d'une fonction mesurable.*

---

[1]) Voir p. e. *Fundamenta Mathematicae*, t. III, p. 320 et t. IX, p. 122.

Dimitrie Pompeiu.

O pewnem zagadnieniu, tyczącem się monogeniczności funkcyj zmiennej zespolonej.

Przedstawił F. Leja dn. 25 lutego 1933 r.

Un problème relatif à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe.

Mémoire présenté par M. F. Leja dans la séance du 22 février 1933.

1. Le mot *fonction de variable complexe* est pris ici dans son sens général de simple correspondance entre deux ensembles (w) et (z) de nombres complexes

$$w = f(z).$$

La variable indépendante z prend toutes les valeurs dans l'intérieur, et sur la frontière, d'un domaine simplement connexe D.

On peut prendre pour D un cercle.

Quant à w on suppose *seulement* que c'est une fonction *continue*.

2. Cela étant posé, il est facile de voir qu'on peut construire une fonction $F(z)$, définie dans D et continue dans ce domaine, et telle qu'en un certain point z_0 intérieur à D, $F(z)$ admette $f(z)$ comme *dérivée :*

$$F'(z_0) = f(z_0).$$

En effet, intégrons $f(z)$ le long de *chemins rectilignes* $z_0 z$, intérieur à D, et posons

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

où $F(z_0)$ est une constante quelconque.

Nous définissons ainsi, dans D, une fonction $F(z)$ et il est facile de vérifier que $F(z)$ est *monogène* an point $z = z_0$ et que sa dérivée, en ce point, est $f(z_0)$.

3. Ce résultat se généralisé immédiatement et facilement.

On peut construire une fonction $F(z)$, définie dans D et continue dans ce domaine et telle que $F(z)$ soit *monogène* en un nombre fini de points z_k:

$$F'(z_k) = f(z_k).$$

4. Mais, on peut aller plus loin.

Prenons, dans le cercle D, un diamètre $z_0 z_1$: les points z_0 et z_1 étant les extrémités de ce diamètre.

Je dis que l'on peut construire, dans D, une fonction $F(z)$ qui soit *monogène* pour *tous* les points z du diamètre $z_0 z_1$, situés entre z_0 et z_1:

$$F'(z) = f(z).$$

En effet, soit z un point de l'intérieur du cercle D: je définis $F(z)$, an point z, de la foçon suivante:

Soit z' le pied de la perpendiculaire abaissée de z sur le diamètre $z_0 z_1$:

Je pose

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z'} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{z'}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

les deux intégrales étant calculées sur les chemins rectilignes $z_0 z'$ et $z' z$.

Par le procédé avec lequel elle a été définie $F(z)$ est, dans D: une fonction *continue* et l'on peut vénfier facilement qu'elle est *monogène* pour tout point z situé sur le diamètre $z_0 z_1$.

5. Ce résultat peut aussi être généralisé. On peut construire des fonctions $F(z)$, continues dans D et admettant $f(z)$, comme dérivée, en des points formant un ensemble de segments de droites, on même de lignes rectifiables.

6. Tous ces résultats partiels peuvent être résumés dans la constatatin suivante:

Une fonction

$$w = f(z)$$

étant donnée, dans un cercle D et supposée *continue* il existe, dans D, des fonctions continues $F(z)$ qui admettent, *en certains points,* $f(z)$ comme dérivée:

$$F'(z) = f(z).$$

Il est clair que $f(z)$ étant supposée seulement *continue*, et *non pas* holomorphe, $F(z)$ ne peut pas être *monogène* en tous les points de D, mais seulement en des points forment un certain ensemble E.

7. Quelle est la nature de cet ensemble E? Quelles sont ses propriétés caractéristiques?

Nous avons vu que E peut être formé d'un nombre fini de points, pris dans D; E peut être aussi formé des points d'un segment de droite.

Mais ce sont là des cas particuliers.

Quel est l'ensemble E le plus général?

8. En définitive, tenant compte de l'hypothèse initiale: $f(z)$ fonction *continue* dans D, la question est: caractériser l'ensemble E, le plus général, pour les points duquel une fonction $F(z)$, continue dans D, puisse admettre $f(z)$ comme dérivée.

Stanisław Józef Thugutt.

O janicie, nowym minerale z Janowej Doliny na Wołyniu.

Komunikat zgłoszony dn. 25 lutego 1933 r.

Praca wyjdzie w „Archiwum Mineralogicznem" Tow. Nauk. Warsz. T. IX.

Sur la jeanite, un nouveau minéral de Janowa Dolina en Volhynie.

Mémoire présenté dans la séance du 25 février 1933.

Ce travail paraîtra dans „Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" Vol. IX.

Wacław Kozakiewicz.

O pewnem twierdzeniu z teorji operatorów i jego zastosowaniu do laplasjanów uogólnionych.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dnia 25 lutego 1933 r.

Streszczenie.

W pracy tej rozważam pewne operatory uogólniające operator ΔU Laplace'a, które wprowadzam na drodze aksjomatycznej.

Dla operatorów tych dowodzę twierdzenia o identyczności i podaję zastosowanie tegoż do teorji laplasjanów uogólnionych.

Wacław Kozakiewicz.

Un théorème sur les operateurs et son application à la thèorie des laplaciens generalisés.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz à la séance du 25 février 1933.

Plusieurs auteurs pour approfondir l'étude des fonctions harmoniques et sousharmoniques ont généralisé convenablement l'opérateur ΔU de Laplace [1]). Ils ont démontré, par des voies différentes, l'identité de leurs opérateurs avec le laplacien, en supposant toutefois soit que la différentielle totale de deuxième ordre existe, soit que les dérivées sont continues jusqu'au deuxième ordre.

Le but de la note est de démontrer que, si l'on introduit certains opérateurs plus généraux, d'une manière axiomatique, on peut tirer des avantages que voici: la démonstration de l'identité des différents opérateurs devient plus simple et plus naturelle; on obtient des résultats plus généraux, les conditions supplementaires se réduisant à la continuité des opérateurs.

---

[1]) Blaschke W. Berichte der Kgl. Sächs. Geselschaft der Wissenschaften in Leipzig, t. 68 (1916), p. 3—7.

Privaloff J. Sur les fonctions harmoniques, Moskowskij Matiemat. Sbornik, t. 32 (1924—1925), p. 464—469.

Zaremba S. Contribution à la théorie d'une équation de la physique, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. 21 (1906).

Je dois à mon collègue M. Eilenberg des remarques précieuses concernant l'exposé de la note.

1. Soit (G) un espace vectoriel de M. Banach [1]), dont les éléments sont des fonctions réelles définies partout dans les points ξ d'un espace topologique quelconque Ω de M. Hausdorff [2]). Introduisons une opération fonctionnelle $\overline{A}(f;\,\xi)$ définie pour $f\in(G)$; $\xi\in\Omega$. Admettons que les valeurs de $\overline{A}$ sont des nombres réels et que l'opération satisfait aux axiomes suivants:

$$(1^a)\quad \overline{A}(f+g;\,\xi)\leqslant\overline{A}(f;\,\xi)+\overline{A}(g;\,\xi),$$
$$(2^a)\quad \overline{A}(kf;\,\xi)=k\overline{A}(f;\,\xi),\qquad f\in(G),\ \xi\in\Omega,\ k>0.$$

Etant donné un opérateur $\overline{A}$, faisons lui correspondre un deuxième opérateur, défini de manière suivante:

$$(1)\qquad \underline{A}(f;\,\xi)=-\overline{A}(-f;\,\xi)\qquad f\in(G),\ \xi\in\Omega.$$

En outre, introduisons pour tous les couples f, ξ satisfaisant à la relation:

$$(2)\qquad \overline{A}(f;\,\xi)=\underline{A}(f;\,\xi)$$

un troisième opérateur $A(f;\,\xi)$ en posant:

$$(3)\qquad A(f;\,\xi)=\overline{A}(f;\,\xi).$$

Nous n'admettons cette définition que dans le cas où un tel couple f; ξ existe.

Appelons $\overline{A}$, $\underline{A}$, A respectivement: opérateur supérieur, inférieur et direct. Dans le cas, où (2) subsiste, convenons de dire que l'opérateur A existe pour f et dans ξ.

2. Voici quelques propriétés des opérateurs introduits:

(4) Si $f(x)=0$, on a $\overline{A}(f;\,\xi)=0$ pour tout ξ.

En effet, on a

$$kf(x)=f(x),\ k\neq 0,\quad \text{donc, d'après } (2^a)$$

$$\overline{A}(f;\,\xi)=\overline{A}(kf;\,\xi)=k\overline{A}(f;\,\xi),\quad \text{d'où on obtient:}$$

---

[1]) Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math., t. III, 1922, p. 133—135.

[2]) Hausdorff, Mengenlehre, zweite Auflage, 1927, p. 2̲8.

$$\bar{A}(f;\,\xi)=0.$$

(5) $$\underline{A}(f;\,\xi)\leqslant\bar{A}(f;\,\xi).$$

En effet, la propriété et les relations (4), (1^a), (1) donnent:

$$0=\bar{A}[f+(-f);\,\xi]\leqslant\bar{A}(f;\,\xi)+\bar{A}(-f;\,\xi)=\bar{A}(f;\,\xi)-\underline{A}(f;\,\xi),$$

d'où on obtient:

$$\underline{A}(f;\,\xi)\leqslant\bar{A}(f;\,\xi).$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(6) & \underline{A}(f+g;\,\xi)\geqslant\underline{A}(f;\,\xi)+\underline{A}(g;\,\xi) \\
(7) & \underline{A}(kf;\,\xi)=k\,\underline{A}(f;\,\xi)\quad\text{pour}\quad k\geqslant 0 \\
(8) & \left.\begin{array}{l}\bar{A}(kf;\,\xi)=k\,\underline{A}(f;\,\xi) \\ \underline{A}(kf;\,\xi)=k\,\bar{A}(f;\,\xi)\end{array}\right\}\ k\leqslant 0 \\
(9) &
\end{array}\right\}\ f,\,g\in(G)$$

Les propriétés dernières se démontrent aisément.

(10) $$A(f+g;\,\xi)=A(f;\,\xi)+A(g;\,\xi.$$

(11) $$A(kf;\,\xi)=kA(f;\,\xi),\quad k\ \text{réel}.$$

3. Appelons *fonction normalisante* du champ (G) par rapport à l'opération $\bar{A}$ toute fonction φ du champ (G) pour laquelle on a:

(3^a) $$\bar{A}(f+k\varphi;\,\xi)=\bar{A}(f;\,\xi)+k,$$

quel que soit le point ξ, le nombre réel k et la fonction $f\in(G)$.

Remarquons que (1) et (3^a), (1) entraîne:

(12) $$\underline{A}(f+k\varphi;\,\xi)=\underline{A}(f;\,\xi)+k.$$

Pour une fonction normalisante l'opérateur A existe toujours dans tout point, et on a

(13) $$A(\varphi;\,\xi)=1.$$

Cela résulte immédiatement de (3^a) et (12) si l'on y pose $k=1$, $f(x)=0$.

I. Théorème.

Soit $\xi_0\in\Omega$ et $F\in(G)$. Supposons que les opérateurs $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ satisfont aux conditions suivantes:

(1*) *Il existe une fonction φ normalisante du champ à la fois par rapport à $\bar{A}_1$, et par rapport à $\bar{A}_2$.*

(2*) *Il existe un voisinage K_1 de ξ_0 tel que $A_1(F;\ \xi)$ existe pour $\xi \in K_1$ et est continue pour $\xi = \xi_0$.*

(3*) *Si $f \in (G)$ et si K est un voisinage de ξ_0, tel que $A_1(f;\ \xi)$ existe et $A_1(f;\ \xi) > 0$ pour tout point $\xi \in K$, on a:*

$$\underline{A}_2(f;\ \xi) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout point} \quad \xi \in K.$$

Dans ces conditions l'opérateur A_2 existe pour F et dans ξ_0 et on a:

$$A_2(F;\ \xi_0) = A_1(F;\ \xi_0).$$

Démonstration.

Nous allons démontrer que

$$\overline{A}_2(F;\ \xi_0) \leqslant A_1(F;\ \xi_0).$$

Supposons, au contraire, que

$$(\overline{1}) \qquad A_1(F;\ \xi_0) < \overline{A}_2(F;\ \xi_0),$$

donc, l'opérateur $A_1(F;\ \xi)$ existant pour $x \in K_1$, et étant continu dans le point ξ_0, il existe un nombre M réel et un voisinage $K_2 \subset K_1$ du point ξ_0, tels que

$$(\overline{2}) \qquad A_1(F;\ \xi) < M < \overline{A}_2(F;\ \xi_0) \quad \text{pour} \quad \xi \in K_2.$$

Considérons la fonction:

$$g(\xi) = M\varphi(\xi) - F(\xi).$$

En vertu de (10) et de (11) nous avons:

$$A_1(g;\ \xi) = M - A_1(F;\ \xi) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in K_2,$$

ce qui donne, d'après l'hypothèse (3*) appliquée à K_2,

$$\underline{A}_2(g;\ \xi) \geqslant 0 \quad \text{ou bien}$$

$$M + \underline{A}_2(-F;\ \xi) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in K_2,$$

et, enfin, $M \geqslant \overline{A}_2(F;\ \xi)$ pour $\xi \in K_2$, ce qui pour $\xi_0 \in K_2$ est en contradiction avec $(\overline{2})$.

La formule $(\overline{1})$ est ainsi démontrée. On démontre d'une manière analogue que

$$A_1(F;\ \xi_0) \leqslant \underline{A}_2(F;\ \xi_0)$$

et en vertu de (2) nous avons

$$A_1(F;\ \xi_0) = \underline{A}_2(F;\ \xi_0) = \overline{A}_2(F;\ \xi_0). \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. Passons maintenant à l'application du théorème aux cas particuliers.

Soit Ω un domaine ouvert et connexe du plan euclidien pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires x, y. Soit (C) la classe de toutes les fonctions définies et continues dans Ω. Soit (x_0, y_0) un point de Ω et $f(x, y)$ une fonction de (C).

Considérons les expressions suivantes:

$$\text{(I)} \quad \overline{B}(f;\, x_0, y_0) = \overline{\lim_{r=0}} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\varphi,\, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi - f(x_0, y_0)}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}$$

$$\text{(II)} \quad \overline{P}(f;\, x_0, y_0) = \overline{\lim_{r=0}} \frac{\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\iint_K f(x, y)\, dx\, dy - f(x_0, y_0)}{\dfrac{r^2}{8}},$$

où K désigne le cercle centré dans (x_0, y_0) et du rayon r.

$$\text{(III)} \quad \overline{Z}(f;\, x_0, y_0) =$$

$$= \overline{\lim_{r=0}} \frac{f(x_0 + r, y_0) + f(x_0 - r, y_0) + f(x_0, y_0 + r) + f(x_0, y_0 - r) - 4f(x_0, y_0)}{r^2}.$$

Les opérateurs $\overline{B}$, $\overline{P}$ et $\overline{Z}$ satisfont aux axiomes que nous avons posé. Pour $\underline{B}$, $\underline{P}$, $\underline{Z}$ on a des expressions analogues, où intervient $\underline{lim}$ au lieu de $\overline{lim}$!

Ces opérateurs ont été introduits par MM. Blaschke[1]), Privaloff[2]) et Zaremba[3]).

Nous nous appuierons sur les propositions connues, suivantes:

α) Si $f(x, y)$ est continue dans Ω et si on a $\overline{Z}(f;\, x, y) \geqslant 0$ pour tout point $(x, y) \in \Omega$ alors $\underline{B}(f;\, x, y) \geqslant 0$ [4]).

---

1) L. c. p. 5.

2) L. c. p. 464.

3) L. c.

4) v. 3) et S. Saks. O funkcjach wypukłych i podharmonicznych, Mathesis Polska, 7 VI, 1931 p. 63.

β) Si $f(x, y)$ est continue dans Ω et si $\overline{B}(f;\, x, y) \geqslant 0$ pour tout point $(x, y) \in \Omega$ on a $\underline{P}(f;\, x, y) \geqslant 0$ [1]) et, inversement si la relation $\overline{P}(f;\, x, y) \geqslant 0$ a lieu dans tout point $(x, y) \in \Omega$ on a aussi $\underline{B}(f;\, x, y) \geqslant 0$.

On peut remarquer que pour les opérateurs, définis plus haut, la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4}$$

est une fonction normalisante du champ des fonctions continues.

Or, en s'appuyant sur le théorème que nous avons démontré, nous obtenons les théorèmes suivants:

II. Théorème.

Si pour la fonction continue $f(x, y)$ l'opérateur $Z(f;\, x, y)$ existe dans un domaine Ω et est continu dans le point $(x_0, y_0) \in \Omega$, alors dans ce point les opérateurs $B(f;\, x_0, y_0)$ et $P(f;\, x_0, y_0)$ existent aussi et on a:

$$Z(f;\, x_0, y_0) = B(f;\, x_0, y_0) = P(f;\, x_0, y_0).$$

III. Théorème.

Si pour la fonction continue $f(x, y)$ l'opérateur $P(f;\, x, y)$ (resp. $B(f;\, x, y)$) existe dans le domaine Ω et est continu dans le point $(x_0, y_0) \in \Omega$, alors dans ce point l'opérateur $B(f;\, x_0, y_0)$ (resp. $P(f;\, x_0, y_0)$) existe aussi et on a:

$$B(f;\, x_0, y_0) = P(f;\, x_0, y_0).$$

En considérant dans l'espace à n dimensions les opérateurs analogues à $\underline{P}$, $\underline{B}$ et $\underline{Z}$ on trouve que les théorèmes enoncés ci-dessus demeurent vrais.

5. En revenant au cas général du champ (G) et de l'espace topologique Ω, admettons la définition suivante: disons que $\overline{A}$ jouit de la propriété du maximum, si $\overline{A}(f;\, \xi) \leqslant 0$ pour tout $\xi \in \Omega$ et pour f dans le cas, où la fonction f admet dans le point ξ un maximum local et relatif.

D'une manière analogue on définit, par l'inégalité $\underline{A}(f, \xi) \geqslant 0$ ce qui veut dire le terme: l'opération donnée jouit de la propriété du minimum.

---

[1]) E. Szpilrajn. Remarques sur les fonctions sousharmoniques, Annals of Matematics 1933.

En particulier, on a pour le cas des fonctions continues et pour l'espace euclidien le théorème suivant:

VI. Théorème.

Soit $F(x)$ une fonction, définie et continue dans un domaine (D) ouvert et connexe de l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions; soit (C) le champ des fonctions continues dans D.

Supposons qu'il existe un opérateur $\bar{A}(f;\, x)$ du type considéré défini pour toute fonction $f \in (C)$ et pour tout $x \in D$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

(1*) $\bar{A}$ jouit de la propriété du maximum;

(2*) $\bar{A}(F;\, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in D$;

(3*) il existe une fonction dans D, normalisante du champ (C) par rapport à $\bar{A}$;

(4*) on a $\bar{A}(F+u;\, x) = \bar{A}(F;\, x)$ pour toute fonction u harmonique dans $D_1 \subset D$ et pour tout $x \in D_1$ (D_1 désigne un domaine quelconque).

Dans ces conditions $F(x)$ est sous-harmonique dans D. Ce théorème résulte de la proposition suivante:

Pour que la fonction $f(x)$ continue dans le domaine D ouvert et connexe y soit sous-harmonique, il faut et il suffit que, quel que soit le domaine H ouvert et connexe, où $H \subset D$ et quelle que soit la fonction $u(x)$ harmonique dans H, la fonction $f(x)+u(x)$ jouisse de la propriété suivante: si elle admet dans un point de H son maximum absolu, elle est constante dans H[1]).

Le théorème analogue subsiste pour les fonctions sur-harmoniques. Pour les fonctions harmoniques on trouve un théorème dont l'énoncé s'obtient de celui du théorème IV, en changeant l'inégalité spécifiée dans (2*) en $\underline{A}(f;\, x) \leqslant 0 \leqslant \bar{A}(f;\, x)$ et l'égalité (4*) en $\bar{A}(\pm F+u;\, x) = \bar{A}(\pm F;\, x)$.

---

[1]) V. p. ex. Saks. L. c. p. 53, 56.

Posiedzenie

z dnia 18 marca 1933 r.

Stanisław Józef Thugutt.

O ptylolicie z Mydzka na Wołyniu.

Komunikat zgłoszony dn. 18 marca 1933 r.

Sur la ptilolite Volhynienne de Mydzk.

Mémoire présenté dans la séance du 18 mars 1933.

Antoni Łaszkiewicz.

O postaci krystalicznej aspiryny handlowej.

Przedstawił S. J. Thugutt dn. 18 marca 1933 r.

Sur la forme crystalline de l'aspirine.

Note présentée par M. S. J. Thugutt dans la séance du 18 mars 1933.

Ludwik Jabłoński.

Własności krystalograficzne jangoniny.

Przedstawił S. J. Thugutt dn. 18 marca 1933 r.

Sur les propriétés cristallographiques de l'Yangonine.

Note présentée par M. S. J. Thugutt dans la séance du 18 mars 1933.

Prace niniejsze wyjdą w Archiwum Mineralogicznem Tow. Nauk. Warsz. Tom IX.

Ces travaux paraîtront dans „Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" Vol. IX.

Antoni Morawiecki.

Przyczynek do petrografji dolomitu z Zagnańska.

Przedstawił P. S. J. Thugutt dn. 18 marca 1933 r.

Note pétrographique sur la dolomie de Zagnańsk (Pologne).

Présentée par M. S. J. Thugutt dans la séance du 18 mars 1933.

W synklinie, dzielącej siodło Brankowieckie od siodła Łysogórskiego, najdalej ku zachodowi odsłoniętym utworem dewonu środkowego jest skała dolomitowa w Zagnańsku, wzniesiona na 370 m. nad poz. m. i przesunięta znacznie wielkim uskokiem ku południowi. Najlepsze jej odkrywki dostrzegamy w górze Chełmowej, skąd czerpano materjał do niniejszej notatki. Dolomit spoczywa tu na czerwonych piaskowcach z fioletowym odcieniem, zawierających warstewki zlepieńca, złożonego z doskonale zaokrąglonych ziarn mlecznego kwarcu [1]).

W wyższych warstwach dolomitu dostrzegamy konkrecje i wkłady szarych *krzemieni*, w szczelinach zaś skupienia i drobne kryształy *barytu* wraz z *kryształem skalnym, rudami manganu, limonitem, hematytem (bazanomelanem)* i *kalcytem*.

Dolomit z Zagnańska jest skałą twardą i zbitą. Barwę posiada szarą, ciemno-szarą, brunatnawą i brunatną z odcieniem fioletowym lub czerwonym. Pod ciśnieniem rozpada się wzdłuż licznych utajonych spękań, rozrzuconych bezładnie w całej masie skały, na mniejsze lub większe odłamki o ostrych krawędziach. Powierzchnia odłamków jest nierówna. W dolomicie tkwią bardzo rzadkie gruzły limonitu, kwarcu i kalcytu.

Badania nad termoluminescencją dolomitów z Zagnańska, przeprowadzone przez p. J. Iwińskiego w aparacie własnego pomysłu, potwierdziły w zupełności spostrzeżenia prof. St. J. Thugutta [2]). Wykazały one, że czas trwania tego zjawiska wynosi przeszło 30 minut.

---

[1]) J. Siemiradzki: Geol. ziem polskich, Lwów, **1** (1922), 139.
[2]) Kosmos. Lwów. **36** (1911) 416.

Skała badana pod mikroskopem w płytkach cienkich ujawnia złożenie ziarniste, przyczem nierzadko poszczególne ziarna dolomitu wykazują częściowo lub całkowicie pokrój idjomorficzny. Dolomit jest bezbarwny, zwykle przezroczysty, rzadziej zmętniały od wrostków, między któremi wyróżniono *związki organiczne* (bituminy) oraz *substancje ilaste* (kaolin). Ciała powyższe rozmieszczone są również pomiędzy poszczególnemi ziarnami dolomitu, wypełniając wolne przestrzenie. Tu także dostrzeżono drobne blaszki czerwonego *hematytu*, brunatne skrzepy *limonitowe*, skupienia ziarn *kalcytowych*, przezroczyste lub zmętniałe blaszki *muskowitu* i pojedyńcze bardzo rzadko spotykane ziarna *turmalinu, cyrkonu, kordjerytu, magnetytu, rutylu, amfiboli, barytu, manganitu, ankierytu.*

Wymiary poszczególnych minerałów rzadko przekraczają 0,07 mm. w średnicy [1]). Zwykle są one mniejsze. Wykształcenie ich bywa rozmaite. Na wyróżnienie zasługują: pleochroityczny brunatny i zielony turmalin, ujawniający prawie zawsze pokrój idjomorficzny, jak również kwarc, w którego drobniutkich kryształkach pochodzenia autigenicznego skupia się niekiedy znaczna ilość substancyj ilastych (szczególniej w środkowej części kryształków), powodując ich zmętnienie. Niektóre kryształki są agregatami złożonemi z kilku nieregularnych ziarenek kwarcu rozmaicie ułożonych [2]). Kwarc pochodzenia allogenicznego obecny jest w postaci drobnych nielicznych zaokrąglonych ziarenek. Brunatny rutyl, niebieskawy pleochroityczny kordjeryt, zielonawy amfibol i nieprzezroczysty o odblasku niebieskawym magnetyt są najrzadziej spotykanemi minerałami akcesorycznemi. Pojedyńcze igiełki i włókna barytu skupiają się niekiedy w drobne gruzełki, na których powierzchni wykształciły się wydłużone kryształki o pokroju idjomorficznym. Czarny manganit w mieszaninie z limonitem i kwarcem włóknistym tworzą drobne nieliczne kuleczki o budowie współśrodkowo-koncentrycznej. Niekiedy dwie takie kuleczki spojone są razem. Stosunkowo liczny cyrkon dostrzegamy stale

---

[1]) Części nierozpuszczalne w rozcieńczonym kwasie solnym składają się z 9,81% cząsteczek o średnicy poniżej 0,02 mm., 0,56% o średnicy 0,02—0,04 mm., 0,08% o średnicy 0,04—0,056 mm., 0,05% o średnicy 0,056—0,07 mm. i 0,10% o średnicy powyżej 0,07 mm. Określenie wykonano na 2 kg. dolomitu z Zagnańska.

[2]) J. Sioma: Nabludienija i izsledowanija po mineralogji i litologji. Łysogorja, Moskwa (1917), 135.

w postaci ziarn zaokrąglonych. Nieliczne nieregularne ziarenka barwy brunatnej lub żółtej swemi cechami najbardziej odpowiadały ankierytowi.

Analiza chemiczna skały badanej dała wyniki następujące:

części nierozpuszczalne

SiO_2	7,20%	wag.
CaO	śl.	„
Fe_2O_3	0,96%	„
Al_2O_3	1,84%	„
H_2O	0,61%	„
Razem	10,61%	wag.

części rozpuszczalne

CaO	27,81%	wag.
MgO	18,43%	„
CO_2	42,17%	„
Fe_2O_3	0,51%	„
Al_2O_3	0,17%	„
MnO	0,30%	„
H_2O (pow. 105° C.)	0,23%	„
H_2O (pon. 105° C.)	0,09%	„
Razem	89,71%	wag.
cz. nierozp.	10,61%	„
Razem	100,32%	wag.

Z przeliczenia powyższej analizy wynika, że skała badana zawiera nadmiar węglanu wapnia w stosunku do normalnego dolomitu, gdyż stosunek $CaO:MgO$ wynosi 1,09. Analiza ta daje więc rezultat zgodny z analizą p. K. Koziorowskiego [1]), w której stosunek $CaO:MgO$ wynosi 1,07. Skądinąd wiemy [2]), że stosunek powyższy nie zawsze bywa zachowany. Obok dolomitów wyróżniono wapienie dolomityczne o mniejszej zawartości magnezu [3]). Uwzględniając analizy p. K. Koziorowskiego [4]) i prof. J. Siomy [5]) stwierdzić należy, że zawartość części nierozpuszczalnych waha się w dolomicie z Zagnańska od 1,47% do 10,61%.

Oprócz powyżej wyszczególnionych składników prof. J. Siemiradzki [6]) i prof. J. Sioma [7]) podają obecność w dolomicie z Zagnańska śladów miedzi, którą prof. St. J. Thugutt [8]) przypisuje *chalkozynowi*, zaś prof. J. Siemiradzki *malachitowi*.

---

[1]) Chemik Polski, Warszawa, **6** (1916) 593.

[2]) J. Sioma, l. c. 138.

[3]) J. Sioma, l. c. 139.

[4]) l. c. 593.

[5]) l. c. 138.

[6]) l. c. 139.

[7]) l. c. 138.

[8]) l. c. 413. Prof. St. J. Thugutt stwierdził również obecność siarki związanej prawdopodobnie w postaci siarczków.

Nadmiar węglanu wapnia w badanym dolomicie powiązać należy z obecnością kalcytu, który stwierdzono zarówno z pomocą mikroskopu jak i drogą analiz mikrochemicznych, zalecanych przez J. Lemberga [1]) i prof. St. J. Thugutta [2]).

Na podstawie ryczałtowej analizy chemicznej, jak również analiz poszczególnych składników, wyodrębnionych z pomocą zabiegów mechanicznych i chemicznych, ustalono w przybliżeniu skład mineralogiczny skały badanej. Skała zawiera 84,24% dolomitu, 4,13% kalcytu, 5,15% kwarcu względnie innych odmian krzemionki, 4,63% cząsteczek gliniastych przeliczonych na kaolin, 0,96% hematytu, 0,68% limonitu i pojedyńcze ziarna minerałów ciężkich.

Liczby powyższe wraz z innemi spostrzeżeniami pozwalają na wysnucie wniosku, że w dolomicie z Zagnańska najbardziej uwydatnił się proces silifikacji. Kaolinizacji w dolomicie nie dostrzeżono. Kalcyt i limonit wydzieliły się z roztworów infiltrujących. Pochodzenia hematytu nie ustalono.

Pochodzenie minerałów akcesorycznych nie dało się wyjaśnić. Możemy tylko na podstawie obecności kryształów turmalinu i rutylu, obok otoczonych ziarn cyrkonu, przypuszczać, że minerały te pochodzą z różnych źródeł i podlegały działaniu odmiennych czynników.

Roztwory, zawierające w swoim składzie sole barowe i manganowe, oddziałały na skałę w minimalnym stopniu.

Czy powstanie skały przypisać należy powolnej dolomityzacji wapieni, stwierdzić trudno. Za przypuszczeniem powyższem przemawiają wszakże znaczne wahania w zawartości magnezu w dolomitach.

Wykonano w Zakładzie
Mineralogicznym Uniwersytetu w Warszawie
w roku akademickim 1932/1933.

---

[1]) Z. d. d. Geol. Ges., 1892, 231.

[2]) Kosmos. Lwów. **35** (1910) 510; Kosmos. Lwów. **36** (1911) 412.

Kurt Schütte (Göttingen).

O pewnym częściowym systemie rachunku zdań.

Przedstawił J. Łukasiewicz dnia 18 marca 1933 r.

Kurt Schütte (Göttingen).

Über einen Teilbereich des Aussagenkalkuls.

Note présentée par M. J. Łukasiewicz dans la séance du 18 Mars 1933.

Es soll hier ein kurzer Beweis dafür gegeben werden, dass die drei Formeln

$$CpCqp, \quad CCpqCCqrCpr, \quad CCCpqpp$$

ein *vollständiges Axiomensystem für den Teilbereich des Aussagenkalkuls* bilden, *in dem die Implikation als einzige Grundverknüpfung auftritt* [1]).

Wir bezeichnen dieses Axiomensystem mit A und das aus demselben durch Hinzufügung der Formel

$$C\varphi p$$

entstehende System mit A', wobei φ ein Aussagensymbol (die identisch falsche Aussage) bedeutet.

Man erkennt zunächst leicht, dass A' ein vollständiges Axiomensystem des gesamten Aussagenkalkuls ist. Definiert man nämlich Np durch $Cp\varphi$, so sind die Formeln

$$CpCNpq, \quad CCNppp$$

aus A' ableitbar, welche in Verbindung mit unserem zweiten Axiom ein von Herrn Łukasiewicz angegebenes vollständiges Axiomensystem darstellen.

Demnach ist nur noch zu zeigen, dass *eine jede aus A' ableitbare Formel, die das Aussagensymbol φ nicht enthält, sich auch aus A allein ableiten* lässt.

---

[1]) Dasselbe Ergebnis ist angeführt bei J. Łukasiewicz u. A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII, 1930.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz: Ist eine Formel $\mathfrak{a}$ aus A' ableitbar, so lässt sich eine Formel der Gestalt

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{a}$$

aus A allein ableiten.

Um den Nachweis hierfür zu erbringen, nehmen wir an, dass ein Beweis aus A' für die Formel $\mathfrak{a}$ vorgelegt sei. Diesen formen wir zunächst so um, dass aus gewissen Ausgangsformeln, die durch Einsetzungen aus den Axiomen entstehen, nur mit Hilfe des Schlussschemas („wenn $\mathfrak{s}$ und $C\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ gilt, so auch $\mathfrak{t}$"), ohne weitere Einsetzungen vorzunehmen, weitergeschlossen wird, bis sich die Endformel $\mathfrak{a}$ ergibt.

Sind nun

$$C\varphi\mathfrak{p}_1,\ C\varphi\mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ C\varphi\mathfrak{p}_n$$

die Ausgangsformeln unseres Beweises, die durch Einsetzung aus dem Axiom $C\varphi p$ entstehen, so ersetzen wir eine jede im Beweis vorkommende Formel $\mathfrak{c}$ durch die Formel

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{c}.$$

Die so entstehenden Formeln bilden wieder einen Beweis. Hat man nämlich in dem vorgelegten Beweis eine Formel $\mathfrak{t}$ aus $\mathfrak{s}$ und $C\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ abgeleitet, so kann man auch

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{t}$$

aus

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{s}$$

und

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n C\mathfrak{s}\mathfrak{t}$$

allein mit Hilfe des Systems A ableiten (da sich aus der letztgenannten Formel und den Axiomen des Systems A die Formel

$$CCC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{s}\, CC\varphi\mathfrak{p}_1\, CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{t}$$

gewinnen lässt). Der Beweiszusammenhang bleibt also bei unseren Ersetzungen in der Weise erhalten, dass an Stelle des Schlussschemas eine mehrmalige Anwendung von Formeln des Systems A und des Schlussschemas tritt.

Beachtet man jetzt, dass die aus $C\varphi p$ gewonnenen Formeln

$$C\varphi\mathfrak{p}_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

in die Formeln

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1 CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n C\varphi\mathfrak{p}_i$$

übergehen, die leicht aus A allein abgeleitet werden können, und alle aus den Axiomen von A gewonnenen Formeln ebenfalls in aus A ableitbare Formeln übergehen, so erkennt man die Gültigkeit unseres Hilfssatzes.

Enthält nun die Formel $\mathfrak{a}$ das Symbol φ nicht, so ist mit der nach dem Hilfssatz aus A ableitbaren Formel

$$CC\varphi\mathfrak{p}_1 CC\varphi\mathfrak{p}_2 \ldots CC\varphi\mathfrak{p}_n\mathfrak{a}$$

auch die hieraus bei Ersetzung von φ durch $\mathfrak{a}$ entstehende Formel

$$CC\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1' CC\mathfrak{a}\mathfrak{p}_2' \ldots CC\mathfrak{a}\mathfrak{p}_n'\mathfrak{a}$$

aus A ableitbar, da ja in den Axiomen dieses Systems das Symbol φ überhaupt nicht auftritt.

Aus der letztgenannten Formel erhält man mit Hilfe der aus A ableitbaren Formeln

$$CCC\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i'\mathfrak{a}\mathfrak{a}, \quad CCqrCCpqCpr$$

schliesslich die Formel $\mathfrak{a}$, die somit allein aus A gewonnen ist. Hiermit ist der gewünschte Nachweis für die Vollständigkeit des Axiomensystems A (in bezug auf reine Implikationsformeln) erbracht.

Ostatnie Wydawnictwa Towarzystwa Naukowego Warszawskiego Wydz. III, IV.

Skład: Warszawa, ul. Śniadeckich 8. T. N. W.

Archiwum Mineralogiczne. Tom VIII. Warszawa. 1932.

R. Kozłowski i S. Jaskólski. Złoża srebro-cynowe Oruro w Boliwji. — A. Łaszkiewicz. Spostrzeżenia krystalograficzne z Oruro. — S. J. Thugutt. O rozpuszczalności kruszcu cynowego w wodzie przekroplonej. — S. J. Thugutt. O filipsycie z dna Oceanu Spokojnego. — S. J. Thugutt. O epinatrolicie jako składniku hydronefelinowym. — S. J. Thugutt. O nowej konstrukcji aparatu destylacyjnego wody. — M. Kołaczkowska. Skład mineralogiczny predacytu.

Archiwum Nauk Antropologicznych. Dział A. Antropologja. № 5. Warszawa. 1933.

Leon Manteuffel-Szoege. Antropomorfologja wątroby. (Studja nad antropomorfologją wątroby polaków).

Archiwum Hydrobiologji i Rybactwa. Wyd. Instytutu im. M. Nenckiego. Tom VI. 1932.

A. Lityński. Sieja wigierska. Przyczynek morfologiczno-biologiczny. — J. Wiszniewski. O kilku gatunkach wrotków, zebranych w Hiszpanji. — Z. Koźmiński. O stosunkach tlenowych w jeziorze Hańcza na Suwalszczyźnie. — J. Wiszniewski. Wrotki piaszczystych brzegów jeziora Wigry. — K. Demel. Bliższa kategoryzacja wiatrów ze względu na ich efekty hydrograficzne przy Helu. — A. Moszyński. Skąposzczety (*Oligochaeta*) zatoki Puckiej. — K. Demel. Poziom morza — wskaźnikiem połowów. — Z. Koźmiński. O stanowisku systematycznem „*Cyclops strenuus*" z jezior górskich.

Monografje z pracowni Neurobiologicznej. II. 1928.

N. Zandowa. Splot naczyniasty (*Plexus chorioideus*) (Anatomja, fizjologja, patologja).

Planta Polonica. Materjały do Flory Polskiej.

T. I. 1930. K. Karpowicz. Przyczynek do znajomości flory powiatu Nowogródzkiego.

T. II. 1930. R. Kobendza. Stosunki fitosocjologiczne puszczy Kampinoskiej.

Archiwum Nauk Biologicznych. 1929 i 1930.

T. III, zesz. 1. 1929. J. Grzybowski. O układzie żylnym mózgu człowieka.

T. III, zesz. 2. 1929. R. Poplewski. Mięśnie grzebieniaste serca *(Musculi pectinati)*.

T. III, zesz. 3. 1930. J. Łukasiak. Badania anatomiczne i rozwojowe nad *Dioctophyme renale* (Goeze 1782).

T. IV, 1933. B. Hryniewiecki. Tentamen Florae Lithuaniae. (Zarys flory Litwy).

Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych.

Nr. 33. 1930. J. Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration.

№ 34. 1933. A. Tarski. Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

R. XXV. 1932. Zesz. 1—6, 7—9.

Prace następujących autorów: S. Eilenberga S. Gołąba, W. Gorczyńskiego, H. Herszfinkla, S. Jaskólskiego, T. W. Jezierskiego (2), H. Jędrzejowskiego, L. Kantorovitcha, R. Kozłowskiego, A. Koźniewskiego, J. H. Kusnera, F. Leii, E. Livensona, A. Łaszkiewicza (2), S. Mazurkiewicza, I. Niewiedzkiej, W. Opalskiego, M. Polaczka, Ch. Rajfelda, W. Sierpińskiego (3), O. Stelmana, L. Szperla (2), A. Tarskiego, St. J. Thugutta (4), J. Tołwińskiej, L. Trzeciakiewicza, W. Wolibnera, M. Zywa.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział IV nauk biologicznych.

R. XXV. 1932. Zesz. 1—6, 7—9.

Prace następujących autorów: K. Bassalika, K. Białaszewicza, M. Boguckiego, M. Burbianki, M Chejfeca, S. Feliksiaka, P. Flanzówny, A. Fonberga, W. Giedroycia, M. Gomólińskiej, W. Iwanowicza, G. Juchnowieckiego, Z. Konopackiej, E. Kornbluma, Z. Koźmińskiego (3), E. Kryszczyńskiego, M. Laskowskiego, E. Lotha, W. Niemierki, B. Niewiecze-rzałówny, K. Obitza, J. Orłowskiej, J. Wiszniewskiego i K. Wnorowskiego.

Zakłady Graficzno-Introl. J. DZIEWULSKI Warszawa.