COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXIV Année 1931 Fascicule 1

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXIV 1931 Zeszyt 1

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1931

DRUK
ZAKŁADÓW
GRAFICZNO-
INTROLIGATORSKICH
J. DZIEWULSKI s. z o. o.
WARSZAWA, ZŁOTA 29

TREŚĆ ZESZYTU 1.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 15 stycznia 1931 r.

Hanna Szmuszkowiczówna.

O średnicy pozaskończonej.

Przedstawił S. Mazurkiewicz na posiedzeniu dnia 15 stycznia 1931 r.

Streszczenie.

Praca niniejsza zawiera wyniki następujące: 1) dowodzę bez użycia liczb pozaskończonych twierdzenia Polyi orzekającego, że średnica pozaskończona dowolnego zbioru domkniętego, ograniczonego równa się średnicy pozaskończonej jego jądra doskonałego, 2) oznaczając przez $\tau(A)$ średnicę pozaskończoną zbioru A dowodzę następującej addytywnej własności funkcji $\tau(A)$: jeżeli $\tau(C) = 0$ wówczas $\tau(B+C) = \tau(B)$.

Hanna Szmuszkowiczówna.

Sur le diamètre transfini.

Présenté par M. S. Mazurkiewicz dans la séance du 15 Janvier 1931.

M. Fekete a introduit en 1921 une fonction d'ensemble $\tau(A)$, qu'il a nommé le *diamètre transfini* de l'ensemble A. Les propriétés de $\tau(A)$ ont été étudiées et appliquées par M. M. Fekete, Polya et Szegö [1]. Le but de cette Note est 1)

[1] Fekete: **1** Math. Zeitschr. 17 (1921) p. 228—249; **2** Math. Zeitschr. 32 (1930) p. 108—115; Polya: Math. Ann. 99 (1928) p. 687—706; Szegö: Math. Zeitschr. 21 (1924) p. 203—208.

d'établir une propriété additive de $\tau(A)$ dont un cas particulier a été signalé par M. Fekete, 2) de simplifier la démonstration de certains résultats de M. Polya par l'élimination des nombres transfinis.

A étant un ensemble plan, borné, fermé nous désignons pour n naturel par $T_n(x, A)$ le n-ème polynome de Tschebyscheff attaché à l'ensemble A et nous posons: $T_0(x, A) = 1$.

Le diamètre transfini $\tau(A)$ est défini pour les ensembles A plans, bornés et fermés par l'une des relations:

a) $$\tau(A) = \lim_{n=\infty} \sigma_n(A)$$

où [1])

$$\sigma_n(A) = \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\operatorname{Max} \prod_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n} |x_i - x_k|} \qquad x_i \varepsilon A,\ x_k \varepsilon A$$

b) $$\tau(A) \lim_{n=\infty} = \sqrt[n]{\tau_n(A)}$$

où:

$$\tau_n(A) = \operatorname{Max} T_n(x, A) \qquad x \varepsilon A.$$

La classe de tous les ensembles plans, fermés et bornés peut être considérée comme un espace métrique, la *distance* $\overline{AB}$ de deux ensembles étant définie comme il suit: [2]) soit $\delta(x, A) =$ borne inférieure de $|x - y|$ pour $y \varepsilon A$; on pose:

$\overline{AB} =$ Maximum [borne supérieure de $\delta(x, A)$ pour $x \varepsilon B$, borne supérieure de $\delta(z, B)$ pour $z \varepsilon A$].

Si l'on a pour un ensemble A et une suite d'ensembles $\{A_n\}$, $n = 1, 2\ldots$ la relation $\lim\limits_{n=\infty} \overline{AA_n} = 0$, on pose: $A = \lim A_n$ et on dit que la suite $\{A_n)$ converge vers A.

Lemme I. *Si $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ est une fonction réelle partout continue de n variables complexes, alors la fonction d'ensemble:*

$$\varphi(A) = \operatorname{Max} f(x_1, x_2 \ldots x_n) \qquad x_i \varepsilon A,\ i = 1, 2 \ldots n;$$

---

[1]) $x \varepsilon A$ signifie x est un élément de l'ensemble A.

[2]) Hausdorff: Mengenlehre (1927) p. 145—146; $\lim A_n$ est le „metricher Limes" de M. Hausdorff; dans le cas considéré il est identique au: „abgeschlossener Limes", comp. l. c. p. 146—150.

(A fermé, borné) *est semi-continue supérieurement,* c. à d. la relation $\lim A_k = A$ entraine:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \varphi(A_k) \leqq \varphi(A)$$

f étant continue et les A_k — bornés et fermés, il existe pour tout k naturel un système de points $x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots x_n^{(k)}$ tel que: $x_i^{(k)} \varepsilon A_k$, $i = 1, 2 \ldots n$ et

$$\varphi(A_k) = f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots x_n^{(k)}) .$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite $\{k_r\}$, $r = 1, 2 \ldots$ d'entiers positifs telle que: 1) les suites $\{x_i^{(k_r)}\}$, $i = 1, 2 \ldots n$ convergent, 2) on a: $\lim\limits_{r=\infty} \varphi(A_{k_r}) = \overline{\lim\limits_{k=\infty}} \varphi(A_k)$. Posons: $\lim\limits_{r=\infty} x_i^{(k_r)} = \overline{x}_i$. On aura: $\overline{x}_i \varepsilon \lim A_k = A$, $i = 1, 2 \ldots n$, donc:

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \varphi(A_k) = \lim_{r=\infty} \varphi(A_{k_r}) = \lim_{r=\infty} f(x_1^{(k_r)}, x_2^{(k_r)} \ldots x_n^{(k_r)}) =$$

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n) \leqq \varphi(A) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme II. $\tau(A)$ *est semi-continue supérieurement.*

On a $\sigma_{n+1}(A) \leqq \sigma_n(A)$ [1]. D'autre part d'après le lemme I $[\sigma_n(A)]^{\frac{n(n-1)}{2}}$, donc aussi $\sigma_n(A)$ sont semi-continues supérieurement. Il en résulte que $\tau(A)$ est la limite d'une suite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement, ce qui entraîne [2] la semi-continuité supérieure de $\tau(A)$ [3].

Lemme III. *La propriété exprimée par l'inégalité* $\tau(A) \geqq \alpha$ *est inductive,* c. à d. $\{A_k\}$ étant une suite descendante d'ensembles bornés et fermés, si l'on a pour tout k naturel: $\tau(A_k) \geqq \alpha$, alors: $\tau\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqq \alpha$.

Comme on a dans le cas considéré $\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \lim A_k$, le lemme III est une conséquence immédiate du lemme II.

---

[1]) Fekete: **1** p. 230—231.

[2]) Caratheodory: Vorlesungen über reele Funktionen (1927) p. 175—176.

[3]) On pourrait obtenir ce lemme en utilisant la monotonie de $\tau(A)$ et une propriété considerée par M. Fekete (**2** p. 108) sous le nom de continuité (Stetigkeit).

Nous dirons que l'ensemble A de diamètre transfini $\alpha > 0$ est *irréductiblement de diamètre transfini* α, s'il est irréductible par rapport à la propriété $\tau(A) \geqq \alpha$, c. à d. si tout sous-ensemble fermé de A qui n'est pas identique à A est de diamètre transfini $< \alpha$.

Lemme IV. *Si* $\tau(A) = \alpha > 0$, *alors* A *contient un sous-ensemble fermé qui est irréductiblement de diamètre transfini* α.

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme III et du „Reduktionssatz" de M. Brouwer [1]). Je donne cependant une démonstration directe, qui est un peu plus simple que celle du „Reduktionssatz" général.

Rangeons en une suite infinie $\{V_k\}$, $k = 1, 2 \ldots$ les intérieurs de tous les cercles dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. Posons: $A_1 = A$ et $A_{k+1} = A_k - V_k$ dans le cas où $\tau(A_k - V_k) = \alpha$ et $A_{k+1} = A_k$ si $\tau(A_k - V_k) < \alpha$.

Soit $A^* = \prod_{k=1}^{\infty} A_k$. A^* est un sous-ensemble fermé de A et d'après le lemme III on aura $\tau(A^*) = \alpha$. Soit maintenant A_1^* un sous-ensemble fermé de A^* qui n'est pas identique à A^*. L'ensemble $A^* - A_1^*$ n'étant pas vide soit x_0 un point de cet ensemble. Comme $\delta(x_0, A_1^*) > 0$, on peut déterminer un nombre complexe z_0 à coordonnées rationnels et un nombre rationnel ρ_0 de manière à avoir les inégalités:

$$(1) \qquad |x_0 - z_0| < \rho_0 ; \quad |x_0 - z_0| + \rho_0 < \delta(x_0, A_1^*).$$

L'intérieur du cercle de centre z_0 et de rayon ρ est contenu dans la suite $\{V_k\}$, soit V_{k_0} ce cercle. D'après (1), A_1^* est extérieur à V_{k_0}, donc d'après la monotonie du diamètre transfini:

$$(2) \qquad \tau(A_1^*) \leqq \tau(A^* - V_{k_0}) \leqq \tau(A_{k_0} - V_{k_0}).$$

Mais on ne peut pas avoir $\tau(A_{k_0} - V_{k_0}) = \alpha$, car dans ce cas on aurait $A_{k_0+1} = A_{k_0} - V_{k_0}$ et x_0 qui d'après (1) est contenu dans V_{k_0} ne serait pas contenu dans A_{k_0+1}, donc à fortiori dans A^*. Donc: $\tau(A_{k_0} - V_{k_0}) < \alpha$ et d'après (2), $\tau(A_1^*) < \alpha$ c. q. f. d.

Lemme V. *Si* B, C *sont fermés, bornés et si* $\tau(C) = 0$, *alors il existe une suite* $\{Q_n(x)\}$, $n = 1, 2 \ldots$ *telle que: 1)* $Q_n(x)$

---

[1]) Brouwer: Proc. Acad. Amsterdam 14 (1911) p. 138, comp. aussi Menger: Dimensionstheorie (1928) p. 69—70 où l'on trouve une démonstration de Hurewicz-Kuratowski, sans emploi des nombres transfinis.

est un polynome de degré n, le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$ étant $=1$. II) On a:

(3) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{x \varepsilon B} |Q_n(x)|} = \tau(B)$$

(4) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{x \varepsilon C} |Q_n(x)|} = 0 .$$

Posons $\eta_m = \sqrt[m]{\tau_m(C)}$, on a $\lim\limits_{m=\infty} \eta_m = 0$. Pour tout k naturel soit m_k le plus petit entier positif tel que $m \geqq m_k$ entraîne $\eta_m < \left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$. La suite $\{m_k\}$ est non décroissante. Posons [1]): $p_n = n$ pour $n < 2m_1$ et $p_n = E\left(\frac{n}{k}\right) + 1$ pour $km_{k-1} \leqq n < (k+1)m_k$, $k = 2, 3 \ldots$ On a évidemment:

(5) $$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n} = 0 .$$

Soit $k > 1$, $n \geqq km_{k-1}$; nous aurons: $p_n > \frac{n}{k} > m_{k-1}$, donc:

$$\eta_{p_n} < \left(\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\eta_{p_n}^{\frac{p_n}{n}} < \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{p_n k}{n}} < \frac{1}{k}$$

donc:

(6) $$\lim \eta_{p_n}^{\frac{p_n}{n}} = 0 .$$

Posons:

(7) $$Q_n(x) = T_{n-p_n}(x, B) . T_{p_n}(x, C) .$$

La condition I est remplie. Pour démontrer II, posons: $\frac{\sigma}{4} =$ Maximum $|x|$ pour $x \varepsilon (B + C)$

Soit x_0 un zéro de $T_n(x, B)$, on a $|x_0| \leqq \frac{\sigma}{2}$ (en effet, si $|x_0| > \frac{\sigma}{2}$, on obtient en remplaçant dans $T_n(x, B)$ le facteur

---

[1]) $E(z)$ désigne le plus grand entier $\leqq z$.

$(x - x_0)$ par x, un polynome $T^*(x)$ de degré n, ayant le coefficient de x^n égal à 1 et inférieur en valeur absolue à $T_n(x, B)$ pour $|x| \leqq \frac{\sigma}{4}$, donc à fortiori pour tout $x \varepsilon B$, ce qui est en contradiction avec la propriété fondamentale des polynomes de Tschebyscheff). Il en résulte l'inégalité:

$$|T_n(x, B)| \leqq \sigma^n \qquad \text{pour} \qquad x \varepsilon C \tag{8}$$

et de même:

$$|T_n(x, C)| \leqq \sigma^n \qquad \text{pour} \qquad x \varepsilon B \tag{9}$$

(7), (8), (9) entraînent:

$$\sqrt[n]{|Q_n(x)|} \leqq \sqrt[n]{\tau_{n-p_n}(B)} \cdot \sigma^{\frac{p_n}{n}} \qquad x \varepsilon B \tag{10}$$

$$\sqrt[n]{|Q_n(x)|} \leqq \sigma^{\frac{n-p_n}{n}} \cdot \eta_{p_n}^{\frac{p_n}{n}} \qquad x \varepsilon C. \tag{11}$$

D'après (5), (7) il en résulte (4) et

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname*{Max}_{x \varepsilon B} |Q_n(x)|} \leqq \tau(B) \tag{12}$$

mais d'autre part on a d'après la propriété fondamentale des polynomes $T_n(x, B)$:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname*{Max}_{x \varepsilon B} |Q_n(x)|} \geqq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\tau_n(B)} = \tau(B). \tag{13}$$

Donc on a (3) et le lemme est démontré.

La monotonie de $\tau(A)$ et les relations (3) et (4) entraînent:

$$\tau(B) \leqq \tau(B+C) = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\tau_n(B+C)} \leqq \tag{14}$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname*{Max}_{x \varepsilon B+C} |Q_n(x)|} = \tau(B)$$

on a donc le suivant.

Théorème I [1]). *Si B, C sont fermés, bornés et si $\tau(C)=0$, alors:* $\tau(B+C)=\tau(B)$.

Théorème II (de Polya [2])). *Le diamètre transfini d'un ensemble A est égal au diamètre transfini de son noyau parfait A_c*, c. à d. de l'ensemble de points de condensation de A.

Si $\tau(A)=0$ le théorème est évident; si $\tau(A)=\alpha>0$, A contient un sous-ensemble A^* qui est irréductiblement de diamètre transfini α (d'après le lemme IV). Supposons que A^* contient un point isolé (x_0). L'ensemble $A^*-(x_0)$ est un sous-ensemble fermé A^* non identique à A^*, donc: $\tau[A^*-(x_0)]<\tau(A^*)=\alpha$. Mais comme d'autre part $\tau((x_0))=0$ on a d'après le Théorème I: $\tau[A^*-(x_0)]=\tau(A^*)=\alpha$, donc on arrive à une contradiction. Il en résulte que A^* est dense en soi, donc parfait, donc contenu dans A_c, ce qui entraîne:

$$\tau(A^*)=\alpha\leqq\tau(A_c)\leqq\alpha=\tau(A)$$

donc $\tau(A_c)=\tau(A)$ c. q. f. d.

---

[1]) Démontré par M. Fekete dans le cas spécial où C se réduit à un point comp. Fekete **2** p. 108—111.

Remarquons, que l'on a pas en général $\tau(B+C)\leqq\tau(B)+\tau(C)$. Soit A l'ensemble parfait, punctiforme de Cantor, B et C les parties de A situées dans les intervalles $0\leqq\xi\leqq\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}\leqq\xi\leqq 1$ respectivement. On a $B+C=A$, et, B et C s'obtenant de A par les transformations $x'=\frac{1}{3}x$; $x'=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x$ respectivement — $\tau(B)=\tau(C)=\frac{1}{3}\tau(A)$, donc $\tau(B+C)=\frac{3}{2}[\tau(B)+\tau(C)]$. Comme $\tau(A)\geqq\frac{1}{9}>0$ (Fekete **2** p. 114) on a $\tau(B+C)>\tau(B)+\tau(C)$.

[2]) Polya l. c. p. 695, Fekete **2** p. 108 ss.

S. Steckel.

O ciągach iteracyj.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 15 stycznia 1931 r.

Streszczenie.

Autor rozważa ciągi iteracji przekształceń ciągłych, określonych w dowolnych przestrzeniach metrycznych, i spełniających pewien warunek w punktach podwójnych przekształcenia. Stąd przechodzi z kolei do badania ciągów iteracyj funkcyj holomorficznych, których pochodna jest w punktach podwójnych (t. j. spełniających warunek $z = f(z)$) większa — co do wartości bezwzględnej — od jedności.

S. Steckel.

Un théorème sur les fonctions itérées [1].

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 15 Janvier 1931.

1. Soit $f(x)$ une fonction continue définie dans un espace métrique E. Nous dirons qu'elle vérifie dans E la condition (A) lorsque

(1) $$f(E) \subset E,$$

et lorsque à tout point $\xi \varepsilon E$ tel que $f(\xi) = \xi$, correspond un nombre positif r tel que les relations

$$x \varepsilon E \quad \text{et} \quad \rho(x, \xi) < r$$

entraînent

$$\rho[f(x), f(\xi)] = \rho[f(x), \xi] \geqslant \rho(x, \xi).$$

$f(x)$ étant une fonction satisfaisant à la condition (1), nous convenons de désigner dans la suite par $f_n(x)$ les itérations successives de $f(x)$ déterminées, par induction, de manière suivante

(2) $$f_1(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = f[f_n(x)], \text{ pour } n \geqslant 1.$$

2. **Théorème 1.** *La fonction continue $f(x)$ vérifiant la condition (A) dans l'espace E, pour que la suite des fonctions itérées $\{f_n(x)\}$ soit convergente dans un point x_0, il faut et il suffit qu'on ait pour un certain indice ν*

(3) $$f_{\nu+1}(x_0) = f_\nu(x_0).$$

[1]) Pendant la rédaction de cette Note je profitais de l'aimable aide de M. S. Saks.

Démonstration. La condition (3) est évidemment suffisante car, dans le cas où elle est remplie, on a

$$f_n(x_0) = f_\nu(x_0)$$

pour tout $n \geqslant \nu$. Pour démontrer qu'elle est à la fois nécessaire, supposons que la limite

(4) $$\lim_n f_n(x_0) = \xi$$

existe. On a alors

$$f(\xi) = \xi,$$

et la fonction $f(x)$ satisfaisant, par l'hypothèse, à la condition (A), il existe un nombre $r > 0$ tel que l'inégalité

(5) $$\rho\,[f_n(x_0),\ \xi] < r$$

implique, pour chaque n,

(6) $$\rho\,[f_{n+1}(x_0),\ \xi] \geqslant \rho\,[f_n(x_0),\ \xi].$$

Soit $n = \nu$ la valeur de l'indice n à partir de laquelle (5) est vérifié. On a alors, en vertu de (6),

$$\rho\,[f_n(x_0),\ \xi] \geqslant \rho\,[f_\nu(x_0),\ \xi]$$

pour chaque $n \geqslant \nu$, donc d'après (4),

$$\rho\,[f_\nu(x_0),\ \xi] = 0 \quad \text{ou} \quad f_\nu(x_0) = \xi,$$

d'où évidemment

$$f_{\nu+1}(x_0) = f(\xi) = \xi = f_\nu(x_0).$$

3. Soit maintenant E un domaine ouvert dans le plan complexe et $f(z)$ une fonction holomorphe dans E. Nous dirons que $f(z)$ vérifie la condition (A^*) dans E lorsque

$$f(E) \subset E$$

et lorsque $|f'(\zeta)| > 1$ dans tout point $\zeta \varepsilon E$ tel que $f(\zeta) = \zeta$. On voit de suite que toute fonction holomorphe vérifiant la condition (A^*) dans le domaine E, y vérifie, à plus forte raison, la condition (A).

Ensuite, $\{f_n(z)\}$ désignera, comme dans le § 1, la suite des fonctions itérées définies par les égalités (2).

Théorème 2. *$f(z)$ étant une fonction holomorphe et vérifiant la condition (A^*) dans un domaine E, l'ensemble des points de E où la suite $\{f_n(z)\}$ converge est au plus dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 1 l'ensemble de points de convergence de la suite $\{f_n(z)\}$ dans le domaine E, est formé par les racines des équations

$$f_n(z) = f_{n+1}(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

dont chacune ne possède qu'un nombre fini ou au plus dénombrable de racines — sauf dans le cas où elle deviendrait l'identité. Or, on voit facilement qu'aucune de ces équations n'est remplie identiquement. En effet, observons d'abord que la fonction $f(z)$ vérifiant, par l'hypothèse, la condition (A^*), elle ne peut pas être constante, et, par conséquent, aucune de fonctions $f_n(z)$ n'est aussi constante dans E et aucune de leurs dérivées $f'_n(z)$ ne s'annulle identiquement. Ceci étant, supposons, par impossible, que l'équation (7) soit l'identité pour une certaine valeur de n; en dérivant alors les deux côtés de cette relation et en les divisant par $f'_n(z)$, on en obtient

$$1 = f'[f_n(z)]$$

ou

$$f'(z) = 1 \qquad \text{pour} \qquad z \in f_n(E), \tag{8}$$

d'où évidemment

$$f(z) = z$$ [1]

ce qui contredit évidemment à la condition (A^*).

4. Le théorème 2 peut être précisé dans un cas particulier. On a notamment le suivant

Théorème 3. *$f(z)$ étant un polynôme de degré $\geqslant 2$ vérifiant la condition (A^*) (dans tout le plan), l'ensemble des points où la suite $\{f_n(z)\}$ converge est i n f i n i e dénombrable.* [2]

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 2, il suffit de montrer seulement que l'ensemble en question est infini. Soit, en ce but, z_0 une racine quelconque de l'équation $f(z) = z$ et z_1 une racine de l'équation

$$f(z) = z_0 \tag{9}$$

différente de z_0 [3]. Ceci étant, on peut déterminer, par induction,

---

[1]) Il s'ensuit directement de (8) que $f(z) = z + C$. Or, (7) étant, par hypothèse, remplie identiquement, on voit que $C = 0$.

[2]) Cette proposition est due à M. S. O h r e n s t e i n.

[3]) Car, dans le cas où z_0 serait la seule racine de l'équation (9), il en serait une racine multiple et, par conséquent, on aurait $f'(z_0) = 0$ contrairement à la condition (A^*).

une suite de points $\{z_n\}$ de manière qu'on ait pour chaque n

$$f(z_{n+1}) = z_n,$$

et l'on vérifie aisément qu'on ait toujours

$$z_n \neq z_m \quad \text{pour } n \neq m.$$

Or on a, pour chaque n,

$$f_v(z_n) = z_0 \qquad \text{pour } v \geqslant n,$$

et la suite $\{f_n(z)\}$ converge en chaque point z_n ce qui justifie notre proposition.

5. **Exemples**. On voit aisément que pour une fonction linéaire $az+b$ satisfasse à la condition (A^*), il faut et il suffit qu'on ait $|a|>1$ ou bien $a=1$ et $b\neq 0$. Pareillement, pour qu'une fonction du second degré az^2+bz+c $(a\neq 0)$ vérifie la condition (A^*), il faut et il suffit que les racines carrées $\pm\sqrt{(b-1)^2-4ac}$ soient situées à l'extérieur des cercles $|z+1|=1$ et $|z-1|=1$. [1])

Signalons ensuite qu'il existe des polynômes de tous les degrés vérifiant la condition (A^*). En effet, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un système quelconque de n points tels qu'on ait toujours $|a_i - a_k| > 2$ pour $i\neq k$. En posant alors

$$f(z) = z + (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$$

on voit de suite que $f(z)$ est un polynôme de degré n satisfaisant à la condition (A^*).

---

[1]) Si nous posons:

$$\Delta = (b-1)^2 - 4ac,$$

alors la condition que les racines carrées: $\pm\sqrt{(b-1)^2-4ac}$ soient situées à l'extérieur des cercles $|z+1|=1$ et $|z-1|=1$ est, comme on voit sans peine, équivalente à la condition:

$$\{1-|\Delta|\}^2 > 1 + 2R(\Delta),$$

$R(\Delta)$ désignant la partie réelle de Δ.

Jacques Herbrand.

Zagadnienie podstawowe logiki matematycznej.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 15 stycznia 1931.

Sur le problème fondamental de la logique mathématique.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 15 Janvier 1931.

TABLE DES MATIÈRES.

SIGNIFICATION DES LETTRES EMPLOYÉES.

Certaines de ces lettres seront toujours des signes d'abréviation (c'est à dire qu'elles désigneront une lettre quelconque pouvant représenter la catégorie d'objet dont elles sont l'abréviation). Nous les désignerons par les mots : Signes d'abr. Chaque fois que d'autres lettres seront employées, leur sens sera précisé.

Chiffres . , ...	Signes d'abr.: i, j, h, l, m, n, p.
Individus	Signes d'abr.: a, b, c.
Variables	x, y, z, ξ, η, ζ, Signe d'abr.: t.
Fonctions	f; Signe d'abr. ; f.
Constantes	Signe d'abr.: C.
Type	Signe d'abr.: τ.
Proposition élément . .	H, V, R, ε Signes d'abr.: φ, ψ.
Proposition	Signes d'abr.: P, Q, R, Ψ, Φ.
Hypothèse	Signe d'abr.: H.
Produit d'hypothèses .	Signe d'abr.: $\mathcal{H}$.
Théorie	Signe d'abr.: T.

PRINCIPAUX TERMES EMPLOYÉS.

Nous renvoyons au paragraphe du Chapitre I contenant la définition du terme.

CHAPITRE I.

Introduction.

1. Préliminaires.

1. On sait[1]) qu'il est possible de remplacer le langage mathématique par un autre langage qui ne comporte qu'un nombre très restreint de signes, une phrase étant constituée par un assemblage de tels signes mis à la suite les uns des autres sur une même ligne. Certains de ces assemblages (ceux, précisément, qui auront un sens) seront dits des *„propositions“;* nous verrons plus loin à quelles conditions un tel assemblage est une proposition. Notre langage sera donc tel que:

1°. Toute phrase ayant un sens en Mathématiques pourra être traduite par une proposition.

2°. Toute proposition est la traduction d'une phrase ayant un sens en Mathématiques.

---

[1]) Les idées fondamentales sur lesquelles repose ce travail sont celles qui ont été exposées par Hilbert dans ses mémoires sur les nouveaux fondements des Mathématiques; on pourra aussi se reporter au travail que nous allons citer où se trouve une courte bibliographie.

Nous pouvons alors chercher à quelles conditions une proposition est la traduction d'un théorème vrai dans une Théorie Mathématique déterminée. Il faudra pour cela que nous commencions par énoncer des règles permettant de déclarer vraies certaines propositions, de telle manière que toute proposition vraie soit la traduction d'un théorème vrai, et que tout théorème vrai ait pour traduction une proposition vraie. Le problème fondamental de la Logique Mathématique est dès lors de chercher un procédé permettant sûrement de reconnaitre si une proposition est vraie ou non dans une théorie déterminée. Nous ne résoudrons pas ce problème, mais nous l'étudierons d'une manière aussi approfondie que possible.

Nous nous servirons, dans ce but, d'un Théorème qui était un des principaux résultats d'un travail antérieur [1]) auquel nous renverrons souvent. La lecture de ce travail sera pourtant inutile pour comprendre ce qui suit, car nous résumerons, dans ce premier chapitre, tout ce qui nous sera désormais utile. Un certain nombre des résultats des chapitres 2 et 3 étaient déjà connus; nous avons pourtant cru utile de les réexposer à nouveau, soit (comme au Chapitre 2) parce qu'il nous semblait que les démonstrations précédentes n'offraient aucune rigueur, et même aucune exactitude; soit (comme au Chapitre 3), parce que, outre les reproches de rigueur que nous croyons pouvoir faire à la démonstration connue, nous en présentons une autre plus simple et susceptible de généralisation. Enfin, tout cela nous permettra de montrer les nombreuses applications du Théorème auquel nous venons de faire allusion.

---

[1]) *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Thèse de l'Univ. de Paris, 1930, publiée aux Travaux de la Soc. des Sc. et Let. de Varsovie, 1930; voir aussi 4 Notes aux Comptes Rendus de Paris, T. 186, p. 1274; T. 188, p. 303 et 1076; T. 189, p. 554. Nous profitons de cette occasion pour rectifier une erreur qui s'était glissée dans cette dernière note dans l'énoncé du Problème B: au lieu de

$$„f_i\,(b_{j_1}\,b_{j_2}\ldots b_{j_{n_i}}) = f_{i'}\,(b_{j'_1}\,b_{j'_2}\ldots b_{j'_{n_{i'}}})\text{''},$$

il faut lire

$$„f_i(b_{j_1}\,b_{j_2}\ldots b_{j_{n_i}}) = c_m \quad \text{ou} \quad f_i\,(c_{j_1}\,c_{j_2}\ldots c_{j_{n_i}}) = b_m \quad \text{ou} \quad b_i = c_j\text{''}.$$

2. Les Signes.

2. Les signes employés [1]) seront des lettres, des parenthèses, des virgules, des groupes de points et des signes proprement dits.

On appellera „lettre", toute lettre de l'alphabet grec ou romain, suivie ou non d'indices.

Pour les nécessités du langage, nous emploierons d'autres signes — les *„signes d'abréviation"* — qui auront la propriété d'être des indéterminés, c'est-à-dire que, dans tout cas particulier défini où on aura à appliquer les considérations du texte, ces signes devront être remplacés par un des signes ou des concepts de la collection dont ils sont l'abréviation.

Nous nous servirons également dans le texte, de chiffres et de signes arithmétiques, en leur donnant le sens qu'ils ont dans la numération ordinaire; les signes d'abréviation correspondants seront une des lettres i, j, k, l, m, n, p suivies ou non d'indices: ces lettres désigneront donc „un chiffre quelconque".

A. **Les lettres.** On en distingue de plusieurs sortes.

α) *Les individus.* Un *individu* est un ensemble de lettres et de parenthèses formé d'après les règles qui vont suivre. Leurs signes d'abréviation seront a, b, c, suivis ou non de chiffres en indices [2]). Ces individus seront rangés en différents *types,* [3]) chaque individu appartenant à un type déterminé. Le signe d'abréviation d'un type sera τ. De plus, à chaque individu, nous ferons correspondre un chiffre que nous appellerons son degré.

Les individus élémentaires sont de degré 0, ou 1, et comprennent:

1°. Les *variables,* qui sont une des lettres x, y, z, ξ, η, ζ; signe d'abréviation: t. Leur degré est 0.

---

[1]) Il résulte des recherches de Russell et Whitehead (cf. les Principia Mathematica), que les signes que nous allons indiquer suffisent pour traduire toutes les propositions mathématiques.

[2]) Indiquons tout de suite, une fois pour toutes, que chaque fois que l'on emploiera un signe pour une catégorie d'objets, on pourra aussi l'employer avec un ou plusieurs chiffres (ou lettres) en indice supérieur ou inférieur.

[3]) Dans une théorie mathématique déterminée, chaque espèce d'individus déterminera un type (en géométrie, on aura le type des points; le type des droites, et...).

2°. Les *fonctions descriptives élémentaires*[1]) (ou, en abrégé, les fonctions élémentaires) seront désignées par un signe de forme $f t_1 t_2 \dots t_n$, chacun des t_i, ainsi que $f t_1 t_2 \dots t_n$, étant d'un type déterminé. Leur degré est 1 (n peut d'ailleurs être nul; la fonction est simplement de la forme f; dans ce cas particulier, on peut lui attribuer le degré 0).

D'autre part, désignons par $\overset{b}{[}$ tout ensemble de k signes „(" mis à la suite l'un de l'autre, (k pouvant être nul), et par $\overset{b}{]}$ tout ensemble de k signes „)" mis à la suite l'un de l'autre, k étant un un nombre quelconque au moins égal à b.

1°. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des individus respectivement des types $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, et des degrés $b_1, b_2, \dots, b_n$, et si $f t_1 t_2 \dots t_n$ est une fonction du type τ, $t_1, t_2, \dots, t_n$ étant respectivement des types $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ alors $f \overset{b_1}{[} a_1 \overset{b_1}{]} \overset{b_2}{[} a_2 \overset{b_2}{]} \dots \overset{b_n}{[} a_n \overset{b_n}{]}$ est un autre individu du type τ et de degré $k+1$, k étant le nombre de parenthèses de celui des signes $\overset{b_i}{]}$ et $\overset{b_i}{[}$ qui en contient le plus.

2°. Tout individu est, soit un individu élémentaire, soit formé à partir d'eux d'après la règle précédente.

Tout individu est dit une *„fonction descriptive"* (ou *„une fonction"*) des variables qu'il contient, qui sont dites ses *„arguments"*. Il y a des fonctions élémentaires ou non qui ne contiendront aucune variable: ce sont les *constantes;* leur signe d'abréviation sera C. Une fonction élémentaire sans argument, est dite une *constante élémentaire*. $f t_1 t_2 \dots t_n$ sera désormais sauf indication contraire, le signe d'abréviation d'une fonction quelconque.

β) *Les Propositions-éléments*[2]). Une *proposition* est un ensemble de signes formé d'après les règles que nous allons énoncer.

---

[1]) Les fonctions descriptives traduisent les fonctions ordinaires des Mathématiques.

[2]) Dans une théorie mathématique déterminée, les propositions éléments traduisent les relations fondamentales pouvant exister entre les objets étudiés par la théorie.

Une proposition-élément est un ensemble de signes de forme $\varphi a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ou $\psi a_1, a_2, \ldots, a_n$), chaque a_i étant un individu d'un type déterminé, du même type chaque fois que φ (ou ψ) interviendra dans les propositions considérées à un instant donné; il y a aussi des propositions éléments où ne figure aucun individu. Nous convenons de supprimer les virgules séparant les a_i, toutes les fois qu'il n'en résultera aucune ambiguité, en particulier toutes les fois que chaque a_i sera représenté par une seule lettre (variable ou signe d'abréviation). Nous emploierons aussi dans les chapitres suivants, pour désigner des propositions-éléments, les signes

$$Hab,\quad Vab,\quad a = b,\quad Rab,\quad a \doteqdot b,\quad abc,$$

B. **Les signes et les points.** Les points figureront sous la forme de groupes de points en nombre déterminé. Le signe d'abréviation pour une groupe de m points sera $[m]$.

Les signes sont de deux espèces:

1°. Les signes de première espèce: v, $\times$, $\supset$, $\equiv$, [1]) dont chacun sera précédé et suivi d'un groupe de points (pouvant comprendre 0 point).

2°. Les signes de deuxième espèce, de la forme: ∞, (t), $(\exists t)$ dont chacun sera suivi d'un groupe de points, (pouvant contenir 0 point).

A chaque signe de première espèce figurant dans une proposition, nous ferons correspondre deux propositions, *ses étendues;* à chaque signe de deuxième espèce, une proposition, son *étendue*.

A chaque proposition, nous ferons correspondre un chiffre, son *degré,* qui sera le plus grand de tous les chiffres obtenus, en prenant le nombre de points des groupes de points qui suivent les signes de deuxième espèce, et le nombre de points augmenté de un des groupes de points qui précédent et qui suivent les signes de première espèce; de plus le degré d'une proposition-élément sera — 1.

1°. m et n étant respectivement positifs et au moins égaux aux degrés des propositions P et Q

[1]) Nous modifierons ici légèrement le symbolisme utilisé dans le travail précité: le signe $\times$ signifiera „et" et remplacera les systèmes de points qu'on y employait dans ce but. La signification des autres signes est indiquée à la fin du paragraphe.

$$P\,[m]\,v\,[n]\,Q,\quad P\,[m] \times [n]\,Q,\quad P\,[m] \supset [n]\,Q,\quad P\,[m] \equiv [n]\,Q$$

sont de nouvelles propositions; les étendues des signes figurant déjà dans P et Q y sont les mêmes qu'en cet endroit; et les étendues des nouveaux signes v, $\times$, $\supset$, $\equiv$ sont P et Q.

2⁰. m étant plus grand que le degré de la proposition P, sauf si ce degré est nul, auquel cas m est quelconque, $\infty\,[m]\,P$, et au cas où t n'est pas une variable apparente de P, $(t)\,[m]\,P$ et $(\exists\, t)\,[m]\,P$, sont de nouvelles propositions; les étendues des signes figurant dans P sont les mêmes que dans P et l'étendue des nouveaux signes ∞, (t), $(\exists\, t)$ est P.

3⁰. Toute proposition est une proposition-élément, ou peut être fabriquée à partir des propositions-éléments par les règles qui précèdent.

Nous ferons de plus les conventions suivantes: [1])

1⁰. Nous supprimerons les groupes de points entre deux signes (t), $(\exists\, t)$ consécutifs, quand l'étendue de celui de gauche, va exactement aussi loin à droite que celle de celui de droite. Exemple:

$$(y)\,(\exists\, x) \,.\, \Phi\, x \,v\, \Psi\, y$$

au lieu de:

$$(y) : (\exists\, x) \,.\, \Phi\, x \,v\, \Psi\, y.$$

2⁰. Au lieu d'écrire:

$$P_1\, v\, [m_1]\, v\, P_2\, v\, [m_2]\, P_3\, v \,....\, v\, [m_{k-1}]\, P_k$$

avec $k-1$ signes v, les m_i décroissant avec l'indice, nous écrirons:

$$P_1\, v\, [m_{k-1}]\, P_2\, v\, [m_{k-1}]\, P_3\, v \,...\, v\, [m_{k-1}]\, P_k$$

et nous appelons cette proposition la *disjonction* de P_1, P_2,..., P_k, dits les termes de la disjonction.

3⁰. Même remarque en remplaçant v par $\times$, et „disjonction" par „produit".

4⁰. Au lieu d'écrire:

$$(t_1)\,(t_2) \,...\, (t_n)\,[m]\,\Phi$$

Φ étant une proposition, nous écrirons

$$(t_1\, t_2 \,...\, t_n)\,[m]\,\Phi\,.$$

---

[1]) Ces conventions sont tres légérement différentes de celles faites dans le travail précité; les pricipales différences venant de l'introduction du signe $\times$, et d'une petite différence dans la convention 1.

5⁰. Au lieu d'écrire:

$$(\exists\, t_1)\,(\exists\, t_2)\ldots.(\exists\, t_n)\,[m]\,\Phi$$

Φ étant une proposition, nous écrirons

$$(\exists\, t_1\, t_2 \ldots t_n)\,[m]\,\Phi\ .$$

6⁰. Nous considérerons comme indifférente la lettre représentant une variable apparente, en se souvenant toutefois de la restriction faite plus haut à ce sujet; ce qui nous permettra, par exemple, de supposer parfois que toutes les variables figurant dans une proposition sont des lettres différentes.

On reconnaît aisément que l'on peut toujours s'assurer si un assemblage de signes est une proposition d'après les règles qui précèdent, et qu'une proposition ne peut se fabriquer avec les règles précédentes, essentiellement que d'une manière et d'une seule, à partir des propositions-éléments qui y figurent.

Pour construire une proposition P à partir des propositions-éléments, il faut appliquer une certain nombre de fois les règles précédentes, et cela conduit à un certain nombre de propositions intermédiaires. A chaque fois qu'on applique une des règles, on remarquera que le nombre de points du groupe de points à introduire n'est borné qu'inférieurement et peut toujours être augmenté; nous considérerons toujours ce nombre comme indifférent. Supposons d'autre part, que nous remplaçions les propositions-éléments de P par d'autres propositions; il se peut que, pour obtenir les propositions intermédiaires en se servant des mêmes règles, il faille augmenter le nombre des points; nous supposerons toujours cela fait [1]). De même, il nous arrivera d'utiliser des propositions contenant des signes d'abréviation qui soient des propositions; nous écrirons la proposition comme si ces dernières étaient des propositions éléments; mais il est bien entendu que, dans chaque cas particulier, il faudra rétablir le nombre exact de points [2]).

Pour démontrer une propriété d'une proposition, il faudra démontrer cette propriété pour les propositions-éléments, et

---

[1]) Ceci nécessite un exemple: Si, dans $p \vee q$, on remplace p par $q \supset r$, on obtient non pas $q \supset r \vee q$ qui n'est pas une proposition, mais $q \supset r . \vee q$.

[2]) Supposons, par exemple, que dans la note précédente, p soit un signe d'abréviation.

montrer qu'elle reste vraie pour chacune des règles de construction. *(Démonstration par récurrence sur la construction de la proposition).*

Tout ce qui précède s'applique en remplaçant proposition par „individu", proposition-élément par „individu élémentaire" et point par „parenthèse".

Parmi les variables figurant dans une proposition, nous appellerons variables *apparentes* celle qui figurent dans un des signes (t), $(\exists\, t)$; variables *réelles*, les autres; ces dernières sont dites aussi les *arguments* de la proposition. Une proposition sans variable apparente est dite *élémentaire*.

Nous ferons souvent suivre le signe d'abréviation d'une proposition d'un certain nombre d'individus de types déterminés dans un ordre déterminé; on aura ainsi des signes d'abréviation de forme P, Q, R, $\Phi\, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\Psi\, a_1, a_2, \ldots, a_n$ [1]; et dans un cas particulier précisé plus tard H et $\mathfrak{H}$. Nous pourrons désigner par $\Phi\, t_1\, t_2 \ldots t_n$ ou $\Psi\, t_1\, t_2 \ldots t_n$, une proposition quelconque n'ayant pas les t_i parmi ses variables apparentes; mais il peut y avoir (sauf si l'on spécifie le contraire) parmi ses variables réelles d'autres variables que les t_i (elles sont alors sous-entendues dans le signe d'abréviation), et il se peut aussi que certains des t_i ne figurent pas parmi les variables réelles (ce sont des variables *„fictives"*); autrement dit, nous faisons figurer dans le signe d'abréviation uniquement les variables présentes ou non dans chaque cas déterminé, sur lesquelles nous désirons attirer l'attention. $\Phi\, a_1\, a_2 \ldots . a_n$ désignera les propositions obtenues en remplacant dans une des propositions $\Phi\, t_1\, t_2 \ldots t_n$, chaque t_i par l'individu a_i.

Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer la correspondance entre les phrases du langage ordinaire et les propositions. La possibilité de cette correspondance est un fait expérimental. Bornonsnous à indiquer la signification des signes v, $\times$, $\supset$, $=$, ∞, (t), $(\exists\, t)$ qui est respectivement: ou, et, implique, est identique à, il est faux que, quel que soit l'individu du type de t, il existe un individu du type de t tel que.

---

[1]) Nous faisons quant à l'emploi des virgules la même convention que pour les propositions éléments (voir p. 18).

3. Les Règles du Raisonnement.

3. Nous appellerons „**Théorie**" un ensemble de règles du type suivant, dites *„règles du raisonnement"*, d'après lesquelles on attribuera l'épithète de *„vraies dans cette théorie"* à certaines propositions [1]. Le signe d'abréviation pour une théorie sera T. Les règles de raisonnement d'une théorie seront du modèle suivant:

Règle préliminaire 1. Toutes les propositions dont on s'occupera dans une théorie seront fabriquées avec des propositions éléments, et des fonctions élémentaires déterminées, à l'exclusion d'autres. Cela entraîne l'existence également de types déterminés figurant à l'exclusion d'autres.

Règle préliminaire 2. Pour déterminer la vérité d'une proposition dans une Théorie, il faut commencer par supprimer les signes $\supset$, $\times$, $\equiv$, que peut contenir cette proposition en utilisant les procédés suivants:

Remplaçer

$$P \supset Q \quad \text{par} \quad \backsim P . \vee Q$$
$$P \times Q \quad \text{„} \quad \backsim . \backsim P \vee \backsim Q$$
$$P \equiv Q \quad \text{„} \quad P \supset Q . \times . P \supset Q .$$

(Se rappeler ici les remarques qu'on vient de faire (p. 20) sur les groupes de points et les signes d'abréviation). On voit sans peine que l'ordre dans lequel on effectue ces remplacements est indifférent pour le résultat final (en utilisant la récurrence sur la construction de la proposition).

Nous supposerons donc *toujours,* désormais, que les propositions considérées ne contiennent plus les signes $\supset$, $\times$, $\equiv$.

Règle 1. Si Φt est une proposition vraie, $(t) . \Phi t$ en est une autre.

Règle 2. Si $\Phi a a$ est une proposition vraie, $(\exists t) . \Phi t a$ en est une autre.

Règle 3. [2] Une proposition reste vraie si on remplace à son intérieur:

---

[1] Comme nous l'avons montré dans le travail cité au début, il résulte des recherches de Russell et Whitehead, que tous les procédés de démonstration se ramènent aux règles que nous allons indiquer.

[2] Les règles de passage du Ch. 2, § 2, de notre travail déja cité doivent être complétées, et énoncées comme la règle 3.

$\sim .(t)\Phi t$	par	$(\exists t).\sim\Phi t$	et réciproquement	
$\sim .(\exists t)\Phi t$	„	$(t).\sim\Phi t$	„	„
$(t)\Phi t . v P$	„	$(t).\Phi t v P$	„	„
$P v .(t)\Phi t$	„	$(t).P v \Phi t$	„	„
$(\exists t)\Phi t . v P$	„	$(\exists t).\Phi t v P$	„	„
$P v .(\exists t)\Phi t$	„	$(\exists t).P v \Phi t$	„	„

P ne contenant pas la variable t.

Règle 4. Si, à l'intérieur d'une proposition vraie, on remplace $P v P$ par P, on a une autre proposition vraie.

Règle 5. Considérons une proposition élémentaire R; à chaque proposition élément y figurant, faisons correspondre l'un ou l'autre, à volonté, de deux signes V et F; nous faisons ensuite correspondre à toute proposition élémentaire fabriquée avec ces propositions éléments l'un ou l'autre de ces signes, grâce aux conventions suivantes: Si à Q correspond V (resp. F), à $\sim Q$ correspond F (resp. V); à $P v Q$ ne correspond F, que si à P et Q correspond F. Si, en appliquant cette règle, à R correspond V, quelle que soit la manière dont on a fait correspondre V et F aux propositions éléments, P est vraie.

Désormais, ces signes V et F seront dits des „valeurs logiques"; si, à une proposition P, on fait correspondre V (resp. F), on dira que cette proposition a la valeur logique „vrai" (resp. faux).

Règle 6. Dans toute théorie, on considérera comme vraies certaines propositions sans variables réelles, appelées *hypothèses,* suivant des règles spéciales permettant de décider, étant donné une proposition déterminée, si c'est une hypothèse ou non. Signe d'abréviation d'une hypothèse: H; d'un produit d'hypothèses $\mathcal{H}$.

Règle 7. Si H est une hypothèse, et si $H \supset P$ est une proposition vraie, P est une autre proposition vraie.

Définition. Une proposition vraie dans la Théorie, où l'on peut disposer de toutes les constantes, fonctions et propositions éléments que l'on veut, et *n'ayant pas d'hypothèses,* est dite une *identité.*

Nous appellerons désormais *„démonstration"* d'une proposition P vraie, dans une théorie, la suite des propositions vraies intermédiaires qu'il faut considérer pour aboutir à la conclusion que P est vraie en se servant des règles précédentes.

Pour démontrer une propriété des propositions vraies dans une Théorie, il faudra montrer qu'elle est vraie pour les propositions vraies d'après les Règles 5 et 6, et qu'elle le reste par application des règles 1, 2, 3, 4, 7 *(Démonstration par récurrence sur la démonstration d'une proposition)*.

Le problème consistant à reconnaître si une proposition est vraie dans une Théorie et, en ce cas, à la démontrer, est *l'Entscheidungsproblem* [1]) de cette Théorie. Le problème consistant à reconnaître si une proposition est une identité et, en ce cas, à la démontrer, sera dit: *„l'Entscheidungsproblem au sens restreint"*.

Remarque 1. En enlevant d'une proposition tous les symboles (t), $(\exists t)$ et les points qui les accompagnent, on constate aisément que l'on a une nouvelle proposition, la *matrice* de la première. La Règle 3 permet de remplacer la recherche de la vérité d'une proposition P, par celle de la vérité d'une proposition P' où tous les symboles (t) et $(\exists t)$ sont situés à gauche de la matrice. Supposons que dans P, toutes les variables différentes soient désignées pas des lettres différentes; transformons P en P'; une variable apparente t de P sera dite *générale*, si elle figure dans un symbole (t); *restreinte*, si elle figure dans un symbole $(\exists t)$.

On démontre que, dans P, une variable est générale (resp. restreinte) selon que le symbole correspondant est: soit (t) et figurant dans l'étendue d'un nombre pair (resp. impair) de signes $\backsim$; soit $(\exists t)$ et figurant dans l'étendue d'un nombre impair (resp. pair) de signes $\backsim$.

4. Le théorème fondamental.

Théorème 1. *Si P est une identité, on obtient une autre identité en remplaçant les propositions éléments et les fonctions élémentaires de P par d'autres propositions ou d'autres fonctions (à condition, bien entendu, que les points et les parenthèses de P soient tels que le nouvel assemblage de signes soit une proposition: se rappeler les remarques du § 2* (p. 20)).

Théorème important, surtout joint à la Règle 5.

Théorème 2. (Théorème fondamental).

[1]) Cette définition diffère légèrement de la définition habituelle.

C'est aux conséquences de ce théorème, qu'est consacré ce travail; on trouvera sa démonstration dans le travail cité au début[1]); c'est lui qui nous fournit un critère pour reconnaître si une proposition est une identité. Ses énoncés divers nécessitent certains préliminaires.

a) Soit une proposition P, où toutes les variables sont désignées par des lettres différentes. Introduisons de nouvelles fonctions élémentaires, et de nouvelles constantes, de manière que l'on puisse faire correspondre biunivoquement:

1⁰) à chaque variable réelle de P, une de ces constantes de son type.

2⁰) à chaque variable générale t de P, dont le symbole est compris dans l'étendue de celui des variables restreintes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ une fonction $f_t t_1 t_2 \ldots t_n$ (s'il n'y a pas de variable t_i, une constante).

Remplaçons, dans la matrice de P, chaque variable réelle ou générale par la fonction (ou la constante) correspondante[2]) (dite *„fonction d'indice"* de cette variable); on obtient une proposition élémentaire Π, dite *associée* à P (en abrégé: P. E. A. à P).

b) Nous considérerons des ensembles, que nous appellerons *„champs"*, de lettres qui seront dites les *„éléments"* du champ; et des fonctions descriptives élémentaires, qui seront dites *„engendrer"* le champ. Chaque lettre du champ sera considérée comme étant d'un type déterminé, à savoir un des types figurant dans ces fonctions. Ces fonctions élémentaires permettent d'en fabriquer d'autres par le procédé indiqué au § 2. $f t_1 t_2 \ldots t_n$ étant une des fonctions engendrant le champ, t_i étant du type τ_i, f du type τ, α_i étant une lettre du champ du type τ_i, à certains symboles $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, nous faisons correspondre une lettre du champ du type τ dite la valeur de $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$; en particulier, à une constante devra correspondre un élément déterminé du champ. A partir des valeurs des fonctions élémentaires, on définit les valeurs des fonctions non élémentaires, par la règle suivante:

Les φ_i étant des fonctions où tous les arguments sont remplacés par des lettres du champ, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ont pour

---

[1]) Ch. 5, § 5.

[2]) Comme on l'a dit au § 2, il faudra introduire, en outre, les parenthèses nécessaires

valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et si $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ a pour valeur β, la valeur de $f \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ est β. Nous savons donc ce qu'est la valeur de certains des symboles $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, f étant une fonction élémentaire ou non.

Pour exprimer que $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ a la valeur β, il nous arrivera souvent d'écrire $f \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta$.

A chaque fonction, nous ferons correspondre un chiffre que nous appellerons sa „hauteur" Une fonction élémentaire sera d'ordre 1; si la hauteur de celle des fonctions $f_1 f_2 \ldots f_n$ qui a la plus grande hauteur est h, celle de $f f_1 f_2 \ldots f_n$ ($f t_1 t_2 \ldots t_n$ étant une fonction élémentaire) sera $h + 1$.

Un champ est dit *d'ordre k*, si, dans chaque type, il y a des lettres du champ, dites *éléments initiaux*, telles que toutes les fonctions de hauteur k de ces lettres aient une valeur dans le champ, et qu'il y ait des fonctions d'ordre $k+1$ pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

Un élément est dit d'*ordre k*, si c'est la valeur d'une fonction de hauteur k des éléments initiaux, sans être la valeur d'aucune fonction de hauteur inférieure.

Un champ est dit *canonique* d'ordre k, si c'est un champ d'ordre k, et si tout élément est valeur d'une fonction des éléments initiaux, et d'une seule (il y a correspondance biunivoque entre des fonctions de hauteur au plus égales à k, et les éléments du champ).

c) Nous considérerons aussi des propositions éléments $\varphi_i x_1 x_2 \ldots x_n$ dans un champ (celles, précisément, qui figurerent dans P); nous donnerons une valeur logique à chaque symbole $\varphi_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ du type de x_i.

Partons alors de Π; supposons que nous ayons un champ d'ordre k, engendré par des fonctions parmi lesquelles figurent les fonctions élémentaires figurant dans Π; et des valeurs logiques pour les propositions éléments figurant dans Π. Remplaçons d'une manière déterminée les variables réelles de Π (qui étaient restreintes dans P) par des éléments du champ: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; on peut transformer la proposition ainsi obtenue en y remplaçant une fonction des éléments du champ par sa valeur; si les α_i ne sont pas de hauteur trop grande, et si k est plus grand que la hauteur de la fonction de plus grande hauteur figurant dans Π, on finira par obtenir une proposition ne contenant plus de fonctions, et à laquelle correspondra une valeur logique.

Si, pour tout choix des $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tel que cette opération soit possible, cette valeur logique est le *faux*, P est dite *fausse dans le champ* (sous-entendu : pour le système de valeurs logiques considéré).

Si $\sim P$ est fausse dans un champ, P est dite vraie dans le champ (dans ce champ, c'est aux variables *restreintes* de P que correspondent les fonctions d'indice).

Nous dirons qu'un champ canonique d'ordre k est le champ *correspondant* à P, s'il est engendré par les fonctions descriptives et les fonctions d'indice de P, et *par celles là seulement*. Ce champ est alors bien déterminé.

Notre théorème s'énonce alors comme suit :

1⁰. *S'il n'y a pas de système de valeurs logiques rendant P faux dans le champ canonique correspondant d'ordre k, P est une identité* [1]).

2⁰. *Si P est une identité, il y a un nombre k qu'on peut déduire de la démonstration de P, tel qu'il n'y ait pas de système de valeurs logiques rendant P faux dans tout champ canonique correspondant, d'ordre égal ou supérieur à k.*

d) D'un champ C, on peut déduire un autre champ C', en *„égalant"* des éléments du champ : Soient, par exemple, les éléments α_i et α_j de C ; on les remplace dans C' par un seul élément ; c'est cela qui consiste à les égaler ; mais, pour obtenir C', il faudra aussi égaler les valeurs de toutes les fonctions à arguments pris dans C, ne différant que par leurs systèmes d'arguments, et telles qu'on puisse, d'un système d'arguments à l'autre, en se bornant à remplaçer α_i par α_j ou α_j par α_i. Cela conduit à égaler toute une série d'éléments de C. Si, de plus, on a dans C des valeurs logiques telles que deux propositions éléments $\varphi\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ et $\varphi\,\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_n$ aient même valeur logique si chaque α_i est identique, ou va être égalé pour obtenir C', au β_i correspondant, on déduit de là un système de valeurs logiques dans C'.

---

[1]) Nous avons donné (Cf. le travail déjà cité Ch. 5, 5.1.) le moyen de la démontrer.

Après ces préliminaires, on démontre aisément que notre théorème peut s'énoncer sous une forme que nous emploierons souvent:

1⁰. *Si P n'est pas une identité, il y a pour chaque chiffre k un champ d'ordre k où on peut rendre P faux.*

2⁰. *Si, pour chaque chiffre k, on peut rendre P faux dans un champ d'ordre k, P ne peut être une identité.*

Nous dirons souvent que l'on a rendu P faux dans un champ infini, si on sait le rendre faux dans un champ d'ordre k, quel que soit k. On peut donc dire:

Pour que P soit une identité, il faut et il suffit qu'on ne puisse pas le rendre faux dans un champ infini.

Pour justifier cette dénomination, on remarquera que les éléments d'un champ canonique d'ordre k (avec les valeurs correspondantes des fonctions) peuvent être considérés comme une partie des éléments d'un champ canonique d'ordre supérieur, et que les éléments de tous les champs canoniques peuvent être réunis en un „champ canonique infini" composé de lettres correspondant biunivoquement à toutes les fonctions des éléments initiaux formées à partir des fonctions engendrant le champ: on en extraira pour chaque valeur de k le champ d'ordre k, composé des éléments correspondant aux fonctions des éléments initiaux de hauteur au plus égale à k.

e) Nous considérons souvent simultanément plusieurs propositions dans un même champ; nous supposerons alors implicitement que parmi les fonctions engendrant le champ figurent toutes les fonctions descriptives et toutes les fonctions d'indice auquelles donnent naissance ces propositions.

C'est ainsi que $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n . \supset P$ ne peut être fausse que dans un champ où P est fausse, et où $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont vraies.

Corollaire 1. *Si P et $P \supset Q$ sont des propositions vraies dans une théorie, Q en est une autre.*

On trouvera la démonstration de ce très important corollaire dans le travail déjà cité (Ch. 5, 6.I.). On en déduit de nombreuses conséquences:

α) On démontre dès lors aisément que le système de règles du raisonnement que nous avons choisi est équivalent à celui de Russell et Whitehead dans les Principia Mathematica, ce qui nous fournit une démonstration expérimentale du fait que ce système de règles est complet.

β) Joint au Th. 1 et à la Règle 5, il donne les résultats suivants:

$P \equiv Q . \supset . Q \equiv P$ étant une identité, on voit que si $P \equiv Q$ est vrai, $Q \equiv P$ l'est aussi. De même, on démontrerait que, si $P \equiv Q$, $Q \equiv R$ sont vrais, $P \equiv R$ l'est aussi; si $P \equiv Q$ est vrai, ainsi que P, Q est vrai. Si $P \equiv Q$ est vrai dans une théorie, nous dirons que P y est *identique* à Q; on voit que cette relation est réciproque et transitive.

On verrait aussi qu'une disjonction (ou un produit) est identique à la disjonction (ou au produit) obtenu en permutant ses termes; que si un produit est vrai, tous ses termes sont vrais et réciproquement, ce qui permet de remplacer des hypothèses d'une théorie par leur produit.

γ) $\Phi t \supset \Phi t$ est vrai d'après Th. 1 et Règle 5; donc (Règle 2) $(\exists x) . \Phi x \supset \Phi t$ l'est; ainsi que (Règle 3) $(x) \Phi x . \supset \Phi t$; donc si $(x) \Phi x$ est vrai, Φt l'est. Donc, d'après la Règle 1, il revient au même de démontrer Φt et $(x) . \Phi x$.

Donc, on peut toujours supposer que les propositions à démontrer n'ont pas de variables réelles. En particulier, on peut toujours énoncer les hypothèses avec des variables réelles: on peut immédiatement les transformer en d'autres propositions sans variables réelles. Au chapitre suivant, nous supposerons toujours implicitement cette transformation faite.

Corollaire 2. En appliquant notre théorème aux propositions élémentaires, on voit que:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition élémentaire soit une identité, est qu'elle le soit par application de la Règle 5.

5. Voici encore deux Théorèmes, dont nous ferons usage:

Théorème 3. *Si P est une proposition vraie dans une Théorie, on peut déterminer, connaissant sa démonstration, un produit $\mathcal{H}$ d'hypothèses, tel que $\mathcal{H} \supset P$ soit une identité. S'il n'y a qu'un nombre fini d'hypothèses, on peut prendre pour $\mathcal{H}$ le produit de toutes les hypothèses.*

Théorème 4. *Si une proposition élément est équivalente, dans une Théorie, à une autre proposition ayant les mêmes* *arguments, en remplaçant la première par la seconde dans une proposition, on a une autre proposition „identique" à la première.*

Le Théorème 3 se démontre aisément par récurrence sur la démonstration, le Théorème 4, sur la construction de la proposition considérée.

CHAPITRE II.

Réductions de l'Entscheidungsproblem.

1. Les Méthodes.

1. Il résulte des énoncés même des Théorèmes 2 et 3, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition P soit vraie dans une Théorie, est qu'elle soit vraie dans une Théorie ne différant de celle-là, qu'en ce qu'elle ne comporte que les hypothèses nécessaires à la démonstration de P, et les types, fonctions, constantes et propositions éléments contenus dans ces hypothèses et dans P.

Cette remarque nous permettra de ne plus expliciter les types, fonctions, constantes et propositions éléments d'une théorie: nous supposerons toujours implicitement dans ce chapitre, que quand on veut démontrer la vérité d'une proposition dans une théorie, on n'emploiera que ceux de ces éléments qui figurent dans les hypothèses de la théorie et dans la proposition considérée.

Nous dirons qu'une Théorie, T_2, est une *extension simple* de T_1, si toute proposition de T_1 est une proposition de T_2 et si la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition de T_1 soit vraie dans T_2, est qu'elle le soit dans T_1. Il résulte de ce qui précède qu'on obtient une extension simple de T_1, en se bornant à y ajouter de nouveaux types, de nouvelles fonctions, de nouvelles constantes ou de nouvelles propositions éléments. Voici d'autres cas:

Méthode 1. On ajoute une nouvelle proposition élément $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ et une nouvelle hypothèse de forme:

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n \equiv \Phi x_1 x_2 \ldots x_n$$

$\Phi x_1 x_2 \ldots x_n$ étant une proposition de l'ancienne théorie.

La nouvelle théorie est une extension simple de la première; car, soit P une proposition vraie de la nouvelle théorie, $\mathcal{H}$ un produit d'hypothèses de l'ancienne tel que

$$\mathcal{H} \times . \varphi x_1 x_2 \ldots x_n \equiv \Phi x_1 x_2 \ldots x_n : \supset P$$

soit une identité d'après le Théorème 3. On obtient encore une identité en remplaçant φ par Φ (Th. 1). Or, d'après la Règle 5 et le Th. 1, $\mathcal{H} \times . p \equiv p : \supset P . : \mathcal{H} \supset P$ est une indentité; donc, d'après le corollaire 1 du Th. 2, $\mathcal{H} \supset P$ en est une autre, et P est vraie dans l'ancienne théorie (Th. 3).

Méthode 2. Soient H_1, H_2, ..., H_n des hypothèses de T_1; P_1, P_2, ..., P_l des propositions de T_1 telle que $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n . \equiv . P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_l$ soit une proposition vraie dans T_1; on obtient une extension simple de T_1 en remplaçant les hypothèses H_1, H_2, ..., H_n par P_1, P_2, ..., P_l.

Démonstration aisée.

On appliquera en particulier cette méthode si $l = n$ et si quelque soit i, $H_i \equiv P_i$ est une proposition vraie dans T_1 (car d'après le Th. 4, on en déduit que $H_2 \times H_2 \times \ldots \times H_n . \equiv . P_1 \times P_2 \ldots P_l$ est une autre proposition vraie).

Méthode 2 bis. On obtient une extension simple d'une théorie en ajoutant aux hypothèses des propositions vraies dans la théorie.

Démonstration aisée; (c'est d'ailleurs un cas particulier de la précédente).

Méthode 3. Supposons que, dans une théorie T_1, on ajoute des hypothèses H_1, H_2, ..., H_n. D'où une théorie T_2. Toute proposition vraie dans T_1, est vraie dans T_2. D'après le Théorème 3, si une proposition P est vraie dans T_2, il y a une produit $\mathcal{H}$ d'hypothèses de T_1, tel que $\mathcal{H} \times H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \supset P$ soit une identité. Si P n'est pas vraie dans T_1, $\mathcal{H} \supset P$ n'est pas une identité, donc peut être rendue fausse dans un champ infini; si on peut rendre H_1, H_2, ..., H_n vraies dans ce champ, où P est fausse, et $\mathcal{H}$ vraie, on en déduira que P ne peut être vraie dans T_2 (voir, Ch. 1, § 4), et T_2 sera une extension simple de T_1 (d'après le Théorème 2). Donc, dans cette méthode: *il faudra rendre les nouvelles hypothèses vraies dans tout champ infini où sont vraies les anciennes.*

On y arrivera en particulier si, après avoir introduit les nouvelles fonctions nécessaires sans introduire dans les champs d'éléments nouveaux, l'ordre d'un champ ne change pas (ou du moins si l'ordre du nouveau champ grandit indéfiniment avec celui de l'ancien).

Supposons, par exemple que, dans une théorie où il n'y a qu'un type, (pour simplifier), nous introduisions une nouvelle proposition élément $x = y$ que nous nommerons „l'égalité", avec les hypothèses.

$$\left.\begin{array}{r} x = x \\ x = y \,.\supset.\, y = x \\ x = y \times y = z \,.\supset.\, x = z \end{array}\right| \qquad (1)$$

et les hypothèses:

$$x_1 = y_1 \times x_2 = y_2 \times \cdots \times x_n = y_n \,.\supset.\, \varphi x_1 x_2 \ldots x_n = \varphi y_1 y_2 \ldots y_n \quad (2)$$

pour toute proposition élément φ.

$$x_1 = y_1 \times x_2 = y_2 \times \cdots \times x_n = y_n \,.\supset.\, f x_1 x_2 \ldots x_n = f y_1 y_2 \ldots y_n \quad (3)$$

pour toute fonction élémentaire f.

On peut rendre ces hypothèses vraies dans tout champ infini, en faisant $\alpha_i = \alpha_j$ vraie seulement si α_i et α_j sont identiques. Donc, la nouvelle théorie est une extension simple de la première.

Profitons de cet exemple pour faire deux remarques importantes:

1⁰) Dans une Théorie où on a les hypothèses précédentes, les propositions (2) et (3) sont vraies quand φ est une proposition quelconque (non élément) et f une fonction quelconque (non élémentaire). Le Théorème 4 du Chapitre 1 reste vrai en remplaçant le mot „proposition-élément" par „fonction élémentaire", „identique" par „égal", et „point" par „parenthèse".

2⁰) Dans un champ où les hypothèses précédentes sont vraies, et où on a de plus un système de valeurs logiques, on peut „égaler" (Cf Ch. 1, p. 27) entre eux tous les éléments α_j tels que $\alpha_j = \alpha_i$ ait la valeur logique „vrai". On voit aisément qu'on aura un nouveau champ, où le système des anciennes valeurs logiques se transformera en un nouveau système de valeurs logiques, et où le seul élément α_j tel que $\alpha_j = \alpha_i$ ait la valeur logique „vrai", est α_i lui-même [1]).

---

[1]) Ceci n'étant, à la réflexion, pas tout à fait évident, nous comptons y revenir dans une note aux Comptes Rendus de Paris.

Nous avons démontré, dans le travail déjà cité, que l'on pourrait se borner à résoudre l'Entscheidungsproblem pour les théories à un seul type (voir Ch. 3, § 3); nous n'y reviendrons pas, et allons étudier les simplifications ultérieures.

2. Suppression des fonctions descriptives (et des constantes).

Soit une théorie T_1 avec un seul type. Introduisons d'abord la nouvelle proposition élément $x = y$, avec les hypothèses 1, 2, et 3. Puis, introduisons de nouvelles propositions éléments, de manière qu'à chaque fonction descriptive $f x_1 x_2 \ldots x_n$ corresponde une telle proposition $\psi y x_1 x_2 \ldots x_n$ avec les hypothèses

$$\psi y x_1 x_2 \ldots x_n \equiv y = f x_1 x_2 \ldots x_n \tag{4}$$

On démontre aisément que, dans la théorie obtenue, les propositions suivantes sont vraies:

$$y = y' \times x_1 = x_1' \times \ldots \times x_n = x_n' . \supset . \psi y x_1 x_2 \ldots x_n \equiv \psi y' x_1' x_2' \ldots x_n' \tag{5}$$

ainsi que:

$$(\exists y)(z) . \psi z x_1 x_2 \ldots x_n . \equiv . z = y \tag{6}$$

Ajoutons les aux Hypothèses.

D'après les Méthodes 1 et 2 bis du paragraphe précédent, on voit que la théorie obtenue est une extension simple de la première. Dans cette théorie, toute proposition est équivalente à une proposition ne contenant pas de fonction descriptive; en effet, on démontre bien aisément que, dans cette théorie, $\Phi f a_1 a_2 \ldots a_n, b_1, b_2 \ldots, b_p$ est équivalent à

$$(\exists x) . \psi x a_1 a_2 \ldots a_n \times \Phi x b_1 b_2 \ldots b_p$$

(Ceci est l'essence de la théorie de la description de Russell et Whitehead; (Cf. les Principia Mathematica, § 13)). En appliquant assez souvent ce procédé, on finit par remplacer toute proposition par une proposition équivalente ne contenant pas de fonction descriptive.

Soit donc une proposition P; transformons-la de cette manière; d'où Q; transformons de même les hypothèses de T_1; d'où une Théorie T_2. Pour que P soit vraie dans T_1, il faut et il suffit que Q le soit dans $T_2 + 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (Cette abréviation que nous utiliserons désormais désigne la théorie obtenue à partir de T_2 en y ajoutant les hypothèses 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Or, d'après la méthode 2 bis, $T_2 + 1, 2, 3, 4, 5, 6$ est une extension simple de $T_2 + 1, 2, 4, 5, 6$, car la proposition 3 est vraie dans cette dernière, comme on le voit aisément.

Il faut maintenant montrer avec la méthode 3, que $T_2 + 1, 2, 4, 5, 6$ est une extension simple de $T_2 + 1, 2, 5, 6$. Soit donc un champ d'ordre k oú 1, 2, 5, 6 sont vraies. Nous donnerons à $f x_1 x_2 \ldots x_n$ pour toutes les valeurs de $x_1 x_2 \ldots x_n$ les mêmes valeurs que la fonction d'indice de y dans (6). Alors (4) devient vraie dans le champ dont l'ordre n'aura évidemment pas changé.

En définitive, nous arrivons à la conclusion que la *vérité de P dans T_1 est équivalente à celle de Q de $T_2 + 1, 2, 5, 6$. Or, les hypothèses de cette nouvelle théorie et Q ne contiennent plus ni fonction descriptive, ni constante.*

Remarque. Il est inutile de supprimer les constantes d'une Théorie; cela ne simplifie en rien l'Entscheidungsproblem. Car on démontrera bien aisément que si $\Phi\, C_1\, C_2 \ldots C_n$ est une identité où figurent les constantes élémentaires $C_1\, C_2 \ldots C_n$, en remplaçant chaque constante élémentaire par une variable réelle différente ne figurant pas dans Φ on a aussi une identité (par récurrence sur la démonstration de $\Phi\, C_1\, C_2 \ldots C_n$).

3. Suppression des propositions éléments à plus de deux arguments. [1])

Supposons, par exemple, que nous voulions remplacer une théorie T_1 où figure la proposition élément $\varphi\, x\, y\, z$ et où ne figurent pas de fonctions descriptives, par une autre théorie, sans non plus de fonctions descriptives, où $\varphi\, x\, y\, z$ ne figure plus, et et où ne figure aucune nouvelle proposition élément à plus de deux arguments. Les mêmes méthodes permettraient dans tous les cas, de réduire le nombre des arguments des propositions éléments en ayant plus de deux.

---

[1]) Löwenheim (Math. Annalen, T. 79) a publié du résultat énoncé dans ce paragraphe une démonstration dont nous avons montré les graves lacunes dans notre travail déjà cité (Ch. 5, 6.2). Nous reprenons ici son idée fondamentale, mais en modifiant considérablement sa méthode.

Introduisons d'abord la proposition élément $x = y$, et les hypothèses 1 et 2 du § 1; puis un nouveau type (les variables de ce type seront désignées par ξ, η, ζ, x et y étant réservées à l'ancien type); et les propositions éléments

$$\xi = \eta, \quad R x \xi, \quad H \xi \eta, \quad V \xi \eta$$

avec les hypothèses suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} H \xi \eta \times \xi = \xi' \times \eta = \eta' . \supset H \xi' \eta' \\ V \xi \eta \times \xi = \xi' \times \eta = \eta' . \supset V \xi' \eta' \\ R x \xi \times x = x' \times \xi = \xi' . \supset R x' \xi' \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(Hypothèses} \\ \text{de l'égalité)}\end{array} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} R x \xi \supset H \xi \xi \\ R x \xi \times R y \xi . \supset x = y \\ R x \xi \times R x \eta . \supset \xi = \eta \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$(\exists \xi) . R x \xi \quad (5)$$

$$H \xi \xi \supset (\exists x) . R x \xi \quad (6)$$

(Ce sont les propriétés de $R x \xi$ qui établissent donc une correspondance biunivoque entre les objets du premier type et ceux du second type pour lesquels $H \xi \xi$ est vrai).

$$\left.\begin{array}{c} H \xi \xi = V \xi \xi, \; H \xi \eta \supset H \eta \eta, \; V \xi \eta \supset V \eta \eta \\ H \xi \eta \times H \xi \eta' . \supset \eta = \eta' \\ V \xi \eta \times V \xi \eta' . \supset \eta = \eta' \\ H \xi \eta \times V \xi \zeta \times H \xi' \eta \times V \xi' \zeta . \supset \xi = \xi' \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$(\xi)(\exists \eta) . H \xi \eta \quad (8)$$

$$(\xi)(\exists \eta) . V \xi \eta \quad (9)$$

$$(\eta \zeta)(\exists \xi) . H \xi \eta \times V \xi \zeta \quad (10)$$

(Ces dernières hypothèses expriment qu'il y a une correspondance biunivoque entre les objets du second type, et les couples d'objets pour lesquels $H \xi \xi$ est vrai; si, dans cette correspondance, à ξ correspond le couple (η, ζ), η est le seul objet pour lequel $H \xi \eta$, et ζ le seul objet pour lequel $V \xi \zeta$, est vrai).

Pour chaque proposition élément $\varphi_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$ de l'ancienne théorie différente de $\varphi x y z$, introduisons enfin une proposition élément $\psi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i}$; de plus, introduisons la proposition élément $\psi \xi \eta$ avec les hypothèses suivantes: d'abord toutes les hypothèses:

$$R x_1 \xi_1 \times R x_2 \xi_2 \times \ldots \times R x_{n_i} \xi_{n_i} . \supset . \varphi_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i} = \psi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i} \tag{11}$$

puis l'hypothèse:

$$R x \xi \times R y \eta_1 \times R z \eta_2 \times H \zeta \eta_1 \times V \zeta \eta_2 . \supset . \varphi x y z = \psi \xi \zeta \tag{12}$$

(On a donc, dans le nouveau type, remplacé une proposition élément à 3 arguments par une à deux arguments).

Ajoutons enfin les hypothèses:

$$\left.\begin{array}{c} \xi_1 = \xi_1' \times \xi_2 = \xi_2' \times \ldots \times \xi_{n_i} = \xi_{n_i}' . \supset . \psi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i} = \\ \psi_i \xi_1' \xi_2' \ldots \xi_{n_i}' \\ \xi = \xi' \times \eta = \eta' . \supset . \psi \xi \eta = \psi \xi' \eta' \end{array}\right\} \tag{13}$$

qui sont d'ailleurs une conséquence des précédentes.

Toute proposition sans variables réelles de l'ancienne théorie, est équivalente, dans cette nouvelle théorie, à une proposition de la nouvelle théorie ne contenant que des variables du nouveau type. Soit, en effet, $\Phi x_1 x_2 \ldots x_n$ une proposition de l'ancienne théorie avec les variables réelles $x_1 x_2 \ldots x_n$ et les variables apparentes $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}$; remplaçons dans Φ chaque x_i par ξ_i; puis, dans l'assemblage de signes ainsi obtenus, remplaçons $\varphi \xi_i \xi_j \xi_k$ par:

$$(\exists \eta) . \psi \xi_i \eta \times H \xi_j \eta \times V \xi_k \eta \times H \xi_i \xi_i$$

et $\varphi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i}$ par $\psi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i}$. D'où une proposition $\Psi \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i}$; dans la nouvelle théorie, la proposition suivante est vraie:

$$R x_1 \xi_1 \times R x_2 \xi_2 \times \ldots \times R x_n \xi_n . \supset . \Phi x_1 x_2 \ldots x_n = \Psi \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n .$$

On démontre ceci par récurrence sur la construction de Φ sans aucune difficulté. Pour une proposition sans variables réelles, on a le résultat cherché.

Soit T_2 la théorie obtenue en transformant de cette manière les hypothèses de T_1. Démontrons que (avec une notation du § précédent), $T_1 +$ (1 à 13) est une extension simple de T_1, et que $T_2 +$ (1 à 13) est une extension simple de $T_2 +$ 3, 7, 8, 9, 10, 13. Si la transformation susdite change P (qu'on peut supposer sans variable réelle) en Q, on aura alors démontré (en utilisant la méthode 2) que la condition nécessaire et suffisante pour que P soit vrai dans T_1, est que Q le soit dans $T_2 + 3$, 7, 8, 9, 10, 13; or, dans les hypothèses de cette théorie et dans Q, les propositions éléments sont: $\psi_i \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n_i}$, $\psi \xi \eta$, $H \xi \eta$, $V \xi \eta$, $\xi = \eta$; on a donc trois propositions à deux arguments sans correspondantes dans T_1, mais nous avons remplacé une proposition à 3 arguments $\varphi x y z$, par une à deux arguments $\psi \xi \eta$, ce qui est le résultat que nous cherchions. En répétant assez de fois ce procédé, on arrivera à ne plus avoir que des propositions éléments à deux arguments, ce qui est le théorème de Löwenheim.

1°. $T_1 + (1$ *à* $13)$ *est une extension simple de* T_1.

Soit $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ un champ d'ordre k où sont vraies les hypothèses de T_1 (les éléments y étant rangés par ordre de hauteur non décroissante, α_o étant élément initial), qu'il faut considérer dans la méthode 3. Les éléments du nouveau type dans le nouveau champ seront désignés par β_{ij} (i et j allant à 0 à n); ceux de l'ancien type resteront $\alpha_o \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, avec les mêmes valeurs logiques, et les mêmes valeurs pour les fonctions que dans l'ancien champ. On rendra les nouvelles hypothèses vraies comme suit:

$R \alpha_i \beta_{jk}$	ne sera vrai que si	$i = j = k$
$H \beta_{ij} \beta_{kl}$	» » » » »	$i = k = l$
$V \beta_{ij} \beta_{kl}$	» » » » »	$j = k = l$
$\beta_{ij} = \beta_{kl}$	» » » » »	$i = k,\ j = l$
$\alpha_i = \alpha_j$	» » » » »	$i = j$

$\psi_j \beta_{i_1 i'_1} \beta_{i_2 i'_2} \ldots \beta_{i_{n_j} i'_{n_j}}$ ne sera vrai que si, pour tout α, $i_\alpha = i'_{\alpha'}$ et si $\varphi_j \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{n_j}}$ est vrai;

$\psi \beta_{ii'} \beta_{jj'}$ ne sera vrai que si $i = i'$, et si $\psi \alpha_i \alpha_j \alpha_{j'}$ est vrai.

Dans (5), on a une fonction d'indice $f_1(x)$; on fera $f_1(\alpha_i) = \beta_{ii}$.

Dans (6), on a une fonction d'indice $f_2(\xi)$; on fera $f_2(\beta_{ij}) = \alpha_o$ si $i \neq j$; $= \alpha_i$ si $i = j$.

Dans (8), on a une fonction d'indice $f_3(\xi)$; on fera $f_3(\beta_{ij}) = \beta_{ii}$.

Dans (9), on a une fonction d'indice $f_4(\xi)$; on fera $f_4(\beta_{ij}) = \beta_{jj}$.

Dans (10), on a une fonction d'indice $f_5(\eta\,\zeta)$; on fera $f_5(\beta_{ij}, \beta_{i'j'}) = \beta_{oo}$ sauf si $i = j$, $i' = j'$ auquel cas, c'est égal à $\beta_{ii'}$.

Avec ces valeurs, on a un nouveau champ qui est d'ordre k. (On démontre ceci en remarquant que le plus grand des indices des valeurs de nos nouvelles fonctions n'est jamais supérieur au plus grand des indices des valeurs des arguments); et on reconnaît immédiatement que toutes les nouvelles hypothèses sont vraies dans ce champ.

2°. $T_2 + (1$ *à* $13)$ *est une extension simple de* $T_2 + 3$, 7, 8, 9, 10, 13.

Désignons par γ_i les éléments du champ d'ordre k, où sont vraies les hypothèses de $T_2 + (1$ à $13)$, qu'il nous faut considérer d'après la méthode 3; commençons par y égaler entre eux tous les éléments γ_i et γ_j tels que $\gamma_i = \gamma_j$ ait la valeur logique „vrai" (comme il est dit à la fin du § 1). Remarquons que, d'après les hypothèses 7, 8, 9, 10, qui sont vraies dans ce champ, on peut classer ses éléments en une suite à double indice β_{ij} (i et j ne prenant peut-être pas *tous* les couples de valeurs), de manière que $H\beta_{ij}\,\beta_{i'j'}$ et $V\beta_{ij}\,\beta_{i'j'}$ ne soient vraies que sous les conditions énoncées plus haut, et que, en conservant aux fonctions d'indice le même nom que ci-dessus, les valeurs de f_3, f_4, f_5 soient les mêmes; on voit en particulier que s'il existe un couple d'éléments β_{ii}, β_{jj} d'ordre au plus égal à $k-1$, il existe un β_{ij} et s'il y a un β_{ij} d'ordre au plus égal à $k-1$, il existe un β_{ii} et un β_{jj}. Soit $\beta_{i_1 k_1}$ un élément initial. $\beta_{i_1 i_1}$ est donc d'ordre 1 ou 0; introduisons d'autres lettres α_{i_1}, α_{i_2}, ..., les indices i_1, i_2, ... étant ceux des β_{ii} présents dans le champ; donnons aux fonctions f_1 et f_2 la valeur suivante:

$$f_1(\alpha_i) = \beta_{ii} \qquad f_2(\beta_{ij}) = \alpha_{i_1} \quad \text{si} \quad i \neq j$$
$$= \alpha_i \quad \text{si} \quad i = j$$

Il résulte de là que les hauteurs des éléments α_i et β_{ii} diffèrent au plus de 1.

Enfin, ne donnons aux propositions éléments suivantes la valeur logique vrai que:

pour

$$\alpha_i = \alpha_{i'}, \qquad \text{si} \qquad i = i' \qquad \text{est vrai;}$$

pour

$$\varphi_j \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{n_j}}, \qquad \text{si} \qquad \psi_j \beta_{i_1 i_1} \beta_{i_2 i_2} \dots \beta_{i_{n_j} i_{n_j}} \qquad \text{est vrai;}$$

pour

$$\varphi \alpha_i \alpha_j \alpha_{j'}, \qquad \text{si} \qquad \psi \beta_{ii} \beta_{jj'} \qquad \text{est vrai.}$$

Comme plus haut, toutes les hypothèses sont vraies dans ce champ. De plus, ce champ est d'ordre k: pour le démontrer; remarquons que les seules nouvelles fonctions introduites sont f_1 et f_2; dans le type des α, prenons α_{i_1} comme élément initial; définissons un pseudo-ordre égal à l'ordre pour les β_{ij}, et pour un α_i, à l'ordre de β_{ii} diminué de 1. On démontre immédiatement par récurrence sur la construction de la fonction, que le pseudo-ordre de la valeur d'une fonction est au plus égal à la hauteur de cette fonction; comme toute fonction de hauteur 1 (voir la définition de la hauteur Ch. I, § 4, f) ayant pour arguments des éléments de pseudo-ordre au plus égal à $k-1$ a une valeur dans le champ, il résulte de là que notre champ à la hauteur k. Ce qui démontre nos assertions.

4. Réductions ultérieures.

Nous pouvons donc nous borner aux théories où les propositions éléments n'ont que deux arguments; soient $\varphi_i x y$ ces propositions éléments ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$). Nous pouvons continuer encore la réduction; partons donc d'une Théorie T_1.

1. Introduisons des constantes C_i; et une nouvelle proposition élément $\psi x y z$, avec les hypothèses:

$$\psi x y C_i = \varphi_i x y. \tag{1}$$

Cette nouvelle théorie est une extension simple de la première, comme on le voit sans difficultés dans la méthode 3. Dans cette théorie, il est bien évident d'après le Théorème 4 (p. 29) que toute proposition P est équivalente à une proposition Q, ne contenant plus les propositions éléments $\varphi_i x y$, mais contenant les constantes C_i; transformons les hypothèses de T_1 de cette manière; d'où une théorie T_2: on démontre également sans difficultés d'après la Méthode (3) que $T_2 + 1$ est une extension simple de T_2. D'après la méthode 2, la condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie dans T_1 est dès lors que Q le soit dans T_2. Comme d'autre part, d'après la remarque du § 2, on peut ne pas s'occuper des constantes dans la solution de l'Entscheidungsproblem, on peut considérer qu'on est ramené à une théorie ne contenant plus qu'une proposition élément à 3 arguments.

2. En réappliquant la méthode du § précédent, il semblerait qu'on soit ramené à une théorie à 4 propositions éléments à 2 arguments; mais on peut se ramener à trois telles propositions éléments. Reprenons les mêmes notations; on n'a plus affaire aux propositions éléments $\psi_i x_1 x_2 \dots x_{n_i}$; considérons la proposition suivante que nous désignerons [1]) par $\xi = \xi'$

$$(\eta) . \psi \xi \eta = \psi \xi' \eta . \times . \psi \eta \xi = \psi \eta \xi' . \times . H \xi \eta = H \xi' \eta . \times . H \eta \xi = H \eta \xi' .$$
$$\times . V \xi \eta = V \xi' \eta . \times . V \eta \xi = V \eta \xi' .$$

Soit P la proposition que nous considérons dans la théorie T_1; Q celle par laquelle nous la remplacons dans $T_2 + 3$, 7, 8, 9, 10, 13, théorie que nous désignerons désormais par T_3. Dans T_3, $\xi = \eta . \supset . \xi = \eta$ est vrai. Ni Q ni les hypothèses de T_3, sauf toutefois [2]) 3, 7 et 13 ne contiennent la proposition élément $\xi = \eta$. Quand on remplace la proposition élément $\xi = \eta$ par $\xi = \eta$ dans ces propositions, 3 et 13 deviennent, on le voit aisément, des identités et 7 devient une proposition 7′ telle que $7 \supset 7'$. Appelons T_4 la théorie $T_2 + 7'$, 8, 9, 10. Si Q est vraie dans T_4, elle l'est donc dans T_3. Supposons réciproquement Q vraie dans T_3; alors d'après le Th. 3, on voit que $3 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 13 \times \mathfrak{H} . \supset Q$ est une identité; $\mathfrak{H}$ étant un produit convenable d'hypothèses de T_2; dans cette identité remplacons la proposition élément $x = y$ par $x = y$; on en déduit aisément [3]) d'après le Th. 1, que $7' \times 8 \times 9 \times 10 \times \mathfrak{H} . \supset Q$ est une identité; et donc que Q est vraie dans T_4.

Donc pour que Q soit vraie dans T_3, il faut et il suffit qu'elle le soit dans T_4; or Q et les hypothèses de T_4 ne contiennent que les propositions éléments $H \xi \eta$, $V \xi \eta$, $\psi \xi \eta$.

---

[1]) On n'aura pas à confondre ce signe avec celui déjà employé pour désigner l'équivalence des propositions.

[2]) Nous désignons ici par k le produit des hypothèses numérotées k.

[3]) Car $P_1 \supset :: P_2 \supset : . P_1 \times P_2 \times P_3 . \supset Q : \supset . P_3 \supset Q$ est une identité, d'après la Règle 5.

La méthode du § 3 peut être modifiée de cette maniere toutes les fois que dans les hypothèses de T_1 il n'y a qu'un nombre fini de propositions éléments différentes.

Théorème. *Pour résoudre l'Entscheidungsproblem dans une Théorie, il suffit de le résoudre dans une théorie ne contenant plus qu'un seul type, plus de fonctions (mais pouvant contenir des constantes) et ne comportant qu'une seule proposition élément à 3 arguments, ou bien encore trois propositions éléments à 2 arguments.*

Corollaire. D'après le Théorème 3 et la Remarque terminant le § 2 de ce Chapitre:

Pour résoudre l'Entscheidungsproblem dans une théorie n'ayant qu'un nombre fini d'hypothèses, il suffit de le résoudre dans le sens restreint, avec des propositions n'ayant qu'un seul type, plus de fonctions ni constantes, et ne comportant qu'une seule proposition élément à 3 arguments; ou bien encore 3 à deux arguments.

CHAPITRE III.

Cas particuliers de l'Entscheidungsproblem.

1. Préliminaires.

Nous voulons, dans ce chapitre, nous occuper de certains cas particuliers de l'Entscheidungsproblem, au sens restreint; nous voulons donc chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition déterminée soit une identité. Notre Théorème fondamental nous donnera un procédé commode pour ce but. Nous supposons, pour simplifier, — cela n'a rien d'essentiel — qu'il n'y a qu'un type pour les variables de la proposition.

Considérons donc une proposition P; soient $\varphi_i\, x_1\, x_2 \dots x_{n_i}$ les propositions éléments qu'elle contient; pour voir si c'est une identité, nous chercherons à la rendre fausse dans le champ canonique infini correspondant. Nous pouvons considérer le champ infini comme fabriqué d'avance: $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots$. Considérons la $P.E.A.$ à P; elle contient les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$; nous la désignerons par $\Pi\, x_1\, x_2 \dots x_n$; le problème consiste à essayer de rendre fausses un nombre quelconque de propositions

$\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$; ou à trouver un système de telles propositions, tel qu'il soit impossible de les rendre toutes fausses; car le Théorème 2 nous montre que dans le 1^0 cas P ne peut être une identité, et qu'il en est une dans le 2^0 cas; réciproquement, si on sait que P n'est pas une identité, on sait qu'on peut rendre fausses un nombre quelconque de ces propositions, et si on connaît la démonstration de P, on peut fabriquer un système de telles propositions qu'on ne peut rendre toutes fausses [1]). Nous sommes donc ramenés à un problème purement arithmétique, équivalent à l'Entscheidungsproblem qui est la détermination des valeurs logiques qu'il faut donner aux $\varphi_i \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \ldots$ pour rendre fausses les $\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$.

On peut le présenter sous la forme suivante: pour chaque système $\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \ldots, \alpha_{p_n}$, considérons les différents systèmes de valeurs logiques possibles des propositions éléments de $\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$ [2]) tels que celle-ci ait la valeur logique „faux"; supposons qu'il y ait k systèmes possibles; nous ferons correspondre au système $\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \ldots \alpha_{p_n}$, le numéro 1, 2, ... ou k, selon que c'est le 1[er], le 2[eme], ... ou le k[eme] de ces systèmes qui se présentera pour $\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$ dans le champ où on essaie de rendre P faux. Nous devrons donc chercher à faire correspondre à chaque système $\alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$, un de ces numéros, de manière que cela n'implique pas de contradiction sur la valeur logique des propositions éléments à arguments pris dans un champ d'ordre k; et on reconnait immédiatement que le problème peut s'énoncer comme suit, dans le cas où la proposition initiale ne contient pas de fonctions descriptives: [3])

---

[1]) On peut donner de notre théorème fondamental un énoncé qui mette bien ces faits en évidence; soit $\Pi\, x_1 x_2 \ldots x_n$ la matrice (cf. p. 24, Rem. I) de P. Si P est une identité, il y a une certaine disjonction de propositions de forme $\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$ qui est une identité; et cette disjonction est telle, que, du fait qu'elle est une identité, on peut déduire que P est une identité. Comparer le § 5.1 du Ch. 5 du travail cité au début (p. 15, note [1]).

[2]) Nous supposerons toujours implicitement que dans $\Pi\, \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$ toutes les fonctions ont été remplacées par leurs valeurs dans le champ, de manière qu'il n'y figure pas de fonctions.

[3]) Voir aussi notre note des Comptes-Rendus de Paris, Tome 189, p. 554 (cf. note [1]) page 15).

„Etant donnée une collection quelconque d'un nombre fini de système $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ *dans un ordre déterminé, les* β_i *étant pris dans un champ canonique, peut-on faire correspondre à chaque système de cette collection un des numéros* $1, 2, \dots k$, *de telle manière qu'un certain nombre de conditions de la forme suivante soient réalisées“:*

„Les $f_i(x_1 x_2 \dots x_{n_i})$ *étant les fonctions avec lesquelles est construit le champ canonique,* $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$, $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ *étant deux systèmes quelconques de la collection, identiques ou différents, quand certaines conditions déterminées d'une des formes*

$$f_i\left(\beta_{j_1} \beta_{j_2} \dots \beta_{j_{n_i}}\right) = \gamma_m \quad \text{ou} \quad f_i\left(\gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \dots \gamma_{j_{n_i}}\right) = \beta_m \quad \text{ou} \quad \beta_i = \gamma_j$$

sont vérifiées, les numéros correspondant à $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ *et* $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ *peuvent être choisis seulement parmi certains couples de numéros“.*

„Si cette correspondance est impossible pour certaines collections de systèmes, trouver une de ces collections?“

Cependant, dans les cas particuliers suivants, nous ne prendrons pas la question de cette manière: nous montrerons que si on a rendu fausses un assez grand nombre des $\Pi \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \dots \alpha_{p_n}$ on en déduit un champ infini et des valeurs logiques pour lesquelles P est faux; donc, il y a un nombre k tel que si P peut être rendue dans le champ canonique d'ordre k, P ne peut être une identité. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que P soit une identité est alors qu'elle soit vraie dans le champ canonique d'ordre k. Mise sous cette forme, d'après une remarque faite dans l'énoncé du Théorème 2, on voit que la condition fournit en outre la démonstration de P. Cependant, nous mettrons dans les différents cas particuliers la condition sous des formes différentes bien qu'équivalentes.

En particulier, nous considérerons des champs finis: ce sont des champs d'un nombre fini d'individus, tels qu'on *y* ait la valeur de toute fonction à arguments pris dans le champ. Nous montrerons que si on peut rendre P faux pour un champ canonique d'ordre k assez élevé, il y a un champ fini de n éléments où P est faux; d'après le deuxième énoncé du Théorème 2, P ne peut être une identité [1]); et on en déduit encore que la condi-

[1]) On trouvera une démonstration directe dans notre travail déja cité, Ch. 2, § 8.

tion nécessaire et suffisante pour que P soit une identité, est que P soit vraie dans un champ de n éléments.

Ce n'est qu'à cause des cas particuliers traités que la condition peut se mettre sous une forme si simple; si, dans le cas général, on peut espérer trouver une condition de la première forme, il ne faut pas compter trouver une condition de la deuxième forme. Le seul cas jusqu'ici connu où la condition de vérité ne prenne pas cette dernière forme est celui dont la résolution a conduit à la conclusion que l'Arithmétique n'était pas contradictoire [1]).

2. Quatre Cas particuliers.

Nous rappelons seulement le cas classique où toutes les n propositions éléments ont un seul argument; s'il y a n telles propositions éléments, il faut et il suffit que la proposition soit vraie dans un champ de 2^n éléments [2]).

1⁰ Cas. *Proposition*

$$(y_1 y_2 \ldots y_l)\,(\exists\, x_1 x_2 \ldots x_p)\,.\,\Phi\, y_2 y_2 \ldots y_l x_1 x_2 \ldots x_p$$

sans fonctions descriptives [3]).

Le champ infini qu'il faut considérer d'après le Théorème fondamental est ici un champ de l individus; donc, pour que cette proposition soit une identité, il faut et il suffit qu'elle soit vraie dans un champ de l individus (de 1 individu, si $l = 0$).

2⁰ Cas. *Proposition dont la matrice est une disjonction de propositions éléments, ou de négations de propositions éléments, avec (ou sans) fonctions descriptives.*

---

[1]) Voir le chapitre 4 du travail cité au début.

[2]) Voir par exemple dans ce même travail, Ch. 2, § 9.2. Nous profitons de cette occasion pour rectifier une inexactitude dans la fin du raisonnement, qui nous a été signalée par M. Bernays. Ce raisonnement est en effet en défaut si $r = 0$. Il faut le modifier comme suit: pour que P soit une identité, il faut et il suffit que $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_q \,.\supset.\, A\,(p_1, p_2, \ldots p_q)$ en soit une. C'est suffisant, car $\vdash .\, p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_q$; d'où, si la 2ème proposition est vraie, $\vdash .\, A\,(p_1, \ldots, p_q)$ et la conclusion comme dans le texte. C'est nécessaire; car si la deuxième proposition n'était pas une identité, nous pourrions donner aux p_i des valeurs logiques la rendant fausse, donc telles que $A\,(p_1, p_2, \ldots, p_q)$ ait la valeur logique faux, et un des p_i la valeur logique vrai. Il suffit alors de reprendre le raisonnement du texte.

[3]) Cas classique; voir, par exemple Bernays et Schönfinkel, Math. Ann. T. 99, p. 359.

Considérons la $P.E.A.$ à une telle proposition P, soit Π; et supposons toutes ses variables remplacées par des éléments α_i du champ infini; c'est une disjonction de termes $\varphi_i a_1 a_2 \ldots a_n$, ou $\backsim \varphi_i a_1 a_2 \ldots a_n$ qu'il faut rendre faux [1]); or considérons $\varphi_i \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$; il faut chercher pour quelles valeurs des variables de Π il sera identique à $\varphi_i a_1 a_2 \ldots a_n$; on y arrive très aisément; dès lors, si φ_i ne figure qu'une fois dans Π ou bien s'il figure plusieurs fois, partout précédé, ou partout non précédé du signe $\backsim$, cela donnera la valeur logique de $\varphi_i \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \ldots \alpha_{p_n}$; au contraire, si on a dans Π, parmi les termes de la disjonction, un terme $\varphi_i a_1 a_2 \ldots a_n$ et un autre $\backsim \varphi_i b_1 b_2 \ldots b_n$, il peut se faire que pour certaines des valeurs des α_i, chaque b_j devienne identique à chaque a_j; c'est le seul cas où on ne pourrait rendre Π faux dans le champ; on a donc un critère permettant de reconnaître si P est une identité; il est aisé de transformer ce critère, de manière que la condition nécessaire et suffisante pour que P soit une identité est qu'elle soit vraie dans un champ d'un nombre déterminé d'éléments; mais c'est inutile, car ce nouveau critère serait pratiquement plus compliqué que le premier.

3⁰ Cas. *Propositions de forme:*

$$(x_1 x_2 \ldots x_l)(\exists y)(z_1 z_2 \ldots z_p) . \Phi x_1 x_2 \ldots x_l y z_1 z_2 \ldots z_p$$

sans fonctions descriptives.

Nous désignerons cette proposition par P et supposons qu'il n'y a pas d'autres variables que celles mises en évidence.

Ce cas a déjà été traité par Ackermann (Math. Annalen, Tome 101); mais, outre que nous croyons pouvoir faire à sa démonstration quelques reproches au sujet de la rigueur (voir le travail déjà cité, Ch. 5, 6.3), nous présentons ici une démonstration considérablement simplifiée, et aisément généralisable.

A chacun des x_i correspondra un élément α_i du champ; à chacun des z_i, une fonction d'indice à *un* argument, $f_i(\alpha)$. Nous pouvons dès lors mettre le champ infini canonique sous la forme suivante (ce qu'Ackermann appelle un „Stammbaum" et ce que nous avons appelé un „schème" dans le mémoire déjà cité [2]))

---

[1]) a_i et b_i désignent ici des fonctions des α_i.

[2]) On peut remplacer aisément sa considération par celle de ce qu'on appelle en théorie des groupes: un groupe libre (freie Gruppe).

$$\overbrace{\alpha_{11}\;\alpha_{12}\ldots\alpha_{1p}}^{\alpha_1}\quad\overbrace{\alpha_{21}\;\alpha_{22}\ldots\alpha_{2p}}^{\alpha_2}\quad\ldots\ldots\quad\overbrace{\alpha_{l_1}\;\alpha_{l_2}\ldots\alpha_{l_p}}^{\alpha_l}$$

$$\overbrace{\alpha_{111}\ldots\alpha_{11p}}^{\alpha_{11}}\;\ldots\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\ldots$$

$\alpha_{ijl\ldots mn}$ étant la valeur de $f_n(\alpha_{ijl\ldots m})$. Supposons P faux dans ce champ; pour chaque élément x du champ, nous considérons les valeurs logiques des propositions éléments ayant des arguments pris parmi x, les α_i et les $f_m(x)$. Appelons ligne toute suite d'éléments de forme $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ijk}, \ldots, \alpha_{ijk\ldots l}, \alpha_{ijk\ldots lm}, \ldots$. Il y a dans toute ligne deux éléments $\alpha_{ij\ldots l}$ et $\alpha_{ij\ldots l\ldots mn}$ pour lesquels le système des valeurs logiques précitées est le même et la hauteur de ces éléments est aisée à borner. Remplaçons le champ infini considéré par un champ fini obtenu en arrêtant chaque ligne à l'individu $\alpha_{ij\ldots l\ldots m}$ et en faisant $f_n(\alpha_{ij\ldots l\ldots m}) = \alpha_{ij\ldots l}$; dans ce champ fini, en prenant les mêmes valeurs logiques que dans un champ canonique d'ordre assez grand pour contenir toutes ces lettres, P est évidemment faux.

Supposons que P comporte des propositions éléments à $1, 2, \ldots k$ arguments, et qu'il y ait μ_i propositions à i arguments; en remplaçant les arguments des propositions éléments par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, x, f_1(x), \ldots f_p(x)$, d'une manière quelconque, on a $\sum \mu_i C_{p+l+i}$ propositions différentes[1]); d'où $\mathfrak{h} = 2^{\sum \mu_i C^i_{p+l+i}}$ systèmes de valeurs logiques différentes; donc, dans le procédé précédent, on arrêtera toute ligne au plus après l'élément de hauteur $\mathfrak{h}$.

Or le nombre des éléments du champ, de hauteur au plus égale à $\mathfrak{h}$, est:

$$l + lp + \ldots + lp_{\mathfrak{h}} = l\,\frac{p^{\mathfrak{h}+1}-1}{p-1}\,.$$

Donc: *pour que la proposition considérée soit une identité, il faut et il suffit qu'elle soit vraie dans un champ de* $l\,\dfrac{p^{\mathfrak{h}+1}-1}{p-1}$ *individus, avec* $\mathfrak{h} = 2^{\sum \mu_i C^i_{p+l+i}}$. (On peut dire aussi: *il faut et il suffit qu'elle ne puisse être rendue fausse dans le champ canonique d'ordre* $\mathfrak{h}$).

[1]) $C^m_n = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$ est le coefficient binomial.

4⁰ Cas. Mais notre méthode se généralise immédiatement au cas des propositions de forme:

$$
\begin{aligned}
(x_1 x_2 \ldots x_l) : (\exists y_1) . (z_1^1 z_2^1 \ldots z_{p_1}^1)\, & \Phi_1 x_1 x_2 \ldots x_l y_1 z_1^1 z_2^1 \ldots z_{p_1}^1 \\
.\, v\, . (\exists y_2) . (z_1^2 z_2^2 \ldots z_{p_2}^2)\, & \Phi_2 x_1 \ldots x_l y_2 z_1^2 \ldots z_{p_2}^2 \\
.\, v\, . \ldots & \\
.\, v\, . (\exists y_k) . (z_1^k z_2^k \ldots z_{p_k}^k)\, & \Phi_k x_1 \ldots x_l y_k z_1^k \ldots z_{p_k}^k
\end{aligned}
$$

et sans fonctions descriptives. On aura cette fois-ci: $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ fonctions d'indices à un argument; et le raisonnement est exactement le même; seulement le nombre des éléments du champ a ici une expression plus compliquée qu'il nous paraît inutile d'écrire.

Le cas général de l'Entscheidungsproblem présente des difficultés jusqu'ici insurmontées; le cas précédent, qui paraît offrir quelque généralité, ne permet cependant pas de se rendre compte des difficultés du cas général, car on n'y a affaire qu'à des fonctions d'indice à un argument: c'est cela qui permet de donner au champ une forme remarquable; quand il n'en est plus ainsi, la structure du champ est très complexe (n'est, en quelque sorte, plus „simplement connexe"), et c'est cette circonstance qui rend essentiellement très difficile l'étude approfondie du problème.

3. Appendice.

Considérons un champ canonique infini engendré par les fonctions $f_k x_1 x_2 \ldots x_{n_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, p$). On peut démontrer qu'on peut le mettre sous la forme $\alpha_o\, \alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$, de telle maniere que $f_k \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{n_k}}$ ait pour valeur α_j, j étant pour chaque valeur de k un polynôme en $i_1, i_2, \ldots, i_{n_k}$. En se rappelant l'énoncé auquel nous avons réduit l'Entscheidungsproblem, on voit que l'on est ramené en définitive à un problème qui est une généralisation simple de celui de la résolution effective d'un système d'équations diophantiennes.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'on peut faire correspondre *biunivoquement* à tout système $k, i_1, i_2, \ldots, i_{n_k}$ (k ne prenant que les valeurs $1, 2, \ldots p$; les n_k étant fixes; les i prenant des valeurs entières (positives ou nulles) quelconques), un nombre entier (positif ou nul) qui soit la valeur d'un polynôme $\varphi_k(i_1, i_2, \ldots, i_{n_k})$, et qui soit supérieur à chacun des i_j, sauf s'ils sont tous nuls et si $k=1$, de manière que tout entier soit la valeur d'une de ces fonctions (et d'une seule). On voit en effet qu'en donnant à $f_k \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{n_k}}$ la valeur $\alpha_{\varphi_k(i_1, i_2, \ldots i_{n_k})}$, on aura un champ canonique infini.

Pour fabriquer ces polynômes, on se ramène d'abord au cas où les n_k valent l'unité. Il suffit pour cela de remarquer qu'à tout système de deux entiers i, j, on peut en faire correspondre biunivoquement un entier k, qui soit la valeur d'un polynôme $\varphi(i, j)$; on pourra prendre $\varphi(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$.

Dans le cas où $n_k = 1$, on prendra $\varphi_k(i) = ip + k$.

CHAPITRE IV.

Quelques conséquences de la résolution de l'Entscheidungsproblem.

1. L'arithmétisation des théories mathématiques.

Notre théorème fondamental pose l'Entscheidungsproblem [1] sous une forme essentiellement arithmétique. Mais nous pouvons même montrer que c'est une généralisation directe de problèmes arithmétiques classiques. Prenons, par exemple le Théorème de Fermat, qui nous fournira l'occasion de quelques curieuses remarques:

Soit donc une théorie, avec une constante 0, et 4 fonctions descriptives: une à un argument, $x+1$, et trois à deux arguments, $x+y$, xy, x^y, et avec les hypothèses:

$$x = x \qquad x = y \supset y = x \qquad x = y \times y = z . \supset . x = z$$

$$\infty . x + 1 = o$$

---

[1]) Pour tout ce chapitre, voir l'appendice à la fin du mémoire.

Nous entendons toujours désormais l'Entscheidungsproblem au sens restreint, (reconnaître si une proposition est une identité, ou, ce qui revient au même d'après le Corollaire de la fin du Ch. 2, si une proposition est vraie dans une théorie n'ayant qu'un nombre fini d'hypothèses).

[2]) Nous faisons pour l'énoncé des hypothèses la convention indiquée p. 29 avant le Corollaire 2. Pour leur énoncé on pourra voir dans le travail cité p. 15 (Note 1), le Ch. 4, et le § 6.4 du Ch. 5.

$$x = y \,,=.\, x+1 = y+1$$

$$\left.\begin{array}{r} x+o=x \\ x+(y+1)=(x+y)+1 \end{array}\right\} \text{(definit } x+y) \qquad (1)$$

$$x+y=x\,.\supset.\,y=o$$

$$\left.\begin{array}{r} x\,.\,o=o \\ x\,(y+1)=x\,y+x \end{array}\right\} \text{(definit } xy)$$

$$\left.\begin{array}{r} x^o=1 \\ x^{y+1}=x\,.\,x^y \end{array}\right\} \text{(definit } x^y)$$

$$x=x' \times y=y'\,.\supset.\,x+y=x'+y' \times xy=x'y' \times x^y=x'^{y'}$$

et considérons la proposition

$$(\exists\, x\,y\,z\,n)\,.\,x^n+y^n=z^n \times \infty\, n=o \times \infty\, n=1 \times \infty\, n=2 \quad (2)$$

n pour un instant désignant une variable.

Pour voir si notre proposition est vraie dans notre théorie, il faut essayer (d'après Ch. 1, § 4 e) de fabriquer un champ infini, où les hypothèses (1) soient vraies, et où la proposition (2) soit fausse.

En tenant compte des remarques terminant le § 1 du Ch. 2, on voit aisément que notre champ infini pourra précisément être mis sous la forme de la suite des entiers, avec les valeurs ordinaires des fonctions arithmétiques; et que donc, la proposition (2), n'est vraie dans la théorie considérée que si l'on peut *effectivement* trouver des chiffres x, y, z, n, tels que $x^n+y^n=z^n$, n étant plus grand que 2.

Ici l'Entcheidungsproblem se réduit à la résolution effective de l'équation $x^n+y^n=z^n$.

Supposons maintenant que l'on ajoute aux hypothèses (1) d'autres hypothèses, comme l'axiome d'induction totale: [1])

$$\Phi\, o \times .\,(x)\,.\,\Phi\, x \supset \Phi\, x+1 :\supset.\,(x)\,.\,\Phi\, x \qquad (1\text{ bis})$$

Nous avons affaire à d'autres fonctions pour construire le champ infini: le problème change; si, dans ces conditions (2) était vraie, sans l'être avant l'introduction des nouvelles hypothèses, c'est

[1]) Rappelons que cet axiome doit être considéré comme la source d'autant d'hypothèses que l'on voudra, obtenues en remplaçant Φx par une proposition déterminée.

que l'on pourrait démontrer qu'il existe $x, y, z, n > 2$ tels que $x^n + y^n = z^n$; mais qu'il serait *impossible effectivement* 4 tels chiffres. Et l'on voit bien que, quoique en raisonnant d'une manière mathématique sur le champ infini primitivement considéré, on arrive à la conclusion qu'on ne peut poursuivre indéfiniment sa construction, ceci n'est, métamathématiquement, d'aucune importance, puisqu'on ne sera jamais arrété dans cette construction.

Mais, d'autre part, *supposons résolu l'Entscheidungsproblem;* il nous fournira, appliqué à la théorie primitivement considérée qui n'a qu'un nombre fini d'hypothèses un raisonnement intuitionniste d'après lequel on pourra démontrer que l'on a toujours $x^n + y^n \neq z^n$ pour $n > 2$, ou trouver 4 chiffres $x, y, z, n > 2$ tels que $x^n + y^n = z^n$; nous arrivons finalement à cette conclusion que:

Si l'on peut résoudre l'Entscheidungsproblem, ou bien le Théorème de Fermat est vrai, ou bien on peut trouver effectivement 4 chiffres tels que $x^n + y^n = z^n$ (avec $n > 2$) [1]).

Ce fait remarquable se généralise aisément, et on arrive alors à la conclusion que: si l'on peut résoudre l'Entscheidungsproblem, on peut construire les objets dont on a pu démontrer l'existence; mais ce fait se présente alors d'une manière beaucoup plus complexe, sur lequelle nous n'insisterons pas davantage ici.

Nous voyons que le Théorème de Fermat, et en général les problèmes diophantiens, changent peu ou pas d'aspect quand on leur applique notre théorème fondamental. Mais, outre que celui-ci reprend toute sa force quand il y a des variables générales dans les identités à démontrer (ce qui n'était pas le cas dans l'exemple primitif ci-dessus), il permet de poser sous un tout autre aspect toute question relative à une théorie, qui considère des ensembles non dénombrables d'objets; car il la ramène à la considération de champs infinis, qui, considérés arithmétiquement, sont dénombrables [2]). Il met en évidence ce fait

[1]) Il suffit de supposer dans ce résultat que l'Entscheidungsproblem a été résolu pour la proposition que l'on obtient en écrivant que le produit des propositions I entraine la proposition 2.

[2]) Au sens où, par exemple, M. Borel dit que l'ensemble des nombres réels est dénombrable.

remarquable que, dans une théorie déterminée, on ne considère jamais à la fois qu'un nombre fini de constantes, variables et fonctions; et que l'ensemble de celles que l'on pourra jamais être conduit à considérer est „dénombrable”, en quelque sorte. Il réalise, en ce sens, l'arithmétisation de toute théorie mathématique.

Mais, par cela même que le problème arithmétique général auquel il ramène toute question, se réduit en particularisant les données, à la résolution des équations diophantiennes, ceci nous fixe lą difficulté de ce problème: il faut le considérer, dans sa généralité, comme au-dessus des moyens analytiques actuels.

2. Reflexions sur l'introduction des classes et relations.

Nous allons considérer désormais la Théorie obtenue comme suit: partons d'une théorie T n'ayant, pour simplifier, qu'un seul type. Adjoignons-lui toute une série d'autres types obtenus comme suit; à chaque type, nous attribuerons un chiffre bien déterminé, sa hauteur; 1⁰) à tout type de hauteur h, correspondra un autre type de hauteur $h+1$, dit type des classes d'éléments des précédents; x étant dans le premier type, α dans le deuxième [1]), on aura une proposition élément $x \varepsilon \alpha$ (énoncez: x est dans la classe α); 2⁰) à tout couple de types, τ_1 et τ_2, pris dans cet ordre, la hauteur de celui de plus grande hauteur étant h, correspondra un autre type de hauteur $h+1$, dit type des relations entre les éléments des deux types précédents; x et y étant respectivement dans les types τ_1 et τ_2, ρ dans le nouveau type, on aura une proposition élément $x \rho y$ (énoncez: x et y sont liés par la relation ρ).

Le type primitif sera de hauteur 0; et tout autre type pourra être obtenu à partir de lui par un des deux procédés précédents.

On ajoute les nouvelles hypothèses suivantes:

$$(\exists \alpha)(\beta) : \beta = \alpha \,.\equiv .\, (x) \,.\, x \varepsilon \beta \equiv \Phi x$$

$$(\exists \rho)(\sigma) : \sigma = \rho \,.\equiv .\, (xy) \,.\, x \sigma y \equiv \Phi xy$$

$$(x = y \text{ est mis ici pour } (\alpha) \,.\, x \varepsilon \alpha \equiv y \varepsilon \alpha)$$

pour toutes les propositions Φx et Φxy possibles.

---

[1]) Pour un instant, α, β, ρ, σ désignerons des variables.

On obtient ainsi une Théorie que nous désignerons par $T + R$ (par R si T n'a pas d'hypothèses, auquel cas il sera indiqué de supposer que l'on peut disposer pour des arguments du type de hauteur 0, de toutes les constantes, fonctions et propositions éléments que l'on veut). On reconnaitra dans R une théorie équivalente à celle que développent Russell et Whitehead dans les Principia Mathematica (c'est plus exactement, une extension simple de celle-là).

On peut également ajouter aux hypothèses, l'axiome de l'infini (Infin Ax), ou bien les axiomes multiplicatifs pour les différents types (désignés tous ensemble par Mult Ax), comme le font les auteurs des Principia; d'où des Théories $R +$ Infin Ax, $R +$ Mult Ax, $R +$ Infin Ax $+$ Mult Ax.

En particulier, dans cette dernière, $R +$ Infin Ax $+$ Mult Ax on peut refaire toutes les Mathématiques classiques, jusqu'à Cantor.

Supposons désormais cette théorie non contradictoire (ce qui n'a pas, jusqu' ici, été démontré) et supposons résolu l'Entscheidungsproblem. Soit une proposition P; Π la $P.E.A.$ (ou bien, en mettant toutes les variables en évidence, $\Pi x_1 x_2 \ldots x_n$); elle contient certaines propositions éléments $\varphi_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$, et certaines fonctions élémentaires $f_j(x_1 x_2 \ldots x_{n_j})$.

Ou bien P est une identité.

Ou bien P n'est pas une identité, ce que nous supposerons désormais.

1°. Il résulte de la Théorie de la description de Russell et Whitehead[1]) (et d'ailleurs aussi des considérations du § 2 du Chapitre 2), que l'on peut introduire dans $R +$ Infin Ax $+$ Mult Ax, des fonctions $f x_1 x_2 \ldots x_n$ avec des hypothèses de forme

$$f x_1 x_2 \ldots x_n = y \, . \equiv . \, \Phi x_1 x_2 \ldots x_n y$$

quand

$$(\exists y)(z) : \Phi x_1 x_2 \ldots x_n y \equiv . \, z = y$$

est déjà une proposition vraie.

(Rappelons que dans la théorie de Russell et Whitehead, $x = y$ est mis pour $(\alpha) . \, x \varepsilon \alpha \equiv y \varepsilon \alpha)$. En faisant cela, on a une extension simple de la théorie. On peut, dès lors, consi-

---

[1]) Voir à ce sujet les Principia Mathematica § 13.

dérer les éléments d'un ensemble dénombrable C (par exemple celui des nombres ordinaux finis, voir les Principia Mathematica, § 120) comme les éléments d'un champ canonique infini, en introduisant parmi ces éléments des fonctions convenables (voir par exemple Ch. 3, § 3) correspondant aux fonctions qu'il faut considérer dans le champ canonique correspondant à P, et auxquelles nous donnerons le même nom que celles-là.

2⁰. Considérons tous les systèmes de valeurs logiques rendant Π faux dans un champ d'ordre k. Pour un de ces système, considérons l'ensemble des systèmes $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ pour lesquels $\Pi \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ a la valeur logique „vrai", et raisonnons sur lui dans $R +$ Infin Ax $+$ Mult Ax; tous les raisonnements faits sur ces valeurs logiques et sur le champ canonique, en particulier ceux nécessaires pour résoudre l'Entscheidungsproblem, pourront se traduire par des démonstrations faites dans cette théorie; ils nous montreront que la proposition, qui, traduite en langage ordinaire, s'énonce „pour chaque nombre k, il y a un système au moins de valeurs logiques rendant Π faux dans le champ d'ordre k", est vraie dans cette théorie; en utilisant Mult Ax et en remarquant que la connaissance d'un tel système pour un champ d'ordre k, permet d'en déduire un autre pour tout champ d'ordre inférieur, on déduit la vérité de la proposition qui se traduit comme suit: „Il y a dans le champ infini C un système unique de valeurs logiques rendant Π faux". On en déduit aisément qu'on peut remplacer les propositions $\varphi_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$ dans Π, par d'autres, de telle manière que, si $\Pi x_1 x_2 \ldots x_n$ devient $\Pi' x_1 x_2 \ldots x_n$, la proposition $x_1 \varepsilon C \times x_2 \varepsilon C \times \ldots \times x_n \varepsilon C . \supset . \sim \Pi' x_1 x_2 \ldots x_n$ soit fausse dans $R +$ Infin Ax $+$ Mult Ax; on se rend dès lors aisément compte que, si cette théorie n'est pas contradictoire, P ne peut y être une proposition vraie [1]) (car on peut rendre P faux en particularisant convenablement les propositions éléments qui y figurent).

---

[1]) La méthode que nous esquissons ici revient, au fond, à traduire (et à compléter, grâce à Mult Ax) dans une théorie convenable, les raisonnements faits en métamathématique; elle revient en définitive à l'emploi rigoureux de la proposition connue sous le nom de paradoxe de Skolem, qu'on énonce de manière imprécise en disant que „toute proposition qui n'est pas une identité, peut être rendue fausse dans un champ dénombrable".

En définitive, *P ne peut être vraie dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax, que si c'est une identité.* De là, on tire plusieurs conséquences importantes;

1⁰. Supposons qu'aux règles du raisonnement déjà considérées, on en ajoute d'autres qui ne soient pas conséquences des premières, alors il y aura des propositions P qui n'étaient pas des identités et qui en deviendront; mais, comme on peut les „rendre fausses" dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax, on déduit de là une contradiction. Donc:

Si l'on suppose résolu l'Entscheidungsproblem, et si l'on ne veut pas que $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax soit contradictoire, il ne faut ajouter aucune règle du raisonnement à celles déjà considérées.

Ce théorème correspond à ce que les Allemands appellent la „Vollständigkeit" de notre système de règles.

2⁰. Soit une théorie T à un seul type.

Sous les mêmes hypothèses, $T+R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax est une extension simple de T.

Car si P qui est une proposition de T, n'était pas vraie dans T, et devenait vraie dans $T+R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax, il y aurait un produit $\mathfrak{H}$ d'hypothèses de T, tel que $\mathfrak{H} \supset P$ ne soit pas une identité et soit cependant vrai dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax: ce qui serait, sous les hypothèses précitées, impossible.

Le même résultat serait d'ailleurs vrai si, en ajoutait à Infin Ax et Mult Ax d'autres hypothèses, H, telles que $R+H+$ Infin Ax $+$ Mult Ax reste non contradictoire (des Hypothèses sur le nombre des individus du type d'ordre 0, par exemple).

Expliquons comment on peut lever une objection qui peut se présenter à l'esprit. Dans T, on peut avoir, par exemple, la proposition élément $x = y$, avec les hypothèses déjà explicitées au Ch. 2, § 1; supposons que $(\exists y)(x).x = y$ soit vrai dans T, donc que tous les objets y soient „égaux"; comment concilier cela avec Infin Ax? On sait que dans les Principia Mathematica, la relation d'égalité, que nous désignerons par $x \equiv y$ se définit, par $(\alpha).x \varepsilon \alpha \equiv y \varepsilon \alpha$. Or, on démontrera aisément que $x \equiv y . \supset . x = y$ est vrai dans $T+R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax; mais $x = y . \supset . x \equiv y$ n'y sera pas vrai; ces deux relations d'égalité ne sont pas équivalentes; et dans le raisonnement verbal ordinaire, il faudra considérer qu'il y a une infinité d'objets x tels que $x = y$, un quelconque de ces objets n'étant pas tels que $x \equiv y$ soit vrai; autrement dit, l'introduction des classes permet de définir dans T une nouvelle relation d'égalité plus „fine" que la première.

3. Tous les résultats précédents ne sont valables que si l'on a résolu effectivement l'Entscheidungsproblem. Peut-être cela est-il impossible; peut-être même pourra-ton démontrer métamathématiquement que c'est impossible (en axiomatisant la métamathématique elle-même) et cette chaîne d'impossibilités peut aisément être continuée. Mais cela n'empêche pas qu'il nous a paru intéressant d'esquisser le nouvel aspect que prendront quelques questions mathématiques importantes quand le problème qui nous occupe sera résolu, quelque difficulté que cette résolution paraisse présenter dans l'état actuel de nos connaissances.

Appendice.

Depuis l'époque (Sept. 1929) où nous avons écrit les lignes qui précèdent, la position de la question a été entièrement changée par les résultats obtenus par Gödle. Il en résulte que, sous de restrictions peu importantes (auxquelles satisfont toutes les théories considérées dans le § 2 du Chapitre précédent), il est impossible de démontrer la non-contradiction d'une théorie avec des raisonnements formalisables dans cette théorie [1]). En particulier, si on peut résoudre l'Entscheidungsproblem au sens restreint, il en résulterait que toute théorie n'ayant qu'un nombre fini d'hypothèses où cette solution est formalisable, serait contradictoire (car la question de la non-contradiction d'une théorie n'ayant qu'un nombre fini d'hypothèses se ramène à ce problème).

Cela n'affecte en rien les résultats de notre § 1. Ceux de notre § 2 doivent au contraire être modifiés. En effet on peut démontrer sans peine qu'il y a des théories à un nombre fini d'hypothèses dans lesquelles peut s'interpréter $R +$ Infin Ax $+$

---

[1]) Nous entendons par cette expression que l'on peut interpréter les signes métamathématiques par des constantes et des fonctions de la théorie, de manière à pouvoir traduire tout le raisonnement métamathématique considéré par un raisonnement fait dans la théorie (comme au § 2).

Mult Ax, et qui peuvent s'interpréter dans celle-ci (du moins, si l'on admet dans celle-ci qu'un nombre borné défini de types, ce qui suffit pour les raisonnements du § 2). La question de la non-contradiction de ces deux théories est alors équivalente. Donc, si l'Entscheidungsproblem était résolu, et si, comme nous le supposons implicitement dans le § 2, sa solution était formalisable dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax, cette dernière théorie serait contradictoire, et nos raisonnements perdraient tout intérêt. De plus, il y a des mathématiciens qui croient que, quelqu'étonnant que cela puisse paraitre, il peut y avoir des raisonnnments intuitionnistes non formalisables dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax. En tenant compte de ce fait, et de la remarque que la plus grande partie des raisonnements du § 2 supposent seulement que l'Entscheidungsproblem a été résolu pour la proposition P qu'on y étudie (ou une classe de propositions contenant P), on voit que pour échapper à toute objection, il faut énoncer comme suit les résultats finaux:

Si l'Entscheidungsproblem est résolu pour une proposition P, si la solution est formalisable dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax (ce qui est le cas pour tous les cas particuliers de l'Entscheidungsproblem jusqu'ici résolus), et si P n'est pas une identité:

1) Il est impossible d'ajouter de nouvelles règles de raisonnements qui fassent de P une identité, sans entrainer une contradiction dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax.

2) P ne peut être vrai dans $R+$ Infin Ax $+$ Mult Ax.

Remarquons enfin que, quoique à l'heure actuelle la possibilité de la résolution de l'Entscheidungsproblem paraisse improbable, son impossibilité n'a pas encore été démontrée.

Avril 1931.

W. Sierpiński.

O pewnych operacjach na zbiorach płaskich zamkniętych.

Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu w dniu 15 stycznia 1931 r.

Streszczenie.

Oznaczmy, dla zbioru płaskiego H, oraz dla własności P zbiorów linjowych, przez $\Gamma_P(H)$ zbiór wszystkich tych liczb rzeczywistych a, dla których prosta $x=a$ trafia zbiór H w zbiorze punktów, posiadającym własność P. Oznaczmy, dalej, przez $\Phi(P)$ rodzinę wszystkich zbiorów $\Gamma_P(H)$, gdzie H jest dowolnym zbiorem płaskim zamkniętym.

Autor dowodzi kilku twierdzeń ogólnych, dotyczących rodzin $\Phi(P)$, oraz podaje kilka ich zastosowań.

W. Sierpiński.

Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans.

Mémoire présenté dans la séance du 15 Janvier 1931.

H étant un ensemble fermé plan et P une propriété, dont les ensembles linéaires peuvent jouir ou ne pas jouir, désignons par $\Gamma_P(H)$ l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x=a$ rencontre l'ensemble plan H en un semble linéaire jouissant de la propriété P.

Les familles $\Phi(P)$ étaient déjà étudiées pour certaines propriétés P [1]). Pour en donner des exemples, nous citerons ici les 8 suivantes.

1) P est la propriété d'être un ensemble non vide. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles F_σ linéaires [2]).

---

[1]) Voir mon mémoire „Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points" Bulletin de la Société des Sciences de Cluj 1931.

[2]) ibidem.

2) P est la propriété d'être un ensemble formé d'un seul élément. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des différences de deux ensembles F_σ [1]).

3) P est la propriété d'être un ensemble contenant plus qu'un élément. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles F_σ linéaires.

4) P est la propriété d'être un ensemble infini. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles linéaires $F_{\sigma\delta}$ [2]).

5) P est la propriété d'être un ensemble non dénombrable. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles analytiques linéaires [3]).

6) P est la propriété d'être un ensemble non borné supérieurement. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles $F_{\sigma\delta}$ linéaires [4]).

7) P est la propriété d'être un ensemble qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles analytiques linéaires [5]).

8) P est la propriété d'être un ensemble dense en soi. $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles linéaires $F_{\sigma\delta}$ [6]).

Dans ce mémoire nous démontrerons quelques théorèmes généraux concernant les familles $\Phi(P)$ et nous en donnerons quelques applications.

Notations. E étant un ensemble, et P — une propriété des ensembles, nous écrirons

$$E\,j\,P$$

pour exprimer que l'ensemble E jouit de la propriété P, et

$$E\,\overline{j}\,P$$

pour exprimer que E ne jouit pas de la propriété P.

P étant une propriété donnée, nous désignerons par $\overline{P}$ sa négation. (Les formules $E\,j\,\overline{P}$ et $E\,\overline{j}\,P$ sont donc équivalentes).

---

[1]) Voir ces *Comptes rendus*, XXII Année, 1929, p. 1.

[2]) *Fundamenta Mathematicae* t. VI, p. 163.

[3]) ibidem, p. 163 et 166.

[4]) Voir ces *Comptes rendus*, XXIII Année, 1930, p. 133.

[5]) *Fund. Math.* t. XVII, p. 77.

[6]) *Fuad. Math.* t. VIII, p. 370.

H étant un ensemble plan et a un nombre réel, nous désignerons par $H(a)$ l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $(a, y) \varepsilon H$. (Ainsi $\Gamma_P(H)$ est l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que $H(a) j P$).

Pareillement, M étant un ensemble dans l'espace à 3 dimensions et a et b deux nombres réels, nous désignerons par $M(a, b)$ l'ensemble de tous les nombres réels z, tels que $(a, b, z) \varepsilon M$.

1. Nous prouverons ici un théorème qui fera comprendre l'importance du problème s'il existe pour une famille F donnée d'ensembles linéaires une propriété P, telle que $F = \Phi(P)$.

Théorème I. *S'il existe pour la famille F d'ensembles linéaires une propriété P, telle que $F = \Phi(P)$, il existe un ensemble E de la famille F dont le complémentaire CE n'appartient pas à F. De plus, si la propriété P peut être définie effectivement, l'ensemble E le peut être aussi.*

Démonstration. Comme j'ai démontré, il existe un ensemble fermé M dans l'espace à 3 dimensions, tel qu'en le coupant par les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles fermés plans possibles [1]). Je dis que l'ensemble E de tous les nombres réels a, tels que $M(a, a) j P$ satisfait aux conditions de notre théorème.

Désignons par H l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(x, x, y) \varepsilon M$: l'ensemble M étant fermé, on voit sans peine que l'ensemble H l'est aussi. Je dis que $E = \Gamma_P(H)$.

En effet, soit $a \varepsilon E$: d'après la définition de l'ensemble E, on a donc $M(a, a) j P$. Or, d'après la définition de l'ensemble H pour tout y réel la formule $(a, y) \varepsilon H$ est équivalente à la formule $(a, a, y) \varepsilon M$, d'où résulte tout de suite que $H(a) = M(a, a)$. La formule $M(a, a) j P$ donne donc $H(a) j P$, c'est-à-dire $a \varepsilon \Gamma_P(H)$.

D'autre part, soit $a \varepsilon \Gamma_P(H)$: on a donc $H(a) j P$, ce qui donne $M(a, a) j P$, c'est-à-dire, d'après la définition de E, $a \varepsilon E$.

La formule $E = \Gamma_P(H)$ est ainsi démontrée, d'où résulte que $E \varepsilon \Phi(P)$, c'est-à-dire $E \varepsilon F$.

Or, je dis que $C E \bar{\varepsilon} F$. Supposons, par contre, que $CE \varepsilon F$. D'après $F = \Phi(P)$ il existe donc un ensemble fermé plan H_0,

---

1) *Fund. Math.*, t. VII, p. 200—201. Il s'agit là d'un ensemble borné. mais cette condition n'est pas essentielle pour la démonstration.

tel que $CE = \Gamma_P(H_0)$. D'après la propriété de l'ensemble M, il existe un nombre réel a, tel que le plan $x = a$ coupe M en l'ensemble H_0.

Deux cas seulement sont possibles:

1) $M(a, a)\, j\, P$. D'après la définition de l'ensemble E nous avons donc $a \,\varepsilon\, E$, donc $a \,\bar{\varepsilon}\, CE$ et, d'après $CE = \Gamma_P(H_0)$, $H_0(a)\, \bar{j}\, P$. Or, d'après la définition du nombre a on a évidemment $H_0(a) = M(a, a)$. On a donc $M(a, a)\, \bar{j}\, P$, contrairement à l'hypothèse.

2) $M(a, a)\, \bar{j}\, P$. Comme plus haut, nous trouvons successivement: $a \,\bar{\varepsilon}\, E$, $a \,\varepsilon\, CE$, $H_0(a)\, j\, P$ et $M(a, a)\, j\, P$, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse que $CE \,\varepsilon\, F$ implique donc toujours une contradiction. On a donc $CE \,\bar{\varepsilon}\, F$, c. q. f. d.

Les propriétés désirées de l'ensemble E sont ainsi démontrées.

Or, l'ensemble M peut être, comme on sait, défini effectivement. Donc, si la propriété P, telle que $F = \Phi(P)$, est donnée effectivement, l'ensemble E peut être déterminé effectivement. Notre théorème est donc démontré complètement.

Voici quelques applications de notre théorème.

Comme nous avons mentionné dans l'Introduction (exemples 5) et 7)), il existe une propriété P d'ensembles linéaires, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles analytiques linéaires. D'après le théorème I, il en résulte qu'*il existe un ensemble analytique linéaire dont le complémentaire n'est pas un ensemble analytique.* Un tel ensemble est, comme on sait, non mesurable B [1]).

Du théorème I résulte immédiatement que si la famille F d'ensembles linéaires jouit de cette propriété que si elle contient un ensemble, elle contient aussi son complémentaire, alors il n'existe aucune propriété P, telle que $F = \Phi(P)$.

Donc, en particulier, *il n'existe pas une propriété P telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires mesurables B.*

---

[1]) Cf. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications,* Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 149.

Pareillement il n'existe pas une propriété P, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires qui sont à la fois F_σ et G_δ.

Quelle que soit la propriété P d'ensembles linéaires, la famille $\Phi(\bar{P})$ coïncide évidemment avec celle de tous les complémentaires des ensembles de la famille $\Phi(P)$. Donc, quelle que soit la propriété P_1, il n'existe pas une propriété P, telle que $\Phi(P) = \Phi(P_1) + \Phi(\bar{P}_1)$.

2. Nous prouverons maintenant quelques théorèmes qui permetteront, pour certaines familles F d'ensembles, de résoudre affirmativement le problème d'existence d'une propriété P, telle que $F = \Phi(P)$.

Théorème II. *P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant une suite finie ou infinie de propriétés des ensembles linéaires, il existe toujours une propriété P telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires E de la forme*

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots,$$

où E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est un ensemble quelconque de la famille $\Phi(P_n)$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons, pour n naturels et t réels:

$$\varphi_n(t) = \frac{t}{2(1 + |t|)} + n + \frac{1}{2}$$

— cette fonction est, comme on voit sans peine, croissante et continue, et elle établit une homéomorphie entre l'ensemble de tous les nombres réels t et celui de nombres réels intérieurs à l'intervalle $(n, n+1)$.

H étant un ensemble plan fermé, désignons par $f_n(H)$ l'ensemble formé des droites $y = n$ et $y = n+1$ et de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe un point (ξ, η) de H, tel que $x = \xi$ et $y = \varphi_n(\eta)$. On voit sans peine que $f_n(H)$ est aussi un ensemble fermé.

Or, H étant un ensemble plan fermé, désignons par $g_n(H)$ l'ensemble de tous les points (ξ, η) du plan, tels que $(\xi, \varphi_n(\eta)) \varepsilon H$. On voit sans peine que l'ensemble $g_n(H)$ est aussi fermé.

$P_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ étant une suite infinie donnée des propriétés d'ensembles linéaires, désignons par P la propriété d'ensembles définie comme il suit:

L'ensemble E de nombres réels y jouit de la propriété P dans ce et seulement dans ce cas, s'il existe un nombre naturel n, tel que l'ensemble de tous les nombres réels y, où $\varphi_n(y) \varepsilon E$ jouit de la propriété P_n.

Je dis que la propriété P satisfait aux conditions de notre théorème.

En effet, soit E un ensemble de la famille $\Phi(P)$. Il existe donc un ensemble plan fermé H, tel que

(1) $$E = \Gamma_P(H).$$

Je dis qu'on aura la formule

(2) $$\Gamma_P(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{P_n}(g_n(H)).$$

En effet, soit $a \varepsilon \Gamma_P(H)$, donc $H(a) j P$. De la définition de la propiété P résulte qu'il existe un nombre naturel n, tel que l'ensemble Y_n de tous les nombres réels y, où $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$, jouit de la propriété P_n. Or, d'après la définition de l'ensemble $g_n(H)$ on conclut tout de suite que Y_n est l'ensemble des ordonnées de tous les points communs à la droite $x=a$ et à l'ensemble $g_n(H)$. On a donc $a \varepsilon \Gamma_{P_n}(g_n(H))$.

Or, soit n un nombre naturel donné et soit $a \varepsilon \Gamma_{P_n}(g_n(H))$. De la définition de l'ensemble $g_n(H)$ et celle de la propriété P résulte sans peine que $a \varepsilon \Gamma_P(H)$. La formule (2) est ainsi démontrée.

Posons $E_n = \Gamma_{P_n}(g_n(H))$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$: nous aurons évidemment $E_n \varepsilon \Phi(P_n)$ (pour $n=1, 2, 3, \ldots$) et, d'après (1) et (2), nous aurons $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$

D'autre part, supposons que

(3) $$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots,$$

où

(4) $$E_n \varepsilon \Phi(P_n) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Il existe donc pour tout n naturel un ensemble fermé plan H_n, tel que

(5) $$E_n = \Gamma_{P_n}(H_n).$$

Posons

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(H_n) \tag{6}$$

— ce sera, comme on voit sans peine, un ensemble plan fermé. Je dis que

$$E = \Gamma_P(H). \tag{7}$$

En effet, si $a \varepsilon E$, il existe, d'après (3), un nombre naturel n, tel que $a \varepsilon E_n$ et, d'après (5), on a $H_n(a) \, j \, P_n$.

Or, d'après la définition de la fonction f_n, la condition $y \varepsilon H_n(a)$ est, comme on voit sans peine, équivalente à $(a, \varphi_n(y)) \varepsilon f_n(H_n)$. D'après la définition de la fonction φ_n on a, pour tout y réel: $n < \varphi_n(y) < n+1$, et, d'après la définition de la fonction f_k, les ordonnées des points de $f_k(H_k)$ sont $\geqslant k$ et $\leqslant k+1$: il en résulte tout de suite, d'après (6), que la condition $(a, \varphi_n(y)) \varepsilon f_n(H_n)$ et équivalente à $(a, \varphi_n(y)) \varepsilon H$, c'est-à-dire $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$.

L'ensemble $H_n(a)$ coïncide ainsi avec l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$. Or, nous avons trouvé plus haut $H_n(a) \, j \, P_n$. D'après la définition de la propriété P nous en concluons tout de suite que $H(a) \, j \, P$, donc $a \varepsilon \Gamma_P(H)$.

D'autre part, soit $a \varepsilon \Gamma_P(H)$. Nous avons donc $H(a) \, j \, P$ et, d'après la définition de la propriété P, il existe un nombre naturel n, tel que l'ensemble de tous les nombres réels y, où $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$, jouit de la propriété P_n. Or, comme nous avons vu, cet ensemble coïncide avec $H_n(a)$. On a donc $H_n(a) \, j \, P_n$, c'est-à-dire $a \varepsilon \Gamma_{P_n}(H_n)$, d'où, d'après (5) et (3): $a \varepsilon E$.

La formule (7) est ainsi démontrée, et il en résulte que $E \varepsilon \Phi(P)$.

Le théorème II est ainsi démontré.

Théorème III. $P_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *étant une suite finie ou infinie de propriétés des ensembles linéaires, il existe toujours une propiété P, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires E de la forme*

$$E = E_1 E_2 E_3 \ldots,$$

où $E_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *est un ensemble quelconque de la famille* $\Phi(P_n)$.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème II. La propriété P doit y être définie comme il suit:

L'ensemble E de nombres réels y jouit de la propriété P dans ce et seulement dans ce cas, si, quel que soit le nombre naturel n, l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_n(y) \varepsilon E$, jouit de la propriété P_n.

Le théorème III résulte aussi sans peine du théorème II et de la remarque que, quelle que soit la propriété P, la famille $\Phi(\overline{P})$ coïncide avec celle de tous les complémentaires des ensembles de la famille $\Phi(P)$.

De cette remarque et du théorème III résulte aussi sans peine ce

Théorème IV: *P_1 et P_2 étant deux propriétés des ensembles linéaires, il existe toujours une propriété P, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires E de la forme*

$$E = E_1 - E_2,$$

où E_1 est un ensemble quelconque de la famille $\Phi(P_1)$ et E_2 est un ensemble quelconque de la famille $\Phi(P_2)$.

En effet, d'après le théorème III, il existe une propriété P, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires E de la forme $E = E_1 E_2$, où $E_1 \varepsilon \Phi(P_1)$ et $E_2 \varepsilon \Phi(\overline{P}_2)$. Cette dernière formule est équivalente à $CE_2 \varepsilon \Phi(P_2)$.

Or, la formule $E = E_1 E_2$ est équivalente à $E = E_1 - CE_2$.

On voit donc que $\Phi(P)$ est la famille de tous les ensembles linéaires E qui sont des différences de deux ensembles, dont le premier appartient à $\Phi(P_1)$ et le second à $\Phi(P_2)$. Le théorème IV est ainsi établi.

3. On appelle, d'après M. Hausdorff [1]), P^1 les ensembles ouverts, Q^1 les ensembles fermés, et on définit par l'induction transfinie, pour $1 < \alpha < \Omega$, les ensembles P^α (resp. Q^α) comme sommes (resp. produits) d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$, où E_n est un ensemble Q^{ξ_n} (resp. P^{ξ_n}), et où $\xi_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

---

1) *Mathematische Zeitschrift* 5 (1919), p. 307.

Théorème V: *Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, il existe une propriété P d'ensembles linéaires, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires P^α (resp. Q^α).*

Démonstration. Notre théorème est vrai pour $\alpha = 1$. En effet, soit P la propriété d'un ensemble linéaire (situé sur une parallèle à l'axe OY) de contenir un point (au moins) dont l'ordonnée appartient à l'intervalle (0, 1). On voit sans peine que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires fermés, et que la famille $\Phi(\bar{P})$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires ouverts.

Soit maintenant α un nombre ordinal > 1 et $< \Omega$, et supposons que notre théorème est vrai pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \alpha$ est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite qu'il existe une suite infinie

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \tag{8}$$

formée de nombres ordinaux (positifs) $< \alpha$ et telle que tout nombre ordinal $< \alpha$ figure dans la suite (8) une infinité de fois.

D'après l'hypothèse, et d'après $\alpha_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, il existe pour tout nombre naturel n une propriété P_n d'ensembles linéaires telle que la famille $\Phi(P_n)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires Q^{α_n}. Or, d'après le théorème II, il existe une propriété P, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec la famille F de toutes les ensembles linéaires E de la forme

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots, \tag{9}$$

où $E_n \varepsilon \Phi(P_n)$.

Or, on voit sans peine que la famille F coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires P^α.

En effet, de $E_n \varepsilon \Phi(P_n)$ résulte que E_n est un ensemble Q^{α_n}, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et la formule (9) prouve (d'après la définition des ensembles P^α et d'après $\alpha_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) que E est un ensemble P^α.

D'autre part, soit E un ensemble linéaire P^α, et soit x_0 un point de E. D'après la définition des ensembles P^α, il existe une suite infinie d'ensembles $M_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que M_n

est un ensemble Q^{ξ_n}, où $\xi_n < \alpha$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et qu'on a la formule

(10) $$E = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots.$$

D'après la propriété de la suite (8), il existe une suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, telle que $\alpha_{n_k} = \xi_k$ (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$). Posons

$$E_{n_k} = M_k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

et pour $n \neq n_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ désignons par E_n l'ensemble formé d'un seul point x_0: ce sera donc un ensemble fermé et, à plus forte raison, un ensemble Q^{α_n}.

L'ensemble E_n est donc un Q^{α_n}, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et, d'après la définition de la propriété P_n, nous aurons $E_n \varepsilon \Phi(P_n)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Or, d'après (10) et la définition des ensembles E_n, on a évidemment la formule (9).

La famille F coïncide donc avec celle de tous les ensembles P^α linéaires, et notre théorème est démontré pour la famille des ensembles P^α.

Pour en déduire qu'il est vrai aussi pour la famille des ensembles Q^α, il suffit de remarquer que les ensembles Q^α coïncident avec les complémentaires des ensembles P^α, et de prendre, au lieu de la propriété P, sa négation $\bar{P}$.

Le théorème V est ainsi démontré.

Des théorèmes I et V résulte tout de suite que, quel que soit le nombre ordinal (positif) $\alpha < \Omega$, *il existe un ensemble P^α qui n'est pas Q^α, et un ensemble Q^α qui n'est pas P^α.*

Il en résulte tout de suite, comme on sait, qu'il existe, pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, un ensemble P^α (et de même un ensemble Q^α) qui n'est pas ni P^ξ, ni Q^ξ, pour $\xi < \alpha$, ce qui prouve l'existence de toutes les classes d'ensembles mesurables B.

Voici encore d'autres applications des théorèmes démontrés.

Appelons P^α_ρ (resp. Q^α_ρ) les différences de deux ensembles P^α (resp. Q^α). On voit sans peine que les ensembles P^α_ρ coïncident avec les ensembles Q^α_ρ (pour tout $\alpha < \Omega$).

Des théorèmes V et IV résulte tout de suite qu'il existe, pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, une propriété P telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires P^α_ρ. D'après le théorème I il en résulte l'existence (pour tout

$\alpha < \Omega$) d'un ensemble P_ρ^α dont le complémentaire n'est pas un P_ρ^α: un tel ensemble n'est pas, à plus forte raison, ni un P^α, ni un Q^α.

Pareillement on pourrait traiter les ensembles $P_{\rho\rho}^\alpha$ (différences de deux P_ρ^α), $P_{\rho\rho\rho}^\alpha$ etc., ainsi que les sommes de n ensembles P_ρ^α (en utilisant le théorème II) et de conclure qu'il existe pour tout $\alpha < \Omega$ et tout n naturel un ensemble linéaire qui est une somme de $n+1$ ensembles P_ρ^α, sans être une somme de n ensembles P_ρ^α [1]. De même on traite les ensembles A_ρ (différences de deux ensembles analytiques), $A_{\rho\rho}$ etc., ainsi que les sommes de n ensembles A_ρ.

4. H étant un ensemble fermé dans l'espace à 3 dimensions, et P une propriété d'ensembles linéaires, désignons par $\Gamma_P(H)$ l'ensemble de tous les points (a, b) du plan XOY, tels que l'ensemble $H(a, b)$ (voir l'Introduction) jouit de la propriété P.

Soit α un nombre ordinal donné $< \Omega$. D'après le théorème V, il existe une propriété P d'ensembles linéaires telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires P^α. Or, en analysant la démonstration de ce théorème et des théorèmas II et III, on conclut sans peine que si H est un ensemble fermé dans l'espace à 3 dimensions, $\Gamma_P(H)$ est un ensemble P^α plan.

Soit M l'ensemble fermé dans l'espace à 3 dimensions, tel qu'en le coupant par les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles plans fermés possibles (cf. § 1), et posons $U = \Gamma_P(M)$ — ce sera donc un ensemble P^α plan. De la propriété de l'ensemble M et de la remarque que $\Phi(P)$ est la famille de tous les ensembles P^α linéaires résulte tout de suite qu'en coupant l'ensemble U par les droites parallèles à l'axe OY on obtient tous les ensembles linéaires P^α.

Nous avons ainsi démontré *l'existence* (pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$) *d'un ensemble P^α (plan) universel,* c'est-à-dire d'un ensemble P^α plan, tel qu'en le coupant par les droites parallèles à l'axe OY on obtient tous les ensembles P^α linéaires.

Le complémentaire d'un ensemble P^α universel est évidemment un ensemble Q^α universel. Pareillement on démontre l'e-

---

[1]) Il ne faudrait qu'appliquer le raisonnement que j'ai utilisé dans ma note des *Fund. Math.* t. XIV, p. 87.

xistence des ensembles P^α_ρ (resp. $P^\alpha_{\rho\rho}$ etc.) universels, ainsi que l'existence d'un ensemble plan analytique universel [1]).

5. Théorème VI. *Si P est une propriété d'ensembles linéaires, telle que le produit d'un ensemble de la famille $\Phi(P)$ par un ensemble (linéaire) G_δ appartient toujours à $\Phi(P)$, tout ensemble linéaire homéomorphe d'un ensemble de la famille $\Phi(P)$ appartient à cette famille.*

Lemme. Soit H un ensemble plan fermé, $f(x)$ — une fonction qui établit une homéomorphie entre les ensembles linéaires M_1 et M. L'ensemble Q de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \varepsilon M_1$ et $(f(x), y) \varepsilon H$, est fermé dans l'ensemble R de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \varepsilon M_1$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x_0 \varepsilon M_1$, y_0 un nombre réel donné quelconque, et supposons que (x_n, y_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie de points de Q qui converge vers (x_0, y_0). On a donc

$$(11) \qquad x_n \varepsilon M_1 \quad \text{et} \quad (f(x_n), y_n) \varepsilon H, \quad \text{pour} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.$$

La fonction $f(x)$ étant continue dans M_1, de $x_n \to x_0$ résulte $f(x_n) \to f(x_0)$, donc, d'après $y_n \to y_0$, on a $(f(x_n), y_n) \to (f(x_0), y_0)$. L'ensemble H étant fermé, il en résulte, d'après (11): $(f(x_0), y_0) \varepsilon H$, ce qui donne, d'après $x_0 \varepsilon M_1$ et la définition de Q: $(x_0, y_0) \varepsilon Q$. Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant P une propriété donnée d'ensembles linéaires et soit E un ensemble (linéaire) de la famille $\Phi(P)$, et E_1 — un ensemble linéaire homéomorphe de E. D'après le théorème de M. L a v r e n t i e f f [2]), l'homéomorphie entre E et E_1 peut être étendue aux ensembles G_δ, M et M_1, tels que $E \subset M$ et $E_1 \subset M_1$.

Soit $f(x)$ la fonction qui établit la homéomorphie entre M_1 et M.

D'après $E \varepsilon \Phi(P)$ il existe un ensemble plan fermé H, tel que $E = \Gamma_p(H)$. Soit Q l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \varepsilon M_1$ et $(f(x), y) \varepsilon H$; d'après notre lemme, l'ensemble Q sera fermé dans l'ensemble R de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \varepsilon M_1$.

---

1) Cf. *Fund. Math.* t. VII, p. 201.

2) *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

Posons $H_1 = \overline{Q}$, c'est-à-dire désignons par H_1 la fermeture $Q + Q'$ de l'ensemble Q. L'ensemble Q étant fermé dans R, nous aurons

(12) $$H_1 R = Q.$$

Je dis que

(13) $$E_1 = M_1 \Gamma_p(H_1).$$

En effet, si $a \varepsilon E_1$, on a, d'après $E_1 \subset M_1$, $a \varepsilon M_1$, d'où, d'après la définition de l'ensemble R et la formule (12) on trouve sans peine $H_1(a) = Q(a)$.

D'autre part, d'après la définition de l'ensemble Q, la formule $a \varepsilon M_1$ donne $Q(a) = H(f(a))$. On a donc $H_1(a) = H(f(a))$.

Or, d'après $a \varepsilon E_1$, on a $f(a) \varepsilon E$, donc, d'après $E = \Gamma_p(H)$, $H(f(a))\, j\, P$ et parsuite $H_1(a)\, j\, P$, donc $a \varepsilon \Gamma_p(H_1)$.

Nous avons ainsi démontré que la formule $a \varepsilon E_1$ entraîne $a \varepsilon M_1 \Gamma_p(H_1)$.

D'autre part, soit $a \varepsilon M_1 \Gamma_p(H_1)$. On a donc $a \varepsilon M_1$ et $H_1(a)\, j\, P$. Or, nous avons vu plus haut que la formule $a \varepsilon M_1$ entraîne $H_1(a) = H(f(a))$. On a donc $H(f(a))\, j\, P$, c'est-à-dire $f(a) \varepsilon \Gamma_p(H)$, d'où, d'après $E = \Gamma_p(H)$, $f(a) \varepsilon E$, ce qui donne $a \varepsilon E_1$.

La formule (13) est ainsi établie.

M_1 étant un ensemble G_δ et $\Gamma_p(H_1)$ — un ensemble de la famille $\Phi(P)$, il résulte de (13), d'après l'hypothèse de notre théorème, que $E_1 \varepsilon \Phi(P)$.

Le théorème VI est ainsi démontré.

Des théorèmes V et VI résulte immédiatement l'invariance topologique des classes P^α, Q^α, P^α_ρ, $P^\alpha_{\rho\rho}$ etc., pour $2 < \alpha < \Omega$, ainsi que celle des complémentaires analytiques.

Or, il est à remarquer qu'il existe des propriétés P d'ensembles linéaires pour lesquelles la famille $\Phi(P)$ n'est pas un invariant topologique: en effet, comme nous savons, il existe des propriétés P pour lesquelles $\Phi(P)$ coïncide avec la famille de tous les ensembles linéaires fermés (et un ensemble homéomorphe d'un ensemble fermé non borné peut n'être pas fermé).

6. Théorème VII. *Si F est une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires, il existe une propriété P d'ensembles linéaires, telle que $\Phi(P) \supset F$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit

(14) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

une courbe continue remplissant le plan.

La famille F d'ensembles linéaires étant, par l'hypothèse, de puissante du continu, il existe une correspondance biunivoque entre les ensembles-éléments de la famille F et les nombres réels: soit E_z l'ensemble de F correspondant ainsi au nombre réel z.

z étant un nombre réel donné, désignons par T_z l'ensemble de tous les nombres réels t, tels que $\varphi(t) = z$.

Nous dirons que l'ensemble de nombres réels E jouit de la propriété P, s'il existe un nombre réel z, tel que

$$E_z \psi(T_z E) \neq 0. \tag{15}$$

Je dis que $\Phi(P) \supset F$.

En effet, soit z un nombre réel donné quelconque. Désignons par H_z l'ensemble de tous les points (ξ, η) du plan, tels que

$$\varphi(\eta) = z \quad \text{et} \quad \psi(\eta) = \xi;$$

les fonctions φ et ψ étant continues, on voit sans peine que H_z est un ensemble plan fermé.

Nous prouverons que $E_z = \Gamma_P(H_z)$.

En effet, soit $a \varepsilon E_z$. La courbe (14) remplissant le plan, il existe un nombre réel b, tel que

$$\varphi(b) = z \quad \text{et} \quad \psi(b) = a. \tag{16}$$

De la définition de l'ensemble H_z et de (16) résulte que $(a, b) \varepsilon H_z$, donc $b \varepsilon H_z(a)$. Or, de (16) et de la définition de l'ensemble T_z résulte que $b \varepsilon T_z$. On a donc $b \varepsilon T_z H_z(a)$, d'où: $\psi(b) \varepsilon \psi(T_z H_z(a))$, c'est-à-dire, d'après (16): $a \varepsilon \psi(T_z H_z(a))$, ce qui donne, d'après $a \varepsilon E_z$:

$$E_z \psi(T_z H_z(a)) \neq 0$$

et, d'après la définition de la propriété P, prouve que $H_z(a)\, j\, P$, c'est-à-dire que $a \varepsilon \Gamma_P(H_z)$.

Or, soit $a \varepsilon \Gamma_P(H_z)$: on a donc $H_z(a)\, j\, P$ et, d'après la définition de la propriété P, il existe un nombre réel y, tel que $y \varepsilon E_z \psi(T_z H_z(a))$, donc

$$y \varepsilon E_z \tag{17}$$

et

$$y \varepsilon \psi(T_z H_z(a)). \tag{18}$$

De (18) résulte qu'il existe un nombre réel t, tel que

(19) $$t \varepsilon T_z H_z(a)$$

et

(20) $$y = \psi(t).$$

De (19) résulte que $t \varepsilon H_z(a)$, donc que $(a, t) \varepsilon H_z$; d'après la définition de l'ensemble H_z, on en conclut que

$$\varphi(t) = z \quad \text{et} \quad \psi(t) = a,$$

ce qui donne, d'après (20): $y = a$, d'où, d'après (17): $a \varepsilon E_z$.

Nous avons ainsi démontré que $E_z = \Gamma_P(H_z)$, d'où $E_z \varepsilon \Phi(P)$.

E_z pouvant désigner un ensemble quelconque de la famille F, nous en concluons que $E \subset \Phi(P)$, et notre théorème est démontré.

Quelle que soit la propriété P d'ensembles linéaires, la famille $\Phi(P)$ est au plus de puissance du continu ($\Phi(P)$ étant la famille de tous les ensembles $\Gamma_P(H)$ correspondants aux ensembles fermés plans H, dont l'ensemble est de puissance du continu). Du théorème VII résulte donc tout de suite ce

Corollaire: *Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de puissance du continu de propriétés d'ensembles linéaires, il existe une propriété P_0, telle que*

$$\Phi(P_0) \supset \Phi(P)$$

pour toute propriété $P \varepsilon \mathcal{E}$.

7. N étant un ensemble donné de suites (finies ou infinies) de nombres naturels croissants $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, et F — une famille donnée d'ensembles linéaires, nous désignerons par $H_N(F)$ et nous appellerons *résultat d'opération de M. Hausdorff caractérisée par l'ensemble N de suites et effectuée sur la famille F d'ensembles* la famille de tous les ensembles de la forme

$$\sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots,$$

où $E_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille F, et où la sommation $\sum\limits_N$ s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ constituant l'ensemble N de suites [1]).

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XV, p. 199; aussi: F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89 et 90, ainsi que ces *Comptes rendus* XIX, p. 463.

Théorème VIII. *Quelle que soit la propriété P d'ensembles linéaires et quel que soit l'ensemble N de suites croissantes de nombres naturels, il existe une propriété P_1 d'ensembles linéaires, telle que* $\Phi(P_1) = H_N(\Phi(P))$.

Démonstration. Soit N un ensemble donné de suites croissantes de nombres naturels, P — une propriété donnée d'ensembles linéaires, et définissons la propriété P_1 d'ensembles linéaires comme il suit.

Nous dirons qu'un ensemble de nombres réels E jouit de la propriété P_1, s'il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle que, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble de tous les nombres réels y, pour lesquels $\varphi_{n_k}(y) \varepsilon E$, jouit de la propriété P (φ_n est ici la fonction définie dans le § 2).

Soit E un ensemble de la famille $H_N(\Phi(P))$. D'après la définition de cette famille, il existe une suite infinie $E_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles de la famille $\Phi(P)$, telle que

$$E = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots . \tag{21}$$

Soit n un indice donné. D'après $E_n \varepsilon \Phi(P)$, il existe un ensemble plan fermé H_n, tel que

$$E_n = \Gamma_P(H_n) . \tag{22}$$

Posons

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(H_n) , \tag{23}$$

f_n étant la fonction définie dans le § 2. On voit sans peine que H est un ensemble plan fermé.

Je dis que

$$E = \Gamma_{P_1}(H) . \tag{24}$$

En effet, soit $a \varepsilon E$. D'après (21) il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle que

$$a \varepsilon E_{n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

D'après (22) et (25) on a:

$$H_{n_k}(a) \, j \, P, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{26}$$

Or, tout à fait comme dans le § 2, on démontre que l'ensemble $H_n(a)$ coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$.

D'après (26), l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_{n_k}(y) \varepsilon H(a)$, jouit donc de la propriété P (pour $k=1, 2, 3, \ldots$): d'après la définition de la propriété P_1 il en résulte que $H(a)\, j\, P_1$, c'est-à-dire que $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H)$.

Or, soit $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H)$, c'est-à-dire $H(a)\, j\, P_1$. D'après la définition de la propriété P_1, il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle que, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_{n_k}(y) \varepsilon H(a)$, jouit de la propriété P. Or, comme nous savons, cet ensemble coïncide avec $H_{n_k}(a)$. On a donc $H_{n_k}(a)\, j\, P$, c'est-à-dire $a \varepsilon \Gamma_P(H_{n_k})$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne, d'après (22): $a \varepsilon E_{n_k}$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, et prouve, d'après (21), que $a \varepsilon E$.

La formule (24) est ainsi établie. Il en résulte que $E \varepsilon \Phi(P_1)$. Nous avons ainsi démontré que la formule $E \varepsilon H_N(\Phi(P))$ entraîne $E \varepsilon \Phi(P_1)$.

Or, soit E un ensemble de la famille $\Phi(P_1)$. Il existe donc un ensemble plan fermé H, tel que

$$E = \Gamma_{P_1}(H). \tag{27}$$

Désignons par E_n l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que l'ensemble de tous les nombres réels y, pour lesquels $\varphi_n(y) \varepsilon H(x)$, jouit de la propriété P.

Je dis que

$$E_n = \Gamma_P(g_n(H)), \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

g_n étant la fonction, définie dans le § 2.

En effet, soit n un nombre naturel donné, et soit $a \varepsilon E_n$. D'après la définition de l'ensemble E_n, l'ensemble de tous les nombres y, tels que $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$, c'est-â-dire, tels que $(a, \varphi_n(y)) \varepsilon H$, jouit de la propriété P. Or, d'après la définition de la fonction g_n, la formule $(a, \varphi_n(y)) \varepsilon H$ est équivalente à la formule $(a, y) \varepsilon g_n(H)$. Donc, l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $(a, y) \varepsilon g_n(H)$ jouit de la propriété P, ce qui donne: $a \varepsilon \Gamma_P(g_n(H))$.

D'autre part, soit $a \varepsilon \Gamma_P(g_n(H))$: l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $(a, y) \varepsilon g_n(H)$ jouit donc de la propriété P, d'où résulte, comme nous savons, que l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_n(y) \varepsilon H(a)$ jouit de la propriété P, ce qui prouve, d'après la définition de l'ensemble E_n, que $a \varepsilon E_n$. La formule (28) est ainsi établie.

De (28) résulte que $E_n \varepsilon \Phi(P)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nous allons maintenant prouver la formule (21).

Soit $a \varepsilon E$. D'après (27), on a $H(a) j P_1$, et, d'après la définition de la propriété P_1, il existe une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N telle que, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que $\varphi_{n_k}(y) \varepsilon H(a)$, jouit de la propriété P. D'après la définition des ensembles E_n il en résulte tout de suite que $a \varepsilon E_{n_k}$, pour $k = 1, 2. 3, \ldots$; $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ étant une suite de N, cela prouve que

(29) $$a \varepsilon \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots .$$

Or, soit a un nombre tel, qu'on a la formule (29). Il existe donc une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle qu'on a la formule (25) qui, vu la définition des ensembles E_n, prouve que, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble de tous les nombres réels y, pour lesquels $\varphi_{n_k}(y) \varepsilon H(a)$, jouit de la propriété P. Vu la définition de la propriété P_1, on en conclut que $H(a) j P_1$, c'est-à-dire que $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H)$, et, d'après (27): $a \varepsilon E$.

La formule (21) est ainsi établie.

Plus haut nous avons démontré que $E_n \varepsilon \Phi(P)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$: d'après (21), nous avons donc $E \varepsilon H_N(\Phi(P))$.

Nous avons ainsi démontré que la formule $E \varepsilon \Phi(P_1)$ entraîne $E \varepsilon H_N(\Phi(P))$. Or, plus haut nous avons démontré le réciproque. La formule $\Phi(P_1) = H_N(\Phi(P))$ est ainsi établie et le théorème VIII est démontré.

Soit, en particulier, F la famille de tous les ensembles linéaires fermés. Comme nous savons (§ 3), il existe une propriété P d'ensembles linéaires, telle que $\Phi(P) = F$. D'après le théorème VIII nous concluons donc que, *quel que soit l'ensemble N de suites, il existe une propriété P_1, telle que $H_N(F) = \Phi(P_1)$.*

D'autre part, nous prouverons qu'*il existe une propriété P d'ensembles linéaires, pour laquelle il n'existe aucun ensemble N de suites, tel qu'on ait* $H_N(F) = \Phi(P)$.

En effet, soit P la propriété d'un ensemble de nombres réels qui consiste en ce que cet ensemble ne contient aucun nombre de l'intervalle fermé (0,1). On voit sans peine que $\Phi(P)$ est ici la famille de tous les ensembles linéaires ouverts.

Admettons qu'il existe un ensemble N de suites, tel que $H_N(F) = \Phi(P)$. L'ensemble N est évidemment non vide. Soit, pour tout n naturel, E_n l'ensemble formé d'un seul nombre a: les ensembles $E_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ seront donc tous fermés, et on voit sans peine que l'ensemble

$$E = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots .$$

se réduit à un seul élément a: c'est donc un ensemble de la famille $H_N(F)$ qui n'est pas ouvert.

On a donc $E \varepsilon H_N(F)$ et $E \,\overline{\varepsilon}\, \Phi(P)$, ze qui prouve que $H_N(F) \neq \Phi(P)$, contrairement à l'hypothèse.

On voit donc que les opération $\Phi(P)$ sont plus générales que les opérations de M. Hausdorff sur la famille des ensembles fermés.

8. P étant une propriété d'ensembles linéaires, désignons par $\Phi_2(P)$ la famille de tous les ensembles plans $\Gamma_p(H)$, où H est un ensemble fermé quelconque dans l'espace à 3 dimensions.

Théorème IX. *Quelle que soit la propriété P d'ensembles linéaires, il existe une propriété* P_1 *d'ensembles linéaires, telle que la famille* $\Phi(P_1)$ *coïncide avec celle de toutes les projections sur l'axe OX d'ensembles (plans) de la famille* $\Phi_2(P)$.

Démonstration. Soit

(30) $$y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

une courbe continue remplissant le plan YZ.

Comme on voit sans peine, nous pouvons supposer que si la suite $|t_n|$ croit indéfinîment pour $n \to \infty$, une au moins des suites $|\varphi(t_n)|$ et $|\psi(t_n)|$ croit indéfiniment.

Désignons par M_b l'ensemble de tous les nombres réels t, tels que $\varphi(t) = b$.

Définissons la propriété P_1 comme il suit. Nous dirons qu'un ensemble de nombres réels E jouit de la propriété P_1 dans ce et seulement dans ce cas, s'il existe un nombre réel b, tel que $\psi(EM_b)jP$. [$\psi(Q)$ désigne ici l'ensemble de tous les nombres $\psi(t)$, où $t \varepsilon Q$].

Je dis que la propriété P_1 satisfait aux conditions de notre théorème.

En effet, soit $E \varepsilon \Phi(P_1)$. Il existe donc un ensemble plan fermé H_1, tel que $E = \Gamma_{P_1}(H_1)$. Désignons par H l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, pour lesquels il existe un point (ξ, η) de H_1, tel que $x = \xi$, $y = \varphi(\eta)$ et $z = \psi(\eta)$. L'ensemble H_1 étant fermé, il résulte sans peine des propriétés des fonctions continues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ que H est un ensemble fermé. Je dis que l'ensemble E est la projection de l'ensemble $\Gamma_P(H)$ sur l'axe OX.

Soit $a \varepsilon E$. D'après $E = \Gamma_{P_1}(H_1)$ on a $H_1(a)jP_1$, et, d'après la définition de la propriété P_1, il existe un nombre réel b, tel que $\psi(H_1(a)M_b)jP$. Or, d'après la définition de l'ensemble H et celle de M_b, on voit sans peine que $\psi(H_1(a)M_b) = H(a, b)$. On a donc $H(a, b)jP$, donc $(a, b) \varepsilon \Gamma_P(H)$, d'où résulte que a appartient à la projection de l'ensemble $\Gamma_P(H)$ sur l'axe OX.

D'autre part, soit a un point de l'axe OX qui est une projection d'un point de $\Gamma_P(H)$, soit du point (a, b). On a donc $(a, b) \varepsilon \Gamma_P(H)$, d'où $H(a, b)jP$, ce qui donne, comme nous avons vu plus haut: $\psi(H_1(a)M_b)jP$, d'où, d'après la définition de la propriété P_1: $H_1(a)jP_1$, donc $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H) = E$.

Il est ainsi démontré que l'ensemble E coïncide avec la projection de $\Gamma_P(H)$ sur l'axe OX; $\Gamma_P(H)$ étant un ensemble de la famille $\Phi_2(P)$, il en résulte que E est une projection sur l'axe OX d'un ensemble de la famille $\Phi_2(P)$.

D'autre part, soit E une projection sur l'axe OX d'un ensemble de la famille $\Phi_2(P)$, soit de l'ensemble $\Gamma_P(H)$, où H est un ensemble fermé dans l'espace à 3 dimensions. Désignons par H_1 l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(x, \varphi(y), \psi(y)) \varepsilon H$. L'ensemble H étant fermé et les fonctions φ et ψ étant continues, on voit sans peine que H_1 est un ensemble plan fermé. Je dis que $E = \Gamma_{P_1}(H_1)$.

En effet, soit $a \varepsilon E$. L'ensemble E étant la projection sur l'axe OX de l'ensemble $\Gamma_P(H)$, il existe un nombre réel b, tel que $(a, b) \varepsilon \Gamma_P(H)$, donc $H(a, b) j P$. Or, d'après la définition de l'ensemble H_1 on voit sans peine que $H(a, b) = \psi(H_1(a) M_b)$. [En effet, soit $z \varepsilon H(a, b)$. La courbe (30) remplissant le plan, il existe un nombre réel t, tel que $\varphi(t) = b$ et $\psi(t) = z$. D'après $z \varepsilon H(a, b)$ on a donc $(a, b, z) \varepsilon H$ et $(a, \varphi(t), \psi(t)) \varepsilon H$, ce qui prouve, d'après la définition de H_1, que $(a, t) \varepsilon H_1$, donc $t \varepsilon H_1(a)$. On a donc $z = \psi(t)$, $t \varepsilon H_1(a)$ et $\varphi(t) = b$, d'où $z \varepsilon \psi(H_1(a) M_b)$. D'autre part, soit $z \varepsilon \psi(H_1(a) M_b)$: on a donc, pour un nombre réel t, $z = \psi(t)$, $t \varepsilon H_1(a)$ et $\varphi(t) = b$. D'après $t \varepsilon H_1(a)$, on trouve $(a, t) \varepsilon H_1$, d'où, d'après la définition de H_1: $(a, \varphi(t), \psi(t)) \varepsilon H$, d'où, d'après $\varphi(t) = b$: $(a, b, \psi(t)) \varepsilon H$, donc $\psi(t) \varepsilon H(a, b)$, ce qui donne, d'après $z = \psi(t)$: $z \varepsilon H(a, b)$]. D'après la definition de la propriété P_1 il en résulte donc de $H(a, b) j P$ que $H_1(a) j P_1$, donc que $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H_1)$.

D'autre part, soit $a \varepsilon \Gamma_{P_1}(H_1)$. On a donc $H_1(a) j P_1$ et, d'après la définition de la propriété P_1, il existe un nombre réel b, tel que $\psi(H_1(a) M_b) j P$. Or, comme nous avons vu, $\psi(H_1(a) M_b) = H(a, b)$: on a donc $H(a, b) j P$, d'uù $(a, b) \varepsilon \Gamma_P(H)$: l'ensemble E étant la projection de l'ensemble $\Gamma_P(H)$ sur l'axe OX, cela prouve que $a \varepsilon E$.

La formule $E = \Gamma_{P_1}(H_1)$ est ainsi établie. Il en résulte que $E \varepsilon \Phi(P_1)$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Le théorème IX peut être généralisé pour les espaces (euclidiens) à un nombre quelconque de dimensions. Il en résulte sans peine que, quel que soit le nombre naturel n, il existe une propriété P d'ensembles linéaires, telle que la famille $\Phi(P)$ coïncide avec celle de tous les ensembles projectifs P_n (resp. C_n).

Edward Szpilrajn.

O pewnym zbiorze niemierzalnym p. Sierpińskiego.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 15 stycznia 1931 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym autor zajmuje się zbiorem nieprzeliczalnym S, zbudowanym przy założeniu hipotezy continuum przez p. Sierpińskiego, a spełniającym następujący warunek:

Każdy podzbiór nieprzeliczalny zbioru S jest niemierzalny (L).

Autor podaje szereg zastosowań tego zbioru, dotyczących 1) miary linjowej zbiorów płaskich (Carathéodory'ego), 2) operacyj Hausdorffa, 3) zbiorów całkowicie niedoskonałych.

Edward Szpilrajn.

Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński.

Note présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 15 Janvier 1931.

M. Sierpiński a construit à l'aide de l'hypothèse du continu un ensemble non dénombrable S satisfaisant à la condition suivante:

Tout ensemble de mesure nulle contient un ensemble au plus dénombrable de points de l'ensemble S,

ce qui est équivalent á l'énoncé suivant:

Tout sous-ensemble non dénombrable de S est non mesurable [1]).

---

[1]) Voir

a) W. Sierpiński: *Sur l'hypothèse du continu*, Fund. Math. **5** (1924), p. 185.

A propos de cet ensemble cf. de même:

b) S. Saks: *Sur un ensemble non mesurable, jouissant de la propriété de Baire*, Fund. Math. **11** (1928), p. 277.

c) W. Sierpiński: *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de 1re catégorie*, Bull. Acad. Pol., Cl. des Sc. Math. et Nat., série A, 1928, p. 455.

La construction de M. Sierpiński est valable dans l'espace euclidien à un nombre quelconque des dimensions.

Je me propose de donner dans cette Note des applications de l'ensemble S aux problèmes concernant 1) la théorie de la mesure, 2) les opérations de M. Hausdorff, 3) les ensembles totalement imparfaits.

1.

Le théorème suivant est vrai — comme on sait — pour la mesure lebesguienne:

(*) Tout ensemble de mesure positive contient un ensemble non mesurable.

Or, un problème s'impose: ce théorème reste-il vrai pour d'autres mesures, et — en particulier — pour la mesure linéaire d'ensembles plans, définie par M. Carathéodory [2])?

Je vais démontrer, que

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble plan de mesure linéaire infinie, dont chaque sous-ensemble est mesurable par rapport à la mesure linéaire d'ensembles plans [3]).

Démonstration. Je prouverai d'abord que:

(1) Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble plan de mesure linéaire (extérieure) infinie, dont chaque sous-ensemble est de mesure linéaire (extérieure) infinie ou nulle.

---

d) W. Sierpiński: *Sur un problème de M. Lusin*, C. R. de séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie **22** (1929), cl. III, p. 1.

e) W. Sierpiński: *Sur une décomposition du segment*, Fund. Math. **13** (1923), p. 195.

f) E. Szpilrajn: *Sur un problème de M. Banach*, Fund. Math. **15** (1930), p. 212.

[2]) Cf. C. Carathéodory: *Über das lineare Mass von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Gött. Nachr. 1914, p. 420.

[3]) Un ensemble E est *mesurable* au sens de M. Carathéodory par rapport à la fonction μ, lorsqu'on a

$$\mu Z = \mu Z E + \mu (Z - E)$$

pour tout ensemble Z.

Soit notamment S l'ensemble plan de M. Sierpiński, c'est-à-dire un ensemble non dénombrable, dont tout sous-ensemble non dénombrable est non mesurable (L) superficiellement.

Tout sous-ensemble dénombrable de S est évidemment de mesure linéaire nulle. Tout sous-ensemble non dénombrable, donc en particulier l'ensemble S, est de mesure linéaire (extérieure) infinie, car — comme on sait — tout ensemble de mesure linéaire (extérieure) finie est de mesure superficielle nulle [4]).

On a ensuite:

(2) Si tout sous-ensemble d'un ensemble E est de mesure linéaire (extérieure) nulle ou infinie, alors tout sous-ensemble de E est mesurable (par rapport à la mesure linéaire d'ensembles plans).

Soit, en effet $Z \subset E$, et soit X un ensemble arbitraire. L'égalité:

$$\mu X = \mu XZ + \mu (X - Z)$$

(où μ désigne la mesure linéaire extérieure) est évidemment satisfaite, car on a: soit $\mu ZX = 0$, soit $\mu ZX = \infty$.

Notre proposition résulte immédiatement de (1) et (2).

Ajoutons encore qu'on peut cependant démontrer pour la mesure linéaire d'ensembles plans un théorème qui sera plus faible que (*) [et duquel il résultera l'inversion de la proposition (2)]:

(‡) Tout ensemble de mesure positive *finie* contient un ensemble non mesurable.

Supposons en effet qu'un ensemble E satisfait aux inégalités: $0 < \mu E < \infty$. Soit

$$1 = R + S$$

une décomposition du plan en deux ensembles disjoints, totalement imparfaits (c'est-à-dire ne contenant aucun sous-ensemble parfait) [5]). L'un, au moins, des ensembles: ER et ES est de mesure linéaire (extérieure) positive; désignons cet ensemble par N.

---

[4]) Voir p. ex. H. Hahn: *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 461, théorème XI.

[5]) C'est M. Sierpiński qui a construit une telle décomposition. Cf. sa Note *Sur un ensemble punctiforme connexe*, Fund. Math. **1** (1920), p. 8.

Il est évidemment totalement imparfait. On a en même temps: $0 < \mu N < \infty$. Il en résulte que N est non mesurable par rapport à μ. En effet: tout ensemble M mesurable par rapport à μ, et tel que $0 < \mu M < \infty$, contient — comme on sait — un ensemble borelien B tel que $\mu B = \mu M$ [6]), donc non dénombrable. Par conséquent il contient un ensemble parfait [7]).

Il est à remarquer qu'il existe d'autres théorèmes concernant la mesure lebesguienne qui sont faux relativement à la mesure linéaire d'ensembles plans. Voici par exemple le théorème suivant:

(†) Pour qu'un ensemble E soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F_σ, soit K, et un ensemble N de mesure nulle — tels que $E = K + N$.

Or, je vais construire un ensemble plan mesurable relativement à la mesure linéaire et qui n'est pas somme d'un ensemble F_σ et d'un ensemble de mesure linéaire nulle.

Soit A_1 un ensemble linéaire G_δ qui n'est pas un F_σ et A_2 un ensemble plan, défini comme suit:

$$A_2 = \underset{(x,\, y)}{\mathrm{E}} \, [x \in A_1 \, , \; 0 \leqslant y \leqslant 1] \, .$$

---

[6]) Voir p. ex. Hahn l. c., p. 445, théorème III. Ce théorème est démontré pour les fonctions que M. Hahn appelle *Inhaltsfunktionen*. La mesure linéaire d'ensembles plans est une telle fonction d'après un théorème général énoncé par M. Hahn p. 452 (th. VIII).

[7]) Nous énonçons incidemment quelques remarques concernant les propositions (*) et (⁑) pour les fonctions de M. Carathéodory.

Soit μE une fonction définie pour l'espace euclidien à un nombre quelconque des dimensions, satisfaisant aux quatre conditions connues de M. Carathéodory [Cf. ses *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927, p. 238] et — en outre — aux conditions suivantes:

A) *Pour tout point p on a* $\mu((p)) = 0$.

B) *Pour tout ensemble E il existe un ensemble borelien B tel que* $B \supset E$ et $\mu B = \mu E$.

On voit aisément que notre démonstration du théorème (⁑) reste juste pour une telle fonction.

En supposant que μE satisfait encore à la condition:

C) *On peut décomposer l'espace en une suite $\{E_n\}$ d'ensembles tels que $\mu E_n < \infty$ pour $n = 1, 2 \ldots$*

on obtient que tout ensemble de mesure infinie contient un ensemble de mesure positive finie. Du théorème (⁑) il résulte donc dans ce cas le théorème (*).

La mesure extérieure lebesguienne satisfait évidemment aux conditions A), B) et C), tandis que la mesure linéaire extérieure d'ensembles plans ne satisfait qu'aux conditions A) et B) (toutes les deux satisfaisant aux quatre conditions de M. Carathéodory).

A_2 est donc également un ensemble G_δ et n'est pas un F_σ. Par conséquent il est mesurable par rapport à la mesure linéaire. Supposons que A_2 soit la somme d'un ensemble K qui soit un F_σ et d'un ensemble N de mesure linéaire nulle. Soit N_1 la projection de l'ensemble N sur l'axe Oy. On déduit aisément de la définition de la mesure linéaire que $m N_1 = 0$. Il existe donc une droite L parallèle à l'axe Ox, coupant A_2 et ne coupant pas N. On a donc:

$$L A_2 = L K + L N = L K .$$

Nous arrivons ainsi à une contradiction, car $L A_2$, d'après la définition de A_2, n'est pas un ensemble F_σ, tandis que $L K$ est un tel ensemble.

Nous avons donc démontré que pour la mesure linéaire d'ensembles plans le théorème (†) est faux [8]. On peut aller plus loin, en démontrant dans le même ordre d'idées qu'il existe un ensemble mesurable linéairement qui n'est pas somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de mesure linéaire nulle. A cet effet il faut s'appuyer sur le théorème d'après lequel tout ensemble analytique est mesurable linéairement [9].

Toutefois il importe d'ajouter que le théorème suivant, plus faible que (†), reste vrai pour la mesure linéaire d'ensembles plans:

(††) Pour qu'un ensemble E de mesure extérieure *finie* soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F_σ, soit K, et un ensemble N de mesure nulle, tels que $E = K + N$ [10].

2.

M. Kolmogoroff a démontré un théorème important qui s'énonce de la façon suivante [11]:

---

[8]) Remarquons que M. Hahn dans sa *Theorie der reellen Funktionen* (Berlin, 1921) dit (p. 461) qu'un théorème énoncé dans ce livre (p. 456, th. IV) pour la mesure lebesguienne reste encore vrai pour la mesure q — dimensionnelle dans l'espace p — dimensionnel ($q < p$), donc en particulier, pour la mesure linéaire d'ensembles plans. Cela exige une restriction, puisque il en résulterait (voir la définition de *Massgleichen Kern*, p. 435) le théorème (†) pour cette mesure, ce qui est incompatible avec notre résultat.

[9]) C'est M. Saks qui a démontré que les ensembles analytiques sont mesurables par rapport à toute fonction satisfaisant aux quatre conditions de M. Carathéodory (voir [7])), donc en particulier, par rapport à la mesure linéaire d'ensembles plans. Ce résultat n'est pas encore publié.

[10]) Ajoutons que ces remarques peuvent être généralisées. Le théorème (††) est vrai pour toute *Inhaltsfunktion* (voir Hahn, l. c., pp. 444 et 445), tandis que le théorème (†) est vrai, si la fonction vérifie encore la condition C) (voir [7]) et Hahn l. c., p. 447).

[11]) A. N. Kolmogoroff: *Opérations sur des ensembles* (en russe). Recueil Mathématique de la Soc. Math. de Moscou **25** (1928), p. 415. Voir aussi L. V. Kantorovitsch: *Sur les fonctions universelles* (en russe). Journ. de la Soc. Phys. Math. de Léningrade, t. **2**, fasc. 2 (1929), p. 13.

Pour toute opération $\mathcal{H}_N$ de M. Hausdorff [12]) il existe un ensemble E tel que

$$E \equiv \mathcal{H}_N(\mathfrak{F})$$

et

$$C E \,\overline{\equiv}\, \mathcal{H}_N(\mathfrak{F}),$$

où $\mathfrak{F}$ designe la classe de tous les ensembles linéaires fermés.

On peut montrer sans peine que ce théorème reste vrai dans chaque espace métrique contenant un sous ensemble homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels, donc — en particulier — dans chaque espace métrique complet, dont le noyau dense en soi n'est pas vide. D'autre part il est évident que le théorème de M. Kolmogoroff est faux dans certains espaces, par exemple dans tout espace dénombrable, et dans tout espace isolé. Or, un problème s'impose: *existe-il un espace métrique non dénombrable dont le noyau dense en soi ne serait pas vide et dans lequel le théorème de M. Kolmogoroff serait faux?*

Je vais démontrer que *l'ensemble S est un tel espace.* En effet, j'ai démontré dans la Note *Sur un problème de M. Banach* [13]) que dans cet ensemble tout ensemble borelien par rapport à S est en même temps F_σ et G_δ par rapport à S. En désignant par $\mathcal{H}_M$ une opération de M. Hausdorff telle que pour chaque famille $\mathfrak{K}$ d'ensembles on ait $\mathcal{H}_M(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}_\sigma$ (une telle opération existe, comme on le sait [14])) et par $\mathfrak{F}$ la classe des ensembles fermés dans S, nous voyons que la relation $E \equiv \mathcal{H}_M(\mathfrak{F})$ entraîne $S - E \equiv \mathcal{H}_M(\mathfrak{F})$. Le théorème de M. Kolmogoroff n'est donc pas vrai dans l'espace consideré.

3.

Je me propose de démontrer ensuite le théorème suivant:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, dont toute image continue linéaire est totalement imparfaite [15]).

---

[12]) Quant aux notations, voir p. ex. ma communication *Un théorème sur les opérations de M. Hausdorff*, ces Comptes Rendus **23** (1930), cl. III, p. 13.

[13]) Fund. Math. **15** (1930), p. 212.

[14]) Voir p. ex. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 88.

[15]) c'est-à-dire ne contient aucun sous-ensemble parfait.

Lemme (a). Pour qu'un ensemble E soit totalement imparfait, il faut et il suffit que CE soit de II catégorie sur tout ensemble parfait.

Démonstration. Soit E un ensemble totalement imparfait et supposons que CE soit de I catégorie sur un certain ensemble parfait P. Il existe donc un ensemble F_σ — soit H — de I catégorie sur P et contenant $CE \cdot P$. L'ensemble $P - H$ est donc un G_δ de II catégorie sur P. Par conséquent $P - H$ est non dénombrable et contient un sous-ensemble parfait. $P - H$ étant contenue dans E, E contient de même cet ensemble parfait, contraîrement à l'hypothèse.

Soit maintenant Z un ensemble dont le complémentaire est de II catégorie sur tout ensemble parfait. L'ensemble CZ a donc, à plus forte raison, des points communs avec tout ensemble parfait. Donc, Z est un ensemble totalement imparfait.

Lemme (b). La somme d'un ensemble totalement imparfait et d'un ensemble de I catégorie sur toute ensemble parfait — est un ensemble totalement imparfait.

Démonstration. Soit E_1 un ensemble totalement imparfait, donc — en vertu du lemme (a) — tel que CE_1 est de II catégorie sur tout ensemble parfait. Soit ensuite E_2 un ensemble de I catégorie sur toute ensemble parfait. Il résulte de l'égalité:

$$C(E_1 + E_2) = CE_1 - E_2$$

que l'ensemble $C(E_1 + E_2)$ est également de II catégorie sur tout ensemble parfait.

L'ensemble $E_1 + E_2$ est donc, d'après le lemme (a), totalement imparfait.

Je vais démontrer maintenant le théorème énoncé plus haut. Soit S un ensemble de M. Sierpiński et L un ensemble non dénombrable tel que tout ensemble non dense contienne un ensemble au plus dénombrable de points de L. Un tel ensemble L a été contruit par M. Lusin à l'aide de l'hypothèse du continu [16]).

[16]) Voir p. ex. N. Lavrentieff: *Contributions à la théorie des ensembles homéomorphes*, Fund. Math. **6** (1924), p. 154.

M. Sierpiński a démontré que toute image continue de S est de I catégorie sur tout ensemble parfait [17]) et toute image continue de L est de mesure nulle [18]). Il en résulte immédiatement que toute image continue de L est totalement imparfait. Supposons en effet qu'une image continue $\varphi(L)$ contienne un sous ensemble parfait. On en pourrait déduire l'existence d'une transformation continue ψ de l'ensemble $\varphi(L)$ telle que l'ensemble $\psi(\varphi(L))$ soit un intervalle. La transformation $f(p) = \psi(\varphi(p))$ étant continue sur L, il en résulte ainsi une contradiction.

Je dis que l'ensemble $L + S$ satisfait aux conditions de notre théorème. Il est — en effet — de II catégorie et de mesure extérieure positive, ce qui résulte immédiatement des définitions de L et S. D'autre part, pour toute fonction φ continue sur $L + S$, l'ensemble

$$\varphi(L + S) = \varphi(L) + \varphi(S)$$

est somme d'un ensemble totalement imparfait et d'un ensemble de I catégorie sur tout ensemble parfait, donc — d'après le lemme (b) — un ensemble totalement imparfait — c. q. f. d.

On peut énoncer un théorème plus fort que le nôtre, en s'appuyant sur certains résultats de M. Sierpiński [19]). On démontre notamment que même toute *fonction de Baire* sur $L + S$ (et non nécessairement *continue*) transforme l'ensemble $L + S$ en un ensemble totalement imparfait.

Cependant la généralisation ainsi obtenue ne nous conduirait pas loin, car toute fonction de Baire sur $L + S$ est une fonction de classe $\leqslant 2$ sur $L + S$. Cela résulte immédiatement des définitions de L et de S et de ce que tout ensemble borelien peut être décomposé en deux ensembles, dont le premier est à la fois $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$ et l'autre à la fois de première catégorie et de mesure nulle.

---

[17]) Voir [1]) c).

[18]) *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle*, Fund. Math. **11** (1928), p. 302.

[19]) *Sur un ensemble non dénombrable qui est transformé en un ensemble de mesure nulle par toute fonction de Baire*, Mathematica (Cluj) **1** (1929), p. 115, et une Note citée plus haut [[1]) d)].