

SPRAWOZDANIA T. N. W. WYDZIAŁ III

22
1929

3500

P167 P

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XXII Année 1929.

Fascicule 1—3.

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

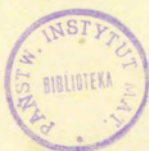
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych

Rok XXI] 1929

Zeszyt 1—3



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1929

<http://rcin.org.pl>

Tłoczono w Zakł. Graf.-Introlig.
J. Dzięwski, Warszawa, Złota 29

TREŚĆ ZESZYTU 1—3.

(Table des matières).

	Str.
W. Sierpiński. O pewnym zagadnieniu, tyczącem się zbiorów zamkniętych, płaskich.	1
Eustachy Żyliński. O pewnym elementarnem twierdzeniu o macierzach.	4
Stefan Zb. Różycki. Interglacjał Żoliborski	6
Antoni Łaszkiwicz. Przyczynki do morfologii minerałów Tatr Polskich.	29
Jan Lewiński i Stefan Zb. Różycki. Dwa profile geologiczne przez Warszawę.	30
Stefan Mazurkiewicz. O n -wymiarowem jądrze przestrzeni metrycznych, spełniających warunek przeliczalności.	51
W. Sierpiński. O pewnym zagadnieniu Łuzina.	58
Antoni Morawiecki. Obszar fosforytonośny Oknian, Odaj, Budzynia, Delawy i Doliny.	60
Antoni Morawiecki. Obszar fosforytonośny okolic Bukównyi Oleszowa.	63
Antoni Morawiecki. Obszar fosforytonośny Isakowa, Podwerbiec, Niezwisk, Harasymowa, Rakowca i Semenówki.	65
Kazimierz Żorawski. O układzie dwóch równań różniczkowych cząstkowych pewnej szczególnej formy	67

	Page
W. Sierpiński. Sur un problème concernant les ensembles fermés plans.	1
Eustachy Żyliński. Über einen elementaren Matrizensatz.	4
Stefan Zb. Różycki. Das Interglazial von Żoliborz bei Warschau.	27
Antoni Łaszkiwicz. Contribution à la morphologie de quelques minéraux du Tatra Polonais.	29
J. Lewiński und St. Zb. Różycki. Zwei geologische Profile durch Warschau (Vorläufige Mitteilung).	47

	Page
Stefan Mazurkiewicz. Sur le noyau n -dimensionnel d'un espace metrique, séparable.	51
W. Sierpiński. Sur un problème de M. Lusin	58
Antoni Morawiecki. Terrains phosphatifères d'Okniany, Odaje, Bu- dzyń, Delawa et Dolina en Petite Pologne.	60
Antoni Morawiecki. Terrains phosphatifères de Bukówna et Ole- szów en Petite Pologne.	63
Antoni Morawiecki. Terrains phosphatifères d'Isaków, Podwerbce, Niezwiska, Harasymów, Rakowiec et Semenówka en Petite Pologne.	65
Kasimir Żorawski. Über ein System zweier partieller Differential- gleichungen von einer besonderen Form.	67

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dn. 31 stycznia 1929 r.

W. Sierpiński.

**O pewnym zagadnieniu, tyżącym się zbiorów
zamkniętych, płaskich.**

Komunikat przedstawiony dn. 31 stycznia 1929 r.

Streszczenie.

W pracy tej autor wyznacza warunek konieczny i wystarczający na to, żeby dla danego zbioru linjowego E istniał zbiór płaski, zamknięty F , taki, żeby E było zbiorem wszystkich tych liczb rzeczywistych a , dla których prosta $x = a$ trafia zbiór F dokładnie w jednym punkcie. Warunkiem takim jest, aby zbiór E był różnicą dwóch zbiorów F_{σ} .

W. Sierpiński.

**Sur un problème concernant les ensembles
fermés plans.**

Présenté le 31 janvier 1929.

F étant un ensemble plan, désignons par $f(F)$ l'ensemble de tous les nombres réels a , tels que la droite $x = a$ rencontre F en un seul point. Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante:

Théorème: *Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire E un ensemble plan fermé F , tel que $f(F) = E$, il faut et il suffit que E soit une différence de deux ensembles F_{σ} .*

Démonstration.

Soit F un ensemble plan fermé. Désignons par P la projection de F sur l'axe OX . La projection d'un ensemble fermé et borné étant fermée, et tout ensemble fermé étant une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et bornés, on voit que P est un ensemble F_σ .

Or, désignons par P_n l'ensemble de tous les nombres réels a , tels qu'il existe deux points (a, y') et (a, y'') de F , tels que

$$|y'| \leq n, |y''| \leq n, \text{ et } |y' - y''| \geq \frac{1}{n}.$$

On voit sans peine que les ensembles P_n ($n=1, 2, \dots$) sont fermés¹⁾. Or, on a évidemment

$$f(F) = P - (P_1 + P_2 + P_3 + \dots)$$

$f(F)$ est donc une différence de deux ensembles F_σ , ce qui prouve que la condition de notre théorème est nécessaire.

Soit maintenant E un ensemble linéaire qui est une différence de deux ensembles F_σ , soit $E = M - N$.

Désignons par J l'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble M : l'ensemble J est donc ouvert et par suite il est une somme d'un nombre fini (≥ 0) ou d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts n'empiétant pas les uns sur les autres, soit

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$$

Désignons par P_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$a_n < x < b_n$$

et

$$y = n + \frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{b_n - x}:$$

ce sera évidemment un ensemble fermé, tel que $f(P_n)$ est l'intérieur de l'intervalle (a_n, b_n) , et les ordonnées des points de P_n sont toutes $> n$.

Or, M étant un F_σ et J étant l'intérieur de M , l'ensemble $M - J$ est un F_σ punctiforme. D'après un théorème que j'ai démontré dans le vol. X du journal „*Fundamenta Mathematicae*“,

¹⁾ Cf. *Fundamenta Mathematicae* t. VII, p. 156.

p. 321 (Lemme 1), $M - J$ est donc une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux, soit

$$M - J = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

Désignons par Q_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$x \in E_n \text{ et } y = n.$$

Or, N étant un F_σ , nous pouvons poser

$$N = H_1 + H_2 + H_3 + \dots,$$

où H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont des ensembles (linéaires) fermés.

Désignons par R_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$x \in H_n \text{ et } y \geq n.$$

Posons

$$(1) \quad F = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + \\ + R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Les points (x, y) de F , où $y \leq n$, sont évidemment contenus dans l'ensemble

$P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n + R_1 + R_2 + \dots + R_n$; les ensembles P_k, Q_k et R_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant fermés, on en déduit facilement, d'après (1), que l'ensemble F est fermé. Or, on voit sans peine que $f(F) = M - N = E$. Notre théorème est ainsi démontré.

Remarquons que notre théorème subsiste, si l'on remplace dans son énoncé le mot „fermé” par F_σ . Or, on ne sait pas quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe (pour un ensemble E linéaire) un ensemble plan G_δ , soit Γ , tel que $f(\Gamma) = E^1$. On sait seulement que la condition suffisante est que E soit complémentaire d'un ensemble analytique, mais on ne sait pas si cette condition est nécessaire (M. Lusin a montré récemment quelles conséquences intéressantes résulteraient s'il en était ainsi). D'autre part on démontre sans peine que si Γ est un ensemble plan analytique, $f(\Gamma)$ est une différence de deux ensembles analytiques.

1) Cf. *Fund. Math.* t. VIII, p. 376 (Problème 40).

Eustachy Żyliński.

O pewnem elementarnem twierdzeniu o macierzach.

Przedstawił W. Sierpiński, dn. 31 stycznia 1929 r.

Streszczenie.

Gdy macierz symetryczna $A = (a_{ik})$, o wyznaczniku Δ , posiada własność $\delta = |a_{ik}| \neq 0$, wówczas można wyznaczyć jednoznacznie taką tablicę $B = (b_{ik})$, gdzie $b_{ii} = 1$ zaś $b_{ik} = 0$ dla $i \neq k$ przy $k = 1, 2, \dots, n-1$, że dla macierzy:

$$(c_{ik}) = B'AB$$

zachodzą równości:

$$c_{nk} = c_{kn} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Otrzymuje się przytem zawsze $c_{nn} = \Delta : \delta$.

Z powyższego twierdzenia przy $n = 2, 3$ wynikają dobrze znane twierdzenia o istnieniu środków krzywych i powierzchni 2-go stopnia.

Eustachy Żyliński.

Über einen elementaren Matrizensatz.

Présenté par W. Sierpiński le 31 janvier 1929.

In dieser Note möchte ich einen einfachen allgemeinen Satz über die Äquivalenz von symmetrischen Matrizen beweisen, deren Spezialfälle für $n = 2, 3$ wohlbekannte Existenzsätze über Mittelpunkte algebraischer Kurven resp. Flächen 2-er Ordnung in sich enthalten.

Der Satz gilt für beliebige Körper (Rationalitätsbereiche).
Es sei

$$A = (a_{ik}) \quad a_{ik} = a_{ki} \\ (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

eine symmetrische Matrix mit der Determinante $|a_{ik}| = \Delta$ und der Eigenschaft

$$\delta = |a_{ik}| \neq 0. \\ (i, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Dann lässt sich immer und zwar auf eine einzige Weise eine Matrix

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & b_1 \\ & 1 & & 0 & b_2 \\ & & \cdot & & \vdots \\ & & & \cdot & \vdots \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & & b_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

bestimmen von der Art, dass in der zu A äquivalenten Matrix

$$B'AB = (c_{ik})$$

die Gleichheiten

$$c_{ni} = c_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

stattfinden. Dabei wird immer

$$c_{nn} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Da bekanntlich die Matrix (c_{ik}) bei beliebigen B wieder symmetrisch ist, genügt es zu zeigen, dass

$$c_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Nach dem Multiplicationsgesetze von Matrizen erhalten wir für die b_1, b_2, \dots, b_{n-1} das System von $n-1$ linearer homogenen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} b_k + \alpha_{in} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

derer linke Seiten $c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn-1}$ darstellen.

Durch dieses System sind wegen

$$\delta = |\alpha_{ik}| \neq 0$$

($i, k = 1, 2, \dots, n-1$)

in eindentiger Weise b_1, b_2, \dots, b_{n-1} bestimmt. Es bleibt noch übrig das zugehörige c_{nn} zu berechnen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir das System von n linearer Gleichungen mit n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} x_k + a_{in} x_n = 0 & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} x_k + a_{nn} x_n = c_{nn}. \end{cases}$$

Dieses System hat die Lösung

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_{n-1} = b_{n-1}, x_n = 1,$$

ist also kompatibel und das Gleiche gilt offenbar für das homogene System

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} x_k + a_{in} x_n = 0 & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} x_k + (a_{nn} - c_{nn}) x_n = 0. \end{cases}$$

Wir haben also die Gleichheit

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n-1} & , & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} \cdots a_{n-1n-1} & , & a_{n-1n} \\ a_{n1} \cdots a_{nn-1} & , & a_{nn} - c_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

daraus unmittelbar folgt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n-1} & , & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} \cdots a_{n-1n-1} & , & 0 \\ a_{n1} \cdots a_{nn-1} & , & c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\Delta - \delta c_{nn} = 0$$

und endlich

$$c_{nn} = \frac{\Delta}{\delta}$$

w. z. b. w.

Stefan Zb. Różycki.

Interglacjał Żoliborski.

Przedstawił Jan Lewiński dn. 31 stycznia 1929 r.

W literaturze geologicznej Warszawy od dawna było już znane występowanie margli okrzemkowych¹⁾ i torfów²⁾ na terenie Żoliborza. Faktom tym nie przypisywano jednak większego znaczenia.

Dopiero na wiosnę 1926 r. głęboki wykop budującego się nowego kolektora A_2 odsłonił na dużej przestrzeni piękny profil torfów i utworów jeziornych, wykazując ścisły między nimi związek.

Sprawa wieku tych utworów nie była jednak jasna. Brakowało ścisłych i zupełnie pewnych argumentów, któreby przekonywały o interglacjalnym lub postglacjalnym wieku jeziora Żoliborskiego. W pierwszym wypadku dziwił brak moreny w stropie torfów, w drugim zastanawiała obecność niewykazujących dłuższego transportu szczątków nosorożca nieznanego u nas po zlodowaceniu Würmskiem. Dużo też dawała do myślenia wyraźna analogja utworów żoliborskich ze znanymi z literatury „interglacjami” Czystego i Szczęśliwic.

Opracowanie fauny malakologicznej przez Polińskiego³⁾ przyniosło wiele nadzwyczaj ważnych faktów. Sprawa wieku pozostała jednak nierozstrzygnięta definitywnie.

Samsonowicz⁴⁾ na podstawie profilu na krawędzi doliny Wisły, przy ujściu Pólkówki (patrz str. 23) odsłonięte tam ily okrzemkowe uznał za młodsze od L_4 . We wstępie do „Przewodnika geologicznego po okolicach Warszawy” precyzyje Samsonowicz swój pogląd pisząc, że „istnienie jeziora żoliborskiego

1) W. Amalickij — „O lednikowych otłóż. okr. Warszawy” 1892 r.

2) J. Siemiradzki „Zarys geologii Warszawy” 1895 r. otwór św. 157.

3) W. Poliński „O faunie malakologicznej etc.” Posiedzenia P. I. G. Nr. 16 1926 r.

4) J. Samsonowicz, Wstęp ogólny do „Przewodnika geologicznego po okolicach Warszawy” 1927 i dyskusja referatu p. Polińskiego w P. I. G. *

przypada na ten moment okresu między L_4 i L_5 , który nastąpił beżpośrednio po spłynięciu zastoiska Warszawskiego”.

Ale i takie postawienie sprawy, przy ówczesnych poglądach na dyluwium Warszawy, nie wyjaśniało wszystkich wątpliwości.

Dopiero nowe oświetenie zagadnienia wieku naszych zlodowaceń, rzucone przez prof. J. Lewińskiego¹⁾, pozwoliło usunąć wszystkie poprzednio stwierdzone pozorne sprzeczności, materiały zaś zbierane w terenie od 1926 do 1928 r. uzupełniły znajomość wzajemnego stosunku utworów lodowcowych i jeziornych.

Szkic niniejszy dotyczy obszaru od północy i od wschodu ograniczonego aluwialną doliną Wisły, na zachodzie dochodzącego do potoku Pisia (płynącego z Powązek przez Buraków ku Marymontowi), ku południowi zaś do kolei obwodowej, za którą teren podnosi się stopniowo i przechodzi nieznacznie w t. zw. poziom warszawski, wreszcie na wschodzie zamyka go dawna dolina Drny.

Sam Żoliborz położony jest na poziomie nieco niższym, niż przyległa część Warszawy (poziom warszawski ma średnio 110 m. n. p. m.); i wznosi się średnio 18—25 m. nad zero Wisły, co odpowiada 95—102 m. n. p. m.

W zachodniej części terenu, przecinając go z Pd. Z. na Pn. W., leży dawna dolina rzeczki Drny, dzisiaj dość trudna do rozpoznania wskutek zmian, które wprowadził człowiek — wyraźnie jednak widoczna jeszcze na planach z pierwszej połowy ubiegłego stulecia. Według planu m. st. Warszawy z r. 1829²⁾ można zupełnie dokładnie odtworzyć bieg Drny.

Źródła Drny znajdują się w okolicy położonej między cmentarzem Powązkowskim i cmentarzem żydowskim, koło zakładu dezynfekcyjnego na ul. Spokojnej. Stąd płynęła Drna w pobliżu skrzyżowania ul. Dzikiej i Konarskiego, przecinała tor kolejowy koło przejazdu na ul. Felińskiego tworząc na terenie

¹⁾ J. Lewiński Dyluwjum Polski i Danji.

²⁾ „Plan m. st. Warszawy wymierzony przez Oficerów Korpusu Inżynierji W. P. w r. 1829” w skali ok. 1:4.250, dostęp do którego zawdzięczam uprzejmości p. Gembarzewskiego dyrektora Muzeum Wojska.

Korzystałem również z mapy okolic Warszawy Perthéesa o ok. 1780 r.

stacji towarowej stawy. Dalej łączyła się ze strumykiem płynącym dzisiaj fosą Cytadeli, omijając od południowego wschodu plac Inwalidów i wpadając do Wisły nieco na północ od Cytadeli. Na odcinku od Dworca Gdańskiego aż prawie do ujścia istniał cały szereg stawów, wykorzystywanych, zdaje się dla celów przemysłowych.

Dziś z tej dolinki pozostało niewiele. Miejscami tylko widać lokalne obniżenia — reszta została zasypana i zniwelowana przy budowie Cytadeli (1834 r.), kiedy modyfikacji uległ głównie dolny bieg rzeczki, i przy budowie kolei obwodowej i głównego kolektora idącego ku Bielanom, (ok. 1885—90 r.) gdy porobiono znaczne zmiany w środkowym jej biegu.

Ponieważ zatamowano naturalny odpływ, wody Drny skierowano nową drogą; przekopano kanał idący równolegle do ul. Stołecznej, w pobliżu zaś b. rogatki Marymonckiej wykorzystano maleńki istniejący (plany 1820 — 1829 i inne) potoczek Półkówkę, wpadający zaraz za rogatką do aluwialnej doliny Wisły.

Obecna hydrografia tej okolicy w głównej więc mierze zawdzięcza swój układ człowiekowi. Kanał zaś idący równolegle do kolektora powstał już w drugiej połowie ubiegłego wieku.

* * *

Budowa geologiczna opisywanego terenu, jak widać na załączonej mapce, jest dosyć skomplikowana. Na niewielkim obszarze obejmującym około 3 km² mamy do czynienia z większością utworów znanych na terenie Warszawy i jej okolic.

Utwory przedlodowcowe.

W południowo-zachodniej części terenu, między Burakowem i budującą się cegielnią miejską, na dosyć znacznej przestrzeni, ukazują się typowe pstry ły pliocenu, (na poziomie ok. 102 m. n. p. m.) przykryte cienką, średnio 1 — 1,5 m. miąższości mającą, warstwę piasków z gładzikami północnymi.

Tworzą one wypiętrzenie, które nazywam Burakowskim.

Znane mi wychodnie łąw pstrych wypiętrzenia Burakowskiego układają się w dwa pasy, odpowiadające prawdopodobnie jądom mniejszych antyklin budujących wypiętrzenie.

Pierwszy — położony bardziej na południowy-zachód, zaczyna się w pobliżu reduty Burakowskiej starych fortyfikacji

Warszawy. Jest to pas, szerokości 100—150 m. prześledzony na przestrzeni blisko kilometra, o kierunku mniej więcej północno-zachodnim.

Iły pstre leżą płytko pod powierzchnią w fosach, z nich też głównie usypane są wały południowo-zachodniej części reduty.

Dalej widać je w licznych dołach, rozrzuconych między przedłużeniem ul. Burakowskiej i torem kolei do Młocin.

Iły te były dobrze odsłonięte w pobliżu przecięcia ul. Krasieńskiego i toru kolejowego. Wreszcie ukazują się one koło Instytutu Gazowego, gdzie były stwierdzone w czasie robót ziemnych przy zakładaniu rur wodociągowych.

Dalej ku południowemu-wschodowi pliocen nie ukazuje się więcej na powierzchni — jedynie dolna morena, stwierdzona w okolicy kolei obwodowej na dosyć wysokim poziomie, wskazuje, że wypiętrzenie przedłuża się dalej ku SE.

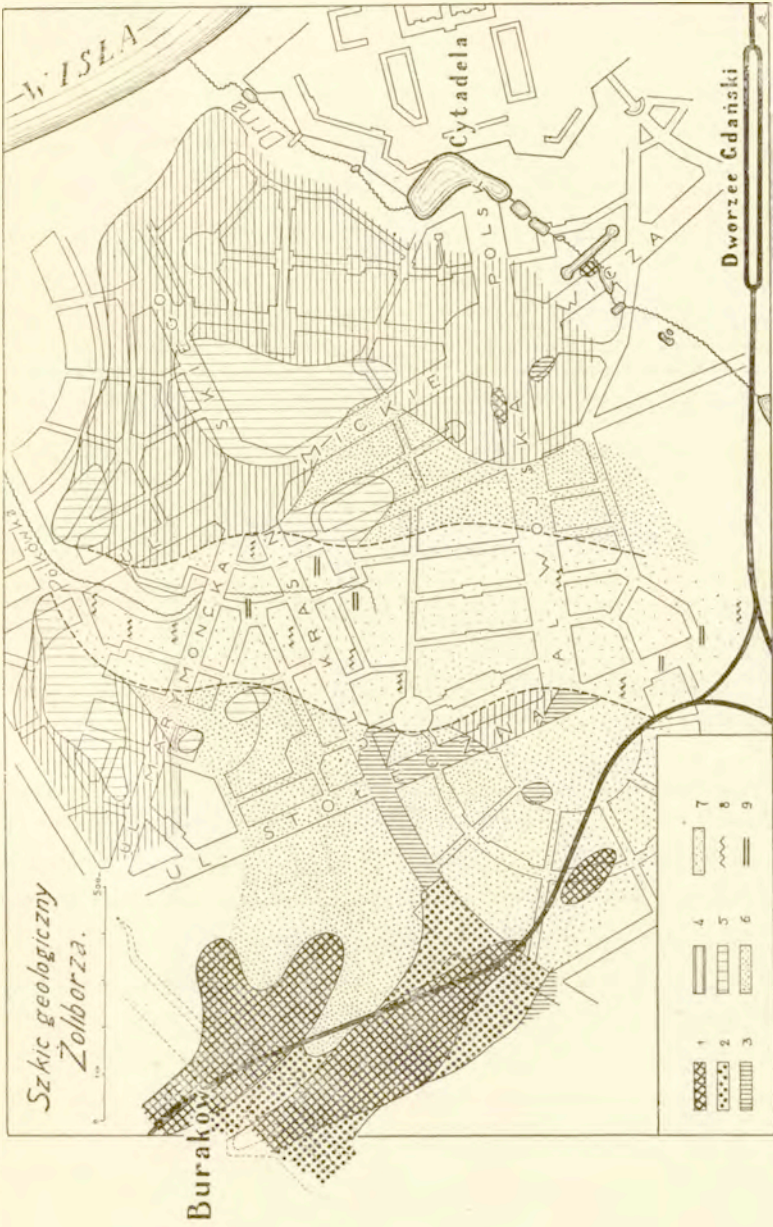
Drugi — północno-wschodni pas pliocenu, oddzielony od pierwszego utworami t. zw. preglacjału, został specjalnie dobrze odsłonięty na terenie cegielni miejskiej. Pozatem można było widzieć pstre iły w rowach koło toru kolejowego w pobliżu ul. Włociańskiej (Słodowiec) i w paru punktach na polach na S od cegielni.

Na łąkach pstrych, otaczając prawie ze wszystkich stron ich wypiętrzenia, leży preglacjał. Skomplikowana serja utworów wchodzących w jego skład, złożona jest ze żwirów z materiałem karpackim, piasków kwarcowych i jasno-szarych, czasem nie-

Rys. 1.

Szkic geologiczny Żoliborza. Skala 1:16000.

1. — Iły pstre — Posener Tone.
2. — Preglacjał — Präglazial.
3. — Dolna morena — Untere Moräne. (Mindel)
4. — Iły warwowe — Bandertone.
5. — óGrna morena — Obere Moräne. (Riss)
6. — Piaski — Sande.
7. — Piaski pokrywające utwory jeziorne — Sande die Seeablagerungen bedecken.
8. — Odsłonięcia margli jeziornych, ziemi okrzemkowej etc. — Aufschlüsse von Seemergel, Diatomeenerde u. s. w.
9. — Torfy — Torfe.



Rys. 1.

bieskawych lub zielonawych iłów. W jednym punkcie (na ul. Krasińskiego) skonstatowano obecność szczątków roślinnych.

Najlepsze odsłonięcie żwirów preglacjalnych znajduje się w fosach starych fortyfikacji na zachód od reduty i w pobliżu ulicy Burakowskiej.

Na razie brak danych, aby ustalić stosunek wypiętrzenia Burakowskiego do innych wypiętrzeń trzeciorzędu na terenie Warszawy. Wiemy jedynie, że wypiętrzenie Burakowskie, ma ogólny kierunek zbliżony do *NW—SE*, i że oś jego obniża się stopniowo ku *SE*, tak, że koło toru kolei obwodowej zaznacza się ono wyniesieniem dolnej moreny, a na ul. Błońskiej wiercenie stwierdziło już na nieznacznej stosunkowo głębokości obecność preglacjału.

Drugie wypiętrzenie utworów przedlodowcowych, mniej wyrazne, znajduje się na wschód od poprzedniego. Stwierdzono je licznymi wierceniami przy budowie mostów kolejowego i kołowego koło Cytadeli¹⁾, opisywane też było występowanie iłów pstrych stosunkowo niegłęboko pod powierzchnią w samej Cytadeli²⁾; nazywam je tedy wypiętrzeniem Cytadeli.

Pozatem znane mi są pstre ily w okolicy placu Inwalidów.

Widoczne one były na przestrzeni kilkudziesięciu metrów na dnie wykopu przy zakładaniu rur kanalizacyjnych po prawej (północnej) stronie Alei Wojska Polskiego³⁾. Widziałem je również, niestety tylko na hałdzie, nieco na *S* od placu, w miejscu gdzie ulica Mickiewicza przecina dawną dolinę Drny⁴⁾.

Preglacjał na obszarze wypiętrzenia Cytadeli jest dotychczas zupełnie nieznan. Dowodzi to pośrednio, że mamy do czynienia głównie z erodowaną powierzchnią trzeciorzędu, a na ul. Mickiewicza być może nawet z krą.

Wypiętrzenie Cytadeli jest prawdopodobnie dosyć skomplikowane w szczegółach, niestety fragmentaryczność wiadomości, które posiadamy o nim nie pozwala na wyjaśnienie bliżej jego budowy.

¹⁾ Na lewym brzegu Wisły erodowana (pod aluwiami) powierzchnia pliocenu leży ok. 75 m. n. p. m.

²⁾ Powyżej 73 m. n. p. m.

³⁾ Na poziomie ok. 95 m. n. p. m.

⁴⁾ Na poziomie ok. 90—92 m. n. p. m.

Utwory lodowcowe

Dolna morena występuje zwykle w pobliżu wypiętrzeń i prawdopodobnie sama bierze w nich udział.

Większy jej płat był dobrze odsłonięty na północno-wschodniem skrzydle wypiętrzenia Burakowskiego, przy robotach ziemnych w związku z budową sieci kanalizacyjnej.

Na ul. Z. Krasieńskiego w pobliżu przecięcia się jej z ul. Kawalerji, widać było naleganie starszej moreny bezpośrednio na utwory preglacialne.

Dalej ku wschodowi stwierdzono jej obecność wszędzie pod piaskami wydmowemi na południe od ogrodzenia Wojskowego Magazynu Radiotechnicznego. Sięga tu ona prawie aż do placu na zachodnim końcu ulicy Niegolewskiego (plac Henkla). Obserwowano tą morenę na przedłużeniu Al. Wojsk Polskich, na *NE* od Instytutu Gazowego (plac Grunwaldzki). Ponadto znana jest ona z profilu kolektora (patrz niżej). Koroniewicz i Sobolew widzieli ją również w przekopie kolejowym koło Powązek w pobliżu drogi do Burakowa (dziś ul. Burakowska).

W okolicy wypiętrzenia Cytadeli, udało się ją odnaleźć na ul. Felińskiego w pobliżu przecięcia się tej ulicy z Al. Wojsk Polskich, gdzie leżała ona pod iłami warwowemi — i na terenie b. fortu Jerzy, również w spągu tych samych iłów.

Charakter petrograficzny moreny dolnej jest nieco odmienny niż górnej. Prawie zawsze ma ona barwę ciemno-szarą, jest silnie ilasta, zbita i twarda na sucho — w przeciwieństwie do moreny górnej, żółto-brunatnej, czasem szarawo — lub zielonkawo-brunatnej, często piaszczystej i sypkiej.

Rzecz wątpliwa, czy wyżej wymienione cechy są istotnie cechami pierwotnymi, na podstawie których można odróżniać te moreny od siebie, czy też są one raczej wtórne, spowodowane większym stopniem zwietrzenia moreny górnej.

Jako cechę bardziej istotną i w wielu wypadkach mającą decydujące znaczenie przy rozstrzygnięciu sprawy wieku moreny, należy zdaje się uważać skład głazików zawartych w tej morenie

Nie rozporządzamy jeszcze w tej dziedzinie opracowaniami metodami w tym stopniu jak to zrobiono już dla Danji. Mamy jednak pewne wytyczne. Wielu naszych badaczy zwróciło już

uwagę na bogactwo głązów wapieni paleozoicznych w morenie dolnej i ubóstwo ich w górnej¹⁾.

To samo daje się obserwować i na Żoliborzu.

Morena, którą uważam za dolną, we wszystkich wypadkach zawiera dużą ilość głązków z wapieni paleozoicznych z fauną i ze śladami szlifu lodowcowego. Jak się zdaje, według przybliżonej tylko oceny, głązki wapienne stanowią ok. 30—40% głązków średnich wymiarów zawartych w morenie. Duże głązy (często średnicy 1—1^{1/2} metra) wydobywane z moreny składają się przeważnie ze skał krystalicznych.

Pozatem wiek moreny, jako dolnej, definiuje jej położenie w stropie preglacjału (ul. Krasińskiego) i w spągu iłów warwowych (kolektor A₂, ul. Felińskiego b. fort Jerzy).

Iły warwowe są bardzo rozpowszechnione w całej środkowej i wschodniej części terenu. Leżą one najczęściej na dolnej morenie, a na Al. Wojsk Polskich, koło placu Inwalidów, przykrywają bezpośrednio pstre iły pliocenu.

Z pośród licznych odsłoneń iłów warwowych wymieniamy tu tylko parę ważniejszych.

Dobre odsłoneńca znajdują się koło Marymontu w dużej odkrywce równoległej do ul. Potockiej. Widać tu bezpośrednio pod górną moreną, niezgodnie przez nią ścięte, drobnoziarniste piaski warstwowane z parodecymetrowymi wkładami bardziej ilastymi, ku dołowi przechodzące w iły warwowe typu zbliżonego do iłów warwowych z Woli i Odolan.

Przy niwelowaniu ulicy Mickiewicza ku północy od ul. Książna, zrobiono parometry wykop ze wschodniej strony ulicy. W odległości ok. 300 m. od placu można było obserwować szczyt antykliny, po obu stronach której iły warwowe zapadały w przeciwnych kierunkach. Na południowym zaś skrzydle tej antyklinki, bliżej placu Wilsona, widać było szereg niewielkich uskóków.

Dyzlokacje te znajdują się w strefie ok. 300—400 m. od krawędzi doliny i związane są niewątpliwie z osuwiskami i spływami, tak często obserwowanymi na brzegach Wisły.

¹⁾ Nie należy uważać, że wapienie są całkowicie nieobecne w morenie górnej. Trafiają się one jednak w niej tylko z rzadka, np. na Woli w nieczynnej cegielni Merenholca, jak zwrócił już na to uwagę p. S a m s o n o w i c z

Na całym wyżej opisywanym odcinku ły warwowe pokryte były bezpośrednio przez piaski z głazami; górnej moreny nie było tu widać nigdzie. Ukazuje się ona dopiero bliżej krawędzi tarasu na poziomie ok. 8—10 m. n. p. W. i jak stwierdzono przy kopaniu fundamentów w pobliżu skrzyżowania ul. Sułkowskiego i Tucholskiej, leży w stropie znanych już nam łów warwowych.

Na Żoliborzu Oficerskim, w okolicy ulic Haukego, Fortecznej i Wygon (Kaniowskiej) przy budowie domów w wielu miejscach odsłonięto ły warwowe.

Występują one również na ulicy Felińskiego i na Al. Wojsk Polskich oraz w fosach b. fortu Jerzy.

Znamy je wreszcie z dużego odsłonięcia, koło Dworca Gdańskiego, gdzie eksploatowano je na nasypy kolejowe.

Prócz tego, już na peryterji naszego terenu, stwierdzono obecność warw przy budowie kolektora na ulicach Okopowej i Młocińskiej.

W północnej części terenu górna morena jest bardzo silnie zniszczona i zachowała się jedynie w strzępach.

Spory jej płat leży w wymienianem już odsłonięciu koło Marymontu. Na zboczu, bliżej Wisły miąższość moreny wynosi do 4 metrów — zmniejsza się jednak stopniowo w miarę zbliżania się ku ul. Marynonckiej i przy samej ulicy morena ginie, tak, iż bezpośrednio pod glebą i piaskami leży ły warwowy. Jedynie w okolicy placu Chrobrego zachowało się nieco spiaszczonego i odwapnionego marglu zwałowego.

Z moreny zbudowana jest również górna część wzgórza na którym stoi b. fort Sergiusz (na *E* od placu Wilsona).

Zwartą masą leży górny margiel lodowcowy dopiero w wyższej, południowej części terenu, jak np. w okolicy Muranowa i Szpitala Żydowskiego. Brak go jednak na terenie dawnej dolinki Drny.

Profil kolektora.¹⁾

W rozdziale poprzednim omówiliśmy utwory przedlodowcowe i lodowcowe, teraz z kolei wypada nam opisać bardzo ciekawą

¹⁾ Profil kolektora został zestawiony na podstawie danych zbieranych na miejscu przy budowie, oraz profili i informacji udzielanych przez p. inż. Skoraszewskiego, któremu składam w tem miejscu podziękowanie, za

serję jeziorną, najlepiej i najkompletniej odsłoniętą w wykopie przy budowie nowego kolektora.

Początek (t. zw. „O”) budowy znajduje się na przecięciu się osi ul. Krasińskiego i ulicy Stołecznej. W pobliżu „O” pod piaskami spoczywa opisywana już starsza morena, która w miarę posuwania się ku południowi, zapada stopniowo wgłąb — leżący zaś w jej stropie jasno-szary ił warstwowany jednocześnie grubieje i między 280 i 400 m. zajmuje całą głębokość wykopu. Za 400-wym metrem iły warwowe zaczynają cienieć i z pod nich wynurza się znowu dolny margiel zwałowy. Morena ta widoczna była na dnie wykopu aż do 550-ego metra, gdzie bezpośrednio na niej leżały utwory jeziorowe.

Poczynając nieco przed 500-nym metrem, aż do 1030-ego (za torem kolei Obwodowej), a więc na przestrzeni przeszło pół kilometra wykop przecina soczewkę torfów i serję utworów jeziornych. Leżą one, jak to widać na załączonym profilu, w płaskim miskowatym (nieco asymetrycznym) zagłębieniu, wyżłobionem w iłach warwowych i starszej morenie.

Przy sporządzaniu profilu można tu było wyróżnić następujące utwory:

G. Piasek szary — miejscami ilasty. Leży bezpośrednio na morenie oddzielając ją od warstwy F.

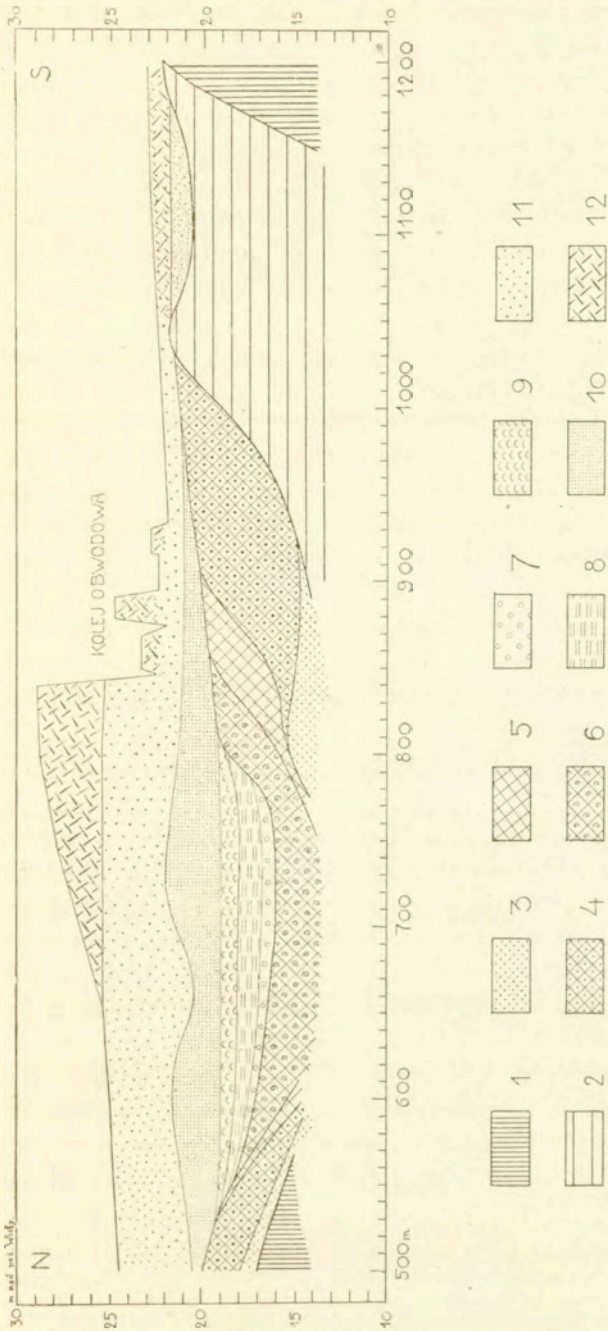
Mięszczość jego w północnej części wykopu wynosi ok. 1 metra; w południowej (820—830 m.) dochodzi do 1,5 m.

F. Gлина piaszczysta, szarawo-zielonkawa, zbita, niewarstwowana, z nieregularnie rozrzuconymi kawałkami drzewa i pokruszonymi skorupkami ślimaków. W części położonej bliżej brzegu glina ta jest prawie zupełnie odwapniona i czasem zawiera żwir i gładziki, przypominając wtedy swoim wyglądem morenę.

Na północnym brzegu mięszczość tej warstwy wynosi ok. 2,0 m. — na południowym zaś do 5,0 m.

E. Margiel jeziorowy ciemno-szary, czasem zielonkawy, bitumiczny z domieszką piasku zmniejszającą się w miarę oddalania się od brzegu.

wszystkie ułatwienia doznane przy wielokrotnym odwiedzaniu kolektora, jako też za przekazanie do Muzeum Zakładu Geol. i Pal. U. W. znalezionych w czasie robót szczątków ssaków, które wzbogaciły gromadzone już od wielu lat zbiory ssaków dyluwialnych okolic Warszawy.



Rys. 2.

Profil kolektora A₂

1. Morena dolna — Untere Moräne. 2. Ily warwowe — Bändertone. 3. Piaski „G” — Sande „G”.
4. Gлина piaszczysta „F” — Sandige Lehm „F”. 5. Margiel jeziorny „E” — Seemergel „E”. 6. Margiel jeziorny z fauna „D” — Seemergel mit Fauna „D”. 7. Torf bagienny „C” — Moortorf „C”. 8. Torf z drzew „B” — Waldtorf „B”. 9. Torf z mchów „A” — Moostorf „A”. 10. Piaski drobnoziarniste — Feinsande. 11. Piaski średnie — Mittlere Sande. 12. Nasypy — Aufgeschütteter Boden.

- D. Margiel jeziorowy, jasny niebieskawo-szary, często prawie biały — bez domieszki piasku. Wypełnia środkową część niecki (540—820).

Zawiera bardzo bogatą faunę ślimaków. Wedle Polińskiego występują tu masowo: *Valvata antiqua* Sow. *Gyraulus albus* Müll. *Hippeutis complanatus*, oraz mniej liczne *Bythinia tentaculata* (f. jeziorna) *Spiralina vorticulus* Trosch., *Unio tumidus* (f. pojeziorna) etc.

Równie obfite są szczątki roślin, głównie pięknie zachowane nasiona. Stąd pochodzi, wzmiankowana przez Szafera, bogata flora leśna z grabem, bukiem, cisem i olchą.

Dolne (D_3) i środkowe (D_2) warstwy marglu wyglądem zewnętrznym nie różnią się prawie zupełnie od siebie. Warstwa górna (D_1) zawiera miejscami ciemniejsze, bardziej bitumiczne wkładki i ma naogół barwę bardziej szarą.

W okolicy 750 metra część margli D_1 przybiera zabarwienie tabaczkowo-brązowe i widać wtedy w nich ślady warstwowania, których zupełnie brak w reszcie margli.

- C_3 — D_1 . Przejście od margli do torfu rozpoczyna się częściowo już w D_1 , i odbywa się dosyć szybko, tak, że warstwa pośrednia miewa zaledwie parę centymetrów. Jedynie w najgłębszej części niecki, w pobliżu 700-nego metra tworzy się specjalny utwór złożony z jasnego marglu przekładanego cienkimi warstewkami mchów.

Fauna w porównaniu z D jest uboższa. Obok *Valvata antiqua* i *Gyraulus albus* występują tu już *V. piscinalis* Müll i *G. glaber* Jeffr.

- C. Torf „bagienny”, czarny, zbity, substancja roślinna jest już dość silnie zmieniona i tworzy masę bitumiczną wśród której trudno rozpoznać poszczególne składniki.

Fauna ślimaków, która tu jest dosyć obfita, zmienia swój charakter. Miejsce wygasających już form jeziornych zajmują formy charakterystyczne dla mokrych łąk.

Flora również wskazuje na środowisko bagiennie (*Carex* div. sp.).

W pobliżu północnego brzegu (540—570) torf ten przechodzi w odmianę silnie piaszczystą — właściwie piasek humusowy barwy ciemno-brązowej.

Górna część torfu dolnego (C_1) zawiera rzadka kawałki drzewa.

- B. Torf barwy ciemnej, w głównej masie złożony z detryktusu drzew. Znajdowano tu silnie spłaszczone kawałki pni drzewnych do pół metra średnicy, oraz dużo gałęzi z dobrze zachowaną korą.

W pobliżu punktu 590 w torfie tym znaleziono sporo orzeszków leszczyny.

Z tej też warstwy pochodzą, zdaje się, dość liczne szczątki ssaków. Są to ¹⁾.

1) szereg fragmentów rogów jelenich;

2) lewa kość biodrowa nosorożca.

Pozatem spory fragment pancerza żółwia.

Fauna ślimaków staje się bardzo uboga. Znaleziono tu *Cepaea vindobonensis* Fér., z tej też części torfów pochodzi prawdopodobnie *Pirostoma ventricosa* Drap.

- A. Torf z mchów, z soczewkami drobnoziarnistych piasków. Miejscami na torfie widać niebieskie plamy wivianitu.

W dolnej części (A_3) rzadka trafiają się jeszcze małe ułamki drzewa.

Torfy A_2 i A_3 mają barwę ciemno-brunatną, łądźki mchów są naogół pokruszone i częściowo zwęglone. Najwyższa część torfów (A_1) ma barwę jasno-brunatną i dzieli się na dobrze sprasowane warstewki.

Fauny, poza szczątkami chrząszczy — niema.

Górna powierzchnia torfu jest zupełnie równa (poziom ob. 19 m. n. p. Wisły).

Mięszość torfów *A B i C* razem wynosi średnio ok. 2,5 m. Maksimum koło 700-nego metra 3,0 m.

Poszczególne warstwy są niejednakowej grubości. Największą grubość ma naogół torf *B* (1,0—1,2 m.), warstwy *A i C* są nieco cieńsze (*A*: 0,8—1,1 m. i *C*: 0,6—0,7 m.).

¹⁾ Fauna ssaków nie jest dotąd opracowana. Podane tutaj oznaczenia mają charakter prowizoryczny.

W stropie torfów leżą drobnoziarniste, doskonale otoczone, pozbawione domieszek ilastych, piaski kwarcowe miąższości do 3 m. Ponad nimi, oddzielone od nich dosyć ostrą granicą, widzimy piaski o średniej wielkości ziarna, w najwyższej części przerobione eolicznie.

Grubość piasków jest zmienna. W części północnej (500-ny metr) wynosi 4,5 m. — koło toru kolei (840-ty m.) razem z nasypem z r. 1919—1920, długości 200 m. oddzielnym od piasków głębszych przez glebę, 7,5 m. (w tem 3,5 m. nasypu); w części południowej (1204 m.) 1,5 m.

Od 1030 m. poczynając wykop idzie znowu w iłach warwowych, które stwierdzono już na 950 metrze w spągu warstw jeziornych.

Na powierzchni iłów warwowych, między 1065 i 1160 metrem znajduje się niegłęboka niecka wypełniona kurzawką. Pierwotnie wytłumaczenie tego faktu nastęczało trudności. Poszukiwania na starych planach dały wyjaśnienie.

Okazuje się, że kurzawka ta powstała w miejscu istniejącego tu dawniej jeziora, o którym wspomina w „Słowniku Geograficznym” Chlebowski, a które ostatecznie zostało zasypane około r. 1890¹⁾.

Niedochodząc 1200 metra ily warwowe kończą się. Otwór świdrowy założony na 1204 metrze, pod 1,5 m. warstwą piasków stwierdził dużą (ponad 12 m.) miąższość ciemno-szarego marglu morenowego, wynurzającego się z pod warw.

Margiel zwałowy występuje na pewnej przestrzeni wkraczając częściowo na ul. Młocińską.

Na ul. Młocińskiej w kolektorze występują znowu warwy, których, w pobliżu skrzyżowania ul. Okopowej i Powązkowskiej, nie przebito do głębokości 10 m.

Na ul. Okopowej przy przecięciu się jej ze Spokojną kolektor znowu zachaczył o utwory jeziorne. Występują tu mianowicie piaszczyste gliny z ułamkami drzewa, zupełnie analogiczne do glin *F* profilu.

¹⁾ Jezioro to jest jeszcze zaznaczone na mapie 1:25.000.

Utwory jeziorne na Żoliborzu poza Kolektorem.

Serja utworów odsłoniętych w kolektorze koło toru kolejowego, znana jest jeszcze z wielu innych punktów na terenie Żoliborza.

Na Al. Wojsk Polskich ok. 200 m. ku zachodowi od skrzyżowania z ul. Felińskiego, w rowach przy zakładaniu kanalizacji, odsłonięto na przestrzeni przeszło 100 metrów piaszczysty margiel jeziorny bez fauny odpowiadający warstwie *E*.

Przy kopaniu fundamentów na ul. Niegolewskiego w pobliżu przecięcia się jej z kanałem, znaleziono j. szary margiel jeziorny z fauną ślimaków (odpowiednik *D*) w spągu zaś jego leży ciemny, bitumiczny margiel prawie pozbawiony fauny (*w. E*).

W czasie robót kanalizacyjnych na ulicy Kossaka bezpośrednio pod piaskami leży margiel jeziorny *D*. Na tej samej ulicy, nieco bliżej ul. Hozjusza, niedochodząc kościoła, na dnie wykopu widać torf z kawałkami drzewa (torf *B*).

Nieco na południe od kościoła w czasie budowy odsłonięto górną powierzchnię torfów. Torf ten odpowiada torfowi *A* i analogicznie jak tamten złożony jest prawie wyłącznie z mchów.

Na ul. Krasińskiego, przy robieniu wykopów dla fundamentów III Kolonji Warszawskiej Spółdzielni Mieszkaniowej, można było obserwować kontakt piasków wydmowych i marglu jeziornego *D*, którego powierzchnia uległa silnemu zniszczeniu.

Dzięki uprzejmości zarządu Warszawskiej Spółdzielni Mieszkaniowej miałem możność zapoznania się z profilami trzech wierceń robionych na terenie II kolonji.

I wiercenie leży 40 m. ku zachodowi od ulicy Ustronie i 70 m. na południe od ulicy Marymonckiej.

14,7 m. nad poziomem Wisły = 91,7 m. n. p. morza.

	O— 1,20	Piasek kwarcowy	1,20
	1,20— 1,60	Piasek bitumiczny (torf piaszczysty)	
<i>C</i>		z fauną ślimaków	0,40
	1,60— 2,65	Piasek jasno-szary, średni.	1,05
<i>E</i>	2,65— 5,95	Margiel jeziorowy biały	3,30
<i>F</i>	5,95— 7,55	Gлина piaszczysta żółto-szara.	1,60
<i>G</i>	7,55—10,05	Piasek średni, ilasty, wodonośny	2,50
	10,05—12,85	Margiel lodowcowy szary z gładzikami	2,80
	12,85—21,50	Ił warwowy jasno-szary z miką	8,65

Warstwy z głębokości 1,20—10,05 dobrze odpowiadają profilowi kolektora. Ważnym momentem w tym otworze świdrowym jest obecność pod utworami jeziornymi moreny.

Morena ta jak na górny margiel zwałowy leży na wyjątkowo niskim poziomie¹⁾, jednak przekonywującym dowodem jest jej położenie w stropie iłów warwowych, które występują wszędzie w okolicy i są iłami warwowymi leżącymi w spągu górnej moreny. Niskie zaś położenie górnego marglu lodowcowego zarówno jak i utworów jeziornych spowodowane jest „pseudodyzlokacjami” które notowaliśmy już w tej okolicy, a których główną przyczyną jest bliskie ongiś sąsiedztwo Wisły.

II wiercenie na rogu ul. Marymonckiej i Ustronie.

	16,7 m. n. p. W. = 93,7 n. p. m.	
O—3,90		3,9
3,90—5,17	Glina szara piaszczysta ze żwirkiem, marglista	1,27
5,17—5,48	Ił szary marglisty	0,31
5,48—6,75	Margiel zwałowy szary, piaszczysty . .	1,27
Wiercenie to nie przebiło górnego marglu zwałowego.		

III wiercenie na terenie II kolonii, na placu Wilsona w równej odległości od ul. Marymonckiej i Krasińskiego.

	16,1 m. n. p. W. = 93,1 n. p. m.	
O— 1,50		
1,50— 3,58	Glina szara z okruchami marglu jeziornego	2,08
3,58— 4,31	Ił warwowy drobnopiaszczysty.	0,73
4,31— 7,86	„ tłusty, szaro-brunatny.	3,55
7,86—12,56	„ drobnopiaszczysty z bardziej tłustymi warstewkami	4,64

Górnego marglu lodowcowego w tem otworze już niema. Bezpośrednio pod gliną, prawdopodobnie odpowiadającą glinie F profilu kolektora, leżą iły warwowe tego samego typu co w wierceniu I i w sąsiednich odkrywkach.

Na lewym brzegu dolinki, koło (zburzonej w tym roku) b. roгатki marymonckiej, w paru miejscach odsłaniają się jasnoszare, prawie białe margle z okrzemkami. W spągu tej warstwy widać było dawniej piaszczysty margiel z fauną drobnych ślimacz-

¹⁾ 1,85—4,65 n. p. W.

ków (próbka tego marglu jest przechowana w zbiorach Zakładu Geologii i Paleontologii U. W.).

Mięszczość margli okrzemkowych jest zmienna. W odkrywkach położonych koło ul. Marymonckiej dochodzi ona do 2 metrów. Na krawędzi zaś, bliżej ul. Mickiewicza jest znacznie mniejsza i wynosi zaledwie parę centymetrów.

W tej okolicy, w odległości ok. 30 metrów od krawędzi, na brzegu Polkówki w pobliżu skrzyżowania ul. Mickiewicza i ul. Żółkowskich widać było następujący profil: ¹⁾

1. Piasek szarawo-żółty (deluwialny, częściowo przerobiony eolicznie) 0,5—1,0 m.
2. Gлина marglista warstwowana brunatna 0,35
3. Margiel biały z okrzemkami, przedzielony brunatną warstwą 0,05
4. Piaski margliste, jasno-żółte z rzadkimi gładzikami 0,3—0,5
5. Żwir przekątnie warstwowany, w jednym miejscu z dużą soczewką orsztynu 0,6—1,0
6. Piaski warstwowane.

Około 15—20 m. w bok, ku krawędzi (na północny-wschód) pod piaskami jak w wyżej przytoczonym profilu w. 1. grubości ok. 0,5 m., leżą piaski średnie i drobne, nieco ilaste, warstwowane, odpowiadające w. 6. mięszczości 2,0—2,5 m. Pod nimi widać zielonkawo-brunatną morenę z gładzikami, na samej już krawędzi tarasu odsłoniętą do 3 metrów.

Jest to górna morena, wiążąca się z jednej strony z moreną leżącą w odkrywce koło Marymontu, z drugiej zaś z moreną na prawym brzegu dolinki (patrz str. 15).

W przekopie kolejowym koło Powązek, na *NE* od drogi do Burakowa, Koroniewicza i Sobolew widzieli dwumetrową warstwę torfu z dużymi gałęziami drzew, leżącą w stropie ciemnoszarego marglu morenowego.

W zbiorach Politechniki ²⁾ zachowały się próbki tego torfu, odpowiadające torfowi *B* kolektora.

¹⁾ Opisany po raz pierwszy przez Amalickiego w 1892 r.

²⁾ Za życzliwość z którą udostępnił mi p. prof. T. Wojno zbiory Koroniewicza składam serdeczne podziękowanie.

Morena tu odsłonięta jest prawdopodobnie moreną dolną, tą samą którą stwierdzono w okolicy 1204-go metra w kolektorze ¹⁾.

Dziś w miejscu gdzie było odsłonięcie torfów, założono kopalnię piasku dla kolei. Wykop posunął się już dość daleko (ok. 200 m.) od toru. Widać w niem piaski, w środkowej mniej więcej części zawierające warstwę piasku z otoczakami iłu trzeciorzędowego (pstry, plastyczny ił zupełnie nie burzący się z HCl). Otoczaki te mają przeciętnie wielkość pięści, znajdowano jednak i większe, wielkości głowy dziecka. Powierzchnia otoczaków jest pokryta „bruczkiem” ze żwiru dyluwialnego.

Co do wieku tych piasków brak jeszcze danych stwierdzających ich wiek z całą pewnością; zdaje się jednak, sądząc z cytowanego przez Koroniewicza profilu, że leżą one pod górną moreną.

Na powierzchni, na znacznej przestrzeni naszego terenu leżą niegrubą warstwą piaski wydmore, przykrywające wychodnie wszystkich innych utworów. W północno-zachodniej części terenu, na południe od cegielni miejskiej widać parę niewielkich, częściowo już rozwianych, wydemek.

* * *

Poza obrębem Żoliborza interglacjał tego samego typu występuje i w innych częściach Warszawy.

Na Woli ²⁾ na terenie gazowni w wierceniu pod 4 do 7 m. piasków leżą torfy (do 4 m.) i „gliny niebieskie” (1,8 m.), które jak można było sprawdzić na podstawie próbek przechowanych w zbiorach Zakładu Geologii i Paleontologii U. W., są marglem jeziornym, bardzo zbliżonym do dolnego marglu jeziornego na Żoliborzu.

Ogólna miąższość tych utworów waha się od 5 do 11 metrów. Prócz gazowni nawiercono jeszcze torfy na ul. Wolskiej 43 ³⁾ i przy ogrodzie Oma ⁴⁾.

¹⁾ Obie wychodnie leżą na przedłużeniu osi wypiętrzenia Burakowskiego.

²⁾ Rychłowski. „Materiały do” Otw. św. Nr. 1243—1252.

³⁾ Koroniewicz i Sobolew. „O lednikowych” str. 41.

⁴⁾ Siemiradzki. „Zarys” Nr. 107.

Dalej należą tu niewątpliwie znane z literatury punkty występowania interglacjału na Czystem i na Szczęśliwicach.

Sz szczególnie uderzające jest podobieństwo profilu na Szczęśliwicach i na Żoliborzu.

W obu wypadkach od utworów starszych (na Szczęśliwicach iłów warwowych, za które trzeba uważać „glinę strycharską” dobrą do wyrobu cegieł) oddzielone są niegrubą warstwą piasków i glin (*G* i *F*). Margle jeziorne¹⁾ zawierają faunę ślimaków, której skład, wedle oznaczeń Ślusarskiego, bardzo przypomina faunę żoliborską.

Zarówno na Żoliborzu jak i na Szczęśliwicach znaleziono dość liczne szczątki ssaków dyluwialnych.

W stropie torfów, na Szczęśliwicach, leży „piasek z mułem” i „gлина piecówka” (tak nazywają w okolicach Warszawy piaszczystą glinę, często silnie spiaszczoną morenę, nie nadającą się do wyrobu cegieł) jest to prawdopodobnie materiał solifukcyjny z moreny górnej występującej w sąsiedztwie na nieco wyższym poziomie.

Rezultaty pracy niniejszej można ująć w następujących punktach:

I. Stratygrafia dyluwium na terenie Żoliborza jest analogiczna jak w niezaburzonych częściach Warszawy.

Na iłach poznańskich i na preglacjałe, w skład którego wchodzi żywy z materiałem karpackim, piaski kwarcowe i szare lub zielonawe ily (czasem ze szczątkami roślin), leży bogata w głąziki z wapieni paleozoicznych morena dolna. Morena ta jest oddzielona od górnej dosyć grubym kompleksem iłów warwowych i piasków drobnoziarnistych warstwowych. Silnie zniszczona górna morena zachowała się jedynie w strzępach rozrzuconych po całym prawie terenie.

II. Utwory starsze tworzą dwa wypiętrzenia, które nazywam wypiętrzeniem Burakowskim i wypiętrzeniem Cytadeli.

Wypiętrzenie Burakowskie rozpada się na antykliny o jądrach zbudowanych z iłów pstrych i nieckach wypełnionych preglacjałem.

W wypiętrzeniu Cytadeli znany jest wyłącznie pliocen. Fragmentaryczność danych, które posiadamy o nim niepozwala bliżej określić jego charakteru.

¹⁾ „Margiel łąkowy“ Ślusarskiego.

Morena dolna występuje w obrębie wypiętrzeń, zaś ily warwowe leżą głównie w depresji między wyżej wymienionemi wypiętrzeniami.

Kierunek wypiętrzeń jest zbliżony do *NW—SE*.

III. W środkowej części terenu, między opisanemi wypiętrzeniami z *SSW* na *NNE*, leżą wydłużonym pasem osady jeziora żoliborskiego, wiek których jako młodszy od górnej moreny ustalają profile w północnej części terenu (str. 21 i 23).

Jezioro żoliborskie, ze swoją florą i fauną wskazującą na klimat cieplejszy i wilgotniejszy od obecnego, istnieje w interglacjale *Riss—Würm*, gdyż jak wynika z paralelizacji zlodowaceń, przeprowadzonej ostatnio przez prof. Lewińskiego, nasza t. zw. górna morena (L_4) w okolicach Warszawy jest odpowiednikiem zlodowacenia *Riss*'u.

Zlodowacenie *Würmskie* do Warszawy nie doszło, pozostawiając interglacjał żoliborski, podobnie jak interglacjały duńskie typu *Brörup*, poza granicami swego maksymalnego zasięgu.

Wśród osadów pozostawionych przez jezioro możemy znaleźć odpowiedniki prawie całego cyklu intergracjalnego.

Najniżej leżące stratygraficznie piaski i gliny piaszczyste *G* i *F* pochodzą z wczesnych stadjów i osadziły się zaraz po cofnięciu się lodowca *Riss*'u.

Na nich leżą ciemno-szare, często piaszczyste margle jeziorawe bez fauny (warstwa *E*), przechodzące ku górze w takież margle z bardzo bogatą fauną ślimaków i szczątkami roślin (głównie nasiona) świadczące o silnym rozwoju, w owym czasie lasów liściastych. Warstwa ta odpowiada mn. w. optimum klimatycznemu.

Torfy (*C* i *B*) zarastają wypełnione już przez osady jezioro (najpierw torfy „bagienne” potem „drzewiaste” ze szczątkami nosorożca, jeleni i żółwia) i reprezentują one już drugą część interglacjału. Górne zaś, prawie wyłącznie z mchów złożone partje torfu („stadjum bezleśnego torfowiska“¹⁾) zapowiadają już nową falę chłódów — transgresję *Würmu*.

Fazie samego zlodowacenia odpowiadają, prawdopodobnie przynajmniej częściowo, piaski leżące powyżej torfów.

¹⁾ Poliński l. c.

Jezioro, którego część została opisana, ciągnęło się znacznie dalej ku południowi (Wola, Czyste) i sięgało aż do Szczęśliwic.

Praca niniejsza została wykonana, pod kierunkiem p. prof. dr. J. Lewińskiego, który wielokrotnie wspierał mnie swym doświadczeniem i radą, udzielając mi swych nadzwyczaj cennych wskazówek i wyjaśnień, bez których praca ta nie mogłaby dojść do skutku. Panu Profesorowi składam w tem miejscu najserdeczniejsze podziękowanie, za kierownictwo i całą okazaną życzliwość.

Z zakładu Geologii i Paleontologii
Uniwersytetu Warszawskiego.

Stefan Zb. Różycki.

Das Interglazial von Żoliborz bei Warschau

Présentée par J. Lewiński le 21 février 1929.

Résumé

Der Verfasser hat die quartären Ablagerungen von Żoliborz, eines nördlichen Teiles von Warschau, beschrieben und ist zu folgenden Schlüssen gekommen:

I. Die Zusammensetzung des Diluviums in Żoliborz ist dieselbe, wie in jenen Teilen von Warschau, die ungestört sind. Den Posener Tonen und den präglazialen Ablagerungen, die aus Kiesen mit karpathischem Material, Quarzsanden und grauen oder grünlichen Tonen bestehen (manchmal mit Pflanzenresten), liegt die untere Moräne auf, die zahlreiche Geschiebe aus paläozoischen Kalksteinen führt. Die untere Moräne ist von der oberen durch genug mächtige Bändertone und feine geschichtete Sande abgetrennt. Die obere Moräne ist stark zerstört und ist nur in nicht zusammenhängenden Fetzen erhalten.

II. Die älteren Ablagerungen bilden zwei Rücken, deren westlicher aus zwei Antiklinen besteht, in deren Kern Posener Tone anstehen, allseitig von Präglazial umgeben. In der östlichen Erhebung des Untergrundes steht nur das Pliozän an. Die untere Moräne tritt nur in der Nähe der Rücken auf, die Bändertone liegen in der Senke zwischen den beiden Rücken.

Die Richtung der Rücken ist fast genau *NW—SE*.

III. Zwischen diesen beiden Erhebungen zieht sich von *SSW* nach *NNO* ein Streifen von Seeablagerungen, deren Alter durch Profile im nördlichen Teile des Terrains als jünger als die obere Moräne festgestellt ist. Der See von Żoliborz mit seiner Fauna und Flora, die auf ein wärmeres und feuchteres Klima als das jetzige weisen, bestand während des Riss—Würm, Interglazials da wie es von Lewiński gezeigt wurde, die obere Moräne der Umgegend von Warschau zur Riss — Vereisung gehört. Die Würm-Vereisung ist bis Warschau nicht vorgestossen, und das Interglazial von Żoliborz wurde durch seine Ablagerungen nicht bedeckt.

Die Seeablagerungen entsprechen fast einem ganzen Interglazialen Zyklus. Die am tiefsten liegenden Tone und Sande (*G* und *F*) wurden gleich nach dem Rückzug des Riss-Inlandeises abgelagert. Sie werden durch dunkelgraue oft sandige Mergel ohne Fauna bedeckt (*E*); dann folgen ebensolche Mergel mit einer sehr reichen Fauna von Seechnecken und mit Pflanzenresten (hauptsächlich Samen), die von einer starken Entwicklung von Laubwäldern zeugen (*D*). Diese Schicht entspricht ungefähr dem Klimaoptimum.

Der durch die obigen Ablagerungen fast zugefüllte See ist dann vertorft: anfangs wurde Moortorf gebildet, dann entstand Waldtorf mit Resten von Rhinoceros, Hirsch und Schildkröten (Schichten *C* und *B*); der Torf entspricht schon dem zweiten Teile des Interglazials. Die obersten Torflagen, die fast ausschliesslich aus Moosen bestehen, künden schon die neue Kältewelle der Würm-Vereisung an. Der Vereisung selbst entsprechen, wenigstens zum Teil, die den Torf bedeckenden Sande.

Aus dem Geologisch-Paläontologischen Institut
der Universität Warschau.

LITERATURA

- 1 — 1892 — W. Amalickij — O lednikowych otłożenijach okrestnostej Warszawy.
Prot. Warsz. Obszer. Jestestwoispytatielej t. VI. prot. 5.
- 2 — 1895 — J. Siemiradzki — Zarys geologii Warszawy.
Pamiętnik Fizjograficzny t. XV.

- 3 — 1817 — B. Rychłowski — Materiały do Hydrologji etc.
- 4 — 1926—27 (1914) — P. Koroniewicz i D. Sobolew — O lednikowych otłożeniach okrestn. Warszawy.
- 5 — 1926 — W. Poliński — O faunie malakologicznej utworów czwartorzędowych na Żoliborzu pod Warszawą.
Posiedzenia P. I. G. Nr. 16.
- 6 — 1927 — J. Samsonowicz — „Przewodnik geologiczny po okolicach Warszawy”. Wstęp ogólny, str. 59—62.
- 7 — 1927 — A. Łuniewski — tamże — Wycieczka I, str. 71.
- 8 — 1928 — W. Szafer — Zarys stratygrafji polskiego dyluwium na podstawie florystycznej.
V Rocznik Polsk. Tow. Geolog.
- 9 — 1928 — J. Lewiński — Dyluwium Polski i Danji.
tamże¹⁾.

Antoni Łaszkiewicz.

Przyczynki do morfologii minerałów Tatr Polskich.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 31 stycznia 1929.
Patrz Archiwum Mineralogiczne 4 (1928) 124.

Contribution à la morphologie de quelques minéraux du Tatra Polonais.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt le 31 janvier 1929.
V. Archive de Minéralogie 4 (1928) 124.

¹⁾ Praca prof. J. Lewińskiego będzie drukowana w następnym roczniku P. T. G. t. VI za rok 1929.

Posiedzenie

z dnia 21 lutego 1929 roku

Jan Lewiński i Stefan Zb. Różycki.

Dwa profile geologiczne przez Warszawę.

(Wiadomość tymczasowa)

Przedstawił J. Lewiński dn. 21 lutego 1929 r.

Przedewszystkiem na tem miejscu składamy podziękowanie Panu Prezydentowi m. st. Warszawy, p. inż. Słomińskiemu, który przekazał Zakładowi Geologii i Paleontologii Uniwersytetu Warszawskiego badania wszystkich głębszych wierceń i wykopów, wykonywanych w mieście przez Magistrat Warszawy. Dzięki niemu mogliśmy zebrać materiały, dotyczące geologii miasta, znacznie bardziej szczegółowe i dokładne od dawniejszych; zarazem składamy podziękowanie p. inż. Przychodzkiemu i Chrzanowskiemu za życzliwą pomoc. Zanim będziemy mogli przystąpić do opublikowania całości obfitego materiału, podajemy wyniki naszych badań wzdłuż dwu wzajemnie prostopadłych profilów przez Warszawę.

Głównego materiału dostarczyły otwory świdrowe, głębokości od 25 do 30 m., wykonane w liczbie 89 co 110 m. w celu zbadania gruntu dla przyszłego Metro, dopełnione przez wiercenia i wykopy kanalizacyjne. Jeden z tych profilów ciągnie się z Zach. na Wsch. od kolei obwodowej przez Wolską, Chłodną, Ogród i Plac Saski do Karowej, przyczem wzdłuż Wolskiej od rogu Okopowej prawie do kolei obwodowej do materiałów z Metro przybywają dane z wierceń i tunelu kanałowego. Drugi

profil biegnie od Dworca Gdańskiego przez Nalewki, Plac Saski, Mazowiecką, plac Napoleona, Sienkiewicza i Marszałkowską do Placu Unji Lubelskiej. Dalej ku Płd. profil ten jest szczęśliwie dopełniony przez wiercenia i tunel kanałowy na Puławskiej do kościoła w Mokotowie; Płn. profil dopełnia opracowanie przez Różyckiego okolic Żoliborza.

I. Profil zachodnio-wschodni zaczniemy opisywać od Zach., wykraczając dla całości obrazu nieco poza granice, ustalone nowymi wierceniami. W okolicach cmentarza na Woli głębokie odkrywki w licznych gliniankach (p. Samsonowicz w Przewodniku geologicznym po okolicach Warszawy, Wycieczka III, str. 91) i wiercenia na forcie „W” (Rychłowski, Materjały do Hydrologji, Nr. 142: próby w Zakładzie Geol. U. W.), na Wolskiej 127 (Koroniewicz i Sobolew, O lednikowych otłóżeniach okrestnosciej Warszawy, str. 40; próby w Zakł. Geol. U. W.) i na Wolskiej 121 (Koroniewicz i Sobolew, tamże, str. 39) wykazują profil następujący: u góry morena górna, to gruba do 7 m., to znów cieniejąca, z pokładami piasków i żwirów; pod nią gruba serja warw (7,5 do 13 m.), parę metrów grubego piasku, głębiej dolna morena (3 do 5 m.), niekiedy tylko nagromadzenie głazów, wreszcie ility, piaski i żwiry preglacjalne (na Wolskiej 127 na 31,7 m. głębokości). Jest to profil typowy dla płaskowzgórza dyluwjalnego na Zach. od Warszawy, ku Wsch. zaś sięga on prawdopodobnie poza kolej obwodową; mamy stąd (Fabryka Kernbauma, Bema 70, Elewatory zbożowe) niedostateczne wprawdzie wiercenia, jednak z prób, zachowanych w Zakładzie Geol., wynika, że morena występuje tu na powierzchni i że morena również leży na głębokości 28 resp. 21 m.; na tej dopiero głębokości podścielają ją piaski. Ponieważ taka grubość moreny w okolicach Warszawy nigdzie się nie spotyka, uważamy przeto za prawdopodobne, że wiertacze połączyli w jednolity kompleks górną morenę, warwy, i dolną morenę, między którymi nie było widocznie większych wkładów piasku. W takim razie grubość ogólna tych utworów byłaby niewiele więcej taka sama jak w okolicach cmentarza na Woli.

Na wschód od ulicy Bema stosunki geologiczne zmieniają się raptownie, znika górna morena i warwy, zastąpione przez utwory jeziorowe, które profil przecina na przestrzeni około 770 m. wzdłuż Wolskiej od rogu Płockiej do rogu Karolkowej;

na całej tej przestrzeni dotarto do dna jeziora tylko w otworach Wolska 48 i Wolska 42, (wiercenia 87 i 86) gdzie na głębokości 21 m. występuje szary margiel lodowcowy (morena dolna). Na zachód i na wschód od tego wyniesienia dno jeziora schodzi poniżej 25 m. i nie zostało odwiercone. Najgłębszy utwór jeziorowy w tych zagłębieniach stanowią piaski i szaro-zielony mułek marglisty z ziarnami piasku i żwirku, wyżej zaś idą typowe jasnoszare margliste mułki bardzo drobno-pyłkowe z okrzemkami; ku górze stają się one coraz lżejsze skutkiem wzrastającej zawartości okrzemek. Na wspomnianem wzniesieniu dna mułki leżą bezpośrednio na morenie, natomiast w otworze Wolska 22 (wiercenie) nie zostały one przebite do głębokości 25,4 m.; jest to widocznie najgłębsze miejsce całego profilu jeziorowego.

Na mułku jeziorowym leży powszechnie warstwa bardzo drobnego, równoziarnistego i kańciastego piasku kwarcowego, nieco wapnistego, deluwjalnego, a może eolicznego. Jedyne w wierceniu Wolska 22 i w sąsiednich otworach kanalizacyjnych pojawia się na głębokości 8 m. soczewkowaty mały pokład torfu, na 1,5 m. grubu. Wyżej natomiast oddzielony piaskiem humusowym, na głębokości 4,3 do 5,7 m., zależnie od wysokości naziomu ale prawie na jednej wysokości bezwzględnej (+103 m.) pojawia się rozległy pokład torfu, ciągnący się od Wolskiej 42 do wiercenia kanałowego 6, o 22 m. na zachód od rogu Karolkowej, ogółem na przestrzeni 420 m. Torf ma 1,9 m. grubości w otworze 83, bezpośrednio nad dolną soczewką torfową, zwykle zaś 1,2 — 1,5 m., przyczem na zachodnim końcu ma on wkład piaszczysty. Średnio dwumetrowa warstwa drobnego bezwapiennego piasku, z pewnością eolicznego, pokrywa torf. Na całej długości miałkie piaski i utwory jeziorowe są pokryte 2 — 4 m. bezwapiennego grubszego żółtego piasku gliniastego, stanowiącego deluwjum, przeważnie soliflukcyjne, moreny górnej. Na rogu Karolkowej leży wschodni brzeg jeziora: w otworze kanalizacyjnym 6 są jeszcze normalne utwory jeziorowe, od 4,60 do 5,25 m. jest torf, a na głębokości 9,85 m. mułek okrzemkowy; o 24 m. dalej na wschód (wiercenie 82) są utwory brzeżne płytkiego już jeziora: pod nasypem leży 1,3 m. piasku deluwjalnego bezwapiennego gliniastego, 3,7 m. piasku miałkiego mułkowego jeziorowego, 2 m. gliny marglistej i piaszczystej, przerobionej z moreny i warw (spływy brzeżne jeziora), znowu 4 m. piasku

jeziorowego, wreszcie na głębokości 12,7 m. leży 1 m. gliny piaszczystej marglistej z gładzikami — strzępek moreny — pod nim 3,5 m warw wapnistych z wkładem piasku, wreszcie na 17,5 m zaczyna się średnioziarnisty, biały bezwapienny piasek kwarcowy z ziarnami krzemieni, — niewątpliwy preglacjał (do 25,2 m). O 26 m dalej na Wsch. (wiercenie kanałowe 5) występuje już normalna serja dyluwjalna, taka sama jak wszędzie dalej na Wsch. do Placu Żelaznej Bramy.

Tak tedy na przestrzeni około 800 m profil opisywany przeciął głębokie (powyżej 25 m) jezioro o nierównym dnie, złożonem częściowo z moreny, o stromych brzegach, wymytych w normalnym kompleksie dyluwjalnym. Jezioro to nie było nigdy częścią rzeki ani łączą, o czem świadczy wielka głębokość jeziora i wielka drobnopyłkowatość jego osadu, jak również zawartość okrzemek. Jezioro to łączy się na północy bezpośrednio z jeziorem Żoliborskiem, na południu z torfami Szczęśliwic, i wypełnia długą a wąską (10 km na 800 m max.) głęboką rynną, biegnącą mniej więcej z północy na południe, niezależnie od struktury utworów starszych. Rynną tę wypełniają utwory międzylodowcowe ze szczątkami nosorożca (Szczęśliwice i Żoliborz), mamuta i słonia (Szczęśliwice). Jest to zdaniem naszym jezioro rynnowe drugiego zlodowacenia okolic Warszawy, t. j. Rissu, wypełnione osadami okresu międzylodowcowego Riss-Würm. Z powierzchni jest ono jak interglacjały duńskie typu Brörup, pokryte tylko cienką warstwą utworów deluwjalnych, przeważnie soliflukcyjnych, powstałych podczas maximum Würmu, które wszakże nie wyrównały całkowicie powierzchni, jezioro to bowiem zaznacza się do dziś jako zagłębienie terenowe. W okolicy cmentarza na Woli teren dochodzi do 112 m n. p. m. tam, gdzie morena górna jest w pełni rozwinięta, stąd poziom obniża się do jeziora, którego powierzchnia wzdłuż ul. Wolskiej sięga 108 m nad poziomem morza, a nieco na Płd. od tej ulicy opada poniżej 107 m n. p. m. Od rogu Karolkowej poziom znowu się podnosi do 112 m na rogu Żelaznej. Ani soliflukcja, ani deluwjum późniejsze nie wypełniły zagłębienia.

Z powyższego wynika, że powierzchnia, na której stoi Warszawa, naogół jest powierzchnią pierwotną, taką, jaka została pozostawiona przez zlodowacenie Rissu, skoro zachowało się do dziś na niej zagłębienie ówczesnego jeziora rynnowego; soliflukcja,

deluwjum i deflacja złagodziły tylko nieco nierówności. Powierzchnia terenu, na którym leży Warszawa, nigdy nie była dnem wielkiej rzeki, nigdy po niej nie błądziła Wisła, nie jest ona tarasem Prawisły, lecz mało zmienionym strzępem powierzchni pierwotnej, akumulacyjnej, od początku dość równej, o czym świadczą prawidłowy układ warw i moreny w okolicach jeziora. Zaburzenia dają się odczuć dopiero dalej ku wschodowi.

Opisowi całości jeziora rynnowego Warszawskiego poświęcimy wkrótce dalszą notatkę.

Poczynając od rogu Karolkowej, gdzieśmy znaleźli brzeg jeziora rynnowego, aż do otworu 69 (róg Solnej i Placu Mirowskiego) budowa dyluwjum jest dość regularna: na przestrzeni 450 m do okolicy Wroniej, od powierzchni leżą piaski deluwjalne, przy Wroniej teren się podnosi i pojawia się reszta niezniszczonej moreny górnej, nabrzmiewająca do trzech metrów przy Chłodnej 36 (wiercenie 75), miejscami zupełnie odwapniona i zastąpiona deluwjami. Poniżej idzie gruby (5,5 do 20 m) kompleks marglisty, złożony z warw i bardzo drobnych piasków mułkowatych; widać tu dobrze, że warwy przechodzą lokalnie w mułki i bardzo drobne piaski, zarówno w poziomym jak w pionowym kierunku. Głębiej idzie morena dolna, 10—5 a nawet tylko 2,5 m grubości mająca; tam, gdzie jest ona grubsza, zawiera ona lokalne soczewki piasków lub mułków, zupełnie podobnych do warw. Pod moreną leży serja piasków, nie we wszystkich otworach należycie w próbkach rozdzielona, prawie wszędzie jednak można stwierdzić, że po przebicciu serji piasków mieszanych otwory dosięgły właściwego preglacjału. Preglacialny piasek z dużemi blaszkami miki, z drobnymi otoczkami kwarcu i czarnych krzemieni, zmieszany z piaskiem dyluwjalnym, znajduje się w otworach Wolska 12 i Wolska 4 (wiercenia 80 i 81). W następnym wierceniu (Chłodna 68) pewny piasek preglacialny zaczyna się na 22,7 m, o 110 m dalej — na 22,9 m, na rogu Wroniej (wiercenie 77) na 24,1 m; na Chłodnej 44 już na 19,7 m znajduje się żwir preglacialny: w następnym otworze (Chłodna 36 i róg Żelaznej) preglacjał znika z profilu, zakończono go u dołu (25 m) tylko piaskiem dyluwjalnym z obfitą domieszką materiału preglacialnego.

W pobliżu kościoła św. Karola Boromeusza na ul. Chłodnej na głębokości około 25 m występuje preglacjał, mianowicie mułek, kończący u góry jego serję, zarówno w kilku nowych otworach,

jak w starym znanym wierceniu, opisywanym przez wielu autorów. Profil dyluwjum w otworze 73 (Chłodna 22) jest nadzwyczaj podobny do profilu tego starego wiercenia: wyjątkowo gruba morena (9,8 m; 11,3 w starym wierceniu) z wkładami piasku, leży na 10—11 m grubych piasków i żwirów z materiałem preglacjalnym; na 21,0 m w nowym, na 19,8 m w starym wierceniu występuje cienka (0,3 resp. 0,6 m) krawędź Poznańskiego; głębiej idzie 1 m (resp. 6 m) dolnej moreny, spoczywającej wprost na mułku preglacjalnym. Brak tu pod dolną moreną piasków dyluwjalnych, natomiast, widocznie w zagłębieniu, rozwinęły się zamiast warw potężne piaski i żwiry międzymorenowe, wreszcie zagłębienie ostatecznie zarównała morena. Może czasowo powstała tu pod lodem rynna, przez sam lód lądowy jednak z powrotem zasypana. Powierzchnia pliocenu na całej tej przestrzeni jest prawie zupełnie równa i waha się od 56 do 61 m n. p. m.

Na Placu Mirowskim zaczynają się zaburzenia w dyluwjum. W otworze 80 (25 m na Zach. od ul. Mirowskiej) preglacjal podnosi się do 16 m, dolna morena, pokryta resztką warw, wznosi się aż do 4,4 m; o 110 m na wschód warwy nabrzmiewają do 12,3 m, do tej głębokości schodzi górna powierzchnia moreny dolnej, preglacjal uchodzi całkowicie z profilu. Jeszcze o 110 m dalej, preglacjal wznosi się nieco wyżej, dolna morena jest zeń zmyta, warwy leżą wprost na piaskach i żwirach mieszanych. Na Placu Żelaznej Bramy koło Skórzanej (wiercenie 65), preglacjal zbliża się do powierzchni (3,05 m), a na głębokości 19,3 m występują już ility Poznańskie. Przy wejściu do Ogrodu Saskiego preglacjal, pokryty piaskami dyluwjalnymi pojawia się dopiero na 17,1 m, ility Poznańskie brak, zato w pierwszym wierceniu w Ogrodzie Saskim ility Poznańskie dochodzą prawie do samej powierzchni (otwór 63) na głębokości 2,25 m.

Stąd aż do krawędzi doliny Wisły na Karowej budowa geologiczna jest pozornie jednolita i bardzo prosta: dół profili stanowią ility Poznańskie, których górna powierzchnia obniża się stopniowo ku wschodowi od 109 do 94 m n. p. m. Na tej pochylonej powierzchni leży gruby kompleks moreny górnej z wkładami piasku; morena jest głęboko odwapniona i zmieniona. Miejscami, np. na podwórzu Uniwersytetu, nad ility Poznańskimi zachował się strzęp preglacjal. Od Placu Saskiego do brzegu Wisły na ility leży kompleks piasków, może rzecznych, przynależnych do wspomnianej poniżej — doliny rzecznej.

II. Profil z północy na południe zaczyna się na ul. Pokornej, róg Niskiej, i zachowuje jednolity charakter aż do Placu Napoleona: wszędzie na małej głębokości, od 6 do 13 m, występują ility Poznańskie, na których od ul. Pokornej do rogu Nalewek i Świętojerskiej i od początku ul. Mazowieckiej do rogu Sienkiewicza i Placu Napoleona, leży wprost morena górna, pokryta cieniutką warstwą piasku. Natomiast od Świętojerskiej do Mazowieckiej brak moreny, a na iłach Poznańskich leży wprost serja piasków i żwirów: jest to płaskie wymycie moreny, najgłębsze na Nalewkach, do 17 m, wypełnione osadami rzeczniemi.

Zapewne za czasów istnienia jeziora rynnowego płynęła tędy niewielka rzeczka, wyorywując sobie niezbyt głęboką i dość wąską dolinę, zapełnioną aluwjami rzeczniemi a zarównaną ostatecznie przez deluwja. Szerokość wymycia, widoczna na profilu, jest pozorna, przeciał on bowiem dolinę rzeczki ukośnie; biegnie ona mniejwięcej z NW na SE, a w okolicach Karowej obcina ją brzeg doliny Wisły.

Z tych śladów drobnej rzeczki można wnioskować, jak potężne i nie budzące wątpliwości musiałyby być zjawiska, spowodowane na powierzchni terenu Warszawy, gdyby kiedykolwiek po niej błędziła Prawiśła; nie dały by się one z pewnością przeoczyć.

Szczęśliwie w okolicy Placu Muranowskiego wykonano prócz wierceń w linii Pn.-Pd. jeszcze trzy wiercenia, leżące na wschód od niej; wykazały one, że garb iłów Poznańskich jest wąski, że szybko opada on ku wschodowi; zarazem pozwoliły one związać koniec tego profilu z okolicami Żoliborza (S. R ó ż y c k i, Intergracja Żoliborska. Spraw. Tow. Nauk. Warsz. 1929). Mianowicie ku wschodowi powierzchnia łu Poznańskiego szybko się obniża: gdy na Pokornej dosięga on 91 m n. p. m., to o 110 m ku wschodowi, na rogu Sierakowskiej i Żoliborskiej, dyluwjum nie przewiercono do 77,1 m n. p. m. Na zachodnim końcu Placu Muranowskiego ility Poznańskie sięgają +92 m, na wschodnim jego końcu obniżają się do +85,5 m, a jeszcze o 110 m na wschód, na rogu Muranowskiej i Przebiegu, dyluwjum nie przebito do +76,3 m. Zmienia się zarazem skład dyluwjum: na samym garbie leży tylko górna morena, w obniżeniu zaś, na wschodzie, dyluwjum ma skład normalny dla niezaburzonych obszarów Warszawy: pod górną moreną leży kompleks warwowo-piaszczysty,

pod nim morena dolna. Punkty powyższe wykazują zarazem, że garb iłów Poznańskich jest wąski, tylko, że linja wierceń poszła po jego rozciągłości. Garb zapada ku wschodowi równie szybko, jak zapada ku zachodowi na Placu Żelaznej Bramy. Kierunek garbu jest NNW, tak iż jego przedłużenie pada na wypiętrzenie pliocenu i preglacjału na Burakowie, zaś wyniesienie tychże utworów w Cytadeli stanowi już drugi garb, równoległy, lecz niższy.

Na ulicy Sienkiewicza linja profilu załamuje się ku zachodowi, przechodząc z Placu Napoleona na Marszałkowską; opuszcza ona nagle garb, po którym biegła stale i wchodzi w obszar widocznych silnych zaburzeń. Gdy na rogu Placu Napoleona i ul. Sienkiewicza ily poznańskie pojawiają się na poziomie 104,5 m. n. p. m. to o 110 m na zachód, w ul. Sienkiewicza, nie dowiercono się do nich na poziomie 86 m n. p. m., natomiast pod cienką moreną górną i równie cienką warstwą piasku dyluwjalnego, na poziomie 104 m pojawia się piękna kompletna serja preglacjału. Na rogu Marszałkowskiej i Sienkiewicza, o 110 m ku zachodowi, spotykamy nowy garb: ily Poznańskie, pokryte cienkiem bardzo dyluwjum, wznoszą się do 110,5 m n. p. m. Stąd profil skręca na południe i biegnie dalej wzdłuż Marszałkowskiej. Niezwłocznie profil opuszcza garb, wykazany na rogu Marszałkowskiej i Sienkiewicza: na rogu Żłotej pod deluwjami występuje preglacjał (na poziomie 109 m), nie przewiercony do głębokości 25 m. Dalej na południe powierzchnia preglacjału szybko zapada wgłąb, do 101,6 m na Chmielnej, do 97,5 m na rogu Widok, do 92,5 m na rogu Alei Jerozolimskich, na rogu zaś Nowogrodzkiej nie dowiercono się do preglacjału na głębokości 25,3 m (86,5 m); wydaje się, że granica ta jest erozyjna, następny bowiem utwór leży na różnych poziomach preglacjału. W miarę zapadania powierzchni preglacjału ku zachodowi pojawiają się nad nim masy piasków i żwirów, pokryte przez morenę górną, której dolna dość równa granica waha się dokoła 104 m n. p. m., grubość zaś, aż do Wilczej, od 2 do 7 metrów. Morena ta zawiera na rogu Żórawiej wielką lecz cienką krę (4,8 m) iłów Poznańskich, której ciąg dalszy stanowi zapewne kra, odsłonięta pięknie w grubości 3 m u podstawy moreny górnej w wykopie pod gmach Telefonu Centralnego na rogu Poznańskiej i Nowogrodzkiej.

Druga kra znajduje się między Hożą i Wilczą, i ma 3,6 m grubości na Hożej, 1,8 m między Sadową i Wilczą.

Utworki, leżące pod moreną górną, mają skład bardzo niejednorodny: aż do Nowogrodzkiej są to drobne i średnie piaski z drobnym żwirem, dalej na południe zawierają one liczne wkłady dość grubego żwirku, a między Sadową i Wilczą nad piaskami a pod moreną górną występuje strzęp warw. Między Wilczą a Piękną pod piaskami temi pojawia się reszta moreny dolnej, a pod nią na głębokości 30 m piasek preglacjalny. Dalej na południe aż do Placu Zbawiciela morena górna bardzo grubieje, dochodząc do 12 m, a pod nią leżą piaski z cienkimi wkładami warw i żwiru. Na Placu Zbawiciela spotykamy nowy wysad preglacjalny, wznoszącego się do 90,5 m n. p. n.; wprost na preglacjalnie leżą żwiry, nad nimi warwy z dwoma wkładami żwiru, wszystko uwieńczone cieką moreną górną, podсланą piaskiem. Poczynając od Placu Zbawiciela aż do Placu Unji Lubelskiej skład starszych utworów dyluwjalnych, podściełających niegrubą morenę górną, jest osobliwy i trudny do wyjaśnienia: już przy kościele Zbawiciela zaznaczyliśmy szczególnie skład tych utworów, mianowicie powtarzanie się warstw warw, piasków i żwirów; jedna z warstw żwirowych składa się przeważnie z preglacjalnego materiału. O 110 m na południe od 4 do 25,7 m głębokości występują dość grube piaski i żwiry. w środkowej części z dość znaczną domieszką materiału preglacjalnego; w następnym otworze występują od 4,25 do 19,8 m utworki przeważnie drobnodziarniste, typowe warwy, mułki z podrzędnymi wkładami drobnych piasków; u dołu dopiero występuje nieco żwiru.

Na rogu Litewskiej wiercenie pod moreną górną idą warwy (2,2 m), dalej 4,3 m żwiru, potem aż do dołu utworki mułkowate. O 110 m na południe pod moreną leży żwir, (1,2 m) potem warwy (1,7 m), dalej piaski i żwirki z materiałem preglacjalnym, potem piaski bardzo drobne, bezwapienne; w następnym otworze pod 7,2 moreny górnej występuje potężna serja warw, nieprzebita do głębokości 25,3 m, a więc powyżej 18 metrów gruba. Otwory świdrowe są zbyt rzadko rozstawione aby można było wyjaśnić wzajemne stosunki tych tak różnych utworów; nie wiemy, czy leżące obok siebie na jednym poziomie żwiry i warwy są jednoczesne, czy wyjątkowa grubość tych utworów jest pierwotna, czy też pozorna, spowodowana przez zaburzenia. Wyjaśni się to dopiero przy budowie Metro, gdy w tunelu będzie można obserwować bezpośrednio granice między warstwami.

Na Marszałkowskiej 3 wiercenie napotkało ility Poznańskie dopiero na głębokości 65,1 m., 58 m. n. p. m., pod grubymi piaskami i żwirami, pod 33 m. warw i 8,2 m moreny górnej, a już na Placu Unji Lubelskiej spotykamy ponowny wysad ilów pstrych do dość jednostajnego poziomu 91—94 m n. p. m., ze strzępami preglacjału, wszystko pokryte równą i grubą warstwą moreny górnej. Tutaj profil z wierceń dla Metro kończy się; o 800 m na południe zaczyna się profil kanału na ul. Puławskiej; stosunki w tej przerwie są jednak do pewnego stopnia wyjaśnione przez znane odsłonięcia w gliniankach pomiędzy starą rogatką a ulicą Zajązkowską.

III. Profil tunelu kanałowego na Puławskiej jest najdłuższym ciągłym profilem, jaki obserwowano dotychczas w dyluwjum Warszawy: ma on 776 m. długości. Tunel miał 2,4 m wysokości a spąg jego leżał na 8 m od powierzchni; profil tunelu był zrobiony od końca do końca pod ziemią metr za metrem, w miarę postępu robót; dopełnia go 12 szybów, wybitych do dna tunelu i 10 otworów świdrowych, porozmieszczanych między szybami i schodzących o 3—8, a nawet 16 m poniżej dna tunelu. W ten sposób oprócz ciągłego profilu tunel dał materiały do znajomości warstw stropowych i pewien wgląd w swe podłoże, tak iż ogółem został zbadany wzdłuż trasy tunelu teren do głębokości 12—16 m.

Na całej swej długości, wyjąwszy jedno sto metrów, profil obejmuje całą grubość dyluwjum i kilka metrów jego podłoża. Złożyło się tak szczęśliwie, że dolna granica dyluwjum biegnie często w samym tunelu i mogła być bezpośrednio obserwowana; pozatem podnosi się ona od góry, ponad strop tunelu, rzadziej opada poniżej jego spągu. Wiercenia i szyby wykazują wielką jednostajność struktury dyluwjum: występuje tu tylko jedna morena, często rozdzielona na dwa pokłady, już to różniące się barwą i większą gliniastością dolnego pokładu, już to przedzielone niestałymi przewarstewkami piasku; kiedyindziej żadnego podziału nie widać. U góry morena jest naogół bardzo głęboko (do 2 m) odwapniona i zgliniona; pokrywa ją zwykle z powierzchni metr lub mniej piaszczysto gliniastych eluwjów i deluwjów. Piasku w profilu dyluwjalnym jest bardzo mało: to wkład w morenie, to niegruba warstewka u dołu; najczęściej morena leży wprost na utworach starszych. Grubość moreny waha się od 4,5 do 8 m

maksymalnie, a że i teren jest prawie płaski (od 107 do 108,7 m), więc morena leży naogół poziomo, tworząc liczne 2—3 m kieszenie w swem podłożu. Jedynie między ulicami Wiktorską i Raclawicką morena bardzo cienieje, piaszczyste zaś utwory dyluwjalne osiągają wielką miąższość, wypełniając głęboką wyrwę w podłożu; powrócimy do tego miejsca później.

Profil tunelu zaczyna się wierceniem „8” o 25,3 m. na północ od zera kanału; w tem wierceniu pod 3 m odwapnionej moreny i 5,2 m piasków, częściowo silnie ortosztynizowanych, występują ily Poznańskie. Sam tunel zaczyna się szybem na rogu ul. Puławskiej i Zajączkowskiej, w którym morena, pokryta piaskami, schodzi do 7,4 m, a pod nią występuje szary ił i zielonkawy piasek mikowy preglacjału. Taki sam ił występuje w pierwszych metrach tunelu, zastąpiony niebawem przez piaski kwarcowe drobne preglacjału, które występują również w wierceniu 7 (16,1 m tunelu) na głębokości 6 m; na 7,5 m leży cienki wkład ładu mikowego piaszczystego, a pod nim do 24,4 m piasek, u góry średni, u dołu gruby; na tej głębokości jeszcze preglacjału nie przebito. Takież piaski występują w pierwszych metrach tunelu za wierceniem, ale dalej pojawiają się ily jasnozielone i szare mikowe, bezwapniste, miejscami prawie czarne, które ciągną się aż do szybu na rogu ul. Olesińskiej, w którym na głębokości 6,5 m występują one oddzielone od grubej moreny przez 0,7 m piasku; te same ily ciągną się za szybem do 42 m tunelu, gdzie zastępuje je piasek preglacjalny; stopniowo jednak morena grubieje i na 54 metrze tunelu schodzi do jego dna, stanowiąc większą część ścian tunelu aż do 83 metra. Na 75 metrze wiercenie 1 natrafiło na preglacjał pod moreną na głębokości 7 m, naprzód na 1,75 m ładu piaszczystego szarego mikowego, potem na drobny, u dołu gruby piasek, na 13 m zaś weszło w ciemno szare ily, zupełnie podobne do tych, które występują w tunelu przed szybem olesińskim. Za wierceniem 1, morena szybko podnosi się do góry i aż do 113 metra tunel idzie w piasku preglacjalnym, tak zleżałym, że trzeba go rąbać było oskardem. Koło szybu Grażyny (114 metr) znowuż w stropie tunelu pojawia się morena, zaraz jednak ustępuje miejsca piaskom preglacjalnym, które na 125 metrze zostają zastąpione przez łagodnie zapadające ku N ily preglacjalne. Na przestrzeni 30 m u góry tunelu występuje ił jasnozielony, pod nim zaś ciemny, prawie czarny; na 155 metrze

wypiera je morena, która na 170 metrze ustępuje ponownie piaskom preglacjalnym, które, ciągną się do 185 metra. Stąd aż do metra 218 w stropie tunelu idzie morena, zbita, szara, pod nią zmienny preglacjał: naprzód ility szaro-zielone, mikowe, potem ility szare, potem piaski z kawałkami drzewa; na 218 metrze morena schodzi znowu do dna tunelu i ciągnie się do metra 239; czasami z pod moreny ukazują się jasnozielone ility preglacjału.

Od metra 239 do 289 występują rozmaite piaski preglacjalne, tu zaś zaczynają się ility Poznańskie, ciągnące się bez przerwy do metra 300. Szyby między ulicami Szustra i Belgijską i na rogu Belgijskiej wykazują, że ility Poznańskie leżą wprost pod moreną, która zawiera wiele wtrąceń tych iłów. Przed szybem na rogu Odolańskiej typowe ility Poznańskie zmieniają nieco swój charakter, stają się bardziej piaszczyste, w samym szybie odsłaniają się jasnozielone ility preglacjalne, a zaraz za szybem na przestrzeni 24 m występują drobne i grubsze piaski preglacjalne z cienkimi warstewkami iłów; piaski te napotkało wiercenie 4 i nie przebiło ich do 16,6 m. Od metra 393 zaczyna się gruba serja iłów, jasno lub ciemnoszarych, zielonkawych, mniej lub więcej piaszczystych, tak dobrze warstwowanych, że w kilku punktach można było zmierzyć ich upad: wynosił on 80° na *NE*. Dalej idą piaski mikowe o uławiceniu przekątnem, z upadem również na *NE* 50 do 70 stopni. Od metra 433 do 438 występuje gruby piasek ze żwirem z kwarcu i krzemienia, za nim zaś pojawia się ił szary, analogiczny do iłów występujących w pobliżu szybu Odolańskiego, które łączą się bezpośrednio z ilitymi Poznańskimi. Te same ility i nieco piasku za nimi znajdujemy w szybie na rogu Wiktorskiej i na *S* odeń z upadem *SW* $30-40^{\circ}$ do metra 474. Tu utwory preglacjalne nagle utykają i tunel wchodzi w piaski dyluwjalne, które ciągną się do metra 550.

Są to piaski bardzo różne, to drobne, to grubsze, niekiedy z gładzikami, gdzieindziej z otoczakami z ilitu preglacjalnego; są one sypkie, niezleżale, miejscami tylko z początkami orsztyniczacji. Oczywiście piaski te wypełniają zagłębienie w powierzchni utworów preglacjalnych; wiek ich jest przez to zdefiniowany, że są one pokryte cienką coprawda (1,9 m w szybie między ul. Wiktorską a Raclawicką, 3,5 m w pobliskim wierceniu 5) warstwą moreny górnej, a zarazem nie wzięły udziału w dyzlokacjach, którym podległy utwory preglacjalne i morena dolna. Zagłęb-

bienie, wypełnione piaskami jest głębokie: nie przebito ich w wierceniu 5 do głębokości 14,9 m; na to samo zagłębienie trafiło leżące w pobliżu wiercenie w fabryce Makarewicza na Raclawickiej 10, które spotkało preglacjał na głębokości 24,4 m, pod grubą serją różnych piasków, pokrytych moreną górną z dużym porwakiem iłu Poznańskiego. Piaski nie mają charakteru utworu rzecznego, są to utwory raczej typu fluwjoglacjalnego, przypuszczamy tedy, że rynna je mieszcząca była wyerodowana pod lodem, lecz nie zachowała się, ale została potem, również pod lodem zasypana utworami fluwjoglacjalnymi; takich rynien „zaczątkowych” musi pod lodem lądowym powstawać sporo, gdyż na to, aby rynna się zachowała po ustąpieniu lodu trzeba zupełnie specjalnych warunków: żłobienie musi trwać dopóty, dopóki martwy lód nie zwali się do rynny i jej nie zabezpieczy od dalszych zmian. Zmiana warunków odpływu wód pod lodem może w każdej chwili zmienić erozję na sedimentację i zasypać żłobioną rynnę w całości lub częściowo. Rynny, które się dochowały i w których umieściły się potem jeziora, stanowią niewątpliwie tylko część tych rynien, które były wyerodowane pod lodem, lecz które zachować się nie mogły i zostały przez sam lód lub jego wody zasedymentowane.

Od 550 metra zaczyna się znowu preglacjał, naprzód w postaci drobnych i średnich piasków kwarcowych, z rzadkimi wkładkami iłów mikowych, o upadzie NE 20°, potem wypiera go z tunelu morena, wszakże wiercenie 10 (metr 624,3) pod 8 m moreny przebiło jeszcze 5,4 m piasków preglacjalnych z cienkimi wkładkami iłów jasnoszarych mikowych. Morena zajmuje całą wysokość tunelu od 609 do 646 metra, gdzie pojawia się żwir preglacjalny, poczem morena ciągnie się znowu aż do odległości paru metrów od szybu na rogu Olkuskiej, gdzie z pod niej pojawia się nieco zielonkawego iłu piaszczystego, niebawem zastąpionego przez ily Poznańskie, które występują bezpośrednio w spągu moreny aż do końca tunelu, do ul. Ursynowskiej, tworząc wielki masyw iłu Poznańskiego od 668 do 776 metra. Dalej na południe pliocen ciągnie się jeszcze kawał na tym samym mniej więcej poziomie, występuje on bowiem jeszcze w otworze 11, poza końcem tunelu, na 790,9 metrze od jego zera. Jeszcze dalej ily Poznańskie zapadają wgłąb, bowiem o 100—150 m SE od wiercenia 11 występuje preglacjał z typowymi żwirami, a dalej w Królikarni wiercenia nie przebiły preglacjału do 27,45 m.

Profil powyższy wykazuje niezbicie, że pozioma morena górna ścina płasko utwory starsze i leży na nich niezgodnie. W spągu jej występują to ility Poznańskie, to utwory różnych poziomów preglacjału, wszystkie silnie zaburzone; są one silnie pochylone, mierzone bowiem upady dochodzą do 80^0 ; większość upadów nadających się do pomiaru była na NE. Tak więc utwory plioceni i preglacjalne są ułożone prawdopodobnie w asymetryczne fałdy o stromem zboczach WS., łagodniejszym NE; możliwe zresztą, że częściowo przynajmniej SW skrzydła są nasunięte na łąki. Profil obserwowany jest niestety niegłęboki; połączenie w głębi punktów obserwowanych jest zatem niekiedy problematyczne. Fakt zaburzeń i charakter uławicenia są wszakże bezsporne.

Pomiędzy końcem tunelu a Placem Unii Lubelskiej, gdzie kończy się Metro, pozostaje luka około 800 m, wszakże o 150 do 200 m na wschód od ulicy Puławskiej znajdowały się kiedyś piękne odsłonięcia w gliniankach, doskonale opisane przez Amalickiego, które pozwalają nam złączyć końce obu profilów.

Tuż przy drodze od rogatki Belwederskiej do Placu Unii Lubelskiej Skrinnikow na podstawie Morkowina opisał (Materiały k poznaniu treticznych otłożeń Carstwa Polskiego, str. 57) profil, w którym pod dyluwjum, niezgodnie z nim, z upadem SW 60^0 leżą żwiry i piaski, pokrywające ility niebieskawe, niekiedy żółtawe. Według zachowanej w Zakładzie Geol. kolekcji Morkowina, są to piaski i żwiry preglacjalne, ility zaś należą do warstw granicznych między ility Poznańskimi a preglacjałem. Utwory te stanowią północno-wschodnie strome skrzydło synkliny, której płaskie skrzydło SW (upad na NE $15 - 20^0$) opisał Amalicki (Nieskolko zamieczanij o postpliocenowych otłożenjach Warszawy). W skrzydle tem pod moreną górną leży niezgodnie, ścięta przez nią poziomo, serja preglacjalnych iłow, podesłanych piaskiem. Na S od tej niecki podnosi się antyklina z iłow Poznańskich, pokrytych wprost przez morenę. Na przedłużeniu tego wzniesienia ku NW w Porcie lotniczym ility Poznańskie dochodzą do samej powierzchni gruntu.

Za powyższym garbem pojawia się nowa niecka w gliniankach Szaca, które dochodzą do ul. Zajączkowskiej, a więc do początku tunelu. Według opisu Amalickiego (l. c. str. 7) morena górna leżąca poziomo ścina niezgodnie płaską nieckę

„oligocenu”, a właściwie dolnego preglacjału, wypełnioną przez morenę dolną, piaski i żwiry. Morena dolna wykazuje synklinalne upady. Obecność tej moreny w analogicznym położeniu stwierdziliśmy przy budowie kanału od Puławskiej na Powiśle, który idzie o 10 m mniej więcej od SE ściany glinianki Szaca.

Opisany powyżej profil wykazuje niezbicie, że na całym obszarze Mokotowa była niegdyś morena dolna, że została ona zaburzona wraz z utworami starszemi, poczem wszystko razem zostało poziomo ścięte i pokryte przez morenę górną. Dyslokacje te zajmują tylke bardzo wąski pas: już na Rakowieckiej róg Kazimierowskiej preglacjał występuje na głębokości 31,4 m, a nad nim leży: morena górna, pod nią warwy, niżej piaski z gładzikami i żwirem — reszta rozmytej moreny dolnej; analogiczny profil jest w więzieniu w Mokotowie, gdzie pod 25 m dyluwjum występuje pięknie rozwinięta serja preglacjału do 48,8 m, a dopiero głębiej idzie pliocen.

Z profilów powyższych możemy wysnuć wnioski następujące:

1. Normalny profil niezaburzonego dyluwjum w Warszawie jest następujący: morena górna Rissu, pod nią warwy lub piaski bardzo drobne, głębiej morena dolna (Mindel) często zniszczona, reprezentowana wtedy przez piaski i żwiry, pod nią często kompleks piasków (fluwjogłacjał Mindlu).

2. W tych utworach w czasie drugiego zlodowacenia (Riss) powstał szereg rynien, erodowanych przez wody podlodowe, stosunkowo wąskich i głębokich; zostały one przeważnie jeszcze przez samo zlodowacenie zasypane piaskami i żwirami; jedna zachowała się w postaci jeziora rynnowego warszawskiego: Żoliborz—Wolska—Szczęśliwice.

3. Jezioro rynnowe Warszawskie zostało w interglacjale Riss-Würm wypełnione osadami jeziorowemi z okrzemkami, częściowo zaniezione miłkim piaskiem (częściowo eolicznym) i zarosło ostatecznie torfem; torf został pokryty piaskiem lotnym.

4. Morena Rissu została bardzo głęboko odwapniona, i jest wszędzie prawie pokryta grubą warstwą deluwjów piaszczysto-gliniastych; deluwja te powstały przeważnie w czasie zlodowacenia Würmu, jako produkty soliflukcji i częściowo zapełniły

pozostałe zagłębienia, między innymi po jeziorze rynnowym, w którym leżą one na piasku lotnym.

5. Pod względem strukturalnym dzieli się Warszawa na dwie części: wzdłuż brzegu doliny Wisły ciągnie się pas zdyzlokowany, gdzie utwory starsze są wysoko wyniesione; ma on około kilometra szerokości, granica jego zachodnia ciągnie się mniej więcej od Burakowa, przez Plac Żelaznej Bramy, nieco na zachód od Marszałkowskiej i Puławskiej. Na zachód od tej granicy dyluwjum leży poziomo w pierwotnym położeniu i we wskazanym powyżej składzie; na wschód od niej wszystkie utwory starsze, pokryte i ścięte przez poziomą morenę górną, są silnie zdyzlokowane i wypiętrzone. Maximum wypiętrzenia przypada na obszar od Placu Muranowskiego do Placu Napoleona.

6. Zaburzenie przedstawia się jako szereg mniej więcej równoległych brachiantyklin, ustawionych kulisowo, o kierunku NW—SE. Ku zachodowi rozplaszczają się one i zanikają, od wschodu są obcięte przez krawędź erozyjną doliny Wisły, do której nachylone są pod kątem. Te brachiantykliny są naogół niesymetryczne: SW zbocze jest strome, NE — płaskie; mogą tu istnieć łuskowe nasunięcia ku SW. Oś ogólna wyniesień jest NNW — SSE, prawie równoległa do doliny Wisły, i wykazuje oscylacje podłużne. Na jej maksymalnej elewacji, od Placu Muranowskiego do Placu Napoleona, nie można wyróżnić antyklin składowych wypiętrzenia, wszystkie bowiem utwory zostały ścięte poniżej dna synklin, wypełnionych preglacją, został więc jednolity zrab iłów Poznańskich, w którym uławicenia, a więc i fałdowań wyróżnić nie możemy. Drugą elewację stanowi profil tunelu w Mokotowie, gdzie pozostały synkliny, wypełnione preglacją, a iły Poznańskie występują pod moreną tylko w jądrze antyklin. Ku południowi ta elewacja tonie w głębi już w Królikarni, a dalej na S utwory dyluwjalne są w brzegu Wisły nienaruszone i normalne. Na północy Mokotowa już glinianka Szaca z moreną starszą w jądrze synkliny zaznacza początek depresji osi podłużnej; skutkiem tej depresji już tylko w jednej antyklinie — na Placu Unji Lubelskiej, leży wysoko pliocen, dalej wzdłuż Marszałkowskiej aż do Złotej występuje tylko zaburzone dyluwjum i co najwyżej preglacja do głębokości 25—30 m. Jądra antyklin z iłów Poznańskich są widoczne dopiero dalej na wschód, w brzegu Wisły, na Górnośląskiej, w Łazienkach. Intensywność zaburzeń w granicach depresji jest niewielka.

Ogólna, rekonstruowana amplituda zaburzeń przekracza 80 m.

7. Morena górna zawiera wielkie cienkie kry ilów Poznańskich, pływające nad utworami dyluwjalnymi, wypełniającymi synkliny; kry parometrowej grubości przy tysiącach metrów kwadr. powierzchni mogły być tylko blisko transportowane, w przeciwnym razie byłyby one rozerwane i włączone w morenę (co zresztą zdarzyło się w wielu miejscach i odbiło się na charakterze moreny); są one tedy porwane przez morenę górną ze szczytów pobliskich wysadów ilów Poznańskich w antyklinach. Równa powierzchnia, na której leży morena górna, jest egzarycyjna, nie erozyjna czy jaka inna. Powyższe dowodzi, że zaburzenie Warszawskie jest glacialnego pochodzenia, że lód lądowy fałdował swe podłoże i jednocześnie porywał jego powierzchnne części w miarę ich wypiętrzania przez dyzlokację.

8. Kierunek parcia lodu jest wyznaczony przez kierunek elementarnych antyklin (*NW—SE*) jako północno-wschodni. Kierunek ogólny strefy zaburzeń, *NNW—SSE*, wyznacza kierunek oporowego przedpola fałdowań, o które wspierało się parcie lodu z *NE*. Kulisowe ustawienie elementarnych antyklin skośnie do ogólnej strefy dyzlokacyjnej potwierdza, że parcie z północnego wschodu było ukośne w stosunku do masy oporowej, leżącej na zachodzie. Przypuszczać należy, że strefa dyzlokacyjna leży na granicy dwóch indywidualnych płatów lodu lądowego, z których wschodni, płynący niecką Prusko-Mazowiecką, napierał z północnego wschodu na sąsiedni i odpierał go ku zachodowi. W strefie granicznej powstawały potężne ciśnienia boczne, powodujące fałdowanie podłoża. Wobec plastycznego charakteru fałdowań i nieznacznej grubości kier, wieczna marźłość musiała sięgać niegłęboko. Położenie kier, na *SW* od wypiętrzeń, wskazuje również na ruch lodu z *NE*.

9. Powierzchnia gruntu w Warszawie jest pierwotną powierzchnią akumulacyjną zlodowacenia miejscowego drugiego, odpowiadającego Rissowi, nieco tylko zmodyfikowaną przez czynniki subaeralne, które zatarły jej nierówności i pozostawiły osady eluwjalne i deluwjalne.

Z Zakładu Geologii i Paleontologii
Uniwersytetu Warszawskiego.

J. Lewiński und St. Zb. Różycki.

Zwei geologische Profile durch Warschau (Vorläufige Mitteilung).

Présentée par. J. Lewiński le 21 février 1929

Résumé.

Die Verfasser haben zwei geologische Profile durch Warschau zusammengestellt, deren einer von *N* nach *S* gerichtet und 7,4 km lang ist, der andere aber rechtwinkelig dazu verläuft und 4 km Länge misst. Das Material wurde in der Hauptsache von 89 Bohrungen geliefert, die in Abständen von 110 m zwecks Bodenuntersuchung bis 25—30 m abgeteuft wurden; das *N-S* Profil knüpft im Süden an Aufschlüsse in Ziegeleigruben, die ca. 800 m decken, an. Weitere 816 m des Profils wurden in einem für Kanalisationszwecke ausgeführten Tunnel Schritt für Schritt aufgenommen, wobei das Hangende sowie das Liegende des Tunnels durch 10 Bohrungen und ebensoviel Schächte aufgeschlossen wurden.

Das Studium obiger Profile hat zu folgenden Schlüssen geführt:

1) Das ungestörte Diluvium weist in Warschau folgendes normale Profil auf: zuoberst die Moräne der letzten lokalen Vereisung, Riss im allgemeinen Schema, (obere Moräne), darunter Bändertone, die horizontal und vertical in feine Sande übergehen können, darunter die untere Mindelmoräne, die oft zerstört und nur durch Sande und Kiese vertreten ist. Diese Schichten werden von präglazialen Sanden, Kiesen und Tonen unterteuft, die ihrerseits dem pliozänen Posener Tone aufliegen.

2) Während der lokal letzten Rissvergletscherung wurden einige schmale aber tiefe Rinnen durch subglaziale Gewässer erodiert; sie wurden dann durch dasselbe Inlandeis mit Sand und Kies zugeschüttet, eine davon wurde aber als ein Rinnensee („der Warschauer Rinnensee“) von 10 km Länge, bis 800 m Breite und über 25 m Tiefe erhalten.

3) Der Warschauer Rinnensee wurde im Riss-Würm Interglazial mit Seeablagerungen (hauptsächlich Diatomeenschlick) aufgefüllt, teilweise durch feinsten, zum Teil äolischen Sand zugeschüttet; endlich vertorfte der See, der Torfaber wurde durch Flugsand

bedeckt. Die Seeablagerungen führen Säugetierreste: *Elephas antiquus*, *Rhinoceros sp.* u. a. m.

4) Die letzte (Riss-) Moräne wurde tief entkalkt und ist fast durchgehend von genug mächtigen sandig-tonigen Deluvien bedeckt, die hauptsächlich zur Würm-Eiszeit durch Solifluktion gebildet wurden; sie haben die Vertiefungen eingeebnet, unter anderen des Rinnensees, wo sie auf Flugsand liegen.

5) In struktureller Beziehung kann Warschau in zwei Zonen geteilt werden: östlich, längs dem Weichseltale, liegt eine etwa 1 Km breite stark gestörte Zone, wo die älteren Ablagerungen hoch emporgehoben wurden. Westlich davon liegt das Diluvium ungestört in primärer Lage und in oben angegebener Zusammensetzung; östlich sind alle Schichten, die älter als die obere Moräne sind, stark disloziert; sie sind durch die horizontale obere Moräne bedeckt und discordant abgeschnitten. Das Maximum der Störungen liegt im nördlichen Teile des Weichbildes der Stadt.

6) Die Störungen stellen eine Reihe ungefähr paralleler Brachyantiklinen dar, die kulissenartig gestaffelt sind und alle NW—SE streichen. Gegen Westen verflachen sie sich und verschwinden, in Osten sind sie durch die erosive Kante des Weichseltales schief abgeschnitten. Diese Brachyantiklinen sind im allgemeinen asymmetrisch: der SW Flügel ist steil, der NO—flach; es sind manchmal die NO Flügel den Mulden aufgeschoben. Die allgemeine Achse der Brachyantiklinen verläuft NNW—SSO, parallel dem Weichseltale, und weist longitudinale Oszillationen auf. Auf ihrer maximalen Elevation im Norden der Stadt können die einzelnen, die Erhebung zusammensetzenden Antiklinen nicht ausgeschieden werden, da alle Ablagerungen sehr tief abgeschnitten wurden, so dass die mit Präglazial ausgefüllten Synklinen verschwunden sind, und nur ein grosses Massiv von Posener Tonen ansteht, dessen Schichtung und Faltung nicht festgestellt werden kann. Eine zweite Elevation findet sich im Süden der Stadt, wo das Präglazial in den Mulden erhalten ist und das Pliozän nur in den Sätteln unter der oberen Moräne auftritt. Zwischen diesen beiden Erhebungen liegt eine tiefere Strecke, wo bis 25—30 m Tiefe nur schwächer gestörtes Präglazial und Diluvium erbohrt wurde, die Sättel aus Posener Ton aber erst östlich, im Ufer des Weichseltales, zu Tage treten. Die allgemeine rekonstruierte Amplitude der Störungen übertrifft 80 m

7) Die obere Moräne führt grosse Schollen von Posener Ton⁴ die auf dem die Mulden erfüllenden Diluvium schwimmen; Schollen von paar Meter Dicke bei Tausenden von Quadratmetern Oberfläche konnten nur von der nächsten Umgebung verfrachtet werden, sonst wären sie zerrissen und der Moräne einverleibt worden, was übrigens öfter geschehen ist und sich in der Zusammensetzung der Moräne kundgiebt. Sie wurden also von den nächsten Sattelerhebungen der Posener Tone abgerissen. Die horizontale Oberfläche, der die obere Moräne aufliegt, ist also durch das Inlandeis gebildet worden, die Warschauer Störungen sind also glazialen Ursprungs; das Inlandeis hat seine Unterlage in Falten gelegt und zugleich die aufragenden Teile, in dem Maasse, in welchem sie emporgepresst wurden, abgeschert und fortgeschleppt.

8) Die Richtung des Eisdruckes ist durch die Richtung (NW—SO) der elementaren Sättel als NO festgelegt. Die allgemeine Richtung der Störungszone (NNW—SSO) entspricht der Kante des den Eisdruck stauenden Vorfeldes. Die stoffelartige Aufstellung der elementaren Sättel beweist, dass der von NO kommende Eisdruck schief zur westlich gelegenen stauenden Masse gerichtet war. Es ist wahrscheinlich, dass die Störungszone an der Grenze zweier Loben des Inlandeises liegt, deren östlicher, der durch die Preussisch-Masovische Senke heranrückte, von NO auf den westlich angrenzenden Lobus starken Druck ausgeübt und seine Grenze nach Westen verschoben hat. Da die Störungen plastischen Charakter haben und die Schollen wenig mächtig sind, musste die Gefrornis nicht allzu tief in den Boden greifen. Die Lage der Schollen, SW von den Erhebungen, weist ebenfalls auf von NO kommenden Druck.

9) Die jetzige Terrain-Oberfläche in Warschau stellt die primitive Aufschüttungsoberfläche der lokal letzten (Riss-) Vereisung dar, die nur wenig durch subaerale Prozesse, die ihre Unebenheiten verwischt und deluviale und eluviale Bildungen hinterlassen haben, verändert worden ist.

Aus dem Geologisch-Paläontologischen Institut
der Universität Warschau.

Objaśnienia do tablicy profilów.

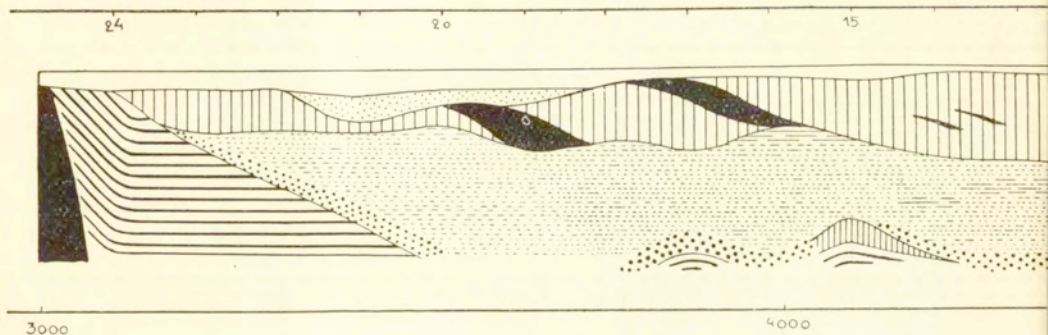
Profile są wykonane z dziesięciokrotnym przewyższeniem.

Liczby nad profilami od 2 do 89 oznaczają otwory świdrowe; przerwa bez liczb za liczbą 2 w profilu N—S odpowiada części profilu, nakreślonej na podstawie odsłoneń w gliniankach; dalsze liczby odpowiadają metrażowi tunelu. Liczby z boku profilów oznaczają wzniesienia: po zewnętrznej stronie linii nad poziomem morza, po wewnętrznej—nad poziomem Wisły. Liczby pod profilami oznaczają długość w metrach. Objasnienie znaków: 1. Pliocen—iły Poznańskie. 2. Utwory preglacjalne. 3. Piaski dyluwalne pod moreną dolną. 4. Morena dolna—Mindel. 5. Żwiry ze zniszczonej moreny dolnej. 6. Warwy (kreski ciągłe), mułki i piaski międzymorenowe (kreski przerywane). 7. Morena górna. 8. Gliny i piaski—najgłębszy utwór jeziorowy. 9. Mułki margliste jeziorowe z okrzemkami. 10. Piaski jeziorowe. 11. Torf. 12. Piaski, może eoliczne. 13. Utwory powierzchniowe: deluwja, aluwja i częściowo nasyp. 14. Nasyp.

Erläuterungen zur Profiltafel.

Die Profile sind zehnfach überhöht. Die Länge in Metern ist unter den Profilen angegeben. Die Zahlen 2 bis 89 über dem Profile entsprechen den Bohrungen; links von 2 im Profile N—S befindet sich der Teil des Profils der auf Grund von Aufschlüssen in Ziegeleigruben entworfen wurde; weitere Zahlen links geben die laufenden Meter des Tunnels an. Seitlich von den Profilen ist die Höhenlage angegeben, über dem Meeresspiegel und (um 77 m weniger) über dem Weichselnull. Erklärung der Zeichen: 1. Pliozän—Posener Tone. 2. Präglaziale Ablagerungen. 3. Diluviale Sande unter der unteren Moräne. 4. Untere (Mindel —) Moräne. 5. Kiese aus zerstörter unterer Moräne. 6. Bändertone, Schluffe und Sande zwischen den Moränen. 7. Obere (Riss—) Moräne. 8. Tiefste Seeablagerungen—Tone und Sande. 9. Mergeliger Seeschlick mit Diatomeen. 10. Seesande. 11. Torf. 12. Teilweise äolische Sande. 13. Oberflächenbildungen: Eluvium und Deluvium. 14. Künstliche Aufschüttung.

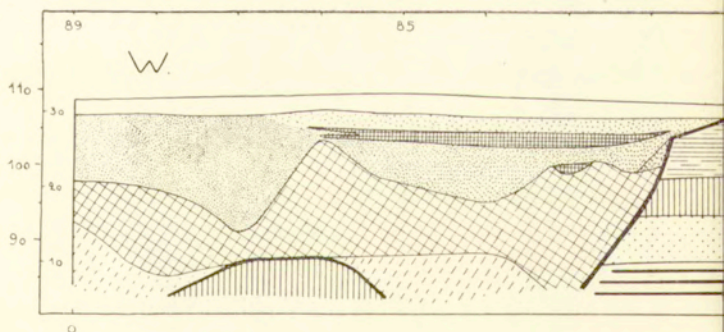
Profil podłużny
MURANÓW - MOKOTÓW.

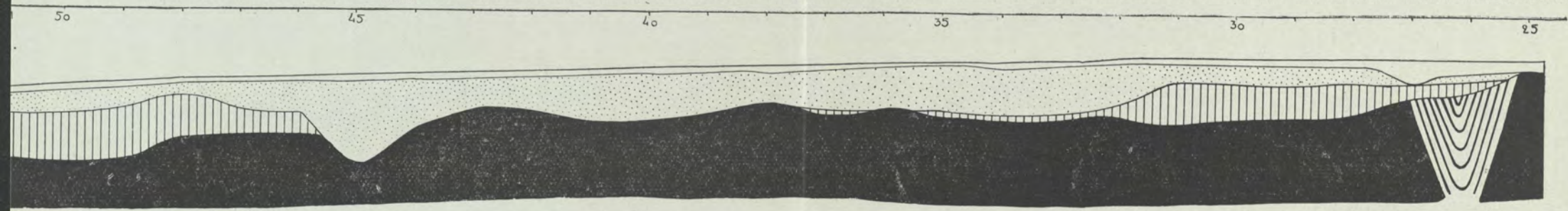


Profil poprzeczny

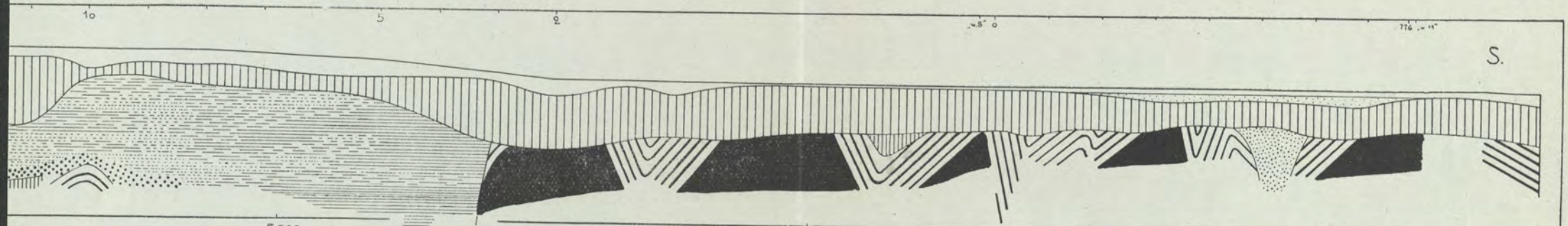
WOLA

ul. KAROWA.



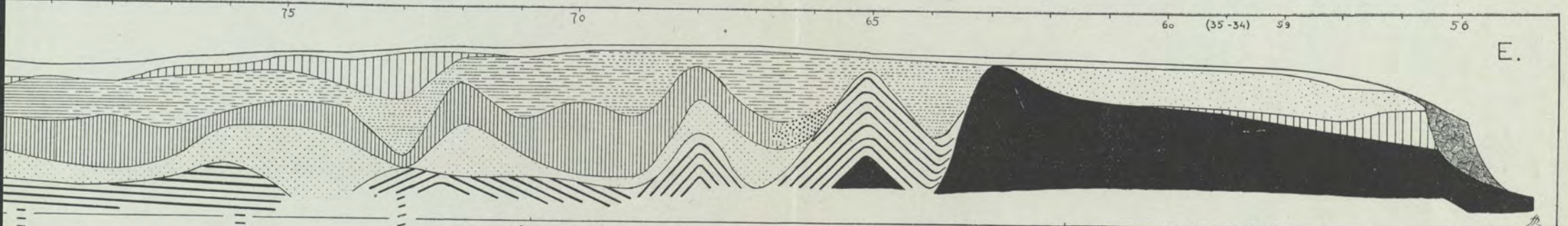


1000 2000 3000



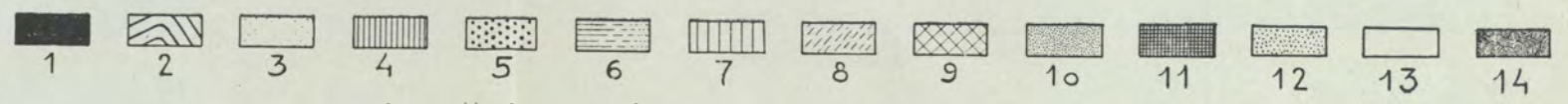
S.

5000 6000 7000 7400



E.

2000 3000 3800



Stefan Mazurkiewicz.

**O n -wymiarowym jądrze przestrzeni metrycznych,
spełniających warunek przeliczalności.**

Komunikat zgłoszony dn. 21 lutego 1929 r.

Streszczenie.

Oznaczając przez R dowolną przestrzeń, przez R^n zbiór tych punktów w których przestrzeń R jest conajmniej n wymiarową, — kładę: $R_0^n = R$; $R_{\alpha+1}^n = (R_\alpha^n)^n$, oraz $R_\alpha^n = \prod_{\beta < \alpha} R_\beta^n$, jeżeli α jest liczbą drugiego rodzaju. Najmniejszą liczbę λ dla której $R_\lambda^n = R_{\lambda+1}^n$ oznaczam przez $\lambda_n(R)$; zbiór $R_\lambda^n = R_{\lambda+1}^n$ oznaczam przez $K_n(R)$ i nazywam, zgodnie z terminologią Menger'a. n -wymiarowym jądrem przestrzeni R .

Dowodzę następujących twierdzeń.

I. Jeżeli przestrzeń R jest metryczna i spełnia warunek przeliczalności, wówczas $\lambda_n(R) < \Omega$.

II. Jeżeli $1 < \alpha < \Omega$, wówczas istnieje taki zbiór płaski U , że $\dim U = 1$, $K(U) = 0$, $\lambda_1(U) = \alpha$.

Stefan Mazurkiewicz.

**Sur le noyau n -dimensionnel d'un espace
metrique, séparable.**

Mémoire présenté le 21 février 1929.

1. R étant un espace, n un nombre naturel désignons par R^n l'ensemble de points x de R , tels que $\dim_x R \geq n$. α désignant un nombre ordinal, posons: $R_0^n = R$; $R_{\alpha+1}^n = (R_\alpha^n)^n$, et $R_\alpha^n = \prod_{\beta < \alpha} R_\beta^n$, si α est de seconde espèce. Soit λ le premier nombre ordinal tel que $R_\lambda^n = R_{\lambda+1}^n$; l'ensemble $K_n(R) = R_\lambda^n$ sera appelé noyau n -dimensionnel de R , le nombre $\lambda = \lambda_n(R)$ l'indice n -dimensionnel de R^1 .

1) Comp. Menger: Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 35 p. 134 et Dimensionstheorie p. 126.

Si $n = \dim R$, deux cas peuvent se présenter 1) $K_n(R) = 0$, 2) $\dim K_n(R) = n$.

Dans le deuxième cas $K_n(R)$ est le plus grand sous-ensemble de R homogènement n -dimensionnel, dans le premier, R ne contient aucun sous-ensemble de cette espèce.

2. Le but de cette Note est de démontrer les théorèmes suivants.

I. Si R est métrique, séparable, alors $\lambda_n(R) < \Omega$.

II. Pour $1 < \alpha < \Omega$, il existe un ensemble plan R , tel que $\dim R = 1$, $K_1(R) = 0$ et $\lambda_1(R) = \alpha^1$.

3. Démonstration de I. Soit: $Q_\alpha = R_\alpha^n - R_{\alpha-1}^n$; $Q = \prod_{\alpha < \Omega} Q_\alpha$.

Si $x \subset Q$ il existe un et un seul nombre ordinal $\alpha(x)$, tel que $x \subset Q_{\alpha(x)}$. q étant un nombre naturel il existe un voisinage $U_q(x)$ de x tel que²⁾:

$$(3,1) \quad \delta(U_q(x)) < \frac{1}{q}$$

$$(3,2) \quad \dim [F(U_q(x)) \times R_{\alpha(x)}^n] \leq n - 2.$$

D'après le théorème de Heine-Borel généralisé³⁾ il existe une suite de points $\{x_s^{(q)}\}$, $s = 1, 2, \dots$ telle que

$$(3,3) \quad Q \subset \sum_{s=1}^{\infty} U_q(x_s^{(q)}).$$

L'ensemble de nombres $\alpha(x_s^{(q)})$, $q = 1, 2, \dots$, $s = 1, 2, \dots$ est dénombrable et ses éléments sont $< \Omega$, donc il existe⁴⁾ un nombre μ tel que:

$$(3,4) \quad \alpha(x_s^{(q)}) < \mu < \Omega \quad q, s = 1, 2, \dots$$

¹⁾ Il contient pour $n = 1$ la solution négative d'un problème de M. Menger v. *Dimensionstheorie* p. 309. „Enthält jeder stark n -dimensionale Raum eine homogene n -dimensionale Teilmenge"? Ce problème peut s'énoncer de manière suivante: peut on avoir: $K_n(R) = 0$, $\lambda_n(R) \geq 3$? D'ailleurs, j'ai construit dans un autre but un ensemble $B_1 + B_2$ (*Fund. Math.* XII p. 111—117), tel que $K_1(B_1 + B_2) = 0$, $\lambda_1(B_1 + B_2) = 3$.

²⁾ $F(A)$ désigne la frontière de A , $\delta(A)$ le diamètre de A . Les termes voisinage et frontière sont compris par rapport à R .

³⁾ Comp. p. e. Menger: *Dimensionstheorie* p. 39—40.

⁴⁾ v. p. e. Schoenfliess-Hahn: *Die Entwicklung der Mengenlehre* etc. I, p. 106.

Je dis que pour tout point $x \subset Q$:

$$(3,5) \quad \alpha(x) \leq \mu.$$

Supposons le contraire. On a alors pour un point $y \subset Q$: $\alpha(y) > \mu$. D'après (3,3) à tout q naturel correspond un $s(q)$ tel que $y \subset U_q(x_{s(q)}^{(q)})$. Les R_α^n formant une suite descendente, (3,2) et (3,4) entraînent:

$$(3,6) \quad \dim [F(U_q(x_{s(q)}^{(q)})) \times R_\mu^n] \leq n - 2$$

donc, q étant arbitraire, on a $\dim_y R_\mu^n \leq n - 1$, donc $y \subset Q_\mu$ et $\alpha(y) = \mu$, contrairement à la supposition. (3,5) est donc démontré. Il en résulte:

$$(3,7) \quad Q = \sum_{\alpha \leq \mu} Q_\alpha$$

$$(3,8) \quad R_{\mu+1}^n - R_\mu^n = Q_{\mu+1} = 0$$

$$(3,9) \quad \lambda_n(R) \leq \mu + 1 < \Omega \quad \text{c. q. f. d.}$$

4. Démonstration de II. Fixons dans le plan un système ξ, η de coordonnées cartésiennes. Désignons par $p(\xi, \eta)$ le point aux coordonnées ξ, η , par $R(\sigma, \varepsilon)$ le rectangle $\sigma - \varepsilon \leq \xi \leq \sigma + \varepsilon$, $0 \leq \eta \leq 1$, par E l'ensemble de M. Sierpiński¹⁾, par $E(\sigma, \tau, \varepsilon)$ le transformé de E par la transformation²⁾:

$$(4,1) \quad \xi' = 2\varepsilon\xi + (\sigma - \varepsilon)$$

$$(4,2) \quad \eta' = \begin{cases} 2\tau\eta & \text{pour } \eta \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-\tau)(\eta-1)+1 & \text{pour } \eta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les propriétés de E , établies par M. Sierpiński³⁾ entraînent les propriétés suivantes de $E(\sigma, \tau, \varepsilon)$

$$(4,3) \quad \overline{E(\sigma, \tau, \varepsilon)} \subset R(\sigma, \varepsilon)$$

(4,4) la projection orthogonale de $E(\sigma, \tau, \varepsilon)$ sur l'axe des abscisses est un ensemble parfait non dense.

$$(4,5) \quad \dim E(\sigma, \tau, \varepsilon) = 1$$

¹⁾ Sierpiński *Fund. Math.* II p. 82—88.

²⁾ comp. Mazurkiewicz *Fund. Math.* II p. 202.

³⁾ l. c. comp. aussi Menger: *Dimensionstheorie* p. 139—146, ou les propriétés de E sont exprimé dans le langage de la théorie de dimension.

(4,6) $[E(\sigma, \tau, \varepsilon)]^1$ est dénombrable, donc $K_1(E(\sigma, \tau, \varepsilon)) = 0$,
 $\lambda_1(E(\sigma, \tau, \varepsilon)) = 2$.

(4,7) Il n'existe dans $E(\sigma, \tau, \varepsilon)$ aucune 1-séparation du point $p(\sigma, \tau)$ par l'ensemble vide.

(4,8) Si $A = B + E(\sigma, \tau, \varepsilon)$, B désignant un ensemble dénombrable ouvert dans A , alors

$$(4,81) \quad A^1 = [E(\sigma, \tau, \varepsilon)]^1.$$

Démonstration de (4,8). Il suffit évidemment de considérer le cas spécial de $\sigma = \tau = \varepsilon = \frac{1}{2}$, c. à d. de $E(\sigma, \tau, \varepsilon) = E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = E$. La dimension d'un ensemble dans un point étant une propriété locale et A et B coïncidant dans un certain voisinage de tout point de B , on $\dim_x B = \dim_x A$ pour $x \in B$. Soit maintenant $x \in E - E^1$; on sait qu'il existe alors pour tout ε' donné un rectangle $R = R(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ de diamètre $\leq \frac{\varepsilon'}{2}$ et tel que: $R \times \overline{E - R} = 0^1$. Considérons le rectangle $R_\tau = R(\xi_1 - \tau, \xi_2 + \tau, \eta_1 - \tau, \eta_2 + \tau)$ et soit F_τ sa frontière. On peut évidemment déterminer un $\tau' > 0$ tel que pour $0 < \tau < \tau'$ on ait: $\delta(R_\tau) < \varepsilon'$ et $R_\tau \times \overline{E - R} = 0$, ce qui entraîne: $F_\tau \times E = 0$. Comme $F_{\tau_1} \times F_{\tau_2} = 0$ pour $\tau_1 \neq \tau_2$, τ_1, τ_2 positifs, on peut, B étant dénombrable, déterminer τ_0 de manière que: $0 < \tau_0 < \tau'$ et $F_{\tau_0} \times B = 0$. On a alors: $\delta(R_{\tau_0}) < \varepsilon'$, $F_{\tau_0} \times A = 0$. C. à d. x peut être ε' -séparé dans A par un ensemble vide. On voit ainsi que pour $x \in A - E^1$, $\dim_x A = 0$, ce qui entraîne (4,81).

5. Si T est un sous-ensemble de R ouvert par rapport à R , alors pour tout α :

$$(5,1) \quad T_\alpha^n = T \times R_\alpha^n.$$

Si $x \in T$, alors, R et T coïncidant dans un certain voisinage de x on a $\dim_x = \dim_x R$ donc (5,1) est vérifiée pour $\alpha = 1$. Supposons maintenant que (5,1) a lieu pour une certaine valeur de α ; T_α^n est alors ouvert dans R_α^n . Posons dans (5,1): $1, R_\alpha^n, T_\alpha^n$ à la place de α, R, T . On aura:

$$(5,2) \quad (T_\alpha^n)_1^n = T_{\alpha+1}^n = T_\alpha^n \times (R_\alpha^n)_1^n = T_\alpha^n \times R_{\alpha+1}^n = T \times R_\alpha^n \times R_{\alpha+1}^n = T \times R_{\alpha+1}^n.$$

Si β est de seconde espèce et (5,1) a lieu pour $\alpha < \beta$, alors:

$$(5,3) \quad T_\beta^n = \prod_{\alpha < \beta} T_\alpha^n = T \times \prod_{\alpha < \beta} R_\alpha^n = T \times R_\beta^n$$

(5,1) est donc démontré par induction.

Corollaire. Si $R = S + \sum_{k=1}^{\infty} T_k$, les T_k étant ouverts dans R , alors: $R_\alpha^n \subset S + \sum_{k=1}^{\infty} (T_k)_\alpha^n$.

¹⁾ Menger l. c. p. 140.

6. On aura dans la suite toujours $n=1$, nous supprimerons donc l'indice 1. Nous dirons qu'un ensemble U est un $E_0(\sigma, \tau, \varepsilon)$ si $U = E(\sigma, \tau, \varepsilon)$. Nous dirons que U est un $E_\alpha(\sigma, \tau, \varepsilon)$, $0 < \alpha < \Omega$, si U satisfait aux conditions suivantes:

$$(6,1) \quad \bar{U} \subset R(\sigma, \varepsilon);$$

$$(6,2) \quad \dim U = 1$$

(6,3) $U_\alpha = B + E(\sigma, \tau, \varepsilon)$, B étant au plus dénombrable et ouvert dans U_α .

7. Soit U_k un $E_{\alpha_k}(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k)$; $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$; H l'ensemble d'accumulation de la suite $\{p(\sigma_k, \tau_k)\}$; $U_k \subset R$, $k=1, 2, \dots$. α étant le premier nombre ordinal supérieur à tous les α_k ($k=1, 2, \dots$), on aura pour tout $\beta \leq \alpha$:

$$(7,1) \quad R \times H \subset R_\beta.$$

Nous démontrerons (7,1) par induction:

(7,2) La relation (7,1) est vérifiée pour $\beta=1$.

Soit M l'ensemble de points de R , qui ne peuvent pas être 1-séparé dans R par un ensemble vide. M est fermé dans R^1 , donc

$$(7,21) \quad \bar{M} \times R \subset M \subset R_1.$$

D'après (6,3)

$$(7,22) \quad R \supset U_k \supset (U_k)_{\alpha_k} \supset E(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k)$$

$p(\sigma_k, \tau_k)$ ne peut pas être 1-séparé dans $E(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k)$ (d'après 4,7), donc à fortiori dans R . Donc $p(\sigma_k, \tau_k) \subset M$, et d'après (7,21).

$$(7,23) \quad H \times R \subset \bar{M} \times R \subset R_1$$

(7,3) Si (7,1) est vérifiée on a, pour $\beta+1 \leq \alpha$:

$$(7,31) \quad R \times H \subset R_{\beta+1}.$$

On a pour $k \geq l_1$: $\alpha_k \geq \beta$. Déterminons pour $k \geq l_1$ le nombre γ_k par la relation $\beta + \gamma_k = \alpha_k$. L'ensemble $(U_k)_\beta$ est un $E_{\gamma_k}(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k) \subset R_\beta$ on obtient donc, en remplaçant dans (7,23) R par R_β

$$(7,32) \quad R_\beta \times H \subset R_{\beta+1}$$

ce qui entraîne en vertu de (7,1)

1) Menger: *Math. Annalen* 95 p. 282.

$$(7,33) \quad R \times H \subset R_{\beta} \times H \subset R_{\beta+1}.$$

(7,4) Il est évident, que, (7,1) étant vérifiée pour $\beta < \lambda \leq \alpha$, et λ désignant un nombre de seconde espèce, on aura:

$$R_{\lambda} = \coprod_{\beta < \lambda} R_{\beta} \supset R \times H.$$

(7,2), (7,3), (7,4) constituent la démonstration de (7,1).

8. Pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $\sigma, \tau, \varepsilon$ satisfaisant aux conditions: $0 < \tau < 1$, $\varepsilon > 0$ il existe un $E_{\alpha}(\sigma, \tau, \varepsilon)$.

Notre assertion étant vraie pour $\alpha = 0$, nous la démontrons par induction.

Supposons donc qu'elle est vraie pour tout $\beta < \alpha$ et démontrons la pour α .

On voit sans peine, en utilisant (4,4) qu'il est possible de trouver trois suites de nombres $\{\sigma_k\}$, $\{\tau_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $0 < \tau_k < 1$, $\varepsilon_k > 0$ satisfaisants aux conditions:

$$(8,11) \quad R(\sigma_k, \varepsilon_k) \subset R(\sigma, \varepsilon)$$

$$(8,12) \quad R(\sigma_k, \varepsilon_k) \times \left[E(\sigma, \tau, \varepsilon) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} R(\sigma_l, \varepsilon_l) \right] = 0$$

(8,13) H désignant l'ensemble d'accumulation de la suite $\{p(\sigma_k, \tau_k)\}$ on a $H \supset E(\sigma, \tau, \varepsilon)$.

I. Soit α de première espèce c. à d. $\alpha = \gamma + 1$. Soit U_k $E_{\gamma}(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k)$ — un tel ensemble existe d'après la supposition.

Posons $U = E(\sigma, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k$. Je dis que c'est un $E_{\alpha}(\sigma, \tau, \varepsilon)$.

On n'a qu'à vérifier (6,3). D'après 7 on a:

$$(8,2) \quad U_{\alpha} = U_{\gamma+1} \supset U \times H \supset E(\sigma, \tau, \varepsilon).$$

D'après (8,12), (6,1) U_k est ouvert dans U . Donc d'après 5, Corollaire, on aura:

$$(8,3) \quad U_{\alpha} \subset E(\sigma, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k)_{\alpha}$$

$$(8,4) \quad (U_k)_{\alpha} = (U_k)_{\gamma+1} = ((U_k)_{\gamma})_1.$$

Mais $(U_k)_{\gamma}$ est de la forme: $E(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k) + B_k$, B_k étant dénombrable et ouvert dans $(U_k)_{\gamma}$. Donc selon (4,8)

$$(8,5) \quad (U_k)_{\alpha} = [E(\sigma_k, \tau_k, \varepsilon_k)]_1 = D_k$$

D_k étant dénombrable. (8,2) et (8,3), (8,5) entraînent:

$$(8,6) \quad U_\alpha = E(\tau, \tau, \varepsilon) + \left(U_\alpha \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k \right) = E(\tau, \tau, \varepsilon) + V$$

V étant au plus dénombrable. D'après (8,12) on a:

$$(8,7) \quad \overline{E(\tau, \tau, \varepsilon)} \times V \subset \overline{E(\tau, \tau, \varepsilon)} \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (D_k \times \overline{E(\tau, \tau, \varepsilon)}) \subset \sum_{k=1}^{\infty} (R(\tau_k, \varepsilon_k) \times \overline{E(\tau, \tau, \varepsilon)}) = 0$$

c. à d. V est ouvert dans U_α .

II. Soit α de seconde espèce. Il existe alors une suite croissante $\{\alpha_k\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha$. Soit U_k un $E_{\alpha_k}(\tau_k, \tau_k, \varepsilon_k)$, un tel ensemble existe d'après la supposition. Posons de nouveau $U = E(\tau, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k$. D'après 7, on aura de même: $U_\alpha \supset E(\tau, \tau, \varepsilon)$.

D'autre part, en utilisant (4,8) et (6,3) on a:

$$(8,8) \quad (U_k)_\alpha \subset (U_k)_{\alpha_k+2} = 0.$$

Donc d'après le Corrolaire de 5 $U_\alpha \subset E(\tau, \tau, \varepsilon)$ et finalement.

$$(8,9) \quad U = E(\tau, \tau, \varepsilon).$$

8 est ainsi démontré.

9. Si U est un $E_\beta(\tau, \tau, \varepsilon)$, alors

$$(9,1) \quad U_{\beta+1} = [E(\tau, \tau, \varepsilon)]_1 \neq 0$$

$$(9,2) \quad U_{\beta+2} = 0$$

donc $K_1(U) = 0$, $\lambda_1(U) = \beta + 2$. Le théorème est donc démontré pour tout α , qui est de la forme $\alpha = \beta + 2$. Si $\alpha > 1$ et n'est pas de cette forme, on a deux cas possibles.

I. α est de seconde espèce, c. à d. $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$. On pose:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k \text{ désignant un ensemble } E_{\alpha_k} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3k(k+1)} \right).$$

On vérifie sans peine que $U_\beta \neq 0$ pour $\beta < \alpha$ et $U_\alpha = 0$.

II. α est de la forme $\beta + 1$ et $\beta = \lim \alpha_k$. Il suffit de poser:
$$U = p\left(0, \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha_k}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3k(k+1)}\right).$$
 On a alors
$$U_{\beta} = p\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } U_{\alpha} = U_{\beta+1} = 0.$$

Le théorème II est ainsi démontré dans tous les cas.

W. Sierpiński.

O pewnem zagadnieniu Łuzina.

Komunikat zgłoszony dn. 21 lutego 1929 r.

Autor dowodzi, że z hipotezy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ wynika istnienie zbioru linjowego nieprzeliczalnego, który każda funkcja mierzalna przekształca na zbiór, będący pierwszej kategorii Baire'a na każdym zbiorze doskonałym. Wynika stąd rozstrzygnięcie twierdzące pewnego zagadnienia, postawionego przez prof. Łuzina.

W. Sierpiński.

Sur un problème de M. Lusin.

Mémoire présenté le 21 février 1929.

M. N. Lusin a posé récemment le problème suivant:

*Peut-on démontrer, en utilisant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable E , tel que toute fonction de Baire transforme E en un ensemble de 1^{re} catégorie sur tout ensemble parfait?*¹⁾

Nous prouverons ici une proposition plus générale, de laquelle il résultera la réponse affirmative au problème de M. Lusin. Notamment nous démontrerons ce

Théorème: *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble non dénombrable E , tel que toute fonction mesurable transforme E en un ensemble qui est de 1^{re} catégorie sur tout ensemble parfait.*

¹⁾ Au lieu de fonctions de Baire d'une variable réelle, on pourrait considérer des fonctions de Baire définies sur l'ensemble E , sans altérer le problème. En effet, on peut démontrer que si $f(x)$ est une fonction de Baire, définie sur un ensemble quelconque E , il existe une fonction de Baire $\varphi(x)$, définie pour tous les x réels, et telle que $\varphi(x) = f(x)$ sur E . Voir G. v. Alexits, „Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion", *Fund. Math.* t. XIV.

Lemme I. Si $f(x)$ est une fonction mesurable (a'une variable réelle), il existe, pour tout nombre x_0 réel donné et tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$, tel que

$$(1) \quad \text{mes} \underset{x}{\text{E}} [0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta] < \varepsilon.$$

Démonstration. Posons, pour $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$(2) \quad M_n = \text{E} \left[0 < |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \right];$$

la fonction $f(x)$ étant mesurable, les ensembles (2) sont évidemment mesurables (L).

Or, on a évidemment, d'après (2):

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$$

et

$$M_1 M_2 M_3 \dots = 0;$$

les ensembles M_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) étant mesurables, il en résulte, comme on sait:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes} M_n = 0,$$

et par suite, pour n suffisamment grands:

$$\text{mes} M_n < \varepsilon;$$

en posant $\delta = 1/n$, nous aurons, d'après (2), l'inégalité (1), ce qui prouve notre lemme.

Lemme II. Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), E — un ensemble linéaire donné, P — un ensemble parfait, il existe un ensemble N de mesure nulle contenu dans E et tel que l'ensemble $f(E) - f(N)$ est de 1^{re} catégorie sur P .

On obtient la démonstration de ce lemme, en répétant mot à mot la démonstration d'un lemme analogue que j'ai donné dans le *Bulletin de l'Acad. Polonaise*, 1928, p. 457—458¹⁾.

Tout à fait comme l. c., on en déduit que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble non dénombrable E , tel que, pour toute fonction mesurable $f(x)$, $f(E)$ est un ensemble de 1^{re} catégorie sur tout ensemble parfait, ce qui prouve notre théorème.

¹⁾ En modifiant un peu cette démonstration, on pourrait prouver la proposition suivante: Si $f(x)$ est une fonction mesurable, P — un ensemble parfait, et si X désigne l'ensemble de tous les nombres réels, il existe un ensemble N de mesure nulle, tel que l'ensemble $f(X - N)$ est de 1^{re} catégorie sur P .

Posiedzenie

z dnia 14 marca 1929 r.

Antoni Morawiecki.

Obszar fosforytonośny Oknian, Odaj, Budzyna, Delawy i Doliny.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 14 marca 1929 r.

Terrains phosphatifères d'Okniany, Odaje, Budzyń, Delawa et Dolina en Petite Pologne.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt le 14 mars 1929.

Streszczenie.

Na obszarze powyższym zanotowano występowanie dewonu, jury, kredy, trzeciorzędu, utworów dyluwialnych i aluwium.

Utwory dewońskie są reprezentowane przez szare i czerwone o rozmaitych odcieniach piaskowce oraz czerwono-brunatne łatwo wietrzejące iłołupki. Poszczególne warstwy powyższych utworów jako też całe ich kompleksy wykazują niejednokrotnie lokalne nachylenia. W dość częstych szczelinach spotykają się sporadycznie drobne kryształki kwarcu. Niektóre partje utworów mają barwę szarą, zielono-szarą lub żółtawą. Twardość powyższych utworów waha się w dość szerokich granicach. Naogół szare, zielonawo-szare i żółtawe piaskowce są twardsze od piaskowców czerwonych, czerwono-brunatnawych i t. d.

Utwory dewońskie występują w zboczach doliny Dniestrowej koło Budzyna, od Delawy przez Dolinę, Siekierczyn, Piotrów aż po granice badanego obszaru. Pozatem zauważono je w dolnej części jaru Suchydolskiego.

Utwory jurajskie występują na całym obszarze z wyjątkiem cyplu Delawskiego. Są to przeważnie szare, brunatnawe, żółte, białe i t. p. wapienie zbite, ziemiste, margłowe, dolomityczne, bituminiczne i t. d. Częste są w nich szczeliny. W północnych częściach terenu są one wzniesione znacznie wyżej niż w częściach południowych.

Utwory kredowe różnicują się na cenoman dolny, szary i sinoszary margiel oraz biały wapień.

Cenoman dolny składa się z utworów ilowych, piaszczysto-ilastych piasków, piaskowców i żwirów leżących bezpośrednio na wapieniach jurajskich. Utwory powyższe nie różnią się zasadniczo od podobnych utworów, występujących na odcinkach Niżniowa i Bukówny. Zauważono je w zboczach doliny Dniestrowej od lasu Horodyska (granica południowa terenu Niżniowskiego) po za Budzyń, dalej od Delawy poza Dolinę. Dostrzeżono je także w dolnej części jaru Kutysko-Okniańskiego na terenie gminy Okniany. Stwierdzone zostały na głębokości około 38 m. przez wiercenie w Boskim przysiółku Oknian, oraz na głębokości 55—70 m. przez wiercenie koło kościoła w Oknianach.

Zasiąg szarego marglu jest taki sam jak utworów cenomanu dolnego. Jest to zbita dość twarda skała, uławicona poziomo lub prawie poziomo, posiadająca liczne szczeliny, rozpadająca się po dłuższym staniu na powietrzu na drobne kawałki. Fosforytów zawiera niewiele, średnio około 0,10₀.

Biały wapień cechami swemi nie różni się zasadniczo od wapieni występujących na innych odcinkach terenu. Zawiera on niekiedy znaczne ilości czarnych, brunatnych lub szarych na powierzchni zwietrzałych krzemieni. Nawierzchnia z białego wapienia jest prawie pozioma. Warstwy cenomańskie położone są wyżej w północnej części terenu niż w południowej. Wyniesienie to nie przekracza wszakże w najlepszym razie 20 m.

Utwory trzeciorzędowe reprezentowane są przez gipsy, występujące na całym terenie, z wyjątkiem najbardziej na północ wysuniętych odcinków, oraz przez wapienie podgipsowe i nadgipsowe, iły szaro-zielonawe, podgipsowe i nadgipsowe, wreszcie przez żółte wapienie gruzłowe bliżej nieokreślone. Na opisywanym obszarze najbardziej rozwinięte gipsy występują we wszystkich możliwych formach i odmianach. A więc mamy tu szare

gipsy krystaliczne, białe gipsy alabastrowe, wielokrystaliczne gipsy, gipsy grubo-średnio-i drobnokrystaliczne i t. d.

Trzeciorzęd pokrywają utwory dyluwialne, reprezentowane jak zwykle przez glinę wyżynową, less i żwiry. Nad nimi zalegają utwory aluwialne.

Fosforyty występują jedynie w warstwach cenomańskich. Margle szare i sinoszare jak również piaski, piaskowce i żwiry zawierają ich niewiele. Główna ich masa koncentruje się w utworach ilowych i piaszczysto-ilastych.

Na podstawie wyników, otrzymanych ze szlamowań materiału pobranego w poszczególnych punktach, stwierdzić można, iż obszar badany rozpada się na cztery odcinki: Horodyska — Odaje — Budzyń, część obszaru położona na północ od Budzyna, Delawa — Dolina Okniany.

Procentowa zawartość fosforytów na poszczególnych odcinkach jest zmienna. Odcinek Odaj—Budzyna zawiera 5—7% wag. fosforytów, odcinek położony na północ od Budzyna — 1,8% wag., odcinek Delawa Dolina 3—4% wag., wreszcie odcinek Oknian około 5% wag.

Mięszkość pokładów na poszczególnych odcinkach wynosi: na odcinku od Odaj do Budzyna około 1,40 m., na odcinku położonym na północ od Budzyna 0,60—0,90 m., na odcinku Delawa—Dolina około 0,80 m. i na odcinku Okniany przeszło 2 m. Warstwy fosforytonośne specjalną twardością się nie odznaczają. Na ich powierzchni zatrzymują się wody gruntowe, tworząc szlaki wodne.

Warszawa, 25 stycznia 1929 r.

Komisja do badań fosforytów krajowych
przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa.

Antoni Morawiecki.

Obszar fosforytonośny okolic Bukówny i Oleszowa.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 14 marca 1929 r.

Terrains phosphatifères de Bukówna et Oleszów en Petite Pologne.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt le 14 mars 1929.

Streszczenie.

W budowie geologicznej okolic Bukówny i Oleszowa biorą udział utwory jurajskie, kredowe, trzeciorzędowe, dyluwialne i aluwialne.

Utwory jurajskie odsłonięte są w zboczach doliny Dniestrowej, w dolinie Tłumaczyka oraz w pomniejszych jarach do powyższych dwóch dolin uchodzących. W przeważnej części są to miękkie mażące się wapienie, niekiedy mniej lub więcej porowate, prawie zawsze zbite, barwy szarej, żółtawej, różowawej i t. d., występujące raz w potężnych kilkumetrowych pokładach, to znów w cienkich potrzaskanych warstewkach. Naogół jurę cechuje duża zmienność zarówno w rozpostarciu poziomem jak w zasięgu pionowym. Niekiedy dostrzec tu możemy szczeliny mniejsze lub większe, któremi niejednokrotnie wędrują szlaki wodne.

Nad utworami jurajskimi występują utwory kredowe. Zróżnicować je można na cenoman dolny, wykształcony w postaci utworów iłowych, piaszczysto-ilastych, piasków, piaskowców, żwirów i zlepieńców. Nad cenomanem dolnym mamy cenoman środkowy, względnie górny, wykształcony w postaci szarego i sino-szarego marglu. Jeszcze wyżej mamy biały wapień kredowy, zaliczany przez jednych do senonu, przez innych do turonu. Wapień ten występuje w postaci potężnych ławic, ku górze potrzaskanych licznymi szczelinami.

Biały wapień kredowy występuje na całym terenie. Szary i sino-szary margiel, jak również utwory cenomanu dolnego, występują w postaci mniejszych lub większych soczewek. Miąższość powyższych soczewek waha się w granicach od 40 cm. do 4,00 m. i więcej. W szczególności warstw cenomanu dolnego brak w samej Bukównie i w niektórych miejscach poza Bukówną po-

łożonych. W Oleszowie w studni kopanej miąższość utworów cenomanu dolnego wynosi około 10 cm. Jedynie w części północno-zachodniej badanego obszaru utwory cenomanu dolnego występują w pokładach znaczniejszych. W zboczach doliny Dniestrowej, idąc ku północy i zachodowi od Bukówny, nawierzchnia utworów cenomanu dolnego obniża się stopniowo tak, iż w odległości 4—5 km. za Bukówną utwory te zanurzają się pod poziom doliny Dniestrowej.

Utwory trzeciorzędowe wykształcone są w postaci zielonawych iłów. Szczególnie ładnie odsłonięte są one na północny wschód od Bukówny.

W części południowej terenu mamy potężnie rozwinięte gipsy.

Do dyliwium zaliczamy glinę wyżynową, lessy i żwiry, występujące w wyższych częściach zboczy doliny Dniestrowej, oraz w licznych jarach do niej uchodzących. Przykryte są utwory powyższe aluwiami.

Fosforyty znajdują się jedynie w warstwach cenomańskich. Szary margiel, piaskowce i piaski są w nie mało zasobne. Spotykamy tu jedynie pojedyncze konkracje, przyczem fosforyty występujące w szarym marglu są bardziej zbite i zawierają kwasu fosforowego więcej, niż fosforyty występujące w pozostałych utworach.

Najzasobniejsze w fosforyty są utwory piaszczysto-ilaste oraz utwory iłowe. Warstwy te zawierają od 0,5% do 6,93% fosforytów. Najwięcej fosforytów zawierają warstwy położone w północno-wschodnim odcinku terenu, graniczącym z obszarem fosforytonośnym Niżniowskim, oraz warstwy położone na wschód od Oleszowa. W miarę posuwania się ku południowi i północnemu zachodowi fosforytów spotykamy coraz mniej tak, iż w niektórych punktach terenu brak ich zupełnie.

Na podstawie danych uzyskanych ze szlamowania materiału pobranego w poszczególnych punktach terenu cały obszar badany podzielić możemy na dwa odcinki: północno zachodni, bogatszy w fosforyty, i pozostały, w fosforyty uboższy.

Naogół na badanym obszarze znajduje się wedle prowizorycznych obliczeń około 800.000 tonn surowca fosforytowego.

Warszawa, 25 stycznia 1929 r.

Komisja dla badań fosforytów krajowych
przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa.

Antoni Morawiecki.

**Obszar fosforytonośny Isakowa, Podwerbiec,
Nieżwiska, Harasymowa, Rakowca i Semenówki.**

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 14 marca 1929 r.

**Terrains phosphatifères d'Isaków, Podwerbce,
Nieżwiska, Harasymów, Rakowiec et Semenówka
en Petite Pologne.**

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt le 14 mars 1929.

Streszczenie.

Warstwy fosforytonośne występujące na obszarze, o którym mowa, należą do albu i cenomanu. W spągu ich na północy leżą utwory dewońskie, na południu zaś warstwy jurajskie. Strop stanowi biały wapień kredowy, zaliczany przez geologów do turonu.

Albo-cenoman rozpoczynają piaskowce o lepszemu kwarcowemu lub węglanowo-wapiennym. Wyżej leżą piaski syplkie lub zbite, niekiedy ze znacznymi ilościami drobnych otoczków krzemionych, nad nimi zaś utwory piaszczysto-ilaste, rzadziej iłowe. U samej góry znajduje się szary margiel. Piaski i utwory piaszczysto-ilaste odznaczają się dużą zmiennością. Występują one wraz z szarym marglem na całym obszarze zbadanym, czego nie możemy powiedzieć o pozostałych utworach.

Fosforyty występują w zmiennych ilościach we wszystkich wyżej wyszczególnionych utworach. Znaczne ich zagęszczenie dostrzegamy w dolnej części szarego marglu oraz w niżej leżących utworach iłowych mniej lub bardziej piaszczystych. Również niektóre partje utworów piaszczysto-ilastych zawierają większe ilości fosforytów.

Ogólna średnia miąższość warstw najbogatszych w fosforyty wynosi 0,43 m. Ilość fosforytów waha się w nich w szerokich granicach, dochodząc miejscami do 28% wag. Najbogatsze specjalnie wybrane kawałki szarego marglu wykazały w poszczególnych szlamowaniach nawet 63% wag. fosforytów.

Na podstawie poszczególnych szlamowań podzielono obszar badany na pięć odcinków. Najbogatszym okazał się odcinek

położony między Niezwiskami a Rakowcem i Semenówką, zawierał bowiem około 28⁰/₀ wag. fosforytów, najbiedniejszym Harasymów — około 9⁰/₀ wag.

Pozatem okolice Podwerbiec wykazały około 20⁰/₀ wag. fosforytów, okolice zaś Rakowca około 17⁰/₀.

W północnej części terenu warstwy fosforytonośne są wyżej wyniesione niż w części południowej. Najbogatsze złoża fosforytów przywiązane są przeważnie do wysokości 240-255 m. nad p. m. Najwyższe wyniesienie warstw fosforytonośnych zauważono między Niżniowem a Rakowcem około 272 m. nad p. m. Tu też stwierdzono na pewnej przestrzeni brak całkowity utworów albu i cenomanu.

Ukształtowanie ogólne nawierzchni utworów cenomanu dolnego jest faliste.

W wyniku przeprowadzonych prac stwierdzono, iż na obszarze wynoszącym w przybliżeniu 35 km.² znajduje się około 5.550.000 tonn surowca fosforytowego.

Dotychczasowe próby eksploatacji złóż fosforytowych Niezwiskich i Podwerbieckich wypadły niekorzystnie. Obecnie prowadzone są prace górnicze, mające na celu wyjaśnienie możliwości szerszego przemysłowego ich użytkowania.

13 marca 1929 r.

Zakład Mineralogiczny
Uniwersytetu Warszawskiego.

Kazimierz Żorawski.

**O układzie dwóch równań różniczkowych
cząstkowych pewnej szczególnej formy.**

Zgłoszono dn. 14 marca 1929 r.

Kasimir Żorawski.

**Über ein System zweier partieller
Differentialgleichungen von einer besonderen Form.**

Vorgelegt am 14 März 1929.

In zwei früheren Abhandlungen¹⁾ haben wir uns mit Punkttransformationen der Ebene beschäftigt, welche eine partielle Differentialgleichung von besonderer Form erfüllen. Es handelte sich in diesen Abhandlungen in erster Linie darum, die Abhängigkeit der Form der genannten Punkttransformationen von den Werten der Konstanten zu untersuchen, welche in der partiellen Differentialgleichung auftreten. Der Zweck der gegenwärtigen

¹⁾ K. Żorawski: 1) Własności pewnej kategorii przekształceń punktowych w płaszczyźnie. 1926 Rozprawy Wydziału mat. przyr. Polskiej Akademji Umiej. Tom LXV/LXVI. Ser. A/B str. 37—69. 2) Über Transformationen, welche eine partielle Differentialgleichung von besonderer Form erfüllen 1927. Comptes rendus de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie XIX Classe III.

Abhandlung besteht darin, die nämliche Frage in bezug auf solche Punkttransformationen zu beantworten, welche ein System zweier Differentialgleichungen von demselben Typus erfüllen.

§ 1. Die Formulierung der Aufgabe und einige spezielle Fälle der betrachteten Systeme.

Es mögen die Gleichungen:

$$(1) \quad u = U(x, y), \quad v = V(x, y)$$

betrachtet werden und man setze voraus, dass die Jacobische Determinante:

$$(2) \quad D = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x}$$

nicht identisch gleich Null ist. Alsdann bestimmen die Gleichungen (1) eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v und schreibt man die zugehörige inverse Transformation in der Form:

$$(3) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v),$$

so ist auch die Funktionaldeterminante:

$$(4) \quad \Delta = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}$$

nicht identisch gleich Null und es besteht die Gleichheit:

$$D \Delta = 1.$$

Wir wollen uns mit solchen Transformationen (1) beschäftigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie zwei unabhängige Differentialgleichungen von der Form:

$$(5) \quad \begin{cases} g_1 D + k_1 \frac{\partial U}{\partial x} + l_1 \frac{\partial V}{\partial x} = b_1 + m_1 \frac{\partial U}{\partial y} + n_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ g_2 D + k_2 \frac{\partial U}{\partial x} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x} = b_2 + m_2 \frac{\partial U}{\partial y} + n_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

befriedigen, wo g, b, k, l, m, n mit Indices Konstanten bezeichnen, welche wir in der Folge sämtlich reell voraussetzen wollen.

Damit sich diese Beziehungen weder auf eine kleinere Anzahl von Beziehungen, noch auf Widersprüche, noch schliesslich auf ein solches System reduzieren, welches die Gleichung $D=0$ enthält, müssen die Koeffizienten dieser Beziehungen die Eigenschaft besitzen, dass die Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} g_1, k_1, l_1, m_1, n_1 \\ g_2, k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

nicht alle gleichzeitig gleich Null seien und dass die Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} b_1, k_1, l_1, m_1, n_1 \\ b_2, k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

nicht alle gleichzeitig gleich Null seien. Wir setzen diese Eigenschaften der Koeffizienten voraus und transformieren die Differentialgleichungen (5) durch Anwendung der Formeln (3) entweder der ersten oder der zweiten der oben zitierten Abhandlungen. Wir kommen auf die Differentialgleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} b_1 \Delta + n_1 \frac{\partial X}{\partial u} + l_1 \frac{\partial Y}{\partial u} = g_1 + m_1 \frac{\partial X}{\partial v} + k_1 \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ b_2 \Delta + n_2 \frac{\partial X}{\partial u} + l_2 \frac{\partial Y}{\partial u} = g_2 + m_2 \frac{\partial X}{\partial v} + k_2 \frac{\partial Y}{\partial v}. \end{cases}$$

Damit sich diese Differentialgleichungen weder auf eine kleinere Anzahl von Differentialgleichungen, noch auf widersprechende Beziehungen, noch schliesslich auf ein solches System reduzieren, welches die Gleichung $\Delta=0$ enthält, müssen die Matrices (6) und (7) den Bedingungen genügen, welche wir soeben angeführt und vorausgesetzt haben.

Wir wollen zunächst diejenigen Fälle zu bestimmen suchen, in welchen die Systeme (1) und (8) die Eigenschaft besitzen, dass jedes derselben aus dem Anderen dadurch entsteht, dass man in dem letzteren die Veränderlichen der zugehörigen Transformation durch die entsprechenden Veränderlichen der zu derselben inversen Transformation ersetzt. Diese Eigenschaft der betrachteten Systeme von Differentialgleichungen kann als die Invarianz gegen die Inversion der Transformation bezeichnet wer-

den. Es ist ersichtlich, dass das System (1) dann und nur dann zu dieser Kategorie der Systeme von Differentialgleichungen angehört, wenn dasselbe mit dem Systeme:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 D + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + l_1 \frac{\partial V}{\partial x} = g_1 + m_1 \frac{\partial U}{\partial y} + k_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ b_2 D + n_2 \frac{\partial U}{\partial x} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x} = g_2 + m_2 \frac{\partial U}{\partial y} + k_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right.$$

äquivalent ist. Wir wollen nun das System von Gleichungen betrachten, zu welchem sowohl die Gleichungen (1) wie auch die Gleichungen (9) angehören.

Man sieht leicht, dass dieses System immer durch das System:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (g_1 + b_1) (D - 1) + (k_1 + n_1) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ \quad + 2l_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2m_1 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ (g_1 - b_1) (D + 1) + (k_1 - n_1) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \\ (g_2 + b_2) (D - 1) + (k_2 + n_2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ \quad + 2l_2 \frac{\partial V}{\partial x} - 2m_2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ (g_2 - b_2) (D + 1) + (k_2 - n_2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right.$$

ersetzt werden kann. Das System zweier unabhängiger Differentialgleichungen (1) besitzt daher dann und nur dann die Eigenschaft der Invarianz bei der Inversion der Transformation, wenn das dem Gesamtsysteme (1) und (9) äquivalente System (10) zwei und nur zwei unabhängige Gleichungen enthält. Beachtet man aber, dass jede Gleichung dieses letzteren Systems (10) in dem hier betrachteten Sinne invariant ist, so kommt man zum folgenden Schlusse.

Das System zweier unabhängiger Differentialgleichungen (1) bleibt dann und nur dann bei der Inversion der Transformation invariant, wenn dasselbe zweien solchen voneinander unabhängigen Differentialgleichungen äquivalent ist, deren jede bei der Inversion der Transformation invariant bleibt.

Daraus folgt, dass ein System zweier unabhängiger Differentialgleichungen der von uns betrachteten Form (1) dann und nur dann bei der Inversion der Transformation invariant bleibt, wenn dasselbe einem der folgenden Systeme äquivalent ist:

1) Das System:

$$\begin{aligned} \lambda_1(D-1) + \mu_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \nu_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \lambda_2(D-1) + \mu_2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \nu_2 \frac{\partial V}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

wo λ, μ, ν, ρ mit Indices Konstanten bezeichnen, welche der Bedingung genügen, dass nicht alle Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1 \\ \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2 \end{vmatrix}$$

gleich Null sind.

2) Das System:

$$\begin{aligned} \lambda(D-1) + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \sigma(D+1) + \tau \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ Konstanten bezeichnen, für welche folgende Bedingungen erfüllt sein müssen: die Konstanten λ, μ, ν, ρ können nicht alle gleichzeitig gleich Null sein, die Konstanten σ, τ können nicht alle beide gleichzeitig gleich Null sein und schliesslich die Konstanten μ, ν, ρ, τ können nicht alle gleichzeitig gleich Null sein.

3) Das System:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad D+1=0.$$

§ 2. Die Behandlung des nichtlinearen Systems im allgemeinen Falle.

Wir gehen jetzt dazu über, die Integration des Systems:

$$(1) \quad \begin{cases} g_1 D + k_1 \frac{\partial U}{\partial x} + l_1 \frac{\partial V}{\partial x} = b_1 + m_1 \frac{\partial U}{\partial y} + n_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ g_2 D + k_2 \frac{\partial U}{\partial x} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x} = b_2 + m_2 \frac{\partial U}{\partial y} + n_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

vorzunehmen. Wir setzen dabei für die Konstanten g, b, k, l, m, n die im § 1 angegebenen Eigenschaften der Matrices (6) und (7) voraus.

Es möge in der Folge die Bezeichnung:

$$(11) \quad \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 = (\lambda, \mu)$$

in Anwendung gebracht werden.

Im Falle wenn die Konstanten g_1 und g_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind, werden wir sagen, dass unser System nichtlinear ist. Es ist ersichtlich, dass in einem solchen Falle die Determinanten:

$$(g, k), (g, l), (g, m), (g, n)$$

nicht alle gleichzeitig gleich Null sind, denn es müssten in einem solchen Falle die gleichgestellten Elemente zweier Horizontalreihen der Matrix (6) einander proportional sein und es müssten also gegen unsere Voraussetzung, alle Determinanten zweiten Grades dieser Matrix gleich Null sein. Wenn man ferner die Bezeichnungen:

$$(12) \quad \begin{cases} k = \rho(g, k), & l = \rho(g, l), \\ m = \rho(g, m), & n = \rho(g, n), \\ & b = \rho(g, b) \end{cases}$$

benutzt, wo ρ zunächst ein unbestimmter von Null verschiedener Faktor ist, so ist es leicht zu sehen, dass aus den Gleichungen (1) die Gleichung:

$$(13) \quad k \frac{\partial U}{\partial x} + l \frac{\partial V}{\partial x} = b + m \frac{\partial U}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial y}$$

folgt, wo die Koeffizienten k, l, m, n nicht alle gleichzeitig gleich Null sind. Es ergibt sich dabei für die Determinante $lm - kn$ der Ausdruck:

$$(14) \quad lm - kn = \rho^2 [\varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2],$$

wo die Bezeichnungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = l_1 m_1 - k_1 n_1, & \varepsilon_{12} = l_1 m_2 - k_1 n_2, \\ \varepsilon_{21} = l_2 m_1 - k_2 n_1, & \varepsilon_{22} = l_2 m_2 - k_2 n_2 \end{cases}$$

in Anwendung gebracht sind. Die Grösse:

$$(16) \quad \varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2$$

kann entweder gleich Null sein oder aber von Null verschieden sein. Wir wollen uns zunächst mit den Fällen beschäftigen, in welchen diese Grösse von Null verschieden ist. Bestimmt man dabei eine Grösse s in der Weise, dass sie $+1$ ist, wenn die Grösse (16) positiv ist und dass sie gleich -1 ist, wenn die Grösse (16) negativ ist, dann folgen aus der Gleichung:

$$(17) \quad \rho^2 = \frac{s}{\varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2}$$

zwei reelle Werte für ρ und wenn wir in der Folge unter ρ einen dieser Werte verstehen, dann erhalten wir die Beziehung:

$$(18) \quad lm - kn = s.$$

Daraus folgt, dass die Funktionen U, V , welche der Differentialgleichung (13) genügen, durch die Formeln:

$$(19) \quad \begin{cases} u = s \left[l \frac{\partial F}{\partial x} - n \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{b}{2} (nx + ly) \right], \\ v = s \left[m \frac{\partial F}{\partial y} - k \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{b}{2} (mx + ky) \right] \end{cases}$$

bestimmt sind, wo $F(x, y)$ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wir fragen nun, wie diese Funktion gewählt werden muss, damit die Formeln (19) solche Funktionen U, V bestimmen, welche beide Gleichungen (1) befriedigen. Setzt man die Ausdrücke (19) in die erste dieser Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$(20) \quad g_1 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = (kl_1 - lk_1) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ + [lm_1 - ml_1 - (kn_1 - nk_1)] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (mn_1 - nm_1) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\ + sb_1 - (lm_1 - kn_1 + ml_1 - nk_1) \frac{b}{2} - g_1 \frac{b^2}{4}.$$

Setzt man aber die Ausdrücke (19) in die zweite der Gleichungen (1) ein, so folgt:

$$(21) \quad g_2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = (kl_2 - lk_2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ + [lm_2 - ml_2 - (kn_2 - nk_2)] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (mn_2 - nm_2) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\ + sb_2 - (lm_2 - kn_2 + ml_2 - nk_2) \frac{b}{2} - g_2 \frac{b^2}{4}.$$

Es ist leicht zu konstatieren, dass die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 kl_1 - lk_1 &= -\rho g_1(k, l), \\
 lm_1 - ml_1 &= -\rho g_1(l, m), \\
 kn_1 - nk_1 &= -\rho g_1(k, n), \\
 mn_1 - nm_1 &= -\rho g_1(m, n), \\
 sb_1 - (lm_1 - kn_1 + ml_1 - nk_1) \frac{b}{2} - g_1 \frac{b^2}{4} &= \\
 = \rho^2 g_1 \left\{ \varepsilon_{22} g_1 b_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (g_1 b_2 + b_1 g_2) + \right. \\
 \left. + \varepsilon_{11} g_2 b_2 - \frac{1}{4} (g, b)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

und die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 kl_2 - lk_2 &= -\rho g_2(k, l), \\
 lm_2 - ml_2 &= -\rho g_2(l, m), \\
 kn_2 - nk_2 &= -\rho g_2(k, n), \\
 mn_2 - nm_2 &= -\rho g_2(m, n), \\
 sb_2 - (lm_2 - kn_2 + ml_2 - nk_2) \frac{b}{2} - g_2 \frac{b^2}{4} &= \\
 = \rho^2 g_2 \left\{ \varepsilon_{22} g_1 b_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (g_1 b_2 + b_1 g_2) + \right. \\
 \left. + \varepsilon_{11} g_2 b_2 - \frac{1}{4} (g, b)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

bestehen. Aus diesen Beziehungen folgt, dass die einzige Differentialgleichung, welche aus den Gleichungen (20) und (21) folgt, in der Form:

$$(22) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 + A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + H = 0$$

geschrieben werden kann, wo die Bezeichnungen:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \rho(k, l), \quad B = \rho[(l, m) - (k, n)], \quad C = \rho(m, n), \\ H &= -\rho^2 \left\{ \varepsilon_{22} g_1 b_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (g_1 b_2 + g_2 b_1) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{11} g_2 b_2 - \frac{1}{4} (g, b)^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

in Anwendung gebracht sind. Man bemerke dabei, dass die Funktionaldeterminante der Funktionen (19) in bezug auf die Variablen x, y in der Form:

$$D = s \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \rho^2 (g, b)^2 \right]$$

oder auf Grund der Differentialgleichung (22) auch in der Form:

$$D = s \left[H_1 - A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - C \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]$$

dargestellt werden kann, wo die Bezeichnung:

$$H_1 = \rho^2 \left\{ \varepsilon_{22} g_1 b_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (g_1 b_2 + g_2 b_1) + \varepsilon_{11} g_2 b_2 \right\}$$

in Anwendung gebracht ist.

Wir sind also auf das folgende Resultat gekommen. Wenn die Konstanten g_1 und g_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und dabei die Grösse (16) von Null verschieden ist, dann besitzt jedes Funktionenpaar U, V , welches durch die Gleichungen (1) bestimmt ist, die Form (19), wo $F(x, y)$ eine Funktion der Veränderlichen x, y bezeichnet, welche die Differentialgleichung (22) befriedigt. Die in den Koeffizienten dieser Differentialgleichung vorkommende Grösse ρ ist eine der Wurzeln der Gleichung (17) und es ist ersichtlich, dass man bei einer dieser Wurzeln alle möglichen Funktionenpaare U, V erhalten kann, welche die Gleichungen (1) befriedigen. Es möge diesbezüglich bemerkt werden, dass die Formeln (17) und die Differentialgleichung (22) unverändert bleiben, wenn man in denselben die Grösse ρ und die Funktion $F(x, y)$ beziehungsweise durch die Grösse $-\rho$ und die Funktion $-F(x, y)$ ersetzt. Die Funktionenpaare U, V , welche auf diese Weise erhalten sind, bestimmen eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v , wenn die Funktionaldeterminante D nicht identisch gleich Null ist.

§ 3. Die Behandlung des nichtlinearen Systems in anderen Fällen.

Wir gehen nun zur Behandlung unserer Aufgabe unter der Voraussetzung über, dass die Konstanten g_1 und g_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind, dass aber die Grösse (16) gleich

Null ist. Wir wollen sagen, dass diese Voraussetzung durch die Gleichheit $s=0$ charakterisiert wird. In den zugehörigen Fällen ist es möglich solche Grössen $\rho, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ ausfindig machen, dass die Beziehungen:

$$(24) \quad \begin{cases} \mu \alpha = \rho(g, k), & \mu \beta = \rho(g, l), \\ \lambda \alpha = \rho(g, m), & \lambda \beta = \rho(g, n), \end{cases}$$

und dabei die Beziehungen:

$$(25) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

bestehen. Aus diesen Beziehungen folgen nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{(g, k)^2 + (g, l)^2 + (g, m)^2 + (g, n)^2}, \\ \alpha^2 &= \rho^2 [(g, k)^2 + (g, m)^2], & \beta^2 &= \rho^2 [(g, l)^2 + (g, n)^2], \\ \lambda^2 &= \rho^2 [(g, m)^2 + (g, n)^2], & \mu^2 &= \rho^2 [(g, k)^2 + (g, l)^2]. \end{aligned}$$

Für unseren Zweck müssen aber von den Wertsystemen $\rho, \alpha, \beta, \lambda, \mu$, welche die letzteren Gleichungen befriedigen, solche Wertsysteme gewählt werden, welche den Gleichungen (24) genügen. Es möge in der Folge unter $\rho, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ ein bestimmtes System von Grössen verstanden werden, welches die Gleichungen (24) und (25) befriedigt.

Aus den Gleichungen (1) folgt ebenso wie im vorigen Falle die Gleichung:

$$(13) \quad k \frac{\partial U}{\partial x} + l \frac{\partial V}{\partial x} = b + m \frac{\partial U}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial y}$$

und es bestehen für die Koeffizienten der Gleichung (13) in diesem Falle die Formeln:

$$\begin{aligned} k &= \mu \alpha, & l &= \mu \beta, \\ m &= \lambda \alpha, & n &= \lambda \beta, \\ b &= \rho(g, b). \end{aligned}$$

Die Funktionen U, V , welche die Gleichung (13) befriedigen, können jetzt durch die Formeln:

$$(26) \quad \begin{cases} u = \alpha f(z) - \beta G(x, y) - \alpha b t, \\ v = \beta f(z) + \alpha G(x, y) - \beta b t \end{cases}$$

dargestellt werden, wo die Bezeichnungen:

$$(27) \quad z = \lambda x + \mu y, \quad t = -\mu x + \lambda y$$

angewendet sind und wo unter $f(z)$ und $G(x, y)$ willkürliche Funktionen der in diesen Symbolen angezeigten Veränderlichen verstanden werden. Man bemerke hier, dass $G(x, y)$ auch als eine Funktion der Veränderlichen z und t betrachtet werden kann und dass die Formeln:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \lambda \frac{\partial G}{\partial z} - \mu \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \lambda \frac{\partial G}{\partial t} + \mu \frac{\partial G}{\partial z}$$

und demnach auch die Formeln:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x} + \mu \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - \mu \frac{\partial G}{\partial x}$$

bestehen. Wenn man die Ausdrücke (26) in die Gleichungen (1) hineinsetzt, so erhält man auf Grund der angeführten Differentiationen die Beziehungen:

$$(28) \quad g_1 \frac{df}{dz} \frac{\partial G}{\partial t} = (km_1 - mk_1 + ln_1 - nl_1) \frac{df}{dz} + \\ + (kl_1 - lk_1 + mn_1 - nm_1) \frac{\partial G}{\partial t} - (lm_1 - kn_1 + l_1m - k_1n + g_1b) \frac{\partial G}{\partial z} + \\ + b_1 - b(kk_1 + ll_1 + mm_1 + nn_1),$$

$$(29) \quad g_2 \frac{df}{dz} \frac{\partial G}{\partial t} = (km_2 - mk_2 + ln_2 - nl_2) \frac{df}{dz} + \\ + (kl_2 - lk_2 + mn_2 - nm_2) \frac{\partial G}{\partial t} - (lm_2 - kn_2 + l_2m - k_2n + g_2b) \frac{\partial G}{\partial z} + \\ + b_2 - b(kk_2 + ll_2 + mm_2 + nn_2).$$

Man kann ohne Schwierigkeit konstatieren, dass die Relationen:

$$kl_1 - lk_1 = -\rho g_1(k, l), \\ km_1 - mk_1 = -\rho g_1(k, m), \\ ln_1 - nl_1 = -\rho g_1(l, n), \\ mn_1 - nm_1 = -\rho g_1(m, n), \\ lm_1 - kn_1 + l_1m - k_1n = \rho [g_1(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) - 2g_2\varepsilon_{11}], \\ b_1 - b(kk_1 + ll_1 + mm_1 + nn_1) = \\ = \rho^2 g_1 [(g, k)(k, b) + (g, l)(l, b) + (g, m)(m, b) + (g, n)(n, b)]$$

und die Relationen:

$$\begin{aligned}
 kl_2 - lk_2 &= -\rho g_2(k, l), \\
 km_2 - mk_2 &= -\rho g_2(k, m), \\
 ln_2 - nl_2 &= -\rho g_2(l, n), \\
 mn_2 - nm_2 &= -\rho g_2(m, n), \\
 lm_2 - kn_2 + l_2m - k_2n &= \rho [2g_1 \varepsilon_{22} - g_2(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})], \\
 b_2 - b(kk_2 + ll_2 + mm_2 + nn_2) &= \\
 = \rho^2 g_2 [(g, k)(k, b) + (g, l)(l, b) + (g, m)(m, b) + (g, n)(n, b)]
 \end{aligned}$$

bestehen. Aus den Beziehungen (28) und (29) folgt eine einzige Beziehung, welche man in der Form:

$$(30) \quad \frac{df}{dz} \frac{\partial G}{\partial t} + A \frac{df}{dz} + B \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial z} + H = 0$$

schreiben kann, wo A, B, C, H Konstanten bezeichnen, welche durch die Formeln:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \rho [(k, m) + (l, n)], \quad B = \rho [(k, l) + (m, n)], \\ C = \rho \left[\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{g_2}{g_1} \varepsilon_{11} + (g, b) \right], \quad \text{wenn } g_1 \neq 0 \\ C = \rho \left[2 \frac{g_1}{g_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} + (g, b) \right], \quad \text{wenn } g_2 \neq 0 \\ H = -\rho^2 [(g, k)(k, b) + (g, l)(l, b) + (g, m)(m, b) + (g, n)(n, b)] \end{array} \right.$$

bestimmt sind. Wenn beide Ungleichheiten $g_1 \neq 0$ und $g_2 \neq 0$ erfüllt sind, dann liefern beide Formeln für C denselben Wert. Dies ergibt sich ohne Weiteres aus der Voraussetzung, dass der Ausdruck (16) gleich Null ist.

Wir sind daher im Falle, wenn die Konstanten g_1 und g_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und dabei die Grösse (16) gleich Null ist, zum Resultate gekommen, dass die Funktionen U, V , welche das System der Differentialgleichungen (1) befriedigen, durch die Formeln (26) bestimmt sind, wo $f(z)$ und $G(x, y)$ Funktionen bezeichnen, welche durch die Gleichung (30) miteinander verbunden sind.

Diese letztere Gleichung kann leicht integriert werden. Wenn nämlich die Konstante C von Null verschieden ist, dann lässt sich die allgemeinste Funktion $G(x, y)$, welche die Gleichung (30) befriedigt, durch die Formel:

$$G(x, y) = \frac{1}{C} [A(Bz - Ct) - Hz] + \Phi [f(z) + Bz - Ct]$$

darstellen, wo Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wenn dagegen C gleich Null ist, dann ergibt sich aus der Gleichung (30) für die Funktion $G(x, y)$ die Formel:

$$G(x, y) = - \frac{A \frac{df}{dz} + H}{\frac{df}{dz} + B} t + \Psi(z)$$

wo Ψ eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Die Funktionaldeterminante der Funktionen U, V in bezug auf die Variablen x, y kann in der Form:

$$D = \frac{df}{dz} \frac{\partial G}{\partial t} + \rho(g, b) \frac{\partial G}{\partial z}$$

oder auf Grund der Differentialgleichung (30) auch in der Form:

$$D = - \left(A \frac{df}{dz} + B \frac{\partial G}{\partial t} + C_1 \frac{\partial G}{\partial z} + H \right)$$

dargestellt werden, wo die Bezeichnung:

$$C_1 = \rho \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{g_2}{g_1} \varepsilon_{11} \right), \text{ wenn } g_1 \neq 0$$

$$C_1 = \rho \left(2 \frac{g_1}{g_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} \right), \text{ wenn } g_2 \neq 0$$

in Anwendung gebracht ist.

Das Funktionenpaar U, V deren Bestimmung wir hier behandelt haben, liefert vermöge der Formeln (26) dann und nur dann eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v , wenn die bezügliche Determinante D nicht identisch gleich Null ist.

§ 4. Einige Sätze über die Determinanten einer Matrix und eine quadratische Form.

Wir wollen hier einige Bemerkungen einschalten, welche sich auf die Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$(32) \quad \begin{vmatrix} k_1, l_1, m_1, n_1 \\ k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

und auf die Form:

$$(33) \quad \varepsilon_{22} \tau_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \tau_1 \tau_2 + \varepsilon_{11} \tau_2^2$$

beziehen, wo unter τ_1 und τ_2 reelle veränderliche Grössen verstanden werden. Es besteht bekanntlich die identische Beziehung:

$$(34) \quad (k, l)(m, n) + (k, m)(n, l) + (k, n)(l, m) = 0.$$

Es kann leicht verifiziert werden, dass die Beziehungen:

$$(35) \quad \begin{cases} \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} = (l, m) - (k, n), \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} = (k, l)(m, n) \end{cases}$$

bestehen. Bezeichnet man ferner die Diskriminante der Form (33) mit $\frac{1}{4} \omega$, so hat man die Gleichheit:

$$(36) \quad \omega = 4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2.$$

Diese Grösse kann mit Anwendung der Formeln (35) auch durch die Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) ausgedrückt werden. Man konstatiert nämlich, dass die Formel:

$$(37) \quad \omega = 4(k, l)(m, n) - [(l, m) - (k, n)]^2$$

besteht und durch Anwendung der Identität (34) findet man auch die Formel:

$$(38) \quad \omega = 4(n, l)(m, k) - [(l, m) - (n, k)]^2.$$

Auf Grund dieser Bemerkungen ist es möglich einige Sätze anzuführen, welche in gewisser Beziehung zu den Betrachtungen der nachfolgenden Paragraphen stehen.

Es lässt sich leicht Folgendes konstatieren: wenn die Gleichheiten:

$$(39) \quad (k, l) = 0, \quad (l, m) = (k, n), \quad (m, n) = 0$$

bestehen und die Form (33) nicht identisch gleich Null ist, dann sind alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null.

Aus der Formel (37) folgt, dass bei genannten Voraussetzungen ω gleich Null ist. Auf Grund der Formel (36) schliessen wir daher, dass wenigstens eine der Grössen ε_{11} und ε_{22} von Null verschieden ist. Wenn ε_{11} nicht Null ist, dann folgen aus der ersten und der dritten der Gleichheiten (39) die Beziehungen:

$$(40) \quad k_2 = pk_1, \quad l_2 = pl_1, \quad m_2 = qm_1, \quad n_2 = qn_1$$

und aus der zweiten der Gleichheiten (39) die Beziehung:

$$q = p.$$

Es sind also tatsächlich alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null und es erhellt, dass bei der Voraussetzung $\varepsilon_{22} \neq 0$ derselbe Schluss in analoger Weise erhalten werden kann.

Es kann auch der folgende analoge Satz bewiesen werden. Wenn die Gleichheiten:

$$(41) \quad (k, m) = 0, \quad (l, m) = (n, k), \quad (l, n) = 0$$

bestehen und die Form (33) nicht identisch gleich Null ist, dann sind alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null.

Aus der Formel (38) ergibt sich, dass beim Bestehen der Beziehungen (41) die Diskriminante ω gleich Null ist. Es ist daher wenigstens eine der Grössen ε_{11} und ε_{22} von Null verschieden. Wenn $\varepsilon_{11} \neq 0$, dann erhält man aus der ersten und der dritten der Gleichheiten (41) die Beziehungen:

$$k_2 = pk_1, \quad m_2 = pm_1, \quad l_2 = ql_1, \quad n_2 = qn_1$$

und demzufolge aus der zweiten der Gleichheiten (41) die Beziehung:

$$q = p.$$

Es sind also bei unseren Voraussetzungen alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null und derselbe Schluss kann auch bei der Annahme $\varepsilon_{22} \neq 0$ konstatiert werden.

Ferner können wir leicht die folgende Eigenschaft beweisen. Wenn gleichzeitig die Beziehungen:

$$(42) \quad (k, l) + (m, n) = 0, \quad (k, m) + (l, n) = 0, \quad \omega = 0$$

bestehen, dann sind alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null.

Aus den Beziehungen (42) folgen auf Grund der Formeln (37) und (38) die Beziehungen:

$$4(k, l)^2 + [(l, m) - (k, n)]^2 = 0,$$

$$4(k, m)^2 + [(l, m) + (k, n)]^2 = 0.$$

Es folgt demnach aus den Gleichheiten (42) die Tatsache, dass alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null sind.

Es können noch weitere Sätze konstatiert werden.

Wenn gleichzeitig die Beziehungen:

$$(k, l) + (m, n) = 0, \quad \omega = 0$$

bestehen und dabei die Form (33) nicht identisch gleich Null ist, dann sind alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null.

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes kommen wir mit Anwendung der Formel (37) auf die Beziehungen:

$$(k, l) = 0, \quad (l, m) = (k, n), \quad (m, n) = 0.$$

Hiemit wird der Beweis dieses Satzes auf den Beweis eines der früheren Sätze zurückgeführt.

Wenn gleichzeitig die Beziehungen:

$$(k, m) + (l, n) = 0, \quad \omega = 0$$

bestehen und dabei die Form (33) nicht identisch gleich Null ist, dann sind alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null.

Bei den Voraussetzungen dieses Satzes erhält man unter Benutzung der Formel (38) die Gleichheiten:

$$(k, m) = 0, \quad (l, m) = (n, k), \quad (l, n) = 0,$$

womit der Beweis dieses Satzes auf den Beweis eines der früheren Sätze reduziert wird.

Man bemerke, dass in den meisten Sätzen dieses Paragraphen vorausgesetzt wird, dass die Grössen ε_{11} und ε_{22} nicht beide gleichzeitig gleich Null sind. Wir wollen nun die Eigenschaften der hier vorkommenden Grössen bei der Voraussetzung untersuchen, dass die Koeffizienten k_1, l_1, m_1, n_1 nicht alle gleichzeitig gleich Null sind, aber ε_{11} gleich Null ist und dass die Koeffizienten k_2, l_2, m_2, n_2 nicht alle gleichzeitig gleich Null sind, aber ε_{22} gleich Null ist. In solchen Fällen ist es möglich die angeführten Koeffizienten in der Form:

$$(43) \quad \begin{cases} k_1 = \mu_1 a_1, & l_1 = \mu_1 b_1, & m_1 = \lambda_1 a_1, & n_1 = \lambda_1 b_1, \\ k_2 = \mu_2 a_2, & l_2 = \mu_2 b_2, & m_2 = \lambda_2 a_2, & n_2 = \lambda_2 b_2 \end{cases}$$

darstellen, wo a_1, b_1 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind, wo λ_1, μ_1 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind, wo a_2, b_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und wo λ_2, μ_2 nicht beide

gleichzeitig gleich Null sind. Auf Grund der Formeln (43) ist es leicht die Beziehung:

$$(44) \quad \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = (a, b)(\lambda, \mu)$$

konstatieren und die Formeln:

$$(45) \quad \begin{cases} (k, l) = \mu_1 \mu_2 (a, b), & (m, n) = \lambda_1 \lambda_2 (a, b), \\ (l, m) - (k, n) = -(\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2)(a, b), \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} (k, m) = -a_1 a_2 (\lambda, \mu), & (l, n) = -b_1 b_2 (\lambda, \mu), \\ (l, m) - (n, k) = -(a_1 b_2 + b_1 a_2)(\lambda, \mu) \end{cases}$$

aufzustellen. Aus den Formeln (45) folgt die Beziehung:

$$(47) \quad (k, l) + (m, n) = (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2)(a, b)$$

und aus den Formeln (46) die Beziehung:

$$(48) \quad (k, m) + (l, n) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2)(\lambda, \mu).$$

Um die früheren Sätze in bezug auf die Fälle zu vervollständigen, welche durch die Eigenschaften $\varepsilon_{11} = 0$ und $\varepsilon_{22} = 0$ charakterisiert sind, können wir diejenigen Resultate in Betracht ziehen, welche aus den Formeln (44), (45), (46), (47), (48) unter der Annahme:

$$(44) \quad \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 0$$

sich ergeben. Diese Gleichheit ist erstens dann erfüllt, wenn

$$(a, b) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq 0.$$

In einem solchen Falle haben wir die Gleichheiten:

$$a_2 = r a_1, \quad b_2 = r b_1,$$

wo r von Null verschieden ist und die Formeln (45) liefern daher die Resultate:

$$(k, l) = 0, \quad (l, m) - (k, n) = 0, \quad (m, n) = 0,$$

während aus den Formeln (46) die Werte:

$$\begin{aligned} (k, m) &= -r a_1^2 (\lambda, \mu), & (l, n) &= -r b_1^2 (\lambda, \mu), \\ (l, m) - (n, k) &= -2r a_1 b_1 (\lambda, \mu) \end{aligned}$$

sich ergeben, welche nicht alle gleichzeitig gleich Null sind. In derselben Weise liefert die Formel (47) das Resultat:

$$(k, l) + (m, n) = 0,$$

während aus der Formel (48) ergibt sich der Wert:

$$(k, m) + (l, n) = -2r(a_1^2 + b_1^2)(\lambda, \mu),$$

welcher von Null verschieden ist. Die Gleichheit (44) ist zweitens dann erfüllt, wenn:

$$(\lambda, \mu) = 0, \quad (a, b) \neq 0.$$

Es bestehen alsdann die Formeln:

$$\lambda_2 = s \lambda_1, \quad \mu_2 = s \mu_1,$$

wo s von Null verschieden ist. Aus den Formeln (45) und (46) erhalten wir demnach die Werte:

$$(k, l) = s \mu_1^2(a, b), \quad (m, n) = s \lambda_1^2(a, b), \\ (l, m) - (k, n) = -2s \lambda_1 \mu_1(a, b)$$

und die Werte:

$$(k, m) = 0, \quad (l, m) - (n, k) = 0, \quad (l, n) = 0.$$

Auf Grund der Formel (47) ergibt sich alsdann der Wert:

$$(k, l) + (m, n) = s(\lambda_1^2 + \mu_1^2)(a, b),$$

welcher von Null verschieden ist, und auf Grund der Formel (48) das Resultat:

$$(k, m) + (l, n) = 0.$$

§ 5. Die Behandlung eines linearen nichthomogenen Systems.

Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Fälle des Systems (1) über, in welchen beide Koeffizienten g_1 und g_2 gleich Null sind. Wir haben alsdann das System:

$$(49) \quad \begin{cases} k_1 \frac{\partial U}{\partial x} + l_1 \frac{\partial V}{\partial x} = b_1 + m_1 \frac{\partial U}{\partial y} + n_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ k_2 \frac{\partial U}{\partial x} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x} = b_2 + m_2 \frac{\partial U}{\partial y} + n_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

und damit dieses System weder auf Widersprüche führt, noch sich auf eine kleinere Anzahl von Gleichungen reduzieren lässt, müssen die Koeffizienten der Gleichungen desselben die Eigen-

schaft besitzen, dass nicht alle Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$(32) \quad \begin{vmatrix} k_1, l_1, m_1, n_1 \\ k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

gleich Null seien. Wir setzen dies voraus und wollen zunächst diejenigen Fälle behandeln, in welchen die Koeffizienten b_1 und b_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind. Unter diesen Voraussetzungen werden wir sagen, dass unser System linear nichthomogen ist.

Es ist ersichtlich, dass in solchen Fällen aus den Gleichungen (49) eine einzige Gleichung von der Form:

$$(50) \quad k \frac{\partial U}{\partial x} + l \frac{\partial V}{\partial x} = m \frac{\partial U}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial y}$$

folgt. In dieser Gleichung sind die Bezeichnungen:

$$(51) \quad \begin{cases} k = \rho(b, k), & l = \rho(b, l), \\ m = \rho(b, m), & n = \rho(b, n) \end{cases}$$

in Anwendung gebracht, wo ρ zunächst ein unbestimmter von Null verschiedener Faktor ist. Berechnet man aber die Determinante $lm - kn$, so ergibt sich die Formel:

$$(52) \quad lm - kn = \rho^2 [\varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2]$$

und wir kommen somit auf die Betrachtung des Wertes des Ausdruckes:

$$(53) \quad \varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2.$$

Es möge dieser Wert zunächst von Null verschieden sein. Definiert man die Grösse t in der Weise, dass sie gleich $+1$ ist, wenn der Ausdruck (53) positiv ist, und dass sie gleich -1 ist, wenn der Ausdruck (53) negativ ist, so liefert die Gleichung:

$$\rho^2 = \frac{t}{\varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2}$$

zwei reelle Werte für ρ und für jeden dieser Werte erhält man die Beziehung:

$$lm - kn = t.$$

Alsdann lässt sich jedes Funktionenpaar U, V , welches die Gleichung (50) befriedigt, durch die Formeln:

$$(54) \quad u = t \left(l \frac{\partial F}{\partial x} - n \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad v = t \left(m \frac{\partial F}{\partial y} - k \frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

darstellen, wo $F(x, y)$ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Es bleibt nun übrig die Differentialgleichung zu bestimmen, welche von der Funktion $F(x, y)$ erfüllt werden muss, damit die Formeln (54) jedes Funktionenpaar U, V bestimmen, welches die beiden Gleichungen des Systems (49) erfüllen. Durch eine Rechnung, welche analog der Rechnung ist, die im § 2 angegeben ist, kommt man zum Schlusse, dass diese Differentialgleichung die folgende ist:

$$(55) \quad A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = t,$$

wo die Bezeichnungen:

$$A = \rho(k, l), \quad B = \rho[(l, m) - (k, n)], \quad C = \rho(m, n)$$

in Anwendung gebracht sind. Die Koeffizienten A, B, C der Gleichung (55) können nicht alle gleichzeitig gleich Null sein, denn es wären alsdann auf Grund eines Satzes, welchen wir in dem vorigen Paragraphen angeführt haben, alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null, was widerspricht unserer Voraussetzung.

Es sei jetzt der Ausdruck (53) gleich Null. Wir wollen sagen, dass diese Voraussetzung durch die Gleichheit $t = 0$ charakterisiert wird. In den entsprechenden Fällen können Koeffizienten $\rho, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ bestimmt werden, welche die Gleichungen:

$$(57) \quad \begin{cases} \mu \alpha = \rho(b, k), & \mu \beta = \rho(b, l), \\ \lambda \alpha = \rho(b, m), & \lambda \beta = \rho(b, n) \end{cases}$$

und die Gleichungen:

$$(25) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

befriedigen. Die Wertsysteme, welche dies tun, befinden sich unter den Wertsystemen, welche die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{(b, k)^2 + (b, l)^2 + (b, m)^2 + (b, n)^2}, \\ \alpha^2 &= \rho^2 [(b, k)^2 + (b, m)^2], \quad \beta^2 = \rho^2 [(b, l)^2 + (b, n)^2]; \\ \lambda^2 &= \rho^2 [(b, m)^2 + (b, n)^2], \quad \mu^2 = \rho^2 [(b, k)^2 + (b, l)^2] \end{aligned}$$

erfüllen. Wir wollen in der Folge unter $\rho, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ ein bestimmtes System von Grössen verstehen, welches die Gleichungen (57) und (25) befriedigt.

Aus den Gleichungen (49) folgt die Gleichung:

$$(58) \quad k \frac{\partial U}{\partial x} + l \frac{\partial V}{\partial x} = m \frac{\partial U}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial y},$$

wobei die Formeln:

$$k = \mu \alpha, \quad l = \mu \beta, \quad m = \lambda \alpha, \quad n = \lambda \beta$$

bestehen. Die Gleichung (58) wird in allgemeinsten Weise durch Funktionen U, V befriedigt, welche vermöge der Formeln:

$$(59) \quad u = \alpha f(z) - \beta G(x, y), \quad v = \beta f(z) + \alpha G(x, y)$$

bestimmt sind, wo $f(z)$ und $G(x, y)$ willkürliche Funktionen der Veränderlichen bezeichnen, die in diesen Symbolen auftreten. Diese Funktionen sollen nun in der Weise gewählt werden, dass beide Gleichungen (49) erfüllt seien. Durch eine Rechnung, welche der Rechnung analog ist, die wir im § 3 angeführt haben, kommen wir zum Resultate, dass beide Gleichungen (49) dann und nur dann durch das Funktionenpaar (59) befriedigt werden, wenn die Bedingung:

$$(60) \quad A \frac{df}{dz} + B \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial z} = 1$$

erfüllt ist, wo A, B, C Konstanten bezeichnen, welche durch die Formeln:

$$(61) \quad \begin{cases} A = \rho [(k, m) + (l, n)], & B = \rho [(k, l) + (m, n)], \\ C = \rho \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{b_2}{b_1} \varepsilon_{11} \right), & \text{wenn } b_1 \neq 0, \\ C = \rho \left(2 \frac{b_1}{b_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} \right), & \text{wenn } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt sind. Beim Bestehen beider Bedingungen: $b_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$ liefern beide Formeln für C denselben Wert. Man bemerke dabei, dass die Grösse C dann und nur dann gleich Null ist, wenn die Gleichheit:

$$4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2 = 0$$

besteht. Es ist daher ersichtlich, dass die Koeffizienten A, B, C der Gleichung (60) nicht gleichzeitig gleich Null sein können,

denn es wären alsdann auf Grund eines Satzes der vorigen Nummer alle Determinanten zweiten Grades der Matrix (32) gleich Null, was widerspricht unserer Voraussetzung.

Die Gleichung (60) kann leicht integriert werden. Wenn $C \neq 0$, dann folgt aus derselben die Beziehung:

$$G(x, y) = \frac{1}{C} [z - Af(z)] + \Phi(Bz - Ct),$$

wo Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wenn $C = 0$, aber $B \neq 0$, dann ergibt sich die Beziehung:

$$G(x, y) = \frac{1}{B} \left(1 - A \frac{df}{dz} \right) t + \Psi(z),$$

wo Ψ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wenn schliesslich $C = 0$, $B = 0$, dann ist $A \neq 0$ und die Funktion $G(x, y)$ bleibt willkürlich, während für $f(z)$ ergibt sich die Formel:

$$f(z) = \frac{z}{A} + E,$$

wo E eine willkürliche Konstante ist.

Wir wollen noch für die Funktionenpaare U, V , die wir in diesem Paragraphe betrachtet haben, die Ausdrücke der betreffenden Funktionaldeterminanten anführen. Für die Funktionen (54) ergibt sich der Ausdruck:

$$D = t \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

und für die Funktionen (59) der Ausdruck:

$$D = \frac{df}{dz} \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Funktionaldeterminante nicht identisch gleich Null ist, liefern die betreffenden Gleichungen eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v .

§ 6. Die Behandlung des homogenen linearen Systems.

Es seien nun in dem Systeme partieller Differentialgleichungen (1) alle vier Koeffizienten g_1, g_2, b_1, b_2 gleich Null. Dieses System besitzt sodann die Form:

$$(62) \quad \begin{cases} k_1 \frac{\partial U}{\partial x} + l_1 \frac{\partial V}{\partial x} = m_1 \frac{\partial U}{\partial y} + n_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ k_2 \frac{\partial U}{\partial x} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x} = m_2 \frac{\partial U}{\partial y} + n_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

und wir können dasselbe als ein lineares homogenes System bezeichnen. Es sind dabei gemäss unseren allgemeinen Voraussetzungen nicht alle Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} k_1, l_1, m_1, n_1 \\ k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

gleich Null.

Es möge zunächst die Grösse ε_{11}^* von Null verschieden sein. Man bezeichne mit ε_1 entweder $+1$ oder -1 , jenachdem die Grösse ε_{11} positiv oder negativ ist. Man kann für die nachfolgenden Formeln voraussetzen, dass die Koeffizienten der ersten der Gleichungen (62) so gewählt sind, dass $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$ ist. Alsdann wird die erste der Gleichungen (62) in allgemeiner Weise durch Funktionen:

$$(63) \quad u = \varepsilon_1 \left(l_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} - n_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \quad v = \varepsilon_1 \left(m_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} - k_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)$$

befriedigt, wo $F_1(x, y)$ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Damit die Funktionen (63) auch die zweite der Gleichungen (62) erfüllen, muss die Funktion $F_1(x, y)$ die Differentialgleichung:

$$(64) \quad A \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = 0$$

befriedigen, wo die Bezeichnungen:

$$A = (k, l), \quad B = (l, m) - (k, n), \quad C = (m, n)$$

in Anwendung gebracht sind. Auf Grund eines Satzes des § 4 können bei unseren Voraussetzungen nicht alle Koeffizienten A, B, C gleichzeitig gleich Null sein.

Man setze nun voraus, dass die Grösse ε_{22} von Null verschieden ist und bezeichne mit ε_2 entweder $+1$ oder -1 , jenachdem ε_{22} positiv oder negativ ist. Durch Anwendung eines entsprechenden Faktors können die Koeffizienten der zweiten Gleichung immer so gewählt werden, dass $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$ ist. Aus der zweiten Gleichung folgt sodann:

$$(65) \quad u = \varepsilon_2 \left(l_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} - n_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} \right), \quad v = \varepsilon_2 \left(m_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} - k_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} \right),$$

wo $F_2(x, y)$ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Die erste der Gleichungen (62) liefert aber für die Funktion $F_2(x, y)$ die Bedingung von der Form:

$$(66) \quad A \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0,$$

wo wieder die Bezeichnungen:

$$A = (k, l), \quad B = (l, m) - (k, n), \quad C = (m, n)$$

angewendet sind. Diese Koeffizienten können nicht alle gleichzeitig gleich Null sein.

Wir wollen aber noch eine andere Art der Erfüllung des Systems (62) in Betrachtung ziehen. Es seien zwei Faktoren τ_1 und τ_2 , die nicht beide gleichzeitig gleich Null sind. Aus den Gleichungen (62) folgt die Gleichung:

$$(67) \quad (\tau, k) \frac{\partial U}{\partial x} + (\tau, l) \frac{\partial V}{\partial x} = (\tau, m) \frac{\partial U}{\partial y} + (\tau, n) \frac{\partial V}{\partial y},$$

wo die auftretenden vier Koeffizienten nicht alle gleichzeitig gleich Null sind. Will man die Faktoren τ_1 und τ_2 derart bestimmen suchen, dass die Gleichung:

$$(\tau, l) (\tau, m) - (\tau, k) (\tau, n) = 0,$$

d. h. die Gleichung:

$$\varepsilon_{22} \tau_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \tau_1 \tau_2 + \varepsilon_{11} \tau_2^2 = 0$$

befriedigt wäre, so bekommt man dann und nur dann reelle Werte für beide dieser Faktoren, wenn die Bedingung:

$$(68) \quad \omega = 4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2 \leq 0$$

erfüllt ist. Für solche Faktoren τ_1, τ_2 können in derselben Weise die entsprechenden Grössen $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ berechnet werden, wie wir für die Faktoren g_1, g_2 und für die Faktoren h_1, h_2 die ebenso bezeichneten Grössen in den §§ 3 und 5 berechnet haben. Ist für die genannten Faktoren τ_1, τ_2 ein zugehöriges System der Grössen $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ aufgestellt, so wird die Differentialgleichung (67) in allgemeinsten Weise durch die Formeln:

$$(69) \quad u = \alpha f(z) - \beta G(x, y), \quad v = \beta f(z) + \alpha G(x, y)$$

befriedigt, wo $f(z)$ und $G(x, y)$ willkürliche Funktionen der angeführten Veränderlichen bezeichnen. Die Ausdrücke (69) befriedigen dann und nur dann die beiden Gleichungen (62), wenn die Funktionen $f(z)$ und $G(x, y)$ die Bedingung:

$$(70) \quad A \frac{df}{dz} + B \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

erfüllen, wo A, B, C Konstanten bezeichnen, welche durch die Formeln:

$$(71) \quad \begin{cases} A = (k, m) + (l, n), & B = (k, l) + (m, n), \\ C = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{\tau_2}{\tau_1} \varepsilon_{11}, & \text{wenn } \tau_1 \neq 0, \\ C = 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}, & \text{wenn } \tau_2 \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Koeffizienten A, B, C können nicht alle gleichzeitig gleich Null sein. Der Koeffizient C ist dann und nur dann gleich Null, wenn die Gleichheit $\omega = 0$ erfüllt ist. Man kann die Beziehung (70) mit Hilfe der Integration durch eine andere Beziehung ersetzen. Wenn $C \neq 0$, dann erhält man die Beziehung:

$$G(x, y) = -\frac{A}{C} f(z) + \Phi(Bz - Ct),$$

wo Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wenn $C = 0$, aber $B \neq 0$, dann ergibt sich die Beziehung:

$$G(x, y) = -\frac{A}{B} \frac{df}{dz} t + \Psi(z),$$

wo Ψ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Wenn schliesslich $C = 0, B = 0$, dann ist $A \neq 0$ und $f(z)$ ist eine Konstante. Die Formeln (69) liefern daher in diesem letzten Falle niemals eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v .

Die Lösung des Systems (62) durch die Formeln (69) ist bei Anwendung reeller Konstanten nur dann möglich, wenn die Bedingung (68) erfüllt ist. Für Fälle aber, in welchen die Ungleichheit:

$$(72) \quad \omega = 4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2 > 0$$

besteht, haben wir die Formeln (63) mit der Gleichung (64) und auch die Formeln (65) mit der Gleichung (66). Bei Erfüllung der Ungleichheit (72) besitzt die Form:

$$\varepsilon_{22} \tau_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \tau_1 \tau_2 + \varepsilon_{11} \tau_2^2$$

ein konstantes Vorzeichen, welches durch die Grösse $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ bestimmt ist.

Für die Fälle des gegenwärtigen Paragraphen werden die Funktionaldeterminanten durch ebensolche Formeln wie im § 5 bestimmt. Es wird daher in jedem dieser Fälle die betreffende Bedingung für das Bestehen einer Transformation ebenso wie im § 5 formuliert.

§ 7. Die Bestimmung der inversen Transformationen.

In den §§ 2, 3, 5 und 6 haben wir gewisse Funktionenpaare U, V aufgestellt. In Fällen, wenn diese Funktionenpaare Transformationen der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v bestimmen, können noch Transformationen der Veränderlichen u, v in die Veränderlichen x, y betrachtet werden, welche den früheren invers sind. Indem wir diese Betrachtung unternehmen, werden wir die Thatsache ausnutzen, dass wenn die Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v die Differentialgleichungen (1) befriedigt, dann befriedigt die Transformation der Veränderlichen u, v in die Veränderlichen x, y die Differentialgleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} b_1 \Delta + n_1 \frac{\partial X}{\partial u} + l_1 \frac{\partial Y}{\partial u} = g_1 + m_1 \frac{\partial X}{\partial v} + k_1 \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ b_2 \Delta + n_2 \frac{\partial X}{\partial u} + l_2 \frac{\partial Y}{\partial u} = g_2 + m_2 \frac{\partial X}{\partial v} + k_2 \frac{\partial Y}{\partial v}. \end{cases}$$

Für diese Gleichungen gilt die im § 1 angegebene Voraussetzung, d. h. die Voraussetzung, dass nicht alle Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} g_1, k_1, l_1, m_1, n_1 \\ g_2, k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

gleichzeitig gleich Null sind und dass nicht alle Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} b_1, k_1, l_1, m_1, n_1 \\ b_2, k_2, l_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

gleichzeitig gleich Null sind. Um die Resultate anzugeben, welche aus den Differentialgleichungen (8) folgen, kann die Bemerkung

in Anwendung gebracht werden, dass die Gleichungen (8) aus den Gleichungen (1) dadurch erhalten werden können, dass man die Buchstaben: $x, y, U, V, g_1, k_1, l_1, b_1, m_1, n_1, g_2, k_2, l_2, b_2, m_2, n_2$, beziehungsweise durch die Buchstaben: $u, v, X, Y, b_1, n_1, l_1, g_1, m_1, k_1, b_2, n_2, l_2, g_2, m_2, k_2$, ersetzt. Aus dieser Bemerkung folgt, dass durch diese Vertauschung und die entsprechenden Modifikationen aus den Formeln der §§ 2, 3, 5 und 6 die Formeln folgen müssen, welche inverse Transformationen der in diesen Paragraphen angegebenen Transformationen bestimmen.

Wir nehmen zunächst an, dass b_1 und b_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und dass dabei der Ausdruck:

$$(73) \quad \varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2$$

von Null verschieden ist. Berechnet man alsdann die Größen:

$$(74) \quad \begin{cases} n = \sigma(b, n), & l = \sigma(b, l), \\ m = \sigma(b, m), & k = \sigma(b, k), \\ g = \sigma(b, g) \end{cases}$$

wo σ aus der Gleichung:

$$\sigma^2 = \frac{t}{\varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2}$$

folgt, in welcher $t = +1$, oder $t = -1$ ist, jenachdem der Ausdruck (73) positiv oder negativ ist, so wird die inverse Transformation durch die Formeln:

$$(75) \quad \begin{cases} x = t \left[l \frac{\partial \Phi}{\partial u} - k \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{g}{2} (ku + lv) \right], \\ y = t \left[m \frac{\partial \Phi}{\partial v} - n \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{g}{2} (mu + nv) \right] \end{cases}$$

bestimmt, wo $\Phi(u, v)$ die Differentialgleichung:

$$(76) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right)^2 + L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + R = 0$$

befriedigt, in welcher die Bezeichnungen:

$$(77) \quad \begin{cases} L = \sigma(n, l), & M = \sigma[(l, m) - (n, k)], & N = \sigma(m, n), \\ R = -\sigma^2 \left\{ \varepsilon_{22} b_1 g_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (b_1 g_2 + g_1 b_2) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{11} b_2 g_2 - \frac{1}{4} (b, g)^2 \right\} \end{cases}$$

in Anwendung gebracht sind. Die Funktionaldeterminante der Funktionen (75) kann entweder durch die Formel:

$$\Delta = t \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right)^2 + \frac{1}{4} \sigma^2 (b, g)^2 \right],$$

oder durch die Formel:

$$\Delta = t \left(R_1 - L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)$$

dargestellt werden, wo die Bezeichnung:

$$R_1 = \sigma^2 \left\{ \varepsilon_{22} b_1 g_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) (b_1 g_2 + b_2 g_1) + \varepsilon_{11} b_2 g_2 \right\}$$

angewendet ist.

Wenn b_1 und b_2 nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und dabei die Gleichheit:

$$\varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{11} b_2^2 = 0$$

besteht, dann können die zugehörigen Fälle durch die Gleichheit $t=0$ charakterisiert werden. Es ist alsdann möglich die Grösse σ , λ , μ , α , β , derart zu bestimmen, dass die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1, \\ \beta \lambda &= \sigma (b, n), \quad \beta \mu = \sigma (b, l), \\ \alpha \lambda &= \sigma (b, m), \quad \alpha \mu = \sigma (b, k) \end{aligned}$$

bestehen und es lassen sich die Funktionen X, Y durch die Formeln:

$$(78) \quad \begin{cases} x = \lambda \varphi (\zeta) - \mu \Psi (u, v) - \lambda g \tau, \\ y = \mu \varphi (\zeta) + \lambda \Psi (u, v) - \mu g \tau \end{cases}$$

bestimmen. Es sind in diesen Formeln einerseits die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha u + \beta v, \quad \tau = -\beta u + \alpha v, \\ g &= \sigma (b, g) \end{aligned}$$

in Anwendung gebracht und es sind anderseits die Funktionen $\varphi (\zeta)$ und $\Psi (u, v)$ der Bedingung:

$$(79) \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + L \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + M \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + N \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + R = 0$$

unterworfen, wo die Bezeichnungen:

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \sigma [(n, m) + (l, k)], \quad M = \sigma [(n, l) + (m, k)], \\ N = \sigma \left[\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{b_2}{b_1} \varepsilon_{11} + (b, g) \right], \quad \text{wenn } b_1 \neq 0 \\ N = \sigma \left[2 \frac{b_1}{b_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} + (b, g) \right], \quad \text{wenn } b_2 \neq 0 \\ R = -\sigma^2 [(b, n)(n, g) + (b, l)(l, g) + (b, m)(m, g) + (b, k)(k, g)] \end{array} \right.$$

benutzt sind. Die entsprechende Funktionaldeterminante kann entweder in der Form:

$$\Delta = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \sigma(b, g) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}$$

oder in der Form:

$$\Delta = - \left(L \frac{d\varphi}{d\zeta} + M \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + N_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + R \right)$$

dargestellt werden, wo die Bezeichnung:

$$N_1 = \sigma \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{b_2}{b_1} \varepsilon_{11} \right), \quad \text{wenn } b_1 \neq 0, \\ N_1 = \sigma \left(2 \frac{b_1}{b_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} \right), \quad \text{wenn } b_2 \neq 0$$

angewendet ist.

Es sei ferner $b_1 = b_2 = 0$ und es mögen dabei nicht die beiden Koeffizienten g_1 und g_2 gleich Null sein. Wenn zunächst der Wert des Ausdruckes:

$$(81) \quad \varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2$$

von Null verschieden ist, dann werden wir mit s entweder $+1$ oder -1 bezeichnen, jenachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, und ferner die Grössen:

$$n = \sigma(g, n), \quad l = \sigma(g, l) \\ m = \sigma(g, m), \quad k = \sigma(g, k)$$

berechnen, wo σ aus der Gleichung:

$$\sigma^2 = \frac{s}{\varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2}$$

folgt. Alsdann lässt sich die inverse Transformation durch die Formeln:

$$(82) \quad x = s \left(l \frac{\partial \Phi}{\partial u} - k \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right), \quad y = s \left(m \frac{\partial \Phi}{\partial v} - n \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)$$

bestimmen, in welchen eine Funktion $\Phi(u, v)$ auftritt, welche die Differentialgleichung:

$$(83) \quad L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = s$$

befriedigen muss, wo die Bezeichnungen:

$$L = \sigma(n, l), \quad M = \sigma[(l, m) - (n, k)], \quad N = \sigma(m, k)$$

in Anwendung gebracht sind. Die Funktionaldeterminante der Funktionen (81) wird dabei durch die Formel:

$$\Delta = s \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right)^2 \right]$$

bestimmt sein.

Wenn ferner der Wert des Ausdruckes (81) gleich Null ist, dann wollen wir die zugehörigen Fälle durch die Gleichheit $s = 0$ charakterisieren und es können die Grössen $\sigma, \lambda, \mu, \alpha, \beta$ in der Weise bestimmt werden, dass sie die Beziehungen:

$$(84) \quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 = 1, & \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ \beta \lambda = \sigma(g, n), & \beta \mu = \sigma(g, l), \\ \alpha \lambda = \sigma(g, m), & \alpha \mu = \sigma(g, k) \end{cases}$$

befriedigen. Es ist ersichtlich, dass solche Systeme der Grössen $\sigma, \lambda, \mu, \alpha, \beta$ unter denjenigen Systemen dieser Grössen sich befinden, welche die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{(g, n)^2 + (g, l)^2 + (g, m)^2 + (g, k)^2}, \\ \lambda^2 &= \sigma^2 [(g, n)^2 + (g, m)^2], & \mu^2 &= \sigma^2 [(g, l)^2 + (g, k)^2], \\ \alpha^2 &= \sigma^2 [(g, m)^2 + (g, k)^2], & \beta^2 &= \sigma^2 [(g, n)^2 + (g, l)^2] \end{aligned}$$

erfüllen. Wenn wir unter $\sigma, \lambda, \mu, \alpha, \beta$ ein bestimmtes System der Grössen verstehen, welche die Gleichungen (84) befriedigen, so werden wir in dem betrachteten Falle die inverse Transformation durch die Formeln:

$$(85) \quad x = \lambda \varphi(\xi) - \mu \psi(u, v), \quad y = \mu \varphi(\xi) + \lambda \psi(u, v)$$

darstellen können, wo die Bezeichnung:

$$(86) \quad \zeta = \alpha u + \beta v$$

angewendet ist und unter $\varphi(\zeta)$ und $\psi(u, v)$ gewisse Funktionen der angezeigten Veränderlichen verstanden werden. Wenn man nämlich noch die Bezeichnung:

$$(87) \quad \tau = -\beta u + \alpha v$$

benutzt, so wird man die Bedingung, welche durch diese Funktionen erfüllt werden muss, in der Form:

$$(88) \quad L \frac{d\varphi}{d\zeta} + M \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + N \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = 1$$

schreiben können, wo L, M, N Konstanten sind, die durch die Formeln:

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \sigma[(n, m) + (l, k)], \quad M = \sigma[(n, l) + (m, l)], \\ N = \sigma\left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{g_2}{g_1} \varepsilon_{11}\right), \quad \text{wenn } g_1 \neq 0, \\ N = \sigma\left(2 \frac{g_1}{g_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}\right), \quad \text{wenn } g_2 \neq 0 \end{array} \right.$$

bestimmt sind. Die Funktionaldeterminante der Transformation (84) kann durch die Formel:

$$\Delta = \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}$$

dargestellt werden.

Wenn schliesslich alle vier Koeffizienten g_1, g_2, h_1, h_2 gleich Null sind, d. h. wenn das System der betrachteten Gleichungen linear und homogen ist, dann werden wir analog den Resultaten des §6 folgende Formeln für entsprechende inverse Transformationen angeben können. Wenn die Grösse ε_{11} von Null verschieden ist, dann können die Koeffizienten der ersten Gleichung unseres Systems so gewählt werden, dass $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$ ist, wo ε_1 entweder $+1$ oder -1 ist. Alsdann ergeben sich für die inverse Transformation die Formeln:

$$(90) \quad x = \varepsilon_1 \left(l_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} - k_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right), \quad y = \varepsilon_1 \left(m_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} - n_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} \right),$$

wo $\Phi(u, v)$ eine Funktion bezeichnet, welche die Differentialgleichung:

$$(91) \quad L \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u^2} + M \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u \partial v} + N \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial v^2} = 0$$

befriedigt, wo die Bezeichnungen:

$$(92) \quad L = (n, l), \quad M = (l, m) - (n, k), \quad N = (m, k)$$

in Anwendung gebracht sind. Wenn die Grösse ε_{22} von Null verschieden ist, dann können die Koeffizienten der zweiten Gleichung unseres Systems so gewählt werden, dass $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$ ist, wo ε_2 entweder $+1$ oder -1 ist. Es können sodann für die inverse Transformation die Formeln:

$$(93) \quad x = \varepsilon_2 \left(l_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} - k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right), \quad y = \varepsilon_2 \left(m_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - n_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \right)$$

angegeben werden, wo die Funktion $\Phi_2(u, v)$ die Differentialgleichung:

$$(94) \quad L \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial u^2} + M \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial u \partial v} + N \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial v^2} = 0$$

befriedigt, in welcher die Koeffizienten L, M, N auch durch die Formeln (88) bestimmt werden. Schliesslich in den Fällen, welche durch die Bedingung:

$$\omega = 4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2 \leq 0$$

bestimmt sind, kann vermöge der im § 6 vorkommenden Grössen $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ auch die inverse Transformation dargestellt werden. Wir erhalten nämlich die Formeln:

$$(95) \quad x = \lambda \varphi(\zeta) - \mu \psi(u, v), \quad y = \mu \varphi(\zeta) + \lambda \psi(u, v)$$

mit der Bedingung:

$$(96) \quad L \frac{d\varphi}{d\zeta} + M \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + N \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0,$$

wo L, M, N Konstanten bezeichnen, welche durch die Formeln:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = (n, m) + (l, k), \quad M = (n, l) + (m, k), \\ N = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} - 2 \frac{\tau_2}{\tau_1} \varepsilon_{11}, \quad \text{wenn } \tau_1 \neq 0, \\ N = 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}, \quad \text{wenn } \tau_2 \neq 0 \end{array} \right.$$

bestimmt sind.

Man bemerke hier, dass wir über die in den §§ 2, 3, 5, 6 aufgestellten Formeln daselbst einige Bemerkungen angeführt haben, deren Zweck darin bestand, gewisse Eigenschaften dieser Formeln näher zu erläutern. Für die Formeln, welche in dem gegenwärtigen Paragraphen angegeben sind, lassen sich analoge Bemerkungen anführen und man beachte, dass einige dieser Bemerkungen in naher Beziehung zu gewissen Sätzen des § 4 stehen.

§ 8. Eine Uebersicht der Resultate.

Wir wollen nun die Resultate zusammenstellen, welche in den §§ 2, 3, 5, 6, 7 erhalten worden sind. Wir teilen zu dem Zwecke die betrachteten Transformationen der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v in neun Kategorien und benutzen für diese Transformationen die Bezeichnungen P_k ($k=1, 2, \dots, 9$). Ebenso teilen wir die betrachteten Transformationen der Veränderlichen u, v in die Veränderlichen x, y in neun Kategorien und bezeichnen diese Transformationen mit Q_k ($k=1, 2, \dots, 9$). Um dabei die Bedeutung der Symbole P_k und Q_k genau zu erklären benutzen wir noch die Bezeichnungen:

$$g_1^2 + g_2^2 = \gamma, \quad b_1^2 + b_2^2 = \chi$$

und stellen die Tabelle I auf, deren Angaben folgendermassen verstanden werden sollen. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, welche in einer Zeile linker Hand sich befinden, dann ist einerseits die entsprechende Transformation durch diejenigen Formeln bestimmt, welche in derselben Zeile in der zweiten Kolonne der Tabelle aufgezählt sind und es ist andererseits jede solche Transformation durch dasjenige Symbol bezeichnet, welches in derselben Zeile in der dritten Kolonne angegeben ist. In Bezug auf die siebente, achte, neunte, sechzehnte, siebzehnte und achtzehnte Zeile der Tabelle I soll bemerkt werden, dass von den dort angezeigten Formelsystemen unter Umständen entweder alle oder nur einige Formelsysteme in Anwendung gebracht werden können. Wenn man die früheren Bemerkungen über die Vertauschung der Buchstaben x, y, u, v beziehungsweise in die Buchstaben u, v, x, y beachtet, so wird man ohne weiteres konstatieren können, dass bei dieser Vertauschung jede zwei Kategorien, denen die Symbole P_k und Q_k mit demselben Index k zugehören, gleichfalls miteinander vertauscht werden.

Tabelle I

Bedingungen	Formeln	Bez.
$\gamma \neq 0, s = +1$	(19), (22), (23)	P_1
$\gamma \neq 0, s = -1$	(19), (22), (23)	P_2
$\gamma \neq 0, s = 0$	(26), (30), (31)	P_3
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = +1$	(54), (55),	P_4
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = -1$	(54), (55),	P_5
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = 0$	(59), (60), (61)	P_6
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega > 0$	(63), (64), (65), (66)	P_7
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega < 0$	(63), (64); (65), (66); (69), (70), (71)	P_8
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega = 0$	(63), (64); (65), (66); (69), (70), (71)	P_9
$\chi \neq 0, t = +1$	(75), (76), (77)	Q_1
$\chi \neq 0, t = -1$	(75), (76), (77)	Q_2
$\chi \neq 0, t = 0$	(78), (79), (80)	Q_3
$\chi = 0, \gamma \neq 0, s = +1$	(82), (83)	Q_4
$\chi = 0, \gamma \neq 0, s = -1$	(82), (83)	Q_5
$\chi = 0, \gamma \neq 0, s = 0$	(85), (88), (89)	Q_6
$\chi = 0, \gamma = 0, \omega > 0$	(90), (91); (93), (94)	Q_7
$\chi = 0, \gamma = 0, \omega < 0$	(90), (91); (93), (94); (95), (96), (97)	Q_8
$\chi = 0, \gamma = 0, \omega = 0$	(90), (91); (93), (94); (95), (96), (97)	Q_9

Auf Grund der Tabelle I ist es leicht die Kategorien anzugeben, zu welchen in jedem einzelnen Falle zwei Transformationen gehören, welche gegeneinander invers sind. Diese Frage

Tabelle II

Bedingungen	Paare inv. Transf.
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = +1, t = +1$	P_1, Q_1
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = +1, t = -1$	P_1, Q_2
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = +1, t = 0$	P_1, Q_3
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = -1, t = +1$	P_2, Q_1
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = -1, t = -1$	P_2, Q_2
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = -1, t = 0$	P_2, Q_3
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = 0, t = +1$	P_3, Q_1
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = 0, t = -1$	P_3, Q_2
$\gamma \neq 0, \chi \neq 0, s = 0, t = 0$	P_3, Q_3
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = +1$	P_4, Q_1
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = -1$	P_5, Q_2
$\gamma = 0, \chi \neq 0, t = 0$	P_6, Q_3
$\gamma \neq 0, \chi = 0, s = +1$	P_1, Q_4
$\gamma \neq 0, \chi = 0, s = -1$	P_2, Q_5
$\gamma \neq 0, \chi = 0, s = 0$	P_3, Q_6
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega > 0$	P_7, Q_7
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega < 0$	P_8, Q_8
$\gamma = 0, \chi = 0, \omega = 0$	P_9, Q_9

ist durch die Angaben der Tabelle II beantwortet, wo in jeder Zeile rechter Hand Paare von Transformationen angezeigt sind, welche einander dann als inverse zugehören, wenn Voraussetzungen erfüllt sind, die in derselben Zeile linker Hand angegeben sind. Es ist leicht einzusehen, wie sich die Angaben jeder Zeile bei Vertauschung der Veränderlichen x, y, u, v in die entsprechenden Veränderlichen u, v, x, y verhalten. Bei dieser Vertauschung bleiben nämlich die Angaben der ersten, der fünften,

der neunten der sechzehnten, der siebzehnten und achtzehnten Zeile invariant, während die Angaben der übrigen Zeilen verhalten sich bei dieser Vertauschung auf andere Weise. Wenn wir diese übrigen Zeilen in Paare derart miteinander vereinigen, dass die zweite Zeile mit der vierten, die dritte mit der siebenten, die sechste mit der achten, die zehnte mit der dreizehnten, die elfte mit der vierzehnten, die zwölfte mit der fünfzehnten Paare bilden, dann werden wir sagen können, dass die Angaben zweier Zeilen, welche zu demselben Paare angehören, verhalten sich bei dieser Vertauschung derart, dass sie auch miteinander vertauscht werden.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Eigenschaft der hier angegebenen Klassifikation der betrachteten Systeme von Differentialgleichungen zur Sprache bringen. Das System der Differentialgleichungen (5) ist jedem Systeme:

$$(98) \quad \begin{cases} \bar{g}_1 D + \bar{k}_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{l}_1 \frac{\partial V}{\partial x} = \bar{b}_1 + \bar{m}_1 \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{n}_1 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \bar{g}_2 D + \bar{k}_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{l}_2 \frac{\partial V}{\partial x} = \bar{b}_2 + \bar{m}_2 \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{n}_2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

äquivalent, wo mit $\bar{g}_1, \bar{k}_1, \bar{l}_1, \bar{b}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{g}_2, \bar{k}_2, \bar{l}_2, \bar{b}_2, \bar{m}_2, \bar{n}_2$ Koeffizienten verstanden werden, welche durch die Formeln:

$$(99) \quad \begin{cases} \bar{g}_1 = \rho_{11} g_1 + \rho_{12} g_2, & \bar{g}_2 = \rho_{21} g_1 + \rho_{22} g_2, \\ \bar{k}_1 = \rho_{11} k_1 + \rho_{12} k_2, & \bar{k}_2 = \rho_{21} k_1 + \rho_{22} k_2, \\ \bar{l}_1 = \rho_{11} l_1 + \rho_{12} l_2, & \bar{l}_2 = \rho_{21} l_1 + \rho_{22} l_2, \\ \bar{b}_1 = \rho_{11} b_1 + \rho_{12} b_2, & \bar{b}_2 = \rho_{21} b_1 + \rho_{22} b_2, \\ \bar{m}_1 = \rho_{11} m_1 + \rho_{12} m_2, & \bar{m}_2 = \rho_{21} m_1 + \rho_{22} m_2, \\ \bar{n}_1 = \rho_{11} n_1 + \rho_{12} n_2, & \bar{n}_2 = \rho_{21} n_1 + \rho_{22} n_2 \end{cases}$$

bestimmt sind, in welchen die Koeffizienten $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$ nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie alle reell sind und dass die Determinante:

$$\Omega = \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12} \rho_{21}$$

von Null verschieden ist. Man sieht sogleich, dass die Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \bar{g}_1, \bar{k}_1, \bar{l}_1, \bar{b}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1 \\ \bar{g}_2, \bar{k}_2, \bar{l}_2, \bar{b}_2, \bar{m}_2, \bar{n}_2 \end{vmatrix}$$

den Produkten der entsprechenden Determinanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} g_1, k_1, l_1, b_1, m_1, n_1 \\ g_2, k_2, l_2, b_2, m_2, n_2 \end{vmatrix}$$

durch die Determinante Ω gleich sind. Aus dieser Bemerkung folgen die Formeln:

$$(100) \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{22} \bar{g}_1^2 - (\bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\varepsilon}_{21}) \bar{g}_1 \bar{g}_2 + \bar{\varepsilon}_{11} \bar{g}_2^2 = \\ = \Omega^2 [\varepsilon_{22} g_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) g_1 g_2 + \varepsilon_{11} g_2^2], \\ \bar{\varepsilon}_{22} \bar{b}_1^2 - (\bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\varepsilon}_{21}) \bar{b}_1 \bar{b}_2 + \bar{\varepsilon}_{22} \bar{b}_2^2 = \\ = \Omega^2 [\varepsilon_{22} b_1^2 - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) b_1 b_2 + \varepsilon_{22} b_2^2]. \end{cases}$$

Benutzt man ferner die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \bar{l}_1 \bar{m}_1 - \bar{k}_1 \bar{n}_1, & \bar{\varepsilon}_{12} &= \bar{l}_1 \bar{m}_2 - \bar{k}_1 \bar{n}_2, \\ \bar{\varepsilon}_{21} &= \bar{l}_2 \bar{m}_1 - \bar{k}_2 \bar{n}_2, & \bar{\varepsilon}_{22} &= \bar{l}_2 \bar{m}_2 - \bar{k}_2 \bar{n}_2, \end{aligned}$$

so wird man auf Grund der Formeln (99) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} \rho_{11}^2 + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \rho_{11} \rho_{12} + \varepsilon_{22} \rho_{12}^2, \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= \varepsilon_{11} \rho_{11} \rho_{21} + \varepsilon_{12} \rho_{11} \rho_{22} + \varepsilon_{21} \rho_{12} \rho_{21} + \varepsilon_{22} \rho_{12} \rho_{22}, \\ \bar{\varepsilon}_{21} &= \varepsilon_{11} \rho_{11} \rho_{21} + \varepsilon_{12} \rho_{12} \rho_{21} + \varepsilon_{21} \rho_{11} \rho_{22} + \varepsilon_{22} \rho_{12} \rho_{22}, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \varepsilon_{11} \rho_{21}^2 + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \rho_{21} \rho_{22} + \varepsilon_{22} \rho_{22}^2, \end{aligned}$$

erhalten können. Diese Ausdrücke führen auf die Gleichheiten:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{21} - \bar{\varepsilon}_{12} &= \Omega (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{12}), \\ \bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{21} &= \Omega^2 (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21}). \end{aligned}$$

Kazimierz Żorawski.

**O układzie dwóch równań różniczkowych
cząstkowych pewnej szczególnej formy.**

Zgłoszono dn. 14 marca 1929 r.

Streszczenie.

Równania te zależą od pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu dwóch niewiadomych funkcji względem dwóch zmiennych niezależnych i zawierają pewną liczbę wielkości stałych. Zależnie od wartości wielkości stałych z równań tych wynikają na niewiadome funkcje wzory rozmaitych kategorii. Przedmiotem tej pracy jest naprzód wyprowadzenie rzeczonych wzorów we wszystkich możliwych przypadkach. Jeżeli przytem wzory te wyznaczają funkcje od siebie niezależne, to określają one przekształcenie punktowe dwuwymiarowej przestrzeni. Przekształcenie odwrotne tego przekształcenia czyni zadość układowi równań różniczkowych analogicznej postaci. Zależnie od wartości stałych, figurujących w tym układzie, odwrotne przekształcenie określa się także wzorami rozmaitych kategorii. Praca, o której mowa, zawiera wyprowadzenie także i tych wzorów we wszystkich możliwych przypadkach, a również wyprowadzenie szeregu wniosków określających, które ze wspomnianych powyżej kategorii należą do przekształceń wzajemnie odwrotnych.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

