

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVII 1934

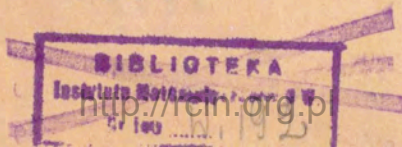
Zeszyt 1—6



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1934



Redaktor

Bolesław Hryniewiecki

Adres Redakcji: Warszawa, Nowy-Świat 72.



SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
WARSZAWSKIEGO**

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXVII 1934

Zeszyt 1—6



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1 9 3 4

Arke 76/II/37



TREŚĆ ZESZYTU 1—6.

	Str.
W. Sierpiński. Uwaga o pewnej klasie zbiorów miary zero	1
L. Szperl i A. Fajnberg. O działaniu siarki na <i>p, p'</i> -dwutolyl	3
V. W. Adkisson. O przedłużaniu homeomorfizmu krzywych na powierzchni kuli	5
W. Hetper. Arytmetyka semantyczna	9
W. Ślebodziński. Notatka o przestrzeniach mających koneksję afinalną	27
Wł. Gorczyński. O związku między promieniowaniem rozproszonym nieba i stopniem usłonecznienia	32
M. Petrovitch. Twierdzenie o funkcjach całkowitych	45
H. Malchair. Kilka własności ciągów i szeregów pozaskończonych	51
M. Polaczek. O sulfonowaniu kwasu <i>o</i> -chlorobenzoowego	57
M. Danysz i M. Żyw. Nowy radiopierwiastek	59
H. Herszfkinkel i A. Wronberg. O promieniotwórczości samaru	66
Z. Sujkowski. O bentonicie polskim z okolic Krzemieńca	71
T. Białas. Niektóre stałe krystalograficzne benzaloketolu pinenu	72
St. J. Thugutt. Ultramikroskopowe badania kryształów kwarcowych w związku z ich barwą i genezą	72
W. Sierpiński. O pewnym zagadnieniu, tyjącem się rodzin nieprzeliczalnych zbiorów miary dodatniej	73
L. Szperl i J. Herszaft. Estry kwasu α -tionaftoesowego	75
A. Łaskiewicz. O strukturze syngenitu z Kałusza	76
G. García. Wyjaśnienie einsteinowskie zjawiska Stark-Lo Surdo — Zeemann'a	77
Wł. Gorczyński. O systemie dziesiętnym podziału klimatów kuli ziemskiej z zastosowaniem do Europy	87
St. J. Thugutt. Produkty hydrolizy labradoru wołyńskiego z Horoszek wraz z badaniami rentgenologicznymi d-ra Marji Kołacz-kowskiej	99
S. Jaskólski. Złoża srebrowo-cynowe Chocaya w Boliwji. Z wstępem geologicznym przez Romana Kozłowskiego	99
K. Smulikowski. Skąły wybuchowe Andów boliwijskich. Badania mikrograficzne. Poprzedzone szkicem rozprzestrzenienia skał wybuchowych w Andach boliwijskich przez Romana Kozłowskiego	100

TABLE DES MATIÈRES.

	Page
W. Sierpiński. Remarque sur une classe d'ensembles de mesure nulle	1
L. Szperl et A. Fajnberg. Sur l'action du soufre sur p, p' -ditolyle	3
V. W. Adkisson. On extending a continuous (1-1) correspondence of continuous curves on a sphere	5
W. Hetper. Semantische Arithmetik	9
W. Ślebodziński. Notice sur les variétés à connexion affine	27
Wł. Gorczyński. Interdependence between the amount of diffuse sky radiation and the duration of sunshine	43
M. Petrovitch. Proposition sur les fonctions entieres	45
H. Malchair. Quelques propriétés des suites et des séries transfinies	51
M. Polaczek. Sur la sulfonation de l'acide <i>o</i> -chlorobenzoïque	57
M. Danysz et M. Żyw. Nouveau élément radioactif	65
H. Herszfinkiel et A. Wronberg. Sur la radioactivité du samarium	67
Z. Sujkowski. The bentonite in Poland in lower Sarmatian of Krze- mieniec	71
T. Białas. Sur quelques propriétés cristallographiques de benzaketol du pinène	72
St. J. Thugutt. Etudes ultramicroscopiques de cristaux du quartz au point de vue de leur couleur et leur gènesè	72
W. Sierpiński. Sur un problème concernant les familles indénom- brables d'ensembles de mesure positive	73
L. Szperl et J. Herszajt. Ethers-sels d'acide α -thionaphtoïque	75
A. Łaszkiewicz. Sur la structure de la syngénite de Kałusz en Pologne	76
G. García. Explicación einsteniana del Efecto Stark-Lo Surdo — Efecto Zeemann	77
Wł. Gorczyński. Decimal scheme of world's climates with adaptation to Europe	88
St. J. Thugutt. Sur les produits d'hydrolyse de labrador Volhynien de Horoszki avec une étude roentgenologique de M-lle Marie Kołaczowska	99
S. Jaskólski. Les gisements argento-stanfères de Chocaya en Bolivie. Avec un Aperçu géologique par Roman Kozłowski	99
K. Smulikowski. Les roches éruptives des Andes de Bolivie. Etude micrographique. Précédée d'une Esquisse de la répartition des roches éruptives dans les Andes de Bolivie par Roman Kozłowski	100

Posiedzenie

z dnia 17 stycznia 1934 r.

W. Sierpiński.

Uwaga o pewnej klasie zbiorów miary zero.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 17 stycznia 1934 r.

Streszczenie.

Zakładając, że $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, autor dowodzi, że nie w każdym zbiorze liniowym nieprzeliczalnym miary zero istnieje część nieprzeliczalna, dająca się pokryć przeliczalną mnogością przedziałów o dowolnych danych długościach.

W. Sierpiński.

Remarque sur une classe d'ensembles de mesure nulle.

Présenté dans la séance du 17 Janvier 1934.

Nous disons qu'un ensemble linéaire E satisfait à la condition (C), si, quelle que soit la suite infinie de nombres réels positifs a_1, a_2, a_3, \dots , il existe une suite infinie des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ recouvrant E et telle que la longueur de l'intervalle δ_n est a_n , pour $n = 1, 2, 3, \dots$

M. E. Borel¹⁾ a posé en 1919 le problème s'il existe un ensemble linéaire non dénombrable satisfaisant à la condition (C).

¹⁾ Bull. Soc. Math. de France 47, p. 1; cf. E. Szpilrajn. Fund. Math. t. XV, p. 126.

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ j'ai prouvé que la solution de ce problème est affirmative¹⁾.

Or, le problème se pose si tout ensemble linéaire non dénombrable de mesure nulle contient un ensemble non dénombrable satisfaisant à la condition (C). En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ je prouverai que *réponse est négative*.

Soit P un ensemble parfait de mesure nulle situé à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$. Comme on sait, on peut définir dans $(0, 1)$ une fonction continue et croissante qui transforme P en un ensemble $Q = f(P)$ de mesure positive. Or, comme j'ai démontré²⁾, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'ensemble Q , en tant que de mesure positive, contient un sous-ensemble non dénombrable N , tel que tout sous-ensemble non dénombrable de N est non mesurable.

Désignons par M l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle $(0, 1)$, tels que $f(x) \in N$. L'ensemble M est évidemment non dénombrable et contenu dans P (puisque $M \subset Q = f(P)$ et $f(x)$ est à valeurs distinctes), donc M est de mesure nulle.

Je dis que l'ensemble M ne contient aucun sous-ensemble non dénombrable satisfaisant à la condition (C).

En effet, admettons que E est un sous-ensemble non dénombrable de M satisfaisant à la condition (C). La fonction $f(x)$, en tant que continue dans l'intervalle $(0, 1)$, d'après un théorème de M. Szpilrajn³⁾, transforme l'ensemble E en un ensemble $f(E)$ qui satisfait encore à la condition (C). Or, la fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes et l'ensemble E étant non dénombrable, l'ensemble $f(E)$ est non dénombrable et, d'après $E \subset M$, on a $f(E) \subset f(M) = N$. L'ensemble $f(E)$ est donc un sous-ensemble non dénombrable de N et, d'après la propriété de N , est non mesurable. L'ensemble $f(E)$ ne satisfait pas donc à la condition (C) et nous aboutissons à une contradiction.

L'ensemble M (qui est non dénombrable et de mesure nulle) ne contient donc aucun sous-ensemble satisfaisant à la condition (C). Notre assertion est ainsi démontrée.

¹⁾ *Fundamenta Mathematicae*, t. XI, p. 304.

²⁾ *Fundamenta Mathematicae*, t. XIV, p. 195.

³⁾ *Fund. Math.* t. XV, p. 127 (Lemme).

L. Szperl i A. Fajnberg.

O działaniu siarki na p, p' -dwutolyl.

Przedstawił L. Szperl dnia 17 stycznia 1934 r.

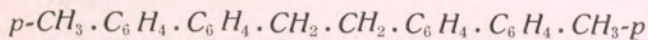
Sur l'action du soufre sur p, p' -ditolyle.

Mémoire présenté dans la séance du 17 Janvier 1934.

Streszczenie.

Podczas ogrzewania p, p' -dwutolylu z siarką (stosunek 1:1) w ciągu 35 godzin w t. 210—230⁰ wydzielal się siarkowodór i wytworzyła się żółto-brązowa masa krystaliczna. Z niej udało się dotychczas wyodrębnić dwa indywiduala chemiczne:

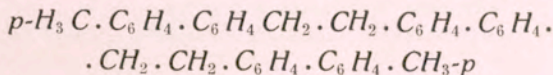
1. Drobnokrystaliczną substancję białą o t. topn. 210—212⁰, która, na podstawie wyników analizy, pomiaru ciężaru cząsteczkowego metodą Rasta oraz odpowiednich prób na związki nienasycone, okazała się węglowodorem nasyconym o wzorze:



Związek ten jest rozpuszczalny w pospolicie używanych rozczynnikach organicznych. W roztworach wykazuje, prawdopodobnie wskutek nikłej domieszki obcego materiału, dosyć silną fluorescencję fioletową.

2. Substancję w postaci lekkiego pyłu krystalicznego barwy żółtawej, topniejącą w t. 310—315⁰, rozpuszczalną na gorąco: w benzenie, lepiej w toluenie i ksylenie, najlepiej w nitrobenzenie, nie rozpuszczalną w alkoholu, eterze, acetonie.

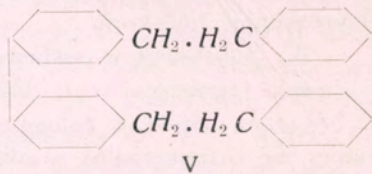
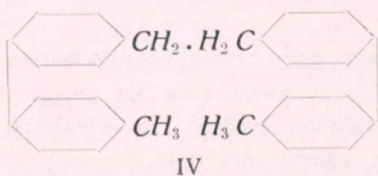
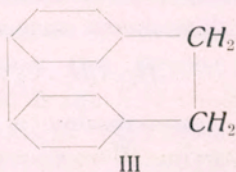
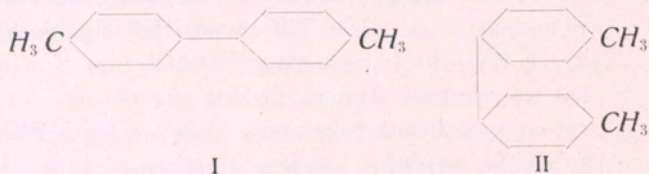
Wartość ciężaru cząsteczkowego, oznaczonego w nitrobenzenie metodą ebuljoskopową, doprowadza do wniosku, że związek ten składa się z trzech reszt p, p' -dwutolylu:



Wymienione dwa węglowodory stanowią tylko część, otrzymanego z reakcji materiału; pozostałość, żółta masa drobnokrystaliczna, zawierająca chemicznie związaną siarkę, nie mogła być dotychczas dokładniej zbadana, gdyż, ogrzana do t. 360⁰, nie topnieje, nie rozpuszcza się w żadnym z bardzo wielu stosowa-

nych rozczynników organicznych, nie ulega sublimacji. Ze stężonym kwasem siarkowym na zimno żółte grudki substancji zabarwiają się na zielono, barwa ta po krótkim czasie przechodzi w brunatną, a następnie w czarną.

Uzyskane rezultaty zdają się świadczyć jeszcze raz na korzyść ogólnie przyjętego wzoru przestrzennego, przypisywanego dwufenylowi i jego pochodnym — I. Gdyby bowiem *p, p'*-dwutolyl był zbudowany zgodnie z koncepcją Kauflera — II, to jego reakcja z siarką najprawdopodobniej poszłaby w kierunku kolejnego wytwarzania się węglowodoru o wzorach: III albo IV i V.



Rzecz in extenso będzie drukowana w Pracach IX Kongresu Międzynarodowego Chemii Czystej i Stosowanej.

V. W. Adkisson.

**O przedłużaniu homeomorfizmu krzywych
na powierzchnię kuli.**

Przedstawił K. Kuratowski dn. 17 stycznia 1934 r.

Autor podaje uogólnienie twierdzenia opublikowanego w poprzedniej swej pracy z t. 23-ego.

V. W. Adkisson.

**On extending a continuous (1—1) correspondence
of continuous curves on a sphere. ¹⁾**

Mémoire présenté par M. K. Kuratowski dans la séance du 17 janvier 1934.

In a previous paper *I* have established a necessary and sufficient condition that any continuous (1—1) correspondence of a cyclicly connected continuous curve (lying on a sphere) into itself be extendable to the sphere.²⁾ It is the purpose of this paper to prove a similar theorem for continuous curves in general, and hence include the theorem mentioned above as a special case.

A condition which is necessary and sufficient in order that it be possible to extend a continuous (1—1) correspondence of two plane continuous curves to a correspondence of their planes has been given by H. M. Gehman.³⁾ This condition does not

¹⁾ Part *I* of a paper by the same title presented to the American Mathematical Society, November 28, 1931. Research paper No. 281, University of Arkansas.

²⁾ Cf. V. W. Adkisson, *Cyclicly connected continuous curves whose complementary domain boundaries are homeomorphic, preserving branch points*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie, Vol. 23, Th. 2, p. 167.

³⁾ H. M. Gehman, *On extending a continuous (1—1) correspondence of two plane continuous curves to a correspondence of their planes*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 28 (1926) pp. 252—265.

hold for curves lying on a sphere since in this case there is no unbounded domain. In fact it is quite easy to obtain examples of a continuous (1—1) correspondence of two plane curves which cannot be extended to their planes, but which can, if the curves lie on spheres, be extended to their spheres.

We propose the following condition analogous to „sides preserved under T “¹⁾ but somewhat weaker.

Condition A. If M and M' are continuous curves lying on spheres S and S' respectively, and T a continuous (1—1) correspondence such that $T(M) = M'$, and if given any arc AB of M and a s. c. c.²⁾ J on S containing AB as a subset such that if N is the subset of M lying in either one of the domains of $S - J$, then there exists a s. c. c. J' of S' containing $T(AB) = A'B'$ as a subset such that N' ³⁾ lies in one of the domains of $S' - J'$.

Also, if J_1' is any s. c. c. of S' containing $A'B'$, and N_1' is the subset of M' lying in either of the domains of $S' - J_1'$, then there exists a s. c. c., J_1 on S , containing AB and such that N_1 lies in one of the domains of $S - J_1$.

Theorem. *If M and M' are continuous curves lying on spheres S and S' respectively, and T a continuous (1—1) correspondence such that $T(M) = M'$, then „Condition A“ is necessary and sufficient that T be extendable to S and S' .*

Proof. The condition is sufficient. First, suppose M contains no s. c. c. Let J be a s. c. c. of S containing a maximal arc AB of M but no other points of M , and J' a s. c. c. of S' containing only the arc $A'B'$ of M' . Let R_i ($i=1, 2$) be the domains complementary to J , and R_i' the domains complementary to J' . If N_i (non vacuous) is the subset of M lying in R_i , then N_i' is the subset of M' in R_i' . For suppose R_1' contains a point P' of N_2' along with a point E' of N_1' . Since $N_1 + AB$ is connected there must exist an arc PQ of M lying except for Q in N_2 , and for the same reason an arc EF of M lying except

¹⁾ Cf. H. M. Gehman, loc cit, p. 253.

²⁾ Simple closed curve.

³⁾ If X is a subset of M , X' will denote the set $T(X)$, and if Y' is a subset of M' , Y will denote the set $T^{-1}(Y')$. The notation throughout this paper follows closely that used by Gehman. loc cit.

for F in N_1 . Hence $P'Q' - Q'$ and $E'F' - F'$ lie in R_1' . Since $P'Q' - Q'$ and $E'F' - F'$ lie in the same region bounded by J' there must exist, by hypothesis, a s. c. c., say J_1 , of S containing the arc AB and such that $PQ - Q$ and $EF - F$ lie in the same domain, say R_3 , complementary to J_1 . Since J and J_1 have the arc AB in common and $EF - F$ lies in both R_1 and R_3 , and has a limit point F on \overline{AB} , it follows that one of the domains complementary to $J + J_1$, say D , whose boundary contains AB is a subset of both R_1 and R_3 .¹⁾ But $PQ - Q$ lies in R_3 while Q lies on \overline{AB} . Hence, D must contain points of $PQ - Q$ and R_1 must contain points of N_2 (i. e. points of $PQ - Q$) contrary to assumption. If N_1 (or N_2) is vacuous, by assuming that points of N_2' lie in both R_1' and R_2' a similar contradiction is reached.

The domains R_2 and R_2' will now be treated as unbounded domains, i. e. if a s. c. c. J_1 lies in $R_1 + J$ the region bounded by J_1 that contains R_2 will be designated as the exterior of J_1 , etc. Let AG be a maximal arc of $AB + N_1$ ($G \neq B$). Let H be a point of $J - AB$. There exists an arc GH of S containing no points of M except G , and an arc HXA in J such that $AGHXA (= C)$ is a s. c. c. In like manner there exists a s. c. c. $A'G'H'X'A' (= C')$ in S' where $H'X'A'$ is an arc of J' and $G'H'$ an arc containing no points of M' except G' . If W is the subset of M lying interior to C then W' is the subset of M' lying interior to C' . This follows from the preceding argument. For since W and B lie in different domains complementary to C , W' and B' must lie in different domains complementary to C' , and W' must be interior to C' since B' is in the exterior.

We have now shown that the method used by Gehman in extending the correspondence to the interiors of J (or J_1) and J' (or J_1') in Theorem I of his paper can be applied here to the „interiors” of J and J' , and in like manner to the „exteriors” of J and J' . Hence the correspondence T can in this case be extended to the spheres S and S' .

Now suppose M contains at least one s. c. c. J . Let R_1 and R_2 be the domains complementary to J and N_i the subset

¹⁾ This follows from lemma A. Gehman's paper (loc. cit.), which holds equally well on the sphere. The curves J and J_1 correspond to the boundaries B_1 and B_2 of lemma A.

of M lying in R_i . Then if R_i' are the domains complementary to J' the set N_1' will lie in one of the domains, say R_1' , and N_2' in R_2' . The argument given in the first paragraph of the proof holds here with slight modifications.

Now, as above, let R_2 represent the exterior (unbounded domain) of J and R_2' the exterior of J' . We shall show first that if α is the boundary of a domain, D_3 , in $S - M$ lying in R_1 then α' is the boundary of a domain in $S' - M'$ lying in R_1' . Let the s. c. c. J_1 be the outer boundary of D_3 .¹⁾ Then since J_1' must lie in $J' + R_1'$ the set $\alpha' - J_1'$ must lie interior to J_1' . Otherwise a point of α' would lie in the same domain complementary to J_1' with $J' - J_1'$.²⁾ But this is impossible since no point of α lies in the same domain complementary to J_1 with $J - J_1$. Hence the points interior to J_1' are identical with $\alpha' - J_1'$ and J_1' is the outer boundary of a domain D_3' complementary to M' .³⁾ Now suppose a point P' of α' is not in the boundary β' of D_3' . Then P' is not on J_1' and must lie interior to J_1' . Every arc from P' to a point of D_3' must contain a point of β' . Let H' be a point of J_1' which is a con-cut point of β' .⁴⁾ Then every arc from P' to H' lying except for H' interior to J_1' must contain points of D_3' . Hence, every such arc must contain at least one point of β' different from H' . Then P' and H' are separated by some s. c. c., say J_2' , which is a subset of M' .⁵⁾ But this is impossible since P and H cannot be separated by the s. c. c. J_2 . Also, β' cannot contain a point Q' such that Q is not in α . Then β' must be identical with α' .

1) R. L. Moore, *Concerning continuous curves in the plane*. Math. Zeit., vol. 15 (1922) pp. 254—260.

2) The product $J' J_1'$ indicates the points common to both J' and J_1' .

3) The argument used by Gehman (loc. cit. pp. 262—3) to show K' identical with J' for the bounded domains D_2 and D_2' applies equally well here to show that J_1' is the outer boundary of a domain complementary to M' .

4) R. L. Moore, *Concerning the cut-points of continuous curves and of other closed and connected point sets*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 9 (1923), p. 102, Th. B.

5) C. M. Cleveland, *Concerning points of a continuous curve that are not accessible from each other*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 13 (1927), pp. 275—6.

Now let A and B be non-cut points of α , AXB be any arc of S such that AXB lies in D_3 , and $A'X'B'$ an arc of S' such that $A'X'B'$ lies in D_3' . Now if N is the subset of M lying in the region R_3 , which is a subset of the interior of J_1 and bounded by the s. c. c. $AXBVA$, where the arc BVA lies in α , then N' is the subset of M' lying in the region R_3' which is a subset of the interior of J_1' and bounded by the s. c. c. $A'X'B'V'A'$, where $B'V'A'$ lies in α'^1 .

Now the method used by Gehman in Theorem II (loc. cit.) is applicable here to show how the correspondence T can be extended to the „interiors” of J and J' and in like manner to the „exteriors” of J and J' . Hence, T can be extended to the spheres S and S' .

The necessity of the condition is obvious.

University of Arkansas,
Fayetteville, Arkansas.

W. Hetper.

Arytmetyka semantyczna.

Przedstawił K. Kuratowski dn. 17 stycznia 1934 r.

Autor podaje system arytmetyki liczb naturalnych oparty na semantyce p. Chwistka.

W. Hetper.

Semantische Arithmetik.

Mémoire présenté par M. K. Kuratowski dans la séance 17 janvier 1934.

§ 1. Einleitung.

Den Begriff der natürlichen Zahl haben Whitehead und Russell in ihrem Werke „Principia Mathematica” auf dem Begriffe der Kardinalzahl aufgebaut. Den einfachen und allgemeinverständlichen Begriff der natürlichen Zahl führen sie auf recht komplizierte Weise ein, indem sie diesen Begriff auf die Begriffe der Mengenlehre zurückführen, welche ihrerseits mittels der

¹⁾ Cf. the argument given in the first paragraph of this proof. Also, H. M. Gehman, loc. cit., p. 263.

Typentheorie begründet ist. Ausserdem ist es in dem genannten System notwendig das Unendlichkeitsaxiom anzunehmen; und doch sollte die Existenz unendlich vieler natürlicher Zahlen schon aus ihrer Definition folgen. Wir rechnen doch ins Unendliche eben darum, weil die Konstruierbarkeit der Zahlen, so gross sie auch sein mögen, uns keine prinzipielle Schwierigkeiten bietet. Deswegen wäre zu erwägen ob die Whitehead-Russellsche Definition der Idee der natürlichen Zahl entsprechend angepasst ist. Die Unentbehrlichkeit des Axioms des Unendlichen scheint eine negative Antwort auf diese Frage zu geben.

Die Notwendigkeit das Unendlichkeitsaxiom anzunehmen wurde von Peano in seiner Konstruktion der Arithmetik beseitigt; dennoch muss er den Begriff der natürlichen Zahl als Fundamentalbegriff annehmen und diesen mittels der arithmetischen Axiome charakterisieren.

Hilberts¹⁾ Standpunkt ist ein rein formeller, weil er den in den Axiomen angewandten Symbolen keinen selbstständigen Sinn schenkt. Er lässt bloss gewisse Operationen an ihnen zu. Eine solche Interpretation ist aber nur dann richtig, wenn wir die Widerspruchslosigkeit der Axiome bewiesen haben. Die Untersuchungen der Widerspruchslosigkeit spielen in der Hilbertschen Richtung eine hervorragende Rolle. Sie hatten zur Folge, dass viele Vertreter dieser Richtung zu ernststen Resultaten gelangten.²⁾ In allen Widerspruchslosigkeitsbeweisen bedienen wir uns intuitioneller Methoden, in welchen semantische Begriffe auftreten müssen.

Professor Chwistek führte noch vor den oben erwähnten Arbeiten der Hilbertschen Schule Forschungen über die Axiomatisierung dieser Begriffe durch. Die Resultate dieser Forschungen sind in der Abhandlung „Neue Grundlagen der Logik und Mathematik“ (Mathematische Zeitschrift, 1929) enthalten, welche feste Grundlagen unter eine neue Lehre legt, die am besten Semantik genannt werden kann. Im Jahre 1932 erscheint eine neue Arbeit Chwisteks, in welcher er alle Begriffe der Semantik

¹⁾ Hilbert und Ackerman: „Grundzüge der theoretischen Logik“.

²⁾ z. B. Hilbert: „Die logischen Grundlagen der Mathematik“, Neuman: „Zur Hilbertschen Beweistheorie“ u. A.

auf den Begriff der Substitution zurückführt und auch sonst sein System erheblich vereinfacht wobei er einige Bemerkungen von mir und von Herrn Herberg berücksichtigt hat.

Weitere Untersuchungen, welche die metamathematischen Beweise in den Rahmen eines gewissen formellen Systems einfügen trachteten, haben bewiesen, dass alle mathematischen und metamathematischen Begriffe sich auf einen einzigen Begriff u. zw. auf den Begriff der semantischen Substitution zurückführen lassen. Es zeigte sich jedoch, dass wir auf dem Standpunkte der reinen Typenlehre stehen müssen, wenn wir die metamathematischen Beweise auf Grund des Systems der Logik und Mathematik durchführen wollen. Die vereinfachte Typenlehre ist hier unzulänglich, indem sie sofort zu Widersprüchen führt.

Dieses Resultat hat das Entstehen des Systems der semantischen Typenlehre¹⁾ nach sich gezogen. Dieses System, obwohl es sich im Wesentlichen auf die reine Typenlehre stützt, ist nichtdestoweniger einfacher als die vereinfachte Typenlehre, indem es von dem Begriff der Mengenlehre unabhängig ist. Andererseits ist folgendes zu bemerken: Hat man einmal ein System der Semantik festgelegt, so zeigt es sich, dass die von Hilbert benützten mathematischen Axiome und Begriffe ganz überflüssig sind, da die Logik und Mathematik als ein Kapitel der Semantik auftreten. Es ist zu bemerken, dass das System der Semantik zunächst dazu geeignet ist die Metamathematik als eine streng symbolische Wissenschaft gelten zu lassen. Insbesondere erlaubt es auch die Resultate Hilberts, Gödels, Neumanns u. a. streng zu formalisieren.

Indem ich das Obige ins Auge gefasst habe, bin ich zur Überzeugung gekommen, dass das richtige und wirklich einfache System der Arithmetik auf die Semantik zurückgeführt werden muss. Hier benütze ich bloss die elementare Semantik²⁾, wobei ich mich auf die Arithmetik der rationalen Zahlen beschränkte. Die reellen Zahlen treten erst in der theoretischen Semantik auf, von der ich hier gänzlich absehe.

¹⁾ Chwistek, Hetper, Herberg: „Fondements de la mathématique rationelle“.

²⁾ Chwistek: „Die nominalistische Grundlegung der Mathematik“ — Erkenntnis III Band, 1933.

§ 2. Das System der elementaren Semantik.

Bevor ich zur scharfen Formulierung aller Begriffe und Definitionen meines Systems übergehe, werde ich dieses System auf anschauliche Weise besprechen.

Betrachten wir den Raum aller semantischen Ausdrücke, welche folgenden Bedingungen genüge leisten:

1. 0 ist ein Ausdruck,
2. Sind E und F Ausdrücke, so ist $*EF$ ein Ausdruck.

Das Zeichen 0 stellt hier die arithmetische Null vor.

Das Zeichen $*$ soll hier als eine Art von Klammer gelten.

Man könnte anstatt $*EF$ z. B. (EF) schreiben.

Unsere Regeln erlauben uns die Ausdrücke:

$0, *00, *0*00, **000, \dots$ u. s. w. einzuführen.

Es ist zu bemerken, dass unsere Schreibweise eindeutig ist.

Die oben erwähnten Ausdrücke bezeichne ich als *konstante* Ausdrücke.

Ausser den konstanten Ausdrücken werden wir auch *veränderliche* Ausdrücke benützen. Die letzteren führen wir mittels folgender Regeln ein:

3. $\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu\xi\eta\sigma$ sind semantische Buchstaben,
4. Ist E ein semantischer Buchstabe, so ist E ein Ausdruck.

Auf diese Weise gewinnen wir z. B. folgende veränderliche Ausdrücke:

$\lambda, *\alpha*00, *\beta*\xi\eta, \dots$ u. s. w.

Wenn wir in einem veränderlichen Ausdruck an die Stelle aller semantischen Buchstaben konstante Ausdrücke substituieren, gewinnen wir einen konstanten Ausdruck.

Als einzigen fundamentalen Begriff benützen wir das Urteil „ F kommt in E vor“, wo E und F zwei beliebige Ausdrücke sind. Dieses Urteil wollen wir mittels des Symbols $\{EF\}$ abkürzen.

Weiter benützen wir die üblichen Symbole des logischen Aussagenkalküls und insbesondere: „ \sim “ (Negation), „ \vee “ (logische Summe), „ \wedge “ (logisches Produkt), „ \supset “ (Implikation) und „ \equiv “ (Äquivalenz), welche wie bekannt, mittels des Shefferschen Striches ausdrückbar sind.

Nun bekommen wir z. B. folgende Sätze, wo $\vdash E$ als Abkürzung von „ E ist ein Satz“ gelten soll:

$$\vdash \{ * 0 0 0 \}, \vdash \sim \{ 0 * \alpha \beta \}, \vdash \supset \{ \alpha \lambda \} \{ * \alpha \beta \lambda \}, \dots \text{ u. s. w.}$$

Die semantische Identität $= EF$ (E ist mit F identisch) soll als Abkürzung des Urteils $\wedge \{ EF \} \{ FE \}$ gelten. Diese Identität wird in der Folge als arithmetische Gleichheit benützt werden.

Wir führen noch die scheinbaren Veränderlichen: $amnx$ yz und das Quantifikatorszeichen „ Π “ (für alle) ein.

Dieses erlaubt uns neue Urteile zu konstruieren, z. B.:

$$\Pi \alpha = \alpha \alpha, \Pi m \Pi n \{ mn \}, \Pi x \supset \{ \lambda x \} \{ * 0 \lambda * 0 x \}, \dots \text{ u. s. w.}$$

Das Existentialurteil $\exists KF$ wird als Abkürzung von $\sim \Pi K \sim F$ gelten (K ist hier eine scheinbare Veränderliche).

Um die Quantifikatorenrechnung einzuführen, werden wir in § 7 eine Verallgemeinerungsregel festsetzen.

Die Axiome.

Ausser des Nicodschen Axioms S_0 führe ich 4 einfache semantische Axiome ein:

$$\begin{aligned} S_0 & \vdash // p / q r / \supset s s \supset / s q / p s \\ S_1 & \vdash \equiv \{ * \alpha \beta * \lambda \mu \} \vee \{ \alpha * \lambda \mu \} \vee \{ \beta * \lambda \mu \} \wedge = \alpha \lambda = \beta \mu \\ S_2 & \vdash \supset \wedge \{ \alpha \beta \} \{ \beta \gamma \} \{ \alpha \gamma \} \\ S_3 & \vdash \{ \lambda \lambda \} \\ S_4 & \vdash \supset \vee \{ \alpha \lambda \} \vee \{ \beta \lambda \} \{ 0 \lambda \} \sim \{ \lambda * \alpha \beta \}. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass zu dem Substitutionsbereich der semantischen Buchstaben alle Ausdrücke gehören, während der Substitutionsbereich der logischen Buchstaben aus allen Urteilen besteht.

Aus der Gleichheitsdefinition und aus den Axiomen S_2, S_3 bekommen wir leicht folgende Sätze:

$$\begin{aligned} S_5 & \vdash = \lambda \lambda \\ S_6 & \vdash \supset = \alpha \beta = \beta \alpha \\ S_7 & \vdash \supset \wedge = \alpha \beta = \beta \gamma = \alpha \gamma. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Axiome S_1, S_2, S_4 können wir den Satz

$$S_8 \quad \vdash \equiv = * \alpha \beta * \lambda \mu \wedge = \alpha \lambda = \beta \mu. \text{ beweisen.}$$

Im weiteren wird die folgende Bemerkung (B) benützt werden:

Sei $S(\lambda)$ ein beliebiges Urteil, in welchem der semantische Buchstabe λ vorkommt.

Ich werde zeigen, dass man in jedem konkreten Falle den Whitehead-Russelschen Satz

$$\vdash \supset = \lambda \mu \equiv S(\lambda) S(\mu)$$

beweisen kann.

In dem Falle, dass $S(\lambda)$ die einfache Form $\{AB\}$ besitzt, bietet der Beweis keine Schwierigkeit.

Ist dieser Satz für $P(\lambda)$ und $Q(\lambda)$ richtig, so ist er es auch für $P(\lambda) Q(\lambda)$.

Wir nehmen nun an, dass der Satz

$$\vdash \supset = \lambda \mu \equiv P(\lambda \xi) P(\mu \xi)$$

gilt, wobei eine scheinbare Veränderliche z. B. a in $P(\lambda \xi)$ nicht enthalten ist.

Wir haben

$$\vdash \supset \wedge = \lambda \mu . P(\lambda \xi) P(\mu \xi)$$

und durch zweimalige Anwendung der Verallgemeinerungsregel

$$\vdash \supset \Pi a \wedge = \lambda \mu . P(\lambda a) P(\mu \xi),$$

$$\vdash \supset \Pi a \wedge = \lambda \mu . P(\lambda a) \Pi a P(\mu a),$$

und weiter

$$\vdash \supset = \lambda \mu . \supset \Pi a P(\lambda a) \Pi a P(\mu a).$$

Durch Umtausch von λ und μ erhalten wir den Satz

$$\vdash \supset = \lambda \mu \equiv \Pi a P(\lambda a) \Pi a P(\mu a).$$

Da wir nach unseren Konstruktionsregeln jedes Urteil durch schrittweise Anwendung der Shefferschen Operation $/$ oder der Verallgemeinerung erhalten können, ist unserer Satz völlig bewiesen.

Offenbar können wir auf diese Weise auch die Sätze:

$$\vdash \supset \wedge = \lambda \alpha = \mu \beta \equiv S(\lambda \mu) S(\alpha \beta),$$

$$\vdash \supset \wedge = \lambda \alpha \wedge = \mu \beta = \nu \gamma \equiv S(\lambda \mu \nu) S(\alpha \beta \gamma), \dots \text{ u. s. w.}$$

in jedem konkreten Falle beweisen.

§ 3. Natürliche Zahlen.

Nun gehen wir zur Konstruktion arithmetischer Begriffe über.
Eine Folge natürlicher Zahlen:

$$0, 1, 2, 3, \dots \quad (N)$$

bezeichne ich als eine Folge von Ausdrücken:

$$0, *00, *0*00, *0*0*00, \dots \quad (N_0).$$

Wenn wir , E als Abkürzung von $*0E$ gelten lassen, so können wir die Folge (N_0) auf folgende Weise schreiben:

$$0, ,0, ,,0, ,,,0, \dots \text{ u. s. w.,}$$

wobei jedes Element dieser Folge eine natürliche Zahl repräsentiert, welche der Anzahl der Zeichen ,, die in dem entsprechenden Ausdruck vorkommen, gleich ist.

Um eine strenge Definition der natürlichen Zahl zu konstruieren, werde ich mich folgender Eigenschaft der Folge (N_0) bedienen:

Wenn ein beliebiger Ausdruck F in einem gewissen Element E unserer Folge enthalten ist, dann gilt $\vee = EF\{E, F\}$, oder, was dem vorigen äquivalent ist, $\{,E, F\}$.

Ich lasse nun $\text{Nat } E$ als Abkürzung des Urteils

$$\Pi n \supset \{E, n\} \{,E, ,,n\} \quad (\text{Def. 1}).$$

Anstatt n benütze ich hier , n d. h. $*0n$. Diese Schreibweise erlaubt mir hier das Axiom S_1 anzuwenden. Die rechte Seite unserer Definition ist dem Urteil

$$\Pi n \supset \{E, n\} \vee = E, n \{E, ,,n\}$$

äquivalent.

Nehmen wir an, dass ein beliebiger Ausdruck W , der von 0 verschieden ist, unserer Definition genüge leistet. Sei , K der längste Ausdruck der Folge (N_0) , der in W enthalten ist. Ein solcher Ausdruck existiert schon deswegen, dass mindestens ,0 in W vorkommt. Deswegen gilt der Satz

$$\vdash \wedge \{W, K\} \sim \{W, ,,K\}.$$

Benützen wir die oben umgestaltete Definition, so haben wir $= W, K$, also muss W der Folge (N_0) angehören. Def. 1 ist also nur von Ausdrücken dieser Folge erfüllt.

Es ist jetzt leicht die Richtigkeit folgender Sätze zu beweisen:

$$T_1 \vdash \text{Nat } 0,$$

$$T_2 \vdash \supset \text{Nat } \lambda \text{ Nat } , \lambda, \text{ (man kann sogar beweisen} \\ \vdash \equiv \text{Nat } \lambda \text{ Nat } , \lambda)$$

$$T_3 \vdash \supset = \alpha \beta \equiv \text{Nat } \alpha \text{ Nat } \beta.$$

Aus T_1 und T_2 folgt:

$$\vdash \text{Nat } , 0, \vdash \text{Nat } ,, 0, \vdash \text{Nat } ,,, 0, \dots \text{ u. s. w.}$$

§ 4. Induktion.

Jetzt werde ich mich mit der Formalisierung der mathematischen Induktion befassen; die Induktion wird hier als Verfahrensregel gelten.

Es ist zu bemerken, dass diese Verfahrensregel in dem System der semantischen Typenlehre, das in der zitierten Abhandlung „Fondements de la métamathématique rationnelle“ ausführlich dargestellt ist, mit Hilfe der Definition der induktiven Zahlen beseitigt werden kann.

Die Regel der mathematischen Induktion.

Ind. Ist $E(I)$ ein Urteil, welches einen semantischen Buchstaben I enthält,
ist $E(0)$ das Resultat der Substitution von 0 für I in E ,
ist $E(I)$ das Resultat der Substitution von $,I$ für I in E
und gelten die Sätze $\vdash E(0), \vdash \supset E(I)E(I)$, so gilt
der Satz $\vdash \supset \text{Nat } IE(I)$.

Est ist zu bemerken, dass diese Regel ebenso einfach und klar ist als unsere übrigen Verfahrensregeln. Insbesondere lässt der hier benützte Urteilsbegriff nach dem oben Gesagten keine Zweideutigkeit zu.

Um die Natur unserer Induktion intuitiv darzustellen, möchte ich folgendes Beispiel geben:

Wir wollen den Satz

$$T_4 \vdash \supset \text{Nat } \lambda \sim \{ \lambda ** \alpha \beta \gamma \} \quad \text{beweisen.}$$

Zu diesem Zwecke führe ich zunächst folgende Substitutionen ein:

für	$E(I)$	nehme ich	$\sim \{ \lambda ** \alpha \beta \gamma \}$
„	I	„	„
„	$E(0)$	„	„
„	$E(I)$	„	„
			$\sim \{ 0 ** \alpha \beta \gamma \}$
			$\sim \{ , \lambda ** \alpha \beta \gamma \}.$

Andererseits haben wir:

$$\begin{aligned} & \vdash \sim \{0 ** \alpha \beta \gamma\} \\ \text{und} & \vdash \supset \sim \{\lambda ** \alpha \beta \gamma\} \sim \{\lambda, \lambda ** \alpha \beta \gamma\}, \text{ daraus folgt} \\ & \vdash \supset \text{Nat } \lambda \sim \{\lambda ** \alpha \beta \gamma\}. \end{aligned}$$

§ 5. Trychotomie.

Die Relationen $>EF$, $<EF$ definiere ich auf sehr einfache Weise, ohne mich der Addition zu bedienen, indem ich

$>EF$ als Abkürzung von $\wedge \text{Nat } E \wedge \text{Nat } F \{E, F\}$ (Def. 2) und $<EF$ als Abkürzung von $>FE$ (Def. 3) gelten lasse.

Wir wollen jetzt den Satz der Trychotomie beweisen:

$$\begin{aligned} T_5 \quad (a) & \vdash \supset > \alpha \beta \wedge \sim = \alpha \beta \sim < \alpha \beta \\ (b) & \vdash \supset = \alpha \beta \wedge \sim < \alpha \beta \sim > \alpha \beta \\ (c) & \vdash \supset < \alpha \beta \wedge \sim > \alpha \beta \sim = \alpha \beta \\ (d) & \vdash \supset \wedge \text{Nat } \alpha \text{Nat } \beta \vee > \alpha \beta \vee = \alpha \beta < \alpha \beta, \end{aligned}$$

Die Beweise der Sätze (a), (b), (c) bieten keine Schwierigkeiten. Im Beweis des Satzes (d) müssen wir zweimal die Induktion benützen. Um z. B. die Induktion nach β führen, muss der erste Schritt des Beweises (wenn β gleich 0 ist) mittels der Induktion nach α bewiesen werden.

§ 6. Arithmetische Operationen.

Ich gehe nun zu der Definition der arithmetischen Operation über.

Von dem logischen Standpunkte aus können wir eine arithmetische Operation als eine Urteilsfunktion dreier Veränderlichen x, y, z betrachten. Erfüllt ein Zahlentripel (x, y, z) diese Funktion, so sagen wir, dass z das Resultat unserer Operation in bezug auf x und y ist.

In meinem System werden also die Operationen als Urteile betrachtet, welche die drei semantischen Buchstaben λ, μ, ν enthalten.

Bevor ich zu der allgemeinen Definition der arithmetischen Operation übergehe, gebe ich ein einfaches Beispiel.

Ich nehme an, dass die Addition auf irgendwelche Weise als ein Urteil $+(\lambda \mu \nu)$ definiert worden ist, welches als $\lambda + \mu = \nu$ zu lesen ist.

Mit Hilfe der Addition werde ich jetzt die Multiplikation $\times (\lambda \mu \nu)$ definieren, wobei ich mich zuerst der allgemeinbekannteren Symbolik bedienen werde, um nachher zur semantischen Symbolik überzugehen. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine endliche Menge von Zahlenpaaren K , welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $(0,0)$ ist das einzige Paar, das zu K gehört und dessen erstes Element 0 ist.

2) Ist es der Fall, dass $(y' + 1, z'')$ zu K gehört, so existiert ein Zahl z' derart, dass (y', z') auch ein Element von K ist, wobei $z'' = x + z'$ gilt.

3) Das Paar (y, z) gehört zu K .

Es ist klar, dass die Gleichung $z = x \cdot y$ dann und nur dann besteht, wenn eine solche Menge K existiert.

Wir sagen, dass die Multiplikation die Ableitung der Addition in bezug auf die Basis 0 ist, weil $E \cdot 0$ gleich 0 definiert werden dürfte.

Analog ist das Potenzieren die Ableitung der Multiplikation in bezug auf die Basis 1, weil E^0 gleich 1 ist.

Jetzt werden wir die mathematischen Begriffe des obigen Beispiels durch semantische Begriffe ersetzen und zwar auf folgende Weise:

Den Begriff des Paares (x, y) ersetzen wir durch den Ausdruck $*, x, y$, als endliche Mengen lassen wir beliebige konstante Ausdrücke gelten und das Urteil „ x ist Element von K “ ersetzen wir durch das Urteil $\{Kx\}$.

Durch Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen definieren wir auf eine ganz allgemeine Weise den Begriff der arithmetischen Operation A und ihrer Ableitung $[A]$:

Def. 4. Als eine arithmetische Operation werden wir ein beliebiges Urteil A mit drei semantischen Buchstaben $\lambda \mu \nu$ betrachten, welches die Bedingung $\supset A \wedge \text{Nat } \lambda \wedge \text{Nat } \mu \cdot \text{Nat } \nu$ erfüllt.

Def. 5. Die Ableitung $[A]$ einer arithmetischen Operation A in bezug auf die Basis σ ist ein Urteil, welches die semantischen

Buchstaben $\lambda \mu \nu \sigma$ enthält und dessen Konstruktion mittels folgender Regeln charakterisiert ist:

- 1) $\lambda \mu \nu$ stellen natürliche Zahlen dar,
- 2) es existiert ein Ausdruck W , welcher folgende Eigenschaften besitzt:
 - a) ist der Ausdruck von der Form $*, 0, X$ in W enthalten, so muss $= X \sigma$ gelten,
 - b) enthält W den Ausdruck $*, \mu, X, Y$, so existiert ein solcher Ausdruck Z , dass $*, X, Z$ in W enthalten ist, wobei $A (\lambda Z Y)$ gilt.
- 3) W enthält den Ausdruck $*, \mu, \nu$.

Die Bedingung b) werden wir in der Folge folgendermassen formulieren: $*, \mu, X, Y$ ist in W reduzierbar.

Eine strenge Definition der Ableitung ist in § 7 zu finden.

Die Urteile, die durch Substitution der Ausdrücke EFG bzw. $EFGH$ für die semantischen Buchstaben $\lambda \mu \nu$ bzw. $\lambda \mu \nu \sigma$ in den Operationen $A, [A]$ entstehen, werde ich mit $A(EFG)$, bzw. $[A](EFGH)$ bezeichnen.

Die Addition, die Multiplikation, das Potenzieren, sowie auch die höheren Operationen, die schon keine Gegenstände der gewöhnlichen Arithmetik sind, können wir jetzt in folgender Weise definieren:

Nr.	Abkürzung	Das Urteil
Def. 6.	Seq	$\wedge \text{Nat } \lambda \wedge \text{Nat } \mu = \nu, \mu$
Def. 7.	+	$[\text{Seq}] (\lambda \mu \nu \lambda)$
Def. 8.	\times	$[+] (\lambda \mu \nu 0)$
Def. 9	exp	$[\times] (\lambda \mu \nu 1)$
Def. 9'.	exp'	$[\text{exp}] (\lambda \mu \nu 1)$
Def. 9''.	exp''	$[\text{exp}'] (\lambda \mu \nu 1)$

u. s. w.

Jetzt werde ich vier fundamentalen Beziehungen $R_1 R_2 R_3 R_4$ zwischen einer Operation und ihrer Ableitung in bezug auf eine beliebige Basis angeben.

Sind A, A_1, A_2 gegebene arithmetische Operationen, wobei A_1 immer durchführbar und A_2 eindeutig ist, d. i. es gelten die Sätze:

$$\vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \text{ Nat } \mu \exists n A_1 (\lambda \mu n),$$

$$\vdash \supset \wedge A_2 (\lambda \mu \xi) A_2 (\lambda \mu \eta) = \xi \eta;$$

ich werde zeigen, dass folgende Sätze in jedem konkreten Falle bewiesen werden können:

$$R_1 \quad \vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \text{ Nat } \sigma [A] (\lambda 0 \sigma \sigma),$$

$$R_2 \quad \vdash \supset \wedge [A] (\lambda \mu \xi \sigma) A (\lambda \xi \eta) [A] (\lambda \mu \eta \sigma),$$

$$R_3 \quad \vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \wedge \text{Nat } \mu \text{ Nat } \sigma \exists n [A_1] (\lambda \mu n \sigma),$$

$$R_4 \quad \vdash \supset \wedge [A_2] (\lambda \mu \xi \sigma) [A_2] (\lambda \mu \eta \sigma) = \xi \eta.$$

Ad R_1 : Hier genügt es die Def. 5. zu benützen, wobei für W der Ausdruck $*, 0, \sigma$ zu nehmen ist.

Ad R_2 : Gilt die Hypothese unseres Satzes, so muss auf Grund der Def. 5. ein Ausdruck W existieren, der dieser Definition in bezug auf die Ausdrücke $\lambda \mu \xi \sigma$ genüge leistet. Nun betrachten wir den Ausdruck W' , welcher die Gestalt $*W*, \mu, \eta$ hat.

Ich behaupte, dass W' die Bedingungen der Def. 5 in bezug auf die Ausdrücke $\lambda, \mu, \eta, \sigma$ erfüllt. Auf Grund der Def. 5. und T_2 schliesse ich $\wedge \text{Nat } \lambda \text{ Nat } \mu$. Da $A (\lambda \xi \eta)$ gilt, so haben wir auch $\text{Nat } \eta$.

Auf diese Weise ist der erste Punkt der Def. 5. bewiesen worden.

Die Richtigkeit der Bedingungen a) und c) des zweiten Punktes ist ohne weiteres klar. Es bleibt die Bedingung b) zu beweisen. Es ist leicht zu ersehen, dass wenn ein Ausdruck von der Form $*, X, Y$ in W' enthalten ist, so muss er auch in W vorkommen oder es gilt $\wedge =, X, \mu = Y \eta$.

Im ersten Fall ist der Ausdruck $*, X, Y$ in W reduzierbar, woraus folgt, dass ihm diese Eigenschaft auch in W' zukommt.

Im zweiten Fall haben wir $\{W*, \mu, \xi\}$, also gilt auch $\{W'*, \mu, \xi\}$. Aus der Hypothese $A (\lambda \xi \eta)$ und der Gleichheit $= Y \eta$ und aus der Bemerkung (B) schliessen wir, dass $A (\lambda \xi Y)$ gilt und also der Ausdruck $*, X, Y$ in W' reduzierbar ist. Daraus schliessen wir, dass die Bedingung b) erfüllt ist.

Ad R_3 : Die Beweisführung werde ich auf der Induktion in bezug auf μ stützen, die sich auf das Urteil $T(\mu)$ von der Gestalt

$$\supset \wedge \text{Nat } \lambda \text{ Nat } \sigma \exists n [A_1] (\lambda \mu . n \sigma) \text{ bezieht.}$$

Durch Anwendung von R_1 zeigen wir zunächst, dass $T(0)$ gilt.

Nehmen wir $T(\mu)$ an, so haben wir unter der Hypothese $\wedge \text{Nat } \lambda \text{ Nat } \sigma$ die These $[A_1] (\lambda \mu . N \sigma)$, wo N eine gewisse natürliche Zahl ist.

Da unsere Operation A_1 immer durchführbar ist, so ist immer eine natürliche Zahl M zu finden, welche die Urteilsfunktion $A_1 (\lambda NM)$ erfüllt. Wenden wir R_2 an, so gilt $[A_1] (\lambda \mu . M \sigma)$, es kommt also auch $T(\mu)$ vor.

Ad R_4 : Um den Beweis von R_4 abzukürzen, werde ich folgende Hilfsregel H benützen:

H : Sei A eine arithmetische Operation; ich werde zeigen, dass ich im Stande bin den Beweis des Satzes

$$\vdash \supset [A] (\lambda \mu . \nu \sigma) \exists n \wedge [A] (\lambda \mu . n \sigma) A (\lambda n \nu) \text{ zu geben.}$$

Der Beweis: Wende ich die Def. 5. an die Operation $[A]$ an, in bezug auf die Ausdrücke $\lambda \mu . \nu \sigma$, dann erhalte ich den Ausdruck W , welcher den Bedingungen der Def. 5. genüge leistet. Da $\{W *_{\mu} \nu\}$ gelten muss, so kann ich den Ausdruck $*_{\mu} \nu$ in W reduzieren, woraus $\wedge \{W *_{\mu} N\} A (\lambda N \nu)$ herauskommt. Es ist leicht zu beweisen, dass der Ausdruck W der Def. 5. in bezug auf die Ausdrücke $\lambda \mu . N \sigma$ genüge leistet.

Jetzt gehe ich zu dem eigentlichen Beweis von R_4 über. Ich werde die Induktion an das Urteil $T(\mu)$ von der Form $\Pi m \Pi n \supset \wedge [A_2] (\lambda \mu . m \sigma) [A_2] (\lambda \mu . n \sigma) = mn$ anwenden und zwar in bezug auf den Buchstaben μ . Auf Grund von 2a) in Def. 5. ist es leicht zu sehen, dass $T(0)$ vorkommt.

Nehmen wir nun $T(\mu)$ an. Um jetzt $T(\mu)$ zu beweisen, nehme ich

$$\wedge [A_2] (\lambda \mu . \xi \sigma) [A_2] (\lambda \mu . \eta \sigma) \text{ an.}$$

Auf Grund der Regel H erhalten wir:

$$\wedge [A_2] (\lambda \mu . X \sigma) A_2 (\lambda X \xi) \text{ und}$$

$$\wedge [A_2] (\lambda \mu . Y \sigma) A_2 (\lambda Y \eta).$$

Da $T(\mu)$ gilt, so haben wir $=XY$. Aus der Eindeutigkeit der Operation A_2 und aus der Bemerkung (B) schliessen wir letztens $=\xi\eta$, also auch

$$\supset \wedge [A_2](\lambda, \mu, \xi, \sigma) [A_2](\lambda, \mu, \eta, \sigma) = \xi\eta.$$

Durch Verallgemeinerung in bezug auf ξ und η bekommen wir daraus $T(\mu)$.

Daraus und aus der Regel der Induktion erhalten wir den Satz $\vdash \supset \text{Nat } \mu \text{ II } m \text{ II } n \supset \wedge [A_2](\lambda, \mu, m, \sigma) [A_2](\lambda, \mu, n, \sigma) = mn$, woraus mittels einfacher logischer Umwandlungen

$$\vdash \supset \wedge [A_2](\lambda, \mu, \xi, \sigma) [A_2](\lambda, \mu, \eta, \sigma) = \xi\eta \text{ folgt.}$$

Aus der Def. 6. folgt, dass die Operation Seq ausführbar und eindeutig ist.

Auf Grund der Regeln $R_1 R_2 R_3 R_4$ erhalten wir schrittweise für weitere Operationen $+$, \times , \exp , \exp' , $\exp'' \dots$:

- 1) die Anfangsbedingungen (für $\mu = 0$),
- 2) die Rekurrenzformeln, die den Zusammenhang zwischen einer Operation und seiner Ableitung angeben,
- 3) die Ausführbarkeits-
- und 4) Eindeutigkeits-Sätze.

Die weiteren Eigenschaften dieser Operationen erhalten wir auf Grund der Induktion auf eine in der Arithmetik allgemeinbekannte Weise.

§ 7. Das formalistische System der semantischen Arithmetik.

I. Konstante Ausdrücke.

1. 0 ist ein konstanter Ausdruck,
2. Sind EF konstante Ausdrücke, so ist $*EF$ ein konstanter Ausdruck.

II. Buchstaben.

Ist E ein konstanter Ausdruck, so ist

- $*E\omega$ ein semantischer Buchstabe,
- $*Eu$ eine scheinbare Veränderliche,
- $*Et$ ein logischer Buchstabe.

III. Ausdrücke.

1. Ist E ein konstanter Ausdruck, so ist E ein Ausdruck,
2. Ist E ein semantischer Buchstabe, so ist E ein Ausdruck,
3. Sind EF Ausdrücke, so ist $*EF$ ein Ausdruck.

IV. Urteile.

1. Ist E ein logischer Buchstabe, so ist E ein Urteil,
2. Sind EF Ausdrücke, so ist $\{EF\}$ ein Urteil,
3. Sind EF Urteile, so so ist $/EF$ ein Urteil,
4. Ist E ein Urteil, I ein semantischer Buchstabe, welcher in E enthalten ist, ist K eine scheinbare Veränderliche, welche in E nicht enthalten ist, ist weiter F das Resultat der Substitution von K für I in E , so ist ΠKF ein Urteil.

V. Abkürzungen.

Sind EFN Ausdrücke oder Urteile, so gelten die Abkürzungen:

Natürliche Zahlen		Semantische Buchstaben		Scheinbare Veränderliche		Logische Buchstaben		Urteile	
$,E$	$*0E$	ω_E	$*E\omega$	u_{EF}	$**EFu$	t_E	$*Et$	$\sim F$	$/FF$
1	,0	α	ω_1	a_N	u_{1N}	p	t_1	$\supset EF$	$/E\sim F$
2	,1	β	ω_2	x_N	u_{2N}	q	t_2	$\vee EF$	$/\sim E\sim F$
3	,2	γ	ω_3	y_N	u_{3N}	r	t_3	$\wedge EF$	\sim /EF
4	,3	λ	ω_4	z_N	u_{4N}	s	t_4	$\equiv EF$	$\wedge \supset EF \supset FE$
5	,4	μ	ω_5	m_N	u_{5N}			$\exists z_N$	$\sim \Pi z_N \sim$
6	,5	ν	ω_6	n_N	u_{6N}			$= EF$	$\wedge \{EF\} \{FE\}$
7	,6	ξ	ω_7					Nat E	$\Pi n_1 \supset \{E, n_1\} \{,E, n_1\}$
8	,7	η	ω_8						
9	,8	σ	ω_9						

VI. Axiome.

- $S_0 \quad \vdash // p/q r / \supset s s \supset / s q / p s$
 $S_1 \quad \vdash \equiv \{ * \alpha \beta * \lambda \mu \} \vee \{ \alpha * \lambda \mu \} \vee \{ \beta * \lambda \mu \} \wedge \equiv \alpha \lambda = \beta \mu$
 $S_2 \quad \vdash \supset \wedge \{ \alpha \beta \} \{ \beta \gamma \} \{ \alpha \gamma \}$
 $S_3 \quad \vdash \{ \lambda \lambda \}$
 $S_4 \quad \vdash \supset \vee \{ \alpha \lambda \} \vee \{ \beta \lambda \} \{ 0 \lambda \} \sim \{ \lambda * \alpha \beta \}$

VII. Verfahrensregeln.

1. Ist es der Fall, dass $\vdash E$, ist I ein logischer Buchstabe, welcher in E enthalten ist, ist F ein Urteil und G das Resultat der Substitution von F für I in E , ist weiter G ein Urteil, so ist es der Fall, dass $\vdash G$.

2. Ist es der Fall, dass $\vdash E$, ist I ein semantischer Buchstabe, welcher in E enthalten ist, ist F ein Ausdruck und G das Resultat der Substitution von F für I in E , so ist der Fall, dass $\vdash G$.

3. Ist es der Fall, dass $\vdash \wedge \supset M F \supset F N$, ist I ein semantischer Buchstabe, welcher in F enthalten ist, ist K eine scheinbare Veränderliche, welche in F nicht enthalten ist, ist I in M nicht enthalten, ist weiter G das Resultat der Substitution von K für I in F , so ist es der Fall, dass $\vdash \wedge \supset M \Pi K G \supset \Pi K G N$.

4. Ist es der Fall, dass $\vdash E$ und $\vdash / E / F G$, so ist es der Fall, dass $\vdash G$.

Ind. Ist E ein Urteil, ist I ein semantischer Buchstabe, welcher in E enthalten ist, ist F das Resultat der Substitution von 0 für I in E , ist G das Resultat der Substitution von I für I in E und gelten die Sätze $\vdash F$, $\vdash \supset E G$, so gilt der Satz $\vdash \supset \text{Nat } I E$.

VIII. Die Begriffe der Arithmetik der natürlichen Zahlen und der arithmetischen Operation.

Ist A ein Urteil, welches die semantischen Buchstaben $\lambda \mu \nu$ enthält, ist $A(EFG)$ das Resultat der Substitution von E für λ , F für μ , G für ν in A , so gelten die Definitionen:

Def. 1. $\text{Nat } E$	$\Pi n_1 \supset \{E, n_1\} \{, E, n_1\}$
Def. 2. $> EF$	$\wedge \text{Nat } E \wedge \text{Nat } F \{E, F\}$
Def. 3. $< EF$	$> FE$
Def. 4. $\text{Ar } A$	$\Pi n_2 \Pi n_3 \Pi n_4 \supset A (n_2 n_3 n_4) \wedge \text{Nat } n_2 \wedge \wedge \text{Nat } n_3 \text{Nat } n_4$
Def. 5. $[A](EFGH; N)$	$\wedge \text{Nat } E \wedge \text{Nat } F \wedge \text{Nat } G \exists a_N \wedge \{a_N^*, F, G\} \wedge \Pi z_N \supset \{a_N^*, 0, z_N\} = z_N H \Pi x_N \Pi y_N \supset \{a_N^*, x_N, y_N\} \exists z_N \wedge \{a_N^*, x_N, z_N\} A(Ez_N y_N)$
Def. 6. Seq	$\wedge \text{Nat } \lambda \wedge \text{Nat } \mu = \nu, \mu$
Def. 7. $+$	$[\text{Seq}] (\lambda \mu, \nu \lambda; 1)$
Def. 8. \times	$[+]$ $(\lambda \mu, \nu 0; 2)$
Def. 9. exp	$[\times]$ $(\lambda \mu, \nu 1; 3)$
Def. 9'. exp'	$[\text{exp}] (\lambda \mu, \nu 1; 4)$
Def. 9''. exp''	$[\text{exp}'] (\lambda \mu, \nu 1; 5)$

Dem formellen Standpunkte nach sind die Regeln $R_1 R_2 R_3 R_4$ abgekürzte Beweismethoden:

Ist es der Fall, dass: $\vdash \text{Ar } A, \vdash \text{Ar } A_1, \vdash \text{Ar } A_2,$
 $\vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \text{Nat } \mu \exists n_5 A_1 (\lambda \mu, n_5), \vdash \supset \wedge A_2 (\lambda \mu, \xi) A_2 (\lambda \mu, \eta) = \xi \eta,$
 so ist es der Fall, dass:

- $R_1 \vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \text{Nat } \sigma [A] (\lambda 0 \sigma \sigma; N),$
- $R_2 \vdash \supset \wedge [A] (\lambda \mu, \xi \sigma; N) A (\lambda \xi \eta) [A] (\lambda \mu, \eta \sigma; N),$
- $R_3 \vdash \supset \wedge \text{Nat } \lambda \wedge \text{Nat } \mu \text{Nat } \sigma \exists n_5 [A_1] (\lambda \mu, n_5 \sigma; N),$
- $R_4 \vdash \supset \wedge [A_2] (\lambda \mu, \xi \sigma; N) [A_2] (\lambda \mu, \eta \sigma; N) = \xi \eta,$

wobei die scheinbaren Veränderlichen $a_N x_N y_N z_N$ in $AA_1 A_2$ nicht enthalten sind.

§ 8. Rationale Zahlen.

Haben wir das System der Arithmetik der natürlichen Zahlen, so bietet die Erweiterung des Begriffsgebietes der natürlichen Zahlen keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Zunächst definiere ich die ganze Zahl (positiv bzw. negativ) als ein Paar natürli-

cher Zahlen, d. i. als einen Ausdruck von der Form $*,E,F$, wo E und F natürliche Zahlen sind. Ich erhalte die Arithmetik ganzer Zahlen, indem ich die Operationen in bezug auf die Zahlenpaare definiere.

Dasselbe gilt für die Arithmetik der rationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen werden als Ausdrücke $*,E,F$ definiert, wo E und F ganze Zahlen sind und F von 0 verschieden ist.

In seinen Abhandlungen hat Chwistek alle semantischen Begriffe auf den Begriff der Substitution ($EF GH$) zurückgeführt. Dieser Begriff besagt, dass der Ausdruck H das Resultat der Substitution von G für F in E ist.

Nun erlaubt mir eine einfache Verallgemeinerung der Methode, der ich mich bei der Einführung der Ableitungsoperation bedient habe, die allgemeine Definition einer anzestralen Relation zu konstruieren.

Mit Hilfe dieser Relation kann man den Begriff ($EF GH$) auf den Begriff $\{EF\}$ zurückführen. Aber auch diesen Begriff kann man auf einen noch einfacheren Begriff der semantischen Gleichheit zurückführen; in dem letzteren Fall müssen wir den semantischen Raum, wo alle Kombinationen der Zeichen 0 und $*$ zulässig sind, einführen.

Diese Ergebnisse werde ich in meinen weiteren Arbeiten besprechen, wo ich auch die Resultate meiner Untersuchungen über die Widerspruchslosigkeit des semantischen Systems angeben werde.

W. Ślebodziński.

Notatka o przestrzeniach mających koneksję afinalną.

Przedstawił S. Mazurkiewicz dn. 17 stycznia 1934 r.

Streszczenie.

Przedmiotem artykułu jest wyznaczenie przestrzeni nieholonomicznych o grupie podstawowej

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad X f = \sum_{r=1}^n x^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

W. Ślebodziński.

Notice sur les variétés à connexion affine.

Note présentée par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 17 janvier 1934.

1. On sait que le groupe linéaire admet trois sous-groupes invariants: le groupe de translations, le groupe de transformations conservant les volumes et le groupe

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad X f = x^r \frac{\partial f}{\partial x^r}.^{1)} \quad (a)$$

A chacun de ces sous-groupes correspond d'après M. Cartan une variété non kolomone à connexion affine. Les variétés correspondant à deux premiers groupes étant bien connues (les variétés douées d'un parallélisme absolu et les variétés admettant une unité de volume absolue), nous allons déterminer dans cette

¹⁾ Nous supposons dans tout ce qui suit que les indices de l'alphabet latin parcourent les valeurs 1, 2, ..., n et les indices de l'alphabet grec les valeurs a_1, a_2, \dots, a_n . Nous convenons aussi que tout indice deux fois répété dans un terme monome est un indice de sommation, étendue respectivement aux valeurs 1, 2, ..., n ou a_1, a_2, \dots, a_n .

note les variétés de groupe fondamental (G). Nous les désignons dans la suite par le symbole T_n .

Or, soient u^z les coordonnées d'un point arbitraire M de la variété T_n ; imaginons qu'à ce point soit attaché un repère cartésien (R); soit (R') le repère relatif à un point infiniment voisin $M'(u^z + du^z)$. Le groupe fondamental de la variété T_n étant (G), nous pouvons supposer que les repères (R) et (R') soient raccordés au moyen d'une transformation infinitésimale de celui-ci. Donc, si $P(x^i)$ et $P'(x^i + dx^i)$ sont deux points correspondants de ces repères, on aura

$$dx^i + \omega^r X_r(x^i) + \omega X(x^i) = 0$$

et, par conséquent,

$$dx^i + \omega^i + \omega x^i = 0, \quad (1)$$

ω^i et ω étant des formes linéaires de différentielles du^z . (On suppose bien entendu que les formes ω^i sont linéairement indépendantes). Si dans la variété T_n est défini un champ de vecteurs covariants et si k^i et l_j sont les composantes par rapport au repère (R) des vecteurs de ces champs, attachés au point M , les différentielles absolues de celles-ci sont alors données par les expressions

$$\delta k^i = dk^i + \omega k_i, \quad \delta l_j = dl_j - \omega l_j. \quad (2)$$

Posons

$$\omega = a_r \omega^r$$

et

$$df = \omega^r \partial_r f,$$

où f désigne une fonction arbitraire de variables u^z . En se servant de ces notations, les formules (2) peuvent être écrites de la façon suivante

$$\delta k^i = \omega^r \nabla_r k^i, \quad \delta l_j = \omega^r \nabla_r l_j,$$

∇_r étant le symbole de la différentiation covariante

$$\nabla_r k^i = \partial_r k^i + a_r k^i, \quad \nabla_r l_j = \partial_r l_j - a_r l_j. \quad (3)$$

Les équations de structure de la variété T_n peuvent être obtenues des relations (1); on trouve

$$(\omega^i)' - \omega^i \omega = \Omega^i, \quad \omega' = \Omega, \quad (4)$$

Ω^i et Ω désignant des formes extérieures du second degré de différentielles du^α . En différentiant extérieurement les équations (4), on obtient

$$(\Omega^i)' = \omega^i \Omega - \omega \Omega^i, \quad \Omega' = 0.$$

Lorsque la variété T_n est sans torsion ($\Omega^i = 0$), on en déduit

$$\omega^i \Omega = 0.$$

Si $n > 2$, il s'en suit

$$\Omega = 0.$$

Nous voyons donc que *si la torsion de la variété T_n ($n > 2$) est nulle, il en est de même de sa courbure.*

2. Supposons maintenant qu'au point M , outre le repère (R) , soit aussi attaché le repère naturel (P) . Nous convenons de désigner par la même lettre les composantes d'un tenseur relatives à ces deux repères, en l'affectant des indices *latins* dans le cas du repère (R) et des indices *grecs*, s'il s'agit du repère naturel. Posons

$$\omega^i = a_\rho^i du^\rho, \quad \omega = a_\rho du^\rho \quad (5)$$

et introduisons les coefficients a_i^ρ satisfaisant aux identités

$$a_\rho^i a_j^\rho = A_j^i, \quad a_\lambda^r a_r^\mu = A_\lambda^\mu,$$

$$A_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad A_\lambda^\mu = \begin{cases} \text{si } \lambda = \mu, \\ \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

On passe des composantes d'un vecteur relatives à l'un des repères (R) et (P) aux autres, en effectuant les substitutions linéaires suivantes

$$k^i = a_\rho^i k^\rho, \quad k^\lambda = a_r^\lambda k^r,$$

$$l_j = a_j^\rho l_\rho, \quad l_\lambda = a_\lambda^r l_r;$$

il existe des relations analogues dans le cas des tenseurs d'ordres supérieurs. On a en particulier

$$\partial_r f = a_r^\rho \partial_\rho f \quad \left(\partial_\rho f = \frac{\partial f}{\partial u^\rho} \right)$$

et

$$\nabla_x k^\lambda = a_x^r a_s^\lambda \nabla_r k^s, \quad \nabla_x l_\lambda = a_x^r a_\lambda^s \nabla_r l_s.$$

En rapprochant les équations (3), on en déduit

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} k^{\lambda} &= \partial_{\alpha} k^{\lambda} + (a_r^{\lambda} \partial_{\alpha} a_{\sigma}^r + A_{\sigma}^{\lambda} a_{\alpha}) k^{\sigma}, \\ \nabla_{\alpha} l_{\lambda} &= \partial_{\alpha} l_{\lambda} - (a_r^{\sigma} \partial_{\alpha} a_{\lambda}^r + A_{\lambda}^{\sigma} a_{\alpha}) l_{\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Les dérivées covariantes dans une variété quelconque à connexion affine ayant la forme

$$\nabla_{\alpha} k^{\lambda} = \partial_{\alpha} k^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\lambda} k^{\sigma}, \quad \nabla_{\alpha} l_{\lambda} = \partial_{\alpha} l_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\sigma} l_{\sigma},$$

on voit que dans le cas présent les coefficients $\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu}$ ont des valeurs suivantes

$$\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} = a_r^{\mu} \partial_{\lambda} a_{\alpha}^r + A_{\alpha}^{\mu} a_{\lambda}.$$

Ceci posé, nous pouvons maintenant calculer les composantes de la torsion et de la courbure de la variété T_n et nous trouvons respectivement

$$S_{\alpha\lambda}^{\cdot\mu} = -a_r^{\mu} \partial_{[\alpha} a_{\lambda]}^r + A_{[\alpha}^{\lambda} a_{\lambda]}$$

et

$$R_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = -2A_{\lambda}^{\mu} \partial_{[\alpha} a_{\lambda]}.$$

Les tenseurs contractés du tenseur de courbure

$$(V_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\rho}, \quad R_{\alpha\lambda} = R_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\rho})$$

sont donc

$$V_{\alpha\lambda} = -2n \partial_{[\alpha} a_{\lambda]}, \quad R_{\alpha\lambda} = 2 \partial_{[\alpha} a_{\lambda]}$$

et l'on a évidemment

$$V_{\alpha\lambda} = -n R_{\alpha\lambda}.$$

Imaginons maintenant un parallélogramme infinitésimal construit sur les vecteurs de composantes $d_1 u^{\alpha}$ et $d_2 u^{\alpha}$, issus du point M . Transportons par parallélisme le long de ce parallélogramme un vecteur contravariant et un vecteur covariant; on montre facilement à l'aide de la formule (7), que les composantes k^{λ} et l_{λ} de ces vecteurs subissent des accroissements suivants

$$Dk^{\lambda} = m k^{\lambda}, \quad Dl_{\lambda} = -m l_{\lambda},$$

où l'on a posé

$$m = (d_1 u^{\rho} d_2 u^{\sigma} - d_1 u^{\sigma} d_2 u^{\rho}) \partial_{[\rho} a_{\sigma]}.$$

On voit donc que si l'on déplace un vecteur parallèlement le long d'un cycle infinitésimal, ses composantes prennent des accroissements proportionnels à leurs valeurs initiales.

3. Considérons les deux vecteurs de composantes a_r^r et a_r^λ par rapport au repère naturel; r a ici une valeur fixe prise parmi les nombres 1, 2, ..., n . Calculons les dérivées covariantes de ces composantes, en se servant des formules (6); nous trouverons

$$\nabla_z a_\lambda^r = -a_z a_\lambda^r, \quad \nabla_z a_r^\lambda = a_z a_r^\lambda. \quad (8)$$

Posons

$$g_{\lambda\mu} = \sum_{r=1}^n a_\lambda^r a_r^\mu, \quad g^{\lambda\mu} = \sum_{r=1}^n a_r^\lambda a_r^\mu. \quad (9)$$

Les quantités $g_{\lambda\mu}$ et $g^{\lambda\mu}$ sont des composantes de deux tenseurs symétriques; on a évidemment

$$g_{\lambda\rho} g^{\mu\rho} = A_\lambda^\mu$$

et

$$\|g_{\lambda\mu}\| \neq 0.$$

Il résulte immédiatement des équations (8) et (9) qu'on a

$$\nabla_z g_{\lambda\mu} = -2a_z g_{\lambda\mu}, \quad \nabla_z g^{\lambda\mu} = 2a_z g^{\lambda\mu}$$

ou encore, en vertu de la deuxième des relations (5),

$$\delta g_{\lambda\mu} = -2\omega g_{\lambda\mu}, \quad \delta g^{\lambda\mu} = 2\omega g^{\lambda\mu}. \quad (10)$$

Il existe donc dans les variétés T_n un tenseur symétrique du second ordre et du rang n tel, que sa différentielle absolue satisfait aux relations (10). Cette propriété des variétés T_n les rapproche des variétés de M. Weyl.

Władysław Gorczyński.

**O związku między promieniowaniem rozproszonym
nieba i stopniem usłonecznienia.**

Komunikat zgłoszony dn. 17 stycznia 1934 r.

WSTĘP.

Prowadzenie pomiarów promieniowania słonecznego, rozproszonego przez sklepienie niebieskie, nie przedstawia obecnie większych trudności wobec istnienia prostych przyrządów termoelektrycznych do tego celu służących. Przy pomocy solarymetrów, konstruowanych od r. 1925 zarówno w postaci przyrządów do odczytań bezpośrednich jako też samozapisujących, otrzymuje się z odczytań bezpośrednich galwanometru strzałkowego (np. miliwoltmetru znanego konstruktora paryskiego Jules Richard) wartości zarówno promieniowania całkowitego (od słońca i nieba) jak i rozproszonego przez samo tylko sklepienie niebieskie.

Szczególnie łatwe jest użycie t. zw. pyrhelimetrów rurkowych, służących jako solarymetry, których szczegółowszy opis, ilustrowany fotografjami przyrządów i sposobem ich użycia, podany został w „Sprawozdaniach T. N. W.” (XXV z r. 1932) oraz we „Wszechświecie” (Nr. I z r. 1933).

W tych nader prostych przyrządach ustawia się (po zdjęciu uprzedniem rurki diafragmowanej opatrzonej wizjerami) stosowny pręcik z krążkiem, umocowany ponad poziomo ustawionym i pokrytym szkłem półkulistym stosem termoelektrycznym. Ruchomy ten pręcik, rzucając cień od słońca na stos, pozwala mierzyć bezpośrednio każdorazową wartość natężenia promieniowania rozproszonego przez sklepienie niebieskie lub filtrowanego mniej lub więcej regularnie przez kompleks chmur i smug.

Dla stałej rejestracji promieniowania słonecznego używane są solarygrafy, w których stos termoelektryczny, pokryty hermetycznie szkłem półkulistym, umieszczony jest nazewnątrż; otrzymywane w ten sposób wartości prądu termoelektrycznego są

notowane automatycznie z pomocą miliwoltmetrów samozapisujących, umieszczonych wewnątrz budynku w dowolnej odległości. W razie gdy chodzi wyłącznie tylko o promieniowanie rozproszone (a nie, jak zwykle, o promieniowanie całkowite zarówno od słońca jak i nieba), stawia się przed stosem termoelektrycznym wspomniany wyżej pręcik z tarczą; pręcik ten jest połączony tym razem z mechanizmem zegarowym tak, aby tarcza rzucająca cień na stos przesuwiała się automatycznie wraz ze słońcem. Gdy zadowolnić się można mniejszą dokładnością, wystarczy może ustawienie przed stosem termoelektrycznym, zamiast krążka, wąskiego pasma cylindrycznego pod odpowiednim kątem. Drobne regulacje codzienne tego kąta pozwalają na utrzymywanie cienia słonecznego przez dzień cały na receptorze solarymetru, bez konieczności używania mechanizmu zegarowego przed stosem.

Nie wchodząc w bliższe szczegóły konstrukcji solarymetrycznych, które znaleźć można w publikacjach wymienionych w „Bibliografji” w końcu niniejszego komunikatu, podajemy poniżej niektóre rezultaty pomiarów promieniowania rozproszonego, otrzymane w klimacie usłonecznionym Riwjery Francuzkiej. Te ostatnie porównujemy z prowadzonymi w tymże okresie szeregi pomiarów solarymetrycznych, przeprowadzonych przez Inż. Fr. Ostrowskiego w Warszawie (Gabinet Aktynometryczny T. N. W.) oraz w paru miejscach niżu polskiego.

Wartości promieniowania rozproszonego dla nieba pogodnego.

Wartości te okazują wybitną i dość prawidłową zależność od wysokości słońca nad poziomem; widać to z poniższego zestawienia dla Nicei na wybrzeżu morza Śródziemnego, dla miejscowości górskiej Thorenc (w Alpach Nadmorskich na 1,3 Km nad poziomem morza), dla Conegliano (Veneto) oraz dla Warszawy. Dane dla Polski otrzymane zostały przez inż. Franciszka Ostrowskiego w specjalnej serji (wiosna 1932 — lato 1933) zorganizowanej staraniem Gabinetu Aktynometrycznego T. N. W. Serje solarygraficzne dla Conegliano, na północ od Wenecji, ogłoszone zostały przez prof. Agostino Puppo, dyrektora tamtejszego Obserwatorium i zasłużonego badacza italskiego na polu Aktynometrii.

Tab. I.

Wartości natężenia promieniowania rozproszonego (w częściach setnych kalorii) w funkcji wysokości słońca (*b*) nad poziomem. Variations of the intensity of diffuse sky radiation, in hundredth of calorie, with the sun's altitude (*b*).

0,01 gr. cal/min, cm².

<i>b</i>	Nice	Thorenc	Conegliano	Warszawa-Warsaw		
	dni pogodne — clear days				Półpochm. half covered	zachmur. całkowite tot. covered
65°	.	.	17	.	.	.
60°	18	.	17	21	.	.
55°	16	.	16	19	.	.
50°	15	.	16	18	.	.
45°	14	13	15	17	28	.
40°	13	12	14	15	25	.
35°	12	11	13	13	22	.
30°	12	10	12	12	19	13
25°	11	09	11	11	16	11
20°	10	08	10	09	14	09
15°	.	.	08	08	11	07
10°	.	.	06	06	07	05
5°	.	.	.	04	05	04

Części setne — Hunderth of gr. cal/min. cm².

Z zestawienia tego wynika, że różnice między wybrzeżem śródziemnomorskiem i Alpami oraz niziną polską są zgoła niewielkie pod względem przebiegu promieniowania rozproszonego w dni pogodne. Pewien niezbyt duży wzrost dla Warszawy i to tylko dla wyższych stanowisk słońca w ciągu lata, objaśnić można raczej tą okolicznością, że u nas w Polsce dni zupełnie pozbawionych chmur jest nader niewiele; natomiast mała już liczba pojawiających się chmur, zwłaszcza z grupy kłębiastej (cumuli) wpływa na dość nagły wzrost dyfuzji atmosferycznej.

Dwie ostatnie rubryki Tab. I właśnie podane są w tym celu, aby ilustrować stosunki charakteryzujące pod tym względem klimat słoneczny Warszawy, a właściwie niziny środkowo-polskiej, gdyż inż. F. Ostrowski przeprowadzał pomiary solarymetryczne w trzech miejscowościach, a mianowicie w Warszawie T. N. W.,

w Remiszewicach między Piotrkowem a Łodzią, oraz w Januszewicach pod Opoczmem.

Już z danych warszawskich wynika zupełnie wyraźnie, że wraz ze zwiększaniem się zachmurzenia a właściwie z pojawianiem się coraz większej liczby obłoków rozpraszających promienie słoneczne lub też smug filtrujących te ostatnie, wzrasta też i natężenie dyfuzji. Wzrost ten jednak nie jest stały, gdyż, poczynając od pewnego stopnia pokrycia nieba, dyfuzja zaczyna zmniejszać się, aby wreszcie dla nieba całkowicie zasłoniętego przez chmury spaść do wartości w przybliżeniu tych samych, które obserwujemy dla dni pogodnych.

Dla bliższego wyjaśnienia tych interesujących stosunków, przeprowadzone zostały szczegółowe obliczenia krzywych solarygraficznych dla Nicei z okresu 1931—1933, z których główne rezultaty podajemy poniżej.

Tab. II.

Przebieg dzienny natężenia promieniowania rozproszonego, Q_{diff} dla dni pogodnych w Nicei.
Daily variations of diffuse sky radiation Q_{diff} at Nice, France during clear days.

Daty Dates	Czas prawdziwy słoneczny — True solar time								Sumy dzien. Daily totals
	12 ^h	11 ^h	10 ^h	9 ^h	8 ^h	7 ^h	6 ^h	5 ^h	
	13 ^h	14 ^h	15 ^h	16 ^h	17 ^h	18 ^h	19 ^h		
	Setne — hundredth of cal. gr/cm ² , min.								cal. gr/cm ²
15.I	12	11	10	08	05	.	.	.	55
15.II	13	12	12	11	08	04	.	.	72
15.III	14	13	12	12	10	07	01	.	82
15.IV	17	16	15	13	12	10	06	.	107
15.V	20	18	16	14	12	11	08	04	124
15.VI	22	20	17	14	12	11	09	05	132
15.VII	21	19	16	14	12	11	08	04	122
15.VIII	18	16	14	13	12	10	06	.	107
15.IX	16	14	13	12	11	08	03	.	92
15.X	13	12	11	10	09	05	.	.	72
15.XI	12	11	10	08	06	.	.	.	56
15.XII	11	10	09	07	04	.	.	.	49

Zanim jednak przejdziemy do rozpatrzenia solarygramów nicejskich, wspomnimy pokrótce o przebiegu dziennym natężenia promieniowania rozproszonego Q_{diff} dla dni pogodnych na Riwjerze Francuzkiej. Odnosne dane znajdujemy w Tab. II w której natężenie Q_{diff} podane są dla kolejnych godzin od wschodu do zachodu. Zgodnie ze stanowiskiem słońca widzimy tu spadek regularny w miarę zmniejszania się wysokości słońca nad poziomem, i to zarówno w przebiegu dziennym jak i rocznym. Wartości okołopołudniowe są w lecie prawie dwukrotnie wyższe niż w porze zimowej. Obok wartości godzinnych Tab. II podaje nam sumy całodienne $\sum Q_{diff}$ w kalorjach gramowych na cm^2 powierzchni poziomej w Nicei.

Rezultaty porównań sum solarygraficznych z czasem trwania usłonecznienia według heliografu.

Sumy solarygraficzne otrzymuje się z opracowań diagramów przyrządu samozapisującego, o którym była już mowa powyżej. Rzędne solarygramów, wypisywane naprzód w podziałkach skali stustopniowej diagramów miliwoltmetru samozapisującego konstrukcji Jules Richard w Paryżu, są następnie sprowadzane do kalorii, przy pomocy współczynnika wyznaczanego dla każdego solarygrafu.

Współczynnik ten w egzemplarzach dawniejszych ze szklami półkulistami o niewielkiej średnicy 30 mm wykazywał pewien wzrost dla niższych wysokości słońca; dla obecnie używanych szkieł o średnicy 50 mm zmiany te są nieznaczne, co bardzo upraszcza redukcje solarygramów.

Heliografy systemu Campbella o kuli szklanej, wypalającej ślady na założonych z tyłu kartonach, dają, jak wiadomo, czas trwania usłonecznienia w godzinach dla każdego dnia. Przy opracowaniu takich danych liczyć się trzeba z tem, że ślady są niewidoczne, gdy natężenie promieniowania słońca schodzi poniżej 0.3 cal gr. na cm^2 i minutę.

Mimo pewnych usterek danych heliograficznych, zestawienie czasów trwania usłonecznienia z sumami otrzymanymi z rejestracji solarygraficznej wykazuje natychmiast, że ilości globalne promieniowania, idącego wprost od słońca oraz rozproszonego przez sklepienie niebieskie, bynajmniej nie wzrastają w żadnej prostej proporcji do długości usłonecznienia.

Weźmy dla przykładu przebieg tych wartości dla grudnia w Nicei. Otóż dla czasów trwania usłonecznienia w godzinach:

1	2	3	4	5	6	7	8	godzin
---	---	---	---	---	---	---	---	--------

otrzymujemy następujące sumy globalne promieniowania (od słońca i nieba):

100	140	150	165	180	195	210	225	kalorji
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---------

Odejmując składowe poziome promieniowania idącego bezpośrednio od słońca, pozostają dla promieniowania rozproszonego następujące sumy, poniżej podane z pewnem zaokrągleniem:

75	90	80	70	60	50	40	35	kalorji.
----	----	----	----	----	----	----	----	----------

Ten szczególny na pierwszy rzut oka rezultat objaśnia się tem, że 8-godzinny czas trwania usłonecznienia w grudniu odpowiada w Nicei niebu prawie całkowicie pogodnemu. W tym wypadku dyfuzja, wynosząc w sumie dziennej 35 kalorji, stanowi blisko 14% od 225 kal. jako sumy globalnej od słońca i nieba.

Natomiast dla nieba półpogodnego (czas trwania usłonecznienia 4 godziny) otrzymujemy 165 kalorji, a więc dyfuzja w ilości 70 kal. wynosi tu już prawie 43%. Maximum dyfuzji dziennej wypada dla dużego pokrycia nieba; mianowicie dla 2 godzin, odpowiadających mniejwięcej $\frac{1}{4}$ czasu trwania usłonecznienia możliwego w grudniu w Nicei, znajdujemy 90 kal. t. j. 64% promieniowania globalnego od słońca i nieba.

Dla dni z jeszcze większem zachmurzeniem, gdy czas trwania usłonecznienia spada poniżej 2 godzin dziennie, widzimy już raptowniejszy spadek sum promieniowania. Jednak nawet dla nieba całkowicie pokrytego, gdy heliograf nie wypala żadnych śladów, mimo że słońce blade prześwieca (usłonecznienie 0 w odróżnieniu od 0.0 dla gęstej pokrywy chmur), pozostaje zawsze pewna suma promieniowania rozproszonego, jak to wynika z danych Tab. III.

Stosunki te stają się bardziej zrozumiałe, gdy uprzytomnimy sobie, że w razie większej liczby chmur i częstszych przejść obłoków przez słońce, ulega spadkowi promieniowanie idące bezpośrednio od słońca, lecz wzrasta jednocześnie ilościowo i zwłaszcza procentowo stosunek dyfuzji.

Przechodząc od danych powyższych dla grudnia do wartości dla wszystkich miesięcy, znajdujemy w Tab. III przeciętne sumy dzienne promieniowania rozproszonego dla kolejnych okresów miesięcznych od stycznia do grudnia w Nicei.

Tab. III.

Przeciętne sumy dzienne promieniowania rozproszonego Q_{diff} w cal. gr na cm^2 powierzchni poziomej dla kolejnych okresów miesięcznych w Nicei, w zależności od czasu trwania usłonecznienia w godzinach.

Average daily totals of diffuse sky radiation Q_{diff} in cal. gr for cm^2 of horizontal surface for different months at Nice, France in function of sunshine duration in hours.

Godz. hours	Miesiące — Months											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0.0	55	70	80	105	125	130	120	105	90	70	55	50
0	75	100	130	160	180	200	210	180	140	110	90	70
1	80	120	160	180	200	240	240	205	160	120	100	75
2	100	140	170	210	250	300	290	250	205	160	110	90
3	80	130	185	230	270	310	300	240	190	150	105	80
4	65	110	160	225	290	320	305	230	170	140	90	70
5	55	100	130	195	260	310	300	220	150	125	85	60
6	50	90	115	160	230	290	290	210	145	100	80	50
7	45	80	100	140	200	270	270	200	140	90	70	40
8	40	70	90	130	190	260	240	190	135	85	60	35
9	.	60	80	120	180	230	210	180	130	80	45	.
10	.	50	70	110	170	200	180	170	120	70	35	.
11	.	.	65	100	160	180	170	160	110	60	.	.
12	.	.	60	90	150	165	160	145	95	50	.	.
13	.	.	.	80	130	145	140	130	80	.	.	.
14	105	125	115
15	105

Usłonecznienie (astronomiczne, możliwe i rzeczywiście obserwowane) w godzinach i częściach dziesiątych.

Duration (astronomical, possible and effectively observed) of sunshine in hours and tenths.

astr.	9.3	10.4	11.8	13.3	14.6	15.4	15.2	14.1	12.7	11.2	9.8	9.0
poss.	8.0	9.2	10.7	12.3	13.7	14.6	14.4	13.2	11.7	10.1	8.6	7.7
effect.	4.6	5.6	6.2	7.1	8.7	9.6	10.9	10.6	8.0	6.4	4.6	4.5

Period: 1921/30.

Tab. IV.

Sumy dzienne promieniowania rozproszonego dla Nicei wyrażone w procentach odpowiednich sum promieniowania globalnego.
Daily totals of diffuse sky radiation expressed as percentages of corresponding sums of the total (sun and sky) radiation at Nice, France.

Godz. Hours	Miesiące — Months											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
1	76	78	80	82	83	84	84	83	82	80	78	75
2	66	68	70	73	75	78	77	75	73	71	68	64
3	52	58	62	65	68	71	70	67	64	61	58	54
4	39	46	51	56	62	65	64	58	53	49	45	42
5	31	37	42	48	55	59	58	51	45	40	36	33
6	25	30	33	40	47	53	53	46	40	35	30	26
7	20	25	30	35	40	47	47	40	35	30	24	19
8	17	21	25	30	36	43	41	36	30	24	20	16
9	.	17	19	24	32	37	35	32	28	22	16	.
10	.	14	16	20	28	32	30	28	24	17	.	.
11	.	.	13	17	24	28	26	24	21	13	.	.
12	.	.	.	14	21	24	24	21	18	.	.	.
13	17	20	20	18	14	.	.	.
14	14	16	16	15
15	12

Obliczenie sum miesięcznych promieniowania rozproszonego i globalnego, dla obserwowanych faktycznie czasów trwania usłonecznienia w Nicei (okres 1921—1930).

Calculation of monthly totals of diffused Q_{diff} and total (sun and sky) radiation Q_{glob} , for effectively observed sunshine duration at Nice (period 1921—1930).

Usłonecznienie obserwowane w godzinach. Duration of sunshine in hours.
 eff. 4.6 5.6 6.2 7.1 8.7 9.6 10.9 10.6 8.0 6.4 4.6 4.5
 Odpowiadające % prom. rozprosz. Corresponding percent. of diffuse sky radiation.
 % 35 33 34 34 33 34 26 26 30 33 40 38
 Sumy dzienne Q_{diff} . Daily totals in gr. cal/cm² (sky radiation only)
 gr. cal. 59 94 112 139 183 212 171 164 135 94 87 65
 Sumy miesięczne Q_{diff} . Monthly totals in Kg. cal/cm² (sky radiation only)
 Kg. cal. 1.8 2.7 3.5 4.2 5.7 6.4 5.3 5.1 4.1 2.9 2.6 2.0
 Sumy dzienne Q_{glob} . Daily totals in gr. cal/cm² (sun and sky radiation).
 gr. cal. 169 285 329 409 555 624 658 631 450 285 218 171
 Sumy miesięczne Q_{glob} . Monthly totals in Kg. cal/cm² (sun and sky radiation).
 Kg. cal. 5.2 8.1 10.2 12.3 17.2 18.7 20.4 19.8 13.5 8.8 6.5 5.3
 Sumy roczne — Annual totals: Q_{glob} (sun and sky) 141 Kg. cal; Q_{diff} .
 46.3 Kg. cal (33%).

Mimo potrzeby pewnego zaokrąglenia liczb wobec materiału porównawczego z solarygrafu z 3 tylko lat, dane Tab. III są interesujące i pozwalają na łatwe orientowanie się w stosunkach dyfuzji nieba zależnie od stopnia usłonecznienia.

W Tab. IV podane są wprost wartości procentowe promieniowania rozproszonego w częściach odpowiednich sum radiacji globalnej, otrzymywanej zarówno od słońca jak i całego sklepienia niebieskiego.

Znając usłonecznienie przeciętne w godzinach według danych heliografu, możemy z łatwością wyznaczyć, przy pomocy tabel III i IV, odpowiadające wartości promieniowania rozproszonego i globalnego. Rachunki te, podane dla Nicei (okres 1921—1930) w końcu Tab. IV, dają 141 Kg. cal. rocznie na cm² powierzchni poziomej, podczas gdy otrzymujemy tylko 46 Kg. cal (33%) dla promieniowania rozproszonego. Ciekawe jest następujące zestawienie porównawcze dla Nicei i Warszawy:

	Sumy globalne (Kg. cal)			% dyfuzji		
	Zima	Lato	Rok	Zima	Lato	Rok
Nicea	19	59	141	35	28	33
Warszawa	5	41	87	66	35	38

Widać stąd, że Nicea w zimie wykazuje prawie czterokrotnie większe sumy promieniowania globalnego, gdy w lecie przeważa jest znacznie mniejsza. W stosunku do promieniowania rozproszonego wpływ tego ostatniego w bilansie ogólnym promieniowania jest o wiele większy w Warszawie i wogóle w Europie Środkowej niż w klimacie śródziemnomorskim.

WNIOSKI OGÓLNE I ZAKOŃCZENIE.

Ze wszystkich zestawień poprzednich wynika niezawodnie, że:

a) Natężenie promieniowania rozproszonego wykazuje nie tylko regularne zmiany okresowe w przebiegu dziennym i rocznym (por. Tab. I i Tab. II), zależne od wysokości słońca nad poziomem, ale także podlega wybitnym wahaniom zależnie od stopnia i rodzaju pokrycia nieba.

b) Sumy dzienne promieniowania rozproszonego otrzymane z wykresów solarygrafu i zestawione porównawczo z czasem trwania usłonecznienia w godzinach według danych heliograficznych, wykazują (według Tab. III) początkowo nader szybki wzrost

od stosunków dla nieba całkowicie pokrytego przez chmury (uśłonecznienie 0.0) dla nieba z przebłyskami słońca, gdy czas trwania uśłonecznienia waha się od 0 do 2—4 godzin dziennie zależnie od pory roku. Gdy liczba godzin słonecznych dalej wzrasta t. j. dla nieba coraz bardziej pogodnego, udział promieniowania rozproszonego stopniowo maleje, dochodząc — dla dni zupełnie pogodnych — do wartości tego rzędu co i dla nieba całkowicie pokrytego przez chmury.

Tab. V.

Natężenie promieniowania rozproszonego Q_{diff} (wartości przeciętne w godzinach okołopołudniowych 10^b-14^b w zależności od stopnia uśłonecznienia w Nicei.

Intensity of diffuse sky radiation at Nice, France in relation of degrees (parts) of total daily insolation.

Miesiące Months	Stopnie uśłonecznienia — Parts of total daily insolation					
	bez chmur clear	3/4	1/2	1/4	1^b-0^b	0.0
	Części setne kalorji — Hunderth of gr. cal/cm ² , min.					
I	11	12	14	18	16	11
II	12	15	19	24	20	13
III	13	16	21	28	23	14
IV	16	17	23	32	25	17
V	18	19	25	37	27	18
VI	20	22	28	42	31	21
VII	19	21	27	39	30	19
VIII	16	18	25	33	27	16
IX	14	17	22	29	23	14
X	12	14	19	26	20	12
XI	11	12	16	19	16	12
XII	10	12	15	18	15	11
Rok Year	14	16	21	29	23	15

c) Stosunki te, pod względem udziału procentowego promieniowania rozproszonego w sumach promieniowania globalnego otrzymywanego zarówno od słońca jak i od całego sklepienia

niebieskiego, przedstawia nam Tab. IV. Z podanych tam wartości procentowych łatwo jest następnie obliczyć sumy miesięczne promieniowania rozproszonego i globalnego, znając czasy trwania usłonecznienia faktycznie obserwowanego w danym czasie i miejscu.

d) Z przedstawionych w Tab. V wartości natężeń promieniowania rozproszonego w cal. gr na cm^2 i minutę powierzchni poziomej w Nicei, wynika że dla pokrycia nieba w stosunku mniejwięcej $\frac{1}{4}$ usłonecznienia możliwego w danym okresie, dyfuzja nieba osiąga maximum. W ten sposób najmniejsze ilości promieniowania rozproszonego otrzymuje się z jednej strony dla nieba bądź zupełnie pogodnego bądź całkowicie pokrytego przez chmury, gdy — dla zachmurzeń częściowych — natężenia dyfuzji przekraczają nawet dwukrotnie, w warunkach przeciętnych, wartości obserwowane w przypadku pierwszym (dla zachmurzenia 0 lub 10).

Kończymy zaznaczeniem, że podobny charakter jakościowy dają rezultaty obliczeń dla Warszawy i dla Sztokholmu, mimo że sumy bezwzględne promieniowania słonecznego są tam o wiele niższe niż w Nicei.

BIBLIOGRAFJA

- Wł. Gorczyński. przyczynek do poznania wielkości promieniowania rozproszonego w bilansie ogólnym sum ciepła. Contribution to knowledge of diffuse radiation in the general thermic balance of the earth". „Spraw. Tow. Nauk. Warsz.“, XXV, pp. II, 1932.
- Wł. Gorczyński i Fr. Ostrowski. O wartościach rozproszonego promieniowania słonecznego dla Warszawy i niżu polskiego. Values of diffuse sky radiation at Warsaw and in Central Poland. Ibidem, 1933.
- Wł. Gorczyński. Quelques mesures du rayonnement solaire diffusé par la voûte céleste obtenues avec les solarimètres dans les Alpes Maritimes. „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences“, T. 192, 4 mai 1931, Paris.
- Wł. Gorczyński. Sur la part du rayonnement solaire diffusé par la voûte céleste, dans les sommes d'insolation. Ibidem, T. 196, 13 mars 1933, Paris.
- Wł. Gorczyński. Climat solaire de Nice et de la Côte d'Azur. Nice, 1934.

Władysław Gorczyński.

Interdependence between the amount of diffuse sky radiation and the duration of sunshine.

Mémoire présenté dans la séance du 17 Janvier 1934.

Summary.

The daily and monthly amounts of total (sun and sky) and diffuse radiation were obtained at Nice, France by using registering solarimeters constructed by Jules Richard Society in Paris.

From comparison between the values calculated by solarimetric method with the corresponding duration of sunshine, as received by a Campbell recorder, following results are deduced and discussed in this paper:

a) The intensity of diffuse sky radiation has not only regular diurnal and seasonal variations depending from altitude of the sun over the horizon (see Tab. I and Tab. II with English subtitles), but presents very important differences caused by changing amount and kind of clouds and veils.

b) We deduce, from Tab. III in the Polish text, that the increase of daily totals of diffuse sky radiation is, by no means, directly proportional to the duration of sunshine. From a certain initial value by completely covered sky during the whole day (sunshine duration 0.0), the amount of the diffuse radiation begins to increase very rapidly owing to intermittent appearances of the sun, even by very veiled sky or by frequent passages of clouds. Highest daily amounts of diffuse sky radiation were observed at Nice, France for a sunshine duration varying from 2 (in winter) to 4 hours (in summer) during the whole day.

When the duration of bright sunshine becomes still greater, the part of diffuse radiation in the whole amount of total radiation from sun and sky decreases successively. For perfectly clear days we find practically the same amounts of diffuse radiation that for totally covered sky (as may be easily seen in Tab. III).

c) In Tab. IV are given percentages of diffuse (Q_{diff}) to the total sun and sky radiation (Q_{glob}) for different months, as obtained at Nice, France. These percentage values were cal-

culated for different hours of sunshine duration; they permit to find easily the daily and monthly amounts of both Q_{diff} and Q_{glob} , provided that corresponding values of effective sunshine duration are known from sunshine recorders.

At the end of Tab. IV the whole calculation is made for Nice, France for a period of 10 years 1921/1930.

d) It results from intensity values, given in Tab. V in Polish text, that highest daily amounts of sky radiation are observed for days with $\frac{1}{4}$ of possible sunshine duration. These maxima are frequently more than 2 times greater than corresponding amounts obtained by totally covered or perfectly clear days. In the first or second case the diffuse radiation differs but very little in average.

The conditions found at Nice, France for sky radiation are qualitatively similar to those previously established at Warsaw, Poland and Stockholm in Sweden, although quantitatively the Riviera shows, in winter period, 4 times greater amounts of total radiation from sun and sky than Central Europe.

Posiedzenie

z dnia 28 lutego 1934 r.

Michał Petrovitch.

Twierdzenie o funkcjach całkowitych.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 28 lutego 1934 r.

Streszczenie.

Jeżeli nazwiemy funkcję majoryzującą $F(z)$ funkcji $f(x)$ (gdzie $r = |x|$), danej przez swe rozwinięcie na szereg Taylora (T), szereg, otrzymany przez zastąpienie współczynników rozwinięcia (T) oraz liczby x przez ich moduły, wówczas pewne związki linjowe między współczynnikami dwóch funkcyj całkowitych $u(x)$ i $v(x)$, których funkcje majoryzujące $U(x)$ i $V(z)$ są związane zależnością *algebraiczną* względem U , V , r , są możliwe tylko wówczas, gdy u i v są rodzaju *skończonego*.

Michel Petrovitch.

Proposition sur les fonctions entieres.

Présenté dans la séance du 28 Février 1934.

Nous désignerons, selon la définition usuelle, comme *fonction majorante* $F(r)$ d'une fonction donnée

$$(1) \quad f(x) = \sum a_n x^n$$

à coefficients a_n réels ou imaginaires, la fonction

$$(2) \quad F(r) = \sum a_n r_n$$

obtenue de (1) en y remplaçant les $\underline{\alpha}_n$ et \underline{x} par leurs modules

$$|\alpha_n| = \alpha_n \quad |x| = r$$

Soit $[\lambda_n \alpha_n]$ la forme linéaire en α_n

$$(3) \quad [\lambda_n \alpha_n] = \lambda_n \alpha_0 + \lambda_{n-1} \alpha_1 + \dots + \lambda_0 \alpha_n$$

rattachée à la fonction $f(\underline{x})$ où λ_n est le coefficient de \underline{x}^n dans le développement taylorien d'une fonction *algébrique* $\theta(x)$ à coefficients tous réels.

Dans le cas, par exemple, de

$$\theta(x) = a + bx \quad \text{on a } \lambda_0 = a, \lambda_1 = b, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0$$

$$\theta(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{on a } \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 1$$

$$\theta(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{on a } \lambda_n = n + 1$$

$$\theta(x) = \frac{1}{(1-x)^p} \quad \text{on a } \lambda_n = \frac{(p+n-1)!}{(p-1)! n!}$$

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{on a } \lambda_n = \binom{2n}{n}$$

La proposition faisant l'objet de cette Note se rapporte aux fractions *entières*

$$(4) \quad u(x) = \sum \alpha_n x^n \quad v(x) = \sum \alpha'_n x^n$$

admettant des formes respectives

$$[\lambda_n \alpha_n] \quad \text{et} \quad [\lambda'_n \alpha'_n]$$

dont le rapport s'exprime en relation *birrationnelle* avec n , c'est-à-dire est de la forme

$$(5) \quad \frac{[\lambda_n \alpha_n]}{[\lambda'_n \alpha'_n]} = \frac{an + b}{a'n + b'}$$

(où \underline{a} , \underline{a}' , \underline{b} , \underline{b}' ne dépendent pas de \underline{n} .)

Nous désignerons un tel couple de fonctions entières comme *couple* (u, v) . Tel serait, par exemple, le couple formé de deux fonctions

$$u(x) = h + (ax + b)e^x = \sum \frac{an + b}{n} x^n + h$$

$$v(x) = h' + (a'x + b')e^x = \sum \frac{a'n + b'}{n!} x^n + h'$$

admettant les deux formes

$$[\lambda_n \alpha_n] = \alpha_n = \frac{an + b}{n!}$$

$$[\lambda_n' \alpha_n'] = \alpha_n' = \frac{a'n + b'}{n!}$$

correspondant à $\Theta(x) = 1 \quad \lambda_0 = \lambda_0' = 1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_1' = \lambda_2' = \dots = 0$$

et dont le rapport est égal à

$$\frac{an + b}{a'n + b'}$$

La proposition est la suivante :

Si les fonctions majorantes $\underline{U}(r)$ et $\underline{V}(r)$ de deux fonctions entières $u(x)$ et $v(x)$ formant un couple (u, v) , sont liées par une relation algébrique en $\underline{U}, \underline{V}, \underline{r}$, les fonctions \underline{u} et \underline{v} sont de genre fini.

Pour le faire voir, nous remarquerons que la série

$$(6) \quad \sum [\lambda_n \alpha_n] r^n$$

est le développement du produit de $\underline{U}(r)$ par la fonction algébrique $\underline{\Theta}(r)$ ayant λ_n' comme coefficient de r^n , et que la série

$$(7) \quad \sum [\lambda_n' \alpha_n'] r^n$$

est le développement du produit de $\underline{V}(r)$ par la fonction algébrique $\underline{\Theta}(r)$ ayant λ_n' comme coefficient de r^n .

D'autre part, de (5) on tire

$$(a'n + b')[\lambda_n \alpha_n] = (an + b)[\lambda_n' \alpha_n']$$

d'où

$$(8) \quad a' F_1(r) + b' F_0(r) = a \Phi_1(r) + b \Phi_0(r)$$

où

$$\begin{aligned}
 F_0(r) &= \sum [\lambda_n \alpha_n] r^n = \Theta U \\
 (9) \quad F_1(r) &= \sum n [\lambda_n \alpha_n] r^n = r \frac{d}{dr} (\Theta U) \\
 \Phi_0(r) &= \sum [\lambda'_n \alpha'_n] r^n = \Theta_1 V \\
 \Theta_1(r) &= \sum n [\lambda'_n \alpha'_n] r^n = r \frac{d}{dr} (\Theta_1 V)
 \end{aligned}$$

De (8) et (9) on tire la relation

$$\begin{aligned}
 (10) \quad a' r \Theta \frac{dU}{dr} + (a' r \frac{d\Theta}{dr} + b' \Theta) U &= a r \Theta_1 \frac{dV}{dr} + \\
 + (a r \frac{d\Theta_1}{dr} + (b \Theta_1) V) &= 0.
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'entre \underline{U} , \underline{V} et \underline{r} existe une relation algébrique

$$(11) \quad f(U, V, r) = 0.$$

L'élimination de \underline{V} et de $\frac{dV}{dr}$ entre les trois équations (10), (11)

et

$$(12) \quad \frac{df}{dU} \frac{dU}{dr} + \frac{dt}{dV} \frac{dV}{dr} + \frac{dt}{dr} = 0$$

conduit à une équation différentielle du premier ordre

$$(13) \quad \varphi \left(r, U, \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

où φ est un polynôme en r , U , $\frac{dU}{dr}$.

Le genre de la fonction entière $\underline{U}(r)$ est dès lors nécessairement fini. En effet, on a pour tout point \underline{x} sur le cercle de rayon arbitraire \underline{r} ayant l'origine comme centre

$$(14) \quad |u(x)| \leq \sum \alpha_n r^n = U(r)$$

et \underline{U} est une intégrale réelle de l'équation (13). D'après le théorème connu de M. E. Lindelöf sur la croissance des intégrales réelles des équations différentielles algébriques du pre-

mier ordre, la valeur de $\underline{U}(r)$ pour r positif suffisamment grand ne surpasse pas la valeur.

$$(15) \quad \frac{C r^m}{e}$$

où C et m sont une constante positive et un entier positif fini, convenablement choisis.

On en conclut, de la manière connu dans la théorie des fonctions entières, que le genre de $\underline{U}(r)$ ne surpasse par \underline{m} , et d'après l'inégalité (14) il en est de même de $\underline{u}(x)$.

En permutant \underline{u} et \underline{v} dans les relations précédentes, on arrive à la conclusion que le genre de \underline{v} est également fini, ce qui démontre la proposition.

Ainsi, par exemple, si parmi les formes

$$(16) \quad \begin{aligned} & a \alpha_n + b \alpha_{n-1} \quad (a, b = \text{const. positives}) \\ & \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ & \alpha_0 + 2 \alpha_1 + 3 \alpha_2 + \dots + (n+1) \alpha_n \\ & \alpha_0 + \binom{2}{1} \alpha_1 + \binom{4}{2} \alpha_2 + \dots + \binom{2n}{n} \alpha_n \end{aligned}$$

il y en a deux, appliquées l'une à $\underline{u}(x)$, l'autre à $\underline{v}(x)$, dont le rapport serait quotient de deux polynomes du premier degré en \underline{n} , les fonctions \underline{u} et \underline{v} dont les fonctions majorantes \underline{U} et \underline{V} seraient liées par une relation algébrique

$$(17) \quad f(U, V, r) = 0$$

sont de genre fini.

Un exemple en est fourni par le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ fourni par une équation différentielle algébrique réelle du premier ordre

$$(18) \quad f\left(r, y, \frac{dy}{dr}\right)$$

admettant comme intégrale particulière $y(r)$ une fonction enrière à coefficients tayloriens réels et positifs; il suffit de prendre pour \underline{u} et \underline{v} les fonctions $y(x)$ et $y'(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} U(r) &= a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots = u(r) \\ V(r) &= a_1 + 2 a_2 r + 3 a_3 r^2 + \dots = v(r); \end{aligned}$$

en prenant $\Theta(x) = 1$, ce qui correspond à

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$$

et $\theta_1(x) = x$, ce qui correspond à

$$\lambda_0' = n, \quad \lambda_1' = \lambda_2' = \dots = 0$$

les fonctions u et v admettant les deux formes

$$\begin{aligned} [\lambda_n \alpha_n] &= \alpha_n \\ [\lambda_n' \alpha_n'] &= n \alpha_n \end{aligned}$$

dont le quotient est $\frac{1}{n}$; u et v sont de genre fini.

D'après la proposition précédente, deux fonctions entières \underline{u} et \underline{v} de genre infini, dont les fonctions majorantes \underline{U} et \underline{V} sont liées entre elles et avec \underline{r} par une relation algébrique, n'admettent aucune paire de formes $[\lambda_n \alpha_n]$ et $[\lambda_n' \alpha_n']$ dont le rapport serait quotient de deux polynomes du premier degré en \underline{n} .

Or, il n'en est pas nécessairement ainsi si l'un de deux polynomes (ou bien tous les deux) est de degré supérieur à 1. La raison de l'impossibilité dans le cas du premier degré réside dans le fait que la relation

$$\sum n \alpha_n r^n = r \frac{dU}{dr}$$

impose à \underline{U} , lié avec \underline{V} et \underline{r} par une relation algébrique, la condition de satisfaire à une équation différentielle algébrique du premier ordre, n'admettant comme intégrale aucune fonction entière dn genre infini. Par contre, la relation

$$\sum n^p \alpha_n r^n = r \left[r \frac{d}{dr} \dots r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) \right]$$

impose à U la condition de satisfaire à une équation différentielle algébrique d'ordre supérieur à 1, et l'on sait que des telles équations peuvent être satisfaites par des fonctions entières de genre infini. Un exemple en est fourni par les fonctions

$$u = P(x) e^{e^x}, \quad v = Q(x) e^{e^x}$$

(où \underline{P} et \underline{Q} sont polynomes en \underline{x}), dont \underline{U} et \underline{V} satisfont chacune à une équation différentielle algébrique du second ordre.

Henri Malchair (Liège, Belgique).

Kilka własności ciągów i szeregów pozaskończonych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 28 lutego 1934 r.

Quelques propriétés des suites et des séries transfinies.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 28 Février 1934.

Le but de la présente note est de montrer que la convergence uniforme et la convergence absolue peuvent se définir très facilement pour les suites et séries transfinies. Nous avons ensuite démontré que les suites et séries transfinies dont la convergence est absolue ou uniforme jouissaient de certaines propriétés bien caractéristiques des suites et séries infinies (ordinaires) convergeant absolument ou uniformément.

1 — Nous dirons que la suite transfinie (du type $\lambda \leq \Omega$) de fonctions réelles

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots, \quad (\xi < \lambda)$$

est *uniformément convergente* dans un intervalle (a, b) vers une fonction $f(x)$ lorsque la relation $|f(x) - f_\xi(x)| < \varepsilon$ est vérifiée pour $\mu < \xi < \lambda$, le nombre μ ne dépendant que de ε et étant indépendant du point x de l'intervalle (a, b) .

Nous allons démontrer que *si la suite (1) est du type Ω et est uniformément convergente dans un intervalle (a, b) , tous ses termes sont égaux à partir d'un certain indice.*

En effet, soit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

une suite infinie de nombres positifs tendant vers zéro. A ε_n ($n=1, 2, \dots$) correspond le nombre ordinal μ_n tel que

$$(2) \quad |f(x) - f_\xi(x)| < \varepsilon_n \quad \text{pour} \quad \mu_n < \xi < \Omega.$$

On sait qu'il existe un nombre $\mu < \Omega$ tel que

$$(3) \quad \mu > \mu_n \quad \text{pour} \quad n=1, 2, \dots$$

Des inégalités (2) et (3), il résulte que

$$f(x) = f_{\xi}(x) \text{ pour } \mu < \xi < \Omega.$$

La propriété est ainsi démontrée.

Remarques. I — De cette propriété, il résulte facilement que:

Une suite transfinie (du type Ω), uniformément convergente dans un intervalle (a, b) , de fonctions de classes $\leq \alpha$ a pour limite une fonction de classe $\leq \alpha$.

II — Il est évident qu'une suite transfinie de fonctions dont les termes sont égaux à partir d'un certain indice est uniformément convergente. Or M. Sierpiński¹⁾ a démontré qu'une suite transfinie convergente (du type Ω) de fonctions continues a tous ses termes égaux à partir d'un certain indice. Nous avons montré que cette propriété était également vérifiée par les suites transfinies (du type Ω) de fonctions telles que l'ensemble des points, points de discontinuité pour au moins l'une d'entre elles, est dénombrable²⁾. Par conséquent, nous pouvons affirmer que: *une suite transfinie (du type Ω), convergente dans un intervalle (a, b) et telle que l'ensemble des points de discontinuité de toutes ses fonctions est dénombrable, est uniformément convergente dans cet intervalle.*

2 — On définit la convergence d'une série transfinie (du type λ)

$$(4) \quad \begin{aligned} &u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_{\omega}(x) + \\ &+ u_{\omega+1}(x) + \dots + u_{\xi}(x) + \dots \quad (\xi < \lambda) \end{aligned}$$

à l'aide d'une suite³⁾

$$(5) \quad s_1(x), s_2(x), \dots, s_{\omega}(x), s_{\omega+1}(x), \dots, s_{\xi}(x), \dots \quad (\xi < \lambda)$$

que nous appellerons la suite associée à la série (4).

Nous dirons qu'une série (du type λ) converge uniformément lorsque les suites

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_{\omega}(x), s_{\omega+1}(x), \dots, s_{\xi}(x), \dots \quad (\xi < \beta)$$

1) Sur les suites et séries transfinies de fonctions de Baire [Fund. Mathem., tome I, 1920, page 132].

2) Un théorème sur les suites transfinies de fonctions [Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, n° 6, 1932].

3) Consulter l'article cité de M. Sierpiński, page 134.

sont uniformément convergentes pour tous les nombres de deuxième espèce $\beta \leq \lambda$.

Théorème. Une série transfinie (d'un type quelconque) uniformément convergente de fonctions de classes $\leq \alpha$ a pour limite une fonction de classe $\leq \alpha$.

En effet, par définition, $s_\omega(x)$ est la limite de la suite

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (n < \omega)$$

de fonctions de classes $\leq \alpha$. Comme cette suite converge uniformément, il résulte que $s_\omega(x)$ est une fonction de classe $\leq \alpha$.

Le théorème étant vrai pour le nombre ω , supposons — le vérifié pour tous les nombres de deuxième espèce inférieurs à λ et démontrons — le pour ce nombre λ . Soit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

une suite décroissante de nombres positifs tendant vers zéro. Si $s(x)$ est la fonction limite de la série (4), la suite associée (5) converge uniformément, par hypothèse, vers cette fonction. Par suite, il existe un nombre ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) tel que

$$|s(x) - s_{\xi_n}(x)| < \varepsilon_n,$$

ξ_n étant indépendant de x . Posons

$$S_1(x) = s_{\xi_1}(x), S_2(x) = s_{\xi_2}(x) - s_{\xi_1}(x), \dots,$$

$$S_i(x) = s_{\xi_{i+1}}(x) - s_{\xi_i}(x), \dots$$

Si le nombre ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) est de deuxième espèce, la fonction $s_{\xi_i}(x)$ est de classe $\leq \alpha$ puisque le théorème est supposé démontré pour les nombres de deuxième espèce inférieurs à λ . Si le nombre ξ_i est de première espèce, la fonction $s_{\xi_i}(x)$ est égale à la somme d'un nombre fini de fonctions de classes $\leq \alpha$ et est, par suite, elle — même de classe $\leq \alpha$.

Considérons la série ordinaire (infinie)

$$(6) \quad S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_i(x) + \dots$$

La somme de ses i premiers termes est égale à $s_{\xi_{i+1}}(x)$. Si le nombre i est suffisamment grand, nous pouvons écrire quel que soit x

$$|s(x) - s_{\xi_{i+1}}(x)| < \varepsilon.$$

La série (6) converge donc uniformément vers la fonction $s(x)$ et celle — ci est, par conséquent, une fonction de classe $\leq \alpha$. Le théorème est ainsi démontré pour les nombres λ de deuxième espèce.

Si la série (4) est du type Ω , la suite associée est du même type, est uniformément convergente et ses termes sont, par ce qui précède, de classes $\leq \alpha$. La remarque I du n^o 1 donne l'énoncé du théorème.

3 — Nous dirons qu'une série transfinie est *absolument convergente* lorsque la série des modules des termes est convergente.

Théorème. *Si la série transfinie (4) (du type $\lambda \leq \Omega$) est absolument convergente, elle est également convergente.*

En effet, le théorème est vrai pour $\lambda = \omega$. Supposons le théorème vrai pour tous les nombres de deuxième espèce inférieurs à λ et démontrons — le pour ce nombre.

La série

$$\begin{aligned} & |u_1(x)| + |u_2(x)| + \dots + |u_\omega(x)| + \\ & + |u_{\omega+1}(x)| + \dots + |u_\xi(x)| + \dots \quad (\xi < \lambda) \end{aligned}$$

est convergente par hypothèse; soit

$$(7) \quad S_1(x), S_2(x), \dots, S_\omega(x), S_{\omega+1}(x), \dots, S_\xi(x), \dots \quad (\xi < \lambda)$$

sa suite associée. Nous supposons que les termes

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_\omega(x), s_{\omega+1}(x), \dots, s_\xi(x), \dots \quad (\xi < \lambda)$$

de la suite associée (5) à la série (4) existent; il nous faut démontrer que cette suite est convergente.

Rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite transfinie telle que la suite (1) (du type $\lambda \leq \Omega$) soit convergente est qu'à tout nombre positif ε corresponde un nombre $\mu(\varepsilon, x)$ tel que

$$|f_\xi(x) - f_\nu(x)| < \varepsilon$$

pour ξ et ν inférieurs à λ et supérieurs à μ^1 .

Supposons que la suite (4) ne soit pas convergente. Par application de la propriété rappelée, il existe donc des nombres x_0 , ε_0 et μ_0 tels que

¹⁾ Consulter M. Sierpiński, *ibid.*, page 132.

$$(8) \quad |S_{\xi_1}(x_0) - S_{\nu_1}(x_0)| < \varepsilon_0$$

pour ξ_1 et $\nu_1 < \beta$ et $> \mu_0$, et deux nombres fixes ξ_1 et ν_1 supérieurs à μ_0 tels que

$$(9) \quad |s_{\xi_1}(x_0) - s_{\nu_1}(x_0)| > \varepsilon_0.$$

Supposons $\nu_1 > \xi_1$. 1^{er} cas: Les deux quantités $s_{\xi_1}(x_0)$ et $s_{\nu_1}(x_0)$ sont de même signe.

a) $s_{\nu_1}(x_0) > s_{\xi_1}(x_0)$. Nous avons évidemment

$$S_{\xi_1}(x_0) \geq s_{\xi_1}(x_0) \quad \text{et} \quad S_{\nu_1}(x_0) \geq s_{\nu_1}(x_0).$$

La suite (7) est non décroissante; par suite, si nous posons

$$S_{\xi_1}(x_0) - s_{\xi_1}(x_0) = \alpha, \quad (\alpha \geq 0)$$

nous aurons

$$S_{\nu_1}(x_0) \geq s_{\nu_1}(x_0) + \alpha.$$

De l'inégalité (9), nous tirons alors

$$|S_{\xi_1}(x_0) - S_{\nu_1}(x_0)| > \varepsilon_0,$$

ξ_1 et ν_1 étant supérieurs à μ_0 ; ce qui est incompatible avec la relation (8).

b) $s_{\nu_1}(x_0) < s_{\xi_1}(x_0)$. Si nous posons

$$s_{\xi_1}(x_0) - s_{\nu_1}(x_0) = b, \quad (b > 0)$$

il est facile de voir que nous aurons

$$S_{\xi_1}(x_0) = s_{\xi_1}(x_0) + \alpha$$

et

$$S_{\nu_1}(x_0) \geq s_{\nu_1}(x_0) + \alpha + 2b.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire de nouveau en nous basant sur l'inégalité (9)

$$|S_{\xi_1}(x_0) - S_{\nu_1}(x_0)| > \varepsilon_0.$$

Les autres cas possibles

$$s_{\xi_1}(x_0) < 0 \quad \text{et} \quad s_{\nu_1}(x_0) > 0; \quad s_{\xi_1}(x_0) > 0 \quad \text{et} \quad s_{\nu_1}(x_0) < 0;$$

$$s_{\xi_1}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad s_{\nu_1}(x_0) \neq 0; \quad s_{\xi_1}(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad s_{\nu_1}(x_0) = 0$$

se traiteraient de la même façon.

Il résulte donc qu'à tout nombre positif ε donné correspond un nombre $\mu(x)$ tel que

$$|s_{\xi}(x) - s_{\nu}(x)| < \varepsilon$$

pour ξ et $\nu > \mu$ et $< \lambda$. C'est la condition suffisante pour que la suite (5) soit convergente.

Remarques. I. — Nous avons démontré qu'une fonction limite d'une suite transfinie (du type $\lambda \leq \Omega$) non décroissante de fonctions semi — continues inférieurement (resp. supérieurement) est une fonction semi — continue inférieurement (resp. supérieurement)¹⁾. Il résulte de là que toutes les fonctions de la suite (7) et la limite de cette suite sont semi — continues inférieurement (resp. supérieurement) si tous les termes de la série à laquelle cette suite est associée le sont.

II — Il ne peut exister de séries transfinies convergentes dont les termes se succèdent (en valeur absolue), sans que tous les termes dont l'indice est supérieur à ω ne soient nuls. En effet, supposons la série (4) convergente et telle que

$$|u_{\nu}(x)| \geq |u_{\mu}(x)| \quad \text{pour} \quad \nu < \mu.$$

Le terme $s_{\omega}(x)$ de la suite associée (5) est la limite de la série

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (n < \omega).$$

Pas suite

$$\lim_{n \rightarrow \omega} u_n(x) = 0$$

et

$$u_{\mu}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \mu > \omega.$$

De cette remarque, il résulte que *le théorème classique sur les séries alternées ne peut être généralisé pour les séries transfinies.*

¹⁾ Sur les suites et séries transfinies [Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, n° 2, 1932].

Marjan Polaczek.

O sulfonowaniu kwasu *o*-chlorobenzoesowego.

Przedstawił L. Szperl dnia 28 lutego 1934 r.

Sur la sulfonation de l'acide *o*-chlorobenzoiique.

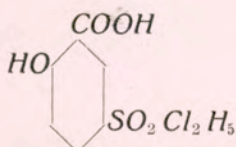
Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 28 fevrier 1934.

Streszczenie.

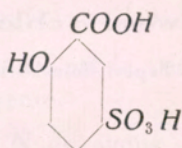
W literaturze chemicznej znana jest metoda otrzymywania kwasu 6-chloro-3-sulfo-1-benzoesowego przez utlenianie kwasu 6-chloro-1-tolueno-3-sulfonowego mieszaniną chromową (Hübner, Majert B. 6,792 1873). Kwas 6-chloro-1-tolueno-3-sulfonowy można otrzymać z *o*-chlorotoluenu przez sulfonowanie.

W ciągu pracy, prowadzonej przezemnie nad sulfonowaniem akrydonu okazały się potrzebne większe ilości kwasu 6-chloro-3-sulfo-1-benzoesowego. Ponieważ otrzymanie tego kwasu na drodze sulfonowania i utleniania *o*-chlorotoluenu wydawało mi się pracą żmudną, więc poddałem sulfonowaniu kwas *o*-chlorobenzoesowy, aby tą drogą dojść do potrzebnego mi produktu. Ogrzewałem kwas *o*-chlorobenzoesowy z sześciokrotną ilością oleum 25%. Produkt reakcji wysoliłem obliczoną ilością chlorku potasowego. Po kilkakrotnej krystalizacji z wody otrzymałem białe igiełki, trudno rozpuszczalne w zimnej wodzie, których analiza wskazywała na kwaśną sól potasową kwasu chlorosulfobenzoesowego.

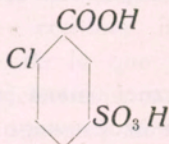
Pozycję grupy sulfonowej oznaczyłem, przeprowadzając otrzymany kwas chlorosulfobenzoesowy, przez ogrzewanie pod ciśnieniem zwiększonym z węglanem potasu, w kwas hydroksysulfobenzoesowy, a ten poddałem estryfikacji z fenolem (G. Kohn J. pr. (2) 61, 546 1900). Otrzymany ester topniał w t. 172—173, posiada zatem wzór:



co wskazuje, że 1) przez ogrzewanie z węglanem potasowym tworzy się kwas 3-sulfosalicylowy:



2) grupa sulfonowa wchodzi w pozycję 3:



Z powyższych wyników wypada, że kwas *o*-chlorobenzoesowy nadaje się bardzo dobrze do otrzymywania kwasu 6-chloro-3-sulfo-1-benzoesowego, zwłaszcza, że wydajność reakcji sulfonowania jest bliska teoretycznej.

Praca będzie drukowana in extenso w „Rocznikach Chemji”.

Posiedzenie

z dnia 18 kwietnia 1934 r.

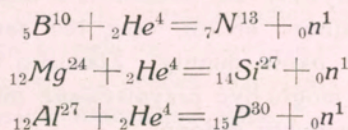
Marjan Danysz i Michał Żyw.

Nowy radiopierwiastek.

Przedstawił M. Wolfke dn. 18 kwietnia 1934 r.

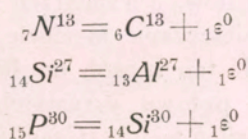
F. Joliot i I. Curie stwierdzili, że wskutek bombardowania boru, magnezu i glinu cząstkami α polonu, powstają pierwiastki promieniotwórcze, których rozpadowi towarzyszy emisja positronów. W celu wytłumaczenia zjawiska, autorowie przypuścili, że cząstka α może być schwytana przez trafione jądro, które jednocześnie wysyła neutron.

Schematy reakcyj są zatem następujące :



(Po prawej stronie zgóry napisane są ciężary atomowe, po lewej zaś zdołu liczby atomowe, n — neutron).

Utworzone w ten sposób izotopy azotu, krzemu i fosforu są nietrwałe i ulegają rozpadowi, zgodnie z następującym schematem:



(ε — symbol positronu).

Słuszność tej interpretacji autorowie stwierdzili w dwu przypadkach, mianowicie udowodnili bezpośrednio na drodze chemicznej, że pierwiastek powstający z boru jest izotopem azotu, pierwiastek zaś powstający z glinu — izotopem fosforu.

F. Joliot i I. Curie badali również szereg innych pierwiastków, nie stwierdzili jednak zjawisk analogicznych.

W związku z tem odkryciem, zajęliśmy się badaniem odskoku pierwiastków promieniotwórczych: izotopów fosforu i krzemu, powstających w sztucznym rozpadzie glinu i magnezu. O doświadczeniach tych będzie mowa w innej publikacji.

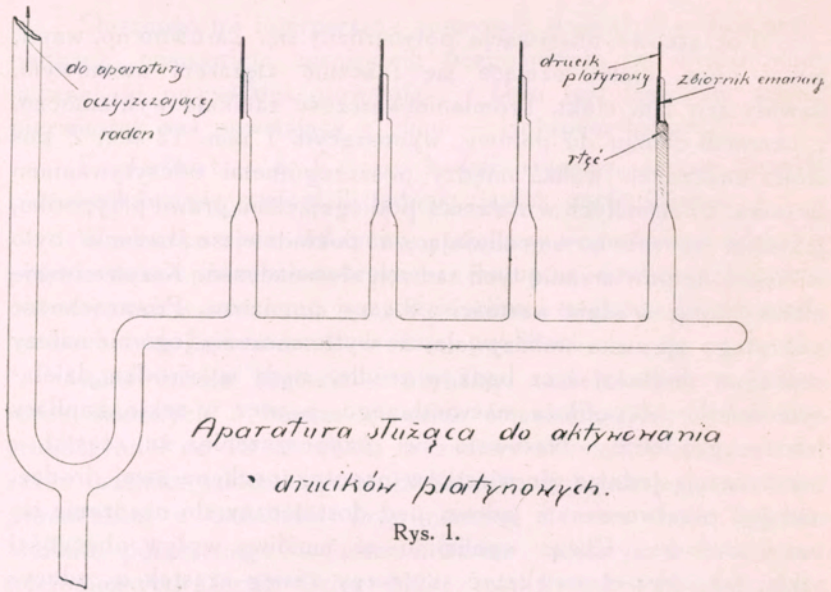
Jako źródła cząstek α użyliśmy, napełnionych radonem rurek szklanych o bardzo cienkich ściankach, które posiadały grubość od 9 do 12 μ . Rurki te zostały umiejętnie sporządzone przez technika szklarskiego p. B. Kosieża. Substancje naświetlane promieniami α badaliśmy przy pomocy licznika typu Geiger-Müllera, połączonego ze wzmacniaczem radjowym i licznikiem telefonicznym. Licznik Geiger-Müller miał kształt cylindra o średnicy 12 mm. długości 30 mm., ścianki były mosiężne o grubości 1 mm., w powierzchni cylindra wycięto otwór prostokątny 5×20 mm., zakryty szczelnie folją glinową grubości 0,01 mm.

W toku pracy stwierdziliśmy, że cały szereg pierwiastków bombardowanych promieniami α wykazuje promieniotwórczość przemijającą. Uderzające było przytem, że wszystkie ciała przez nas badane zachowywały się podobnie, a mianowicie: wykazywały tę samą wydajność efektu, oraz ten sam czas zaniku do połowy, wynoszący około minuty. Zjawisko to, ze względu na swój charakter, nie mogło być przypisywane infekcji pochodzącej z jakiegokolwiek produktu radonu.

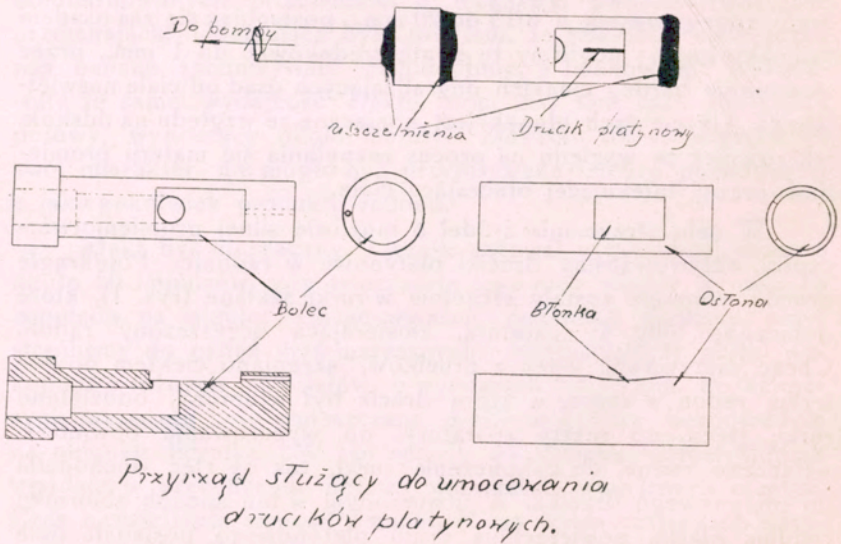
Efekt był nieznaczny. Licznik notował w pierwszej minucie około 50 impulsów, gdy tymczasem jego ruch własny wynosił 15 impulsów na minutę. Chcąc wyjaśnić dokładnie zjawisko, przystąpiliśmy do badań systematycznych. Naświetlaliśmy płytki wykonane z różnych materiałów, o wymiarach 6×25 mm. Po ekspozycji preparaty były umieszczane możliwie szybko bezpośrednio na okienku licznika. W ten sposób do licznika Geiger-Müllera wpadała w przybliżeniu połowa wszystkich wysyłanych cząstek. Czas naświetlania wynosił 5 minut. (Czas wystarczający do nasycenia efektu). Przenoszenie preparatów trwało 10 sek..

Początkowe obserwacje potwierdziły się. Zarówno np. wapń, jak i ołów, ciała różniące się znacznie ciężarem atomowym, dawały ten sam efekt. Promieniotwórczość zanikała wykładniczo, z okresem zaniku do połowy, wynoszącym 1 min. 12 sek. Z powodu znacznych wahań między poszczególnymi odczytowaniami licznika, zrozumiałych w zjawisku podlegającym prawu przypadku, jedynym sposobem umożliwiającym dokładniejsze badanie było wielokrotne powtarzanie tych samych doświadczeń. Krzywe otrzymano, biorąc średnie wartości z 8 seryj pomiarów. Powszechność odkrytego zjawiska wskazywała, że wytłumaczenia jego nie należy szukać w podłożu, lecz bądź w źródle, bądź w ośrodku dzielącym źródło od podłoża naświetlanego, a więc w szkłe kapilary lub w powietrzu. Nasuwało się przypuszczenie, że cząstki α przetwarzają jeden z pierwiastków napotykanych na swej drodze, nadając przetworzonym jądom pęd dostateczny do osadzania się na receptorze. Chcąc wyeliminować możliwy wpływ obecności szkła, jak również zwiększyć skuteczny zasięg cząstek α , zdecydowaliśmy się zastąpić rurki szklane wypełnione radonem, drucikami platynowymi, aktywowanymi radonem. Z osadu radjoaktywnego, znajdującego się na druciku, najbardziej interesowały nas cząstki α RaC' , mające zasięg 69 mm.. Należy zaznaczyć, że nawet w tak cienkich rurkach, jakie stesowaliśmy, szkło zmniejszało zasięg cząstek α o 15 do 20 mm., posługując się zaś osadem radjoaktywnym mogliśmy tę stratę zredukować do 1 mm., przez stosowanie bardzo cienkich odgradzających osad od ciała naświetlanego. Użycie tych błonek jest konieczne ze względu na odskok, jak również ze względu na proces rozpylania się materji promieniotwórczej, infekującej otaczające ciała.

W celu otrzymania źródeł o możliwie silnej promieniotwórczości, aktywowaliśmy druciki platynowe w radonie. Półokrągłe druciki wtopione zostały szczelnie w rurki szklane (rys. 1), które połączone były z aparaturą, zawierającą oczyszczony radon. Chcąc zaktywować jeden z drucików, skraplano ciekłym powietrzem radon w rurce, w którą drucik był wtopiony, oddzielano rurkę rtęcią od reszty aparatury; po wyparowaniu powietrza, włączano radon do zakończenia rurki, tak by rtęć dochodziła do platynowego drucika. W utworzonym w ten sposób zbiorniku radonu, płaska powierzchnia drutu platynowego posiadała pole równe niemal połowie pola całkowitej powierzchni, z którą radon

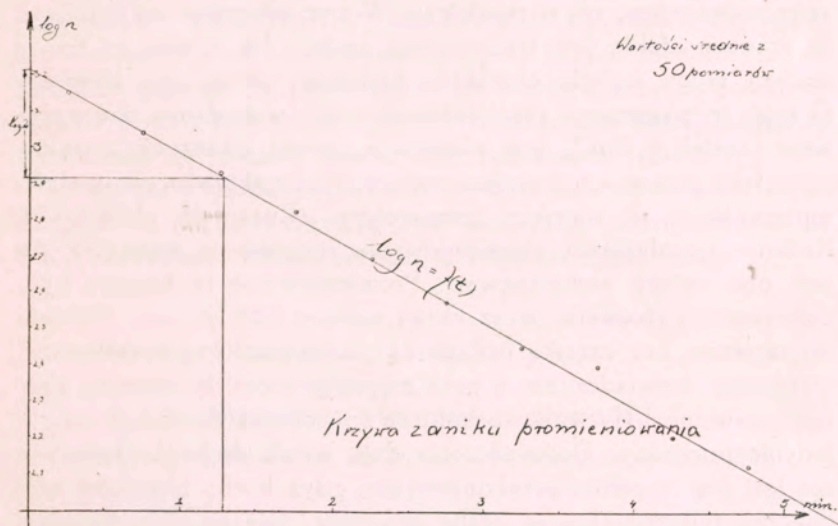


był w zetknięciu. Należało zatem spodziewać się, że ilość produktów radonu, osadzonych na platynie, będzie wynosiła w przybliżeniu połowę ilości będącej w równowadze promieniotwórczej z radonem. W istocie, źródła nasze, natychmiast po wyjęciu,



były równoważne około 8 millicuries, gdy ilość radonu wynosiła około 20 millicuries. Po kilkogodzinnej aktywacji cofano rtęć, tak, że radon przechodził do głównej objętości aparatury, poczer rurkę z drutem odlutowywano i miazdżono. Drucik umieszczano w szczelnej puszcze metalowej, o otworze zaklejonym cieniątką błoną z lakieru zaponowego. Grubość tej błonki, określona na podstawie barw interferencyjnych, wahała się od 150—300 $\mu\mu$. Drucik znajdował się w odległości 1 mm. od błonki.

Efekty uzyskane ze źródłami tego rodzaju były tej samej natury, co poprzednio uzyskane z radonem, lecz znacznie silniejsze.



Rys. 3.

Płytki naświetlane przy pomocy drucików dawały efekt blisko dziesięciokrotnie większy od poprzednio obserwowanego, jakkolwiek rurki z radonem, będącym w równowadze promieniotwórczej ze swymi produktami rozpadu, posiadały dwukrotnie większą aktywność, niż druciki platynowe po wyjęciu z naczynia aktywacyjnego. W pierwszej minucie liczba impulsów w liczniku wynosiła około 300, w przypadku źródła równoważnego 8 millicuries. Krzywa na rysunku 3 przedstawia prawo zaniku aktywności. Czas zaniku do połowy wyniósł tu 1 minutę 18 sekund. Było więc jasne, że przyczyna efektu nie leży w szkłe. Pozostały dwie możliwości: pierwsza, że wzbudzona promieniotwórczość pochodzi

z powietrza oraz druga, że przyczyna tkwi w samym źródle. W tym ostatnim przypadku mogłaby wchodzić w grę przemiana cząstki α na jądro nietrwałego izotopu helu.

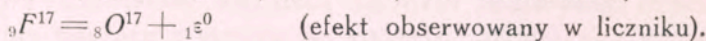
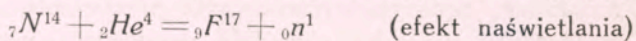
Aby rozstrzygnąć, które z tych przypuszczeń odpowiada prawdzie, przystąpiono do wykonania ekspozycji w rurze, którą można było ewakuować i napełniać badanym gazem.

Wykonano cztery serie doświadczeń:

a) w próżni, b) w wodorze, c) w tlenie, d) w azocie.

W doświadczeniach a), b), c, nie dostrzeżono opisanego powyżej efektu. Natomiast w przypadku d) wystąpił on z większym natężeniem, niż w powietrzu. Wobec tego jest niewątpliwe, że źródłem efektu jest transmutacja azotu. Na naturę tej transmutacji rzuca światło charakter badanego przez nas zjawiska. O tem, że powstająca promieniotwórczość, wzbudzona pod wpływem cząstek α RaC' , jest własnością jakiejś substancji, przekonanywa fakt, że można naświetlane receptory zdezaktywować zupełnie, ogrzewając je do wysokiej temperatury. (Receptory platynowe). Badanie pochłaniania promieniowania receptorów wskazuje, że jest ono natury elektronowej. Promieniowanie to bowiem było zatrzymane całkowicie przez ekran ważący $0,55 \text{ gr/cm}^2$. W celu wyjaśnienia, czy cząstki badane są positronami czy elektronami, wykonano doświadczenie w polu magnetycznym. Receptor i licznik ustawiane były w ten sposób, że do licznika przenikać mogły jedynie positrony. Doświadczenie dało wynik dodatni. Jednakże nie jest ono zupełnie przekonujące, gdyż liczba impulsów nieznacznie tylko przekracza liczbę impulsów, zależną od ruchu własnego licznika. Jest to zrozumiałe, gdyż odchyłona wiązka obejmuje bardzo mały ułamek całkowitej liczby wysyłanych cząstek. Doświadczenie to będzie wznowione ze źródłem o większej aktywności.

Prawdopodobny przebieg reakcji jest następujący:



Reakcje te byłyby zatem analogiczne do reakcji odkrytych przez F. Joliot'a i I. Curie. Jakkolwiek przypuszczenie powyższe jest zgodne z dzisiejszemi naszymi wiadomościami o sztucznej przemianie pierwiastków, wszelkie zaś inne jest niezmiernie mało prawdopodobne, bezpośrednim dowodem doświadczalnym byłoby wykazanie, że substancja osadzona na receptorze

jest izotopem fluoru. Doświadczenie to jest trudne do wykonania ze względu na specyficzne własności fluoru.

Fakt niezaobserwowania tego zjawiska przez F. Joliot'a i I. Curie, tłumaczy się tem, że używali oni, jako źródeł cząstek α , polonu. Polon daje cząstki α o zasięgu 38 mm., gdy tymczasem najgrubsze rurki, którymi posługiwaliśmy się, dawały cząstki o zasięgu 50 mm. Prócz tego stwierdziliśmy, że cząstki α o zasięgu mniejszym niż około 45 mm. nie dają efektu. Tak więc przy polonie transmutacja azotu typu Joliot-Curie wogóle nie występuje.

Dodatkowy dowód transmutacji azotu uzyskaliśmy, bombardując azotek sodu (NaN_3). Substancja ta wykazała efekt kilkakrotnie większy od obserwowanego przy innych receptorach, co tłumaczy się tem, że prócz jąder promieniotwórczych, powstających w powietrzu i trafiających do receptora, w samej substancji wytwarzała się również pewna ilość podobnych jąder.

Na zakończenie poczuwamy się do miłego obowiązku złożyć p. prof. L. Wertensteinowi serdeczne podziękowanie za cenne wskazówki udzielone nam w toku niniejszej pracy.

Marjan Danysz i Michał Żyw.

Nouveau élément radioactif.

Mémoire présenté par M. M. Wolfke à la séance du 18 avril 1934.

R é s u m é.

Les auteurs ont trouvé que le bombardement de l'azote par les particules α du RaC' conduit à une transmutation des noyaux d'azote d'un type nouveau. Les noyaux d'azote frappés par les particules α se transforment en noyaux instables d'un isotope du fluore. Ce nouveau corps, le radiofluore suivant la nomenclature de F. Joliot et I. Curie subit une désintégration spontanée, caractérisée par une période de diminution de moitié égale à 1,3 minutes et accompagnée de l'émission des positrons. Le produit de la désintégration est probablement l'isotope 17 de l'oxygène. Le rendement de la transmutation de l'azote décroît, lorsque l'énergie des rayons α diminue et devient nul pour les particules α de parcours intérieur à 45 mm.

H. Herszfinkiel i A. Wroncberg.

O promieniotwórczości samaru.

Przedstawił M. Wolfke dn. 18 kwietnia 1934 r.

Zbadaliśmy promieniotwórczość samaru, posługując się metodą mierzenia prądu jonizacyjnego w komorze jonizacyjnej wielkich rozmiarów. Do doświadczenia użyliśmy czystego tlenku samaru (Sm_2O_3), użyczonego nam przez prof. G. Urbain'a za co składamy Mu na tem miejscu gorące podziękowanie. Substancja ta została osadzona na 2 płytkach cynkowych o rozmiarach 50×50 cm. w postaci cienkiej warstwy, ważącej ok. $\frac{1}{4}$ mg/cm². Promienie α samaru przenikały do szczelnie zamkniętej komory jonizacyjnej o rozmiarach $50 \times 50 \times 8$ cm. poprzez zaklejone folią glinową otwory w dwóch największych ścianach komory. W celu wyznaczenia zasięgu promieni α mierzyliśmy zapomocą elektroskopu prąd jonizacyjny w zależności od odległości między płytami i komorą. Wyniki przedstawione są na krzywej 1; odcięte przedstawiają odległości powiększone o równoważnik powietrzny folij glinowych. Ekstrapolacja krzywej prowadzi do wniosku, że wielkość zasięgu jest zbliżona do 16.7 mm. G. Hevesy posługując się licznikiem Geiger-Müllera znalazł $R = 1,1$ cm. M. Curie i F. Joliot znaleźli, że w komorze Wilsona najdłuższy zasięg wynosi 1,5 cm. Należy zaznaczyć, że w statystyce pomiarów indywidualnych zasięgi krótkie są z konieczności uprzywilejowane w stosunku do długich, zwłaszcza jeżeli warstwa substancji nie jest bardzo cienka. Za prawdziwą należy w tych warunkach uważać największą zaobserwowaną wartość. Na tej podstawie sądzimy, że nasze wyniki są zgodne z wynikami otrzymanymi przez M. Curie i F. Joliota.

W celu skontrolowania metody i wycechowania przyrządu posługiwaliśmy się tlenkiem uranu (H_3O_8) złożonym na płycie cynkowej w postaci warstwy o gęstości powierzchniowej 0,15 mg/cm². Krzywa rysunku 2 przedstawia jak poprzednio prąd jonizacyjny w funkcji odległości efektywnej (t. j. po zastąpieniu grubości ekrenów pochłaniających ich równoważnikiem powietrznym). Na

krzywej widać wyraźnie oba zasięgi: $U I$ oraz $U II$. Zasięg ekstrapolowany $U II$ wynosi ok. 34.7 mm., zatem nieco więcej, niż wartość ogólnie przyjęta.

Porównaliśmy aktywność tlenku samaru z aktywnością tlenku uranu. Uwzględniając okoliczność, że uran zawiera dwa składniki wysyłające cząstki alfa, oraz że przeciętna liczba jonów wytwarzanych w naszej komorze przez te cząstki jest dwa razy większa od liczby jonów wytwarzanych przez cząstkę alfa samaru, znajdujemy, że 1 g Sm wysyła 78 cząstek/sek., w dobrej zgodności z liczbą 75/sek. otrzymaną przez G. Hevesy'ego. Wyrażamy szczerze podziękowanie Panu Prof. Wertenstaeinowi za wskazówki w toku tej pracy.

Pracownia Radjologiczna im. Miroslawa Kernbauma
Warszawa, dn. 31.III 1934 r.

H. Herszfinkiel et A. Wroncberg.

Sur la radioactivité du samarium.

Mémoire présenté par M. M. Wolfke à la séance du 18 avril 1934.

Le parcours des rayons du Sm n'a été étudié jusqu'ici que par la méthode statistique. G. Hevesy au moyen d'un compteur Geiger-Müller a trouvé $R = 1,13$ cm. M. Curie et F. Joliot¹⁾ ont employé la chambre de Wilson et ont trouvé les parcours individuels suivants: 0,8, 0,16, 0,25, 1,0 et 1,5 cm. avec une erreur probable de 2 mm.

Les difficultés que présente l'étude de la radioactivité du Sm résulte de la faiblesse des effets observés, G. Hevesy indique que 1 g de Sm émet 75 particules α par seconde. Il en résulte dans les méthodes statistiques la nécessité d'employer des couches épaisses et dans ces conditions les parcours réduits par l'absorption dans la source prédominent à tel point qu'il est facile de se tromper sur la grandeur du parcours maximum, surtout si le nombre des observations individuelles n'est pas très élevé. D'autre part si on emploie une couche très mince, la densité superficielle de la substance tombe au dessous de 1 mg;

¹⁾ Comptes-rendus t. 198, Nr. 4, p. 360—363.

le nombre des particules α arrivant dans l'appareil de mesure (chambre, compteur) devient très petit, de l'ordre de 10 par minute ce qui diminue très sérieusement l'efficacité des méthodes statistiques.

Pour ces raisons nous avons décidé d'employer la méthode de mesure directe du courant d'ionisation produit dans une chambre de grandes dimensions. Grâce à l'obligeance de M. le Prof. G. Urbain¹⁾ nous avons disposé de 10 g de Sm_2O_3 très pu. Ce samarium a été traité chimiquement dans le but d'éliminer une partie au moins d'impuretés radioactives qui pouvaient y être présentés. Les opérations d'entraînement par précipitation du PbS , $BaSO_4$ et Zr ayant donné des produits dont l'activité était de l'ordre de quelques ‰ de l'activité totale nous avons conclu que le Sm dont nous disposions était suffisamment pur de vue radioactif pour qu'on puisse entreprendre une détermination du parcours.

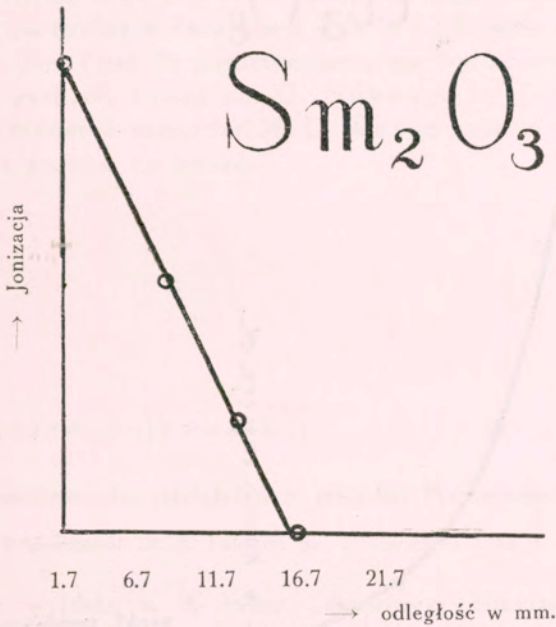
La chambre d'ionisation utilisée était associée à un électroscope à feuille d'Al et était constituée par une boîte en zinc mesurant $50 \times 50 \times 8$ cm. Les parois de plus grandes dimensions étaient percées d'un grand nombre de trous circulaires de 3,5 cm. de diamètre dont la surface totale était égale à 1000 cm^2 , et qui étaient recouvertes par des feuilles d'Al pesant $0,09 \text{ mg/cm}^2$. Le courant d'ionisation spontané était de 1 div/2 min. c. à d. 10^{-13} amp. et correspondait à la production d'environ 200 ions/ cm^3 . Le Sm_2O_3 étaient déposés sur 2 plaques de Zn de $50 \times 50 \text{ cm}^2$ qu'on plaçait symétriquement en face des parois munies de fenêtres. Au moyen d'un dispositif convenable on pouvait faire varier la distance de ces plaques aux parois entre 1 mm et 25 mm. De cette manière les rayons α avant d'arriver dans la chambre subissaient une réduction de parcours qui — sans tenir compte de l'absorption dans la couche active — était équivalente au moins à 1,7 mm.

Pour réaliser le dépôt de Sm de minceur convenable nous avons eu recours à la sédimentation fractionnée d'une suspension chloroformique de la poudre finement broyée.

¹⁾ Nous tenons à exprimer ici nos meilleurs remerciements à Monsieur G. Urbain. Dans les expériences préliminaires nous nous sommes servis d'une préparation de Sm obligeamment prêtée par Mr. le Prof. Ziemecki. Nous lui adressons nos remerciements.

La densité du dépôt finalement obtenu était voisine de 0.25 mg/cm^2 , de sorte que la quantité totale d'oxyde employée était égale à 1 g environ.

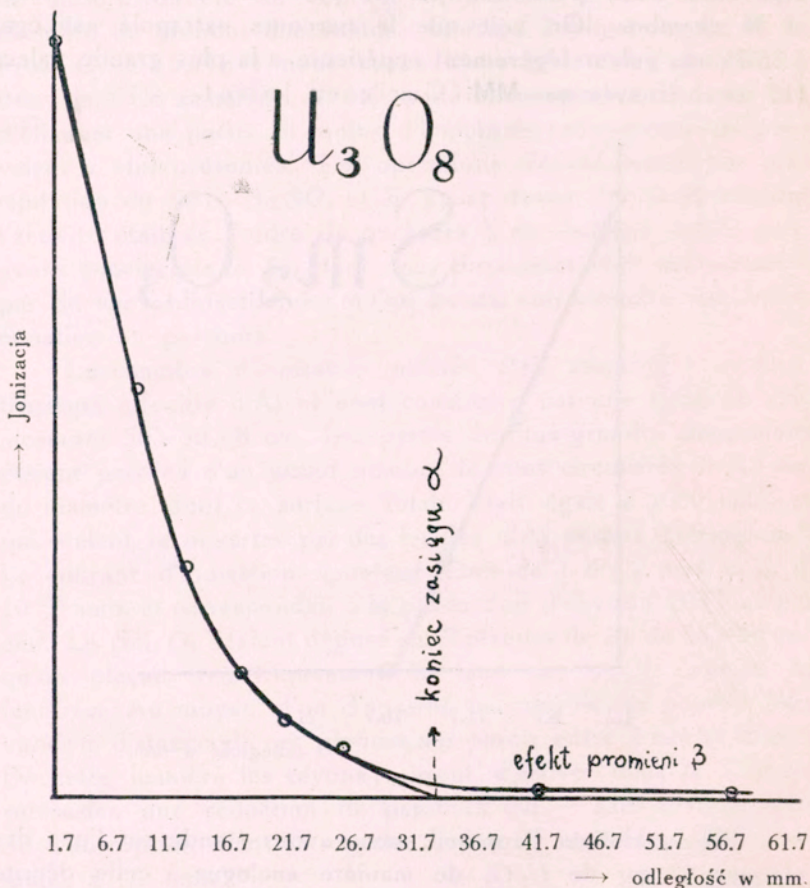
Les résultats obtenus sont présentés sur la courbe, fig. 1; les abscisses représentant la distance maximum (exprimée en équivalent d'air) parcourue par les particules α entre la source et la chambre. On voit que le parcours extrapolé est égal à 16.7 mm., valeur légèrement supérieure à la plus grande valeur (15 mm.) trouvée par MM. Curie et Joliot.



Rys. 1.

Pour étalonner l'appareil, nous avons étendu sur l'une des plaques 67 mg de U_3O_8 de manière analogue à celle décrite précédemment. La densité superficielle était égale à $1/7 \text{ mg/cm}^2$. Pour accroître la distance effective au-delà de 25 mm., ce qui n'était pas possible avec notre dispositif nous nous sommes servis de feuilles de papier pesant $1,8 \text{ mg/cm}^2$, dont l'équivalent d'air était de 17 mm. Sur la courbe obtenue on voit nettement les deux parcours de $U I$ et de $U II$. Le parcours de $U II$ extrapolé se trouve égal à 34,7 mm., valeur légèrement supérieure

à celle trouvée par Lawrence¹⁾ et Rutherford²⁾ et il se peut que dans les deux cas des traces d'impuretés radioactives sont responsables pour l'allongement apparent des parcours. Il semble probable d'après ces expériences que la valeur exacte du parcours de Sm est très rapprochée de 15 mm.



Rys. 2.

Il est à noter que cette valeur concorde mieux avec les données de masse que la valeur trouvée par G. Hevesy. La perte de masse dans la désintégration ${}_{62}Sm^{148} = {}_{60}Nd^{144} + {}_2He^4$

¹⁾ Phil. Mag. 5, 1027. 1928.

²⁾ Phil. Mag. (7) 4, 580. 1927.

est égale d'après M. Curie et F. Joliot à 0.003 ce qui correspond pour les rayons α à l'énergie égale à $2.7.10^6$ el-volts. On en déduit 17 mm. pour le parcours de rayons α .

Nous avons comparé l'activité du *Sm* à celle de l'*U* et avons trouvé qu'à quantité de substance égale le courant d'ionisation du à *Sm* (élément) est 600 fois plus petit que le courant d'ionisation du à l'uranium. En tenant compte du fait que le nombre d'ions par 2 particules moyennes de *U* I et de *U* II est dans nos conditions expérimentales 4 fois plus grand que celui produit par une particule α de *Sm* et en adoptant $2.37.10^4$ /sec. pour le nombre de particules α émis par 1 g de *U* I+II, nous concluons que 1 g de *Sm* émet 78 particules/sec., en bon accord avec le nombre 75 part/sec. trouvé par G. Hevesy.

Nous tenons à remercier M. L. Wertenstein pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Zbigniew Sujkowski.

O bentonicie polskim z okolic Krzemieńca.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 18 kwietnia 1934 r.

Praca wyjdzie w X tomie „Archiwum Mineralogicznego T. N. W.”

The bentonite in Poland in lower Sarmatian of Krzemieniec.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 18 avril 1934.

Le travail paraîtra dans le Vol. X de „l'Archive de Minéralogie”.

Tomasz Białas.

**Niektóre stałe ktystalograficzne benzaloketolu
pinenu.**

Przedstawił T. Woyno dn. 18 kwietnia 1934 r.

Praca wyjdzie w X tomie „Archiwum Mineralogicznego
T. N. W.”

**Sur quelques propriétés cristallographiques
de benzaloketol du pinène.**

Mémoire présenté par M. T. Woyno à la séance du 18 avril 1934.

Le travail paraîtra dans le Vol. X de l'Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie.

Stanisław Józef Thugutt.

**Ultramikroskopowe badania kryształów
kwarcowych w związku z ich barwą i genezą.**

Komunikat zgłoszony dn. 18 kwietnia 1934 r.

Praca wyjdzie w X tomie „Archiwum Mineralogicznego
T. N. W.”

**Etudes ultramicroscopiques de cristaux du quartz
au point de vue de leur couleur et leur gène.**

Mémoire présenté à la séance du 18 avril 1934.

Le travail paraîtra dans le Vol. X de l'Archive de Minéralogie de la Société des Sc. et Let. de Varsovie.

Posiedzenie

z dnia 24 maja 1934 r.

W. Sierpiński.

O pewnym zagadnieniu, tyżącym się rodzin nieprzeliczalnych zbiorów miary dodatniej.

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu w dniu 24 maja 1934 r.

Streszczenie.

Zakładając hipotezę continuum, autor dowodzi istnienia rodziny nieprzeliczalnej F zbiorów linjowych doskonałych miary dodatniej, takiej, iż iloczyn każdej nieprzeliczalnej mnogości zbiorów rodziny F jest pusty, oraz wyprowadza stąd pewne wnioski.

W. Sierpiński.

Sur un problème concernant les familles indénombrables d'ensembles de mesure positive.

Présenté dans la séance du 24 Mai 1934.

Le théorème bien connu, d'après lequel toute famille d'intervalles disjoints est au plus dénombrable, s'étend sans peine aux familles d'ensembles disjoints mesurables de mesure positive.

Or, on démontre sans peine que si F est une famille indénombrable d'intervalles, il existe des points (et même des intervalles) communs à une infinité indénombrable d'ensembles de la famille F . La question se pose donc si un théorème analogue est encore vrai pour les familles indénombrables d'ensembles mesurables de mesure positive. Le problème est assez délicat et nous ne savons pas le résoudre qu'en admettant l'hypothèse du continu. Je prouverai que

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une famille indénombrable F d'ensembles linéaires parfaits de mesure positive, telle que tout produit d'une infinité indénombrable d'ensembles de la famille F est vide.

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il en résulte qu'il existe une suite transfinie du type Ω ,

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots, \quad (\xi < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels.

α étant un nombre ordinal donné quelconque $< \Omega$, désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres x_ξ , où $\xi < \alpha$: l'ensemble S_α est donc au plus dénombrable, donc de mesure nulle, et il existe un ensemble parfait P_α de mesure positive, tel que $P_\alpha S_\alpha = 0$.

Je dis que la famille F de tous les ensembles P_α , où $\alpha < \Omega$, satisfait aux conditions de notre proposition.

En effet, soit Φ une famille indénombrable d'ensembles de la famille F . Nous pouvons donc poser

$$\Phi = \{P_{\alpha_\xi}\}_{\xi < \Omega},$$

où $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \Omega}$ est une suite transfinie croissante du type Ω de nombres ordinaux $< \Omega$.

Soit maintenant x un nombre réel donné quelconque. Il existe donc un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, tel que $x = x_\lambda$. Or, d'après la définition des ensembles S_α et P_α , on a $x_\lambda \in S_\mu$ pour $\mu > \lambda$ et $P_\mu S_\mu = 0$, donc

$$(1) \quad x_\lambda \text{ non } \in P_\mu \text{ pour } \mu > \lambda.$$

La suite $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \Omega}$ étant croissante, il existe un nombre ordinal $\eta < \Omega$, tel que $\alpha_{\eta_1} > \lambda$: d'après (1) on a donc

$$x_\lambda \text{ non } \in P_{\alpha_{\eta_1}}$$

donc, d'après $x = x_\lambda$:

$$x \text{ non } \in \prod_{\xi < \alpha} P_{\alpha_\xi}.$$

Notre assertion est ainsi démontrée.

Il résulte tout de suite de la proposition démontrée ¹⁾ que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une famille non dénombrable F d'ensembles linéaires parfaits de mesure positive, telle qu'il n'existe aucun ensemble parfait de mesure positive P , tel qu'on ait $\text{mes} EP = \text{mes} P$ pour une infinité non dénombrable d'ensembles E de la famille F . Or, comme je démontrerai ailleurs ²⁾ (sans admettre l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$), F étant une famille non dénombrable quelconque d'ensembles linéaires de mesure extérieure (mes_e) positive, il existe un ensemble parfait P de mesure positive, tel que pour tout nombre positif ε la famille F contient une infinité non dénombrable d'ensembles E , tels que $\text{mes}_e (EP) \geq \text{mes} P - \varepsilon$. On ne peut pas donc se débarrasser du nombre ε dans ce théorème (tout au moins si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

L. Szperl i J. Herszaft.

Estry kwasu α -tionaftoesowego.

Przedstawił L. Szperl dnia 24 maja 1934 r.

Ethers-sels d'acide α -thionaphtoïque.

Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 24 mai 1934.

Streszczenie.

Niemожność otrzymania dotychczas kwasu α -tionaftoesowego wywołała chęć preparowania, również nieznanych, jego estrów i porównania ich własności z cechami znanych estrów innych tiokwasów. Przystosowując metodę Taboury'ego (A. ch. (8), 15,5, 1908), polegającą na hydrolizie produktu, powstałego ze związków Grignarda, siarki i chlorobezwodnika kwasu α -naftoesowego, otrzymano trzy tionaftoesany:

¹⁾ et des remarques que tout ensemble linéaire P de mesure positive contient un sous-ensemble parfait P_0 , dont tout point est un point de densité un, et que, si E est un ensemble parfait, tel que $\text{mes} EP = \text{mes} P$, on a $E \supset P_0$.

²⁾ *Fund. Math.* t. 23, p. 126.

metylowy — żółta ciecz o temperaturze wrzenia 168,5—176⁰ (ciś. 10 mm).

fenyłowy — bezbarwne blaszki lub sześciiany, temperatura topnienia 61,6—62,1⁰.

α -naftyłowy — żółtawy, krystaliczny, topniejący w temperaturze 125,5—126,2⁰.

Stwierdzono zgodność ich własności chemicznych z cechami znanych tioestrów.

Praca wyjdzie in extenso w Rocznikach Chemji.

Antoni Łaszkiewicz.

O strukturze syngenitu z Kałusza.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 24 maja 1934 r.

Praca będzie drukowana w X tomie „Archiwum Mineralogicznego”.

Sur la structure de la syngénite de Kałusz en Pologne.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt à la séance du 24 mai 1934.

Le travail paraîtra dans „l'Archive de Minéralogie” Vol. X.

Godofredo García.

Wyjaśnienie einsteinowskie zjawiska Stark-Lo Surdo — Zeemann'a.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu dn. 28 czerwca 1934 r.

Explicación einsteniana del Efecto Stark-Lo Surdo — Efecto Zeemann.

Mémoire présenté à la séance du 28 juin 1934.

Cuando un átomo se encuentra colocado en un campo eléctrico o en un campo magnético suficientemente intenso las rayas de su espectro previstas por la teoría clásica estarán separadas y si se trata de un campo muy intenso esta separación podrá ser bastante grande y mayor que la separación permanente producida por la corrección de relatividad. Tal fenómeno es conocido con el nombre de Efecto Stark-Lo Surdo.

Si el átomo se encontrara colocado en un campo magnético intenso la separación obtenida sería con mayor anchura. Tal fenómeno se conoce con el nombre de Efecto Zeemann.

El profesor Sommerfeld y el profesor Debye dan una teoría del Efecto Zeemann conforme con la dinámica cuántica que en grandes líneas satisface á la experiencia.

El profesor Pietro Burgatti en su magistral obra de Análisis Vectorial y Mecánica Analítica en forma muy elegante obtiene la explicación matemática de tan importante fenómeno en la teoría clásica, encontrando la expresión de la energía total.

El objeto de la presente memoria es el encontrar la explicación einsteniana del fenómeno y obtener la expresión de la energía total relativista que le corresponde. Para tal determinación nos vamos á valer del teorema de equivalencia mecánica del profesor Tullio Levi Civita y del método seguido por el profesor P. Burgatti haciendo en este método la respectiva corrección einsteniana.

Presentaremos primero la solución Astronómica del problema.

Consideremos el Efecto Stark, si $0x_3$ es la dirección del campo eléctrico de intensidad I la expresión del potencial según el teorema de equivalencia mecánica será

$$(1) \quad V^* = \left(1 + \frac{4E^*}{c^2}\right) \frac{u}{r} + \frac{3}{c^2} \frac{u^2}{r^2} - Ix_3.$$

La ecuación de Hamilton es

$$(2) \quad H^* = T - V^*$$

en la que para la unidad de masa

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \sum_1^3 x_i'^2.$$

Para poder obtener en la ecuación de Hamilton Jacobi la separación de variables en este caso habrá que recurrir á usar *coordenadas parabólicas* determinadas por las dos familias de paraboloides de revolución $q_i = cte$ por $i=1, 2$

$$(4) \quad \sum_1^2 x_i'^2 = 2q_1^2 \left(\frac{q_1^2}{2} - x_3\right) \quad \sum_1^2 x_i'^2 = 2q_2^2 \left(\frac{q_2^2}{2} + x_3\right)$$

en el plano x_1x_3 se obtendrán haciendo $x_2=0$ las parábolas homofocales.

El tercer parámetro será el ángulo α que forma el plano meridiano que pasa por $0x_3$ con el plano fijo x_1x_3 .

Sin embargo un reemplazo sin otra consideración en la ecuación de Hamilton Jacobi dificultaría la inmediata separación de las variables tratándose del caso einsteiniano, pero nosotros hemos logrado resolver el problema en la forma que vamos á exponer.

Verifiquemos el cambio de coordenadas por las ecuaciones (4) se tiene.

$$(5) \quad x_3 = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \quad (6) \quad \sum_1^2 x_i'^2 = q_1^2 q_2^2$$

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = q_1 q_2 \cos \alpha \\ x_2 = q_1 q_2 \sin \alpha \end{cases}$$

luego

$$(8) \quad r = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

denominando ¹⁾

¹⁾ Tullio Levi Civita. *Fondamenti di Meccanica Relativistica.*

$$(9) \quad k = \left(1 + \frac{4E^*}{c^2}\right) u \qquad (10) \quad k_0 = \frac{6u^2}{c^2}$$

teniendo presente además que

$$R = r \cos \varphi \quad \text{ó bien} \quad 2q_1 q_2 = (q_1^2 + q_2^2) \cos \varphi$$

la función de Hamilton afectará la forma siguiente

$$(11) \quad H^* = \frac{1}{2} [q_1^2 q_2^2 \bar{\alpha}'^2 + (q_1^2 + q_2^2) (q_1'^2 + q_2'^2)] - \frac{2k}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{I}{2} (q_1^2 - q_2^2)$$

en la cual $\bar{\alpha}'$ es la velocidad angular del movimiento einsteniano

$$(12) \quad \bar{\alpha}' = \alpha' \sqrt{1 - \frac{k_1}{q_1^4 q_2^4 \alpha'^2}}$$

siendo $k_1 = k_0 \cos^2 \varphi$ pasándo á los variables de Poisson

$$(13) \quad p_1 = q_1' (q_1^2 + q_2^2) \qquad p_2 = q_2' (q_1^2 + q_2^2)$$

$p_3 = q_1^2 q_2^2 \alpha'$ en segunda aproximación podemos escribir

$$(14) \quad \bar{p}_3^2 = p_3^2 - k_1$$

entonces la función de Hamilton será

$$(15) \quad H^* = \frac{1}{2(q_1^2 + q_2^2)} \left[p_1^2 + p_2^2 + \left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) (p_3^2 - k_1) - 4k + I(q_1^4 - q_2^4) \right]$$

Si denominamos S la función de Jacobi se tendrá la ecuación de Hamilton Jacobi

$$(16) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} \right)^2 + \left[\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right] \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_3} \right)^2 - 4k + I(q_1^4 - q_2^4) = 2E^*(q_1^2 + q_2^2)$$

teniendo siempre presente que

$$(17) \quad \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial q_3} \right)^2 - k_1$$

haciendo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_3} \right)^2 = W^2 \qquad \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_3} \right)^2 = W^{*2}$$

se tendrá

$$(18) \quad W^{*2} = \left(1 - \frac{k_1}{W^2}\right) W^2$$

separando las variables se tiene

$$(19) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial S_{q_1}}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{W^{*2}}{q_1^2} - 2k + Iq_1^4 - 2E^*q_1^2 &= G^2 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{W^{*2}}{q_2^2} - 2k - Iq_2^4 - 2E^*q_2^2 &= -G^2 \end{aligned}$$

las integrales serán

$$(20) \quad \begin{aligned} S_{q_1} &= \frac{1}{2} \int \sqrt{2E^* + \frac{2k + G^2}{q_1^2} - \frac{W^{*2}}{q_1^4} - Iq_1^2} dq_1^2 \\ S_{q_2} &= \frac{1}{2} \int \sqrt{2E^* + \frac{2k + G^2}{q_2^2} - \frac{W^{*2}}{q_2^4} + Iq_2^2} dq_2^2 \end{aligned}$$

que se integrarán por la teoría de las funciones elípticas, pero si consideramos que la intensidad del campo eléctrico ó magnético sea pequeña podemos obtener la integral desarrollando el radical por el binomio de Newton y aproximando hasta el segundo término las anteriores se podrán entonces escribir así

$$(21) \quad \begin{aligned} S_{q_1} &= \frac{1}{2} \int \sqrt{2E^* + \frac{2\left(k + \frac{G^2}{2}\right)}{q_1^2} - \frac{W^{*2}}{q_1^4}} dq_1^2 - \\ &\quad - \frac{I}{4} \int \frac{dq_1^2}{\sqrt{2E^* + \frac{2\left(k + \frac{G^2}{2}\right)}{q_1^2} - \frac{W^{*2}}{q_1^4}}} \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} S_{q_2} &= \frac{1}{2} \int \sqrt{2E^* + \frac{2\left(k - \frac{G^2}{2}\right)}{q_2^2} - \frac{W^{*2}}{q_2^4}} dq_2^2 + \\ &\quad + \frac{I}{4} \int \frac{dq_2^2}{\sqrt{2E^* + \frac{2\left(k - \frac{G^2}{2}\right)}{q_2^2} - \frac{W^{*2}}{q_2^4}}} \end{aligned}$$

haciendo

$$k_1^* = k + \frac{G^2}{2} \quad k_2^* = k - \frac{G^2}{2}$$

será

$$2E^* = -\frac{k_1^*}{a_1} = -\frac{k_2^*}{a_2} \quad L_1^* = \sqrt{k_1^* a_1} \quad L_2^* = \sqrt{k_2^* a_2}$$

$$\varepsilon_1^2 = 1 - \frac{W^{*2}}{L_1^{*2}} \quad \varepsilon_2^2 = 1 - \frac{W^{*2}}{L_2^{*2}}$$

Las integrales serán

$$(23) \quad S_{q_1} = \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{k_1^*}{a_1}} \left[\alpha_1 - \varepsilon_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - 2 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \operatorname{arctag} \right. \\ \left. \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} \operatorname{tag} \frac{\alpha_1}{2} \right] - \frac{I a_1^2}{4} \sqrt{\frac{a_1}{k_1^*}} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \right) \alpha_1 - \right. \\ \left. - 2 \varepsilon_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 \right] + C_1$$

$$(24) \quad S_{q_2} = \frac{a_2}{2} \sqrt{\frac{k_2^*}{a_2}} \left[\alpha_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - 2 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \operatorname{arctag} \right. \\ \left. \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} \operatorname{tag} \frac{\alpha_2}{2} \right] + \frac{I a_2^2}{4} \sqrt{\frac{a_2}{k_2^*}} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \right) \alpha_2 - \right. \\ \left. - 2 \varepsilon_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_2 \right] + C_2$$

que por

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad S_{q_1} = S_{q_2} = 0 \quad C_1 = C_2 = 0$$

y por

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi i \quad S_{q_1} = J_1 \quad S_{q_2} = J_2$$

y por consiguiente

$$S_{q_3} = J_3$$

luego

$$(25) \quad J_1 = \pi i [L_1^* - W^*] - \frac{I}{4} \pi i \frac{a_1^3}{L_1^{*3}} [3L_1^{*2} - W^{*2}]$$

$$(26) \quad J_2 = \pi i [L_2^* - W^*] + \frac{I}{4} \pi i \frac{a_2^3}{L_2^{*3}} [3L_2^{*2} - W^{*2}]$$

$$(27) \quad J_3 = 2\pi i W$$

como sabemos

$$W^* = \sqrt{1 - \frac{k_1}{W^2}}$$

que en segunda aproximación será

$$(28) \quad W^* = \left(1 - \frac{k_1}{2W^2}\right) W.$$

Si consideramos en las ecuaciones (25) y (26) que son de cuarto grado con respecto de L_1^* y L_2^* que $I=0$ para encontrar los valores de L_1^* y L_2^* por aproximaciones sucesivas, se tendrá

$$(29) \quad 2\pi i L_1^* = 2J_1 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W}$$

$$(30) \quad 2\pi i L_2^* = 2J_2 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W}$$

sustituyendo en las (25) y (26)

$$(31) \quad 2\pi i L_1^* = 2J_1 + J_3 - \pi i \frac{k_1}{W} - \frac{I\pi i}{2} \frac{\alpha_1^3}{L_1^{*3}} \left[W^2 - k_1 - \frac{3}{4\pi^2 i^2} \left(2J_1 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W} \right)^2 \right]$$

$$(32) \quad 2\pi i L_2^* = 2J_2 + J_3 - \pi i \frac{k_1}{W} + \frac{I\pi i}{2} \frac{\alpha_2^3}{L_2^{*3}} \left[W^2 - k_1 - \frac{3}{4\pi^2 i^2} \left(2J_2 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W} \right)^2 \right]$$

por las

$$L_1^* = \frac{k_1^*}{\sqrt{-2E^*}} \quad L_2^* = \frac{k_2^*}{\sqrt{-2E^*}}$$

y además

$$(33) \quad \frac{\alpha_1}{L_1^*} = \frac{\alpha_2}{L_2^*} = \frac{1}{\sqrt{-2E^*}}$$

se tendrá

$$(34) \quad \frac{2\pi i k_1^*}{\sqrt{-2E^*}} = 2J_1 + J_3 - \pi i \frac{k_1}{W} - \frac{I\pi i}{2} \frac{1}{(-2E^*)^{\frac{3}{2}}} \left[W^2 - k_1 - \frac{3}{4\pi^2 i^2} \left(2J_1 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W} \right)^2 \right]$$

$$(35) \quad \frac{2\pi i k_2^*}{\sqrt{-2E^*}} = 2J_2 + J_3 - \pi i \frac{k_1}{W} + \frac{I\pi i}{2} \frac{1}{(-2E^*)^{\frac{3}{2}}} \left[W^2 - k_1 - \frac{3}{4\pi^2 i^2} \left(2J_2 + J_3 + \pi i \frac{k_1}{W} \right)^2 \right]$$

siendo

$$(36) \quad k_1^* + k_2^* = 2k$$

sumando las anteriores

$$(37) \quad \frac{4\pi ik}{\sqrt{-2E^*}} = 2(J_1 + J_2 + J_3) - 2\pi i \frac{k_1}{W} + \\ + \frac{3I}{8\pi i(-2E^*)^{\frac{3}{2}}} \left[(2J_1 + J_3)^2 - (2J_2 + J_3)^2 + 4\pi i \frac{k_1}{W} (J_1 - J_2) \right]$$

que se reduce á la

$$(38) \quad \frac{4\pi ik}{\sqrt{-2E^*}} = 2(J_1 + J_2 + J_3) - 2\pi i \frac{k_1}{W} + \\ + \frac{3I}{2\pi i(-2E^*)^{\frac{3}{2}}} \left[(J_1 + J_2 + J_3)(J_1 - J_2) + \pi i \frac{k_1}{W} (J_1 - J_2) \right]$$

denominando

$$(39) \quad J^* = J_1 + J_2 + J_3$$

$$(40) \quad J = J_1 - J_2$$

se tendrá

$$\frac{4\pi ik}{\sqrt{-2E^*}} = 2J^* \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right) + \frac{3IJ^*J}{2\pi i(-2E^*)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right)$$

ó bien

$$(41) \quad \frac{2\pi ik}{J^*} = \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right) \sqrt{-2E^*} + \\ + \frac{3IJ}{4\pi i(-2E^*)} \left(1 + \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right)$$

elevádo al cuadrado y en segunda aproximación teniendo en cuenta á la vez que I es pequeña se tendrá

$$(42) \quad \frac{4\pi^2 i^2 k^2}{J^{*2}} = \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right)^2 (-2E^*) + \frac{3IJ}{2\pi i \sqrt{-2E^*}}$$

usando del método de aproximaciones sucesivas para despejar E^* haremos $I=0$ entonces

$$(43) \quad \sqrt{-2E^*} = \frac{2\pi ik}{J^* \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W} \right)}$$

reemplazando en la (42)

$$(44) \quad \frac{4 \pi^2 i^2 k^2}{J^{*2}} = -2E^* \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W}\right)^2 + \\ + \frac{3 I J^* J}{4 \pi^2 i^2 k^2} \left(1 - \pi i \frac{k_1}{J^* W}\right)$$

de la cual fácilmente despejaremos E^* y en segunda aproximación tendremos

$$(45) \quad E^* = -\frac{2 \pi^2 i^2 k^2}{J^{*2} \left(1 - 2 \pi i \frac{k_1}{J^* W}\right)} + \frac{3 I J^* J}{8 \pi^2 i^2 k^2} \left(1 + \pi i \frac{k_1}{J^* W}\right)$$

como

$$k = \frac{u}{1 + \frac{2u}{c^2 a}} \quad k_0 = \frac{6u^2}{c^2}$$

y además haciendo $(u) = u \cos \varphi$

$$(46) \quad E^* = -\frac{2 \pi^2 i^2 u^2 \left(1 - \frac{4u}{c^2 a}\right)}{J^{*2} \left(1 - 12 \pi i \frac{(u^2)}{c^2 J^* W}\right)} + \frac{3 I J^* J}{8 \pi^2 i^2 u} \left[1 + \frac{2u}{c^2 a} + \right. \\ \left. + 6 \pi i \frac{(u^2)}{c^2 J^* W}\right]$$

ésta es la expresión general de la energía total einsteiniana tomando en cuenta el Efecto Stark ó el Efecto Zeemann tratada esta cuestión desde un punto de vista Astronómico. Fácilmente se deduce de la fórmula anterior la expresión de la energía total en la teoría electronica.

Para determinar la expresión de la energía total relativista eliminando de ella el semieje mayor de la órbita bastara valerse de las ecuaciones

$$k = \left(1 + \frac{4E^*}{c^2}\right) u; \quad k_0 = \frac{6u^2}{c^2}; \quad (u) = u \cos \varphi$$

reemplazando k y k_1 en la (45) y en segunda aproximación se tendrá

$$(47) \quad E^* = - \frac{\frac{2 \pi^2 i^2 u^2}{J^{*2} \left(1 - 12 \pi i \frac{(u^2)}{c^2 J^* W} \right)} - \frac{3 I J^* J}{8 \pi^2 i^2 u} - \frac{9 I J (u^2)}{4 \pi i W u}}{1 + \frac{16 \pi^2 i^2 u^2}{c^2 J^{*2} \left(1 - 12 \pi i \frac{(u^2)}{c^2 J^* W} \right)} + \frac{3 I J^* J}{2 \pi^2 i^2 c^2 u}}$$

recordando que

$$(48) \quad J_3 = 2 \pi i W \quad \text{de donde} \quad W = \frac{J_3}{2 \pi i}$$

la (47) afectará la forma

$$(49) \quad E^* = - \frac{\frac{2 \pi^2 i^2 u^2}{J^{*2} \left(1 - 24 \pi^2 i^2 \frac{(u^2)}{c^2 J^* J_3} \right)} - \frac{3 I J^* J}{8 \pi^2 i^2 u} - \frac{9 I J (u^2)}{2 c^2 J_3 u}}{1 + \frac{16 \pi^2 i^2 u^2}{c^2 J^{*2} \left(1 - 24 \pi^2 i^2 \frac{(u^2)}{c^2 J^* J_3} \right)} + \frac{3 I J^* J}{2 \pi^2 i^2 c^2 u}}$$

En el caso particular que $I=0$ es decir ausencia de campo eléctrico ó magnético se tendrá también $(u) = u$ aproximadamente

$$(50) \quad E_1^* = - \frac{2 \pi^2 i^2 u^2}{J^{*2} + \frac{8 \pi^2 i^2 u^2}{c^2} \left[2 - \frac{3 J^*}{J_3} \right]}$$

cambiando J_3 por $J_\varphi + J_\theta$ haciendo

$$(51) \quad J^* = J_r + J_\varphi + J_\theta$$

en la que J_r es el numero quantico radial, J_φ es el numero quantico zenital y J_θ es el numero quantico azimutal entonces

$$(52) \quad E_2^* = - \frac{2 \pi^2 i^2 u^2}{J^{*2} + \frac{8 \pi^2 i^2 u^2}{c^2} \left[2 - \frac{3 J^*}{J_\varphi + J_\theta} \right]}$$

Esta fórmula ya nosotros la hemos encontrado en una memoria que ha sido presentada á la Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid por el autor de la presente.

La energía total puede ser también expresada en segunda aproximación por la fórmula aproximada

$$(53) \quad E^* = -\frac{2\pi^2 i^2 u^2}{J^{*2}} + \frac{3IJ^*J}{8\pi^2 i^2 u} - \frac{48\pi^4 i^4 u^4}{c^2 J^{*3} J_3} + \\ + \frac{32\pi^4 i^4 u^4}{c^2 J^{*4}} - \frac{3IJu}{c^2 J^*} + \frac{9IJu}{2c^2 J_3} - \frac{9I^2 J^{*2} J^2}{16\pi^4 i^4 c^2 u^2}$$

considerando que φ sea muy pequeño podemos admitir que $(u) = u$ aproximadamente.

Cuando hacemos que $c \rightarrow \infty$ se obtendrán las expresiones de la energía total en la teoría clásica estas serán

$$(54) \quad E_1 = -\frac{2\pi^2 i^2 u^2}{J^{*2}} + \frac{3IJ^*J}{8\pi^2 i^2 u}$$

y cuando hay ausencia de campo eléctrico ó magnético $I = 0$ entonces

$$(55) \quad E = -\frac{2\pi^2 i^2 u^2}{J^{*2}}$$

que es la expresión clásica de la energía total.

Las fórmulas (54) y (55) han sido encontradas por el profesor Pietro Burgatti¹⁾ considerando como estructura de la energía potencial

$$(56) \quad V = -\frac{e^2 N}{r} + eI_0 z$$

siendo e la carga del electron, N el número que mide la carga del nucleo. Denominando m la masa esta estará expresada por

$$(57) \quad m = \frac{m_0 M}{m_0 + M}$$

en la que m_0 es la masa eléctrica y M la masa del nucleo por las consideraciones anteriores se obtiene

$$(58) \quad E_1 = \frac{2\pi^2 i^2 m e^4 N^2}{J^{*2}} - \frac{3I_0 J^* J}{8\pi^2 i^2 m e N}$$

y cuando $I_0 = 0$

$$(59) \quad E = \frac{2\pi^2 i^2 m e^4 N^2}{J^{*2}}$$

en las fórmulas (58) y (59) se hacemos $i = 1$ se obtendrán las fórmulas del Profesor Pietro Burgatti en la teoría clásica.

¹⁾ Pietro Burgatti. Lezioni di Meccanica Analitica.

La influencia que ejerce el campo eléctrico ó magnético estará representada por la variación δE^* que experimenta la energía total E^* al pasar de un estado á otro debido á la acción del campo

$$(60) \quad \delta E^* = \frac{3IJ^*J}{8\pi^2 I^2 u} - \frac{3IJu}{c^2 J^*} + \frac{9IJu}{2c^2 J_3} - \frac{9I^2 J^{*2} J^2}{16\pi^2 I^2 c^2 u}.$$

Aplicando la ley de Einstein-Borh encontraremos la influencia sobre la frecuencia de radiación emitida cuando se pasa del estado de energía total E_1^* al otro estado E_2^* expresada por

$$(61) \quad \delta \nu^* = \frac{\delta E_2^* - \delta E_1^*}{h}$$

en la que h es la constante de Plank.

Perú-Lima, Mayo 10 de 1934.

Władysław Gorczyński.

O systemie dziesiętnym podziału klimatów kuli ziemskiej z zastosowaniem do Europy.

(Z 6 figurami poza tekstem).

Komunikat zgłoszony dn. 28 czerwca 1934 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym, po uwagach wstępnych, dotyczących systemów klasyfikacyjnych wogóle, podany jest schemat dziesiętny, ograniczony do 10 tylko typów klimatycznych, objętych 5 grupami zasadniczymi. Granice grupowe, wzorowane naogół na schemacie analogicznym Köppena, mają jednak charakter bardziej uproszczony, a różnice zasadnicze występują zwłaszcza dla Europy z powodu odmiennego sposobu rozgraniczania dwóch wielkich grup, a mianowicie morskiej lub umiarkowanej od lądowej lub krańcowej.

Odmienne kryterjum, przyjęte w tym wypadku przez autora, ma szczególnie ważne znaczenie dla terytorjum Polski. Według mapy klimatycznej Köppena przez Warszawę biegnie linja graniczna grupy klimatów krańcowych, gdy według nowego po-

działu przedstawionego na Fig. 1 i Fig. 2 cała Polska należy do grupy umiarkowanej. Poza przebiegiem izoterm, wybór tej nowej linii granicznej jest uzasadniony przebiegiem izoamplitud (Fig. 3 i Fig. 4), liczb dni ze śniegiem (Fig. 5) oraz izanomalami temperatur.

Dzięki uprzejmości prof. St. Pawłowskiego, figury niżej podane mogły być reprodukowane z klisz, przygotowanych dla referatu autora p. t. „Sur la classification des climats avec quelques remarques sur le système de Köppen”, wygłoszonego w dniu 28 sierpnia 1934 r. dla członków Międzynarodowego Kongresu Geograficznego, odbytego w tym czasie w Warszawie.

W referacie tym, poza uwagami natury ogólnej i specjalnie geograficznej, podane były zasadnicze rezultaty systemu dziesiętnego podziału klimatów w myśl treści niniejszego komunikatu, przedstawionego na zebraniu Wydziału III T. N. W. w czerwcu 1934 r.

Władysław Gorczyński.

Decimal scheme of world's climates with adaptation to Europe.

(With 6 figures on 3 separate plates).

Mémoire présenté dans la séance du 28 juin 1934.

C O N T E N T S .

Introductory remarks.

Decimal scheme of principal climatic types in the world.

Climatic divisions of Europe.

The favoured climatic situation of Europe.

Isoamplitudes giving annual range of the mean monthly temperatures of the air.

Fig. 1. Climates of the Earth.

Fig. 2. Climatic divisions of Europe.

Fig. 3. Isoamplitudes of the Earth.

Fig. 4. Isoamplitudes of Europe.

Fig. 5. Annual numbers of snow days.

Fig. 6. Climatic limits between the maritime and continental group.

Introductory remarks.

Between different meteorological factors, only air temperature and precipitations can be practically used for a commode and simple classification of world's climates. For other important factors the data are too scarce till now.

For each factor we must take into consideration not only its value on the adopted scale but also its distribution during the year. If we omit the annual variations of air temperature, we have the following scheme:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \cdot & \cdot x & x \cdot & x & \end{array} \right.$$

The values of air temperature and precipitations are grouped after certain limiting degrees or precipitation totals for chosen months, seasons or for the whole year. The third line of our scheme indicates the seasonal distribution of precipitation (\cdot abundant and x deficient precipitations throughout the year; $\cdot x$ abundant in winter, deficient in summer; vice versa for $x \cdot$).

Following out our scheme, a hundred of different combinations would be possible, but geographically this number is greatly reduced by the fact that, for instance, low temperature values can not be found with the greatest precipitation totals or vice versa.

In order to save space, we can not here enter into further details.

We mention here only the following general considerations concerning classification of climates.

a) In addition to the chief meteorological elements, other factors: edaphic, botanical, faunistic or human can be taken in consideration only in second degree.

b) A most simple and general scheme of climates seems to be most adequate in the present state of climatology; as such practical scheme can be adopted the ancient system of five fundamental groups divided into 10 principal climatic types.

c) The system, recommended recently by Köppen can be used, but necessitates certain modifications concerning climatic limits.

d) The most important modification concerns the separation between the maritime and continental group, as is stated below.

e) The modified system of world's climates is limited to 10 principal climatic types, which can be easily extended to smaller climatic regions and further to more individual climatic species.

These subdivisions are to be separated mostly on geographical basis, with special attention to mountains and other natural limits; the last should be preferred to purely artificial divisions.

Decimal scheme of principal climatic types in the world.

As is stated above, the decimal scheme of world's climates corresponds nearly to that already recommended by Köppen; it differs in establishing of certain limiting values, chiefly between the maritime and continental climates. The total number of climatic types is here fixed to 10; each continent or maritime space or, better, every geographical entity should be further divided in smaller climatic regions and finally in more individual species. The number of the species is in principle not limited; this depends upon particular point of view and may be different for a climatologist, geographer, botanist etc. It is important that the decimal scheme were in every case used, but the further delimitation may vary.

It is also useful to keep in mind that only climatic species exist in reality; climatic regions and principal types already present some generalized climates. As to the great climatic groups, they are only very useful abstracts.

Now we come to a more detailed specification of these fundamental groups.

Decimal scheme of principal climatic types.

Fundamental groups
with 10 principal types:

Most important limits between
the groups:

I. Warm or intertropical cal group.

Type 1. Wet tropical.

Mean temperature above 20°

Type 2. Intertropical savannah

Centigrade during the three
coldest months.

II. Aride group.

Type 3. Desert type.

Type 4. Steppe type.

Precipitations above aridity limit, during the whole year or for several months.

III. Temperate or maritime group with

Precipitations:

Type 5. Mostly in summer half-year (deficient in winter).

Type 6. Mostly in winter half-year (deficient in summer).

Mean temperature between 15°C and -5°C for the coldest month, or less than four months with mean temperature below freezing point.

IV. Extreme or continental group.

Type 8. Frequent snowfalls during winter.

Type 9. Winter with mostly poor precipitations.

Mean temperature of the coldest month below -5°C , that of the warmest being above 10°C .

V. Snow group (subpolar or mountain group).

Type 10. With several subdivisions.

Highest mean monthly temperature not exceeding 10°C , during the year. Permanent snow cover if even the freezing point is not reached.

We find in Fig. 1 (see separate plate at the end) a schematic map of world's climates with characteristic types after decimal system.

Except for Europe, other climatic limits are adopted chiefly after Köppen, especially for maritime spaces. For the continents we have followed the recent modifications indicated by following authors:

Knoch (South America), Szymkiewicz (U. S. America), Sapper (Central America), Braak (Dutch Indies and Indochina), Griffith Taylor and Kidson (Australia and New Zealand).

The essential difference between the Köppen's limits and the present map (Fig. 1) concerns the limits between two fundamental climatic groups, namely between the temperate or maritime (group III) and the extreme or continental (group IV). This difference is especially important for Europe and we will now explain this question in more detail.

Climatic divisions of Europe.

Instead of the isotherm -3° or -2° for January, chosen by Köppen for the separation of the maritime and continental groups of climates, we use the isotherm -5° . Even by Köppen (see pages 133—134 of his „Grundriss der Klimakunde”, second edition, Berlin 1931) we find doubts in respect of his limit (see Fig. 6)¹⁾.

The isotherm -5° of January is much more convenient for the purpose of the separation between the maritime and continental groups. The reasons for this choice are as follows:

a) The isotherm -5° of January characterizes in a more stable manner the continental character of winter, with snow-cover more or less durable with small interruptions. In the case of the isotherm -3° or -2° , in winter there are too frequent changes between drizzle and frost both when near freezing-point.

b) The number of snow days above 60, showing definitely the preponderance of snow winters, corresponds nearly to the limiting isotherm -5° in January (see Fig. 5).

c) The isanomals of the air temperature shows too (as is stated below) the maritime character of Central Europe owing to the warming effect of the Baltic Sea. This great water space, penetrating so deeply into the interior of the European Continent, shows that the continental climatic limit should be chosen in the western part of the Soviet territory.

¹⁾ NB. Fig. 6 shows three boundary lines between the climatic types: 7 (maritime) and 8 (continental). Two first lines were proposed by Köppen; the third one, used in this paper, is established following the isotherm -5° C of January. In certain limited parts of this new boundary line (see, in Fig. 6, the eastern part of the Dnieper river), the isotherm -5° of January coincides with the isoamplitude 25° . This coincidence is not realized in other parts of Europe; e. g. in Scandinavia and in the Arctic region the discrepancies between these two lines (the isotherm -5° of January and the isoamplitude 25°) are considerable.

d) The isoamplitudes, calculated as the annual range between extreme (generally July and January) monthly means of the air temperature (see Fig. 3 and Fig. 4), give also certain limits useful for the climatic divisions. Especially interesting is the isoamplitude 25° that corresponds nearly, but only in the interior of Europe, to the isotherm -5° of January.

We insist however that this coincidence can be used only in such cases when the isotherm of July is approximately 20° , as we see in Central and Eastern Europe, and also in some eastern parts of North America. Otherwise the isoamplitude 25° can not replace the isotherm -5° of January; in the northern Atlantic Ocean the first one lays above and in the heart of Asia below the second one.

Finally it is interesting to state that the isotherm -3° or -2° show considerable aperiodic changes of the mean temperature for different periods.

This may be easily seen from the following short table.

Locality:	Warsaw	Königsberg (Germany, Oriental Prussia)	Breslau (Germany, Lower Silesia)	Vienna (Austria)
Periods:	(Poland)			
1921/25	$-1^{\circ},7$	$-2^{\circ},0$	$-0^{\circ},5$	$+0^{\circ},9$
1916/20	$-1^{\circ},5$	$-2^{\circ},0$	$+0^{\circ},9$	$+1^{\circ},5$
1911/15	$-3^{\circ},3$	$-3^{\circ},2$	$-1^{\circ},8$	$-1^{\circ},7$
1851—1900	$-3^{\circ},6$	$-3^{\circ},2$	$-1^{\circ},8$	$-1^{\circ},7$

If one follows also the limit adopted by Köppen, it would be necessary to consider the same locality as belonging once to the maritime and in an other period to the continental group in relation to the period taken in consideration.

In Fig. 2 are mapped the European climatic types with some subdivisions. The limit between the fundamental groups: III (maritime) and IV (continental) is here newly established on the principle as just stated.

The subdivisions belong mostly to the following climatic types: 7, 6, 4, 8 and 10. The secondary limits are given, following not only the isotherms of January (-5° and 0° for the subdivisions of the type 7 and -10° between 8^1 and 8^2), but

also after the number of snow days; above all, the general geographic and especially orographic conditions with the mountains (Alps, Karpats etc.) were given much consideration. On the map (Fig. 2) the mountainous regions with height over 1 km. are shown in black. The corresponding climates vary there with their orographic character.

Climatic divisions of Europe.

(See Fig. 2 where the mountainous regions over 1 km. are shown in black).

(Temperate or maritime groupe III).

Division:	Climatic subdivisions:
Atlantic	7 ¹ , 7 ¹ bis atlantic coastal
European	7 ² , 7 ² bis baltic subdivision
(Type 7)	7 ³ , 7 ³ bis atlantic transitory
Mediterranean	6 ¹ western Mediterranean
(Type 6)	6 ² central „
	6 ³ eastern „

(Aride groupe II).

Semi-arid	4 ¹ Iberian central
European	4 ² Black Sea Steppes
(Type 4)	

(Continental or extreme groupe IV).

Continental	8 ¹ , 8 ¹ bis East European
European	8 ² North-East European
(Type 8)	

(Snow groupe V).

Subpolar	10 Tundra (coastal portion
or	of the Glacial Ocean)
Mountainous	10 bis Permanent Snow
(Type 10)	

The type 10 of fundamental snow group V is to be found in coastal portions of the Glacial Ocean (tundra of the Northern territory of U. S. S. R.) and also on high mountains, especially in the Alps and in Scandinavia.

The favoured situation of Europe from the thermic point of view.

When we compare the mean temperatures in the different parts of Europe with the respective values for the other parts of the world (at the same geographic latitudes), we are at once struck with the so favoured situation of this continent from the thermic point of view.

The maps of the isanomal lines, drawn according to the isotherms of the world and of Europe¹⁾, show the positive anomaly (in relation to the mean temperature for the whole parallel) nowhere to be found greater than in the vicinity of the North coast of Norway in the month of January. This „exceeding” of temperature is characteristic for Europe not only in January but in July too — though in a degree by far less pronounced — and generally all the year round.

These relations can be remarked still clearer on the isanomal maps made especially for Europe and reproduced in mentioned publication (l. c.). On the Atlantic Ocean (lat. 70 N, long. 15 E Greenw.) we find in January the isanomal 26, in July but 2 degrees on centigrade scale. The departures (anomalies) progressively diminish from January to July, while they increase during the second half of the year. As an average for the year we obtain for the mentioned point of the Atlantic Ocean a little more than 10 degrees.

The positive isanomal lines characterize, all the year round, the whole territory of Europe with exception of South East Russia in October and March; on the other hand the negative isanomals equally appear (from May to September) on a part of the Atlantic Ocean.

In Poland we have in January the positive isanomal of 10 on the Baltic littoral; this value is progressively diminishing towards South East and South (Warsaw 6, Kiew 2, Odessa 1, Sibiu or Nagy-Szeben 0).

The rule that the seas are warmer during the winter than the continents is confirmed by comparing the isanomals of the Baltic and Black Sea with those of the neighbouring countries.

¹⁾ See the author's publication: „Nowe izotermi. Nouvelles isothermes de la Pologne, de l'Europe et du globe terrestre” (with 43 maps of monthly and annual isotherms). Text in Polish (pp. 1–195) and in French (pp. 196–286). Warsaw, 1918.

So e. g. we find in January the closed isanomal curve of 15 near the Aland islands, while the line of only 11 characterizes the neighbourhood of Oslo; just so, we find in January the isanomal of over 5 in the East part of the Black Sea, while the negative isanomal of -1 appears in the interior of the Balkan Peninsula.

In the month of July the isanomals (always positive in Poland) increase from West to East: from 1 at the Oder line to 3 in the East of the Dnieper River. Contrary to winter conditions, the Baltic and Black Seas are in summer respectively less warm than the neighbouring coast regions; thus we find the isanomal of 0 (even a small negative value) in July in the central part of the Black Sea, while the isanomal of over 2 characterizes the interior of Hungary and the Balkans.

In conclusion, one of the characteristic features of Poland is the always positive „thermic anomaly” during all months and for all parts of the country. Yet the value of this anomaly is not the same for the various parts of Poland. Taking the Baltic littoral, the central plain and the Pontic littoral, we find that, in the annual average, the positive anomaly shows a reduction from 5 to 2,5 and further to 1 on the coast of the Black Sea. In January the isanomals for these three parts in question are in round numbers: 10, 5 and 2, in July 2, 2 and 1. For the four seasons we obtain the following isanomals:

	Winter	Spring	Summer	Autumn	Year
	(degrees in centigrade scale)				
Baltic coast.	5	3	2	2,5	3
Central Polish plains . . .	9	4	2	4	5
Environs of Black Sea (near Odessa):	2	0	1	2,5	1

The spring-minimum is characteristic for the Black Sea. Several causes are known which bring about the favoured climatic situation of Europe and above all the warm waters of the Gulf Stream wafted across the Atlantic Ocean by the prevailing westerlies. The European seas are not only numerous and extensive, but work their way far into the land. In Central Europe the winters, warm for the latitude, are favourably influenced by the Baltic Sea which extends a continuous waterway to the Gulf of Finland.

Following K e n d r e w we can say that the absence of a mountain range along the west coast is another fact to which the European continent owes great climatic advantages. The Pyrenees, the Alps, the Karpatians and even the Caucasus have a west-east trend; only the Scandinavian mountains face the westerlies on the stormy sea-boards of Norway, but this barrier is not continuous and in general not sufficiently high.

The cloudiness and the prevailing winds give Europe a favourable climate with well-distributed rainfall, with mild winters, warm but not too hot summers.

The cloudiness in Europe is not so great in summer as in winter. A higher degree of cloudiness leads in winter to the increase, in summer to the decrease of air temperature. Though the character of the annual course of the cloudiness in Europe presents a factor leading to the increase of temperature, we cannot explain in this way but a small part of the thermic excess of our continent.

A more important influence by far is owed to the West and South West winds prevailing in the greatest part of Europe. In consequence of the very profound penetration of the inland seas into the European continent, the oceanic type of the climate is most decided even in the regions rather distant from the Atlantic Ocean.

But, as already stated, the greatest importance presents the warm ocean current known under the name of Gulfstream. The exceptionally warm region situated between Ireland, Scotland and Norway exercises its influence upon the European climates in a most decided way. This influence accentuates itself indirectly by partaking in forming a centre of low pressure in the North Atlantic Ocean whence the South west winds prevailing in Europe proceed. The direct influence appears e. g. with the North West winds, which, though very cold in East Asia, are respectively warm in Europe during the winter.

The influence of the winds is very important, above all, when we consider that the thermic effect of the warm oceanic currents can manifest itself only when carried by the winds.

Isoamplitudes giving annual range of the mean monthly temperatures of the air.

In addition to the general description of different climatic types, we give two supplementary maps giving the so called isoamplitude lines for the whole world and separately for Europe.

It can be easily understood that the examination of the amplitudes of the annual range of the mean monthly temperatures (generally calculated as the difference between July and January) is very useful in many occasions for the discussion on the climatic character of different continents and maritime spaces.

Let us notice the proposal of Woeikow, who intended to consider the amplitude of 23 degrees as climatic limit between West and East Europe. This amplitude, calculated by means of the difference of the average monthly temperatures for the extreme months, passes in the East of Warsaw. Yet it serves better our purpose to take as such limit the amplitude of 25. This latter line gives (for the period of 50 years from 1851 to 1900) a limit, which passes—beginning from the Finnic Gulf and nearly following the 28 —*th* meridian East Greenw. in the vicinity of the Dnieper till Kiew, where it bends somewhat towards the Karpatian mountains and then turns towards Odessa and at last towards East parallelly to the littoral of the Black Sea.

Availing ourselves of the map of annual variation of the mean monthly temperatures, effected for the whole world (this map having been reproduced below as Fig. 3), we arrive in a natural way to distinguish the following types of isoamplitudes:

Amplitudes under 2,5	Equatorial type
„ from 2,5 to 10	Oceanic „
„ „ 10 „ 25	Maritime transition type
„ „ 25 „ 40	Continental „
„ over 40	Extreme continental „

The part of the world map relating to Europe is reproduced in Fig. 4. We see on it the three types (the 1 oceanic, maritime transitive and continental), about which we have spoken. Just the maritime transition type is characteristic for the Central part of the European continent including Poland.

Although very useful for the discussion of climatic types, the isoamplitudes can not replace in every case the use of certain isotherms. For instance the isoamplitude 25⁰ can be used instead of the isotherme —5⁰ of January only in special cases and namely for the regions with the isotherm 20⁰ of July.

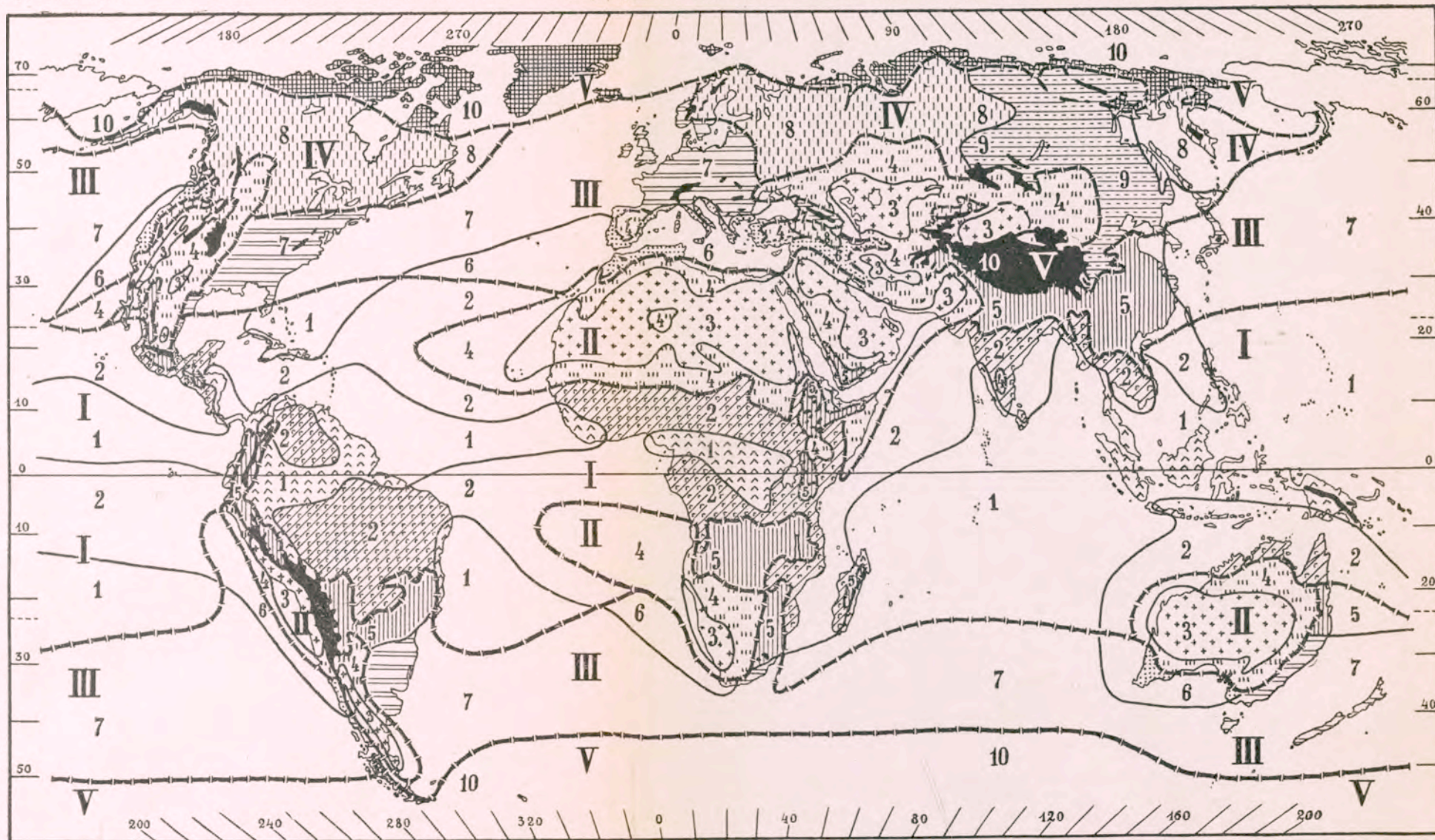


Fig. 1. Klimaty kuli ziemskiej.

I		II		III			IV		V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
~ ~ ~ ~	~ ~ ~ ~	+	+						
~ ~ ~ ~	~ ~ ~ ~	+	+						
~ ~ ~ ~	~ ~ ~ ~	+	+						

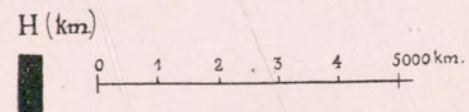


Fig. 1. Climates (1—10)
Climats du monde.

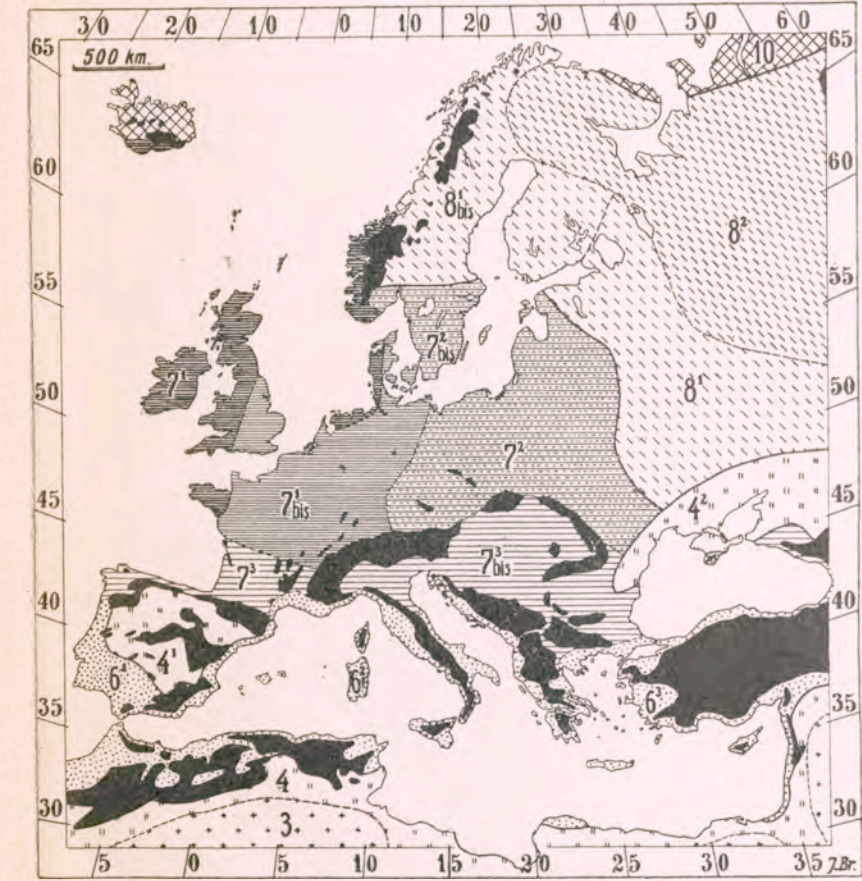


Fig. 2. Podziały klimatyczne Europy.
Climatic divisions. Divisions climatiques.

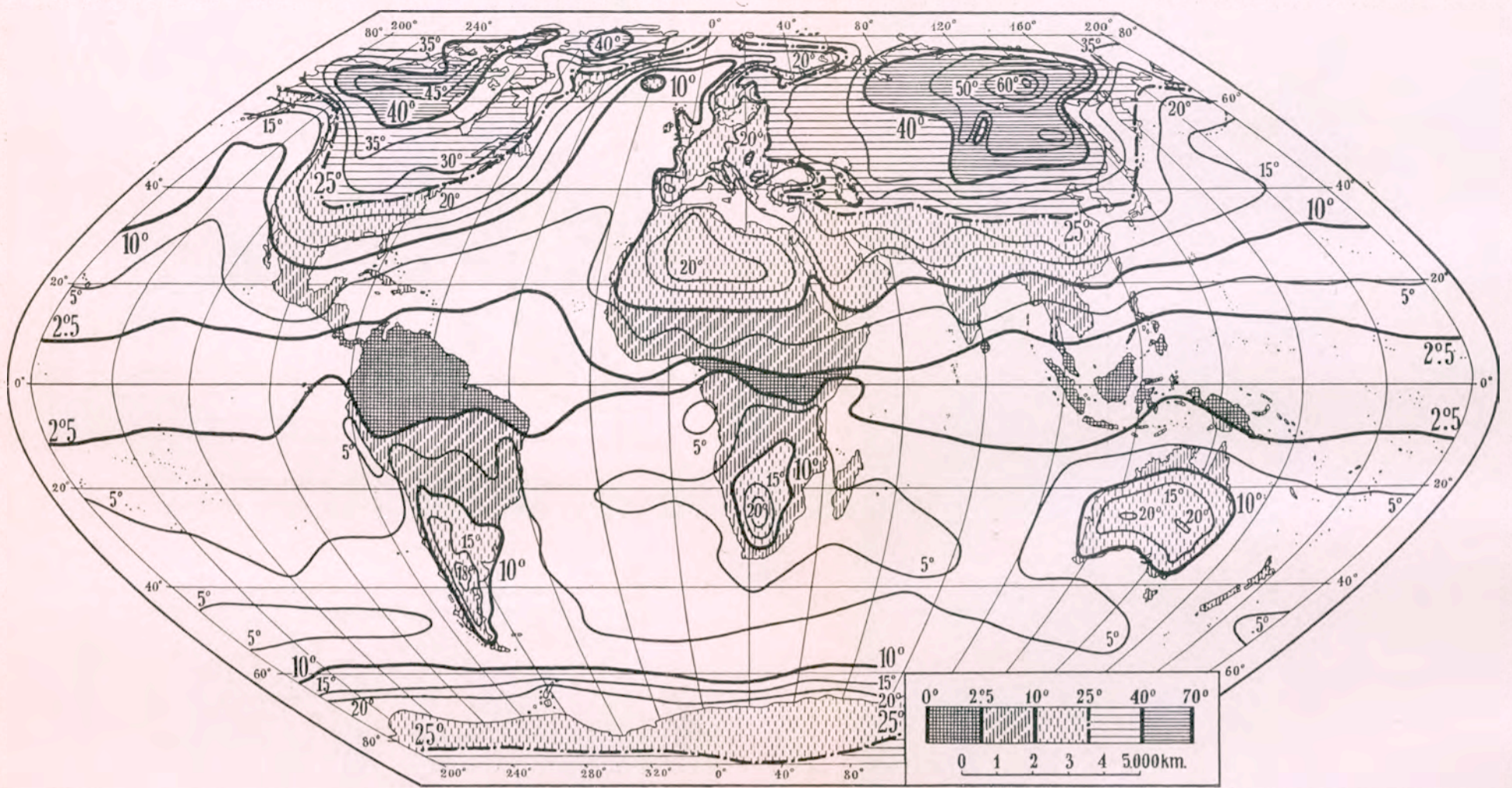


Fig. 3. Isoamplitudy. Isoamplitudes.

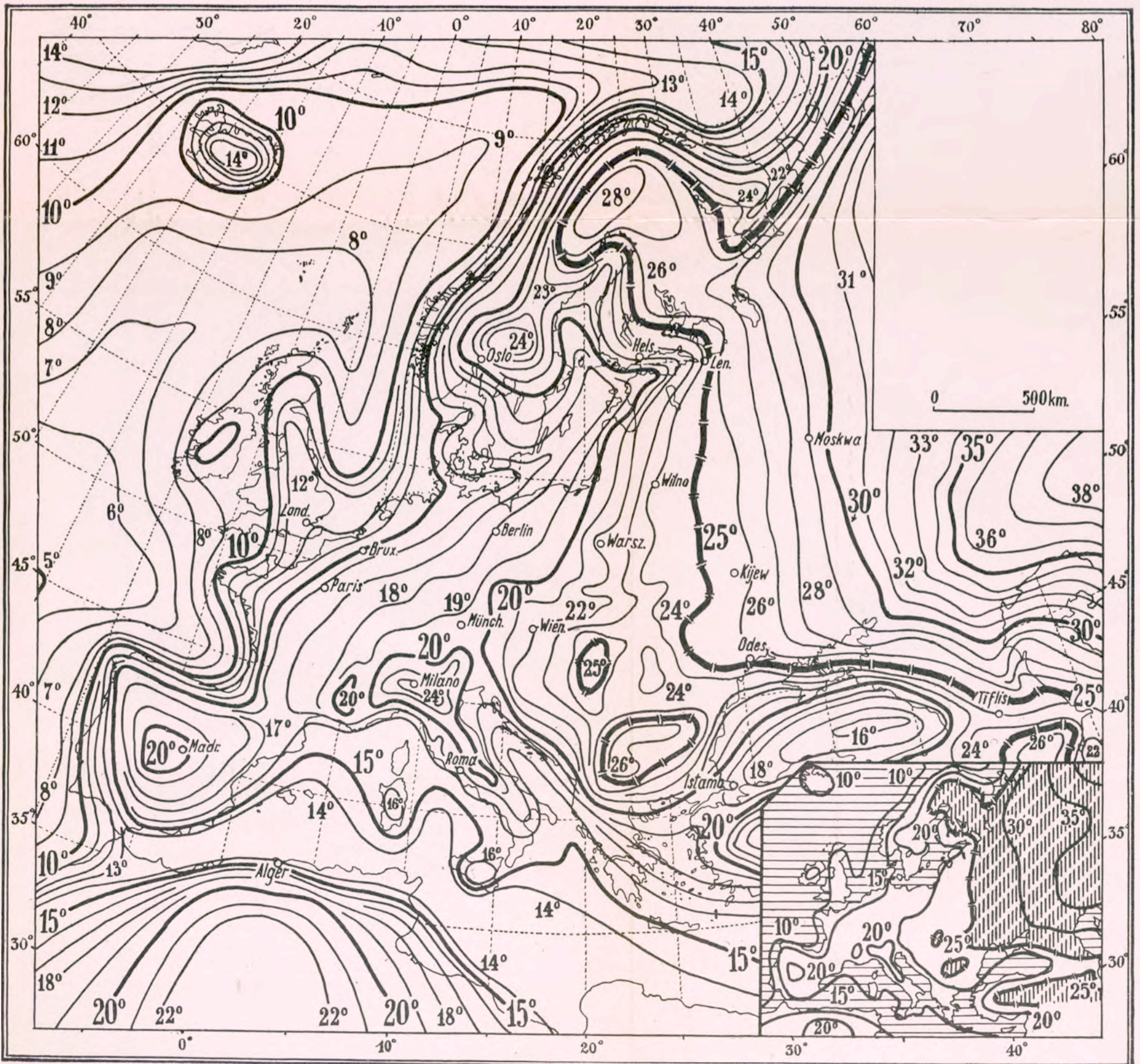


Fig. 4. Isoamplitudy. Isoamplitudes.

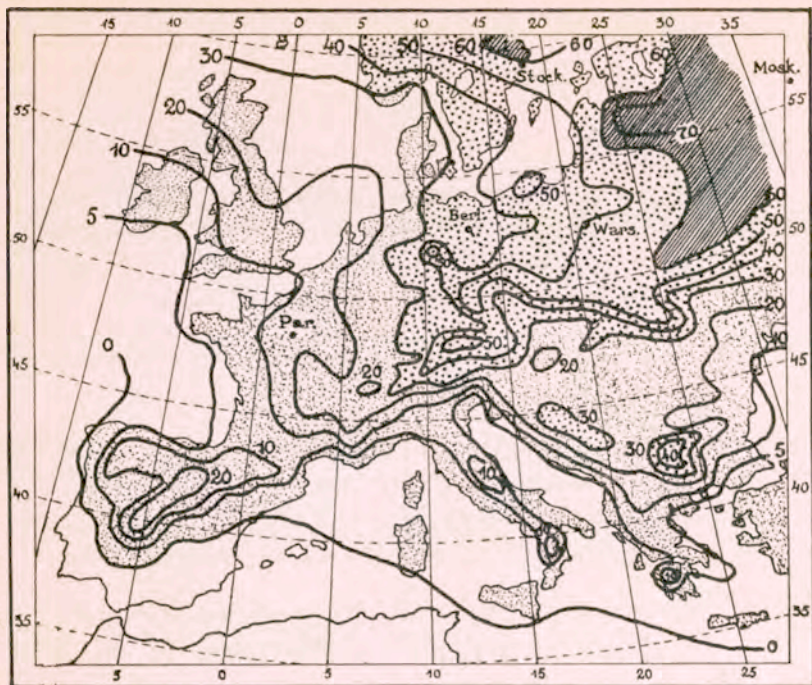


Fig. 5. Liczby roczne dni ze śniegiem w Europie.
 Nombres annuels de neige. Annual numbers.

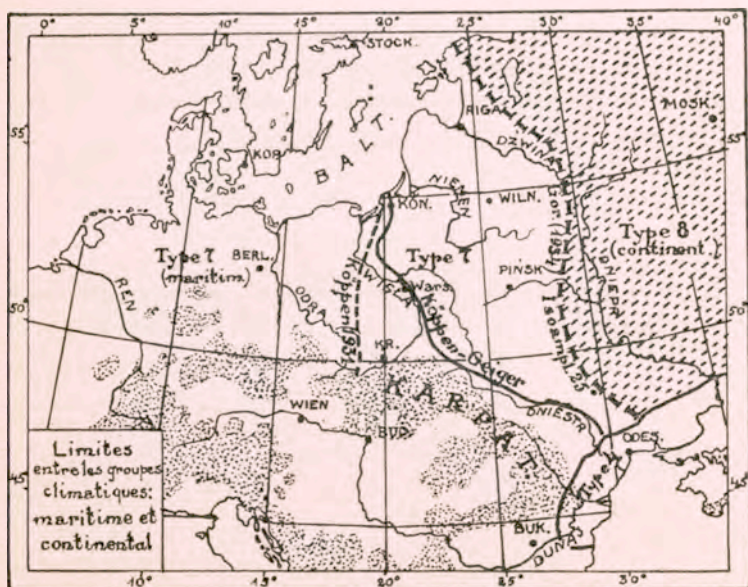


Fig. 6. Granica grup klimatycznych.
 Limits between climatic groups. Limites entre les groupes climatiques.

St. J. Thugutt.

**Produkty hydrolizy labradoru wołyńskiego
z Horoszek wraz z badaniami rentgenologicznymi
d-ra Marji Kołaczkowskiej.**

Komunikat zgłoszony dn. 28 czerwca 1934 r.

Praca wyjdzie w tomie X-ym „Archiwum Mineralogicznego”.

**Sur les produits d'hydrolyse de labrador Volhynien
de Horoszki avec une étude roentgenologique
de M-lle Marie Kołaczkowska.**

Mémoire présenté à la séance du 28 juin 1934.

Le travail paraîtra dans „l'Archive de Minéralogie” de la
Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Vol. X.

S. Jaskólski.

**Złóża srebrowo-cynowe Chocaya w Boliwji.
Z wstępem geologicznym
przez Romana Kozłowskiego.**

Przedstawił R. Kozłowski dn. 28 czerwca 1934 r.

Praca wyjdzie w tomie X-ym „Archiwum Mineralogicznego”.

**Les gisements argento-stanifères de Chocaya
en Bolivie. Avec un Aperçu géologique
par Roman Kozłowski.**

Mémoire présenté par M. R. Kozłowski à la séance du 28 juin 1934.

Le travail paraîtra dans le Vol. X de „l'Archive de Minéralogie”.

K. Smulikowski.

Skały wybuchowe Andów boliwijskich. Badania mikrograficzne. Poprzedzone szkicem rozprzestrzenienia skał wybuchowych w Andach boliwijskich przez Romana Kozłowskiego.

Przedstawił R. Kozłowski dn. 28 czerwca 1934 r.

Praca wyjdzie w tomie X-ym „Archiwum Mineralogicznego”.

Les roches éruptives des Andes de Bolivie. Etude micrographique. Précédée d'une Esquisse de la répartition des roches éruptives dans les Andes de Bolivie par Roman Kozłowski.

Mémoire présenté par M. R. Kozłowski à la séance du 28 juin 1934.

Le travail paraîtra dans le Vol. X de „l'Archive de Minéralogie”.

Ostatnie Wydawnictwa Towarzystwa Naukowego Warszawskiego Wydz. III, IV.

Skład: Warszawa, Nowy Świat 72. T. N. W.

Katalog wydawnictw Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. 1907—1932. Warszawa. 1933. Str. VI + 262.

Archiwum Mineralogiczne. Tom XI. Warszawa. 1933.

A. Łaszkiewicz. O miedzi rodzimej. — A. Łaszkiewicz. O postaci krystalicznej aspiryny handlowej. — T. J. Wojno. Przyczynki do metody justowania mikroskopu mineralogicznego i mikroskopu Fedorowa. — S. Jaskólski. Złoże srebro-cynowe Potosi w Boliwii. — S. J. Thugutt. O jancie nowym mineralu z Janowej Doliny na Wołyniu. — J. Kuhl. Glinki boksytowe z Najdziszewa i złoże halozytu z Mierzęcie (północne okolice Zagłębia Dąbrowskiego). — M. Dominikiewicz. O pewnych reakcjach natrolitu naturalnego. — L. Jabłoński. Własności krystalograficzne jangoniny.

Archiwum Nauk Antropologicznych. Dział A. Antropologia. № 5. Warszawa. 1933.

Leon Manteuffel-Szoegge. Antropomorfologia wątroby. (Studia nad antropomorfologią wątroby Polaków).

Archiwum Hydrobiologii i Rybactwa. Wyd. Instytutu im. M. Nenckiego. Tom VII. 1933.

S. Markowski. Robaki pasożytnicze ryb polskiego Bałtyku. — Z. Koźmiński. Badania morfometryczne i ekologiczne nad oczlikami (*Cyclopidae*) z grupy *strenuus*. — A. Moszyński. Opis nowego gatunku skąposzczeta (*Paranais setosa* n. sp.). — Z. Koźmiński. O sposobie obliczania deficytu tlenowego w jeziorach Suwalskich.

Monografie z pracowni Neurobiologicznej. II. 1928.

N. Zandowa. Splot naczyniasty (*Plexus chorioideus*) (Anatomia, fizjologia, patologia).

Planta Polonica. Materiały do Flory Polskiej.

T. I. 1930. K. Karpowicz. Przyczynek do znajomości flory powiatu Nowogródzkiego.

T. II. 1930. R. Kobendza. Stosunki fitosocjologiczne puszczy Kampinoskiej.

Archiwum Nauk Biologicznych.

T. III, zes. 1. 1929. J. Grzybowski. O układzie żylnym mózgu człowieka.

T. III, zes. 2. 1929. R. Poplewski. Mięśnie grzebieniaste serca (*Musculi pectinati*).

T. III, zes. 3. 1930. J. Łukasiak. Badania anatomiczne i rozwojowe nad *Dioctophyme renale* (Goeze 1782).

T. IV, 1933. B. Hryniewiecki. Tentamen Florae Lithuaniae. (Zarys flory Litwy).

Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych.

Nr. 33. 1930. J. Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration.

Nr. 34. 1933. A. Tarski. Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

R. XXVI. 1933. Zesz. 1—3, 4—6, 7—9.

Prace następujących autorów: M. Dominikiewicza, G. García, W. Gorczyńskiego, S. Jaskólskiego, T. W. Jezierskiego, M. Kamińskiego, M. Krzyżańskiego, J. Kuhla, J. Marcinkiewicza, S. Mazurkiewicza, B. Olewskiego, F. Ostrowskiego, H. Piotrowskiego, T. Posamenta, W. Sierpińskiego, W. Smosarskiego, M. Spotowskiej, T. J. Wojny.

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział IV nauk biologicznych.

R. XXVI. 1933. Zesz. 1—6.

Prace następujących autorów: N. Balzama, E. Bujalskiej, K. Białaszewicza, I. Dąbkowskiej, S. Frajbergera, W. Giedroycia, M. Konopackiego, M. Laskowskiego, K. Obitza, J. Ocieszyńskiej-Bankierowej, A. Perlberga, St. J. Przyłęckiego, J. Smoleńskiej, St. W. Stefańskiego, A. Szejman-Rozenbergowej, N. Zandowej.