SPRAWOZDANIA T.N.W. WYDZIAŁ III

25

1932

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXV Année 1932 Fascicule 1—6

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXV 1932 Zeszyt 1—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1933

J. DZIEWULSKI

Zakł. Graficzno-Introligatorskie
Warszawa, Złota 29.

TREŚĆ ZESZYTU 1—6.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 23 stycznia 1932 r.

Stefan Mazurkiewicz.

Przyczynek do aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa.

Komunikat przedstawiony dnia 23 stycznia 1932 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym podaję nowy układ aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa. Cechą charakterystyczną tego układu jest: 1) że prawdopodobieństwo jest przyporządkowane nie zdarzeniom a zdaniom; 2) że jest ono zrelatywizowane względem zmiennego niesprzecznego układu dedukcyjnego. Ponadto określam pewien uproszczony, trójwartościowy rachunek prawdopodobieństwa i rozpatruję jego stosunek do logiki trójwartościowej.

Stefan Mazurkiewicz.

Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vorgelegt am 23.I 1932.

Den Ausgangspunkt dieser Mitteilung bildet die bekannte Bohlmann'sche Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]), ich vermeide aber gänzlich den Ereignisbegriff, indem bei mir

[1]) Bohlmann: Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma 1908, vol 3 p. 244 (1909); Bohlmann — Poterin du Motel Encyclopédie d. Sciences Mathématiques I 25 (T. I vol. 4 p. 496—497, 1911)

nicht Ereignisse, sondern Aussagen als wahrscheinlich gelten [1]). Ich stütze mich dabei auf die metamathematischen Untersuchungen von Tarski [2]) und erhalte für die Bohlmann'schen Axiome einen *logischen* Unterbau. Es scheint allerdings dass man sich einstweilen auf *diskontinuirliche* Wahrscheinlichkeiten beschränken muss entsprechend der Tatsache, dass die Menge aller sinnvollen Aussagen abzählbar ist [3]).

Sind x, y Aussagen, so bezeichne ich nach Tarski mit $n(x)$ die Negation von x, mit $c(x, y)$ die Implikation mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y; ich setze weiter: $x+y=$ $=c(n(x), y)$ und $xy=n(n(x)+n(y))$. Ist V eine Aussagenmenge, so bezeichne ich mit $F(V)$ die Folgerungsmenge von V [4]), mit $N(V)$ die Menge $\sum_{x \varepsilon V} (n(x))$ d. h. die Menge der Negationen aller Aussagen aus V. Ein deduktives, widerspruchfreies System [5]) nenne ich kurz $\mathfrak{W}$*-System*. Die Aussagen x, y heissen *äquivalent in Bezug auf die Aussagenmenge V*, in Zeichen: $x \sim y$ (rel. V) wenn $F(V+(x))=F(V+(y))$.

Die Axiome sind in zwei Gruppen eingeteilt.

I. Axiome des Feldes.

Es sei Π eine Menge von $\mathfrak{W}$-Systemen, und es sei jedem $U \varepsilon \Pi$ eine Aussagenmenge $M(U)$ eindeutig zugeordnet. Es sei weiter: $Z(U)=U+N(U)+M(U)$. Wir nennen Π ein Feld wenn folgende Axiome erfüllt sind.

I, 1 Wenn $x \varepsilon M(U)$, $x \sim y$ (rel. U) so ist $y \varepsilon M(U)$

I, 2 $U \times M(U)=0$

I, 3 $M(U)=N(M(U))$

I, 4 Wenn $x \varepsilon M(U)$, $y \varepsilon M(U)$, so ist $(x+y) \varepsilon U+M(U)$

I, 5 Wenn $x \varepsilon M(U)$ so ist $U(x)=F(U+(x)) \varepsilon \Pi$

I, 6 Wenn $x \varepsilon M(U)$ so ist: $M(U(x)) \subset M(U) \subset Z(U(x))$.

---

[1]) Dieser Standpunkt ist nicht neu, vgl. Reichenbach: Math. Zeitschr. 34 p. 568—618. Die Relativisierungsidee findet sich bei Keynes: *A treatise on Probability*, London 1921 und ebenfalls bei Reichenbach, allerdings in einer wesentlich anderen Fassung.

[2]) Tarski: C. R. Soc. d. Sc. Varsovie Cl. III, XXIII p. 22—29 (1930).

[3]) Tarski: l. c. p. 24, Axiom 1.

[4]) Tarski: l. c. p. 23.

[5]) Tarski: l. c. p. 25, 26.

II. Axiome der Wahrscheinlichkeit [1]).

Es sei $p(x, U)$ eine reelle, nichtnegative Funktion die für $U \varepsilon \Pi$, $x \varepsilon Z(U)$ definiert ist. Wir nennen sie Wahrscheinlichkeit der Aussage x in Bezug auf das System U, wenn folgende Axiome gelten:

II, 1 $p(x, U) = 1$ für $x \varepsilon U$

II, 2 Wenn $xy \varepsilon N(U)$ so ist: $p(x+y, U) = p(x, U) + p(y, U)$

II, 3 Wenn $x \varepsilon U + M(U)$ so ist: $p(xy, U) = p(x, U)\, p(y, U(x))$.

Betrachtet man z. B. ein Glücksspiel, so kann das Feld Π etwa in folgender Weise bestimmt werden. Es sei U_0 das System der Logik und Arithmetik + die Gesammtheit der Spielregeln. $M(U_0)$ sei die Menge der möglichen (also den Regeln nicht widersprechenden) Spielergebnisse. Π besteht aus U_0 sowie aus allen $\mathfrak{W}$-Systemen die aus U_0 durch Adjunktion der Elemente von $M(U_0)$ und die Operation F entstehen.

Es scheint auch, dass sich das „Prinzip des mangelnden Grundes”, relativisiert im Bezug auf ein $\mathfrak{W}$-System, exakt formulieren lässt, was mir aber zurzeit noch nicht gelungen ist”.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheint von diesem Standpunkt aus als eine Art mehrwertiger Aussagerechnung, und es entsteht naturgemäss die Frage ihrer Beziehungen zur mehrwertigen Logik von Łukasiewicz [2]). Ich werde im folgenden ein besonderes Feld und eine vereinfachte „dreiwertige Wahrscheinlichkeitsrechnung” in Bezug auf ihr Verhältnis zur dreiwertigen Logik untersuchen.

Es sei S die Menge aller sinnvollen Aussagen, Π die Menge aller in S enthaltenen $\mathfrak{W}$-Systeme; wir setzen für $U \varepsilon \Pi$:

$$M(U) = S - [U + N(U)]; \quad Z(U) = S$$

Π ist offenbar ein Feld.

Die Axiome der zweiten Gruppe ersetzen wir durch:

III, 1 $p(x, U) = 1$ für $x \varepsilon U$

III, 2 $p(x, U) = 0$ für $x \varepsilon N(U)$

III, 3 $p(x, U) = \frac{1}{2}$ für $x \varepsilon M(U)$.

---

[1]) Ich hatte ursprünglich noch folgendes Axiom angenommen: wenn $x \sim y$ (rel. U) so ist $p(x, U) = p(y, U)$. Tarski hat aber bewiesen dass dieses Axiom eine Konsequenz der übrigen ist.

[2]) Łukasiewicz: C. R. Soc. d. Sc. Varsovie Cl. III, XXIII p. 51—77.

Nun bilden wir für ein festes U die Matrix welche die Wahrscheinlichkeiten der Aussagen $n(x)$ und $c(x, y)$ angiebt:

c	0	$\frac{1}{2}$	1	n
0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ oder 1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Der Unterschied gegenüber der Matrix der dreiwertigen Logik liegt darin, dass in der dreiwertigen Logik $c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$; dagegen für $x \varepsilon M(U)$, $y \varepsilon M(U)$ ist $p(c(x, y), U)$ gleich $\frac{1}{2}$ oder 1 (für $y = n(x)$ erhalten wir $\frac{1}{2}$, für $y = x$ dagegen 1).

F. Leja.

O spółczynnikach zbieżności szeregów funkcyj analitycznych.

Komunikat zgłoszony dnia 23 stycznia 1932 r.

Sur les facteurs de convergence des séries des fonctions analytiques.

Mémoire présenté dans la séance du 23 janvier 1932.

Niech będzie dany szereg

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

którego wyrazy $f_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, są funkcjami analitycznemi, regularnemi w pewnym obszarze D.

Nazwijmy *czynnikiem zbieżności szeregu* (1) *w obszarze* D górny kres λ_D zbioru wszystkich liczb nieujemnych l, dla których szereg

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \, . \, l^n \tag{2}$$

jest *jednostajnie* zbieżny w każdym obszarze domkniętym, zawartym wewnątrz obszaru D.

Każdy szereg funkcyjny postaci (1), którego wyrazy są określone w obszarze D, posiada w myśl tej definicji określony czynnik zbieżności λ_D, który może być liczbą dodatnią, zerem lub nieskończonością. Przedmiotem tego komunikatu jest pytanie:

Jaki jest czynnik zbieżności λ_D szeregu (1), gdy szereg ten jest zbieżny w obszarze D?

Zauważmy najpierw, że $\lambda_D \geqq 1$, gdy szereg (1) jest jednostajnie zbieżny w obszarze D, co wynika wprost z określenia czynnika λ_D. Podobną własność posiada szereg (1) w przypadku zbieżności niejednostajnej, ale pod założeniem, że wyrazy tego szeregu są funkcjami mniej ogólnemi. W jednym z komunikatów, ogłoszonych gdzieindziej, [1]) zwróciłem uwagę na następującą własność szeregów wielomianów:

Jeżeli szereg wielomianów

$$(3) \qquad \sum_{0}^{\infty} P_n(z) = \sum_{0}^{\infty} (a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots + a_n^{(n)} z^n),$$

którego n-ty wyraz jest wielomianem co najwyżej n-go stopnia, jest zbieżny prawie wszędzie na okręgu pewnego koła $|z-a| = r$, [2]) to jego czynnik zbieżności wewnątrz tego koła jest nie mniejszy od jedności.

Wynika stąd bezpośrednio następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeśli szereg* (1) *jest zbieżny prawie wszędzie* [3]) *w obszarze D, a przytem $f_n(z)$ jest wielomianem stopnia $\leqq n$, to czynnik λ_D tego szeregu jest nie mniejszy od jedności.*

W przypadku jednak, gdy funkcje analityczne $f_n(x)$ są dowolne, a zbieżność szeregu (1) nie jest jednostajna, czynnik λ_D nie musi być $\geqq 1$. Nie mniej jednak i wówczas czynnik ten nie może być dowolny, można bowiem dowieść co następuje:

Twierdzenie 2. *Jeśli szereg* (1) *jest zbieżny prawie wszędzie w obszarze D* [4]), *to jego czynnik λ_D albo jest równy zeru, albo nie jest mniejszy od jedności.*

---

[1]) C. R. t. 193, 1931, p. 764—766.

[2]) Wystarczy założyć, że ciąg wyrazów szeregu (3) jest ograniczony prawie wszędzie na okręgu koła $|z-a| = r$.

[3]) Wystarczy, gdy do każdego punktu P obszaru D istnieje koło do którego wnętrza należy punkt P i na którego okręgu ciąg $\{f_n(z)\}$ jest prawie wszędzie ograniczony.

[4]) Wystarczy założyć, że w każdem otoczeniu dowolnego punktu P obszaru D istnieje koło, do którego wnętrza należy punkt P i na którego ogręgu ciąg wyrazów $\{f_n(z)\}$ szeregu (1) jest prawie wszędzie ograniczony.

Twierdzenie to jest uogólnieniem pewnego twierdzenia F. Hartogs'a [1]) które okazało się podstawowem dla teorji funkcyj analitycznych wielu zmiennych. Dowód podany przez Hartogs'a opiera się na pewnem twierdzeniu o istnieniu funkcyj harmonicznych. Można jednak wykazać, że twierdzenie 2 jest prostą konsekwencją twierdzenia 1, które daje się dowieść sposobem elementarnym.

Z twierdzenia 2-go wynika że, gdy szereg (1) jest zbieżny w obszarze D, a jego czynnik λ_D nie jest równy zeru, to musi on być nie mniejszy od jedności. Zachodzi pytanie, czy czynnik λ_D może być równy zeru?

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. F. Hartogs podał przykład szeregu funkcyj analitycznych $\sum f_n(z)$, zbieżnego w każdym punkcie obszaru D, przyczem szereg $\sum f_n(z) \cdot \varepsilon^n$ nie jest jednostajnie zbieżny przy żadnem $\varepsilon > 0$. Co więcej, można okazać że, gdy weźmiemy dowolny ciąg liczb dodatnich

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

malejący do zera dowolnie szybko, a więc gdy np. położymy

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n!} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_n = 1 : n^{n^n},$$

to do tego ciągu da się zbudować szereg wielomianów

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{k_n}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0^{(k_n)} + a_1^{(k_n)} z + \cdots + a_{k_n}^{(k_n)} \cdot z^{k_n}) \tag{4}$$

zbieżny do zera na całej płaszczyźnie i taki, że szereg

$$\sum_0^{\infty} P_n(z) \cdot \varepsilon_n$$

nie jest jednostajnie zbieżny w żadnem, dowolnie małem, otoczeniu punktu $z = 0$.

Oczywiście, ze względu na twierdzenie 1, stopnie k_n poszczególnych wyrazów szeregu (4) muszą róść dostatecznie szybko, gdy n rośnie nieograniczenie.

---

[1]) Math. Ann. t. 62, 1906, p. 9

W. Sierpiński.

O funkcjach, przybierających każdą swą wartość mniej niż $2^{\aleph_0}$ razy.

Komunikat, zgłoszony dnia 23 stycznia 1932 r.

Streszczenie.

Autor nazywa *funkcjami* χ funkcje zmiennej rzeczywistej, przybierające każdą swą wartość mniej niż continuum razy, i dowodzi równoważność następujących dwuch twierdzeń:

I. Funkcja χ z funkcji χ jest zawsze funkcją χ,

oraz:

II. Liczba kardynalna $2^{\aleph_0}$ nie jest sumą mniej niż $2^{\aleph_0}$ liczb kardynalnych, z których każda jest $< 2^{\aleph_0}$.

W. Sierpiński.

Sur les fonctions qui prennent chaque leur valeur moins que $2^{\aleph_0}$ fois.

Présenté dans la séance du 23 janvier 1932.

Une fonction $f(x)$ d'une variable réelle sera dite *fonction* χ, si, quel que soit le nombre réel a, l'ensemble de toutes les racines x de l'équation $f(x) = a$ est de puissance inférieure à celle du continu.

Dans l'état actuel de la science il est impossible de résoudre s'il est vrai ou non le théorème suivant:

I. *Une superposition de deux fonctions χ est une fonction χ.*

Nous prouverons que *la proposition* I *est équivalente à la propriété suivante du nombre cardinal* $2^{\aleph_0}$:

II. *Le nombre cardinal* $2^{\aleph_0}$ *n'est pas une somme de moins que* $2^{\aleph_0}$ *nombres cardinaux, dont chacun est* $< 2^{\aleph_0}$.

1. Admettons que la proposition I est fausse. Il existe donc deux fonctions χ, soient $f(x)$ et $g(x)$, telles que $f(g(x))$ n'est pas une fonction χ. Il en résulte qu'il existe un nombre réel a_0, tel que l'ensemble $E = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(g(x)) = a_0]$ a la puissance $2^{\aleph_0}$.

Soit G l'ensemble de toutes les valeurs que prend la fonction $g(x)$ pour $x \in E$. On voit sans peine que l'ensemble G est de puissance $< 2^{\aleph_0}$, puisque dans le cas contraire $f(x)$ ne pourrait être une fonction χ. Or, on a évidemment

(1) $$E = \sum_{a \in G} \underset{x}{\mathrm{E}}\,[g(x) = a].$$

L'ensemble de tous les termes de la série (1), en tant que G, est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ et chaque terme de la série (1) est aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$, $g(x)$ étant une fonction χ. L'ensemble E étant de puissance $2^{\aleph_0}$, la formule (1) donne une décomposition d'un ensemble de puissance du continu en moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles dont chacun est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. La proposition II n'est pas donc vraie.

2. Admettons que la proposition II n'est pas vraie. L'ensemble X de tous les nombres réels peut donc être décomposé en moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun est de puissance $< 2^{\aleph_0}$, soit

$$X = \sum_{a \in M} N_a,$$

où M est un ensemble de nombres réels de puissance $\overline{\overline{M}} < 2^{\aleph_0}$ et $\overline{\overline{N_a}} < 2^{\aleph_0}$ pour $a \in M$.

Posons $f(x) = 0$ pour $x \in M$ et $f(x) = x$ pour $x \in X - M$, et posons $g(x) = a$ pour $x \in N_a$ (pour a réels): on voit sans peine que $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions χ. Or, on a évidemment

$$f(g(x)) = 0$$

pour tous les x réels: $f(g(x))$ n'est pas donc une fonction χ, et la proposition I est fausse.

L'équivalence des propositions I et II est ainsi démontrée, c. q. f. d.

Posiedzenie

z dnia 13 lutego 1932 r.

W. Sierpiński.

O rozkładzie płaszczyzny na krzywe.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu w dniu 13 lutego 1932 r.

Streszczenie.

Autor nazywa *krzywą* zbiór wszystkich punktów płaszczyzny (x, y), spełniających równanie postaci $y = f(x)$, bądź też równanie postaci $x = f(y)$, gdzie f jest funkcją jednowartościową zmiennej rzeczywistej. Treścią komunikatu jest dowód następującego twierdzenia:

Na to, żeby płaszczyzna była sumą mniej niż $2^{\aleph_0}$ *krzywych, potrzeba i wystarcza, aby było* $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, *gdzie* α *jest liczbą porządkową pierwszego rodzaju.*

W. Sierpiński.

Sur la décomposition du plan en courbes.

Présenté dans la séance du 13 février 1932.

Dans ce qui suit nous appellerons *courbe* l'ensemble de tous les points (x, y) du plan qui satisfont à l'équation $y = f(x)$, ou bien à l'équation $x = f(y)$, où f est une fonction univoque d'une variable réelle.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Pour que le plan soit une somme de moins que* $2^{\aleph_0}$ *courbes, il faut et il suffit qu'on ait* $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, *où* α *est un nombre ordinal de première espèce.*

Nous démontrerons d'abord ce

Lemme: *Le plan est une somme de deux ensembles, dont un est de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ *sur toute droite parallèle à l'axe* *d'ordonnées et l'autre est de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ *sur toute droite parallèle à l'axe d'abscisses.*

D é m o n s t r a t i o n. Du théorème de M. Z e r m e l o résulte qu'il existe une suite transfinie

$$(1) \qquad t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots, t_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \varphi)$$

formée de tous les nombres réels, et nous pouvons supposer que le type φ de cette suite est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu.

Soit P l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, et désignons par A l'ensemble de tous les points (t_α, t_β), où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$, et posons $B = P - A$.

Soit a un nombre réel donné: c'est donc un terme de la suite (1), p. ex. $a = t_\alpha$, où α est un nombre ordinal $< \varphi$. Les points de l'ensemble A, dont l'abscisse x est $= a$ sont des points (t_α, t_β), où $\beta \leqslant \alpha$; α étant $< \varphi$, on a $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$ et il en résulte que la droite $x = a$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de A.

Or, soit b un nombre réel donné, p. ex. $b = t_\beta$.

Les points de $B = P - A$ à l'ordonnée $y = b$ sont, comme on voit sans peine, des points (t_α, t_β), où $\alpha < \beta$; d'après $\beta < \varphi$ on a $\overline{\beta} < 2^{\aleph_0}$ et on en conclut que la droite $y = b$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de B.

Notre lemme est ainsi démontré.

Il est à remarquer que l'ensemble B établit un bon ordre dans le continu [1]). On dit qu'un ensemble plan Q établit un ordre d'un ensemble linéaire ordonné E, si $(x, y) \in Q$ dans ce et seulement dans ce cas, où $x \in E$, $y \in E$ et $x < y$ dans E. D'après une remarque de M. L i n d e n b a u m, tout ensemble plan établissant dans le continu un bon ordre du plus petit type ordinal possible est non mesurable superficiellement.

Il est à remarquer que d'une façon tout à fait analogue comme notre lemme on démontre la proposition suivante:

L'espace à trois dimensions est une somme de trois ensembles dont le premier, resp. le deuxième, resp. le troisième est de puissance inférieure à celle du continu sur chaque plan parallèle au plan XOY, resp. XOZ resp. YOZ.

---

[1]) Cette remarque est due à M. A. T a r s k i.

En désignant par Q l'ensemble de tous les points de l'espace à 3 dimensions, il faudrait désigner par A, resp. B, resp. C l'ensemble de tous les points $(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma)$ de Q, où $\alpha \leqslant \gamma < \varphi$ et $\beta \leqslant \gamma$, resp. où $\alpha \leqslant \beta < \varphi$ et $\gamma \leqslant \beta$, resp. où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ et $\gamma \leqslant \alpha$.

On voit sans peine que $Q = A + B + C$ est une décomposition qui satisfait aux conditions de notre proposition.

Il est à remarquer que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on obtient de notre lemme la proposition que j'ai démontré en 1919 [1]). (Cette proposition est même équivalente à l'hypothèse du continu).

En quelque rapport avec notre lemme est le problème suivant:

Peut on décomposer le plan en deux ensembles, dont un est de mesure nulle sur toute droite, parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est de mesure nulle sur toute droite, parallèle à l'axe d'abscisses?

Il résulte tout de suite de notre lemme que la réponse y est affirmative si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Or, nous ne savons pas résoudre ce problème sans admettre l'hypothèse du continu.

Supposons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, où α est un nombre ordinal de première espèce, donc $\alpha = \beta + 1$. D'après notre lemme le plan P est une somme de deux ensembles, $P = A + B$, où nous pouvons évidemment supposer que A, resp. B, est de puissance $\aleph_\beta$ sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées, resp. d'abscisses. L'ensemble A, resp. B, est donc une somme de $\aleph_\beta$ ensembles dont chacun a un et un seul point sur chaque droite parallèle à l'axe d'ordonnées, resp. d'abscisses. Chacun de ces $\aleph_\beta + \aleph_\beta = \aleph_\beta$ ensembles est donc une courbe. Le plan P est donc une somme de $\aleph_\beta < \aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ courbes. La condition de notre théorème est donc suffisante.

Il en résulte que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *le plan est une somme d'une infinité dénombrable de courbes,* ce qui était déduit de ma proposition citée du 1919 par M. N. Lusin [2]).

Supposons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, où α est un nombre ordinal de seconde espèce, et supposons que le plan P est une somme S de $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ courbes. Le nombre ordinal α étant de seconde espèce, il résulte des formules $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\aleph_0}$. Soit T un ensemble formé de $\mathfrak{n}$ parallèles à l'axe d'ordonnées. Soit A, resp. B l'en-

---

[1]) *Bull. Acad. Cracovie*, note du 24 février 1919; aussi: *Fundamenta Mathematicae* t. V, p. 179.

[2]) Cf. mon livre *Zarys Teorji Mnogości* Cz. I (en polonais), Warszawa 1928, p. 229.

semble-somme de toutes les courbes de la forme $y=f(x)$ (resp. $x=f(y)$) constituant la somme S: on a donc $P=A+B$.

Toute courbe de la forme $y=f(x)$ ayant un seul point sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées, l'ensemble TA est évidemment de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$, donc aussi la projection de TA sur l'axe d'ordonnées est de puissance $\leqslant \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, d'où résulte qu'il existe une droite D parallèle à l'axe d'abscisses qui n'a aucun point commun avec l'ensemble TA. D'après $P=A+B$ on en conclut que $DT \subset B$. Or, c'est impossible, puisque l'ensemble B est formé de $\leqslant \mathfrak{m}$ courbes de la forme $x=f(y)$, et la droite D rencontre évidemment l'ensemble T en $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ points. La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Notre théorème est ainsi démontré.

Alfred Tarski.

O własnościach geometrycznych miary Banacha.

Przedstawił W. Sierpiński dnia 13 lutego 1932 r.

Sur les propriétés géometriques de la mesure de Banach.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 23 février 1932.

Streszczenie.

W swej pracy „Sur le problème de la mesure" [1]) p. Banach rozwiązał pozytywnie szersze zagadnienie miary dla zbiorów linjowych i płaskich. Metoda konstrukcji p. Banacha nie jest oparta na pojęciach, posiadających wyraźną treść geometryczną, i nie przypomina w niczem metod postępowania, stosowanych w innych konstrukcjach z tego zakresu (np. w teorji miary Peano-Jordana lub Lebesgue'a). W artykule swym autor szkicuje plan pewnej rekonstrukcji wyników p. Banacha, wychodząc z pojęć o wyraźnej treści geometrycznej; dzięki tej rekonstrukcji teorja miary p. Banacha staje się naturalnem uogólnieniem i rozwinięciem teorji miary Peano-Jordana. Przy sposobności autor definjuje klasę zbiorów bezwzględnie mierzalnych (t. j. takich, że przy każdem określeniu miary mają tę samą miarę) i ustala pewne własności tej klasy.

---

[1]) Fund. Math. IV, str. 7.

L. Szperl i Wł. Wiorogórski.

O aldehydzie selenobenzoesowym.

Przedstawił L. Szperl dnia 13 lutego 1932 r.

Sur l'aldehyde sélénobenzoique.

Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 13 février 1932.

Streszczenie.

W toku naszych prac nad działaniem selenowodoru na chlorek benzoylu przerobiliśmy pewne doświadczenie, chcąc uzyskać dwuselenobenzoesan benzylidenu, zamiast niego jednak wytworzył się związek, który na podstawie analiz i pomiarów wielkości cząsteczki, zdefinjowaliśmy jako trójmeryczny aldehyd selenobenzoesowy. Jednakże substancja nasza, zgodna w swych innych cechach z własnościami jednej z odmian aldehydu selenobenzoesowego, opisanych przez Vanino i Schinnera (Journal für praktische Chemie 91, 124; 1915), różniła się od niego znacznie pod względem temperatury topnienia. Wobec powyższego powtórzyliśmy, zachowując dokładnie warunki, próby, wykonane przez wyżej zaznaczonych badaczy. Rezultaty pracy naszej są następujące: 1) Aldehydu, nazwanego przez Vanino i Schinnera α selenobenzoesowym o temp. top. 83—84^0 i uważanego przez nich za monomer, nie znaleźliśmy; natomiast otrzymaliśmy produkt zupełnie do opisanego podobny, lecz o temp. top. 92—93^0, który okazał się aldehydem dwucząsteczkowym, być może analogicznym do benzoiny. 2) Aldehyd monomeryczny, notowany w pracy Granville'a (Berichte d. deutsch. chem. Gesel. 8, 1165; 1875), jako związek, topniejący w temp. 70^0, znajduje się, być może, w ciekłych, nie krystalizujących produktach reakcji, z których nie mogliśmy wyodrębnić żadnego indywiduum. 3) Otrzymaliśmy substancję identyczną z produktem, zaznaczonym na początku niniejszego referatu; różni się ona od aldehydu selenobenzoesowego, oznaczonego przez Vanino i Schinnera literą β, swą temperaturą topnienia, gdyż zarówno krystalizowana z benzenu, jak i pozbawiona przez ogrzewanie w temp. 105^0, swej jednej cząsteczki benzenu krystalizacyjnego, topnieje z jednoczesnym rozkładem w temp. 189—193^0. Przypuszczenie wyżej zaznaczonych badaczy, nie poparte przez nich doświadczeniem, że jest to odmiana trójmeryczna, zostało stwierdzone drogą oznaczenia ciężaru cząsteczkowego. 4) Obecności produktu o temp. top. 166^0, oznaczonego mianem aldehydu γ selenobenzoesowego, nie skonstatowaliśmy zupełnie.

Praca będzie drukowana in extenso w „Rocznikach Chemji".

Tadeusz W. Jezierski.

Tioindygo z acetofenonu.

Przedstawił L. Szperl na posiedzeniu w dniu 13 lutego 1932 r.

Sur le thioindigo préparé de l'acétophénone.

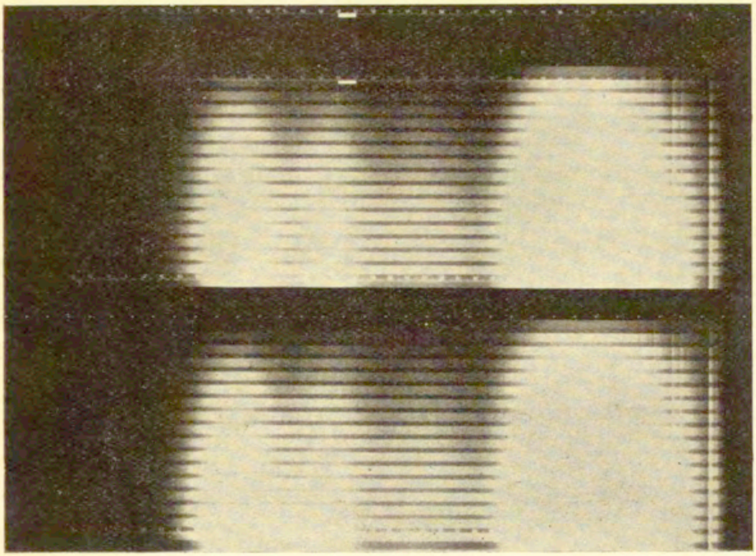
Mémoire présenté par M. L. Szperl à la séance du 13 février 1932.

Streszczenie.

Działając siarką na acetofenon w temperaturze wrzenia roztworu, otrzymałem, prócz $\alpha\beta$-dwubenzoiloetanu [1]), niewielkie ilości produktu usiarczonego, krystalicznego, barwy ciemno-czerwonej, który okazał się tioindygiem. Badania tego produktu prowadzono porównawczo z tioindygiem wyrobu Bad. Fabr. Anil. i Sody i stwierdzono dla obu materjałów następujące identyczne własności: temperatura topnienia (oznaczenia w zatopionej rurce) rozpoczyna się od 354^0; łatwiejsza rozpuszczalność jedynie w chloroformie i ksylenie, przyczem czerwono zabarwione roztwory ksylenowe posiadają żółtą fluorescencję; zielono-niebieskawa barwa roztworu w stęż. kwasie siarkowym i, co najważniejsze, roztwory ksylenowe, badane spektrofotometrycznie, dają identyczne widmo chłonienia.

---

[1]) T. W. Jezierski, Roczn. Chemji, 10, 392 (1930).



I.

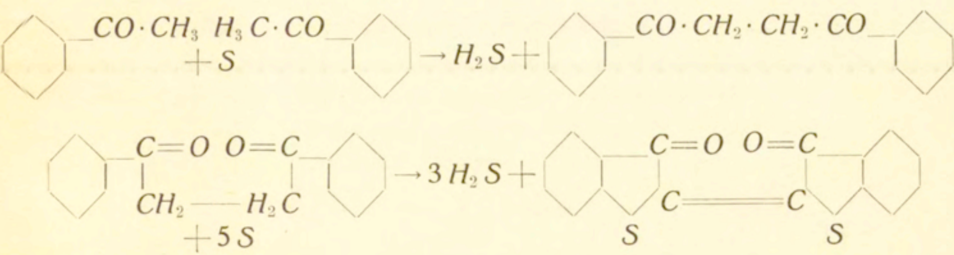
II.

Rys. 1.

Zdjęcia spektrofotometryczne roztworów ksylenowych:

I. Produktu otrzymanego przez działanie siarki na acetofenon.
II. Tioindyga z Bad. Fabr. Anil. i Sody.

Należy przypuszczać, że reakcja pomiędzy siarką i acetofenonem przebiega w poniższy sposób:



L. Kantorovitch i E. Livenson.

O dwóch klasach operacyj na zbiorach zamkniętych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 13 lutego 1932 r.

Streszczenie.

Zbiór wszystkich rodzin $\Phi^P(F)$, otrzymanych z rodziny wszystkich zbiorów zamkniętych płaskich przy pomocy operacyj Φ^P prof. Sierpińskiego[1]) pokrywa się ze zbiorem wszystkich rodzin $H^{\Psi}(F)$, otrzymanych z rodziny wszystkich zbiorów zamkniętych linjowych przy pomocy operacyj analitycznych Ψ, wprowadzonych przez autorów[4]).

L. Kantorovitch et E. Livenson.

Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 13 février 1932.

M. Sierpiński[1]) a defini une opération sur les ensembles plans fermés comme il suit:

Soit E un ensemble plan fermé et P une propriété des ensembles linéaires fermés. Désignons par $\Gamma_P(E)$ l'ensemble linéaire de tous les points $x \in X$[2]), tels que l'ensemble

$$\overset{x}{E} = \underset{y}{\mathcal{E}}[(x, y) \in E] j P; \text{ [3])} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

c.-à-d.

$$\Gamma_P(E) = \underset{x}{\mathcal{E}}(\overset{x}{E} j P) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Soit $\Phi^P(\mathfrak{F})$ la classe des ensembles $\Gamma_P(E)$ pour tous les ensembles E plans fermés. Désignons la famille de toutes les classes $\Phi^P(\mathfrak{F})$ par W.

D'autre part nous avons défini une certaine classe des opérations sur les ensembles — *opérations analytiques*[4]). Ces

---

[1]) W. Sierpiński. Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans. Comptes rendus des seances de la Soc. des Sciences de Varsovie XXIV, p. 57.

[2]) X désigne la droite infinie (l'ensemble de tous les nombres réels).

[3]) $E j P$ désigne, que l'ensemble E jouit de la propriété P.

[4]) C. R. t. 191 p. 352 n. 7 et „Mémoire on the analytical operations and projective sets". Fund. Math. t. XVIII, p. 224.

sont des operations $\Psi^{\cdot}$ dont la valeur et les arguments sont les ensembles, et qui possèdent la propriété suivant: si pour chaque paire d'éléments a, b on a simultanément (quel que soit n)

$$a \in E_n \quad \text{et} \quad b \in E_n^{(1)}$$

ou

$$a \text{ non} \in E_n \quad \text{et} \quad b \text{ non} \in E_n^{(1)}$$

alors on a:

$$a \in \Psi^{\cdot}(\{E_n\}) \quad \text{et} \quad b \in \Psi^{\cdot}(\{E_n^{(1)}\})$$

ou

$$a \text{ non} \in \Psi^{\cdot}(\{E_n\}) \quad \text{et} \quad b \text{ non} \in \Psi^{\cdot}(\{E_n^{(1)}\}).$$

Désignons par $\mathfrak{K}^{\Psi^{\cdot}}(\mathfrak{F})$ la classe correspondante à l'opération $\Psi^{\cdot}$, c'est-à-dire la classe de tous les ensembles $\Psi^{\cdot}(\{E_n\})$, où E_n sont fermés. La famille de toutes les classes $\mathfrak{K}^{\Psi^{\cdot}}(\mathfrak{F})$ (pour tous les $\Psi^{\cdot}$ possibles) nous désignerons par W'. Le résultat principal de cette note est le suivant

Théorème I. *Les familles W et W' sont identiques.*

D é m o n s t r a t i o n. A. $W \subset W'$. Soit donnée une propriété P. Nous devons démontrer que la classe $\Phi^P(\mathfrak{F})$ est une certaine $\mathfrak{K}^{\Psi^{\cdot}}(\mathfrak{F})$ — classe. Définissons l'opération analytique

$$\Psi^{\cdot}(\{E_{n;\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}\}); \qquad \nu_i = 0, 1; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sur les système $\{E_{n;\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}\}$ comme il suit: Soit x un nombre réel. Construisons l'ensemble T_x des nombres y pour lesquels il existe un dévelopement en fraction dyadique

$$y = n + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_2}{2^2} + \dots = n + 0, \nu_1 \nu_2 \dots, \quad . \quad . \quad . \quad (2^1)$$

tel que

$$x \in \prod_{i=1}^{\infty} E_{n;\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_i}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^{11})$$

Il est évident que l'ensemble T_x est fermé.

Posons maintenant

$$\Psi^{\cdot}(\{E_{n;\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}\}) = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(T_x\, j\, P). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

L'opération ainsi definie est analytique (cela résulte de la définition même de l'ensemble T_x). Nous démontrerons que

$$\Phi^P(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}^{\Psi^{\cdot}}(\mathfrak{F}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

a) $\Phi^P(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{H}^{\Psi}(\mathfrak{F})$.

Soit $L \in \Phi^P(\mathfrak{F})$ c.-à-d.

$$L = \Gamma_P(E), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où E est un ensemble plans fermé. Designons par

$$\Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$$

l'intervalle fermé

$$[n + 0, \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k 000 \ldots; \quad n + 0, \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k 111 \ldots]$$

et posons

$$\tilde{\Delta}_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} = X \times \Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} = \mathop{\mathcal{E}}_{x,\, y}(x \in X,\ y \in \Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}) \quad . \quad . \quad (6)$$

et

$$F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} = Pr.(E \cdot \tilde{\Delta}_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}) = \sum_y \mathop{\mathcal{E}}_x((x, y) \in E \cdot \tilde{\Delta}_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}) \quad (7)$$

Il est évident que les ensembles $F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$ sont fermés. Nous établirons que

$$M \overset{df.}{=} \Psi(\{F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}\}) = L. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dans ce but nous montrerons que

$$T_x = \overset{x}{E}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Soit $y \in T_x$; alors on peut représenter y dans la forme (2^1) $y = n + 0, \nu_1 \nu_2 \ldots$ en sorte que

$$x \in \prod_{i=1}^{\infty} F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

c.-à-d. on peut choisir, d'après (7) et (10), une suite des nombres $y_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$, pour laquelle

$$(x;\ y_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}) \in E.$$

Comme (x, y) est un point d'accumulation des points $(x, y_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k})$ et l'ensemble E est fermé, on a

$$(x, y) \in E$$

et par définition de $\overset{x}{E}$ [v. (1)],

$$y \in \overset{x}{E}; \ \overset{x}{E} \supset T_x.$$

Soit inversement $y \in \overset{x}{E}$. Alors $(x, y) \in E$ et, si

$$y = n + 0, \nu_1 \nu_2 \ldots$$

nous avons pour tout k naturel

$$x \in F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$$

et par définition de T_x

$$y \in T_x .$$

La formule (9) est donc établie. Mais on peut représenter les ensembles M et L [cf. (2), (5), (3), (8)] dans la forme

$$L = \underset{x}{\mathcal{E}}(\overset{x}{E}\, j\, P); \quad M = \underset{x}{\mathcal{E}}(T_x\, j\, P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

en sorte que d'après (9) nous aurons $L = M$, c. q. f. d.

b) $\mathfrak{M}^{\Psi}(\mathfrak{F}) \subset \Phi^{P}(\mathfrak{F})$.

Soit

$$M = \Psi(\{F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}\}) \in \mathfrak{M}^{\Psi}(\mathfrak{F}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

où $F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$ sont les ensembles fermés.

Nous pouvons supposer que le système $\{F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}\}$ est régulier, c.-à-d. que

$$F_{n;\, \nu_1} \supset F_{n;\, \nu_1, \nu_2} \supset \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

quels que soient n, ν_1, ν_2, ...

Posons maintenant

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} \times \Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} \quad . \quad . \quad (14)$$

où

$$F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k} \times \Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_k} = \underset{x, y}{\mathcal{E}}\,(x \in F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k},\ y \in \Delta_{n;\, \nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_k}).$$

Il est évident que l'ensemble E est fermé. Nous montrerons que

$$L \overset{def.}{=\!=} \Gamma_P(E) = M .$$

Nous savons déjà (v. (11)) qu'il suffit établir que

$$T_x = \overset{x}{E}.$$

Soit

$$y = n + 0, \nu_1 \nu_2 \ldots \in T_x$$

alors

$$x \in \prod_{k} F_{n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$$

et d'après (14)
$$(x, y) \in E \quad \text{c.-à-d.} \quad y \in \overset{x}{E}.$$

Soit d'autre part $y \in \overset{x}{E}$, alors $(x, y) \in E$. Le nombre y peut être développé en fraction dyadique de deux manières au plus
$$y = n' + 0, \nu_1' \nu_2' \ldots; \quad y = n'' + 0, \nu_1'' \nu_2'' \ldots.$$

Il résulte de la définition de l'ensemble E (14) que, pour tous les k, x appartient a un des ensembles
$$F_{n'; \nu_1' \nu_2' \ldots, \nu_k'}; \quad F_{n''; \nu_1'' \nu_2'' \ldots, \nu_k''}$$
au moins. Un de ces deux cas ($x \in F_{n'; \nu_1', \nu_2' \ldots, \nu_k'}$ et $x \in F_{n''; \nu_1'', \ldots, \nu_k''}$) se présentera pour une infinité de valeurs de k et par conséquent, vu la régularité du système $\{F_{n; \nu_1, \nu_2, \nu \ldots, \nu_k}\}$ *pour tous les k.* Soit p. e.
$$x \in \prod_k F_{n'; \nu_1', \nu_2', \ldots, \nu_k'}.$$

Alors, d'après la définition de T_x
$$y = n' + 0, \nu_1' \nu_2' \ldots \in T_x.$$

Donc, $\overset{x}{E} = T_x$ d'où $M = L$, c. q. f. d.

B. $W' \subset W$. Soit donnée une opération analytique $\Psi(\{E_n\})$. Il faut définir une propriété P, telle que
$$\mathfrak{H}^{\Psi}(\mathfrak{F}) = \Phi^{P}(\mathfrak{F}) \text{ [1]}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nous dirons qu'un ensemble $\mathfrak{m} = \{n\}$ des nombres naturels est une *chaîne déterminante,* si quelque soit la suite d'ensembles E_n, les relations $x \in E_n$ pour tous les $n \in \mathfrak{m}$ et x non $\in E_n$ pour tous les n non $\in \mathfrak{m}$ entrainent la relation
$$x \in \Psi(\{E_n\}).$$

Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les chaînes determinantes $\mathfrak{m}$.

L'ensemble $\mathfrak{M}$ détermine complètement l'opération $\Psi(\{E_n\})$ parce que
$$\Psi(\{E_n\}) = \underset{x}{\mathcal{E}} [\underset{n}{\mathcal{E}} (x \in E_n) \in \mathfrak{M}] = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \left(\prod_{n \in \mathfrak{m}} E_n \cdot \prod_{n \text{ non} \in \mathfrak{m}} CE_n \right) \ldots (16)$$

---

[1]) L'existence de cette propriété dans le cas où Ψ est l'opération de M. Hausdorff a été démontrée par M. Sierpiński l. c. p. 74.

Nous dirons maintenant qu'un ensemble fermé linéaire F jouit de la propriété P, si l'ensemble de tous les nombres n tels, que

$$\frac{1}{n} \in F$$

est une chaîne déterminante de l'opération Ψ.

Démontrons la relation (15). Pour cela il suffit établir que

$$\Gamma_P(E) = \Psi_n(\{E_{\frac{1}{n}}\})\ ^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

quel que soit l'ensemble F. Or d'après (16) et (2)

$$\Psi_n(\{E_{\frac{1}{n}}\}) = \mathcal{E}_x[\mathcal{E}_n(x \in E_{\frac{1}{n}}) \in \mathfrak{M}] = \mathcal{E}_x\left\{\mathcal{E}_n\left[\left(x, \frac{1}{n}\right) \in E\right] \in \mathfrak{M}\right\} =$$

$$= \mathcal{E}_x\left\{\mathcal{E}_n\left[\frac{1}{n} \in \overset{x}{E}\right] \in \mathfrak{M}\right\} = \mathcal{E}_x(\overset{x}{E} j P) = \Gamma_P(E).$$

Soit maintenant

$$H \in \Phi^P(\mathfrak{F})$$

c.-à-d. $H = \Gamma_P(E)$; où E est un ensemble fermé plan. Posons

$$E_n = E_{\frac{1}{n}}.$$

D'après (17), nous aurons

$$H = \Psi(\{E_n\}) \in \mathfrak{K}^{\Psi}(\mathfrak{F}),$$

d'où

$$\Phi^P(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{K}^{\Psi}(\mathfrak{F}).$$

Soit d'autre part,

$$H \in \mathfrak{K}^{\Psi}(\mathfrak{F});\ H = \Psi(\{E_n\})$$

où E_n sont des ensembles linéaires fermés.

Posons

$$E = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{x,y}\left(x \in E_n;\ y = \frac{1}{n}\right)}.$$

Nous aurons en vertu de (17)

$$H = \Gamma_P(E) \in \Phi^P(\mathfrak{F})$$

---

1) E_y désigne l'ensemble $\mathcal{E}_x[(x, y) \in E]$.

d'où

$$\mathfrak{H}^{\Psi}(\mathfrak{F}) \subset \Phi^{P}(\mathfrak{F})$$

et

$$\mathfrak{H}^{\Psi}(\mathfrak{F}) = \Phi^{P}(\mathfrak{F}).$$

Une opération analytique $\Psi(\{E_n\})$ est appelée positive, si elle possède la propriété suivante: quelle que soit la chaîne déterminante $\mathfrak{m}$ de cette opération, c.-à-d. $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, et quel que soit l'ensemble $\mathfrak{m}' = \{n'\}$ des nombres naturels, tel que $\mathfrak{m}' \supset \mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m}' \in \mathfrak{M}$ [1]). Nous avons démontré dans notre Mémoire cité que la classe des opérations analytiques positives coïncide avec la classe des opérations de M. Hausdorff.

Nous dirons que la propriété P des ensembles est positive, si un ensemble E jouissant de propriété P il en est ainsi pour chaque ensemble contenant E. Alors il suit de la démonstration du théorème I la proposition suivante:

Théorème II. *La famille de classes* $\mathfrak{H}^{\Psi}(\mathfrak{F})\,[\mathfrak{H}_N(\mathfrak{F})]$ *où* Ψ *est une opération analytique positive, coïncident avec la famille de classes* $\Phi^{P}(\mathfrak{F})$ *où* P *est une propriété positive.*

Leningrad (U. R. S. S.).

---

[1]) Cette définition ne diffère que par la forme de définition de l'opération analytique positive que nous avons donné dans notre Mémoire cité, déf. 2 p 225.

Posiedzenie

z dnia 12 marca 1932 r.

R. Kozłowski, S. Jaskólski i A. Łaszkiewicz.

Złoża srebrowo-cynowe Oruro w Boliwji.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 12 marca 1932 r.

Praca wyszła w Archiwum Mineralogicznem Tow. Nauk. Warsz. T. VIII. 1932.

Les gisements argento-stannifères d'Oruro en Bolivie.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 12 mars 1932.

Ce travail vient de paraître dans „Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie". Vol. VIII. 1932.

St. J. Thugutt.

O rozpuszczalności kruszcu cynowego w wodzie przekroplonej.

Komunikat zgłoszony dn. 12 marca 1932 r.

Praca wyszła w Archiwum Mineralogicznem Tow. Nauk. Warsz. T. VIII. 1932.

Sur la solubilité de la cassitérite dans l'eau distillée.

Mémoire présenté dans la séance du 12 mars 1932.

Ce travail vient de paraître dans „Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie". Vol. VIII. 1932.

Posiedzenie

z dnia 30 kwietnia 1932 r.

Streszczenia prac wykonanych w pracowni radjologicznej imienia ś. p. Mirosława Kernbauma Warszawskiego Towarzystwa Naukowego w r. ak. 1930/1931.

Przedstawił S. Pieńkowski dn. 30 kwietnia 1932 r.

Résumés des travaux éxécutés dans le Laboratoire radiologique Mirosław Kernbaum de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie en 1930/1931.

Présentés par M. S. Pieńkowski dans la séance du 30 avril 1932.

1.

Oskar Stelman.

O przypadku szczególnym adsorpcji nieodwracalnej.

Sur un cas particulier d'absorption irréversible.

L. Wertenstein zauważył w r. 1927, w toku pracy nad otrzymywaniem czystego radonu, że adsorpcja CO_2 na szkle nie posiada charakteru adsorpcji typu Langmuirowskiego, t. j. że nie charakteryzuje się szybkiem ustalaniem się równowagi między fazą gazową a fazą adsorbowaną i całkowitą odwracalnością przebiegu adsorpcji, lecz posiada przebieg nieodwracalny. Szkło, które pozostawało w ciągu krótkiego nawet czasu w zetknięciu z CO_2 pod ciśnieniem rzędu 1 mm Hg, adsorbuje znaczne ilości tego gazu, które wydziela następnie bardzo powoli i niecałkowicie. Ponieważ doświadczenia Wertensteina stanowiły tylko epizod w pracy, poświęconej innemu zagadnieniu i nie były wykonane w warunkach poprawnych ze względu na wymagania nowoczesnej techniki próżniowej, przeto autor podjął się przestudjowania wspomnianego efektu. Aparatura składała się: a) z adsorbenta w postaci znacznej liczby rurek szklanych, b) manometru do wyznaczania ilości wydzielanego przez szkło CO_2, c) urządzenia do nasycania adsorbenta czystym CO_2. Zarówno adsorbent, jak i manometr mogły być pozbawione uprzednio gazów przez wyprażanie w próżni w wysokiej temperaturze. Jako manometr zastosowano miarkę Piraniego. Badano ilość gazu wydzielonego przez szkło, które było nasycane bezwodnikiem węglowym, w funkcji ciśnienia CO_2 w fazie nasycania oraz czasu, w ciągu którego trwało nasycanie. Wyniki są następujące: 1) Potwierdza się słuszność spostrzeżenia dokonanego przez Wertensteina. 2) Ilość gazu wydzielonego zależy od ciśnienia, pod którem nasyca się adsorbent. Ilość ta wzrasta wraz z ciśnieniem, jednak dąży do granicy, gdy ciśnienie wzrasta powyżej 20 mm *Hg*. Ilość maksymalna, jeżeli tworzy warstwę monomolekularną, zakrywa około 8.10^{-3} całkowitej powierzchni szkła. 3) Gdy ciśnienie gazu nasycającego jest małe, ilość gazu wydzielonego wzrasta wraz z czasem nasycania, natomiast gdy ciśnienie jest znaczne, ilość ta nie zależy od czasu nasycania. 4) Badanie procesu wydzielania w funkcji czasu dowodzi, że przebieg zjawiska jest nieodwracalny.

2.

Chaim Rajfeld.

Odpowiednik krzywej Bragga w zjawisku świecenia *ZnS* i powietrza pod wpływem promieni α.

Analogie de la courbe de Bragg dans la luminescence *ZnS* et de l'air sous l'action des rayons α.

Jak wiadomo, zdolność jonizacyjna cząstek α wzrasta do pewnego maximum, gdy prędkość cząstek zmniejsza się w przejściu przez materję, poczem szybko spada do zera w okolicy końca zasięgu cząstek α. Ponieważ zdolność cząstek α wywoływania fosforescencji w ciałach stałych i gazach stoi w niewątpliwym związku z ich zdolnością jonizacyjną, przeto należy spodziewać się, że natężenie fosforescencji, wywołanej przez cząstki α na jednostce drogi, zależy od prędkości cząsteczek w podobny sposób, jak zdolność jonizacyjna, t. j. że zależność ta daje się przedstawić krzywą podobną do t. zw. krzywej Bragga. Przypuszczenie to zostało potwierdzone przez p. Karlik w przypadku świecenia różnych odmian *ZnS* pod wpływem cząstek α. Ponieważ p. Karlik badała natężenia świecenia subjektywną metodą fotometryczną, przeto wydawało się rzeczą celową zastosować tu metodę bardziej objektywną, opartą na fotometrowaniu klisz, zaczernianych świeceniem siarczku cynku. Doświadczenia polegały na sporządzeniu szeregu zdjęć świecenia cienkich warstw *ZnS* pod wpływem promieni α polonu, których prędkość modyfikowano przez absorpcję w powietrzu lub cienkich blaszkach glinowych. Ponieważ zasięg promieni α polonu w *ZnS* wynosi zaledwie 20 μ, przeto dla otrzymania wyraźnych wyników było konieczne sporządzać warstwy *ZnS* grubości rzędu kilku mikronów. Rozcieranie kryształów *ZnS* w moździerzu agatowym nie prowadziło do celu, natomiast skutecznem okazało się centryfugowanie roztartego starannie *ZnS* i osadzanie pozostałej po odwirowaniu zawiesiny na szkiełku. Doświadczenia z takiemi warstwami pozwoliły otrzymać krzywe analogiczne do krzywej Bragga. Świecenie użytych w tych doświadczeniach drobnych kryształów było tak słabe, że doświadczenia należało wykonywać w próżni, gdyż świecenie powietrza było tego samego rzędu wielkości. W innych doświadczeniach usunięto siarczek cynku i badano samo świecenie powietrza w zależności od prędkości cząstek α. Otrzymana zależność daje się również przedstawić zapomocą krzywej podobnej do krzywej Bragga.

3.

Henryk Jędrzejowski.

Ruchliwość atomów promieniotwórczych na powierzchniach ciał stałych.

Mobilité des atomes radioactifs sur les solides.

Jak wiadomo, adsorbowane atomy i cząsteczki niektórych substancyj wykazują na powierzchni adsorbenta ruchliwość, którą należy przypisać ich ruchom cieplnym. Ruchliwość ta prowadzi do przesuwania się warstw adsorpcyjnych wtedy tylko, kiedy energja sił adsorpcyjnych nie jest wielka wobec energji cieplnej. Osady atomów promieniotwórczych na powierzchniach ciał stałych traktować możemy, jako warstwy adsorpcyjne. Jeżeli osad otrzymany został przez destylację, istnieją dane, przemawiające za tem, że warstwa taka jest monomolekularna. Autor destylował polon na blaszkę platynową, dzięki użyciu odpowiednich diafragm, nalot miał postać kółka o wyraźnych brzegach, średnicy 5 mm. Nakładając blaszkę na kliszę fotograficzną, otrzymywano obraz powierzchni, pokrytej polonem. W temperaturze pokojowej obraz zachowywał w ciągu dłuższego czasu kształt niezmienny. Autor poddawał blaszkę ogrzewaniu w ciągu 3 godz. w piecu elektrycznym i badał wspomnianą metodą fotograficzną zmiany postaci nalotu, wynikłe z ogrzania do różnych temperatur. Rozszerzenie krążków daje się zauważyć, począwszy od temperatury 748^0 K i rośnie szybko z temperaturą, jak widać z następującej tabelki:

d	0,01	0,03	0,27	1,1
T	748	823	873	898
D	$1,10^{-6}$	$1,8.10^{-5}$	$1,5.10^{-3}$	$2,4.10^{-2}$.

d oznacza powiększenie średnicy w milimetrach, T — temperaturę na skali bezwzględnej. Liczby w trzecim wierszu są współczynnikami dyfuzji dwuwymiarowej, wyliczonemi w założeniu, że teorja dyfuzji stosuje się do ruchów atomów na powierzchni. Teorja przewiduje mianowicie, że kwadrat przesunięcia brzegu kółka powinien być proporcjonalny do czasu ogrzewania i do współczynnika dyfuzji. W celu sprawdzenia tego wymagania teorji, poddano jedną z aktywowanych blaszek ogrzewaniu do temperatury 873^0 K, w ciągu 1 godziny, inną, identyczną, w ciągu czterech godzin. Blaszka prażona cztery razy dłużej wykazała rozszerzenie dwa razy większe.

Jak tego należało oczekiwać, zjawisko zależy w wysokim stopniu od natury podłoża. Blaszki z miki tracą podczas ogrzewania polon przez parowanie, blaszki złote wykazują rozszerzenie bardzo nieznaczne. Najwidoczniej w przypadku miki siły adsorpcyjne są zbyt małe, w przypadku złota zbyt wielkie, by zjawisko ruchliwości uwydatniło się w sposób wyraźny.

4.

Henryk Herszfinkiel.

O emisji elektronowej metali pod wpływem twardych promieni γ.

Sur l'émission des électrons par les métaux sous l'action de rayons γ durs.

Współczynnik absorpcji twardych promieni γ, odniesiony do jednego elektronu pierwiastka absorbującego, wzrasta wraz z liczbą porządkową tego pierwiastka, co stoi w sprzeczności z przyjętą powszechnie teorją Klein-Nishiny i prowadzi do wniosku, że oprócz elektronów pozajądrowych, również i samo jądro bierze udział w pochłanianiu promieni γ. Zachodzi pytanie, czy wielkość emisji elektronowej różnych pierwiastków pod wpływem promieni γ zależy od liczby porządkowej w ten sam sposób, co współczynnik absorpcji σ_e, a w szczególności, czy liczba elektronów σ_e' wyrzuconych przez jeden kwant promieni γ danego typu, odniesiona do jednego elektronu pierwiastka pochłaniającego, również wzrasta razem z liczbą porządkową. Gdyby tak było, świadczyłoby to o istnieniu emisji elektronowej jądra, t. j. swoistej jego dezintegracji, o ile oczywiście teorja Klein-Nishiny jest poprawna. Autor usiłuje dać odpowiedź na to pytanie częściowo na postaci prac dawniejszych (Prelingera oraz Enderlego), dotyczących emisji elektronowej metali pod wpływem promieni γ *RaC*, częściowo zaś na zasadzie doświadczeń własnych. Prace Prelingera i Enderlego, jakkolwiek poświęcone innemu zagadnieniu, zawierają obfity materjał w postaci danych, dotyczących emisji różnych pierwiastków w zależności od grubości warstwy, przez którą przechodzą promienie γ. Ekstrapolując wyniki tych uczonych do grubości znikomo małej, autor otrzymuje wartość emisji całkowitej σ_e' (w warstwach grubych mamy zawsze do czynienia z emisją częściową, wskutek absorpcji elektronów w warstwie), odniesioną najpierw do jednostki grubości warstwy, a następnie, drogą prostego rachunku, do jednego elektronu pierwiastka pochłaniającego. Z doświadczeń Enderlego wynika, że w przypadku żelaza, srebra i ołowiu σ_e' posiada wartość (względną) odpowiednio równą 1; 1,24; 1,68, zatem wzrasta bardzo wyraźnie wraz z liczbą porządkową. Inna metoda wyznaczenia względnej wartości σ'_e wymaga znajomości emisji maksymalnej danego pierwiastka (wiadomo, że począwszy od pewnej grubości warstwy wzrost emisji jest skompensowany przez absorpcję elektronów w warstwie, tak iż emisja przechodzi przez maximum). Z doświadczeń Prelingera i Enderlego wynika, że emisja maksymalna posiada wartość w przybliżeniu jednakową w przypadku wszystkich badanych pierwiastków (*Al*, *Cu*, *Fe*, *Aq*, *Ob*). Do tego samego wniosku prowadzą doświadczenia autora, różniące się od prac poprzedników tem, że zwrócono w nich szczególną uwagę na zmniejszenie roli czynników wtórnych, a przedewszystkiem jonizacji, wytworzonej przez elektrony, które emitowane są z powietrza kamery jonizacyjnej, nie zaś z powierzchni badanych metali. W przyrządzie autora znaczenie tego efektu wtórnego zostało zredukowane, dzięki zastosowaniu szeregu płytek równoległych, oddalonych od siebie o 1 cm. W kamerze tego typu elektrony emitowane przez płytki ulegają odbiciom wielokrotnym wewnątrz każdej przegródki; jonizacja rzeczywista jest wskutek tego większa od jonizacji, którą obserwowalibyśmy, gdyby odbić nie było, w stosunku, który łatwo wyliczyć, znając współczynnik odbicia elektronów od powierzchni danego pierwiastka. Badano emisję glinu i ołowiu pod wpływem promieni γ *RaC*, przepuszczonych przez 4 cm *Pb*; okazało się, że maksymalna emisja glinu jest 1,1 razy większa od emisji maksymalnej ołowiu, co stoi w zgodności z wynikami Enderlego, a także dawniejszemi wynikami Bragga i Madsena.

Wartości emisji maksymalnej mogą być użyte do wyliczenia emisji całkowitej, t. j. współczynnika σ'_e. W istocie wartości te są proporcjonalne do stosunku σ'_e/μ_e, gdzie μ_e jest współczynnikiem absorpcji elektronów (odniesionym, jak zawsze, do jednego elektronu pierwiastka pochłaniającego) w badanym pierwiastku. Nie jest potrzebna znajomość wartości bezwzględnej μ_e ponieważ chodzi nam tylko o to, by wykryć zależność σ'_e od liczby porządkowej. Wartości względne współczynnika μ_e zapożyczamy z badań nad absorpcją promieni β, w szczególności, posługujemy się danemi, dotyczącemi absorpcji promieni β *RaE*, ponieważ, jak wynika z teorji efektu Comptona, prędkości elektronów, wysyłanych pod wpływem twardych promieni γ *RaC*, są zbliżone do prędkości tych promieni. Opierając się na wzorze, otrzymanym przez G. Fournier, dotyczącym zależności współczynnika absorpcji promieni β *RaE* od liczby porządkowej, autor znajduje, że wartości σ_e' w przypadku glinu, żelaza, srebra i ołowiu są odpowiednio proporcjonalne do 0,95; 1; 1,33; 1,67.

Zatem wyniki drugiej metody są zgodne z wynikami pierwszej. Wydaje się rzeczą niewątpliwą, że emisja elektronów przez jądro istotnie zachodzi pod wpływem twardych promieni γ, o ile teorje absorpcji tych promieni nie są błędne.

5.

Irena Niewiedzka.

O wydajności odskoku β.

Sur le rendement de recul β.

Punktem wyjścia pracy była rozbieżność między wynikami otrzymanemi, z jednej strony przez Donata i Philippa oraz Bartona, z drugiej strony przez Muszkatównę i Wertensteina. Pierwsi ze wspomnianych autorów znajdują, że wydajność odskoku β waha się między 2 i 6%, gdy tymczasem dwaj ostatni otrzymali wydajność wahającą się między 20 i 50%. Ponadto Donat i Philipp utrzymują, że wydajność wzrasta prawie 10-krotnie, gdy receptor jest oziębiony do temperatury ciekłego powietrza; Wertenstein nie potwierdza istnienia wpływu temperatury na wydajność, natomiast znajduje, że wydajność zależy w wysokim stopniu od natury fizyczno-chemicznej receptora i źródła, na którem złożona jest substancja emitująca atomy odskoku. Celem pracy autorki było sprawdzenie wyników Wertensteina i wyjaśnienie wspomnianej rozbieżności. Aparatura była skonstruowana w ten sposób, by usunąć całkowicie główne źródło błędu w badaniach wydajności odskoku, mianowicie rozpraszanie się substancji, emitującej atomy odskoku, na ściankach naczynia, innemi słowy, powstawanie, obok źródła głównego, wtórnych źródeł odskoku, co uniemożliwia dokładne wyznaczenie wydajności. W tym celu źródło — krążek metalowy, pokryty *RaB* — sporządzane było przez destylację w osobnem naczyniu i następnie przenoszone do aparatu, w którym badano odskok. Aparat ten posiadał urządzenie, dzięki któremu można było eksponować w bardzo dobrej próżni kolejno kilka receptorów aktywowanych przez to samo źródło, co okazało się bardzo celowe w porównywaniu wydajności otrzymanej na receptorach różnej natury. Wydajność obliczano metodą zwykłą na podstawie pomiarów aktywności receptora i źródła oraz znajomości czasu ekspozycji i kąta bryłowego, wewnątrz którego atomy odskoku padały na receptor. Badano wpływ na wydajność czynników następujących: a) natury źródła, b) natury receptora, c) temperatury receptora, d) czasu, który upłynął od chwili sporządzenia źródła do chwili rozpoczęcia ekspozycji, e) czasu trwania ekspozycji. Wyniki są następujące:

a) Wydajność zależy od natury źródła. Używając, jako receptorów, świeżo stoczonych krążków mosiężnych, zaś, jako źródeł, krążków glinowego, mosiężnego i srebrnego, otrzymano wydajności (w %) 19,5; 12; 9,7.

b) Wydajność zależy od natury receptora. Używając, jako źródła, krążka glinowego, otrzymano na świeżo stoczonych krążkach metalowych, wydajności według tabelki I.

Tabelka I.

Metal	glin	cynk	mosiądz	ołów	nikiel	żelazo	miedź	*Bi*	*Ag*	*AU*
Wyd. w %	11	16	16	19	24	25	28	32	51	62

Interesujący jest fakt, że kolejność, w jakiej wzrasta wydajność badanych metali jest prawie taka sama, jak kolejność, w jakiej wzrasta „szlachetność". Ponadto w zbadanych przypadkach natura źródła wpływa na wydajność w odwrotnym kierunku, co natura receptora. Tłumaczy się to zapewne tem, że, wobec małej energji kinetycznej atomów odskoku, zarówno odrywanie się atomów od źródła, jak i osiadanie ich na receptorze zależy w wysokim stopniu od sił adsorpcyjnych. Im siły te są większe, tem atom trudniej się odrywa, natomiast łatwiej osiada.

c) Wydajność nie zmienia się w sposób wyraźny, gdy receptor zostaje oziębiony do temperatury ciekłego powietrza.

d) Wydajność nie zależy w sposób wyraźny od czasu, jaki dzieli chwile sporządzenia źródła i rozpoczęcia ekspozycji. Receptory eksponowane w godzinę po sporządzeniu źródła wykazywały prawie tę samą wydajność, co receptory eksponowane natychmiast po sporządzeniu źródła.

e) Wydajność spada, gdy trwanie ekspozycji wzrasta i w przypadku czasu rzędu 1 godziny wynosi zaledwie kilka procentów.

Wyniki dotyczące punktów a), b) i c) potwierdzają wyniki Wertensteina. Wyniki wymienione pod e) wyjaśniają w pewnej mierze przyczynę wspomnianej rozbieżności. W istocie, Donat i Philipp oraz Barton wykonywali stale ekspozycje, których czas trwania był rzędu 1 godziny. Wpływ tego czasu jest dotąd niewyjaśniony; prowadzone są w tym kierunku nowe badania.

6.

Michał Zyw.

O ładunku atomów odskoku *RaD*.

Sur la charge des atomes de recul de *RaD*.

Autor badał metodą fotograficzną ładunek atomów *RaD*, emitowanych w przemianie α *RaC'*. Źródłem odskoku był drucik platynowy, grubości 0,2 mm, na którym osadzono $RaB+C$. Wiązka atomów odskoku i cząstek α po przejściu w próżni przez szczelinę szerokości 0,13 mm padała na kliszę Schumanna w kierunku prostopadłym do pola magnetycznego o natężeniu 12.000 gaussów.

Ponieważ dawniejsze prace Wertensteina prowadziły do wniosku, że ładunek atomów odskoku powstaje wskutek zderzeń z cząsteczkami gazu, zwrócono szczególną uwagę na otrzymanie dobrej próżni. Aparat był skonstruowany w ten sposób, że główna jego część zawierająca kliszę i szczelinę była ewakuowana w ciągu wielu godzin przed rozpoczęciem doświadczenia, zaś źródło wprowadzano do części dodatkowej, o małej objętości, którą ewakuowano zapomocą osobnego połączenia z pompą, a następnie łączono z częścią główną zapomocą szlifu szklanego. Klisze zawierały trzy prążki: prążek pochodzący od odchylonych w polu magnetycznem cząstek α, rozlany prążek, odchylony dwa razy mniej od prążka odpowiadającego cząstkom α, wreszcie ostry prążek nieodchylony. Ten ostatni prążek był znacznie ciemniejszy od prążka drugiego. Istnienie prążka nieodchylonego świadczy o tem, że część atomów odskoku nie posiada ładunku elektrycznego, prążek drugi należy przypisać atomom odskoku, posiadającym jeden ładunek elementarny dodatni. Ponieważ prążek ten jest słaby i rozlany, autor sądzi, że te tylko atomy odskoku zdobywają ładunek dodatni, które zostały wyrzucone przez atomy *RaC* wbite w materjał drutu podczas aktywacji (jak wiadomo atomy *RaA* z którego powstaje kolejno *RaB* posiadają w chwili powstania znaczną prędkość). W istocie, atomy odskoku wychodzące z głębszych warstw metalu ulegają zderzeniom z atomami metalu i doznają straty prędkości, różnej dla różnych atomów, co tłumaczy dlaczego wspomniany prążek jest rozlany. Można zatem powiedzieć, że wyniki autora są zgodne z wynikami otrzymanemi w r. 1915 przez Wertensteina. Odmienne wyniki Makowera i jego współpracowników tłumaczą się zapewne tem, że użyta przez autorów tych aparatura nie nadawała się do otrzymania dobrej próżni. Dalszem potwierdzeniem tych wniosków jest fakt następujący. Jeżeli podczas ekspozycji ciśnienie w aparaturze wynosi kilka barów, wówczas oba prążki odpowiadające atomom odskoku mają natężenie prawie jednakowe. Fakt ten tłumaczy się łatwo, jeżeli założymy, że atomy odskoku zdobywają ładunek przez zderzenia z cząsteczkami gazu; gdy ciśnienie wzrasta, liczba atomów nienaładowanych maleje, zaś liczba atomów naładowanych wzrasta.

7.

Janina Tołwińska.

Badania nad oddzielaniem *UX* od *UI*.

Recherches sur la séparation de *UX* et *UI*.

W celu oddzielenia *UX* od *UI* najczęściej strąca się w roztworze soli uranylowej sól obcą, która porywa (adsorbuje) *UX*. Badania dawniejsze prowadziły do wniosku, że adsorpcji tej przeszkadza obecność jonu uranylowego. W celu otrzymania skutecznego strącenia *UX* należy użyć soli, która tworzy z jonem uranylowym sól zespoloną. Badania autorki wykazały, że warunek ten nie jest wystarczający: tak naprzykład sól zespolona pirofosforanu, która tworzy bardzo charakterystyczne połączenie z uranylem, nie daje należytej adsorpcji *UX*. Okazało się, że celem zwiększenia adsorpcji *UX* z roztworu uranylowego należy dodać takiej soli, która z *UI* daje sól zespoloną, zaś z *Th* (izotopem *UX*) soli takiej nie tworzy.

Prócz własności soli zespolonej i charakteru samego adsorbenta jeszcze i inne czynniki wpływają na adsorpcję *UX*, np. kwasowość roztworu, stan fizyczny *UX*; jednak nie dało się zauważyć wyraźnej zależności między stopniem adsorpcji a temi czynnikami.

Dużą rolę gra sposób, w jaki adsorbent zostaje wprowadzony do roztworu. Tak np. jeżeli do amonjakalnego roztworu dodać soli żelazowej, strącony osad nawet na gorąco nie porywa całkowicie *UX*, jeżeli jednak dodać do roztworu $Fe(OH)_3$ w stanie drobnej zawiesiny, to, praktycznie biorąc, adsorpcja jest całkowita. Podobnie $Ba\,So_4$ strącony oddzielnie i wrzucany do roztworu uranylu i mieszany o wiele więcej adsorbuje *UX*, niż podano w literaturze, gdy strącano $Ba\,So_4$ w samym roztworze uranylowym.

Andrzej Koźniewski.

Kilka uwag o pierścieniach zbiorów.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 30 kwietnia 1932 r.

Streszczenie.

P. Sierpiński udowodnił, że jeżeli $\mathbf{R}$ jest pierścieniem zbiorów, to rodzina $\mathbf{R}_\lambda$ wszystkich granic ciągów zbieżnych zbiorów należących do $\mathbf{R}$ jest też pierścieniem. W komunikacie niniejszym wykazuję, że twierdzenie analogiczne nie zachodzi dla rodziny $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ granic górnych wszystkich ciągów zbiorów rodziny $\mathbf{R}$. Pozatem udowadniam, że dla pierścienia $\mathbf{R}$ zbiorów, które są podzbiorami ustalonego zbioru przeliczalnego mamy $\mathbf{R}_\lambda = \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$, a zatem że dla takich pierścieni $\mathbf{R}$ rodziny $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ są też pierścieniami.

Andrzej Koźniewski.

Quelques remarques sur les anneaux d'ensembles.

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 30 avril 1932.

Définition 1. $\mathbf{F}$ *étant une classe d'ensembles quelconques*

a) $\mathbf{F}_{\overline{\lambda}}$ (*resp.* $\mathbf{F}_{\underline{\lambda}}$) *est la classe de toutes les limites supérieures (resp. inférieures) de suites dénombrables*[1] *d'ensembles de* $\mathbf{F}$.

---

[1]) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ étant une suite dénombrable d'ensembles sa limite supérieure est l'ensemble $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, sa limite inférieure est l'en-

b) $\mathbf{F}_{\lambda}$ *est la classe de toutes les limites de suites convergentes dénombrables d'ensembles de* $\mathbf{F}$ [2]).

Définition 2. *Une classe* $\mathbf{R}$ *d'ensembles est appelée anneau d'ensembles si la somme et le produit de deux ensembles quelconques de* $\mathbf{R}$ *appartiennent aussi à* $\mathbf{R}$ [3]).

Or les questions suivantes s'imposent: La classe $\mathbf{R}$ étant un anneau d'ensembles, $\mathbf{R}_{\lambda}$ l'est-il aussi? Est-il de même pour $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ (resp. $\mathbf{R}_{\underline{\lambda}}$)?

M. Sierpiński a démontré que la réponse à la prémière question est positive [4]). Je démontrerai dans cette note que la seconde question se résoud d'une manière négative (th. 1). Pour le prouver il suffit de construire un anneau $\mathbf{R}$ d'ensembles pour lequel $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ ne serait plus un anneau [5]).

Puis je montrerai une famille d'anneaux $\mathbf{R}$ pour lesquels $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ et $\mathbf{R}_{\underline{\lambda}}$ seront aussi des anneaux (th. 2).

Théorème 1. *Il existe un anneau* $\mathbf{R}$ *d'ensembles pour lequel* $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ *n'est pas un anneau.*

Démonstration.

Soit

B l'ensemble de toutes les suites dénombrables b dont les termes $b_n (n = 1, 2 \ldots)$ sont égaux à 0, 1 *et* 2.

Soit

B_n^p, où $n = 1, 2 \ldots$ et $p = 1, 2$, l'ensemble de toutes les suites $b \in B$ dont le n^{-me} terme b_n est égal à p.

---

semble $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} A_n$. La suite est dite convergente si $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ et sa limite est l'ensemble $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. Cf. p. ex. Hausdorff: *Mengenlehre*, 1927, p. 19.

2) Ces notions ont été introduites par M. Sierpiński — cf. W. Sierpiński: *Sur une propriété des limites d'ensembles.* C. R. t. 192, p. 1625.

3) D'après M. Hausdorff. Cf. l. c. 1), p. 77.

4) Voir Sierpiński l. c. 2). C. R. t. 192, p. 1625 et Sierpiński: *Sur les anneaux de fonctions.* Fund. Math. t. XVIII, p. 1.

5) Pour construire un anneau $\mathbf{R}'$ d'ensembles pour lequel $\mathbf{R}_{\underline{\lambda}}'$ ne serait pas un anneau on n'a qu'à passer aux complémentaires. $\mathbf{R}'$ sera alors la classe de tous les ensembles $Z_0' = \sum_{Z \in \mathbf{R}} Z - Z_0$, où $Z_0 \in \mathbf{R}$.

Soit

K *la classe de tous les ensembles* B_n^p *où* $n=1,2\ldots$ *et* $p=1,2$.

Soit

R *le plus petit anneau d'ensembles qui contienne la classe* **K**.

Nous démontrerons que la classe $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ n'est pas un anneau.

Nous allons prouver notamment qu'il existe deux ensembles M et N de la classe $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ dont le produit $L=MN$ n'appartient pas à $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ [6]).

Soit

(1) $$M=\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n^1$$

(2) $$N=\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n^2$$

(3) $$L=MN.$$

On voit que

(4) *L est l'ensemble des suites b de l'ensemble B qui contiennent un nombre infini de termes égaux à* 1 *et un nombre infini de termes égaux à* 2.

Nous allons prouver que

(5) $$L \overline{\in} \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}.$$

Soit

(6) $$Z_1, Z_2\ldots Z_n\ldots$$

une suite dénombrable d'ensembles quelconques de **R**.

R étant le plus petit anneau d'ensembles qui contient la classe **K** il suit que:

(7) $$Z_i=X_{i,1}+X_{i,2}+\cdots+X_{i,k_i} \quad \text{pour} \quad i=1,2\ldots$$

où $X_{i,l}$ pour $l\leqslant k_i$ sont les produits finis d'ensembles de **K** [7]).

[6]) On voit immédiatement que si $M\in\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ et $N\in\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$, on a aussi $M+N\in\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$.

[7]) Voir Hausdorff l. c. [1]), p. 78.

Désignons par

(8) $$X_1,\ X_2,\ X_3 \dots$$

les termes succesifs de la suite

$$X_{1,1},\ X_{1,2}, \dots X_{1,k_1},\ X_{2,1} \dots X_{2,k_2},\ X_{3,1} \dots .$$

On voit aisément que

(9) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, Z_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n .$$

En effet si $b \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, Z_n$, b appartient à un nombre infini de Z_n. Les formules (7) et (8) nous prouvent que b appartient aussi à un nombre infini de X_n. D'autre part, si b appartient seulement à un nombre fini de Z_n, on conclut que b appartient à un nombre fini de X_n.

La formule (9) établie, nous démontrons que

(10) $$L \neq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, Z_n .$$

Pour l'obtenir, nous allons considérer la condition concernant la suite

(11) $$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n, \dots .$$

Condition (V).

Il existe

un nombre entier $N \geqslant 0$, une suite dénombrable croissante de nombres naturels

$$s_1 < s_2 < \dots < s_l < \dots,$$

une suite dénombrable

(12) $$p_1,\ p_2, \dots p_l \dots$$

où p_l sont égaux à 1 *où* 2; *tels que tous les produits:*

(13) $$B_{s_1}^{p_1} B_{s_2}^{p_2} \dots B_{s_N}^{p_N} B_{s_{N+i}}^{p_{N+i}} \quad où \quad i = 1, 2 \dots$$

se trouvent dans la suite (11).

Nous allons maintenant examiner deux cas:

I. La suite (11) remplit la condition (V).

II. La suite (11) ne remplit pas la condition (V).

I. Dans le cas premier nous allons construire un élément $b \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ tel que $b \overline{\in} L$.

Dans la suite (12) le nombre 1 ou 2 se repète une infinité de fois. Supposons que ce nombre soit 1. [8])

Nous posons

$$b_{s_l} = p_l \quad pour \quad l \leqslant N$$

$$b_n = 1 \quad pour \quad n \neq s_l \quad où \quad l \leqslant N.$$

La suite b:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

a un nombre fini de termes égaux à 2 d'où d'après (4) on a

$$b \overline{\in} L. \tag{14}$$

Or b appartient à tous les produits (13) pour lesquels $p_{N+i} = 1$.

D'après notre supposition il y en a un nombre infini. Tous ces produits, étant des termes de la suite (11), on a

$$b \in \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n. \tag{15}$$

Les formules (14), (15) et (9) nous prouvent la formule (10).

II. Considérons maintenant le cas **II.**

La condition (**V**) n'étant pas remplie on en conclut que la suite (11) satisfait aux conditions suivantes:

Condition ($\mathbf{W}_1$).

Il existe le plus petit nombre naturel $M(0)$ *tel qu'aucun ensemble* B_n^p *pour* $n \geqslant M(0)$ *et* $p = 1, 2$ *ne se trouve dans la suite* (11) [9]).

Condition ($\mathbf{W}_2$).

Pour chaque nombre entier $N > 0$, *chaque suite finie* $s_1 < s_2 < \cdots < s_N$ *de nombres naturels, et chaque suite finie* $p_1, p_2, \ldots p_N$ *de nombres* 1 *et* 2, *il existe le plus petit nombre naturel* $M_{s_1, s_2 \ldots s_N}^{p_1, p_2, \ldots p_N} > s_N$ *tel que les produits:*

---

[8]) Nous traitons le cas où ce nombre est 2 d'une manière tout à fait analogue.

[9]) Dans le cas contraire la condition (**V**) serait remplie pour $N = 0$.

$$B_{s_1}^{p_1} \cdot B_{s_2}^{p_2} B_{s_N}^{p_N} B_n^p$$

n'appartiennent à la suite (11) *pour aucun*

$$n \geqslant M_{s_1, s_2, s_N}^{p_1, p_2, p_N} \quad et \quad p = 1, 2.$$

Nous allons construire maintenant un élément $b \in L$ tel que $b \overline{\in} \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$.

Soit $M(0)$ le nombre défini par la condition ($\mathbf{W}_1$).

Nous posons:

$$b_1 = b_2 = b_{M(0)-1} = 0 \quad et \quad b_{M(0)} = 1.$$

Supposons maintenant, que nous avons déjà défini les termes:

$$b_1, b_2, b_v \quad où \quad b_v \neq 0.$$

Soit

(16) $$t_1 < t_2 < \cdots < t_q = v$$

la suite de tous les indices $n \leqslant v$ *pour lesquels* $b_n \neq 0$.

Soit

(17) $M(v)$ *la borne supérieure de tous les nombres* $M_{s_1, s_2, s_k}^{p_1, p_2, p_k}$, *où* s_1, s_2, s_k *parcourent toutes les suites partielles de la suite* (16) *et* p_1, p_2, p_k *les nombres* 1 *et* 2.

Il est évident que $M(v) \geqslant M_{t_q}^1$. La condition ($\mathbf{W}_2$) nous prouve que $M_{t_q}^1 > t_q = v$ ce qui nous donne

$$M(v) > v.$$

Nous posons maintenant

$$b_{v+1} = b_{v+2} = b_{M(v)-1} = 0$$

et

$$b_{M(v)} = 2 \quad si \quad b_v = 1$$

$$b_{M(v)} = 1 \quad si \quad b_v = 2.$$

La suite b:

(18) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

est donc tout à fait défini.

Selon cette définition on voit immédiatement, que la suite (18) contient un nombre infini de termes égaux à 1 et un nombre infini de termes égaux à 2, d'où d'après (4) on obtient

(19) $$b \in L.$$

D'autre part nous allons montrer que

(20) $$b \overline{\in} X_i \quad pour \quad i = 1, 2 \ldots .$$

En effet supposons que

(21) $$b \in X_{i_0}.$$

D'après (7) et (8) l'ensemble X_{i_0} et un produit fini d'ensembles de **K**. Nous allons montrer que X_{i_0} est un produit de deux au moins ensembles différents de **K**.

En effet nous avons d'après la définition de b que $b \overline{\in} B_n^p$ pour $n < M(0)$ et $p = 1, 2$ parceque $b_n = 0$ pour $n < M(0)$.

Alors en vertu de (21)

$$X_{i_0} \neq B_n^p \quad \text{pour} \quad n < M(0) \quad \text{et} \quad p = 1, 2 .$$

Selon la condition $(\mathbf{W}_1)$ on a

$$B_n^p \neq X_{i_0} \quad \text{pour} \quad n > M(0) \quad \text{et} \quad p = 1, 2 .$$

Alors en effet

(22) $$X_{i_0} = B_{s_1}^{p_1} B_{s_2}^{p_2} \cdots B_{s_k}^{p_k} B_{s_{k+1}}^{p_{k+1}}$$

où $s_1 < s_2 < \cdots < s_k < s_{k+1}$ (parceque $X_{i_0} \neq 0$).

Vu la définition de b et les relations (21) et (22) nous concluons, que le terme différent de 0 qui succède au terme $b_{s_k} = p_k$ a l'indice $M(s_k)$. On obtient suivant (17) et la condition $(\mathbf{W}_2)$ que

$$M(s_k) > M_{s_1, s_2 \ldots s_k}^{p_1, p_2 \ldots p_k} > s_{k+1}$$

parceque le produit (22) se trouve dans la suite (11).

Il s'en suit

(23) $$b_{s_{k+1}} = 0 .$$

Mais d'après (21) et (22) on a

(24) $$b_{s_{k+1}} = p_{k+1} \neq 0 .$$

Les formules (23) et (24) prouvent que la supposition (21) nous conduit à une contradiction.

La formule (20) établie, on en conclut que

(25) $$b \overline{\in} \overline{\lim_{n \to \infty}} X_n .$$

Les rélations rélations (19), (25) et (9) nous prouvent l'inégalité (10).

La formule (10) est donc établie dans tous les cas considérés.

Cette inégalité se trouve donc démontrée pour la suite détérminée (6). La suite (6) étant une suite des ensembles quelconques de $\mathbf{R}$ la relation (5) est établie. C'est-à-dire nous avons démontré que $L \overline{\in} \mathbf{R}_{\bar{\lambda}}$.

Nous savons que L est un produit des deux ensembles M et N de $\mathbf{R}_{\bar{\lambda}}$ [cf. (1), (2) et (3)], ce qui montre que $\mathbf{R}_{\bar{\lambda}}$ n'est pas un anneau d'ensembles.

Théorème 2. *Si* $\mathbf{R}$ *est un anneau quelconque de sous-ensembles de l'ensemble dénombrable* A, *on a:*

(1) $$\mathbf{R}_{\bar{\lambda}} = \mathbf{R}_{\lambda}$$

(2) $$\mathbf{R}_{\underline{\lambda}} = \mathbf{R}_{\lambda}.$$

D é m o n s t r a t i o n.

Selon les définitions 1 et 2 on a

(3) $$\mathbf{R}_{\lambda} \subset \mathbf{R}_{\bar{\lambda}}.$$

Soit maintenant

(4) $$Z \in \mathbf{R}_{\bar{\lambda}}.$$

Alors

(5) $$Z \in \mathbf{R}_{\sigma\delta}.$$

$\mathbf{R}$ étant une classe de sous-ensembles de l'ensemble dénombrable A on conclut d'un théorème démontré par MM. L i n d e n b a u m et K o ź n i e w s k i que

(6) $$\mathbf{R}_{\sigma\delta} = \mathbf{R}_{\delta\sigma}.$$ [10])

Les formules (5) et (6) nous prouvent que

(7) $$Z \in \mathbf{R}_{\delta\sigma}.$$

M. S i e r p i ń s k i a demontré que les relations (5) et (7) entraînent pour les anneaux la relation

(8) $$L \in \mathbf{R}_{\lambda}.$$ [11])

---

[10]) Cf. A. K o ź n i e w s k i et A. L i n d e n b a u m: *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*. Fund. Math. XV, p. 353, (*théorème* 9).

[11]) Cf. S i e r p i ń s k i l. c. [2]), C. R. t. 192, p. 1625.

Les formules (4) et (8) nous montrent que

(9) $$\mathbf{R}_{\overline{\lambda}} \subset \mathbf{R}_{\lambda}.$$

En vertu de (3) et (9)

$$\mathbf{R}_{\overline{\lambda}} = \mathbf{R}_{\lambda}.$$

Pour démontrer l'égalité (2) on n'a qu'à passer aux complémentaires et à appliquer les formules de De Morgan.

M. Sierpiński a prouvé que si $\mathbf{R}$ est un anneau d'ensembles, $\mathbf{R}_{\lambda}$ l'est aussi. [12]

Corollaire. $\mathbf{R}$ *étant un anneau quelconque de sous-ensembles de l'ensemble dénombrable* A, *la classe* $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}} = \mathbf{R}_{\underline{\lambda}} = \mathbf{R}_{\lambda}$ *est aussi un anneau.*

Pour finir avec nos considérations nous voulons encore faire remarquer une déduction du théorème 1.

M. Sierpiński à démontré qu'on peut réprésenter chaque ensemble $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$ [13] (dans l'espace euclidien) comme une limite supérieure d'une suite d'ensembles fermés, c'est-à-dire que $\mathbf{F}_{\sigma\delta} = \mathbf{F}_{\overline{\lambda}}$ [14]).

La question suivante s'impose: $\mathbf{R}$ étant une anneau quelconque d'ensembles a-t-on toujours $\mathbf{R}_{\sigma\delta} = \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$ (on a naturellement $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}} \subset \mathbf{R}_{\sigma\delta}$).

La réponse est négative. En effet: soit $\mathbf{R}$ l'anneau d'ensembles défini dans le théorème 1. L'ensemble L que nous avons consideré dans ce théorème appartient à $\mathbf{R}_{\sigma\delta}$ comme produit de deux ensembles de $\mathbf{R}_{\overline{\lambda}} \subset \mathbf{R}_{\sigma\delta}$. Nous avons en oûtre démontré que $L \,\overline{\in}\, \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$, d'où résulte que $\mathbf{R}_{\sigma\delta} \neq \mathbf{R}_{\overline{\lambda}}$.

---

[12]) Cf. Sierpiński l. c. [4]). Fund. Math. t. XVIII, p. 4.

[13]) $\mathbf{F}$ est la classe d'ensembles fermés.

[14]) Cf. Sierpiński. Sur une propriété des ensembles $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$. Fund. Math. t. VI, p. 21.

Posiedzenie

z dnia 28 maja 1932 r.

L. Szperl.

Kwas β-tionaftoesowy i dwusiarczek β-dwunaftoilu.

Zgłoszono dn. 28 maja 1932 r.

L'acide β-thionaphtoique et le disulfure di-β-naphtoique.

Mémoire présenté dans la séance du 28 Mai 1932.

Streszczenie.

Wytworzony ze swej soli sodowej, otrzymanej drogą współdziałania chlorku β-naftoilu z siarczkiem sodowym, kwas β-tionaftoesowy, β-$C_{10}H_7COSH$, jest pierwszym przedstawicielem tiokwasów szeregu naftalenu. Jest to produkt krystaliczny barwy żółtej, top. w temp. 44—45,5^0, rozpuszczalny w pospolicie używanych rozczynnikach, łatwo ulegający utlenieniu tlenem powietrza na dwusiarczek. Sole: sodu, potasu, baru — żółte proszki, rozpuszczalne w wodzie i w alkoholu. Sól srebra — jasno żółta, z biegiem czasu czernieje; sól ołowiu — żółtawa, w małym stopniu rozpuszczalna w dwusiarczku węgla; sól miedzi — świeżo wytworzoua — pomarańczowo zielona przechodzi w czerwono pomarańczową.

Dwusiarczek dwu-β-naftoilu został wytworzony z β-tionaftoesanu sodowego pod działaniem roztworu jodu w jodku potasowym. Jest to produkt bezbarwny krystaliczny, topn. z częściowym rozkładem w temp. 185—186^0, rozpuszcza się dobrze na gorąco w benzenie, ksylenie, czterochlorku węgla, chloroformie, gorzej w ligroinie, źle w eterze, acetonie, alkoholu.

Praca wyjdzie in extenso „Chemické Listy pro vědu a průmysl".

Wł. Gorczyński.

Przyczynek do poznania wielkości promieniowania rozproszonego w bilansie ogólnym sum ciepła.

Komunikat zgłoszony dn. 28 maja 1932 r.

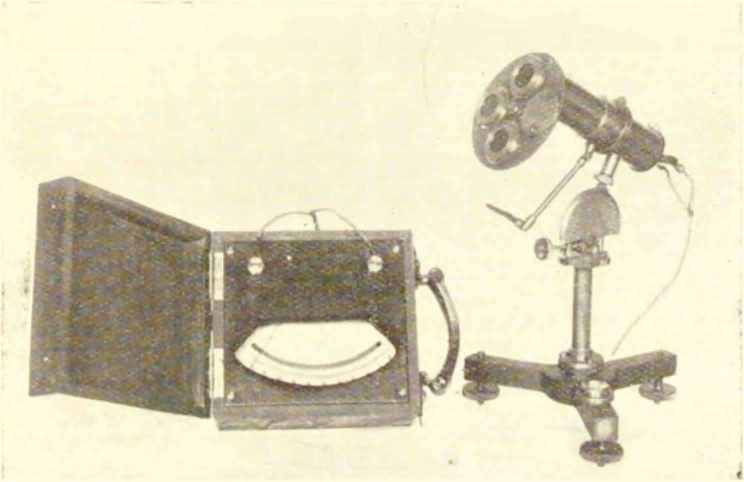
WSTĘP.

Już oddawna odczuwano dla różnych celów potrzebę obliczania sum ciepła, otrzymywanych przez jednostkę powierzchni ziemi od słońca i całego nieboskłonu. Jeszcze do dzisiaj spotyka się niekiedy w opracowaniach rolniczych, lekarskich lub fizjograficzno-botanicznych sumowania temperatur, liczonych często tylko powyżej zera lub też ponad pewną t. zw. temperaturą krytyczną. Ten paljatyw, już w zasadzie niedopuszczalny do stopni temperatury, byłby obecnie tembardziej nieusprawiedliwiony, że Aktynometrja posiada już proste sposoby prawidłowego obliczania sum ciepła w kalorjach.

W zupełnie łatwy i dostępny dla wszystkich sposób osiąga się to przy pomocy t. zw. solarymetrów lub solarygrafów albo też specjalnej rurki pyrheljometrycznej, dającej się używać do pomiarów zarówno promieniowania normalnie padającego od słońca, jako też padającego na powierzchnię poziomą ziemi, zarówno bezpośrednio od słońca jak i pośrednio po rozproszeniu się w atmosferze ziemskiej.

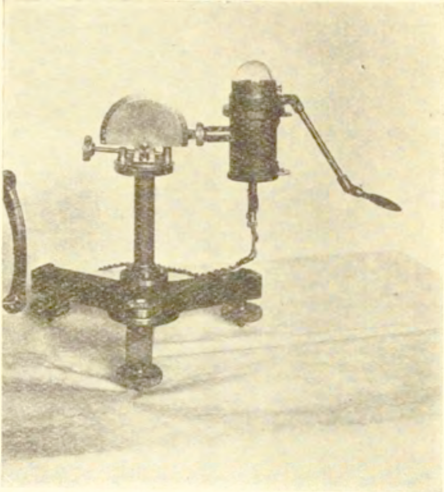
I. Podział aktynometrów na pyrheljometry i solarymetry.

Jeżeli ogólną nazwą aktynometrów obejmiemy wszystkie przyrządy, służące do pomiarów natężenia promieniowania słonecznego, rozróżniamy następnie między pyrheljometrami i solarymetrami. Pierwsze z nich służą do wyznaczania w umówionych jednostkach (zazwyczaj w kalorjach gramowych na minutę natężenia promieniowania, padającego bezpośrednio z tarczy słonecznej na cm^2 powierzchni, skierowanej prostopadle do biegu promieni). Aby usunąć wpływ promieniowania rozproszonego przez całe sklepienie niebieskie, zamykamy odbiorniki (w naszym wypadku stosy termoelektryczne) w specjalnych rurkach zaopatrzonych w szereg przesłon oraz w wizjery, umieszczonych nadto na podstawkach ekwatorjalnych. Z pomocą odpowiednich śrub, statyw ten łatwo pozwala skierować każdorazowo na słońce rurkę pyrheljometryczną; w tym celu ustawiamy ją tak, aby cień od słońca, zarysowujący się na wizjerze, padał zawsze na punkt uprzednio oznaczony i wskazujący na położenie normalne przyrządu względem promieni słonecznych (rys. 1).

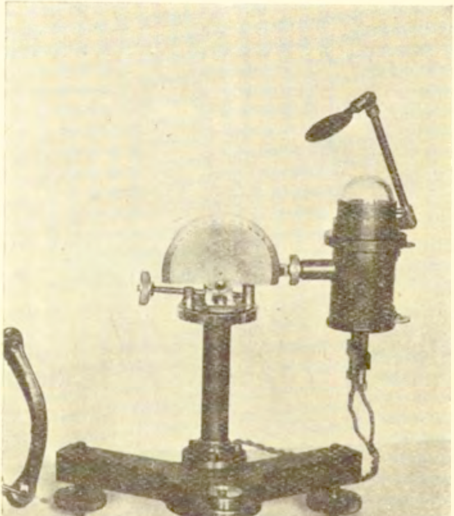


Rys. 1.

Aby otrzymać natężenie całkowite promieniowania padającego na poziomą powierzchnię ziemi i idącego nietylko wprost ze słońca lecz dochodzącego także w postaci promieni rozproszonych przez sklepienie niebieskie, możemy używać tegoż przyrządu co i poprzednio, lecz usuwając samą rurkę pyrheljometryczną. Obnażony w ten sposób i zarazem ustawiony poziomo odbiornik (w naszym wypadku termostos pod szkłem półkulistem) poddany jest działaniom zarówno słońca jak i całego nieboskłonu (w tej formie mamy więc solarymetr zamiast rurki pyrheljometrycznej, p. rys. 2). To promieniowanie rozproszone, odbite z nieba we wszystkich kierunkach, daje się łatwo wyznaczyć zapomocą małego pręta opatrzonego małą tarczą, który przymocowuje się do odbiornika (termostosu) tak, aby po odpowiedniem obróceniu tarczy i postawieniu jej między odbiornikiem i słońcem cień pokrywał termostos (rys. 3).



Rys. 2.



Rys. 3.

Między promieniowaniem normalnem Q_{norm} i jego składową pionową na powierzchnię poziomą Q_{hor} a promieniowaniem całkowitem Q_{sol} i rozproszonem Q_{dyf} istnieje związek

$$Q_{sol} - Q_{dyf} = Q_{hor} = Q_{norm} \,.\, \sin h$$

lub

$$Q_{dyf} = Q_{sol} - Q_{hor} \,.$$

Podajemy następujący przykład. 19 maja 1930 r. rozpoczęto o godz. 11 m. 46 serję pomiarów pyrheljometryczno-solarymetrycznych. Wysokość słońca odczytana w tym czasie na kole podziałowem przyrządu lub otrzymana jakimkolwiek innym sposobem niech wynosi $h = 66^0{,}0$.

Jeżeli spółczynnik pyrheljometryczny naszego przyrządu wynosi np. 0,0248 dla jednej podziałki miliwoltmetru Richarda, wyznaczamy z różnicy odczytań na słońcu (60,2) i w cieniu (4,1)

$$Q_{norm} = (60{,}2 - 4{,}1) \,.\, 0{,}0248 = 1{,}394 \text{ kal.}$$

Zdejmując rurkę pyrheljometryczną i stawiając poziomo nasz receptor (termostos pod szkłem półkulistem) otrzymujemy następujące odchylenie w położeniu solarymetrycznem odpowiadające natężeniu całkowitemu od słońca i nieba:

$$73{,}7 - 3{,}9 = 69{,}8,$$

a umieszczając między receptorem poziomym a słońcem nasz ekran dyfuzyjny (pręt z tarczą, rzucającą cień na termostos),

$$10{,}2 - 3{,}9 = 6{,}3,$$

gdzie 3,9 odpowiada położeniu zera, a właściwie średniemu położeniu zera przed i po każdym pomiarze. Z danych powyższych wypada

$$Q_{hor} = Q_{norm} \,.\, \sin h = 1{,}276 \text{ kal.},$$

spółczynnik solarymetryczny równa się

$$k = Q_{hor} : (69{,}8 - 6{,}3) = 1{,}276 : 63{,}5 = 0{,}0201$$

a więc

$$Q_{sol} = 69{,}8 \,.\, 0{,}0201 = 1{,}403 \text{ kal.}$$

i wreszcie dla natężenia promieniowania rozproszonego od całego nieboskłonu znajdujemy

$$Q_{dyf} = Q_{sol} - Q_{hor} = 1{,}403 - 1{,}276 = 0{,}127 \text{ kal.},$$

co odpowiada 9% natężenia całkowitego (t. j. promieniowania słońca i nieba łącznie).

II. Wyniki pomiarów promieniowania rozproszonego dokonanych nad Morzem Śródziemnem.

Pomiary pyrheljometryczne i solarymetryczne dokonywane były z jednej strony przez autora niniejszego w jego laboratorjum aktynometrycznem w Nicei, a z drugiej strony w pobliskich Alpach Nadmorskich w miejscowości Thorenc, wyniesionej okrągło na 1200 metrów nad poziomem morza i odległej od Nicei na 40 km. ku zachodowi w linji powietrznej. Pomiary w Thorenc wykonywał z przyrządami autora inż. Franciszek Ostrowski, obecny współpracownik Gabinetu Aktynometrycznego T. N. W. w Warszawie.

W Tabl. I zawarty jest wyciąg z pomiarów pyrheljometrycznych i solarymetrycznych, wykonanych w Thorenc, przyczem dla skrócenia tablicy liczbowej ograniczono się do podania odnośnych wartości tylko dla pięciu dni z każdego miesiąca, wybranych wśród kolejno najpogodniejszych, a mianowicie dających stopniowo najwyższe maxima dzienne natężenia promieniowania słonecznego, obserwowanego pyrheljometrem, t. j. w kierunku normalnym do biegu promieni.

Z Tabl. I wynika, że średnio dla pięciu dni powyższych otrzymuje się w obu miesiącach dla natężenia promieniowania rozproszonego 0,11 kal., co odpowiada średnio koło $11^1/_2\%$ natężenia całkowitego, t. j. od słońca i nieba włącznie na poziomą powierzchnię ziemi.

Tablica I.

Wyciąg z pomiarów pyrheljometrycznych i solarymetrycznych dla 5 dni (kolejno najpogodniejszych) w ciągu lutego i marca 1931 r. w Thorenc (szer. 43°,8 N, dług. 6°,7 E Gr., wys. 1,2 km.).

Data	Wysok. słońca	Natężenie promien. w kalorjach			Wysok. słońca	Natężenie promien. w kalorjach		
		norm.	całkow.	rozpr.		norm.	całkow.	rozpr.
a) Luty 1931 r.								
Około południa					Około zachodu słońca			
15.II	30°,0	1,48	0,87	0,13	7°,5	0,89	0,18	0,07
24.II	31°,9	1,45	0,89	0,12	12°,6	1,04	0,32	0,09
25.II	31°,5	1,47	0,87	0,10	11°,9	0,98	0,29	0,09
26.II	37°,2	1,53	1,01	0,08	13°,0	1,14	0,35	0,09
27.II	36°,3	1,52	1,03	0,13	11°,1	0,56	0,19	0,08

Data	Wysok. słońca	Natężenie promien. w kalorjach			Wysok. słońca	Natężenie promien. w kalorjach		
		norm.	całkow.	rozpr.		norm.	całk.	rozpr.
b) Marzec 1931 r.								
Między $9^h 30^m$ i $14^h 30^m$					Między 7^h i 8^h rano			
4.III	29°,6	1,29	0,72	0,08	22°,5	1,02	0,46	0,07
22.III	46°,2	1,58	1,26	0,12	21°,4	1,28	0,53	0,06
23.III	46°,2	1,54	1,25	0,14	20°,0	1,35	0,55	0,09
24.III	—	—	—	—	18°,5	1,28	0,49	0,08
25.III	37°,6	1,38	0,95	0,11	23°,8	1,30	0,63	0,08
27.III	36°,9	1,45	0,98	0,11	—	—	—	—

Dodamy, że stosunki te odpowiadają wartościom okołopołudniowym, kiedy wysokość słońca w Thorenc była koło 33° w lutym i 39° w marcu.

Dla niższych położeń słońca w godzinach bliższych zachodowi zna'eziono w lutym 1931 r. dla promieniowania rozproszonego

0,08 kal. lub 32% natężenia całkowitego.

Zauważymy, że zbliżone stosunki do powyższych skonstatował C. E. Brazier dla obserwatorjum Parc St. Maur pod Paryżem.

Wszystkie wartości podane powyżej zależą poza wysokością słońca, także od ilości chmur, jak to wynika z następującego zestawienia według pomiarów autora, wykonanych w Nicei.

Wiosna	1929 r. . . .	11% dyf.
Lato	„ . . .	11% „
Jesień	„ . . .	14% „
Zima	„ . . .	15% „

Lepiej uwidacznia się zależność procentów dyfuzji od wysokości słońca nad poziomem w Nicei z danych, uszeregowanych jak niżej:

wysokość słońca	68°	55°	45°	35°	25°
% dyfuzji	11%	12%	13%	14%	16%

W innych miejscowościach znajdowano wartości nieco różne, lecz tegoż samego rzędu. Tak np. dla Waszyngtonu mamy, według H. Kimball'a,

wysokość słońca	30°	15°	10°
% dyfuzji . . .	20%	35%	40%
Q_{dyf} w kal. . .	0,24	0,10	0,09

Dla okolic Paryża (Obserwatorjum Saint-Maur) dane sa bliższe do nicejskich, niż do amerykańskich. Mamy tam mianowicie według pomiarów solarymetrycznych:

wysokość słońca	40^0	35^0	30^0	25^0	15^0	10^0	5^0
Q_{dyf} w kal.	0,27	0,23	0,19	0,15	0,09	0,06	0,03

Wartości procentowe dyfuzji przeliczone w kalorje dają wartości koło 0,2 kal. dla $h = 30^0$ i koło 0,3 kal. dla 45^0.

III. O udziale promieniowania rozproszonego w sumach ciepła.

Jeżeli zwrócimy uwagę na fakt, że solarymetry czy też solarygrafy dają stale pewne, niekiedy nawet duże wychylenia galwanometryczne, wtedy gdy pyrheljometry, wobec zasłonięcia tarczy słonecznej lub nieba zachmurzonego, nie wykazują natężeń wymierzalnych, przekonamy się łatwo, że w obliczaniu sum ciepła należy liczyć się z wpływem promieniowania rozproszonego. Lat temu kilkanaście, gdy nie posiadano prostych przyrządów do pomiarów dyfuzji, jakiemi są obecnie np. solarymetry, obliczano sumy ciepła według danych pyrheljometrycznych, przeliczając takowe dla poziomej powierzchni ziemi z jednoczesnem uwzględnieniem danych co do godzin t. zw. słonecznych według wskazań heljografów. W ten sposób przeprowadzali podobne obliczenia dla Warszawy w latach 1903 oraz 1914 autor niniejszego (por. Bibljografję), a następnie w r. 1920 jego współpracownik naukowy Dr. Edward Stenz, autor już całego szeregu prac z dziedziny Aktynometrji.

Otrzymane w ten sposób dane warszawskie wymagają obecnie uzupełnienia przez uwzględnienie dodatkowo promieniowania rozproszonego. Wprawdzie solarygraf działa już od lat kilku w Warszawie, lecz ponieważ odnośne zapisy nie są jeszcze ostatecznie opracowane i ogłoszone, podajemy tymczasowe obliczenie sum ciepła dla Warszawy, uzupełnionych drogą redukcji według innych miejscowości.

Jest rzeczą zastanowienia godną, że udział promieniowania rozproszonego w ogólnym bilansie sum ciepła, otrzymywanych zarówno od słońca jak i od całego nieboskłonu na poziomą powierzchnię ziemi, wynosi blisko 40% dla okresu rocznego. Udział ten jest prawie jednakowy nawet dla tak odległych miejscowości, jak Tacubaya (Meksyk) i Stockholm, stosownie do obliczeń autora według obserwacyj solarygraficznych w Meksyku oraz danych pyranometrycznych ogłoszonych dla Szwecji.

Posiłkując się danemi solarygrafu w Obserwatorjum Parc St. Maur pod Paryżem oraz rezultatami analogicznych oznaczeń w Pawłowsku (obecnie Słucku) pod Petersburgiem i wreszcie danemi ze Stockholmu, otrzymujemy następujące zestawienie.

Tablica II.

Wartości miesięczne stosunku procentowego sum promieniowania rozproszonego do globalnego.

	Zima	Wiosna	Lato	Jesień	Rok
Stockholm. . . .	83	37	32	59	41%
Pawłowsk	61	40	35	55	40%
Paryż	51	41	31	48	38%
Dla Warszawy przyjęto w przybliżeniu:	55	40	33	50	38%

Jak widzimy, znaczniejsze różnice wypadają tylko w zimie dla Stockholmu w związku z bardzo małą ilością insolacji w tym okresie w stolicy Szwecji. Wobec małych bardzo sum miesięcznych w zimie procent roczny jest o wiele bliższy do danych letnich, niż do jesiennych lub zimowych.

Mimo przybliżonego charakteru naszych obliczeń podajemy w Tablicy III uzupełnione wartości sum ciepła dla Warszawy, otrzymane drogą dodania do wartości Q_{norm} i Q_{bor}, poprzednio już obliczonych przez autora i E. Stenza, tymczasowych danych dla promieniowania rozproszonego.

Jak widzimy z Tablicy III, roczne sumy ciepła w dużych kalorjach przedstawiają się dla Warszawy w sposób następujący:

a) 96 kal. kg. na cm^2 powierzchni prostopadle wystawionej na działanie promieni słonecznych, od słońca tylko bez udziału nieba.

b) 54 kal. kg. na cm^2 poziomej powierzchni ziemi w tychże warunkach.

c) 87 kal. kg. bezpośrednio od słońca oraz drogą dyfuzji od całego nieboskłonu na cm^2 poziomej powierzchni ziemi.

Tablica III.

Sumy ciepła w kalorjach kg. w Warszawie.

Miesiące	Normalnie 1903/12 kal.	Q_{norm} 1913/18 kal.	Poziomo 1903/12 kal.	Q_{hor} 1913/18 kal.	Dyfuzja Q_{dyf} kal. kg.	Globalnie Q_{sol} kal. kg.
I	2,1	1,5	0,5	0,4	0,5	1,0
II	2,7	3,4	0,9	1,2	1,0	2,1
III	6,2	6,2	2,9	3,0	2,4	5,4
IV	9,0	9,9	5,2	5,9	3,3	8,9
V	14,1	18,3	9,0	11,3	5,4	15,6
VI	14,4	15,3	9,4	10,1	5,2	15,0
VII	13,9	13,9	9,1	9,1	3,9	13,0
VIII	12,1	12,0	7,2	7,2	3,9	11,1
IX	9,2	10,7	4,7	5,5	3,4	8,5
X	6,4	5,2	2,6	2,1	2,3	4,7
XI	2,0	2,0	0,6	0,5	0,4	1,0
XII	0,9	1,0	0,2	0,2	0,3	0,5
Rok	93,0	99,4	52,3	56,1	32,7	86,9

Tablica IV.

Sumy roczne ciepła w kalorjach kilogramowych dla kilkunastu miejscowości na kuli ziemskiej.

Półkula zachodnia			Półkula wschodnia		
	szer. geog.	kal. kg.		szer. geog.	kal. kg.
Hawana (Kuba)	23°,2 N	159	Johannesburg	26°,2 N	151
Tacubaya (Meksyk)	19°,4 N	155	Lour. Marques	26°,0 N	146
Mout Weather (USA)	39°,1 N	128	Davos	46°,8 N	150
Washington (USA)	38°,9 N	126	Paryż	48°,8 N	109
Madison (USA)	43°,1 N	120	Warszawa	52°,2 N	**87**
Toronto (Kanada)	43°,7 N	92	Rothamsted	51°,8 N	72
Nowy York (USA)	40°,8 N	84	Stockholm	59°,4 N	68
Chicago (USA)	41°,8 N	77	Pawłowsk	59°,7 N	61

W Tablicy IV podajemy zestawienie sum rocznych ciepła w kalorjach kilogramowych dla kilkunastu miejscowości ziemi, uzupełniając kilka gotowych już opracowań własnemi danemi.

Wł. Gorczyński.

Contribution to knowledge of diffuse radiation values in the general thermic balance of the earth.

Mémoire présenté dans la séance du 28 Mai 1932.

Summary.

After some preliminary remarks concerning the calculation of daily, seasonal or annual totals of solar radiation in calories, the author gives in the first part of his paper an example of a complete determination of normal, horizontal, diffuse and total intensity of solar radiation with a pyrheliometric tube combined with a solarimeter. In the second part are presented some diffuse radiation values obtained on Mediterranean Sea (see Tabl. II) by solarimetric method. In the third and last chapter the author emphasizes the importance of diffuse radiation in the general thermic balance of the earth. The annual part of the radiation received from sky only is nearly 40% in relation to the total (direct and diffuse) radiation. The author shows the regularity and uniformity of this relation for different and very distant stations, as e. g. Tacubaya (Mexico), Paris, Pawlowsk (Sloutzk) and Stockholm. Having established the analogous seasonal and monthly percentages for Warsaw, the author calculates (see Tabl. II, III and IV) monthly and annual totals in kg. cal at Warsaw in comparison with some other places. The annual amount for Warsaw is 87 kg. cal. for a square centimeter and minute of horizontal surface of the earth exposed to the direct and diffuse radiation coming from sun and sky.

BIBLJOGRAFJA.

1. Wł. Gorczyński. Badania nad przebiegiem rocznym insolacji Rozpr. Wydz. Mat. Przyr. Akad. Um., T. XLIII, str. 86 oraz: Études sur la marche annuelle de l'insolation. Bull. Int., pp. 39. Kraków 1903.
2. „ „ Sur les sommes de la chaleur en gr. cal. pour Varsovie, Treurenberg et Montpellier. Bull. Météor. de l'Hérault, pp. 22. Montpellier, 1906.

3. Wł. Gorczyński. O obliczaniu sum ciepła w kalorjach gramowych. Prace Mat.-Fizyczne, T. XVIII, str. 19. Warszawa, 1907.
4. „ „ Wartości pyrheljometryczne i sumy ciepła dla Warszawy według pomiarów w okresie 1901—1913. Wydawnictwa Tow. Nauk. Warsz., str. 33. Warszawa, 1914.
5. Edward Stenz. Natężenie promieniowania słonecznego i insolacja w Warszawie według pomiarów w okresie 1913—1918. Rocznik Państwowego Instytutu Meteorologicznego za r. 1919, str. 39. Warszawa, 1922.
6. Wł. Gorczyński. O nowych przyrządach termoelektrycznych do pomiarów promieniowania słonecznego. Wiad. Meteorologiczne P. I. M., str. 10. Warszawa, 1924.
7. „ „ O solarymetrach i spektrografach do pomiarów promieniowania słonecznego. Wiad. Meteorologiczne P. I. M., str. 8. Warszawa, 1927.
8. „ „ Solarimeter and Solarigraphs. Journal of the Optical Society of America, T. 14, Febr. 1927. Porów. także: Monthly Weather Rev., t. 54, Sept. 1926.
9. „ „ Some results obtained by testing solarimeters with pyrheliometric tubes. Monthly Weather Rev., Washington, 1927.
10. „ „ Quelques résultats de mesures de l'intensité du rayonnement solaire obtenus au Sahara en 1924—1926 avec les pyrhéliographes et les solarimètres. Révue „La Météorologie", pp. 13. Paris, 1929.
11. „ „ Quelques mesures du rayonnement solaire diffusé par la voûte céleste obtenues avec les solarimètres dans les Alpes Maritimes. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, T. 192, 4 mai 1931, Paris.
12. „ „ Sur un tube pyrhéliométrique employé comme solarimètre. Révue d'optique, pp. 7. Paris, 1932.

St. J. Thugutt.

O nowej konstrukcji aparatu dystylacyjnego do wody.

Komunikat zgłoszony dn. 28 maja 1932 r.

Sur une nouvelle construction d'un appareil à distiller.

Note présentée dans la séance du 28 mai 1932.

St. J. Thugutt.

O epinatrolicie jako składniku hydronefelinowym.

Komunikat zgłoszony dn. 28 maja 1932 r.

Sur l'épinatrolite, minéral composant l'hydronéphélinite.

Note présentée dans la séance du 28 mai 1932.

St. J. Thugutt.

O filipsycie z dna oceanu Spokojnego.

Komunikat zgłoszony dn. 28 maja 1932 r.

Sur la phillipsite du fond de mer.

Note présentée dans la séance du 28 mai 1932.

Prace niniejsze zostały wydrukowane in extenso w Archiwum Mineralogicznem Tow. Nauk. Warszaw. Tom. VIII, 1932 r.

Ces travaux viennent à paraître dans „Archive de Minéralogie de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie". Vol. VIII, 1932.

Witold Wolibner.

O zbiorach wartości funkcyj analitycznych, wszędzie oznaczonych, o zbiorach osobliwości punktokształtnych, przyjmowanych na zbiorach swych osobliwości.

Przedstawił S. Mazurkiewicz dn. 28 maja 1932 r.

Streszczenie.

W pracy niniejszej udowadniam:

Twierdzenie I. Funkcja analityczna, jednoznaczna, ograniczona, wszędzie oznaczona, o punktokształtnym zbiorze swych osobliwości, przyjmuje każdą swą wartość na zbiorze swych osobliwości.

Twierdzenie II. Funkcja analityczna, jednoznaczna, ograniczona i wszędzie oznaczona na pewnej punktokształtnej części zbioru swych osobliwości, zamkniętej i jednocześnie otwartej w tym zbiorze, przyjmuje na tej części zbiór wartości zawierający wnętrze, lub punktokształtny, w zależności od tego czy funkcja w każdym otoczeniu tej części przyjmuje w punktach regularnych nieskończoną ilość razy tę samą wartość, czy nie.

Witold Wolibner.

Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout déterminées, aux singularités punctiformes, qu'elles admettent sur leurs ensembles singuliers.

Mémoire présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 28 mai 1932.

Théorème I. Une fonction analytique, uniforme, bornée, partout déterminée, aux singularités punctiformes, admet toutes ses valeurs sur son ensemble singulier.

Je suppose que la fonction analytique $f(x)$ qui remplit les conditions énumérées dans l'énoncé du théorème I, n'admet pas sur son ensemble singulier une valeur a qu'elle admet en un point régulier.

La fonction $f(x)$, comme fonction analytique, uniforme, partout déterminée, admet en chaque point une seule valeur car tous les chemins qui conduisent au même point, sont équivalents à cause de la punctiformité des singularités de $f(x)$; $f(x)$ est donc continue. J'admet, sans restreindre la généralité, que le point à l'infini est régulier, alors comme $f(x)$ est continue et l'ensemble des singularités de $f(x)$ est punctiforme, je peux enfermer les singularités de $f(x)$ dans l'intérieur d'un nombre fini des polygones K_l, $l = 1, 2, \cdots m$, disjoints, situés dans le domaine de régularité de $f(x)$ et de diamètres si petits que $|f(x) - a| \geqslant r > 0$ quand x est à l'intérieur de K_l, et que les ensembles des valeurs de $f(x)$ admis sur chaque K_l aient des diamètres moindres que r. Il en résulte:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_l} \frac{f'(x)}{f(x)-a}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_l} d\lg(y-a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_l} d\arg(y-a),$$

où H_l désigne la courbe fermée de Jordan, image de K_l sur le plan de $y = f(x)$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_l} \frac{f'(x)\,dx}{f(x)-a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_l} d\arg(y-a) = 0,$$

car autrement le point a devrait appartenir à un constituant borné du complément de H_l et par conséquent ce constituant borné devrait contenir le cercle de centre a et de rayon r, comme la distance du point a à H_l surpasse r, ce qui est impossible, parce que le diamètre de H_l est moindre que r.

Donc $\displaystyle\sum_{l=1}^{m} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_l} \frac{f'(x)}{f(x)-a}\,dx = 0$. La dernière égalité exprime que la fonction analytique $f(x)$ n'admet pas la valeur a aux points extérieurs à tous les polygones K_l, ce qui nous amène à une contradiction.

Théorème II. Soit $f(x)$ une fonction analytique, uniforme, bornée et partout déterminée sur une partie punctiforme P de l'ensemble S de ses singularités; P étant fermée et en même temps ouverte sur S.

L'ensemble des valeurs de la fonction $f(x)$ sur la partie P contient des points intérieurs, ou bien il est punctiforme, selon que dans chaque entourage de P la fonction $f(x)$ admet une valeur en un nombre infini des points réguliers, ou non.

J'admets sans restreindre la généralité que la partie P est bornée. Je peux alors enfermer cette partie, fermée et en même temps ouverte, sur l'ensemble S, dans l'intérieur d'un nombre fini des polygones disjoints, situés dans le domaine de régularité de la fonction $f(x)$, et qui ne contiennent pas dans leurs intérieurs d'autres points singuliers que les points de la partie P.

Je désigne un de ces polygones par O et l'ensemble des points singuliers de la partie P situés à l'intérieur de O par C.

Il est évident qu'il suffit de démontrer le théorème II pour la fonction $f(x)$ et la partie C de ses singularités.

La démonstration de la première partie du théorème II.

En déformant si peu que je veux le polygone O, je peux obtenir que $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in O$ n'ait lieu que pour un nombre fini des points x_1. L'image L de O sur le plan de $y=f(x)$ sera alors une courbe fermée de Jordan qui ne possedera qu'un nombre fini des points multiples, chacun d'une multiplicité finie.

Le complément de L se compose par conséquent d'un nombre fini des constituants. L'ordre d'un point par rapport à la courbe L ne change pas tant que ce point reste dans le même constituant du complément de L. Il existe donc un nombre n tel, que $\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_O \frac{f'(x)}{f(x)-a} dx \right| \leqslant n$ quand a non $\in L$, parce que l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_O \frac{f'(x)}{f(x)-a} dx$ est égale à l'ordre du point a par rapport à la courbe L. Si la fonction $f(x)$ admet une valeur g, aux $n+1$ points distincts, réguliers, intérieurs au polygone O, $q_1, q_2, \cdots q_{n+1}$ il existe alors un cercle G de centre g et de rayon si petit, que la fonction $f(x)$ admet tous ses points comme valeurs sur $n+1$ ensembles fermés, disjoints, situés dans le domaine de régularité de $f(x)$ à l'intérieur de O, entourants les points $q_1, q_2 \cdots q_{n+1}$, $Q_1, Q_2, \cdots Q_{n+1}$.

L'ensemble $G-L$ possède des points intérieurs; je dis que $f(x)$ admet chaque point de $G-L$ comme valeur en un point de C. S'il n'en était pas ainsi il exsterait un point $b \in G-L$

tel que $f(x)$ n'admettrait pas la valeur b en aucun point de C. Comme il suit de la démonstration du théorème I il existerait alors un polygone O' situé dans le domaine de régularité de $f(x)$ à l'intérieur de O, contenant dans son intérieur l'ensemble C et tel que $f(x)$ n'admette pas la valeur b dans l'intérieur de O' et que $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O'} \frac{f'(x)}{f(x)-b}dx = 0$. Donc $\left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O} \frac{f'(x)\,dx}{f(x)-b} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O'} \frac{f'(x)\,dx}{f(x)-b} \right| \leqslant n$, ce qui amène à une contradiction, car b est admis comme valeur par la fonction $f(x)$ en $n+1$ points distincts appartenant aux ensembles $Q_1, Q_2, \cdots Q_{n+1}$ situés entre O et O'.

La démonstration de la seconde partie du théorème II.

Lemme. Une fonction analytique admet sur une partie de l'ensemble de ses singularités un ensemble non dense de valeurs, si sur un entourage de cette partie elle est uniforme et admet toute sa valeur dans un nombre fini de points réguliers de cet entourage.

Je suppose qu'une fonction analytique $f(x)$ uniforme dans un domaine de régularité U, entourant une partie P de ses singularités admet sur P comme valeurs tous les points d'un cercle G. Je dis qu'il existera alors pour chaque nombre naturel m un cercle G_m ($G_{m+1} \subset G_m$) tel que $f(x)$ admettra tous ses points comme valeurs sur P et sur m ensembles fermés $Q_1, Q_2 \cdots Q_m$ disjoints, situés dans U. On peut prendre G comme G_0; en admettant l'existence de G_m, je démontre l'existence de G_{m+1}. La distance r de l'ensemble fermé $Q_1 + Q_2 + \cdots Q_m$ situé dans U à la partie P est positive.

Le centre g de G_m doit être admis comme valeur par la fonction $f(x)$ en un point $p \in P$. Il existe alors un point régulier u appartenant à U, à distance de P moindre que r, auquel la fonction $f(x)$ admet une valeur g' située à l'intérieur de G_m. Comme u non-$\in (Q_1 + Q_2 + \cdots Q_m)$, il existe un cercle G_{m+1} de centre g' et de rayon si petit qu'il soit contenu dans G_m et que tous ses points soient admis par $f(x)$ sur un ensemble fermé Q_{m+1} entourant le point u, appartenant à U et disjoint avec $(Q_1 + Q_2 + \cdots Q_m)$. Tout les points du cercle G_{m+1} sont donc admis par $f(x)$ comme valeurs sur la partie P et sur $m+1$ ensembles fermés $Q_1, Q_2, \cdots Q_{m+1}$ disjoints, appartenant à U. $f(x)$ admet donc une valeur dans un nombre infini de points appartenant à U, ce qui prouve le lemme.

Si la seconde partie du théorème II était en défaut, l'ensemble R des valeurs de $f(x)$ sur C, contiendrait un continu D distinct d'un point. Je dis que pour chaque nombre naturel m il existerait alors un continu D_m $(D_{m+1} \subset D_m)$ distinct d'un point, admis par la fonction $f(x)$ sur C et sur m ensembles fermés $Q_1, Q_2, \cdots Q_m$, disjoints, appartenants au domaine de régularité de $f(x)$ à l'intérieur de O.

On peut prendre D comme D_0; en admettant l'existance de D_m, je démontre l'existance de D_{m+1}. Comme $f(x)$ est continue sur C, je peux enfermer l'ensemble punctiforme C à l'intérieur d'un nombre fini des polygones K_l, $l = 0, 1, 2 \ldots n$, disjoints entre eux et avec $(Q_1 + Q_2 + \cdots Q_m)$, situés dans le domaine de régularité de $f(x)$ à l'intérieur de O, de diamètres si petits que les ensembles des valeurs de $f(x)$, H_l admis sur K_l aient des diamètres moindres que le diamètre de D_m. Soit K_0 le polygone, à l'intérieur duquel se trouve un point singulier c, auquel $f(x)$ admet comme valeur un point d appartenant à D_m. Les ensembles H_0 et D_m possèdent un point commun. S'il était autrement le continu D_m de diamètre plus grand que le diamètre de H_0 devrait appartenir au constituant extérieur E du complément de H_0. Il existerait alors un point régulier c_1 intérieur à K_0, tellement proche de c que $d_1 = f(c_1)$ et $d_1 \in E$. Comme l'ensemble R est d'après le lemme non dense, il existerait un point régulier c_2 intérieur à K_0, tellement proche de c_1 que $d_2 = f(c_2)$, $d_2 \in E$ et que d_2 non-$\in R$. L'ordre du point d_2 qui appartiendrait à E par rapport à la courbe fermée de Jordan H_0 serait par conséquent 0, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_0} \frac{f'(x)}{f(x) - d_2}\,dx = 0$. Comme d_2 non-$\in R$ je pourrais construire, comme il suit de la démonstration du théorème I, un polygone K_0' intérieur à K_0, contenant dans son intérieur la partie de l'ensemble C, intérieur à K_0, et tel que $f(x)$ n'admettrait pas la valeur d_2 à l'intérieur de K_0' et que $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_0'} \frac{f'(x)}{f(x) - d_2}\,dx = 0$.

On aurait donc $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_0} \frac{f'(x)}{f(x) - d_2}\,dx - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_0'} \frac{f'(x)}{f(x) - d_2}\,dx = 0$, ce qui donnerait une contradiction, parceque $f(c_2) = d_2$ et c_2 est un point régulier, situé entre K_0 et K_0'. Il existe donc un point h commun à D_m et H_0 et un point $q \in K_0$, tel que $f(q) = h$.

Comme K_0 est disjoint avec l'ensemble fermé $(Q_1+Q_2+\cdots Q_m)$ et $f(q)=h$, $h \in D_m$, il existe un continu D_{m+1} distinct d'un point, appartenant à D_m et de diamètre si petit, que tous les points de D_{m+1} sont admis comme valeurs par la fonction $f(x)$ sur un ensemble fermé Q_{m+1} entourant le point q, disjoint avec $(Q_1+Q_2+\cdots Q_m)$, situé dans le domaine de régularité de $f(x)$ à l'intérieur de O. Les points du continu D_{m+1} sont donc admis comme valeurs par $f(x)$ sur $m+1$ ensemble fermé, disjoint, appartenant au domaine de régularité de la fonction $f(x)$ à l'intérieur de O. La fonction $f(x)$ admettrait donc une valeur dans un nombre infini des points réguliers à l'inté rieur de O, ce qui est contraire aux conditions de la seconde partie du théorème II.

Quelques conclusions du théorème II.

Soit $f(x)$ une fonction analytique, uniforme, bornée et partout déterminée sur une partie punctiforme P de l'ensemble S de ses singularités; P étant fermée et en même temps ouverte sur S
Soit A l'ensemble des valeurs de $f(x)$ admises sur P.

Je désigne par $\bar{G}$ la somme de l'intérieur de l'ensemble A et de sa frontière.

1. $A-\bar{G}$ est punctiforme.

S'il était autrement $A-\bar{G}$ contiendrait un continu D distinct d'un point, disjoint avec $\bar{G}$. Les points de P auquels la fonction $f(x)$ admettrait comme valeurs les points du D, formerait un ensemble fermé Q. Comme l'ensemble P est punctiforme il existerait alors une partie T de P, fermée et en même temps ouverte sur P et par conséquent sur S, qui contiendrait l'ensemble Q et se composerait seulement des points si peu éloignés de Q que l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur T serait disjoint avec $\bar{G}$.

L'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur T, n'étant pas punctiforme, devrait d'après le théorème II contenir des points intérieurs, ce qui conduit à une contradiction, car il est disjoint avec $\bar{G}$.

J'appelle W l'ensemble des points de P dans l'entourage desquels $f(x)$ admet une valeur dans un nombre infini des points réguliers. W est évidemment fermé.

2. L'ensemble W est parfait.

Si W possédait des points isolés il y aurait une partie T de P fermée et en même temps ouverte sur P, qui contiendrait un seul point w de W.

D'après le théorème II l'ensemble I des valeurs de $f(x)$ sur T, contiendrait un cercle de rayon $r > 0$. Il existerait aussi une partie T' de T, fermée et en même temps ouverte sur T qui contiendrait le point w et aurait un diamètre si petit que l'ensemble I' des valeurs de $f(x)$ sur T', ait un diamètre moindre que r. $(T - T')$ serait aussi fermée et en même temps ouverte sur S, et ne contiendrait aucun point de W. D'après le théorème II l'ensemble I'' des valeurs de $f(x)$ sur $(T - T')$, devrait être punctiforme. $I = I' + I''$, ce qui amène à la contradiction, car la somme d'un ensemble de diamètre moindre que r et d'un ensemble punctiforme ne peut pas contenir un cercle de rayon r.

3. L'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur W, $f(W) = \overline{G}$.

Si un point $w \in W$ et $f(w)$ non-$\in \overline{G}$, alors il existerait une partie T de P fermée et en même temps ouverte sur P, qui contiendrait le point w et aurait un diamètre si petit que les valeurs de $f(x)$ sur T seraient disjoints avec $\overline{G}$ et par conséquent ne contiendraient pas des points intérieurs, ce qui amène à une contradiction avec le théorème II, car T contient le point $w \in W$. Chaque point de $f(W)$ appartient donc à $\overline{G}$.

Si d'autre part $g \in \overline{G}$, n'appartenait pas à $f(W)$, il existerait une partie T de P, fermée et en même temps ouverte sur P, disjointe avec W et telle que $f(T)$ contiendrait g et un entourage de g, et bien elle contiendrait des points intérieurs, ce qui amène à une contradiction, parce que selon le théorème II $f(T)$ devrait être punctiforme. Chaque point de $\overline{G}$ appartient donc à $f(W)$.

Toutes les considérations de cette note sont valables pour une classe des fonctions $f(x)$ plus étendue, notamment pour les fonctions analytiques qui sont uniformes, bornées et partout déterminées sur une partie P de l'ensemble S de leurs singularités, P étant fermée et en même temps ouverte sur S et $f(x)$ admettant une seule valeur sur chaque composante de P. Dans les démonstrations analogues il y aurait peu à modifier ce qui ne présenterait pas de difficulté.

Posiedzenie.

z dnia 30 czerwca 1932 r.

Leon Trzeciakiewicz.

Uwaga o przesunięciach zbiorów linjowych. [1]

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dnia 30 czerwca 1932 r.

Streszczenie.

Autor dowodzi, że jeżeli M i N są dwa zbiory linjowe nieskończone, wzajemnie się dopełniające, to istnieje takie przesunięcie zbioru M, które ma nieskończenie wiele punktów wspólnych ze zbiorem N. Wynika stąd, że pewne twierdzenie prof. Banacha, dotyczące przesunięć zbiorów [2]), nie może być wzmocnione.

Leon Trzeciakiewicz.

Remarque sur les translations des ensembles linéaires.

Présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 30 juin 1932.

En admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ M. S. Banach a démontré récemment [2]) qu'il existe deux ensembles linéaires M et N de puissance du continu, complémentaires l'un de l'autre et tels que toute translation de M ait avec N un ensemble au plus dénombrable de points communs.

---

[1]) Praca wykonana w Seminarjum prof. Sierpińskiego w Uniwersytecie Stefana Batorego w Wilnie.

[2]) *Fundamenta Mathematicae* t. XIX, p. 14 et 15. Cf. aussi S. Ruziewicz et W. Sierpiński, ibidem, p. 20.

Le but de cette Note est de démontrer que *si M et N sont deux ensembles infinis complémentaires l'un de l'autre, il existe toujours une translation de M qui a avec N une infinité de points communs.*

Si l'un des ensembles M et N est borné supérieurement et l'autre inférieurement, notre théorème est évident (puisque dans ce cas il existe évidemment une translation de M qui a un segment en commun avec N). Pareillement le théorème est évident, lorsqu'un des ensembles M et N est borné.

Nous pouvons donc supposer que les ensembles M et N ne sont pas bornés supérieurement (le cas où ils ne sont pas bornés inférieurement se traitant d'une façon tout à fait analogue).

S'il existe une infinité de points x d'un des ensembles M et N, tels que les points $x+1$ ne lui appartiennent pas, le théorème est évidemment vrai. Supposons donc qu'il existe dans M seulement un nombre fini de points x, soit $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tels que $x+1$ appartient à N, et qu'il existe dans N seulement un nombre fini de points y, soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tels que $y+1 \in M$.

Les ensembles M et N n'étant pas bornés supérieurement, il existe dans M un nombre $x > x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et dans N un nombre $y > y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. De $x > x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et de la définition des nombres x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ résulte tout de suite que $x+1$ appartient encore à M, donc, d'après $x+1 > x > x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, que $x+2 \in M$, et, généralement, $x+k \in M$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Pareillement de $y > y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ résulte que $y+k \in N$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ Une translation de M de longueur $y - x$ a évidemment une infinité de points communs avec N.

Notre théorème est ainsi démontré.

L'unité de longueur étant arbitraire, on voit aussi sans peine qu'il existe une translation de M aussi petite que l'on veut qui a avec N une infinité de points communs.

Notre théorème subsiste pour les ensembles dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Voici une démonstration pour le plan due à M. S. K. Zaremba.

Soient M et N deux ensembles infinis plans, complémentaires l'un de l'autre.

S'il existe une droite parallèle à l'axe des abscisses contenant une infinité de points de M et une infinité de points de

N, le théorème est évidemment vrai (puisqu'il est vrai pour les ensembles linéaires).

Dans le cas contraire, si une droite parallèle à l'axe des abscisses contient une infinité de points de M, elle ne contient qu'un nombre fini de points de N, et inversement. Si parmi ces droites il y en a au moins une qui contient une infinité de points de M et au moins une qui contient une infinité de points de N, le théorème est encore vrai, puisqu'on trouve facilement une translation de M parallèle à l'axe des ordonnées qui a une infinité de points communs avec N. Il ne reste plus qu'à envisager le cas où toutes les droites parallèles à l'axe des abscisses contiennent un nombre fini de points de M et un nombre infini de points de N, ou, inversement, toutes ces droites contiennent un nombre infini de points de M et un nombre fini de points de N.

Supposons p. ex. que la première alternative soit vérifiée. Comme le nombre de points de M est infini, il existe une infinité de droites parallèles à l'axe des abscisses et contenant au moins un point de M. Parmi celles-ci, choisissons une suite infinie, $D_1, D_2, D_3 \ldots.$ Désignons par E l'ensemble des points de M situés sur le droites de cette suite. Cet ensemble est donc dénombrable.

L'ensemble de toutes les différences d'abscisses de deux points de E est donc aussi dénombrable et il existe un nombre réel a distinct de toutes ces différences. On voit sans peine que la translation de M de longueur a parallèlement à l'axe des abscisses a une infinité de points communs avec N.

On traîte pareillement le cas où chacune de droites parallèles à l'axe des abscisses contient seulement un nombre fini de points de N.

Notre théorème est donc vrai (pour le plan) dans tous les cas. La démonstration pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions s'achève facilement par l'induction.

Wilno, le 16 juin 1932.