COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III
XXIV Année 1931 Fascicule 7—9

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Tom XXIV 1931 Zeszyt 7—9

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1932

DZIEWULSKI
Zakłady Graf.-Introl.
ZŁOTA 29.

TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie
z dnia 8 października 1931 r.

L. Szperl.

O działaniu siarkowodoru na chlorki naftoilu.

Zgłoszone dnia 8 października 1931 r.

Sur l'action de l'hydrogène sulfuré sur les chlorures de naphtoyle.

Mémoire présenté dans la séance du 8 Octobre 1931.

Streszczenie.

Przepuszczanie siarkowodoru przez ogrzany do temperatury 120^0 chlorek α-naftoilu doprowadziło do wytworzenia się smolistej masy, nie poddającej się analizie. Z tegoż chlorku we wrzącym roztworze benzenowym wytworzył się pod działaniem siarkowodoru jednosiarczek dwu-α-naftoilu, $\alpha\text{-}H_7C_{10}.CO.S.CO.C_{10}H_7\text{-}\alpha$, o temperaturze topnienia $129—130^0$. W takich samych warunkach z chlorku β-naftoilu powstał jednosiarczek dwu-β-naftoilu, $\beta\text{-}H_7C_{10}.CO.S.CO.C_{10}.H_7\text{-}\beta$, topniejący z jednoczesnym rozkładem w temperaturze $134—136^0$. Siarczki te nie są dotychczas notowane w literaturze.

Praca wyjdzie in extenso w „Rocznikach Chemji".

L. Szperl.

O działaniu siarkowodoru na chlorki toluilu.

Zgłoszono dnia 8 października 1931 r.

Sur l'action de l'hydrogène sulfuré sur les chlorures de toluyle.

Mémoire présenté dans la séance du 8 Octobre 1931.

Streszczenie.

Rezultatem działania siarkowodoru na chlorki *o*, *m*, i *p*-toluilu okazały się dwusiarczki, $H_3C.C_6H_4.CO.S.S.CO.C_6H_4.CH_3$, i jednosiarczki, $H_3C.C_6H_4.CO.S.CO.C_6H_4.CH_3$. Podczas gdy dwusiarczek dwu-*p*-toluilu posiadał cechy zgodne z danemi literatury, dwusiarczek dwu-*o*-toluilu wykazał temperaturę topnienia 88—89^0. Wytworzona z dwusiarczku dwu-*p*-toluilu sól rtęciowa kwasu *p*-toluilowego w postaci białych igiełek krystalicznych poczyna rozkładać się w temperaturze 130^0. Nieznany dotąd dwusiarczek dwu-*m*-toluilu topnieje w temperaturze 86—87^0. Otrzymane jednosiarczki nie są dotychczas notowane w literaturze. Jednosiarczek dwu-*o*-toluilu topnieje w temperaturze 58—59^0, jednosiarczek dwu-*p*-toluilu — w temperaturze 87—89^0. Jako skutek ogrzewania powyżej temperatury topnienia z domieszką węglanów alkalicznych, dwusiarczki zabarwiają się na czerwono, jednosiarczki nabierają przemijającej barwy fioletowej.

Praca wyjdzie in extenso w „Rocznikach Chemji".

Posiedzenie

z dnia 21 listopada 1931 r.

L. Szperl i Wł. Wiorogórski.

O działaniu selenowodoru na chlorek benzoilu.

Przedstawił L. Szperl dnia 21 listopada 1931 r.

Sur l'action de l'hydrogène sélené sur le chlorure de benzoyle.

Mémoire présenté par M. L. Szperl dans la séance du 21 Novembre 1931.

Streszczenie.

Współdziałanie chlorku benzoilu i selenowodoru zostało stwierdzone zarówno we wrzącym roztworze ksylenowym, jak i bez rozpuszczalnika w temperaturze pokojowej z udziałem chlorku glinowego, jako katalizatora. Z otrzymanego materjału wyodrębniliśmy, nieznane dotychczas, związki organiczne następujące: selenobenzoesan benzylu, $C_6H_5 . CO . Se CH_2 C_6 H_5$, jednoselenek dwubenzoilu, $C_6 H_5 . CO . Se . CO . C_6 H_5$, dwuselenek dwubenzoilu, $C_6 H_5 . CO . Se . Se . CO . C_6 H_5$, i dwuselenobenzoesan benzylidenu, $C_6 H_5 CH (Se CO C_6 H_5)_2$. Wszystkie te substancje cechuje znaczna nietrwałość; zwłaszcza łatwo ulegają one rozkładowi pod wpływem światła i wilgoci. Inne ich własności podstawowe wykazują duże, a przewidywane, podobieństwa do cech, odpowiadających im związków z siarką. Mechanizm powstawania tych związków z chlorku benzoilu i selenowodoru jest przypuszczalnie analogiczny do przebiegu wytwarzania się połączeń o podobnej budowie z tegoż chlorobezwodnika i siarkowodoru.

Praca będzie drukowana in extenso w „Rocznikach Chemji".

W. Sierpiński.

O zagadnieniu relatywizacji twierdzenia W. H. Young'a.

Komunikat przedstawiony dn. 21 listopada 1931 r.

Streszczenie.

Autor dowodzi, że z hipotezy continuum wynika istnienie zbioru linjowego E, oraz jego części nieprzeliczalnej H, będącej G_δ względem E, która nie zawiera żadnej części nieprzeliczalnej i zamkniętej względem E. Wynika stąd, że znane twierdzenie W. H. Young'a o zbiorach G_δ nie daje się zrelatywizować.

W. Sierpiński.

Sur le problème de la relativisation du théorème de M. W. H. Young.

Note présentée dans la séance du 21 Novembre 1931.

D'après un théorème connu de M. W. H. Young tout ensemble (linéaire) G_δ non dénombrable contient un sous-ensemble non dénombrable fermé [1]). Or, la question se pose si ce théorème peut être relativisé, c'est-à-dire:

E étant un ensemble linéaire donné quelconque et H un sous-ensemble non dénombrable de E qui est G_δ relativement à E [2]), existe-t-il toujours un sous-ensemble non dénombrable de H qui est fermé relativement à E?

Nous prouverons que *la réponse est négative,* si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

En effet, M. Lusin a démontré que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire non dénombrable E qui a un ensemble au plus dénombrable de points en commun avec tout ensemble linéaire fermé non dense [3]). Soit D un sous-ensemble dénombrable de E dense dans E.

---

[1]) Voir p. e. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig 1927, p. 136. Ce théorème a été généralisé par MM. Hausdorff et Alexandroff, voir p. e. *Fundamenta Mathematicae*, t. V p. 166.

[2]) c'est-à-dire un produit de E par un ensemble G_δ.

[3]) N. Lusin, *C. R.* t. 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

L'ensembe $H = E - D$ est non dénombrable et il est évidemment un G_δ relativement à E. Je dis que H ne contient aucun sous-ensemble non dénombrable, fermé dans E. En effet, si N était un tel sous-ensemble de H, on aurait $N = EF$, où F est un ensemble fermé. Soit J l'ensemble de tous les points intérieurs de F: l'ensemble $F_1 = F - J$ est évidemment encore fermé. Or, on voit sans peine que $EJ = 0$.

En effet, admettons que $EJ \neq 0$: l'ensemble D étant dense dans E et l'ensemble J étant ouvert, il en résulterait que $DJ \neq 0$, ce qui est impossible, puisque $J \subset F$ d'où: $DJ \subset EJ \subset EF = N \subset H = E - D$.

On a donc $EJ = 0$ et $N = EF = E(F_1 + J) = EF_1$. Or, F_1 est évidemment un ensemble fermé non dense et parsuite (d'après la propriété de E) l'ensemble EF_1 est au plus dénombrable. Or, c'est impossible, puisque $N = EF_1$ et l'ensemble N est, d'après l'hypothèse, non dénombrable.

L'ensemble H ne contient donc aucun sous-ensemble non dénombrable et fermé dans E, c. q. f. d.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Stanisław Leśniewski.

O definicjach w tak zwanej teorji dedukcji.

Przedstawił J. Łukasiewicz dn. 21 listopada 1931 r.

Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion.

Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz dans la séance du 21 Novembre 1931

Die vorliegende Mitteilung bildet ein Resüme des Vorlesungskursus u. d. T. „*Über Grundlagen der sogenannten Theorie der Deduktion*" (polnisch), den ich in der Warschauer Universität im akad. Jahre 1930/1931 hielt. Die Hauptaufgabe dieser Mitteilung besteht darin, eine Direktive zu formulieren, die gestatten würde, die von mir in einer Gegenüberstellung zu *Axiomen* und *Theoremen* als *Definitionen* bezeichneten Thesen einer speziellen Art zu dem System der „Theorie der Deduktion" hinzuzufügen, und auf eine möglichst präzise Weise Bedingungen kodifizieren würde, welchen solche *Definitionen* genügen sollen.

Das Definitionsproblem auf dem Boden der „Theorie der Deduktion" liegt gänzlich ausserhalb meines Systems der Grundlagen der Mathematik, dessen Druck ich in letzten Jahren begann [1]. Ich interessierte mich mit diesem Problem, wenn ich mich so ausdrücken könnte, um seiner eigenen konstruktiven Anmut willen — im Zusammenhang mit der heute ziemlich stark gewordenen wissenschaftlichen Bewegung auf dem Gebiet der „Theorie der Deduktion" und der Theorie der „Theorie der Deduktion" und im Zusammenhang mit dem Umstand, dass in der genannten wissenschaftlichen Bewegung die Definitionsfrage bisher ein wenig stiefmütterlich behandelt wird.

Indem ich im weiteren eine Definitionsdirektive für die „Theorie der Deduktion" formuliere, tue ich dies in Anwendung auf die gut bekannte, von Herrn Jan Łukasiewicz im J. 1924 ausgedachte und in der „mathematischen Logik" propagierte, parenthesen- und punktlose Symbolik [2], die heute auch schon von einigen anderen Autoren gebraucht wird [3]. Auf dem Boden

---

[1] Vgl.: 1) Stanisław Leśniewski. *Über Grundlagen der Mathematik* (polnisch). *Przegląd Filozoficzny. a*) Jahrbuch 30. Heft II—III. 1927. *b*) Jahrbuch 31. Heft III. 1928. *c*) Jahrbuch 32. Heft I—II. 1929. *d*) Jahrbuch 33. Heft I und II. 1930. 2) *Fundamenta Mathematicae*. Band XIV. 1929. Stanisław Leśniewski. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*. 3) *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*. XXIII. 1930. Wydział III. *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. XXIII. 1930. Classe III. Stanisław Leśniewski. *Über die Grundlagen der Ontologie*. Mémoire présenté par M. J. Łukasiewicz à la séance du 22 Mai 1930.

[2] Vgl.: 1) *Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego*. Band XVIII. Jan Łukasiewicz. *Elemente der mathematischen Logik*. Universitätsvorlesungen in autorisierter Bearbeitung von M. Presburger (polnisch). 1929. SS. 37—40, 45, 154—156, 158, 159, 171 und 172. 2) *Nauka Polska. Jej potrzeby, organizacja i rozwój*. X. 1929. Jan Łukasiewicz. *Über die Bedeutung und die Bedürfnisse der mathematischen Logik* (polnisch). SS. 610—612. 3) *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*. XXIII. 1930. Wydział III. *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. XXIII. 1930. Classe III. J. Łukasiewicz und A. Tarski. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. Vorläufige Mitteilung, vorgelegt von J. Łukasiewicz am 27. III 1930. SS. 31 und 32.

[3] Vgl.: 1) *Mathematische Zeitschrift*. Band 30, (Schluss-) Heft 5. 1929. Leon Chwistek. *Neue Grundlagen der Logik und Mathematik*. S. 713. 2) *Sprawozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich*.

dieser Symbolik, die das einfachste (obwohl keineswegs das durchsichtigste) der mir bekannten Symbolensysteme der „Theorie der Deduktion" bildet, verlieren die mit der Einführung der Definitionen verbundenen Fragen, die bei Beibehaltung der Parenthesen durch leichte Anpassungen an neue Ziele der von mir im System der „Protothetik" angenommenen Definitionsdirektive [1] erledigt werden könnten, eine bedeutende Dosis theoretischer Banalität.

Obwohl ich mich über Grundlagen der „Theorie der Deduktion" hauptsächlich *sub specie* des Problems der Definitionsdirektive kümmerte, konnte ich doch selbstverständlich nicht, betreffende Untersuchungen in voller Abstraktion von anderen in der betrachteten Theorie geltenden Direktiven durchführen; so fühlte ich mich z. B., indem ich in das System der „Theorie der Deduktion" Definitionen einführe, dazu gezwungen, auch der „Substitutionsdirektive" eine solche Gestalt zu geben, bei der diese Direktive gestatten würde, für die Variablen unter anderen auch solche Formeln einzusetzen, die definierte Termine der Theorie enthalten. Die Gesamtheit der hier bestehenden sachlichen Zusammenhänge hat nach sich gezogen, dass ich in der vorliegenden Mitteilung ein Gesamtsystem der Direktiven der „Theorie der Deduktion" angebe.

Das System der „Theorie der Deduktion" mit Definitionen, das ich hier darstelle, stütze ich auf das bekannte, aus 33 Wörtern bestehende, von mir weiter unten *explicite* zitierte Axiom, welches von Herrn Łukasiewicz mit Hilfe des Negations- und des Implikationszeichens formuliert worden ist und welches, wie dies von demselben Autor nachgewiesen ist, bei der Anwendung der Abtrennungs- und der Substitutionsdirektive eine ausreichende axiomatische Grundlage für die gewöhnliche „Theorie der Deduktion" bildet. Die von mir in der vorliegenden Mitteilung angegebenen Direktiven, die an ein System der „Theorie

Comptes-Rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929. Redagował — Rédigés par — F. Leja. Warszawa, 1930. M. Presburger. *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* SS. 92 und 93.

[1] Vgl.: Leśniewski. *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik.* SS. 70—72 und 76.

der Deduktion“ angepasst sind, welches auf den zwei genannten primitiven Terminen aufgebaut wird, können schon ausserordentlich leicht auf den Boden der auf andere primitive Termine gestützten Systeme dieser Theorie und zwar im besonderen auf den Boden des bekannten Systems von Nicod [1] transponiert werden.

Axiom des Herrn Łukasiewicz: [2]

$$C\,C\,C\,\alpha\,C\,\beta\,\alpha\,C\,C\,C\,N\,\gamma\,C\,\delta\,N\,\varepsilon\,C\,C\,\gamma\,C\,\delta\,\zeta\,C\,C\,\varepsilon\,\delta\,C\,\varepsilon\,\zeta\,\eta\,C\,\vartheta\,\eta$$

Bevor ich an die Formulierung der Direktiven des auf dieses *Axiom* gestützten Systems der „Theorie der Deduktion“ herantrete, gebe ich hier noch eine Reihe *„terminologischer Erklärungen“* an, in denen ich die in den Direktiven auftretenden Sprachwendungen kommentiere [3].

Terminologische Erklärung I. Von einem Gegenstand A sage ich, dass er Komplex der a ist [4], dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) A ist Ausdruck;

2) wenn irgend ein Gegenstand zu A gehörendes Wort ist, so gehört er zu einem gewissen a;

3) wenn irgend ein Gegenstand B a ist, irgend ein Gegenstand C a ist, und ein gewisses zu B gehörendes Wort zu C gehört, so ist B derselbe Gegenstand, wie C;

4) wenn irgend ein Gegenstand a ist, so ist er zu A gehörender Ausdruck [5].

Beispiele (die Beispiele zu den *„terminologischen Erklärungen“* werden von mir auf eine solche Weise zusammengestellt, dass man aus diesen Beispielen die gegenseitige Unabhängigkeit

[1] Vgl.: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* Volume XIX. 30 October 1916—24 November 1919. 1920. J. G. P. Nicod. *A Reduction in the number of the Primitive Propositions of Logic.* (Communicated by G. H. Hardy.)

[2] Vgl.: Łukasiewicz und Tarski. *Op. cit.*. SS. 36 und 37.

[3] In betreff der Bedeutung der Sprachwendungen, die in meinen *„terminologischen Erklärungen“* auftreten, vergleiche man, um die Möglichkeit irgend wie verkehrter Interpretationen dieser *„terminologischen Erklärungen“* und der Direktiven des Systems zu beseitigen: Leśniewski. *Op. cit.*. SS. 59—62.

[4] Die Variable *„a“* ist hier im *genitivus pluralis* gebraucht.

[5] Vgl. *op. cit.*, S. 63, *T. E. VII.*

einzelner in betreffenden *„terminologischen Erklärungen“* vorkommender Bedingungen heraussehen kann):

1) [1] *Axiom* ist Komplex der zum *Axiom* gehörenden Wörter;

2) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Komplex der zum *Axiom* gehörenden Wörter [Bedingungen 1—3 sind hier erfüllt, Bedingung 4 ist nicht erfüllt (das zweite Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörendes Wort, es ist aber nicht zum ersten Wort des *Axioms* gehörender Ausdruck)];

3) *Axiom* ist nicht Komplex der zum *Axiom* gehörenden Ausdrücke [Bedingungen 1, 2, 4 erfüllt, Bedingung 3 nicht erfüllt (*Axiom* ist zum *Axiom* gehörender Ausdruck, das erste Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörender Ausdruck, ein gewisses zum *Axiom* gehörendes Wort gehört zum ersten Wort des *Axioms*, *Axiom* ist aber nicht derselbe Gegenstand, wie das erste Wort des *Axioms*)];

4) *Axiom* ist nicht Komplex der zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdrücke [Bed. 1, 3, 4 erf., Bed. 2 nicht erf. (das 4-te Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörendes Wort, es gehört aber zu keinem zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdruck)];

5) die Klasse der zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdrücke [2] ist nicht Komplex der zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdrücke [B. 2—4 e., B. 1 n. e.].

---

[1] Das Wort *„Axiom“* in Kursivschrift wird von mir im weiteren zur Bezeichnung des oben angegebenen *Axioms* des Herrn Łukasiewicz gebraucht.

[2] Wenn in dieser Mitteilung irgend ein Ausdruck des Typs „Klasse der *a*“ gebraucht wird, so ist damit immer Klasse im Sinne meiner „allgemeinen Mengenlehre“ (anders von mir Mereologie genannt) gemeint [vgl.: 1) Leśniewski, *Über Grundlagen der Mathematik*, *Przegląd Filozoficzny*, *a*) Jahrbuch 30, Heft II—III, SS. 185—206, *b*) Jahrbuch 31, Heft III, SS. 261—265; 2) Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, S. 5]; so ist z. B. unter „Klasse der zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdrücke“ ein Gegenstand zu verstehen, der, wie ein Orchester aus allen seinen Mitgliedern, aus allen zum *Axiom* gehörenden, mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteten Ausdrücken *besteht*. Ausdrücke des Typs „Klasse der *a*“ kommen hier nur in Beispielen vor.

Terminologische Erklärung II. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Negate des *B* ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *A* ist Ausdruck;

2) *B* ist Komplex der Gegenstände, die *A* oder das erste der zu *B* gehörenden Wörter sind;

3) *B* ist nicht Wort;

4) das erste der zu *B* gehörenden Wörter ist mit dem elften Wort des *Axioms* gleichgestalteter Ausdruck.

Beispiele:

1) das 12-te Wort des *Axioms* ist Negate der Klasse der Gegenstände, die das 11-te oder das 12-te Wort des *Axioms* sind;

2) die Klasse der auf das erste Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Negate des *Axioms* [B. 1—3 e., B. 4 n. e.];

3) das 11-te Wort des *Axioms* ist nicht Negate des 11-ten Wortes des *Axioms* [B. 1, 2, 4 e., B. 3 n. e.];

4) *Axiom* ist nicht Negate der Klasse der auf das 10-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* [B. 1, 3, 4 e., B. 2 n. e.];

5) esistnichtwahrdass [1] auf das 11-te Wort des *Axioms* folgendes Wort des *Axioms* ist Negate der Klasse der auf das 10-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* [2] [B. 2—4 e., B. 1 n. e.].

---

[1] Des schönen Wortes „esistnichtwahrdass" bediene ich mich hier als eines „umgangssprachlichen" Vertreters des gewöhnlichen Satznegationszeichens der „mathematischen Logik".

[2] Es sei hier ausdrücklich bemerkt, dass die in meinen „*terminologischen Erklärungen*" und in den Beispielen zu ihnen vorkommenden „Individualsätze" des Typs „*A* ist *b*" von mir im Einklang mit dem Axiom meiner „Ontologie" [vgl.: L e ś n i e w s k i, *Über die Grundlagen der Ontologie*, SS. 114, 115 und 129—131] gebraucht werden; es folgt daraus, dass es — wegen des Umstandes, dass es mehr, als éines, auf das 11-te Wort des *Axioms* folgende Wörter des *Axioms* gibt, — bei keinem *a* gelten kann, dass auf das 11-te Wort des *Axioms* folgendes Wort des *Axioms a* ist; damit ist es schon *implizite* gesagt, dass der Satz „auf das 11-te Wort des *Axioms* folgendes Wort des *Axioms* ist Negate der Klasse der auf das 10-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms*" ebenso wenig assertiert werden dürfte, wie der Satz „auf das 11-te Wort des *Axioms* folgendes Wort des *Axioms* ist Ausdruck" [vgl.: L e ś n i e w s k i, *Über Grundlagen der Mathematik*, Jahrbuch 31, Heft III, SS. 263 und 264].

Terminologische Erklärung III. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Implikante des *B* in *C* ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *C* ist Komplex der Gegenstände, die *A* oder *B* oder das erste der zu *C* gehörenden Wörter sind;

2) das erste der zu *C* gehörenden Wörter ist mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestalteter Ausdruck;

3) *A* folgt auf das erste der zu *C* gehörenden Wörter;

4) *B* folgt auf *A*.

Beispiele:

1) das 2-te Wort des *Axioms* ist Implikante der Klasse der auf das 2-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* im *Axiom*;

2) die Klasse der auf das erste Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Implikante der Klasse der auf das erste Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* im *Axiom* [B. 1—3 e., B. 4 n. e.];

3) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Implikante der Klasse der auf das erste Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* im *Axiom* [B. 1, 2, 4 e., B. 3 n. e.];

4) das 5-te Wort des *Axioms* ist nicht Implikante der Klasse der auf das 5-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* in der Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* [B. 1, 3, 4 e., B. 2 n. e.];

5) das 2-te Wort des *Axioms* ist nicht Implikante des 3-ten Worts des *Axioms* im *Axiom* [B. 2—4 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung IV. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Subordinate des *B* in bezug auf die *a* [1], in Hinsicht auf die *b* [2] und rücksichtlich des *C* ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *B* ist zu *C* gehörender Ausdruck;

2) *B* ist nicht [3] Variable;

---

[1] Die Variable „*a*“ ist hier im *accusativus pluralis* gebraucht.

[2] Die Variable „*b*“ ist hier im *accusativus pluralis* gebraucht.

[3] Das Wort „Variable“ wird von mir in dieser Mitteilung in keiner speziellen „*terminologischen Erklärung*“ kommentiert. Es ist bis zu einem gewissen Grade gleichgültig, wie man näher den Designatenbereich des genannten Wortes bestimmen will. Ich muss hier jedenfalls voraussetzen: dass 1) das 4-te, das 6-te, das 12-te, das 14-te, das 16-te, das 22-te, das 30-te

3) wenn irgend ein Gegenstand zu C gehörendes und auf B folgendes Wort ist, so ist er Variable;

4) wenn irgend ein Gegenstand zu einer gewissen dem C vorangehenden [1] These dieses Systems der „Theorie der Deduktion" gehörendes Wort ist, so ist er nicht mit B gleichgestalteter Ausdruck;

5) A ist Komplex der Gegenstände, die b oder das erste der zu A gehörenden Wörter sind;

6) das erste der zu A gehörenden Wörter ist mit B gleichgestalteter Ausdruck;

7) wenn irgend ein Gegenstand b ist, so ist er a;

8) wenn irgend ein Gegenstand b ist, so folgt er auf das erste der zu A gehörenden Wörter;

9) es gibt ebenso viel b, wie es zu C gehörende, auf B folgende Wörter gibt.

---

und das 32-te Wort des *Axioms* Variablen sind; dass 2) das 1-te und das 11-te Wort des *Axioms* nicht Variablen sind; dass 3) wenn A mit B gleichgestalteter Ausdruck ist, so ist A dann und nur dann Variable, wenn B Variable ist; dass 4) jede Variable Wort ist; dass 5) die „Möglichkeit", immer neue Variablen (das heisst — Variablen, die nicht mit den bisherigen Variablen gleichgestaltete Ausdrücke sind) zu bilden in dem Sinne besteht, in dem es überhaupt diese „Möglichkeit" für die Bildung immer neuer Wörter gibt. Wenn ich in meiner Mitteilung den Bereich des Wortes „Variable" ganz konkret bestimmen müsste, könnte ich z. B. ganz gut festsetzen, dass irgend ein Gegenstand dann und nur dann Variable ist, wenn er aus lauter kleinen griechischen Buchstaben bestehendes Wort ist. Eine Konvention, nach welcher Variablen — Buchstaben dieses oder jenes Alphabets sein sollen, könnte ich nicht akzeptieren, da es bei solcher Konvention unmöglich wäre, einen Satz zu bilden, der mehr nicht miteinander gleichgestaltete Variablen enthält, als es nicht miteinander gleichgestaltete Buchstaben des betreffenden Alphabets gibt. Im Zusammenhang mit dem Inhalt dieser Fussnote vgl.: Łukasiewicz und Tarski. *Op. cit.*. S. 31.

[1] Es sei ausdrücklich bemerkt, dass, wenn ich hier irgend etwas über Thesen dieses Systems der „Theorie der Deduktion" rede, ich darunter neben dem *Axiom* nur die „effektiv" zu dem System der „Theorie der Deduktion" hinzugefügten „Definitionen" und „Theoreme" verstehe, nicht aber auch verschiedene andere Ausdrücke, welche man noch in Übereinstimmung mit den Direktiven des betrachteten Systems zu diesem System hinzufügen könnte. Der Bereich des Ausdrucks „These dieses Systems der „Theorie der Deduktion"" ist somit keineswegs im voraus eindeutig bestimmt und ist vielmehr in allmählichem „Werden" begriffen. *Axiom* ist der einzige Ausdruck, der schon im jetzigen Moment These dieses Systems der „Theorie der Deduktion" ist.

Beispiele:

1) die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Variablen, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms*;

2) die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Ausdrücke, in Hinsicht auf die Klassen der Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind [1], und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1—8 e., B. 9 n. e.];

3) die Klasse der Gegenstände, die das 31-te Wort des *Axioms* oder das 32-te Wort des *Axioms* sind, ist nicht Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Wörter, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 31-te Wort des *Axioms* oder das 32-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1—7, 9 e., B. 8 n. e. (das 31-te Wort des *Axioms* ist Gegenstand, der das 31-te Wort des *Axioms* oder das 32-te Wort des *Axioms* ist, es folgt aber nicht auf das erste der zu der Klasse der Gegenstände, die das 31-te Wort des *Axioms* oder das 32-te Wort des *Axioms* sind, gehörenden Wörter)];

4) die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die *Axiome*, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1—6, 8, 9 e., B. 7 n. e. (das 32-te Wort des *Axioms* ist Gegenstand, der das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* ist, er ist aber nicht *Axiom*)];

5) die Klasse der auf das 29-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 33-ten Worte des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* ist nicht Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Wörter, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 31-te Wort des *Axioms* oder das 32-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1—5, 7—9 e., B. 6 n. e.];

[1] Es gibt selbstverständlich nur eine einzige solche Klasse, wie es überhaupt höchstens éine Klasse irgend welcher *a* geben kann. Vgl.: Leśniewski. *L. c.*. S. 265. *Axiom III.*

6) *Axiom* ist nicht Subordinate des 31-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Wörter, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1—4, 6—9 e., B. 5 n. e.];

7) das erste der auf *Axiom* folgenden Wörter, die mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestaltete Ausdrücke sind, ist nicht Subordinate des ersten der auf *Axiom* folgenden Wörter, die mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestaltete Ausdrücke sind, in bezug auf die nicht viereckigen Vierecke, in Hinsicht auf die nicht viereckigen Vierecke und rücksichtlich des ersten der auf *Axiom* folgenden Wörter, die mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestaltete Ausdrücke sind [B. 1—3, 5—9 e., B. 4 n. e. (das erste Wort des *Axioms* ist zu einer gewissen dem ersten der auf *Axiom* folgenden Wörter, die mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestaltete Ausdrücke sind, vorangehenden These dieses Systems der „Theorie der Deduktion" gehörendes Wort, es ist aber mit dem ersten der auf *Axiom* folgenden Wörter, die mit dem ersten Wort des *Axioms* gleichgestaltete Ausdrücke sind, gleichgestalteter Ausdruck)];

8) *Axiom* ist nicht Subordinate des ersten Worts des *Axioms* in bezug auf die Wörter, in Hinsicht auf die auf das erste Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1, 2, 4—9 e., B. 3 n. e. (das 2-te Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörendes und auf das erste Wort des *Axioms* folgendes Wort, es ist aber nicht Variable)];

9) die Klasse der auf das 31-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Subordinate des 32-ten Worts des *Axioms* in bezug auf die Wörter, in Hinsicht auf die 33-ten Wörter des *Axioms* und rücksichtlich des *Axioms* [B. 1, 3—9 e., B. 2 n. e.];

10) das zweite Wort des *Axioms* ist nicht Subordinate des zweiten Worts des *Axioms* in bezug auf die *Axiome*, in Hinsicht auf die nicht viereckigen Vierecke und rücksichtlich des ersten Worts des *Axioms* [B. 2—9 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung V. Von einem Gegenstand A sage ich, dass er Fundamentalausdruck für die a [1] in bezug auf B ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

[1] Die Variable „a" ist hier im *accusativus pluralis* gebraucht.

1) A ist Ausdruck;

2) ein gewisser Ausdruck ist a;

3) wenn irgend ein Gegenstand a ist, so ist er zu A gehörender Ausdruck;

4) wenn irgend ein Gegenstand zu A gehörende Variable ist, so ist er a;

5) wenn irgend ein Gegenstand C zu A gehörender Ausdruck ist, und Negate des C a ist, so ist C a;

6) wenn irgend ein Gegenstand C derselbe Gegenstand, wie B, oder dem B vorangehende These dieses Systems der „Theorie der Deduktion" ist, und irgend ein Gegenstand D zu A gehörende Subordinate eines gewissen Ausdrucks in bezug auf die a, in Hinsicht auf die irgend welchen Gegenstände b und rücksichtlich des C ist, so ist D a.

Beispiele:

1) *Axiom* ist Fundamentalausdruck für die zum *Axiom* gehörenden Ausdrücke in bezug auf *Axiom*;

2) die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Fundamentalausdruck für die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, in bezug auf *Axiom* [B. 1—5 e., B. 6 n. e. (*Axiom* ist derselbe Gegenstand, wie *Axiom*, oder dem *Axiom* vorangehende These dieses Systems der „Theorie der Deduktion", die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist zu der Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* gehörende Subordinate eines gewissen Ausdrucks in bezug auf die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, in Hinsicht auf die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, und rücksichtlich des *Axioms*, die Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist aber nicht Gegenstand, der das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* ist)];

3) die Klasse der Gegenstände, die das 11-te Wort des *Axioms* oder das 12-te Wort des *Axioms* sind, ist nicht Fundamentalausdruck für die 12-ten Wörter des *Axioms* in bezug auf *Axiom* [B. 1—4, 6 e., B. 5 n. e. (die Klasse der Gegenstände, die das 11-te Wort des *Axioms* oder das 12-te Wort des *Axioms*

sind, ist zur Klasse der Gegenstände, die das 11-te Wort des *Axioms* oder das 12-te Wort des *Axioms* sind, gehörender Ausdruck, Negate der Klasse der Gegenstände, die das 11-te Wort des *Axioms* oder das 12-te Wort des *Axioms* sind, ist 12-tes Wort des *Axioms*, die Klasse der Gegenstände, die das 11-te Wort des *Axioms* oder das 12-te Wort des *Axioms* sind, ist aber nicht 12-tes Wort des *Axioms*)];

4) *Axiom* ist nicht Fundamentalausdruck für die *Axiome* in bezug auf *Axiom* [B. 1—3, 5, 6 e., B. 4 n. e. (das 4-te Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörende Variable, es ist aber nicht *Axiom*)];

5) *Axiom* ist nicht Fundamentalausdruck für die Ausdrücke in bezug auf *Axiom* [B. 1, 2, 4—6 e., B. 3 n. e. (der Titel dieser Mitteilung ist Ausdruck, er ist aber nicht zum *Axiom* gehörender Ausdruck)];

6) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Fundamentalausdruck für die nicht viereckigen Vierecke in bezug auf *Axiom* [B. 1, 3—6 e., B. 2 n. e.];

7) die Klasse der Gegenstände, die das erste Wort des *Axioms* oder das vierte Wort des *Axioms* sind, ist nicht Fundamentalausdruck für die vierten Wörter des *Axioms* in bezug auf *Axiom* [B. 2—6 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung VI. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Satz in bezug auf *B* ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *A* ist Ausdruck;

2) eine gewisse Variable gehört zu *A*;

3) wenn *A* Fundamentalausdruck für die irgend welchen Gegenstände *a* in bezug auf *B* ist, so ist *A a* [1].

[1] Die *terminologische Erklärung VI* ist auf die gut in der „mathematischen Logik" bekannten Ideen der „erblichen Klasse" und der „Vorfahrenbeziehung" basiert. Was speziell die (Definitionen enthaltende) „Theorie der Deduktion" anbelangt, so ist die von mir formulierte Erklärung des Wortes „Satz" als Resultat einer „Verallgemeinerung" der von den Herren Łukasiewicz und Tarski gegebenen Definition der „*Menge S aller Aussagen*" zu betrachten (vgl.: Łukasiewicz und Tarski, *op. cit.*, S. 31). Es könnte leicht bewiesen werden, dass sich der Designatenbereich des Ausdrucks „Satz in bezug auf *B*" nicht ändern würde, wenn man den in der *terminologischen Erklärung VI* vorkommenden Ausdruck „Fundamentalausdruck für die *a* in bezug auf *B*" nicht, wie in der *terminologischen Erklä-*

Beispiele:

1) *Axiom* ist Satz in bezug auf *Axiom*;

2) die Klasse der auf das 31-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist nicht Satz in bezug auf *Axiom* [B. 1, 2 e., B. 3 n. e. (die Klasse der auf das 31-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist Fundamentalausdruck für die Gegenstände, die das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* sind, in bezug auf *Axiom*, die Klasse der auf das 31-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* ist aber nicht Gegenstand, der das 32-te Wort des *Axioms* oder das 33-te Wort des *Axioms* ist)];

---

rung V, mittels aller Bedingungen 1—6, sondern nur mittels der Bedingungen 1, 2, 4—6 dieser *terminologischen Erklärung* definiert hätte. Wenn ich nichtsdestoweniger die *terminologische Erklärung V* in ihrer jetzigen Gestalt eingeführt habe, habe ich dies zu Gunsten meiner theoretischen Tendenz getan, im Fall, wo ein gegebener Ausdruck Satz in bezug auf eine gegebene These des Systems ist, dies immer auf einem kombinatorischen Wege feststellen zu können, ohne dabei über die Grenzen eines entsprechenden ganz bestimmten endlichen Bereichs der Ausdrücke hinausgehen zu brauchen. Es sei hier bemerkt, dass mir noch eine andere, von der in den *terminologischen Erklärungen* dieser Mitteilung entwickelten ganz verschiedene Methode, an verschiedene deduktive Theorien angepasste Satzdefinitionen zu konstruieren, bekannt ist. Zum erstenmal habe ich diese Methode, in welcher die „erblichen Klassen" und die „Vorfahrenbeziehung" keine Rolle spielen, und welche im wesentlichen aus dem Jahre 1922 stammt, in meinen Vorlesungen der „*Logistik*" im akad. Jahre 1924/1925 (vgl.: L e ś n i e w s k i, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, S. 59) in Anwendung an mein System der Protothetik (vgl. *op. cit.*, SS. 9—81) dargelegt. Die betreffende an die Protothetik angepasste Satzdefinition könnte man mittels „symbolischer" Abkürzungen, die von mir in den Direktiven der Protothetik und in den *terminologischen Erklärungen* zu ihnen gebraucht wurden (vgl. *op. cit.*, SS. 59—76), auf folgende Weise formulieren (nach einer im wesentlichen aus dem Jahre 1926 stammenden Redaktion dieser Definition):

$$[A, B] :\cdot: A \varepsilon \text{ propp } (B) . = :: B \varepsilon \text{ thp} ::$$
$$[\exists\, C] \therefore C \varepsilon \text{ vrb. } C \varepsilon \text{ frp } (B) . A \varepsilon \text{ cnf } (C) \therefore [D, E] : D \varepsilon \text{ thp } (B) . E \varepsilon \text{ ingr } (D) . \supset . C \varepsilon \sim(\text{cnvar } (C, E)) \therefore \vee . [\exists\, C] . C \varepsilon \text{ frp } (B) . A \varepsilon \text{ genfnct } (C) . \vee . A \varepsilon \text{ gnrl} ::$$
$$[C] \therefore C \varepsilon \text{ trm. } C \varepsilon \text{ ingr } (A) . \supset : C \varepsilon \text{ Id } (A) . \vee . [\exists\, D] . D \varepsilon \text{ qntf. } D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ int } (D) . \vee . [\exists\, D, E] . D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ var } (E, D) . \vee . C \varepsilon \text{ constp } (B, A) ::$$
$$[C, D] : D \varepsilon \text{ qntf. } D \varepsilon \text{ ingr } (A) . C \varepsilon \text{ int } (D) . \supset . [\exists\, E, F] . E \varepsilon \text{ ingr } (A) . F \varepsilon \text{ var } (C, E) ::$$

3) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Satz in bezug auf *Axiom* [B. 1, 3 e., B. 2 n. e.];

4) die Klasse der zum *Axiom* gehörenden Variablen ist nicht Satz in bezug auf *Axiom* [B. 2, 3 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung VII. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Substitutionsfolge des *B* in bezug auf *C* und in Hinsicht auf die *a* [1] ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *A* ist Komplex der *a*;

2) es gibt ebenso viel *a*, wie es zu *B* gehörende Wörter gibt;

3) wenn irgend ein Gegenstand *D* zu *B* gehörendes Wort ist, irgend ein Gegenstand *E a* ist, und es ebenso viel dem *E* vorangehende *a* gibt, wie es zu *B* gehörende, dem *D* vorangehende Wörter gibt, so ist *D* Variable oder mit *E* gleichgestalteter Ausdruck;

4) wenn irgend ein Gegenstand *D* zu *B* gehörende Variable ist, irgend ein Gegenstand *E a* ist, und es ebenso viel

---

$$[C, D, E] \therefore E \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . C \varepsilon \operatorname{cnvar}(D, E) . \supset : C \varepsilon \operatorname{Id}(D) . \lor . [\exists F, G] . C \varepsilon \operatorname{quasihomosemp}(D, B, A, F, G) ::$$

$$[C] \therefore C \varepsilon \operatorname{gnrl.} C \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . \supset : C \varepsilon \operatorname{Id}(A) . \lor . [\exists D, E, F, G] . D \varepsilon \operatorname{thp}(B) . E \varepsilon \operatorname{ingr}(D) . F \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . G \varepsilon \operatorname{homosemp}(B, B) . G \varepsilon \operatorname{Anarg}(C, E, F) ::$$

$$[C, D] \therefore C \varepsilon \operatorname{gnrl.} C \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . D \varepsilon \operatorname{Essnt}(C) . \supset : D \varepsilon \operatorname{vrb} . \lor . [\exists E] . E \varepsilon \operatorname{frp}(B) . D \varepsilon \operatorname{genfnct}(E) ::$$

$$[C] \therefore C \varepsilon \operatorname{fnct.} C \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . \supset : C \varepsilon \operatorname{Id}(A) . \lor . [\exists D] . D \varepsilon \operatorname{gnrl.} D \varepsilon \operatorname{ingr}(A) . C \varepsilon \operatorname{Essnt}(D) . \lor . [\exists D, E] . C \varepsilon \operatorname{fnctp}(B, A, D, E)$$

(im Zusammenhang mit dem letzten Buchstaben „p“ des Worts „propp“ vgl. *op. cit.*, SS. 68 und 69). Es bereitet keine Schwierigkeit analoge Satzdefinitionen für weitere zu meinem System der Grundlagen der Mathematik gehörende Theorien zu formulieren. In einer der ersten Vorlesungen meines oben erwähnten Universitätskursus u. d. T. „*Über Grundlagen der sogenannten Theorie der Deduktion*“ habe ich bemerkt, dass man dasselbe Definitionsschema sehr leicht an eine Satzdefinition für die „Theorie der Deduktion“ anpassen könnte, wenn man in dieser Theorie Parenthesen gebrauchen würde. Ich habe gleichzeitig erwähnt, dass ich, was die parenthesenlose Symbolik des Herrn Łukasiewicz anbetrifft, gar nicht weiss, ob und wie es möglich ist, hier eine mit der *terminologischen Erklärung VI* äquivalente Satzdefinition zu finden, die von der Idee der „erblichen Klasse“ und der der „Vorfahrenbeziehung“ im wesentlichen unabhängig wäre.

[1] Die Variable „*a*“ ist hier im *accusativus pluralis* gebraucht.

dem E vorangehende a gibt, wie es zu B gehörende, dem D vorangehende Wörter gibt, so ist E Satz in bezug auf C;

5) wenn irgend ein Gegenstand D zu B gehörendes Wort ist, irgend ein Gegenstand E zu B gehörender, mit D gleichgestalteter Ausdruck ist, irgend ein Gegenstand F a ist, irgend ein Gegenstand G a ist, es ebenso viel dem F vorangehende a gibt, wie es zu B gehörende, dem D vorangehende Wörter gibt, und es ebenso viel dem G vorangehende a gibt, wie es zu B gehörende, dem E vorangehende Wörter gibt, so ist G mit F gleichgestalteter Ausdruck.

Beispiele:

1) *Axiom* ist Substitutionsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die zum *Axiom* gehörenden Wörter;

2) die Klasse der auf das 18-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 23-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* ist nicht Substitutionsfolge der Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 8-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die auf das 18-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 23-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* [B. 1—4 e., B. 5 n. e. (das 4-te Wort des *Axioms* ist zur Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 8-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* gehörendes Wort, das 7-te Wort des *Axioms* ist zur Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 8-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* gehörender, mit dem 4-ten Wort des *Axioms* gleichgestalteter Ausdruck, das 19-te Wort des *Axioms* ist auf das 18-te Wort des *Axioms* folgendes, dem 23-ten Wort des *Axioms* vorangehendes Wort des *Axioms*, das 22-te Wort des *Axioms* ist auf das 18-te Wort des *Axioms* folgendes, dem 23-ten Wort des *Axioms* vorangehendes Wort des *Axioms*, es gibt ebenso viel dem 19-ten Wort des *Axioms* vorangehende, auf das 18-te Wort des *Axioms* folgende, dem 23-ten Wort des *Axioms* vorangehende Wörter des *Axioms*, wie es zur Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 8-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* gehörende, dem 4-ten Wort des *Axioms* vorangehende Wörter gibt, es gibt ebenso viel dem 22-ten Wort des *Axioms* vorangehende, auf das 18-te Wort des *Axioms* folgende, dem 23-ten Wort des *Axioms* voran-

gehende Wörter des *Axioms,* wie es zur Klasse der auf das 3-te Wort des *Axioms* folgenden, dem 8-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* gehörende, dem 7-ten Wort des *Axioms* vorangehende Wörter gibt, das 22-te Wort des *Axioms* ist aber nicht mit dem 19-ten Wort des *Axioms* gleichgestalteter Ausdruck)];

3) das 2-te Wort des *Axioms* ist nicht Substitutionsfolge des 4-ten Worts des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die 2-ten Wörter des *Axioms* [B. 1—3, 5 e., B. 4 n. e. (das 4-te Wort des *Axioms* ist zum 4-ten Wort des *Axioms* gehörende Variable, das 2-te Wort des *Axioms* ist 2-tes Wort des *Axioms*, es gibt ebenso viel dem 2-ten Wort des *Axioms* vorangehende 2-te Wörter des *Axioms*, wie es zum 4-ten Wort des *Axioms* gehörende, dem 4-ten Wort des *Axioms* vorangehende Wörter gibt, das 2-te Wort des *Axioms* ist aber nicht Satz in bezug auf *Axiom*)];

4) *Axiom* ist nicht Substitutionsfolge des ersten Worts des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die *Axiome* [B. 1, 2, 4, 5 e., B. 3 n. e. (das erste Wort des *Axioms* ist zum ersten Wort des *Axioms* gehörendes Wort, *Axiom* ist *Axiom*, es gibt ebenso viel dem *Axiom* vorangehende *Axiome*, wie es zum ersten Wort des *Axioms* gehörende, dem ersten Wort des *Axioms* vorangehende Wörter gibt, das erste Wort des *Axioms* ist aber weder Variable noch mit *Axiom* gleichgestalteter Ausdruck)];

5) das 2-te Wort des *Axioms* ist nicht Substitutionsfolge der Klasse der dem 3-ten Wort des *Axioms* vorangehenden Wörter des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die 2-ten Wörter des *Axioms* [B. 1, 3—5 e., B. 2 n. e.];

6) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Substitutionsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom* und in Hinsicht auf die zum *Axiom* gehörenden Wörter [B. 2—5 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung VIII. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Substitutionsfolge des *B* in bezug auf *C* ist, dann und nur dann, wenn bei einem gewissen *a* [1] — *A* Substitutionsfolge des *B* in bezug auf *C* und in Hinsicht auf die *a* ist.

[1] Der Ausdruck „bei einem gewissen *a*" entspricht hier dem Quantifikator „[$\exists$ *a*]" der „symbolischen" Sprache.

Beispiele:

1) *Axiom* ist Substitutionsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom* [1];

2) das erste Wort des *Axioms* ist nicht Substitutionsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom*.

Terminologische Erklärung IX. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Abtrennungsfolge des *B* in bezug auf *C*, in Hinsicht auf *D* und rücksichtlich des *E* ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) *D* ist Implikante des *E* in *B*;
2) *C* ist mit *D* gleichgestalteter Ausdruck;
3) *A* ist mit *E* gleichgestalteter Ausdruck.

Beispiele:

1) das 33-te Wort des *Axioms* ist Abtrennungsfolge der Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* in bezug auf das 32-te Wort des *Axioms*, in Hinsicht auf das 32-te Wort des *Axioms* und rücksichtlich des 33-ten Worts des *Axioms*;

2) *Axiom* ist nicht Abtrennungsfolge der Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* in bezug auf das 32-te Wort des *Axioms*, in Hinsicht auf das 32-te Wort des *Axioms* und rücksichtlich des 33-ten Worts des *Axioms* [B. 1, 2 e., B. 3 n. e.];

3) das 33-te Wort des *Axioms* ist nicht Abtrennungsfolge der Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 32-te Wort des *Axioms* und rücksichtlich des 33-ten Worts des *Axioms* [B. 1, 3 e., B. 2 n. e.];

4) *Axiom* ist nicht Abtrennungsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf *Axiom* und rücksichtlich des *Axioms* [B. 2, 3 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung X. Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er Abtrennungsfolge des *B* in bezug auf *C* ist, dann und nur dann, wenn *A* Abtrennungsfolge des *B* in bezug auf *C*, in Hinsicht auf einen gewissen Ausdruck und rücksichtlich eines gewissen Ausdrucks ist.

---

[1] Vgl. *Beispiel* 1 zur *terminologischen Erklärung VII.*

Beispiele:

1) das 33-te Wort des *Axioms* ist Abtrennungsfolge der Klasse der auf das 30-te Wort des *Axioms* folgenden Wörter des *Axioms* in bezug auf das 32-te Wort des *Axioms* [1];

2) *Axiom* ist nicht Abtrennungsfolge des *Axioms* in bezug auf *Axiom*.

Terminologische Erklärung XI. Von einem Gegenstand A sage ich, dass er Definition für B in bezug auf C, in Hinsicht auf D und rücksichtlich des E ist, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) D ist Satz in bezug auf C;

2) das erste der zu B gehörenden Wörter ist nicht Variable;

3) wenn irgend ein Gegenstand F derselbe Gegenstand, wie C, oder dem C vorangehende These dieses Systems der „Theorie der Deduktion" ist, und irgend ein Gegenstand G zu F gehörendes Wort ist, so ist das erste der zu B gehörenden Wörter nicht mit G gleichgestalteter Ausdruck;

4) wenn irgend ein Gegenstand F zu B gehörendes Wort ist, irgend ein Gegenstand G zu B gehörendes Wort ist, und F mit G gleichgestalteter Ausdruck ist, so ist F derselbe Gegenstand, wie G;

5) wenn irgend ein Gegenstand zu D gehörende Variable ist, so ist er mit einem gewissen zu B gehörenden Wort gleichgestalteter Ausdruck;

6) wenn irgend ein Gegenstand zu B gehörendes und auf das erste der zu B gehörenden Wörter folgendes Wort ist, so ist er mit einer gewissen zu D gehörenden Variable gleichgestalteter Ausdruck;

7) Implikante des B in der Negate des E ist mit D gleichgestalteter Ausdruck;

8) Implikante des D in der Implikante des E in der Negate des A ist mit B gleichgestalteter Ausdruck.

Beispiele:

1) wenn irgend ein Gegenstand A einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ \alpha\ \alpha\ N\ C\ \alpha\ F\ \alpha$"

---

[1] Vgl. *Beispiel* 1 zur *terminologischen Erklärung IX*.

ist, so ist er Definition für die Klasse der auf das 9-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 6-te Wort des *A* und rücksichtlich der Klasse der auf das 6-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A*;

2) wenn irgend ein Gegenstand *A* einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ \alpha\ F\ \alpha$" ist, so ist er nicht Definition für die Klasse der auf das 3-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 3-te Wort des *A* und rücksichtlich des *A* [B. 1—7 e., B. 8 n. e.];

3) wenn irgend ein Gegenstand *A* einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ \alpha\ \alpha\ \alpha$" ist, so ist er nicht Definition für die Klasse der Gegenstände, die das 4-te Wort des *A* oder das 5-te Wort des *A* sind, in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 6-te Wort des *A* und rücksichtlich des 7-ten Worts des *A* [B. 1—6, 8 e., B. 7 n. e.];

4) wenn irgend ein Gegenstand *A* einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ N\ \alpha\ \alpha\ N\ C\ \alpha\ F\ N\ \alpha$" ist, so ist er nicht Definition für die Klasse der auf das 10-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 7-te Wort des *A* und rücksichtlich der Klasse der auf das 7-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* [B. 1—5, 7, 8 e., B. 6 n. e. (das 12-te Wort des *A* ist zur Klasse der auf das 10-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* gehörendes und auf das erste der zur Klasse der auf das 10-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* gehörenden Wörter folgendes Wort, es ist aber mit keiner zum 7-ten Wort des *A* gehörenden Variable gleichgestalteter Ausdruck)];

5) wenn irgend ein Gegenstand *A* einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ \alpha\ N\ C\ \alpha\ F$" ist, so ist er nicht Definition für das 9-te Wort des *A* in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 5-te Wort des *A* und rücksichtlich der Klasse der auf das 5-te Wort des *A* folgenden Wörter des *A* [B. 1—4, 6—8 e., B. 5 n. e. (das 5-te Wort des *A* ist zum 5-ten Wort des *A* gehörende Variable, es ist aber mit keinem zum 9-ten Wort des *A* gehörenden Wort gleichgestalteter Ausdruck)];

6) wenn irgend ein Gegenstand *A* einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ N\ C\ \alpha$

$F\,\alpha\,\alpha$“ ist, so ist er nicht Definition für die Klasse der auf das 10-te Wort des A folgenden Wörter des A in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 7-te Wort des A und rücksichtlich der Klasse der auf das 7-te Wort des A folgenden Wörter des A [B. 1—3, 5—8 e., B. 4 n. e. (das 12-te Wort des A ist zur Klasse der auf das 10-te Wort des A folgenden Wörter des A gehörendes Wort, das 13-te Wort des A ist zur Klasse der auf das 10-te Wort des A folgenden Wörter des A gehörendes Wort, das 12-te Wort des A ist mit dem 13-ten Wort des A gleichgestalteter Ausdruck, das 12-te Wort des A ist aber nicht derselbe Gegenstand, wie das 13-te Wort des A)];

7) wenn irgend ein Gegenstand A einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\,C\,C\,N\,\alpha\,\alpha\,N\,C\,\alpha\,N\,\alpha$“ ist, so ist er nicht Definition für die Klasse der auf das 9-te Wort des A folgenden Wörter des A in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 6-te Wort des A und rücksichtlich der Klasse der auf das 6-te Wort des A folgenden Wörter des A [B. 1, 2, 4—8 e., B. 3 n. e. (*Axiom* ist derselbe Gegenstand, wie *Axiom*, oder dem *Axiom* vorangehende These dieses Systems der „Theorie der Deduktion“, das 11-te Wort des *Axioms* ist zum *Axiom* gehörendes Wort, das erste der zur Klasse der auf das 9-te Wort des A folgenden Wörter des A gehörenden Wörter ist aber mit dem 11-ten Wort des *Axioms* gleichgestalteter Ausdruck)];

8) wenn irgend ein Gegenstand A einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\,C\,C\,\iota\,\iota\,N\,C\,\iota\,\iota$“ ist, so ist er nicht Definition für das 9-te Wort des A in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 5-te Wort des A und rücksichtlich der Klasse der auf das 5-te Wort des A folgenden Wörter des A [B. 1, 3—8 e., B. 2 n. e.];

9) wenn irgend ein Gegenstand A einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\,C\,C\,F\,F\,N\,C\,F\,F$“ ist, so ist er nicht Definition für das 9-te Wort des A in bezug auf *Axiom*, in Hinsicht auf das 5-te Wort des A und rücksichtlich der Klasse der auf das 5-te Wort des A folgenden Wörter des A [B. 2—8 e., B. 1 n. e.].

Terminologische Erklärung XII. Von einem Gegenstand A sage ich, dass er Definition in bezug auf C ist, dann und nur dann, wenn A Definition für einen gewissen Ausdruck in bezug auf C, in Hinsicht auf einen gewissen Ausdruck und rücksichtlich eines gewissen Ausdrucks ist [1].

Beispiele:

1) wenn irgend ein Gegenstand A einer von den miteinander gleichgestalteten Ausdrücken „$N\ C\ C\ F\ \alpha\ \alpha\ N\ C\ \alpha\ F\ \alpha$“ ist, so ist er Definition in bezug auf *Axiom* [2];

2) *Axiom* ist nicht Definition in bezug auf *Axiom*.

Indem ich zum System der „Theorie der Deduktion", dessen erste These *Axiom* ist, weitere Thesen hinzufüge, tue ich dies auf eine solche Weise, dass immer wenigstens eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) die These, die ich eben hinzufüge, ist Substitutionsfolge einer gewissen von den bisherigen Thesen dieses Systems der „Theorie der Deduktion“ in bezug auf die letzte der bisherigen Thesen dieses Systems;

2) die These, die ich eben hinzufüge, ist Abtrennungsfolge einer gewissen von den bisherigen Thesen dieses Systems der „Theorie der Deduktion“ in bezug auf eine gewisse von den bisherigen Thesen dieses Systems;

3) die These, die ich eben hinzufüge, ist Definition in bezug auf die letzte der bisherigen Thesen dieses Systems der „Theorie der Deduktion“.

Die Konstruktionsvorschrift des oben angesagten, Definitionen enthaltenden Systems der „Theorie der Deduktion“ ist damit formuliert.

---

[1] Im Zusammenhang mit der hier gegebenen Definition der Definition vgl. *op. cit.*, S. 11.

[2] Vgl. *Beispiel* 1 zur *terminologischen Erklärung XI*.

Antoni Łaszkiewicz.

Morfologja polskich cerusytów.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 21 listopada 1931 r.

Morphologie des cérusites polonaises.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 21 Novembre 1931.

Praca wyjdzie w „Archiwum Mineralogicznem" T. VIII, 1931 r.

Piotr Sergescu.

O kilku własnościach wielomianów.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 21 listopada 1931 r.

Pierre Sergescu. (Professeur à l'Université de Cluj).

Quelques propriétés des polynomes [1]).

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 21 Novembre 1931.

1. Considérons l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

à coefficients réels ou complexes. Si $|a_0| \geqslant |a_i|$ pour $i = 1, 2, \ldots n$, toutes les racines de l'équation ont le module inférieur à 2. Plus précisement:

Si dans l'équation (1) *le premier coefficient a le plus grand module, les racines x_i ont le module inférieur à la racine positive p_n de l'équation*

$$\rho^n = \rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots + \rho + 1 \tag{2}$$

et

$$2 - \frac{e}{2^n} < p_n < 2 - \frac{1}{2^n}.$$

---

[1]) Présenté au 2me Congrès des Mathématiciens Polonais à Wilno, le 25 Septembre 1931.

La valeur p_n *croit avec* n, *vers* 2, *et s'en approche autant que l'on veut quand* n *augmente indéfiniment.*

Posons $|x| = \rho$. L'équation (1) conduit à l'inégalité:

(3) $|a_0|\rho^n \leqslant |a_1|\rho^{n-1} + |a_2|\rho^{n-2} + \ldots + |a_n| < |a_0|(\rho^{n-1} + \ldots + \rho + 1)$.

Or l'équation (2) a une seule racine positive p_n et, pour $\rho > p_n$ on a:

$$\rho^n > \rho^{n-1} + \ldots + \rho + 1$$

donc l'inégalité (3) ne serait pas satisfaite. Il s'ensuit que $\rho \leqslant p_n$ si x est une racine de (1). [L'égalité a lieu pour l'équation (2) elle-même].

Pour calculer p_n remarquons que (2) peut s'écrire:

$$\rho^n = \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \therefore f(\rho) = \rho^{n-1} - 2\rho^n + 1 = 0$$

on a:

$$f'(\rho) = (n+1)\rho^n - 2n\rho.$$

Cette dérivée s'annule pour $\rho = 0$ et $\rho = \frac{2n}{n+1}$. Or:

$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n \frac{2}{n+1} < 0 \qquad f(2) = 1 > 0.$$

Il s'ensuit

$$\frac{2n}{n+1} < p_n < 2.$$

La concavité de la courbe $\sigma = f(\rho)$ est dirigée vers les σ positifs pour $\rho > \frac{2n}{n+1}$. Considérons les points $A\left(\frac{2n}{n+1}, 1 - \frac{2^{n+1}n^n}{(n+1)^n}\right)$ et $B(2, 1)$ de la courbe. La corde AB coupe l'axe $\sigma = 0$ au point d'abcisse $2 - \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et l'on a:

$$2 - \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < p_n$$

ce qui entraîne a fortiori $2 - \frac{e}{2^n} < p_n$. D'autre part, la tangente en B à la courbe coupe l'axe $\sigma = 0$ au point d'abcisse $2 - \frac{1}{2^n}$, ce qui donne $p_n < 2 - \frac{1}{2^n}$.

Pour démontrer que p_n croit avec n, nous établirons d'abord le:

Lemme. *Considérons les équations $f(x)=0$ et $g(x)=0$ et supposons que $f(x)$ et $g(x)$ s'annulent chacun une seule fois, pour $x=\alpha$ et $x=\beta$ respectivement, dans l'intervalle ab, en passant du signe $+$ au signe $-$. Dans ces conditions, si $\alpha>\beta$, la fonction $F(x)=f(x)-g(x)$ est positive pour $x=\alpha$ et $x=\beta$. Si $\beta>\alpha$, elle y est négative.*

On a:

$$f(x)=(x-\alpha)A(x) \qquad g(x)=(x-\beta)B(x)$$

$A(x)$ et $B(x)$ gardent un signe constant dans l'intervalle ab. Ce signe est $-$ en vertu des hypothèses. Or:

$$F(x)=(x-\alpha)A(x)-(x-\beta)B(x)$$

$$F(\alpha)=(\beta-\alpha)B(\alpha) \qquad F(\beta)=(\beta-\alpha)A(\beta).$$

Donc, si $\beta<\alpha$, on a $F(\alpha)>0$ et $F(\beta)>0$; si $\beta>\alpha$, on a par contre $F(\alpha)<0$ et $F(\beta)<0$. Enoncé analogue si $f(x)$ et $g(x)$ changent de signe en passant du signe $-$ au signe $+$.

Appliquons ce lemme aux fonctions

$$f(x)=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-x^n)x$$

$$g(x)=1+x+\ldots+x^n-x^{n+1}$$

dans l'intervalle 1, 2. On a $F(x)\equiv-1$ ce qui signifie que $p_n<p_{n+1}$.

Le théorème est établi.

2. M. **Tib. Popoviciu** s'est occupé du cas où l'équation (1) a toutes les racines réelles. *Pour plus de simplicité, supposons* $a_0=1$. On a en vertu de l'hypothèse:

$$\sum (x_i-x_j)^2=(n-1)a_1^2-2na_2>0$$

$$\sum_{i,j=2}^{n}(x_i-x_j)^2=(n-2)(a_1+x_1)^2-2(n-1)[a_2+x_1(a_1+x_1)]>0$$

$$nx_1^2+2a_1x_1+2(n-1)a_2-(n-2)a_1^2\leqslant 0.$$

Il s'ensuit que toutes les racines de (1) sont dans l'intervalle

$$\frac{-a_1-\sqrt{(n-1)^2a_1^2-2n(n-1)a_2}}{n},$$

$$\frac{-a_1+\sqrt{(n-1)^2a_1^2-2n(n-1)a_2}}{n}.$$

Ceci est valable quelsque soient les a_i. Si $|a_1| \leqslant 1$, $|a_2| \leqslant 1$ les modules de toutes les racines de (1) — avec $a_0 = 1$ — sont inférieurs à la limite supérieure des expressions précédentes, soit

$$\frac{1+\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n}.$$

Les limites sont atteintes pour les équations

$$\left(x \mp \frac{1+\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n}\right) \tag{4}$$

$$\left(x \pm \frac{\sqrt{(n-1)(3n-1)}-(n-1)}{n(n-1)}\right)^{n-1} = 0$$

où les signes se correspondent. Pour ces équations, on a bien $|a_i| < 1$.

En effet, si l'on pose

$$x = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n(n-1)}, \quad y = \frac{1+\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n}$$

on a:

$$|a_p| = |C_{n-1}^p x^p + C_{n-1}^{p-1} x^{p-1} y| = \frac{x^{p-1}}{p} C_{n-1}^{p-1} |(n-p)x + py|$$

où

$$|x| = \frac{\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n(n-1)} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \qquad \text{pour} \qquad n < 3$$

$$|(n-p)x + py| = 1 + \frac{p-1}{n-1}\sqrt{(n-1)(3n-1)} \leqslant 2p-1\,.$$

Il s'ensuit $|a_p| < 1$ pour $p > 2$. D'autre part $|a_1| = |a_2| = 1$. On peut donc énoncer le théorème:

Si l'équation (1) *a toutes les racines réelles et si* $|a_i| \leqslant |a_0|$ *toutes les racines sont comprises dans l'intervalle*

$$-\frac{1+\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n} \qquad +\frac{1+\sqrt{(n-1)(3n-1)}}{n}.$$

Cet intervalle croit avec n et tend vers $\sqrt{3}$ *quand n augmente indéfiniment.*

3. Passons à un cas plus général.

Si dans l'équation (1), *le coefficient* a_p *est celui de module le plus grand, l'équation a au moins une racine* x_i *dont le module est inférieur à* $\sqrt[n-p]{C_n^p}$.

D'après l'hypothèse, on a:

$$\left|\sum x_1 \dots x_p\right| > |x_1 \dots x_n| \qquad \sum x_1 \dots x_p = k\, x_1 \dots x_n \qquad [|k| > 1].$$

En faisant $x_1 = x_2 = \dots = x_n = z$ dans la relation précédente, on a:

$$C_n^p\, x^p = k\, x^n$$

équation qui admet les racines 0 et $\sqrt[n-p]{C_n^p}$. Alors, en vertu du théorème de **Grâce et Heywood**, il est impossible que tous les $|x_i|$ soient supérieurs à $\sqrt[n-p]{C_n^p}$.

On peut démontrer cette propriété aussi d'une autre manière. De l'inégalité précédente on tire

$$\left|\sum \frac{1}{x_1 \dots\dots x_{n-p}}\right| > 1.$$

Dans le premier membre il y a C_n^p termes; donc l'un au moins doit être supérieur à $\frac{1}{C_n^p}$. Ceci entraîne:

$$\frac{1}{|x_1 \dots\dots x_{n-p}|} > \frac{1}{C_n^p} \qquad |x_1 \dots\dots x_{n-p}| < C_n^p$$

$$|x_1| < \sqrt[n-p]{C_n^p}$$

si l'on désigne par x_1 la racine du plus petit module. Le théorème est établi.

4. M. **Biernacki** m'a communiqué que si $|a_p| \geqslant |a_i|$ où $i = 0, 1, \dots p-1, p+1 \dots n$ l'équation admet $n-p$ racines limitées supérieurement en module. Ces limites ne sont pas encore calculées pour le cas général. Je les ai cherchées pour les équations du second et du troisième dégré.

Soit l'équation $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$.

1⁰) *Si* $|a_0| > |a_1|, |a_2|$, *les deux racines de l'équation sont inférieures en module à* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2⁰) *Si* $|a_1| > |a_0|, |a_2|$, *une racine a le module inférieur à* 2.

3⁰) *Si* $|a_2| > |a_0|, |a_1|$, *les modules des deux racines sont supérieurs à* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

p_2 est bien $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ce qui établit le premier point. La limite est atteinte pour l'équation $p^2 - p - 1 = 0$. En faisant l'équation transformée en $\frac{1}{x}$, on obtient le troisième point. Pour le cas où $|a_1|$ est le plus grand, on a

$$\left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| > 1$$

ce qui entraîne que l'un au moins des nombres $\left|\frac{1}{x_1}\right|$ ou $\left|\frac{1}{x_2}\right|$ soit supérieur (ou égal) à $\frac{1}{2}$. Donc $|x_1| \leqslant 2$. c. q. f. d.

La limite 2 est atteinte par l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$.

5. Considérons maintenant l'équation du troisième dégré. *Soit l'équation* $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$.

1°) *Si* $|a_0| \geqslant |a_i|$ *où* $i = 1, 2, 3$, *toutes les racines de l'équation sont inférieures en module (ou égales) à* p_3.

2°) *Si* $|a_1| \geqslant |a_i|$ *où* $i = 0, 2, 3$, *deux racines sont inférieures en module à* $1 + \sqrt{6}$.

3°) *Si* $|a_2| \geqslant |a_i|$ *où* $i = 0, 1, 3$, *une racine est inférieure en module à* 3.

4°) *Si* $|a_3| \geqslant |a_i|$ *où* $i = 0, 1, 2$ *aucune racine n'est inférieure en module à* $\frac{1}{p_3}$.

Le premier point est un cas particulier du théorème du nr 1; le quatrième point s'en déduit en faisant la transformée en $\frac{1}{x}$.

Le troisième point est un cas particulier du théorème du nr. 3. En général si dans (1) le coefficient a_{n-1} a le plus grand module, une racine est toujours inférieure en module à n; (car $p = n - 1$ dans ce cas et $C_n^{n-1} = n$).

Pour établér le second point, remarquons que dans ce cas on a:

$$|x_1 + x_2 + x_3| \geqslant |x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1|$$
$$|x_1 + x_2 + x_3| \geqslant |x_1 x_2 x_3|.$$

Supposons, pour fixer les idées $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$. On a bien $|x_1 x_2| > 1$ car, sinon, $|x_2| \leqslant 1$ et donc $|x_3| \leqslant 1$ ce qui rendrait la proposition 2⁰) vérifiée a fortiori. Si donc $|x_1 x_2| > 1$, les inégalités précédentes donnent

$$|x_3| \geqslant \frac{|x_1 x_2| - |x_1 + x_2|}{1 + |x_1 + x_2|} \qquad |x_3| \leqslant \frac{|x_1 + x_2|}{|x_1 x_2| - 1}$$

d'où l'on a, en posant $|x_1| = m_1$, $|x_2| = m_2$:

$$(5) \qquad (m_1 m_2)^2 \leqslant (m_1 + m_2)^2 + m_1 m_2 (m_1 + m_2) + m_1 m_2 .$$

Or cette inégalité n'est pas vérifiée si m_1, m_2 sont supérieurs à $1 + \sqrt{6}$. En effet, si l'on pose

$$m_1 = 1 + \sqrt{6} + \alpha \qquad m_2 = 1 + \sqrt{6} + \beta$$

avec α et β positifs, on a:

$$(m_1 + m_2)^2 + m_1 m_2 (m_1 + m_2) + m_1 m_2 = 73 + 28\sqrt{6} + 26\alpha + \\ + 11\sqrt{6}\alpha + 26\beta + 11\sqrt{6}\beta + 7\alpha\beta + 4\sqrt{6}\alpha\beta + 2\alpha^2 + \sqrt{6}\alpha^2 + \\ + 2\beta^2 + \sqrt{6}\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$$

$$(m_1 m_2)^2 = 73 + 28\sqrt{6} + 38\alpha + 18\sqrt{6}\alpha + 38\beta + 18\sqrt{6}\beta + \\ + 28\alpha\beta + 8\sqrt{6}\alpha\beta + 7\alpha^2 + 2\sqrt{6}\alpha^2 + 7\beta^2 + 2\sqrt{6}\beta^2 + 2\alpha^2\beta + \\ + 2\sqrt{6}\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + 2\sqrt{6}\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2$$

et l'inégalité (5) ne saurait être vérifiée. Donc $m_2 < 1 + \sqrt{6}$ et la proposition est établie, car $|x_3| < m_2$ par hypothèse.

Paul Montel.

O granicy górnej modułu pierwiastków równania algebraicznego.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 21 listopada 1931 r.

Paul Montel.

Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique [1].

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 21 Novembre 1931.

1. Considérons l'équation

$$P(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Le problème général de la détermination du module maximum des racines peut être énoncé ainsi: le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ parcourant un domaine déterminé de l'espace à $2n$ dimensions, trouver le rayon du plus petit cercle du plan des x ayant son centre à l'origine et contenant les points représentatifs de toutes les racines. On restreint généralement ce problème en considérant seulement les variables réelles $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$ et en supposant que le point P admettant pour coordonnées les nombres réels et non négatifs $|a_i|$ parcoure un domaine de l'espace à n dimensions.

Un exemple classique est fourni par le cas où ce domaine (D) est le cube défini par les inégalités

$$|a_i| \leqslant N;$$

on sait que les racines ont alors un module inférieur à $1 + N$.

La démonstration repose sur l'inégalité

$$(1) \qquad |P(x)| \geqslant \rho^n - |a_1| \rho^{n-1} - |a_2| \rho^{n-2} \cdots - |a_n|$$

[1]) Présenté au 2me Congrès des Mathématiciens Polonais à Wilno le 25 Septembre 1931.

dans laquelle ρ désigne le module de x. On remplace $|a_i|$ par N, on obtient ainsi

$$|P(x)| \geqslant \rho^n \left[1 - N\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \cdots\right)\right] > \left(1 - \frac{N}{\rho - 1}\right)\rho^n,$$

et la dernière expression est positive pour $\rho > 1 + N$.

Mais nous pouvons transformer autrement l'expression

$$|a_1|\rho^{n-1} + |a_2|\rho^{n-2} + \cdots + |a_{n-1}|\rho + |a_n|,$$

en tenant compte de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^m\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} B_i^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}}, \tag{2}$$

valable lorsque A_i et B_i sont des nombres positifs, m et m' deux nombres positifs vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1.$$

En remplaçant A_i par $|a_i|$ et B_i par ρ^{n-i}, il vient

$$|a_1|\rho^{n-1} + \cdots + |a_n| \leqslant \left[|a_1|^m + |a_2|^m + \cdots + |a_n|^m\right]^{\frac{1}{m}} \times$$
$$\times \left[\rho^{(n-1)m'} + \rho^{(n-2)m'} + \cdots + \rho^{m'} + 1\right]^{\frac{1}{m'}}$$

avec $m' = \dfrac{m}{m-1}$. Si nous posons

$$|a_1|^m + |a_2|^m + \cdots + |a_n|^m = R^m,$$

on voit que, si $p > 1$,

$$|P(x)| \geqslant \rho^n \left[1 - R\left(\frac{1}{\rho^{m'}} + \frac{1}{\rho^{2m'}} + \cdots\right)^{\frac{1}{m'}}\right] > \left[1 - \frac{R}{\left(\rho^{m'} - 1\right)^{\frac{1}{m'}}}\right]\rho^n$$

et la dernière expression est positive pour

$$\rho > \left(1 + R^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Nous obtenons donc, comme limite supérieure du module des racines, l'expression :

$$\left\{1 + \left[|a_1|^m + |a_2|^m + \cdots + |a_n|^m\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}^{1 - \frac{1}{m}}.$$

Lorsque m croît indéfiniment, cette expression a pour limite

$$1 + \max. |a_i|$$

et nous retrouvons le résultat classique. Si le point P de coordonnées $|a_i|$ reste dans le domaine (D_m) défini par l'inégalité

$$|a_1|^m + |a_2|^m + \cdots + |a_n|^m \leqslant R^m,$$

R désignant un nombre positif fixe, les modules sont inférieurs à

$$L_m = \left(1 + R^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Par exemple, si $m = 2$, on a la limite

$$\sqrt{1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2},$$

et le domaine (D_2) est une hypersphère. Si m est compris entre 1 et 2, l'inégalité

$$1 + A^\alpha \leqslant (1 + A)^\alpha \qquad (A > 0, \ \alpha \geqslant 1)$$

entraîne

$$1 + R^{m'} \leqslant \left[1 + |a_1|^m + \cdots + |a_n|^m\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

et

$$L_m \leqslant \sqrt[m]{1 + |a_1|^m + \cdots + |a_n|^m}.$$

Lorsque m croît indéfiniment, le domaine (D_m) a pour limite le cube (D) et nous avons vu que la limite L_m tend vers la valeur $1 + \max. |a_i|$.

Supposons maintenant que m tende vers l'unité: les calculs précédents ne sont plus valables pour $m = 1$.

L'inégalité (2) devient, si on fait tendre m vers 1, et par suite m' vers l'infini,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} A_i \times \max. B_i,$$

ce qui est évident; si $B_i = \rho^{n-i}$, on voit que le maximum de B_i est ρ^{n-1} si $\rho \geqslant 1$ et 1 si $\rho \leqslant 1$. L'inégalité (1) devient

$$|P(x)| \geqslant \rho^{n-1}(\rho - R) \qquad \text{si} \quad \rho \geqslant 1,$$
$$|P(x)| \geqslant \rho^{n} - R \qquad \text{si} \quad \rho \leqslant 1,$$

en posant

$$R = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Si $R \geqslant 1$, on voit que $P(x)$ ne peut s'annuler pour $\rho > R$; si $R \leqslant 1$, on doit prendre $\rho > \sqrt[n]{R}$ et, comme $\sqrt[n]{R} \leqslant 1$, la limite supérieure 1 convient à toutes les valeurs de n. Donc, en particulier, *si*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqslant 1,$$

l'équation proposée à toutes ses racines de modules inférieurs à l'unité.

D'ailleurs, si R reste fixe, l'expression de L_m a pour limite 1 lorsque $R \leqslant 1$ et a pour limite R lorsque $R \geqslant 1$.

2. Les limites que nous avons trouvées sont indépendantes du degré n de l'équation. Si l'on tient compte du degré, l'inégalite (1) donne, dans le cas du domaine (D)

$$|P(x)| \geqslant \rho^n - N(\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \cdots + \rho + 1)$$

et la limite supérieure ρ_n est égale à la racine positive de l'équation

$$\rho^n = N(\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \cdots + \rho + 1)$$

ou

$$\rho^{n+1} - (N+1)\rho^n + N = 0,$$

après multiplication par $\rho - 1$. Les méthodes d'approximation donnent aisément les inégalités

$$1 + N - \frac{eN}{(1+N)^n} < \rho_n < 1 + N - \frac{N}{(1+N)^n},$$

où e désigne la base des logarithmes népériens. La nombre ρ_n croît avec n et a pour limite $1+N$ lorsque n croît indéfiniment.

Si l'on remplace (D) par (D_m), il suffit, dans l'équation et les inégalités précédentes, de remplacer N par $R^{m'}$, et ρ par $\rho^{m'}$.

3. Nous venons d'examiner un cas où les nombres ρ_n ont une limite supérieure quand n croît indéfiniment. Plaçons-nous dans le cas plus général où le cube (D) est remplacé par le parallélépipède (D') défini par

$$|a_i| < c_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les c_i désignant des nombres positifs fixes. Les domaines (D_m) sont alors remplacés par les domaines (D'_m) définis par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^m}{c_i^m} \leqslant 1.$$

Lorsque n est fixe, on obtient des résultats semblables aux précédents; il suffit, dans l'inégalité (2), de remplacer A_i par $\frac{|a_i|}{c_i}$ et B_i par $c_i \rho^{n-i}$. Mais les limites supérieures obtenues ne restent pas toujours bornées quel que soit n.

Limitons-nous au cas du domaine (D'); le module maximum ρ_n pour les équations de degré n est égal à la racine positive de l'équation

$$\rho^n = c_1 \rho^{n-1} + c_2 \rho^{n-2} + \cdots + c_{n-1} \rho + c_n ,$$

c'est-à-dire à l'inverse de la racine positive r_n de l'équation

$$c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_n r^n = 1 .$$

On voit immédiatement que les nombres r_n décroissent avec n: pour qu'il y ait une limite supérieure commune aux modules des racines de toutes les équations correspondant à une suite donnée infinie de nombres c_n, il faut et il suffit que r_n ait une limite positive lorsque n croît indéfiniment.

On peut établir le théorème suivant:

Etant donnée une suite infinie de nombres positifs c_1, c_2, ..., c_n, ...; pour que les modules des racines de toutes les équations

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 ,$$

dans lesquelles $|a_i| \leq c_i$, demeurent bornés quel que soit n, il faut et il suffit que la série

$$S(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

ait un rayon de convergence non nul.

En effet, supposons que r_n ait pour limite r_0 positif et posons

$$S_n(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n .$$

On a

$$S_n(r_0) < S_n(r_n) = 1 ;$$

donc la série converge pour $|z| < r_0$.

Réciproquement, supposons que la série ait un rayon de convergence non nul r'; les nombres r_n ont une limite r_0 positive ou nulle et inférieure ou égale à r'. Mais r_0 ne peut être nul, car $S_n(z)$ converge uniformément autour de $z = 0$. Comme la série est nulle à l'origine, on peut prendre r'' assez petit pour que

$$|S(z)| < \frac{1}{2} \qquad |z| < r'';$$

alors, pour n assez grand, on aura

$$|S_n(z)| < \frac{1}{2} \qquad |z| < r'',$$

et, par conséquent $r_n \geqslant r''$: donc r_0 est positif. C'est la racine positive de $S(z) = 1$.

La condition peut encore s'exprimer en écrivant que $\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n}$ est borné.

Voici quelques exemples: si on prend $c_n = N$, on obtient la série $\frac{N}{1-z}$ du paragraphe 1.

Pour les valeurs $c_n = n$, on a

$$S(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

la limite $\frac{1}{r_0}$ est égale à $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 2,6$.

Pour $c_n = \frac{1}{n}$, $S(z) = \log \frac{1}{1-z}$, la limite est $\frac{e}{e-1} < 1,51$; pour $c_n = \frac{1}{n!}$, $S(z) = e^z - 1$, la limite est $\frac{1}{\log 2} < 1,45$.

Au contraire, pour $c_n = n^n$, la série $S(z)$ diverge quel que soit z et r_n tend vers zéro: on a, en effet $r_n < \frac{1}{n}$.

On peut aussi supposer que les nombres c_k dépendent du degré n du polynome; en d'autres termes, que les polynomes $P(x)$ soient majorés par des polynomes

$$\pi(x) = x^n + c_1^{(n)} x^{n-1} + \cdots + c_n^{(n)}$$

à coefficients positifs. Désignons par $Q(z)$ le polynome

$$z^n \pi\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + c_1^{(n)} z + \cdots + c_n^{(n)} z^n.$$

On obtient alors la proposition suivante:

Pour que les zéros des polynomes $P(x)$ aient leurs modules bornés, il faut et il suffit que les polynomes $Q(z)$ forment une famille normale autour de l'origine.

La condition est nécessaire. En effet, les zéros des polynomes $P(x)$ de degré n ont des modules inférieurs ou égaux à l'inverse de la racine positive r_n de l'équation

$$Q(z) = 2.$$

Si ces modules sont bornés, le nombre r_n reste supérieur à un nombre fixe r_0; on a alors, pour $|z| < r_0$,

$$|Q(z)| < Q(r_0) \leqslant Q(r_n) = 2.$$

Les polynomes $Q(z)$ sont bornés dans le cercle $|z| < r_0$ et la famille est normale.

La condition est suffisante. Supposons que la famille $Q(z)$ soit normale auteur de $z = 0$. Si les modules des zéros de $P(x)$ n'étaient pas bornés, il existerait une suite de nombres r tendant vers zéro. Soit $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, cette suite correspondant aux polynomes $\pi_n(x)$. De la suite $Q_n(z)$ correspondante, on peut extraire une suite partielle convergente; cette suite est bornée puisque $Q_n(o) = 1$; et la fonction limite prend à l'origine la valeur *un* ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que

$$Q_n(r_n) = 2,$$

les points r_n tendant vers l'origine.

4. Plus généralement, considérons une famille de polynomes $P(x)$ et cherchons à quelle condition les zéros de ces polynomes auront des modules bornés. Soit

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

les polynomes associés. Si la famille $Q(z)$ est normale autour de $z = 0$, les modules des zéros sont bornés. Il suffit de répéter la démonstration précédente.

Mais cette condition n'est pas nécessaire et il est facile de construire un exemple de famille de polynomes $P(x)$ dont les zéros ont des modules bornés et telle que le point $z = 0$ soit irrégulier pour la famille $Q(z)$. Déterminons un polynome $Q_n(z)$ tel que $Q_n(o) = 1$ et que, pour $|z| < 1$, on ait l'inégalité

$$|Q_n(z) - e^{nz}| < e^{-n}$$

n désignant un entier positif. Le polynome $Q_n(z)$ ne peut s'annuler pour $|z| < 1$, car on a, dans ce cercle $|e^{nz}| > e^{-n}$. La suite $Q_n(z)$ n'est pas normale autour de l'origine, sinon la suite e^{nz} le serait aussi: or, e^{nz} augmente indéfiniment pour $\Re(z) > 0$ et tend vers zéro pour $\Re(z) < 0$. Les polynomes $P_n(x)$ correspondants ont tous leurs zéros de modules inférieurs à *un*.

Remarquons que lorsque la famille $Q(z)$ est normale autour de l'origine, les zéros de tous les polynomes

$$P(x) = \alpha x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ont leurs modules bornés quel que soit le nombre fixe α non nul. On est ainsi conduit à la proposition suivante:

Pour que les polynomes $P(x)$ admettent des zéros de modules bornés pour deux valeurs non nulles du coefficient du terme de plus haut degré, il faut et il suffit que la famille des polynomes

$$Q(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

soit normale autour de l'origine.

Nous venons de voir que la condition est suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire. Si les modules des zéros des polynomes

$$\alpha x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$$\beta x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

sont bornés, α et β désignant deux nombres différents de zéro, les équations

$$Q(z) + \alpha = 0,$$

$$Q(z) + \beta = 0$$

n'ont pas de racine dans le voisinage de l'origine. Il existe un nombre positif r_0 tel que pour $|z| < r_0$, le polynome $Q(z)$ ne prenne ni la valeur $-\alpha$, ni la valeur $-\beta$. Dans ces conditions, on sait que la famille de ces polynomes est normale autour de l'origine.

5. Revenons maintenant aux domaines (D) et (D_m). Toutes les limites trouvées pour le plus grand module des zéros sont supérieures ou égales à l'unité. Par conséquent, si on multiplie le polynome $P(x)$ par un polynome $Q(x)$ dont tous les zéros ont des modules non supérieurs à l'unité, on pourra appliquer au polynome $P(x)\,Q(x)$ les résultats obtenus: les nouvelles limites ainsi calculées seront valables pour le polynome $P(x)$.

Prenons en particulier $Q(x) \equiv x-1$. Nous aurons

$$(x-1)P(x) \equiv x^{n+1} + (a_1 - 1)x^n + (a_2 - a_1)x^{n-1} + \cdots + a_n .$$

Nous pourrons dans les limites supérieures obtenues au début remplacer $|a_{i+1}|$ par $|a_{i+1} - a_i|$, en posant $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 0$. Par exemple, si l'on a

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{i+1} - a_i|^m \leqslant 1 ,$$

les zéros de $P(x)$ ont leurs modules inférieurs à $2^{1-\frac{1}{m}}$. Marquons dans le plan les points A_0, A_1, A_2, ... A_n, 0, d'affixes $a_0 = 1$, a_1, a_2, ..., a_n, $a_{n+1} = 0$. L'inégalité précédente pourra s'écrire

$$\sum_{i=0}^{n} \overline{A_i A_{i+1}}^{\,m} \leqslant 1 .$$

Considérons par exemple le cas de $m = 1$, et soit L la somme

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{i+1} - a_i| ,$$

c'est-à-dire la longueur de la ligne brisée qui a pour origine le point 1, pour extrémité l'origine et pour sommets consécutifs A_0, A_1, ... A_n, 0.

Comme L n'est pas inférieur à 1, on voit que les zéros de $P(x)$ ont leurs modules inférieurs à L [1]). Lorsque $L = 1$, il est nécessaire que tous les points A_i soient placés sur le segment 0, 1 et se succèdent dans l'ordre naturel. Donc, si les nombres a_i sont réels et vérifient les inégalités

$$1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0 ,$$

toutes les racines de l'équation (1) ont leurs modules inférieurs ou égaux à l'unité: c'est le théorème de M. Kakeya.

---

[1]) M. F. Marty vient d'étendre ce résultat en considérant des groupes de k zéros. Voir: *Sur une inégalité que vérifient les zéros d'un polynome.* (Bulletin des Sc. Math. s. 2, t. LVI, p. 276, 1932).

On voit en même temps comment on doit modifier l'énoncé si les points a_i ne sont pas placés, entre A_0 et 0, dans l'ordre naturel.

Supposons que les points A_0, A_1, ... A_n, 0 se succèdent dans l'ordre naturel sur un arc de courbe de longueur L joignant les points 1 et 0. *Quelles que soient les positions de ces points sur la courbe, les modules des zéros sont inférieurs à L.*

Supposons maintenant m infini, alors, les inégalités

$$|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

entraînent que les modules des zéros sont inférieurs à 2. Si, dans l'équation (1), on désigne par L le plus grand module de la différence de deux coefficients consécutifs, $1 + L$ est une limite supérieure du module des racines.

On obtiendrait des résultats analogues en prenant $Q(x) \equiv x^p - 1$; il faudrait substituer à la ligne brisée précédente, les différentes lignes brisées obtenues en joignant de p en p les points A_i [1]).

---

[1]) M. Valiron m'a fait remarquer que la plupart des résultats précédents sont encore valables quand on remplace les polynomes par des fonctions holomorphes.

Posiedzenie

z dnia 12 grudnia 1931 r.

Ludwik Szperl i Jarosław Böhm.

O działaniu selenowodoru na chlorek o-ftalilu.

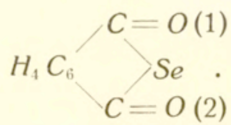
Przedstawił L. Szperl dnia 12 grudnia 1931 r.

Sur l'action de l'hydrogène sélené sur le chlorure de o-phtalyle.

Mémoire présenté par M. L. Szperl à la séance du 12 Décembre 1931.

Streszczenie.

Przez działanie selenowodoru na chlorek *o*-ftalilu z dodatkiem chlorku glinowego, jako katalizatora, początkowo (2 godz.) w temperaturze pokojowej, następnie (6 godzin) w temperaturze 60^0, otrzymano masę krystaliczną. Z niej, po usunięciu pozostałego chlorku *o*-ftalilu i po wielokrotnej krystalizacji z gorącego benzenu, wyodrębniono substancję krystaliczną w postaci jasno żółtych igieł o temperaturze topnienia $126-127^0$. Jest ona trudno rozpuszczalna w alkoholu, eterze i acetonie, dobrze natomiast w benzenie. Na podstawie analizy i analogji w stosunku do jednosiarczku *o*-ftalilu należy ją uważać za jednoselenek *o*-ftalilu o wzorze



Praca będzie drukowana in extenso w Rocznikach Chemji.

T. W. Jezierski i W. Strumpf.

O nowym dwuketonie, wytworzonym z p-metyloacetofenonu.

Przedstawił L. Szperl dnia 12 grudnia 1931 r.

Sur la nouvelle dicétone, formé de p-méthyl-acetophénone.

Mémoire présenté par M. L. Szperl à la séance du 12 Décembre 1931.

Streszczenie.

Działanie siarki na *p*-metyloacetofenon doprowadziło do otrzymania produktu krystalicznego, barwy jasno-żółtej, o t. t. 210—211^0. W wyniku przeprowadzonych badań ustalone zostało, że wzór sumaryczny tego związku jest $C_{18}H_{16}O_2$, biorąc zaś pod uwagę brak wiązań nienasyconych oraz istnienie grup karbonylowych, można przypuścić jedną z dwu poniższych koncepcyj jego budowy:

$$1.\ \begin{array}{l} CH_2 . CO . C_6H_4 . CH_2 \\ | \qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_2 . CO . C_6H_4 . CH_2 \end{array} \qquad 2.\ \begin{array}{l} CH_2 . CO . C_6H_4 . CH_2 \\ | \qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_2 . C_6H_4 . CO . CH_2 \end{array}$$

Roztwór otrzymanego dwuketonu w stężonym kwasie siarkowym posiada barwę żółtą, oraz wybitną zieloną fluorescencję.

Dalsze badania nad otrzymanym produktem działania siarki na *p*-metyloacetofenon będą kontynuowane.

Marja Kołaczkowska.

Skład mineralogiczny predacytu.

Przedstawił p. St. J. Thugutt dn. 12 grudnia 1931 r.

Streszczenie.

Zdawało się, że po badaniach i analizach Damoura (1847), Rotha (1851) i Hauenschilda (1861), a zwłaszcza po wyczerpujących pracach Lemberga (1872), skład mineralogiczny predacytu nie nasuwa żadnych wątpliwości. Tymczasem w roku 1891 ukazuje się w Min. u. Petr. Mitteilungen t. XII praca Ottokara Lenečka, który po przeprowadzeniu badań optycznych nad pewną liczbą preparatów mikroskopowych predacytu dochodzi do wniosku, że minerałem towarzyszącym kalcytowi w predacycie nie jest brucyt ($MgOH_2O$), jak to twierdzili zgodnie poprzedni badacze, lecz hydromagnezyt ($4MgO\,3CO_2\,4H_2O$). W roku 1905 Luigi Perucci zbija twierdzenie Lenečka i na drodze jedynie badań mikroskopowych przyznaje słuszność dawnej koncepcji. Pomimo to w wielu podręcznikach podane jest bez żadnych zastrzeżeń, że głównym składnikiem predacytu i penkatytu jest kalcyt i hydromagnezyt. Niektórzy autorowie podają obie możliwości.

Wskazane więc było ponowne podjęcie tej sprawy, poddanie rewizji dawnych analiz i dołączenie nowych, aby ostatecznie zdecydować, czy hydromagnezyt czy brucyt towarzyszy kalcytowi w predacycie. Otóż okazało się, że rezultaty analiz bez wątpliwości przemawiają za obecnością brucytu jako głównego składnika obok kalcytu w predacycie. Do przeliczenia całkowitego tlenku magnezu (MgO) na hydromagnezyt brak we wszystkich analizach od 9% do 19% CO_2. Niewielki nadmiar CO_2, dający się zauważyć prawie we wszystkich analizach predacytu w wysokości 0,8% do 2,71%, pozwala na związanie niewielkiej ilości magnezu na węglan magnezu, który zresztą według Lemberga nie występuje samodzielnie, lecz w postaci dolomitu, stanowiącego resztę pierwotnej nieprzeobrażonej skały.

Zastosowane tu były też badania mikrochemiczne metodą srebrową. Poddano działaniu azotanu srebra próbki sproszkowanego kalcytu, hydromagnezytu, brucytu i predacytu. Dwa pierwsze bez prażenia nie wykazują żadnej reakcji z azotanem srebra nawet po dłuższym czasie, natomiast brucyt zaczyna bronzowieć po 1′, a potem czernieje; predacyt pokrywa się plamami bronzowemi po 2′. Minerałem reagującym w predacycie z azotanem srebra jest więc brucyt. Po wyprażeniu kalcyt nie reaguje wcale, hydromagnezyt i brucyt przez wyprażenie przechodzą w peryklaz, reagują więc zgodnie, chociaż brucyt po krótszem prażeniu czernieje szybciej. Czernienie predacytu nie może być przypisane obecności w nim siarczków żelaza, gdyż brucyt brany do prób był w postaci blaszek krystalicznych, pozbawionych wszelkich wrostków, i próbki predacytu były wyjątkowo czyste, co stwierdzone zostało przez badanie szlifów pod mikroskopem i co też potwierdzają analizy, gdzie suma żelaza i glinki waha się zaledwie w granicach od 0,06% do 0,4%. Pod działaniem promieni nadfioletowych kalcyt i hydromagnezyt nie ujawniają fluorescencji, brucyt i predacyt fluoryzują światłem zielonkawem, znów więc mamy potwierdzenie, że powodem świecenia predacytu pod działaniem lampy kwarcowej może być prędzej brucyt niż hydromagnezyt.

Marja Kołaczkowska.

La composition minéralogique de la prédacite.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 12 Décembre 1931.

Résumé.

L'idée que la prédacite se compose de deux minéraux: la calcite et la brucite était établie par Damour (1847), Roth (1851), Hauenschild (1861) et Lemberg (1872) ainsi que par d'autres auteurs. En 1891 Ottokar Leneček tache de prouver que la prédacite est composée de calcite et de l'hydromagnésite. On se propose ici de démontrer l'erreur de Leneček. Les nombreuses analises éxecutées par les auteurs cités plus haut et les analises exécutées récemment démontrent qu'il y a chaque fois trop peu de CO_2 pour pouvoir former l'hydromagnésite de toute la magnésie (MgO). Ce manque de CO_2 oscile entre 9% et 19%, cependant qu'après avoir calculer la calcite l'excès de CO_2 s'exprime par le chiffre 0,8% a 2,8% — quantité insuffisante pour former de toute la magnesie le carbonate hydraté.

Les observations concernant l'action de $AgNO_3$ sur les quatre substances: la calcite, l'hydromagnésite, la brucite et la prédacite confirment la même idée: le noircissement de la pré-

dacite sous l'action de $AgNO_3$ peut être causé seulement par la présence de la brucite, car la calcite et l'hydromagnésite restent inalterées si on les traite à froid avec $AgNO_3$ tandis que la brucite et la prédacite dans les mêmes conditions se couvrent d'une couche noire d'oxyde d'argent.

La brucite et la prédacite montrent une fluorescence sous l'action de la lumière ultraviolette, par contre la calcite et l'hydromagnésite ne reagissent point dans les mêmes conditions. La fluorescence de la prédacite est donc dûe à la présence de la brucite dans cette roche.

H. Lachs i S. Chwaliński.

Wpływ nieelektrolitów na koagulację przez elektrolity.

Przedstawił W. Świętosławski dn. 12 grudnia 1931 r.

Influence de nonélectrolites sur la coagulation par électrolites.

Mémoire présenté par M. W. Świętosławski dans la séance du 12 Décembre 1931.

Streszczenie.

Na zolu trójsiarczku arsenu i węgla koloidalnego, których cząstki mają ładunek ujemny, stwierdzono, że wpływ nieelektrolitów (fenol, aceton, kamfora, trybutyryna, alkohol etylowy i amylowy i strofantyna) na wartość koagulacyjną elektrolitów jest zależny od wartościowości katjonu danego elektrolitu.

Nieelektrolit niezawsze zmienia wartość koagulacyjną elektrolitu. Jeśli jednak to czyni, to w przypadku jednowartościowych katjonów zmniejsza, zaś w przypadku wielowartościowych katjonów zwiększa tę wartość koagulacyjną. Jednakże strofantyna podwyższa wartość koagulacyjną, nawet w przypadku katjonów jednowartościowych. Natomiast alkohol etylowy obniża wartość koagulacyjną nawet w elektrolitach o wielowartościowych katjonach.

Została uczyniona próba objaśnienia tych zjawisk w związku z grubością warstwy adsorbcyjnej i z wpływem samych nieelektrolitów na potencjał elektrokinetyczny cząstek koloidalnych.

H. Lachs i L. Gestlówna.

Badania nad roztworami węgla koloidalnego.

Przedstawił W. Świętosławski dn. 12 grudnia 1931 r.

Recherches sur les solutions du charbon coloïdal.

Mémoire présenté par M. W. Świętosławski à la séance du 12 Décembre 1931.

Streszczenie.

1) Opracowano warunki otrzymania trwałych i dających się reprodukować roztworów węgla koloidalnego przez działanie kwasu siarkowego na cukier. Do oczyszczania zastosowano metodę ultrafiltracji, co pozwoliło uzyskać roztwory bardzo czyste, o przewodnictwie, wynoszącem zaledwie $6.10^{-6}\ \Omega^{-1}$.

2) Fazę rozsianą tych roztworów stanowi najprawdopodobniej w wysokim stopniu odwodniony węglowodan, jak to wynika ze składu elementarnego i badania chemicznego substancji. Cząstki posiadają budowę wybitnie bezpostaciową, jak to wykazały badania roentgenograficzne metodą Debye-Scherrer'a. Kształt cząstek pierwotnych jest zbliżony do kulistego, w roztworze znajdują się przeważnie cząstki wtórne, złożone z asymetrycznych konglomeratów uwodnionych cząstek pierwotnych. Istnienie konglomeratów potwierdziło zbadanie wielkości cząstek (70% fazy rozsianej o wielkości ok. 141 $\mu\mu$, 15% o wielkości ok. 35 i 15% — ok. 4,4 $\mu\mu$). Uwodnienie wynika z dużej trwałości zolu oraz wysokich wartości koagulacyjnych, zbadanych dla szeregu elektrolitów jedno — i wielowartościowych.

3) Zbadano prędkość wędrowania kataforetycznego węgla koloidalnego w czystym roztworze oraz w obecności elektrolitów — KCl, $K_4Fe(CN)_6$, KOH i $ThCl_4$, stosując metodę makroskopową.

Przebieg potencjału elektrokinetycznego w zależności od koncentracji elektrolitu próbowano objaśnić w związku z teorją O. Sterna.