COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XXII Année 1929. Fascicule 4—6.

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych.

Rok XXII 1929 Zeszyt 4—6

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1929

ODBITO CZCIONKAMI ZAKŁ. GRAF.-INTROLIG.
J. DZIEWULSKI SP. Z OGR. ODP. ZŁOTA 29

TREŚĆ ZESZYTU 4—6.

(Table des matières)

SPRAWOZDANIE Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 2 maja 1929 r.

J e r z y P o p r u ż e n k o.

O pewnej własności analitycznej funkcji addytywnych przedziału.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 2 maja 1929.

G. P o p r o u g é n k o.

Sur une propriété analytique des fonctions additives d'intervalle.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 2 mai 1929.

Dans les travaux „Sur la propriété de Darboux etc." [1]) et „Sur la continuité des fonctions additives d'intervalle" [2]) nous avons étudié *la continuité* des fonctions réelles additives d'ensemble et nous avons prouvé l'existence des relations qui établissent une analogie assez remarquable entre ce domaine, si différent d'ailleurs par conception logique, et la classes des fonctions continues du point, notamment — ce qui peut être mis en évidence sans aucune difficulté — des fonctions continues à variation bornée d'une (ou de plusieurs) variables réelles.

Nous nous proposons dans ce travail d'envisager les conditions de *borneté* des fonctions additives et continues d'intervalle et d'établir une propriété des fonctions non-bornées, — la pro-

[1]) Fund. Math. XII, p. 254.
[2]) Fund. Math. XIV, p. 221.

priété qui nous disons analytique à cause de certaines réminiscences analytiques qui ont suggerées les raisonnements ci-dessous et qui sont trop connues pour qu'il en fallait dire un mot ici.

Soient: Δ un domaine plan ouvert et *borné*, F — la famille d'intervalles fermés contenus dans Δ, $\mathcal{K}$ — le plus petit *corps d'ensembles* superposé à la famille F, c'est-à-dire la plus petite famille close par rapport aux opérations algébriques executées sur un groupe *fini* de ses élements et contenant la famille F [1]).

Désignons par E l'ensemble variable parcourant tous les éléments de la famille $\mathcal{K}$.

Soit $\varphi(E)$ une fonction réelle d'ensemble définie sur $\mathcal{K}$ qui nous supposons satisfaire aux conditions suivantes:

1) $\varphi(E) \geqslant 0$ pour tout $E \varepsilon \mathcal{K}$, et $\varphi(E_0) > 0$ pour au moins un ensemble $E_0 \varepsilon \mathcal{K}$;

2) $\varphi(E)$ est additive *au sens restreint* sur la famille $\mathcal{K}$;

3) $\varphi(E)$ est *continue* à tout point de Δ [2]).

On voit que des conditions 1), 2) et 3) résulte que $\varphi(E)$ est *partout finie* sur la famille $\mathcal{K}$.

Désignons par Γ l'ensemble-frontière du domaine Δ, c'est-à-dire l'ensemble défini par l'égalité:

$$\Gamma = \overline{\Delta} - \Delta, \tag{1}$$

et introduisons certaines définitions déterminant la nature des points de l'ensemble Γ et le caractère de la variabilité de la fonction $\varphi(E)$ dans le voisinage de ces points.

Définition I. Nous dirons que la fonction $\varphi(E)$ est *extensible* au point ξ appartenant á Γ, s'il existe une famille d'ensembles $\mathfrak{M}$ possedant les propriétés d'un corps et satisfaisant à la condition:

$$\mathcal{K} + ((\xi)) \subset \mathfrak{M}, \tag{2}$$

et une fonction $F(E)$ continue et additive définie sur $\mathfrak{M}$ et telle qu'on a:

$$F(E) = \varphi(E), \tag{3}$$

pour tout E appartenant à $\mathcal{K}$.

[1]) Pour les détailles v. H a u s d o r f f. Mengenlehre, 1927, § 17.

[2]) Quant aux définitions de la continuité et de la continuité uniforme d'une fonction d'ensemble, v. notre travail cité: „Sur la continuité des fonctions additives d'intervalle".

Définition II. Nous dirons que le point ξ de l'ensemble Γ est *régulier* ou *singulier*, suivant que la fonction $\varphi(E)$ est extensible au point ξ ou non.

Cela posé, nous établirons en premier lieu les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point $\xi \varepsilon \Gamma$ appartienne à l'une ou à l'autre classe définie ci-dessus.

Théorème I. *Pour que le point ξ appartenant à Γ soit régulier, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(E)$ soit bornée dans le voisinage de ce point.*

Dém. *La nécessité* résulte immédiatement, d'après les Déf. I et II, de la continuité de la fonction $F(E)$ au point ξ et de la relation (3).

Il nous reste à démontrer que la condition est *suffisante.*

Supposons que le point ξ_0 de l'ensemble Γ est un point singulier, la fonction $\varphi(E)$ n'étant pas extensible à ce point. Désignons par $\mathfrak{M}_0$ la famille d'ensembles définie par l'égalité suivante:

$$(4)\qquad \mathfrak{M}_0 = \mathcal{K} + ((\xi_0)) + \underset{E+(\xi_0)}{\mathrm{E}}[E \varepsilon \mathcal{K},\ E \neq 0].\ ^{1)}$$

On s'assure facilement que $\mathfrak{M}_0$ est le plus petit corps d'ensembles remplissant la relation (2).

Or, il résulte de notre supposition (comme on en s'assure sans peine) que la fonction additive $F(H)$ $(H \varepsilon \mathfrak{M}_0)$ définie sur $\mathfrak{M}_0$ comme il suit:

$$(5)\qquad F((\xi_0)) = 0,$$

et

$$(6)\qquad F(E) = F(E + (\xi_0)) = \varphi(E),$$

pour tout E appartenant à $\mathcal{K}$, n'est pas continue sur $\mathfrak{M}_0$ au point ξ_0: il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et un ensemble $H_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ remplissant les relations:

$$(7)\qquad H_n \subset K\left(\xi_0, \frac{1}{n}\right),\ H_n \varepsilon \mathfrak{M}_0,$$

tels qu'on a:

$$(8)\qquad F(H_n) \geqslant \varepsilon,$$

pour tout n naturel.

---

[1]) Le symbole à droite désigne la famille de tous les ensembles de la forme $E + (\xi_0)$, E parcourant tous les éléments non vides de la famille $\mathcal{K}$.

Or, les ensembles $H_n (n=1,2,3,\ldots)$ ne pouvant, d'après (5) et (8), se composer d'un seul point ξ_0, on voit, d'après la formule (4), que ces ensembles soit appartiennent à $\mathcal{K}$, soit sont de la forme:

(9) $$H_n = E + (\xi_0),$$

l'ensemble $E \neq 0$ appartenant à $\mathcal{K}$.

Posons:

(10) $$E_n = H_n,$$

s'il est: $H_n \varepsilon \mathcal{K}$, et

(11) $$E_n = H_n - (\xi_0),$$

si l'ensemble H_n remplit la relation (9).

Les formules (10) et (11) déterminent les ensembles E_n pour tout n naturel, et on voit, d'après ce qui précède, que les ensembles E_n satisfont aux conditions suivantes:

(12) $$\begin{cases} E_n \subset K\left(\xi_0, \dfrac{1}{n}\right), \; E_n \varepsilon \mathcal{K}, \\ \varphi(E_n) = F(H_n) \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

pour $n=1,2,3,\ldots$.

Or, de la nature du corps $\mathcal{K}$ résulte que tout ensemble E appartenant à $\mathcal{K}$ est contenu dans un ensemble-somme S d'un nombre fini d'intervalles fermés contenus dans Δ. Les ensembles Γ et S étant fermés, compacts et disjoints on a:

$$\rho(\Gamma, S) > 0$$

et, à plus forte raison:

$$\rho(\xi_0, E) > 0.$$

Cela résout la question. En ajoutant aux conditions (12) la condition

(13) $$\rho(\xi_0, E_n) > 0,$$

on obtient dans un instant le résultat suivant: il existe une suite infinie d'ensembles $E_{n_k} (k=1,2,3,\ldots)$ se composant de termes différents de la suite $E_n (n=1,2,3,\ldots)$ et telle que les relations:

(14) $$\begin{cases} E_{n_k} \subset K\left(\xi_0, \dfrac{1}{n_k}\right), \; E_{n_k} \varepsilon \mathcal{K}, \\ E_{n_k} \cdot E_{n_l} = 0, \text{ pour } k \neq l, \\ \varphi(E_{n_k}) \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

sont remplies pour tout k nature.

Or, la fonction $\varphi(E)$ étant additive sur $\mathcal{K}$, les relations (14) démontrent notre théorème.

Théorème II. *Pour que le point ξ appartenant à Γ soit singulier, il faut et il suffit que dans tout voisinage de ce point la fonction $\varphi(E)$ approxime aussi près que l'on veut toute valeur qu'elle prend sur la famille $\mathcal{K}$.*

Dém. Soient: $\xi_0 \varepsilon \Gamma$ un point singulier, $\delta > 0$ — un nombre arbitraire, $c = \varphi(E_0)$ — une valeur déterminée de $\varphi(E)$.

La fonction $\varphi(E)$ étant continue sur $\mathcal{K}$, on a:

$$\varphi((\xi)) = 0, \tag{15}$$

pour tout ensemble se composant d'un seul point ξ de Δ: il suffit donc de supposer qu'il est

$$c = \varphi(E_0) > 0. \tag{16}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre satisfaisant à la condition

$$c - \varepsilon > 0, \tag{17}$$

d'ailleurs arbitraire.

La fonction $\varphi(E)$ étant (d'après le Théorème I) non-bornée dans le voisinage du point ξ_0, il existe un ensemble E_1 remplissant les relations:

$$\begin{cases} E_1 \subset K(\xi_0, \delta), \ E_1 \varepsilon \mathcal{K}, \\ \varphi(E_1) = a > c. \end{cases} \tag{18}$$

Désignons par $Q(E)$ l'ensemble de valeurs qui prend la fonction $\varphi(E)$ sur les sous-ensembles (non-vides et appartenant à $\mathcal{K}$) de l'ensemble E, par $\pi(\varphi, E)$ et $\nu(\varphi, E)$ ses variations positive et négative. Nous avons évidemment ($\varphi(E)$ étant non-négative):

$$\begin{cases} \pi(\varphi, E_1) = \varphi(E_1) = a > c, \\ \nu(\varphi, E_1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Or, la fonction $\varphi(E)$ étant continue sur $\mathcal{K}$, on a, comme nous l'avons démontré dans notre Mémoire récent [1]):

$$\overline{Q(E_1)} = [-\nu(\varphi, E_1), \ \pi(\varphi, E_1)] = [0, \varphi(E_1)] \ ^{2)}; \tag{20}$$

il résulte donc des formules (16), (17), (18), (19) et (20), l'ensemble $Q(E_1)$ étant dense dans l'intervalle $[0, \varphi(E_1)]$, qu'il existe un ensemble E_2 remplissant les relations:

---

[1]) V. Fund. Math., XIV, p. 223.

[2]) Les symboles à droite désignant les intervalles fermés.

$$(21) \qquad \begin{cases} E_2 \subset E_1 \subset K(\xi_0, \delta), \ E_2 \varepsilon \mathcal{K}, \\ c - \varepsilon < \varphi(E_2) < c. \end{cases}$$

Or, la valeur $c = \varphi(E_0)$ étant quelconque, les formules (21) prouvent que la condition du Théorème II est *nécessaire.*

Supposons maintenant que cette condition est remplie pour le point $\xi_0 \varepsilon \Gamma$: la fonction $\varphi(E)$ approxime donc dans tout cercle ouvert $K\left(\xi_0, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ toute valeur qu'elle prend sur $\mathcal{K}$. Or, la fonction $\varphi(E)$ n'étant pas (d'après la condition 1)) identiquement égale à 0, il existe (comme nous l'avons supposé) au moins un ensemble E_0 pour lequel on a:

$$E_0 \varepsilon \mathcal{K}, \ \varphi(E_0) = c > 0.$$

Il en résulte dans un instant qu'il existe une suite infinie bien déterminée d'ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ remplissant les conditions:

$$(22) \qquad \begin{cases} E_n \subset K\left(\xi_0, \frac{1}{n}\right), \ E_n \varepsilon \mathcal{K}, \\ \varphi(E_n) > \frac{c}{2}, \end{cases}$$

pour tout n naturel.

Or, les relations (22) étant analogues à (12), on démontre, comme il était indiqué plus haut, que la fonction $\varphi(E)$ est *non-bornée* dans le voisinage du point ξ_0, ce qui prouve, d'après le Théorème I, la seconde partie du Théorème II.

Nous établirons maintenant une proposition auxiliaire qui semble provenir (au moins en partie) des MM. Lebesgue et de la Vallée Poussin, n'était pas cependant exprimée sous une forme suffisamment précise. Nous l'énonçons, ce qui est suffisant dans les conditions de cet ouvrage, comme il suit:

Théorème III. *Pour que la fonction $\varphi(E)$ soit bornée sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit qu'elle soit uniformément continue sur $\mathcal{K}$.*

Dém. En premier licu, la suffisance de la condition est presque évidente.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné. La fonction $\varphi(E)$ étant uniformément continue, il existe un nombre $\alpha > 0$, tel que pour tout ensemble E remplissant les relations:

$$d(E) < \alpha, \ E \varepsilon \mathcal{K}, \text{ [1]}$$

on a:

$$\varphi(E) \leqq \varepsilon.$$

[1] Nous désignons pai $d(E)$ le diamètre de l'ensemble E.

En construisant un grillage à mailles quadratiques, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et dont le diamètre est $< \alpha$, on voit (Δ étant borné) qu'il n'existe qu'un nombre fini, soit n_0, de mailles $M_k (k = 1, 2, \ldots, n_0)$ ayant avec Δ des points communs.

Soit E un ensemble appartenant à $\mathcal{K}$: on a évidemment:

(23) $$E = \sum_{k=1}^{k=n_0} EM_k.$$

Or, on s'assure sans peine que tout ensemble de la forme EM_k appartient nécessairement à $\mathcal{K}$; il en résulte, d'après (23), qu'on a:

$$\varphi(E) \leqslant \sum_{k=1}^{k=n_0} \varphi(EM_k) \leqslant n_0 \varepsilon; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Supposons maintenant que la fonction bornée $\varphi(E)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathcal{K}$. Il résulte de cette supposition qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et, pour tout n naturel, un point ξ_n appartenant à Δ et un ensemble E_n remplissant les relations:

(24) $$E_n \subset K\left(\xi_n, \frac{1}{n}\right), \quad E_n \varepsilon \mathcal{K},$$

tels qu'on a:

(25) $$\varphi(E_n) \geqslant \varepsilon_0 \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Je dis que la suite $\{\xi_n\}$ se compose de l'infinité de termes différents.

En effet, supposons le contraire. Il en résulte tout de suite qu'il existe une suite infinie de nombres naturels croissants $n_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que les termes correspondants de la suite $\{\xi_n\}$ satisfont à la condition suivante:

(26) $$\xi_{n_1} = \xi_{n_2} = \cdots = \xi_{n_k} = \cdots = \eta \varepsilon \Delta.$$

Or, la fonction $\varphi(E)$ étant continue au point η, il existe un nombre $\delta = \delta(\eta) > 0$ tel que la relation

$$\varphi(E) < \varepsilon_0$$

est remplie pour tout ensemble E satisfaisant aux conditions:

$$E \subset K(\eta, \delta), \quad E \varepsilon \mathcal{K},$$

ce qui est évidemment incompatible avec les relations (24), (25) et (26).

Or, nous pouvons supposer dès commencement que la suite $\{\xi_n\}$ se compose de termes différents, contient donc (Δ étant borné) une suite infinie convergente. Soit ξ_{n_l} $(l=1,2,3,\ldots)$ cette suite, et soit ξ_0 un point tel que

(27) $$\lim_{l\to\infty} \xi_{n_l} = \xi_0 .$$

Supposons que ξ_0 appartient à l'ensemble Γ. La fonction $\varphi(E)$ étant bornée, ξ_0 est, d'après le Théorème I, un point régulier, d'où il résulte que la fonction $\varphi(E)$ est extensible au point ξ_0. Il existe donc (d'après la Déf. I), le nombre ε_0 étant donné, un nombre $\delta=\delta(\xi_0)>0$, tel que pour tout ensemble E remplissant les relations:

$$E \subset K(\xi_0, \delta),\quad E \varepsilon \mathcal{K},$$

on a:

$$\varphi(E) < \varepsilon_0 ,$$

ce qui contredit, comme on en s'assure sans peine, les relations (24), (25) et (27).

On prouve de la même manière que ξ_0 ne peut appartenir à l'ensemble Δ, ce qui est impossible, car on a:

$$\overline{\Delta} = \Delta + \Gamma,\quad \xi_0 \varepsilon \overline{\Delta} .$$

Notre théorème est ainsi complètement démontré.

Nous pouvons maintenant établir, en s'appuyant sur le Théorème III, une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire toute fonction $\varphi(E)$ satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3) et non-bornée sur $\mathcal{K}$. Nous énonçons dans ce but le théorème suivant:

Théorème IV. *Pour que la fonction $\varphi(E)$ soit non-bornée sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit qu'il existe dans l'ensemble Γ au moins un point singulier.*

Dém. *La suffisance* étant, d'après le Théorème I, évidente, il suffit de démontrer que la condition est *nécessaire.*

Supposons dans ce but que l'ensemble Γ ne se compose que de points réguliers. Désignons par X l'ensemble-somme finie de points appartenant à Γ, variable dans l'ensemble Γ, c'est à dire l'ensemble de la forme

$$X = (\xi_1) + (\xi_2) + \cdots + (\xi_n) ,$$

le nombre naturel n et les points ξ_k appartenant à Γ étant quelconques, et déterminons la famille $\mathfrak{M}_1$ par l'égalité suivante:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathcal{K} + \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset \Gamma] + \underset{(E+X)}{\mathrm{E}}[E \subset \mathcal{K},\ X \subset \Gamma], \tag{28}$$

le symbole E désignant (suivant M. Lebesgue) la famille de tous les ensembles de la forme X, soit $E+X$, remplissant les conditions écrites entre les parenthèses carrées.

On s'assure facilement que la famille ainsi définie possède les propriétés d'un corps (présente notamment le plus petit corps superposé à la famille $\mathcal{K} + \underset{(\xi)}{\mathrm{E}}[\xi \varepsilon \Gamma]$.

Soit H l'ensemble variable parcourant tous les éléments du corps $\mathfrak{M}_1$.

Définissons sur $\mathfrak{M}_1$ une fonction $F(H)$ par les conditions suivantes:

$$F(X) = 0, \tag{29}$$

$$F(E) = F(E+X) = \varphi(E), \tag{30}$$

pour tout $E \varepsilon \mathcal{K}$, $X \subset \Gamma$.

La fonction $F(H)$ est (d'après (28)) définie par les formules (29) et (30) sur toute famille $\mathfrak{M}_1$, et on voit sans peine, tous les points de Γ étant réguliers, qu'elle est continue et additive sur $\mathfrak{M}_1$. Or, on a:

$$\sum_{H \varepsilon \mathfrak{M}_1} H = \bar{\Delta}, \tag{31}$$

d'où il résulte, comme on le démontre sans peine [1]), que $F(H)$ est continue uniformément sur $\mathfrak{M}_1$.

La fonction $\varphi(E)$ est donc, à plus forte raison, continue uniformément sur $\mathcal{K}$, d'où il s'en suit, d'après le Théorème III, que $\varphi(E)$ est bornée sur $\mathcal{K}$, c. q. f. d.

En comparant les Théorèmes II et IV, on voit qu'on peut énoncer le Théorème IV sous la forme suivante:

Théorème V. *Pour que la fonction $\varphi(E)$ soit non-bornée sur la famille $\mathcal{K}$, il faut et il suffit qu'il existe au moins un point ξ, tel que dans tout son voisinage la fonction approxime aussi près que l'on veut toute valeur qu'elle prend sur $\mathcal{K}$.*

---

[1]) Pour la démonstration v. notre ouvrage „Sur la propriété de Darboux etc.". Fund. Math. XII, p. 256.

Cela exprime précisément *la propriété analytique* signalée plus haut, dont la démonstration fut le but de cet ouvrage.

Tous les raisonnements précédents conservent évidemment leur sens dans l'espace enclidien à un nombre quelconque de dimensions.

En introduisant des suppositions supplémentaires, on peut essentiellement compléter les résultats acquis. Remarquons qu'on peut démontrer p. ex. que toute fonction absolument additive $f(E)$ (ou même la fonction additive au sens restreint définie sur le corps sommable au sens complet) jouit dans certaines conditions très générales de la propriété suivante: *pour que la fonction $f(E)$ soit non-bornée, il faut et il suffit qu'il existe un point ξ et un élément linéaire ayant l'origine au point ξ, tel qu'a l'intérieur de tout triangle ayant un de ses sommets au point ξ et renferment (à son intérieur) le sens positif de cet élément la fonction reproduise tout son ensemble de valeurs.*

Nous remettons l'étude de ces relations à une autre occasion.

Alfred Tarski.

O funkcjach addytywnych w klasach abstrakcyjnych i ich zastosowaniu do zagadnienia miary.

Komunikat, przedstawiony przez W. Sierpińskiego d. 2 maja 1929 r.

Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure.

Note préliminaire, présentée par M. W. Sierpiński dans la séance du 2 mai 1929.

Considérons une classe $\mathbf{K}$ d'éléments arbitraires et une opération univoque $+$ dont on admet qu' elle est effectuable dans la classe $\mathbf{K}$, commutative et distributive, c'est-à-dire que pour des éléments quelconques α, β et γ de $\mathbf{K}$ les formules suivantes sont remplies:

$$\alpha + \beta \varepsilon \mathbf{K}, \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Soit: $1 . \alpha = \alpha$ et $(n + 1) . \alpha = n . \alpha + \alpha$ pour tout élément α de la classe $\mathbf{K}$ et tout nombre naturel n; convenons de dire que $\alpha \geqslant \beta$ (où $\alpha \varepsilon \mathbf{K}$ et $\beta \varepsilon \mathbf{K}$), lorsqu'il existe dans $\mathbf{K}$ un élément γ tel que $\alpha = \beta + \gamma$. Fixons enfin un élément arbitraire ι de $\mathbf{K}$ et appelons bornés relativement à ι tous les éléments α de $\mathbf{K}$ qui pour un n naturel satisfont à la condition: $n . \iota \geqslant \alpha$.

Envisageons le problème suivant: existe-t-il une fonction f définie dans la classe $\mathbf{K}$, non-négative et normée par ι, c'est-à-dire remplissant les conditions:

(1) le contre-domaine de f est la classe $\mathbf{K}$;

(2) le domain de f est contenu dans l'ensemble des nombres réels $\geqslant 0$, y inclus $+\infty$;

(3) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ pour tous deux éléments α et β de la classe $\mathbf{K}$;

(4) $f(\iota) = 1$?

Comme il est facile de voir, ce problème est équivalent au suivant: existe-t-il une fonction f satisfaisant aux conditions:

(1') le contre-domaine de f est l'ensemble de tous les éléments de $\mathbf{K}$ qui sont bornés relativement à ι;

(2') le domaine de f est contenu dans l'ensemble des nombres réels non-négatifs excepté $+\infty$;

(3') $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ pour tous deux éléments α et β de la classe $\mathbf{K}$ qui sont bornés relativement à ι;

(4') $f(\iota) = 1$?

Comme solution du problème posé en peut démontrer le

Théorème I. *Soit $\mathbf{K}$ une classe d'éléments arbitraires, $+$ une opération univoque, effectuable dans $\mathbf{K}$, commutative et distributive; soit enfin $\iota \varepsilon \mathbf{K}$. Pour qu'il soit possible de définir alors dans la classe $\mathbf{K}$ une fonction f non-négative, additive et normée par ι, il faut et suffit que*

(a) la formule $n . \iota \geqslant (n + 1) . \iota$ ne se présente pour aucun nombre naturel n.

Ce théorème peut être formulé d'une façon plus générale, en y supprimant toutes les hypothèses faites sur l'opération $+$ et remplaçant en même temps la condition (a) par une autre condition (b) dont l'énoncé est plus compliqué et qui implique la condition (a) dans les hypothèses du théorème I.

Il est encore à remarquer que la condition (a) peut se réduire parfois à la condition plus simple:

$$(c)\quad \iota \neq 2 . \iota.$$

Cette réduction a notamment lieu dans tous les cas où l'opération $+$ vérifie, outre les hypothèses du théorème I, les conditions suivantes: (1) α, β et γ étant des éléments arbitraires de la classe **K**, la formule $\alpha = \alpha + \beta + \gamma$ implique que $\alpha = \alpha + \beta = \alpha + \gamma$; (2) α et β étant des éléments arbitraires de la classe **K** et n — un nombre naturel, la formule $n . \alpha = n . \beta$ implique que $\alpha = \beta$.

On déduit du théorème I la conséquence suivante, relative à l'ainsi dit *problème de la mesure élargi*[1]) dans les espaces métriques quelconques:

Théorème II. *Soit E un espace métrique arbitraire et I un ensemble quelconque de cet espace. Appelons bornés relativement à I tous les ensembles de E qui se laissent couvrir par un nombre fini d'ensembles congruents avec I ou lui équivalents par décomposition finie*[2]). *Alors pour que le problème de la mesure élargi se laisse résoudre par l'affirmative dans l'espace E pour la classe de tous les ensembles bornés relativement à I, ce dernier ensemble étant choisi comme unité de mesure, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune décomposition de I:*

$$I = X + Y, \qquad X . Y = 0,$$

où I soit équivalent par décomposition finie aux deux ensembles X et Y à la fois.

On peut exprimer ce résultat d'une manière plus courte comme il suit: *dans un espace métrique arbitraire la solution affirmative du problème de la mesure élargi équivaut à la solution négative du problème des „décompositions paradoxales" par rapport à l'ensemble choisi pour l'unité de mesure.*

---

1) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 399—403 et 469—472; S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae IV, p. 8.

2) S. Banach et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. VI, p. 244.

En rapprochant ce résultat aux notions introduites par M. J. v. Neumann dans son ouvrage récent: *Zur allgemeinen Theorie des Masses*[1]), on peut le généraliser de la façon suivante:

Théorème III. *E étant un ensemble arbitraire, I son sous--ensemble et $\mathcal{G}$ un groupe des transformations biunivoques de l'ensemble E en lui-même, pour qu'il existe une mesure $[E, I, \mathcal{G}]$, il faut et suffit que l'ensemble I ne soit équivalent à sa moitié par aucune décomposition finie relative au groupe $\mathcal{G}$.*

On obtient immédiatement de ce théorème une condition suffisante et nécessaire pour que le groupe $\mathcal{G}$ soit mesurable.

Citons enfin le résultat suivant, qui est une des conséquences ultérieures de nos considérations:

Théorème IV. *Pour tout ensemble infini E il existe une fonction f qui remplit les conditions:*

(1) *f est définie pour tous les sous-ensembles de E;*

(2) *f prend comme valeurs les nombres 0 et 1;*

(3) *si $X+Y \subseteq E$ et $X.Y=0$, on a $f(X+Y)=f(X)+$ $+f(Y)$;*

(4) *$f(E)=1$;*

(5) *pour tout $x \varepsilon E$ on a $f(\{x\})=0$.*

La classe $\mathbf{K}$ de tous les sous-ensembles X de E pour lesquels $f(X)=0$ est caractérisée par les propriétés suivantes:

(a) si $X \subseteq E$, un et seulement un des ensembles X et $E-X$ appartient à la classe $\mathbf{K}$;

(b) si $X \varepsilon \mathbf{K}$ et $Y \subseteq X$, on a $Y \varepsilon \mathbf{K}$;

(c) si $X \varepsilon \mathbf{K}$ et $Y \varepsilon \mathbf{K}$, on a $X+Y \varepsilon \mathbf{K}$;

(d) si $x \varepsilon E$, on a $\{x\} \varepsilon \mathbf{K}$.

---

[1]) Fund. Math. XIII, p. 78 et 82.

Posiedzenie

z dnia 31 maja 1919.

J. Ridder.

Całka Riemann'a i miara Jordan'a.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu w dniu 31 maja 1929 r.

Das Riemann'sche Integral und das Mass (J).

Vorgelegt von W. Sierpiński in der Sitzung vom 31 Mai 1929.

In methodischer Hinsicht ist es wünschenswert den wichtigsten Definitionen des Lebesgueschen Integralbegriffes eine übereinstimmende Definition des Riemannschen Integrals zur Seite zu setzen.

1^0 Für eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, welche auf einer nach Lebesgue messbaren Menge nur positive Werte annimmt, ist das Integral (L) gleich dem $(k+1)$ — dimensionalen Masse (L) der Ordinatenmenge, wenn dieses Mass endlich ist.[1])

Hiermit stimmt überein, dass das Integral (R) einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, welche auf einer nach Jordan messbaren Menge beschränkt ist und nur positive Werte besitzt, gleich dem $(k+1)$— dimensionalen Masse (J) der Ordinatenmenge ist.[2])

2^0 Von W. H. Young[3]) [und Hausdorff[3])] wurde bei beschränkten Funktionen eine Definition des Lebesgueschen Integrals gegeben, wobei die nach Lebesgue messbare Menge, auf der die Funktion definiert ist, geteilt wurde in eine *endliche* Anzahl von Mengen (E_n), messbar (L). Auf der Menge E_n sei g_n die untere, G_n die obere Schranke der Funktionswerte. Bildet man dann die Summen $\Sigma g_n . m(E_n)$ und $\Sigma G_n . m(E_n)$ und nimmt die obere, bzw. untere Schranke dieser Summen bei allen möglichen, derartigen Zerlegungen des Definitionsbereiches, so hat die be-

---

[1]) Eine ausgezeichnete Darstellung des Integrals (L), welche diese Definition zum Ausgangspunkt wählt, findet man bei Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale.

[2]) Siehe Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Chap. III.

[3]) Siehe W. H. Young, Phil. Transact. Roy. Soc. London 204 *A* (1905); Hausdorff, Mengenlehre (I Auflage). Weiter auch l. c. [1]) und Hobson, Theory of functions II.

trachtete Funktion ein Lebesguesches Integral gleich jener oberen oder unteren Schranke, wenn sie beide denselben Wert haben.

Diese Definition stimmt einigermassen überein mit der bei Riemannschen Integralen üblichen.

Bei der folgenden, von Pierpont[4]) gegebenen Definition des R-Integrals wird völlige Übereinstimmung erreicht. Die beschränkte Funktion sei definiert auf einer nach Jordan messbaren Menge. Man teile diese Menge in eine *endliche* Anzahl von Mengen (E_n), messbar (J), nehme die untere — und obere Schranke, g_n bzw. G_n, der Funktion auf E_n und bilde die Summen $\Sigma g_n \cdot m(E_n)$ und $\Sigma G_n \cdot m(E_n)$. Dann existiert das Integral (R), wenn diese Summen bei allen möglichen, derartigen Zerlegungen des Integrationsgebietes eine obere, bzw. untere Schranke besitzen, welche zusammenfallen und dann den Integralwert liefern.

3° Die analytische Definition, welche Lebesgue in seiner *Leçons sur l'intégration* an die Spitze stellt, fordert den Begriff der Funktionen, messbar (L). Übereinstimmend damit kann man dann als Funktion, messbar (J), betrachten eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_k)$, definiert auf einer Menge, messbar (J), für die bei willkürlichem η die Punktmenge, auf der $f \geqq \eta$ [und auch die Menge, auf der $f > \eta$] ist, ein Mass (J) besitzt. Wie schon H. Rosenthal in seiner Bearbeitung des Montelschen Enzyklopädieartikels bemerkte, [5]) stimmen dann die Funktionen, messbar (J), nicht überein mit den Funktionen, integrierbar (R). Wir zeigten jedoch in einer Mitteilung: *Über das Riemannsche Integral* im Nieuw Archief (Amsterdam), (2) XV: 4 (1928), dass die Funktionen, integrierbar (R), völlig übereinstimmen mit den Funktionen, messbar (J), wenn man die letztgenannten Funktionen definiert mittels der beiden nachstehender Eigenschaften: 1° eine derartige Funktion f betrachtet auf einer Menge M, messbar (J), ist beschränkt, 2° für jedes η, *mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge*, bilden die Punkte P von M, wo $f(P) \geqq \eta$ [oder $> \eta$] ist, eine Menge, messbar (J). Dadurch ist es möglich auch für das R-Integral eine analytische Definition zu geben

[4]) Siehe Pierpont, Lectures on the theory of functions I, Chapter XVI.

[5]) Siehe Rosenthal, Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränd., S. 1040 u. 1044.

durch Teilung der Ordinatenachse, wie dies bei den Integralen (L) schon von Lebesgue gegeben wurde.

Für die Darbouxschen Integrale wurde, l. c. S. 323, bewiesen: *$f(x)$ sei definiert in einer beschränkten Menge P und es sei $0 \leq f(x) < A$. Dann ist, wenn wir das Intervall* $(0, A)$ *durch Teilungspunkte y_i zerlegen ($y_0 = 0$, $y_n = A$):*

$$(1) \qquad \overline{\int_P} f(x)\,dx = \lim_{\substack{n=\infty \\ y_i - y_{i-1} = 0}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot m_a\,(f \geq y_i)$$

und

$$(2) \qquad \underline{\int_P} f(x)\,dx = \lim_{\substack{n=\infty \\ y_i - y_{i-1} = 0}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot m_i\,(f \geq y_i).\text{[6]}$$

Hierbei deuten m_a und m_i das äussere, bzw. innere Mass (J) *an.*

Wo es also möglich ist, dem Massbegriff (J) bei den Definitionen des R-Integrals eine völlig übereinstimmende Rolle zugeben wie dem Massbegriff (L) bei den L-Integralen, liegt es auf der Hand zu fordern, dass bei den Formulierungen und den Beweisen der Sätze für R-Integrale das Massbegriff (J) anstatt des Masses (L) angewandt werden soll. Wir haben nun die Absicht in den folgenden Seiten für einige wichtigen Sätze die Möglichkeit davon zu zeigen. Dabei werden wir die Gelegenheit finden jene Sätze zu verallgemeinern oder zu vervollständigen.

Nur an einzelnen Stellen brauchen wir die Eigenschaften des Masses von Mengen, welche sich aus abzählbar vielen Intervallen $[a_i \leq x_i \leq b_i;\ i = 1, 2, \ldots, k]$[7]) zusammensetzen. Hierbei wird das Mass der Menge gleich der Summe der Elementarmasse von jenen Intervallen genommen. Die Masstheorie dieser Mengen ist als elementar zu betrachten.[8])

§ 1. Satz: *Auf einer im k-dimensionalen Raume liegenden abgeschlossenen Menge M, welche messbar (J) ist, sei eine Folge von Funktionen f_n (P) definiert.*

---

[6]) Dasselbe gilt in Räumen von mehreren Dimensionen.

[7]) Hierbei darf $\leq$ auch durch $<$ ersetzt werden.

[8]) Siehe *de la Vallée Poussin*. Intégrales de Lebesgue, etc., §§ 17-20.

Es sei gegeben:

$$\lim_{n=\infty}\left[\overline{\int_M} f_n(P)\,dP - \underline{\int_M} f_n(P)\,dP\right] = 0,$$

wobei $\overline{\int}$ *und* $\underline{\int}$ *das obere, bzw. untere Darbouxsche Integral andeuten.*

Dann ist notwendig und hinreichend, damit $\limsup\limits_{n=\infty} f_n(P)$ *und* $\liminf\limits_{n=\infty} f_n(P)$ *auf* M *integrierbar* (R) *seien und denselben Integralwert liefern werden,*

dass $\lim\limits_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P)$ *auf* M *quasi — gleichmässig konvergiert im allgemeinen.*

Das heisst: 1° $\limsup\limits_{n=\infty} f_u(P)$ und $\liminf\limits_{n=\infty} f_n(P)$ sind beschränkt auf M, 2° bei willkürlich positiven ε, δ und N und einer willkürlichen, nach $+\infty$ konvergierenden Folge $\mathfrak{U}$ von positiven, ganzen Zahlen existiert immer eine *endliche* Anzahl von Intervallen $[a_i^{(j)} \leqq x_i \leqq b_i^{(j)};\ i = 1, 2, \ldots, k]$, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben, nur Punkte von M enthalten, deren Totalmass $> m(M) - \delta$ ist und so dass für jedes Intervall I eine ganze Zahl $n_I > N$ aus $\mathfrak{U}$ existiert, wobei

$$\left|\lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P) - f_{n_1}(P)\right| < \varepsilon$$

ist, wenn P zu I gehört.

B e w e i s: Wir zeigen erstens die Notwendigkeit der Bedingung. Es seien η, Δ und N willkürlich positiv [nur sei $2\Delta < m(M)$] und $\mathfrak{U}$ sei eine nach $+\infty$ konvergierende Folge von positiven ganzen Zahlen. Dann lässt sich eine Folge von positiven Zahlen (Δ_p) angeben derartig, dass $\sum\limits_1^\infty \Delta_p = \Delta$ ist. Zu jedem Δ_p ist eine ganze Zahl $n_p > N$ aus $\mathfrak{U}$ zu finden, für die:

$$\overline{\int_M} f_{n_p}(P)\,dP - \underline{\int_M} f_{n_p}(P)\,dP < \frac{1}{3}\Delta_p \cdot \eta \tag{3}$$

ist. Immer ist $n_p > n_{p-1}$ zu wählen. Es lässt sich eine endliche Anzahl von M überdeckenden Intervallen $(I_{j,\,p})$ finden, so dass, wenn $G_{j,p}$ und $g_{j,p}$ obere, bzw. untere Schranke von f_{n_p} auf dem abgeschlossenen Intervall $I_{j,p}$ anweisen, die Ungleichungen gelten:

$$(4)\qquad \left| \overline{\int_M} f_{n_p}(P)\, dP - \sum_{(j)} m(I_{j,p}) \cdot G_{j,p} \right| < \frac{1}{3} \Delta_p \cdot \eta$$

und

$$(5)\qquad \left| \underline{\int_M} f_{n_p}(P)\, dP - \sum_{(j)} m(I_{j,p}) \cdot g_{j,p} \right| < \frac{1}{3} \Delta_p \cdot \eta$$

Aus (3), (4) und (5) folgt:

$$\sum_{(j)} m(I_{j,p}) \left[G_{j,p} - g_{j,p}\right] < \Delta_p \cdot \eta.$$

Dadurch muss für diejenigen Intervalle, welche eine Oszillation $G_{j,p} - g_{j,p} \geqq \eta$ liefern, die Summe ihrer Einzelmasse $< \Delta_p$ sein. Durch eine geringe Vergrösserung eines jeden dieser Intervalle nach aussen in positiver und negativer Richtung der Koordinatenachsen entsteht *eine Menge M_p von offenen Intervallen, welche die Eigenschaften haben:* 1^0 *die Summe ihrer Einzelmasse ist* $< \Delta_p$, 2^0 *für jeden nicht zu diesen Intervallen gehörenden Punkt von M existiert eine Umgebung, in der die Oszillation von $f_{n_p} < \eta$ ist.*

Da $\limsup\limits_{n=\infty} f_n(P)$ und $\liminf\limits_{n=\infty} f_n(P)$ in M integrierbar (R) sind, bilden die Punkte, in denen die Oszillation von einer dieser Funktionen $\geqq \eta$ ist, eine Menge Q mit Mass $(J) = 0.$[9])

Da weiter $\limsup\limits_{n=\infty} f_n(P) - \liminf\limits_{n=\infty} f_n(P)$ über M ein Integral $(R) = 0$ gibt und für jede beschränkte Funktion, welche keine negativen Werte auf M annimmt, die Formel (1) gilt, so folgt, dass die Menge R der Punkte, in denen $\limsup\limits_{n=\infty} f_n(P) - \liminf\limits_{n=\infty} f_n(P) \geqq \eta$ ist, ein Mass $(J) = 0$ hat. Denn bleiben bei fortgesetzter Teilung der Ordinatenachse die bei einer willkürlichen Teilung auftretenden Teilungspunkten (y_i) bei allen folgenden Teilungen behalten, so kann in (1) die Summe hinter dem Limeszeichen nicht abnehmen. Daraus und aus dem Nullwerte des Integrals folgt, dass bei positivem y immer $m_a(f \geqq y) = 0$ sein muss.

---

[9]) Siehe l. c. [2]), p. 27.

Somit sind Q und R in einer Menge O von endlich vielen, offenen Intervallen einzuschliessen, so dass die Summe ihrer Einzelmasse $< \Delta$ ist.

Die Menge O und die abzählbare Folge von Mengen (M_p) bilden eine Menge, welche aus den inneren Punkten von abzählbar vielen offenen Intervallen existiert, deren Einzelmasse eine Summe $< 2\Delta$ liefern. Daraus folgt in elementarer Weise,[10]) dass es auch noch weitere Punkte in M gibt. Für jeden derartigen Punkt P ist:

$$\lim_{n=\infty} \sup f_n(P) - \lim_{n=\infty} \inf f_n(P) < \eta.$$

Es existiert dadurch für diesen Punkt eine ganze Zahl $p(P)$ derartig dass:

$$(6) \qquad \left| \lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P) - f_{n_{p(P)}}(P) \right| < 2\eta$$

ist. Nun lässt sich weiter ein offenes Intervall anweisen, das P enthält und so dass für jeden P' in dem Intervall $I(P)$:

$$(7) \qquad \left| f_{n_{p(P)}}(P) - f_{n_{p(P)}}(P') \right| < \eta,$$

$$(8) \qquad \left| \lim_{n=\infty} \sup f_n(P) - \lim_{n=\infty} \sup f_n(P') \right| < \eta$$

und

$$(9) \qquad \left| \lim_{n=\infty} \inf f_n(P) - \lim_{n=\infty} \inf f_n(P') \right| < \eta$$

ist.

Aus (6) bis (9) folgt für jeden Punkt P' in $I(P)$:

$$(10) \qquad \left| \lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P') - f_{n_{p(P)}}(P') \right| < 4\eta.$$

Jeder Punkt P des abgeschlossenen M gehört zu einem offenen Intervall, in der eine Ungleichung (10) gilt *oder* zu einem offenen Intervall aus den Mengen (M_p) oder aus O. Daraus folgt nach dem Borelschen Lemma, dass sich eine endliche Anzahl von Intervallen anweisen lässt, welche sämtlich alle Punkte von M enthalten. Da die zu den Mengen (M_p) und O gehörenden Intervalle Masse haben, deren Summe $< 2\Delta$ ist, überdecken die Intervalle, in der eine Ungleichung (10) mit *festem* n_p gilt, einen Teil von M vom Masse $(J) > m(M) - 2\Delta$. Die angegebene Bedingung ist somit notwendig.

---

[10]) Siehe Borel, Leçons sur les fonctions de variables reelles, p. 10 e. 11.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Es seien ε und δ willkürlich positiv und $\sum_1^\infty \delta_p = \delta$, wobei die δ_p positiv sein sollen. Wie auf Seite 3 lässt sich eine Reihe von Mengen (M_p) bestimmen, welche jede für sich aus einer endlichen Anzahl von offenen Intervallen existieren mit den Eigenschaften: 1° die Summe ihrer Einzelmasse ist $< \delta_p$, 2° für jeden nicht zu diesen Intervallen gehörenden Punkt von M existiert eine Umgebung, in der die Oszillation von $f_{n_p} < \varepsilon$ ist, 3° $n_p > n_{p-1}$.

Aus der im allgemeinen quasi-gleichmässigen Konvergenz folgt, dass sich bei ε und δ und bei der unendlichen Folge der (n_p) eine *endliche* Anzahl A von abgeschlossenen Intervallen, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben und nur Punkte von M enthalten, bestimmen lässt mit den Eigenschaften: 1° ihr Totalmass ist $> m(M) - \delta$, 2° für jedes Intervall I existiert ein $(n_p)_I$ aus der Folge der (n_p), so dass für jeden Punkt P von I:

$$(11) \qquad \left| \lim_{n=\infty} {\textstyle\sup\atop\textstyle\inf} f_n(P) - f_{(n_p)_I}(P) \right| < \varepsilon$$

ist. Für jeden inneren Punkt P eines I, der keiner Menge M_p angehört, existiert eine (in I liegende) Umgebung ($=$ offenes Intervall), so dass, wenn P' in dieser Umgebung liegt:

$$(12) \qquad \left| f_{(n_p)_I}(P) - f_{(n_p)_I}(P') \right| < \varepsilon$$

ist. In dieser Umgebung ist nach (11) und (12):

$$(13) \qquad \left| \lim_{n=\infty} {\textstyle\sup\atop\textstyle\inf} f_n(P) - \lim_{n=\infty} {\textstyle\sup\atop\textstyle\inf} f_n(P') \right| < 3\varepsilon.$$

Durch eine geringe Verkleinerung nach innen eines jeden Intervalls aus der Menge A entsteht eine abgeschlossene Menge A_1, deren Mass noch immer $> m(M) - \delta$ ist. Jeder Punkt von A_1 ist im Innern eines Intervalls enthalten, welches: 1° zu einer der Mengen (M_p) gehört, *oder* 2° in welchem (13) genügt wird.

Nach dem Borelschen Lemma existiert eine endliche Anzahl dieser offenen Intervalle, welche A_1 ganz überdecken. Diejenigen Intervalle, welche zu (M_p) gehören, haben eine Masssumme $< \delta$. Diejenigen Intervalle, in denen eine Ungleichung (13) gilt, haben also ein Totalmass $> m(M) - 2\delta$. Aus ihnen ist eine endliche Anzahl von einander nicht überdeckenden Intervalle (i_q) zu schaffen, welche dieselben Punkte enthalten und so dass in jedem dieser Intervalle (13) gilt. Die übrigen Punkte von M lassen sich in einer endlichen Anzahl von Intervallen (u_q) mit Gesamtmasse $< 2\delta$ einschliessen. Sei nun G die obere Schranke der absoluten Werte von $\lim\limits_{n=\infty} \inf f_n(P)$ und $\lim\limits_{n=\infty} \sup f_n(P)$ auf M; dann folgt, wenn P_q und P'_q willkürliche Punkte von M in dem zugehörigen Intervalle i_q oder u_q sind:

$$\Bigg| \sum_{(q)} \left[\lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P_q) - \lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P'_q) \right] . m(i_q) +$$

$$+ \sum_{(q)} \left[\lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P_q) - \lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P'_q) \right] . m(u_q) \Bigg| < 3\varepsilon . m(M) + 4G\delta.$$

Da ε und δ willkürlich klein sind, folgt hieraus [11]) die Existenz und Identität der Integrale (R) von $\lim\limits_{n=\infty} \sup f_n(P)$ und $\lim\limits_{n=\infty} \inf f_n(P)$.

§ 2. Hilfssatz: *Eine abgeschlossene Menge M von endlichem äusserem Masse (J) wird als Grenzmenge einer aufsteigenden Folge von Mengen $G_1 < G_2 < \ldots G_n < \ldots.$ betrachtet Dann ist: $m_a(M) = \lim\limits_{n=\infty} m_a(G_n)$* [12]).

Beweis: Es sei $\varepsilon = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n$, wobei jedes ε_n positiv ist. Zu jedem G_n existiert eine aus endlich vielen, offenen Intervallen existierenden Menge H_n, welche G_n enthält und deren Mass $m(H_n) < m_a(G_n) + \varepsilon_n$ ist.

Es sei $Q_1 \equiv H_1$. Die (offenen) Mengen $Q_2 = Q_1 + H_2$ und $(Q_1 . H_2)$ sind auch aus Intervallen aufgebaut. Daraus folgt:

$$m(Q_2) + m(Q_1 . H_2) = m(Q_1) + m(H_2). \quad ^{13})$$

Nun ist $(Q_1 . H_2) < G_1$, also:

$$m(Q_1 . H_2) \geqq m_a(G_1)$$

und dadurch:

$$m(Q_2) \leqq m(Q_1) + m(H_2) - m_a(G_1)$$

oder:

$$m(Q_2) \leqq m_a(G_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < m_a(G_2) + \varepsilon.$$

---

[11]) Siehe l. c. [2]), p. 24.

[12]) Dieser Hilfssatz folgt unmittelbar aus einem übereinstimmenden Satze bei abgeschlossenen Mengen (G_n), welcher von Osgood in 1897, also unabhängig von der Lebesgueschen Masstheorie, bewiesen wurde; siehe Schoenflies, Entwicklung der Mengenlehre I (Zweite Aufl.), S. 307-309.

[13]) Siehe l. c. [8]), § 18.

Es sei: $Q_3 = Q_2 + H_3$; im allgemeinen: $Q_n = Q_{n-1} + H_n$. Dann zeigt sich:

$$m(Q_3) \leq m_a(G_3) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < m_a(G_3) + \varepsilon_3;$$

im allgemeinen:

(14) $$m(Q_n) \leq m_a(G_n) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n < m_a(G_n) + \varepsilon.$$

Die (offene) Menge $\sum\limits_1^\infty Q_n$ ist aus Intervallen aufgebaut. Daraus folgt[14]):

(15) $$m\left(\sum_1^\infty Q_n\right) = m\,Q_1 + m(Q_2 - Q_1) + m(Q_3 - Q_2) + \ldots \text{ [14])}$$
$$= \lim_{n=\infty} m(Q_n).$$

Da M in $\sum\limits_1^\infty Q_n$ enthalten ist, ist M nach dem Borelschen Lemma in einer endlichen Anzahl der offenen Intervalle enthalten, aus denen man sich $\sum\limits_1^\infty Q_n$ zusammengesetzt denken kann. Daraus folgt:

$$m_a(M) < m\left(\sum_1^\infty Q_n\right),$$

also durch Anwendung von (14) und (15):

(16) $$m_a(M) < \lim_{n=\infty} m(Q_n) \leq \lim_{n=\infty} m_a(G_n) + \varepsilon.$$

Nun hat man weiter, da G_n in M enthalten ist:

$$m_a(G_n) \leq m_a(M),$$

also:

$$\lim_{n=\infty} m_a(G_n) \leq m_a(M)$$

In Verbindung mit (16) gibt dies: $m_a(M) = \lim\limits_{n=\infty} m_a(G_n)$.

§ 3. Nun lässt sich der folgende Satz ableiten:

Auf einer im k-dimensionalen Raume liegenden, abgeschlossenen Menge M, welche messbar (J) ist, sei eine Folge von Funktionen $f_n(P)$ definiert.

Es sei gegeben, wenn $\overline{\int}$ und $\underline{\int}$ das obere, bzw. untere Darbouxsche Integral andeuten:

---

[14]) Dabei ist das Mass im Sinne des Textes bei Fussn. [7]) zu nehmen.

a) $$\lim_{n=\infty}\left[\overline{\int_M} f_n(P)\,dP - \underline{\int_M} f_n(P)\,dP\right] = 0;$$

b) *$\lim_{n=\infty}\sup f_n(P)$ und $\lim_{n=\infty}\inf f_n(P)$ sind auf M integrierbar (R) und es ist:*

$$\int_M \lim_{n=\infty}\sup f_n(P)\,dP = \int_M \lim_{n=\infty}\inf f_n(P)\,dP;$$

c) *die Funktionen $f_n(P)$ sind auf M gleichmässig beschränkt.*

Dann lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty}\overline{\underline{\int_M}} f_n(P)\,dP \text{ existiert und } = \int_M \lim_{n=\infty}{}^{\sup}_{\inf} f_n(P)\,dP \text{ ist.}$$ [14a)]

[14a)] Wir hatten die Absicht den Gebrauch des Lebesgueschen Massbegriffes beim (hier folgenden) Beweise zu vermeiden. Wenn man jedoch darauf verzichtet, so lässt sich, wie mir H. Saks freundlichst mitteilte, der Satz kürzer beweisen. Nach Abänderung eines kleinen Versehens lautet sein Beweis:

„Pour prouver cette proposition je désigne, pour chaque fonction $F(P)$, par $\overline{F}(P)$, resp. $\underline{F}(P)$, la borne supérieure, resp. inférieure, de $F(P)$ au point P. On a alors pour chaque n:

$$(R)\overline{\int} f_n(P)\,dP = (L)\int \overline{f}_n(P)\,dP,$$

$$(R)\underline{\int} f_n(P)\,dP = (L)\int \underline{f}_n(P)\,dP.$$

On a, d'autre part, les fonctions $f_n(P)$ étant bornées en leur ensemble, en vertu du th. connu de M. Lebesgue:

$$\lim_n \sup (L)\int \underline{f}_n(P)\,dP \leqslant (L)\int \lim\sup \underline{f}_n(P)\,dP \leqslant (L)\int \lim\sup f_n(P)\,dP,$$

$$\lim_n \inf (L)\int \overline{f}_n(P)\,dP \geqslant (L)\int \lim\inf \overline{f}_n(P)\,dP \geqslant (L)\int \lim\inf f_n(P)\,dP.$$

Donc, d'après (b):

$$(1)\quad \begin{cases} \lim_n \sup (L)\int \underline{f}_n(P)\,dP \leqslant (L)\int \lim{}^{\sup}_{\inf} f_n(P)\,dP = \\ = (R)\int \lim{}^{\sup}_{\inf} f_n(P)\,dP \leqslant \lim_n \inf (L)\int \overline{f}_n(P)\,dP. \end{cases}$$

Or, en raison de (a):

$$\lim_n \sup (L)\int \underline{f}_n(P)\,dP = \lim_n \sup (L)\int \overline{f}_n(P)\,dP,$$

$$\lim_n \inf (L)\int \underline{f}_n(P)\,dP = \lim_n \inf (L)\int \overline{f}_n(P)\,dP,$$

et l'assertion cherchée se montre une conséquence immédiate de l'inégalité (1)".

Beweis: Es seien ε und δ willkürlich positiv [nur sei $4\delta < m(M)$]. Da das Integral (R) der nicht-negativen Funktion $\limsup_{n=\infty} f_n(P) - \liminf_{n=\infty} f_n(P)$ gleich Null ist, so hat die Menge Q der Punkte von M, in denen $\limsup_{n=\infty} f_n(P) - \liminf_{n=\infty} f_n(P) \geqq \varepsilon$ ist, ein Mass $(J) = 0$. Somit existiert eine endliche Anzahl A von offenen Intervallen mit Gesamtmass $< \delta$, welche Q enthalten. Für jeden Punkt P der abgeschlossenen Menge $(M - A.M)$ lässt sich eine kleinste, positive, ganze Zahl N_P angeben, so dass für *jedes* ganze $n \geqq N_P$:

$$(17) \qquad \left| \lim_{n=\infty} {}^{\sup}_{\inf} f_n(P) - f_n(P) \right| < 2\varepsilon$$

ist. Es sei G_n die Menge der Punkte von $(M - A.M)$ mit $N_P = 1, 2, \ldots.$ oder n. Dann ist $G_1 < G_2 < \ldots. G_n < \ldots..$ und $(M - A.M) = \lim_{n=\infty} G_n$. Nach dem Hilfssatze des § 2 existiert dadurch eine ganze, positive Zahl ν, so dass gilt:

$$(18) \qquad m_a(G_\nu) < m(M - A.M) - \delta$$

Es lässt sich eine endliche Anzahl (p) von abgeschlossenen, einander nicht überdeckenden Intervallen $[u_i; i = 1, \ldots, p]$ angeben, welche nur Punkte von $(M - A.M)$ enthalten. Wir machen eine abzählbare Folge von derartigen Teilungen (T_m), wobei mit zunehmendem Index m das Mass des grössten Intervalls der betrachteten Teilung sich der Null nähert, während dabei das Gesamtmass der Intervalle nach $m(M - A.M)$ konvergiert. Hierdurch lässt sich eine positive, ganze Zahl μ bestimmen, so dass für *jedes* positive, ganze $m \geqq \mu$ die zugehörige Teilung T_m Intervalle hat mit Gesamtmass $> m(M - A.M) - \delta$.

Für *jede* Teilung T_m ist das Gesamtmass der Intervalle, welche gar keine Punkte von G_ν enthalten, $< \delta$. Sonst würde für die Menge der übrigen Punkte von $(M - A.M)$ das Mass $\leqq m(M - A.M) - \delta$ sein und wäre also auch $m_a(G_\nu) \leqq \leqq m(M - A.M) - \delta$ in Widerspruch mit (18).

Es existiert weiter nach a) eine positive, ganze Zahl ν_1, so dass für jedes $n \geqq \nu_1$ gilt:

$$\overline{\int_M} f_n(P)\, dP - \underline{\int_M} f_n(P)\, dP < \frac{1}{2}\varepsilon . \delta .$$

Daraus und aus b) folgt, dass sich bei *bestimmtem* $n \geqq \nu_1$ eine positive, ganze Zahl $\mu_1(n)$ angeben lässt, so dass für *jede* Teilung T_m mit $m \geqq \mu_1$ das Gesamtmass der Intervalle, in denen die Oszillationen von $f_n(P)$ und von $\limsup_{n=\infty} f_n(P)$ grösser als ε sind, kleiner ist als δ.

Zu *jeder* ganzen Zahl $n \geqq \nu_1$ und $\geqq \nu$ existiert eine Zahl $\mu_1(n)$. Für *jede* Teilung T_m mit $m \geqq \mu_1(n)$ und $\geqq \mu$ gilt: 1⁰ das Gesamtmass der Intervalle, in denen die Oszillationen von $f_n(P)$ und $\limsup_{n=\infty} f_n(P)$ grösser als ε sind, ist kleiner als δ, 2⁰ das Gesamtmass der Intervalle, welche gar keine Punkte von G_ν enthalten, ist kleiner als δ, 3⁰ das Gesamtmass der Intervalle von T_m ist grösser als $m(M - A.M) - \delta$.

In Intervallen (u_i) eines derartigen T_m, mit Gesamtmass $> m(M - A.M) - 3\delta$, welche nicht zu den unter 1⁰ genannten Intervallen gehören, gilt für mindestens einen Punkt (17). Daraus und aus 1⁰ folgt, wenn $P_i^{(1)}$ und $P_i^{(2)}$ willkürliche Punkte in einem derartigen Intervalle sind, dass:

$$\left| f_n(P_i^{(1)}) - \limsup_{n=\infty} f_n(P_i^{(2)}) \right| < 4\varepsilon$$

ist.

In den übrigen Intervallen (v_j) von T_m, mit Gesamtmass $< 2\delta$, gilt immer:

$$\left| f_n(P_j^{(1)}) - \limsup_{n=\infty} f_n(P_j^{(2)}) \right| < 2G,$$

wobei G die obere Schranke der absoluten Werte aller $f_n(P)$ auf M ist.

Dadurch folgt bei Summation über den Intervallen von T_m:

$$\Bigg| \sum_{(i)} [f_n(P_i^{(1)}) - \limsup_{n=\infty} f_n(P_i^{(2)})] \,.\, m(u_i) + \\ + \sum_{(j)} [f_n(P_j^{(1)}) - \limsup_{n=\infty} f_n(P_j^{(2)})] \,.\, m(v_j) \Bigg| < \\ < 4\varepsilon \,.\, m(M - A.M) + 2G \,.\, 2\delta.$$

Dieselbe Abschätzung bleibt gültig, wenn wir für jedes Intervall die oberen Schranken von $f_n(P)$ und $\limsup_{n=\infty} f_n(P)$ einsetzen. Daraus folgt für $m = \infty$:

$$\left| \overline{\int_{(M-A.M)}} f_n(P)\, dP - \int_{(M-A.M)} \limsup_{n=\infty} f_n(P)\, dP \right| \leqq 4\varepsilon \,.\, m(M - A.M) + 4G \,.\, \delta,$$

und dadurch:

$$\left| \overline{\int_M} f_n(P)\,dP - \int_M \limsup_{n=\infty} f_n(P)\,dP \right| < 4\varepsilon \,.\, m(M - A\,.\,M) + 6G\,.\,\delta\,.$$

Da die Abschätzung für *jedes* $n \geqq \nu_1$ und $\geqq \nu$ gilt und ε und δ willkürlich sind, folgt hieraus:

$$\lim_{n=\infty} \overline{\int_M} f_n(P)\,dP = \int_M \limsup_{n=\infty} f_n(P)\,dP\,.$$

§ 4. Die vorhergehenden Sätze aus den §§ 1 und 3 sind Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen von Arzelà. Wir können diese Spezialsätze unmittelbar auf sehr viel einfachere Weise beweisen, *ohne* Benutzung der Lebesgueschen Masztheorie.

Voran geht ein Hilfssatz, welcher hier dieselbe Rolle spielt wie der übereinstimmende Satz von Borel[15]) bei den Funktionen, messbar (L).

Hilfssatz: *Auf einer nach Jordan messbaren Menge M sei $f(P)$ messbar* (J) [= integrierbar (R)] *und Grenzfunktion einer Folge von Funktionen $f_n(P)$, welche ebenfalls messbar* (J) *seien. Bei gegebenem* $\varepsilon > 0$ *möge mit* $\mu(n, \varepsilon)$ *diejenige Teilmenge von M angedeutet werden, in deren Punkten:*

$$|f_n(P) - f(P)| > \varepsilon$$

ist. Dann ist $\lim_{n=\infty} m_a[\mu(n, \varepsilon)] = 0$, *wobei* m_a *das äussere Mass* (J) *andeutet.*

Beweis: Es sei ε willkürlich positiv. Aus der Definition der Funktionen, messbar (J)[16]) folgt, dass ein positives $\eta < \varepsilon$ existiert, so dass die Punktmenge $\mu[|f_n(P) - f(P)| > \eta] = \mu(n, \eta)$ ein Mass (J) hat für jedes positive, ganze n.

Nun ist $\lim_{n=\infty} m[\mu(n, \eta)] = 0$. Sonst existierte eine positive Zahl L, so dass für eine unendliche Teilfolge $\{f_\nu(P)\}$ aus den $\{f_n(P)\}$ immer die Menge $\mu(\nu, \eta)$ ein Mass (J) $> L$ hätte. Zu jeder Zahl ν existierte wieder eine aus endlich vielen Intervallen bestehenden Menge $N(\nu, \eta)$, welche ganz zu $\mu(\nu, \eta)$ gehörte und deren Mass grösser wäre als $L/_2$.

[15]) Siehe l. c. [10]), p. 37.

[16]) Siehe S. 2 oder Nieuw Archief (Amsterdam) (2), XV: 4 (1928), S. 324.

Auf elementare Weise lässt sich das Lemma beweisen: „Wenn irgendeine Folge von Intervallmengen aus einem beschränkten Gebiete vorgelegt ist, deren Masse durchweg oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen, so gibt es mindestens einen Punkt, der unendlich vielen dieser Intervallmengen angehört [17]).

Daraus folgt, dass die Mengen $\{N(\nu, \eta)\}$ eine unendliche Teilfolge $\{N(\nu', \eta)\}$ enthalten müssten, so dass die Mengen dieser Teilfolge mindestens einen Punkt P gemeinsam hätten. In diesem Punkte wäre also $\lim\limits_{n=\infty} f_n(P) = f(P)$ unmöglich. Wir gelangen zu einem Widerspruch.

Da $m_a[\mu(n, \varepsilon)] \leqq m[\mu(n, \eta)]$ ist, folgt: $\lim\limits_{n=\infty} m_a[\mu(n, \varepsilon)] = 0$.

§ 5. Erster Satz von Arzelà: *Auf einer im k-dimensionalen Raume liegenden, nach Jordan messbaren Menge M sei $f(P)$ Grenzfunktion einer Folge von Funktionen $f_n(P)$, welche auf M integrierbar (R) seien.*

Dann ist notwendig und hinreichend, damit $f(P)$ auf M integrierbar (R) sei, dass die Folge auf M nach $f(P)$ quasigleichmässig konvergiert im allgemeinen [18]).

Das heisst: 1^0 $f(P)$ ist beschränkt auf M, 2^0 bei willkürlich positiven ε, δ und N existiert eine endliche Anzahl von Intervallen $[a_i^{(j)} \leqq x_i \leqq b_i^{(j)};\ i = 1, 2, \ldots k]$, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben, nur Punkte von M enthalten, deren Totalmass $> m(M) - \delta$ ist und so dass für jedes Intervall I eine ganze Zahl $n_I > N$ existiert, wobei

$$|f(P) - f_{n_I}(P)| < \varepsilon$$

ist, wenn P zu I gehört [19]).

Beweis: Aus dem Hilfssatze des § 4 folgt unmittelbar, dass die Bedingung notwendig ist, sie wird sogar erfüllt bei *demselben* Werte n für alle Intervalle I.

---

[17]) Siehe Arzelà, Rend. Acc. Lincei (4) I (1885), S. 262—266 oder Bieberbach, Math. Zeitschr. II (1918), S. 155—157; an beiden Stellen wird der Beweis für den linearen Fall geführt. Anstatt dieses Lemmas lässt sich auch der Hilfssatz von § 2 zu einem Beweise des Satzes von § 4 anwenden.

[18]) Siehe Arzelà, l. c. [17]), S. 321-326 oder Borel, l. c. [10]), p. 45-48.

[19]) Eine andere Form dieser Arzelàschen, Bedingung (nebst einfachem Beweise des Satzes) findet sich in unserer Diss: *Enkele algemeene limietstellingen* etc. (Utrecht, 1921), § 35 und bei Wilkosz, Fund. mat. II (1921), S. 136—139.

Umgekehrt ist die Bedingung auch hinreichend. Denn in jedem I hat die Menge der Punkte, in denen die Oszillation von $f_{n_I}(P)$ grösser als oder gleich ε ist, ein Mass $(J) = 0$[9]; somit auch die Menge der Punkte, in denen die Oszillation von $f(P)$ grösser ist als 3ε. Da alle Punkte von M, mit Ausnahme einer Menge vom Masse $(J) < \delta$, in den Intervallen I liegen, ist das äussere Mass (J) der Punkte von M, in denen die Oszillation von $f(P)$ grösser als 3ε ist, kleiner als δ. Da δ willkürlich klein sein darf, hat somit diese Menge ein Mass $(J) = 0$. $f(P)$ ist dadurch auf M integrierbar (R)[9]).

§ 6. Zweiter Satz von Arzelà: *Auf einer im k-dimensionalen Raume liegenden Menge M, welche messbar (J) ist, sei eine konvergente Folge von Funktionen $f_n(P)$ definiert, welche integrierbar (R) und gleichmässig beschränkt auf M seien. Auch die Grenzfunktion $f(P)$ sei auf M integrierbar (R).*

Dann existiert

$$\lim_{n=\infty} \int_M f_n(P)\, dP \text{ und } = \int_M f(P)\, dP.$$

Beweis: [20]) Für alle hinreichend grossen $n\,[\geqq N]$ ist nach § 4 bei willkürlich gewählten, positiven ε und δ auf M:

$$|f_n(P) - f(P)| \leqq \varepsilon,$$

ausgenommen in den Punkten einer Menge E_n von äusserem Masse $(J) < \delta$. Wir können also E_n in einer endlichen Anzahl von offenen Intervallen $I_{q,n}$ einschliessen, deren Gesamtmass $< \delta$ ist. Die nicht in diesen Intervallen liegenden Punkte von M bilden eine Menge M'_n, messbar (J). Es ist

$$\left| \int_M [f_n(P) - f(P)]\, dP \right| = \left| \int_{M-M'_n} + \int_{M'_n} \right| < 2G.\delta + \varepsilon . m(M),$$

wobei G die obere Schranke aller absoluten Werte der Funktio-

[20]) Für den Beweis von Arzelà siehe Rend. Acc. Lincei (4) I (1885), S. 267; 321 u. 322; 537. Ein dritter, elementarer Beweis findet sich bei Landau, Math. Zeitschr. II (1918), S. 350 u. 351.

nenfolge auf M ist. Die Abschätzung gilt für jedes $n \geq N$, so dass der Satz bewiesen ist [21]).

---

§ 7. Von Lichtenstein [22]) wurde gezeigt, dass, wenn Funktion $f(x, y)$, definiert für $[a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d]$, integrierbar (R) ist nach x bei festem y und integrierbar (R) nach y bei festem x, während $f(x, y)$ im Definitionsbereiche beschränkt ist, dann auch die iterierten Integrale (R) existieren und einander gleich sind [23]).

Gillespie [24]) zeigte: Wenn $f(x, y)$ für $[a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d]$ beschränkt ist und die iterierten Integrale

---

[21]) Setzt man keine gleichmässige Beschränktheit der Funktionenfolge voraus, so lässt sich zeigen: *Es sei gegeben*: 1^0 *auf* (a, b) *konvergiert eine Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion* $f(x)$, *welche integrierbar* (R) *ist;* 2^0 *die Funktionen* $f_n(x)$ *der Folge sind integrierbar* (R) *auf* (a, b)*;* 3^0 $\lim\limits_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ *existiert. Dann ist notwendig und hinreichend, damit*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

sei, die folgende Bedingung: „bei willkürlich positiven Zahlen ε *und* N *lässt sich eine ganze Zahl* $\nu \geq N$ *und ein Intervall* $(b - \delta_1)$ *finden, so dass für jeden Wert* x *in diesem Intervall:*

$$\left| \int_a^x [f_\nu(x) - f(x)]\,dx \right| < \varepsilon$$

ist". Siehe unsere Diss., § 33, Satz V^c^.

[22]) Siehe Lichtenstein, Gött. Nachr. (1910), S. 468—475.

[23]) Ohne die Folgerung über die Gleichheit der iterierten Integrale wurde der Satz von W. H. Young ausgesprochen. Sein Beweis [Monatsh. für Math. u. Phys. XXI (1910), S. 127 u. 128] macht es notwendig anzunehmer, dass das Flächenmass (L) derjenigen Punkte, in denen $f(x, y)$ unstetig ist nach y, gleich Null sei. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie ein Beispiel von Hn. Sierpiński [Fund. mat. I (1920), p. 145] zeigt. Er definiert eine Funktion, welche im Quadrate $[0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1]$ auf jeder Geraden parallel zur y-Achse in höchstens zwei Punkten den Wert 1 hat, in allen übrigen den Wert 0. Die beiden iterierten Integrale existieren und sind Null, aber die Punktmenge dieses Beispiels, auf der $f(x, y) = 1$ ist, ist nach Sierpiński nicht-messbar (L).

[24]) Siehe Gillespie Annals of Math. (2) XX (1919), S. 224-228. Ein zweiter Beweis findet sich bei Ridder, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) XIV: 2 (1923), S. 119-121.

$$\int\limits_a^b dx \overline{\int\limits_c^d} dy \cdot f(x,y) \text{ und } \int\limits_c^d dy \overline{\int\limits_a^b} dx \cdot f(x,y)$$

existieren, so sind sie einander gleich.

Beide Sätze sind Spezialfälle des folgenden, allgemeineren Satzes:

S a t z: *P_1 sei ein Punkt aus einer abgeschlossenen, nach Jordan k-dimensional messbaren Menge U und P_2 ein Punkt aus einer Menge V, welche im l-dimensionalen Raume abgeschlossen und messbar (J) ist. Für alle Kombinationen (P_1, P_2) aus diesen Mengen sei die Funktion $f(P_1, P_2)$ gleichmässig beschränkt.*

Damit

$$\int\limits_U dP_1 \overline{\int\limits_V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) \text{ und } \int\limits_V dP_2 \overline{\int\limits_U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2)$$

existieren — und dann einander gleich seien, — ist notwendig und hinreichend, dass

$$\int\limits_U dP_1 \left[\overline{\int\limits_V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) - \underline{\int\limits_V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) \right] \tag{19}$$

und

$$\int\limits_V dP_2 \left[\overline{\int\limits_U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2) - \underline{\int\limits_U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2) \right] \tag{20}$$

existieren und gleich Null sind. Die Integrale sind nach Riemann zu nehmen.

Wir werden wieder den Beweis ohne die Lebesguesche Masstheorie, welche in allen zitierten Arbeiten benutzt wurde führen.

B e w e i s: Die Notwendigkeit der Bedingungen ist evident. Zeigen wir, dass sie auch genügen.

Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots$ absteigende, nach Null konvergierende Folgen von positiven Zahlen. Da das Integral (19) gleich Null ist und der Integrand auf U nicht-negativ, so hat die Menge Q_k der Punkte P_1 von U, in denen

$$\overline{\int\limits_V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) - \underline{\int\limits_V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) \geqq \varepsilon_k$$

ist, ein Mass $(J)=0$. Somit existiert eine endliche Anzahl A_k von offenen Intervallen mit Gesamtmass $<\delta_k$, welche Q_k enthalten.

Wählen wir eine gegen Null konvergierende Folge von positiven, abnehmenden Zahlen (ζ_l). Für jeden Punkt P_1 der abgeschlossenen Menge $(U-A_k.U)$ lässt sich dann eine Zahl $\zeta_{l(P_1)}$ angeben mit folgender Eigenschaft. Die Menge V wird überdeckt mit endlich vielen, abgeschlossenen Intervallen (v_j), deren Gesamtmass um weniger als $\zeta_{l(P_1)}$ von $m(V)$ abweicht, welche nur Punkte von V enthalten, keine inneren Punkte gemeinsam haben und deren Einzelmasse auch alle kleiner als $\zeta_{l(P_1)}$ sind; in jedem v_j wählt man *willkürlich* einen Punkt $P_{2,j}$ und bildet die Summe

$$\sum_{(j)} m(v_j).f(P_1, P_{2,j}).$$

Nun sollen *alle* auf diese Weise gebildeten Summen die Eigenschaft haben, dass

$$\left|\sum_{(j)} m(v_j).f(P_1, P_{2,j}) - \overline{\underline{\int}}_V d P_2 f(P_1, P_2)\right| < 2\varepsilon_k$$

ist. Die Möglichkeit eines derartigen $\zeta_{l(P_1)}$ folgt aus der Eigenschaft der oberen und unteren Darbouxschen Integrale, dass sie sich *gleichmässig* annähern lassen durch derartige Summen, wenn man für jedes v_j anstatt des Funktionswertes im willkürlichen Punkte $P_{2,j}$ obere, bzw. untere Schranke der Funktion auf v_j in die Summe einträgt [25]).

Es sei $G_n^{(k)}$ die Menge derjenigen Punkte von $(U-A_k.U)$, für welche ein ζ_l gewählt werden kann mit $l=1, 2, \ldots,$ oder n. Dann ist $G_1^{(k)} < G_2^{(k)} < \ldots < G_n^{(k)} < \ldots$ und $(U-A_k.U) = \lim_{n=\infty} G_n^{(k)}$.

Nach dem Hilfssatz des § 2 existiert eine ganze, positive Zahl ν_k, so dass gilt:

$$m_a(G_{\nu_k}^{(k)}) > m(U-A_k.U) - \delta_k > m(U) - 2\delta_k.$$

Es lässt sich eine endliche Anzahl von abgeschlossenen, einander nicht überdeckenden Intervallen $[u_i; i=1, \ldots, p]$ angeben, welche nur Punkte von U enthalten. Wir machen eine abzähl-

[25]) Vgl. l. c. [2]), p. 25.

bare Folge von derartigen Teilungen (T_m), wobei mit zunehmendem Index das Mass des grössten Intervalls der betrachteten Teilung sich der Null nähert, während dabei das Gesamtmass der Intervalle nach $m(U)$ konvergiert.

Für *jede* Teilung T_m ist das Gesamtmass der Intervalle, welche gar keine Punkte von $G^{(k)}_{\nu_k}$ enthalten, $< 2\delta_k$. In jedem Intervall u_i einer Teilung, das Punkte von $G^{(k)}_{\nu_k}$ enthält, wird ein bestimmter Punkt $P^{(k)}_{1,i}$ von $G^{(k)}_{\nu_k}$ gewählt. In den Intervallen, welche keine Punkte von $G^{(k)}_{\nu_k}$ enthalten, wird ein willkürlicher Punkt $P^{(k)}_{1,i}$ genommen. Wir bilden nun die Summe:

$$\sum_{(i)} m(u_i) \cdot \left[\sum_{(j)} m(v_j) \cdot f(P^{(k)}_{1,i}, P_{2,j}) - \overline{\int_V} dP_2 \cdot f(P^{(k)}_{1,i}, P_2) \right]$$

wobei die *übrigens ganz willkürliche* Teilung der Menge V von abgeschlossenen Intervallen (v_j) gebildet wird, deren Gesamtmass um weniger als ζ_{ν_k} von $m(V)$ abweicht, welche nur Punkte von V enthalten und deren Einzelmasse kleiner als ζ_{ν_k} sind; $P_{2,j}$ liegt ausserdem *ganz willkürlich* in v_j.

Ist dann G obere Schranke aller absoluten Werte von $f(P_1, P_2)$, so wird für *jede* derartige, zur Teilung T_m und zum Index k gehörende Summe:

$$\left| \sum_{(i)} m(u_i) \cdot \left[\sum_{(j)} - \overline{\int_V} \right] \right| < 2\varepsilon_k \cdot m(U) + 2\delta_k \cdot 2G \cdot m(V) = \Delta_k. \tag{21}$$

Die Abschätzung hängt *nicht* von dem gewählten T_m ab. Offenbar ist $\lim\limits_{k=\infty} \Delta_k = 0$.

Die Menge R_k der Punkte P_2 von V, in denen

$$\overline{\int_U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2) - \underline{\int_U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2) \geqq \varepsilon_k$$

ist, hat das Mass $(J) = 0$. Somit ist R_k einzuschliessen in einer endlichen Anzahl B_k von offenen Intervallen, deren Gesamtmass kleiner als δ_k ist. Daraus folgt, dass diejenigen Intervalle einer Teilung von V, welche Punkte von R_k enthalten, ein Gesamtmass $< 2\delta_k$ haben, wenn nur das Gesamtmass der Intervalle der Teilung von V um weniger als eine positive, von δ_k abhängende Zahl ϑ_k von $m(V)$ abweicht, während das Mass des grössten Intervalls der Teilung kleiner als ϑ_k ist. Betrachten wir eine *bestimmte* Teilung $\mathfrak{J}_k$ dieser Art von V und nehmen wir $P_{2,j}$ im Intervall v_j *ganz willkürlich, aber fest.* Da die Anzahl der Intervalle (v_j) endlich ist, lässt sich eine ganze, positive Zahl $\mu(\mathfrak{J}_k)$ angeben, so dass für *jede* Teilung T_m, von einem Index $m \geqq \mu(\mathfrak{J}_k$, wie auch die Punkte $P_{1,i}$ in den zugehörigen Intervallen genommen werden, und bei der fest gewählten Teilung $\mathfrak{J}_k$ von V und den dabei gewählten Teilungspunkten $(P_{2,j})$:

$$(22)\quad \left|\sum_{(j)} m(v_j)\cdot\left[\sum_{(i)} m(u_i)\cdot f(P_{1,i}, P_{2,j}) - \overline{\int_U} dP_1\cdot f(P_1, P_{2,j})\right]\right| <$$

$$< 2\varepsilon_k\cdot m(V) + 2\delta_k\cdot 2G\cdot m(U) = \Gamma_k$$

ist. Es ist $\lim\limits_{k=\infty}\Gamma_k = 0$.

Wenn man dafür sorgt, dass $\vartheta_k \leqq \zeta_{\nu_k}$ ist, so gelten bei *jeder* Teilung T_m von U mit $m \geqq \mu(\mathfrak{J}_k)$ und bei den zum Index k gehörenden Punkten $P^{(k)}_{1,i}$ in den Intervallen u_i der Teilung T_m (siehe beide vorige Seiten) die Ungleichungen (21) und (22) gleichzeitig. Daraus folgt:

$$(23)\quad \left|\sum_{(i)} m(u_i)\cdot \overline{\int_V} dP_2\cdot f(P^{(k)}_{1,i}, P_2) - \sum_{(j)} m(v_j)\cdot \overline{\int_U} dP_1\cdot f(P_1, P_{2j})\right| <$$

$$< \Delta_k + \Gamma_k.$$

Wählen wir in den Intervallen aller Teilungen T_m immer zum Index k gehörenden Punkte, so folgt weiter:

$$(24)\quad \left|\lim_{m=\infty}{}^{\sup}_{\inf} \sum_{(i)} m(u_i)\cdot \overline{\int_V} dP_2\cdot f P^{(k)}_{1,i}, P_2) - \right.$$

$$\left. - \sum_{(j)} m(v_j)\cdot \overline{\int_U} dP_1\cdot f(P_1, P_{2j}\right| \leqq \Delta_k + \Gamma_k.$$

Die Abschätzung gilt gleichmässig für *alle möglichen zu* ϑ_k *gehörenden Teilungen* $\mathfrak{J}_k$ *von* V und *alle möglichen Punkten* $P_{2,j}$ in den zugehörigen Intervallen.

Aus (24) folgt für zwei willkürliche, zu ϑ_k gehörenden Teilungen $\mathfrak{I}'_k$ und $\mathfrak{I}''_k$ und willkürlich dabei gewählten Punkten $(P'_{2,j})$ und $(P''_{2,j})$, dass:

$$\left| \sum_{(j)} m(v_j') \cdot \overline{\underline{\int}}_{U} dP_1 \cdot f(P_1, P'_{2,j}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{(j)} m(v''_j) \cdot \overline{\underline{\int}}_{U} dP_1 \cdot f(P_1, P''_{2,j}) \right| \leqq 2(\Delta_k + \Gamma_k)$$

ist. Hieraus folgt für $k = \infty$ die Existenz von:

$$\int_{V} dP_2 \cdot \overline{\underline{\int}}_{U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2).$$

Auf dieselbe Weise zeigt man die Existenz von

$$\int_{U} dP_1 \cdot \overline{\underline{\int}}_{V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2).$$

Dadurch lässt sich (24) auch so schreiben:

$$\left| \int_{U} dP_1 \cdot \overline{\underline{\int}}_{V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) - \sum_{(j)} m(v_j) \cdot \overline{\underline{\int}}_{U} dP_1 \cdot f(P_1, P_{2,j}) \right| \leqq$$
$$\leqq \Delta_k + \Gamma_k.$$

Also für $k = \infty$:

$$\int_{U} dP_1 \cdot \overline{\underline{\int}}_{V} dP_2 \cdot f(P_1, P_2) = \int_{V} dP_2 \cdot \overline{\underline{\int}}_{U} dP_1 \cdot f(P_1, P_2).$$

§ 8. Dass die Existenz eines der iterierten Integrale keine hinreichende Bedingung für Existenz und Gleichheit von beiden iterierten Integralen ist, war schon lange bekannt aus Beispielen von Thomae[26]) und Pringsheim[26]). Das zeigt auch das folgende, einfache Beispiel. Für jedes rationale x auf $(0 \leqq x \leqq 1)$ sei $f(x, y) = 0$ bei $0 \leqq y < \frac{1}{2}$ und $f(x, y) = 1$ bei $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1$; für

---

26) Siehe Hobson, Theory of functions I, § 365, Examples 1 and 5.

irrationales x sei $f(x,y)=1$ bei $0 \leq y < \frac{1}{2}$ und $f(x,y)=0$ bei $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$. Das iterierte Integral $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot f(x,y) = \frac{1}{2}$; das zweite iterierte Integral existiert nicht.

---

§ 9. Für mehrfach iterierte Integrale lautet das Analogon des Satzes von Gillespie: Wenn die n-fach iterierten Integrale einer für $[a_j \leq x_j \leq b_j;\ j=1,2,\ldots,n]$ beschränkten Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ alle existieren, so sind sie einander gleich [27]).

Mit dem Satze von Lichtenstein stimmt der folgende Satz überein: Die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ sei beschränkt für $[a_j \leq x_j \leq b_j;\ j=1,2,\ldots,n]$. In jedem Intervall (a_j, b_j) existiere eine Punktmenge P_j vom Masse $(J)=0$. Für alle Kombinationen von $(n-1)$. Koordinaten, welche in den zugehörigen Intervallen liegen, jedoch nicht zu den (P_j) gehören, möge die Funktion integrierbar (R) sein nach der übrigbleibenden, n-ten Variablen. Dann existieren alle n-fach iterierten Integrale und sind einander gleich. [28])

Beide Sätze sind wieder Spezialfälle des folgenden, allgemeineren Satzes:

Satz: *Es seien gegeben n Mengen $M_1, M_2 \ldots, M_n$, welche in Räumen von einer endlichen, aber mit dem Index veränderlichen Anzahl von Dimensionen liegen und da abgeschlossen sind. Jede Menge M_j, liegend in einem Raume von k_j Dimensionen sei k_j— dimensional messbar (J). Eine Funktion $f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, definiert für alle Kombinationen $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ aus den zugehörigen Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$, sei gleichmässig beschränkt.*

Damit alle n-fach iterierten Integrale (*R*).

$$(25) \qquad \int_{M_{i_1}} dP_{i_1} \int_{M_{i_2}} dP_{i_2} \ldots \int_{M_{i_n}} dP_{i_n} \cdot f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

---

[27]) Siehe für den Beweis Ridder, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) XV: 1 (1925), S. 48.

[28]) Siehe für den Beweis Ettlinger, Amer. Journal of Math. XLVIII (1926), p. 215 etc.

existieren, ist notwendig und hinreichend, dass alle Integrale (R)*:*

$$(26)\qquad \int\limits_{M_{i_1}} dP_{i_1}\left[\overline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2}\overline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\overline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n)-\right.$$

$$\left.-\underline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2}\underline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\underline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n)\right]$$

existieren und gleich Null sind.

Dann liefern alle Integrale (25) *denselben Wert, unabhängig von der Aufeinanderfolge der Integrationen.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist wieder evident.

Sie ist auch hinreichend.

Da alle Integrale (26) gleich Null sind, folgt, dass auch

$$\int\limits_{M_{i_1}} dP_{i_1}\left[\overline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2}\left\{\overline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\overline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n)\right\}-\right.$$

$$\left.-\underline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2}\left\{\overline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\overline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n)\right\}\right]$$

und das hieraus entstehende Integral, wen man i_1 und i_2 vertauscht, gleich Null sind. Daraus folgt jedoch nach dem übereinstimmenden Satze für zweifach iterierte Integrale (§ 7) die Existenz von

$$\int\limits_{M_{i_1}} dP_{i_1}\int\limits_{M_{i_2}} dP_{i_2}\overline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\overline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n)$$

und dadurch auch die Existenz von

$$\int\limits_{M_{i_1}} dP_{i_1}\underline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2}\underline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3}\ldots\underline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n}\cdot f(P_1,\ldots,P_n).$$

Da $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jede Aufeinanderfolge haben können, existieren somit alle n-fach iterierten Integrale.

Dass sie einander gleich sind, lässt sich, wie folgt, zeigen.

1° Nehmen wir an, dass der Beweis schon geliefert wäre für $(n-1)$-fach iterierte Integrale. (Für $n-1=2$ ist dies der Fall).

Bei willkürlich positivem ε_k sei $M_{i_1,k}$ die Menge derjenigen Punkte (P'_{i_1}) aus der Menge M_{i_1}, für welche eine oder mehrere Differenzen:

$$\overline{\int\limits_{M_{i_2}}} dP_{i_2} \overline{\int\limits_{M_{i_3}}} dP_{i_3} \dots \overline{\int\limits_{M_{i_n}}} dP_{i_n} \cdot f(P'_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n}) -$$

$$- \int\limits_{\underline{M}_{i_2}} dP_{i_2} \int\limits_{\underline{M}_{i_3}} dP_{i_3} \dots \int\limits_{\underline{M}_{i_n}} dP_{i_n} \cdot f(P'_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n}) \geqq \varepsilon_k$$

sind, wobei die $(n-1)$ Indices in jeder Ordnung aufeinander folgen können. Da die Integrale (26) Null sind und der Integrand immer nicht-negativ ist, wird die Menge $M_{i_1,k}$ ein Mass $(J)=0$ im zugehörigen Raume haben.[29]) Nehmen wir eine absteigende, nach Null konvergierende Folge von positiven Zahlen (ε_k) und bilden dabei die Mengen $(M_{i_1,k})$. Dann lässt sich in jedem zu M_{i_1} gehörenden, abgeschlossenen Intervall ein Punkt anweisen, der zu keiner der Mengen $M_{i_1,k}$ gehört [10]). In einem solchen Punkte existieren dann alle $(n-1)$-fach iterierten Integrale und sind einander gleich. Daraus folgt dann unmittelbar, dass auch *alle* n-fach iterierten Integrale, bei denen P_{i_1} die letzte Integrationsveränderliche darstellt, einander gleich sind.

2° Aus der Existenz von:

$$\int\limits_{M_{i_1}} dP_{i_1} \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_2}}} dP_{i_2} \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_3}}} dP_{i_3} \dots \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_n}}} dP_{i_n} \cdot f(P_1, \dots, P_n)$$

und

$$\int\limits_{M_{i_2}} dP_{i_2} \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_1}}} dP_{i_1} \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_3}}} dP_{i_3} \dots \overline{\int\limits_{\underline{M}_{i_n}}} dP_{i_n} \cdot f(P_1, \dots, P_n)$$

---

[29]) Vgl. § 1.

folgt dass sie einander gleich sind. Denn sie lassen sich auffassen als zweifach iterierte Integrale derselben Funktion von P_{i_1} und P_{i_2}.

Aus 1^0 und 2^0 folgt nun die Gleichheit aller n-fach iterierten Integrale.[30])

L. Kantorowicz.

O twierdzeniu Vitali'ego.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 31 maja 1929 r.

L. Kantorovitch.

Sur le théorème de M. Vitali.

Mémoire présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 31 mai 1929.

On doit à M. Vitali[1]) un théorème important, concernant les fonctions mesurables:

Pour toute fonction $f(x)$, définie et mesurable dans l'intervalle $I=(a,b)$, existe une fonction $\varphi(x)$ de la classe $\leqslant 2$, telle que

(1) $$f(x)=\varphi(x)$$

presque partout dans I.

Nous allons préciser ce théorème comme il suit.

Théorème I.[2]) *Pour toute fonction $f(x)$, définie et mesurable dans l'intervalle $I=(a,b)$, il existe une fonction $\varphi(x)$*

---

[30]) Zum Schluss bemerken wir, dass sich, umgekehrt, aus den Eigenschaften von mehrfachen, Riemannschen Integralen Sätze ableiten lassen über die Durchschnittsmengen bei nach Jordan messbaren Mengen; siehe Ridder, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) XVI: 2 (1929), S. 12—16.

[1]) G. Vitali, *Rend. Lomb.* 38 (1905), p. 599; cf. aussi W. Sierpiński, *Fund. Math.* 3 (1922), p. 319.

[2]) M. Saks avait bien voulu de m'indiquer que ce théorème n'est pas nouveau: v. C. Carathéodory, *Vorlesungen ueber reelle Funktionen* (1918), p. 406, Satz 5. Néanmoins je maintient la démonstration (qui est bien proche à celle de M. Carathéodory) pour faciliter les références dans la suite.

jouissant des propriétés suivantes: 1) elle est G_2[1]*) au plus (dans la classification de M. Young), 2) elle remplie la relation (1) presque partout dans I et 3) la relation*

(2) $$f(x) \leqslant \varphi(x)$$

partout dans I.

Démonstration. En désignant par ρ un des nombres rationnels (dont l'ensemble, comme on sait, est dénombrable), posons

$$F_\rho^* = \mathcal{E}(f(x) \geqslant \rho).$$

Il existe un ensemble F_ρ, contenant F_ρ^*, qui est $\mathfrak{D}_2$ (c'est-à-dire produit des ensembles ouverts) au plus et vérifie la condition

(3) $$m F_\rho = m F_\rho^*.$$

Soit r un nombre réel quelconque ou l'infini positif; posons

(4) $$E_r = \prod_{\rho < r} F_\rho,$$

où le produit s'étend aux valeurs de $\rho < r$. Définissons la fonction $\varphi(x)$, comme borne supérieure (éventuellement, infinie) des nombres r, tels que $x \varepsilon E_r$; s'il n'y a pas de tels nombres, nous posons $\varphi(x) = -\infty$. Nous allons montrer que la fonction $\varphi(x)$, ainsi construite, satisfait bien aux conditions requises.

Tout d'abord, on aura

(5) $$\mathcal{E}(\varphi(x) \leqslant r) = E_r,$$

quelle que soit la valeur de r, finie ou infinie positive. En effet, si $x \varepsilon E_r$, on obient $\varphi(x) \leqslant r$, par définition même de φ. Inversement, si $\varphi(x) \geqslant r$, il vient par la même raison $x \varepsilon E_{r'}$, pourvu que r' soit $< r$, en sorte que l'on a aussi [vu (4)]

$$x \varepsilon \prod_{r' < r} E_{r'} = \prod_{\rho < r} F_\rho = E_r.$$

Ensemble (5) étant $\mathfrak{D}_2$ au plus [v. (4)], la fonction $\varphi(x)$ est g_2 au plus[2]).

---

[1]) Nous utilisons ici (et dans la suite) les notations de M. H. Hahn v. *Theorie der reellen Funktionen* [Berlin 1921], pp. 328, 334.

[2]) H. Hahn, loc. cit., p. 343.

Soit $x \varepsilon I$ et $f(x) > -\infty$. Posons $r = f(x)$; alors on aura $x \varepsilon F_\rho^* \subset F_\rho$, pourvu que ρ soit $< r$, par suite $x \varepsilon E_r$, d'où [vu (4)] il résulte l'inégalité (2) à démontrer. Cette inégalité subsiste également dans le cas, où $f(x) = -\infty$.

Montrons maintenant que l'inégalité $f(x) < \varphi(x)$ ne peut avoir lieu qu'aux points de l'ensemble $F = \sum_\rho (F_\rho - F_\rho^*)$ de mesure nulle [v. (3)]. En effet, soit $x \varepsilon CF$ et $\varphi(x) > -\infty$. En posant cette fois $r = \varphi(x)$, il résulte de (5), (4) que $x \varepsilon F_\rho$, pourvu que ρ soit $< r$; donc x n'appartenant pas à F, on aura forcément $x \varepsilon F_\rho^*$, c'est-à-dire, $f(x) \geqslant \rho$, d'où $f(x) \geqslant r = \varphi(x)$. En rapprochant cette inégalité à (2), on trouve l'égalité (1) [qui a lieu aussi dans le cas exclu, où $\varphi(x) = -\infty$].

Remarque. On voit de la même manière qu'il existe une fonction $\psi(x)$, G_2 au plus et telle que l'on a $\psi(x) \leqslant f(x)$ partout et $\psi(x) = f(x)$ presque partout dans I.

Remarquons que l'on pourrait démontrer le théorème précédent en suivant l'ordre d'idées de M. Sierpiński [v. sa démonstration du théorème de M. Vitali loc. cit.[1])]. Il suffit, en conservant les notations de l'article cité de poser la fonction $f_n(x)$ égale à $+\infty$ (au lieu de *zéro*) sur le complémentaire de l'ensemble fermé $H_n H_{n+1} \ldots$. Alors $f_n(x)$ sera du type G_1 et la fonction-limite $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ satisfaira à toutes les conditions du théorème.

Moyennant cette proposition on peut également préciser le théorème connu de M. Fréchet[1]).

Toute fonction $f(x)$, définie et mesurable dans l'intervalle I, est limite presque partout dans I d'une suite de polynômes $P_n(x)$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x).$$

Notamment, nous allons démontrer ce

Théorème II. *Pour toute fonction $f(x)$, définie et mesurable dans l'intervalle I, il existe une suite de polynômes $P_n(x)$, telle que l'on a*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n \to \infty} P_n(x)$$

partout dans I et

---

[1]) M. Fréchet, *Comptes Rendus*, 20 mars 1905; *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, 22 (1906), p. 17.

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(x) = \limsup_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

presque partout dans I.

D é m o n s t r a t i o n. En effet, comme nous avons vu, la fonction $f(x)$ se trouve comprise entre les deux fonctions équivalentes:

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

dont (bien entendu) ψ est G_2 au plus et φ est g_2 au plus. Alors, d'après un théorème de M. Goldowsky[1]), il existe une suite de fonctions continues et, par conséquent des polynômes $P_n(x)$, telle que l'on ait

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(x) = \varphi(x), \liminf_{n\to\infty} P_n(x) = \psi(x),$$

ce qui prouve notre proposition.

Le théorème I peut être étendu aux fonctions quelconques, même non-mesurables, de la manière suivante:

Théorème III. *Soit $f(x)$ une fonction quelconque, définie dans l'intervalle I. Il existe une fonction $\varphi(x)$ qui 1) est g_2 au plus, 2) satisfait à l'inégalité (2) et 3) à la condition suivante:*

$$m_e \mathcal{E}(\varphi(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)) = m\, I,$$

quel que soit le nombre positif ε, pourvu que la fonction donnée $f(x)$ puisse être majorée en général par une fonction mesurable $\lambda(x)$, telle que

$$m\,\mathcal{E}(\lambda(x) = +\infty) = m_e \mathcal{E}(f(x) = +\infty). \tag{6}$$

D é m o n s t r a t i o n. Cette hypothèse-ci est évidemment nécessaire; car, si la fonction $\varphi(x)$, juissant des propriétés 1), 2), 3) existe, elle même joue le rôle de la fonction majorante. Supposons donc qu'elle soit satisfaite. Nous construisons la fonction $\varphi(x)$ de la même manière qu'auparavant, en remplaçant la condition (3) par la suivante:

$$m\, F_\rho = m_e F_\rho^* \tag{7}$$

Les propriétés 1), 2) peuvent être justifiées comme plus haut. Soit ε un nombre positif, pris à volonté; choisissons un

---

[1]) *Fund. Math.* 11 (1928), p. 276.

nombre naturel $n > \frac{2}{\varepsilon}$ et posons, quel que soit un nombre entier k

(8) $M_k = \left[\mathcal{E}\left(\varphi(x) \geqslant \frac{k}{n}\right) - \mathcal{E}\left(f(x) \geqslant \frac{k-1}{n}\right)\right] \cdot \mathcal{E}\left(\frac{k}{n} \leqslant \varphi(x) < \frac{k+1}{n}\right)$

et, en outre,

(9) $$M = \mathcal{E}(\varphi(x) = +\infty) - \mathcal{E}(f(x) = +\infty).$$

On verra sans peine:

(10) $$\mathcal{E}(\varphi(x) > f(x) + \varepsilon) \subset \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k + M.$$

Or, on aura

$$M_k \subset \mathcal{E}\left(\varphi(x) \geqslant \frac{k}{n}\right) = \mathcal{E}\left(f(x) \geqslant \frac{k-1}{n}\right)$$

et [d'après (5), (4)]

$$\mathcal{E}\left(\varphi(x) \geqslant \frac{k}{n}\right) = \prod_{\rho < \frac{k}{n}} F_\rho \subset F_{\frac{k-1}{n}},\ \mathcal{E}\left(f(x) \geqslant \frac{k-1}{n}\right) = F^*_{\frac{k-1}{n}},$$

en sorte que

(11) $$M_k \subset F_{\frac{k-1}{n}} - F^*_{\frac{k-1}{n}}.$$

Il résulte de (11) et (7)

(12) $$m_i M_k = 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

On aura également [v. (5), (4) et (7)]

$$m\,\mathcal{E}(\varphi(x) = +\infty) = \lim_{n \to \infty} m\,\mathcal{E}(\varphi(x) \geqslant n+1) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} m\,E_{n+1} \leqslant \lim_{n \to \infty} m\,F_n = \lim_{n \to \infty} m_e F^*_n,$$

d'autre part, en vertu de l'hypothèse faite [v. (6)],

$$\lim_{n \to \infty} m_e F^*_n \leqslant \lim_{n \to \infty} m\,\mathcal{E}(\lambda(x) \geqslant n) = m\,\mathcal{E}(\lambda(x) = +\infty) =$$
$$= m_e\,\mathcal{E}(f(x) = +\infty),$$

donc

$$m\,\mathcal{E}(\varphi(x) = +\infty) \leqslant m_e\,\mathcal{E}(f(x) = +\infty);$$

le sens de l'inégalité pouvant [vu (2)] être renversé, on voit que c'est l'égalité qui a lieu, de façon que l'on a [v. (9)]

$$(13) \qquad m_i M = 0 .$$

Il vient de (12) et (13), en tenant compte de ce que les ensembles M, M_k sont compris respectivement [v. (8), (9)] dans les ensembles *mesurables* et *disjoints* $\mathcal{E}(\varphi(x) = +\infty)$, $\mathcal{E}\left(\frac{k}{n} \leqslant \varphi(x) < \frac{k+1}{n}\right)$, que la somme dans la seconde partie de l'inclusion (10) a également la mesure intérieure nulle. Cela est vrai, à plus forte raison, pour l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi(x) > f(x) + \varepsilon)$, c. q. f. d.

Ce qui précède nous permet de donner une démonstration nouvelle d'un théorème dû à M. M. S. Saks et W. Sierpiński[1]):

Pour toute fonction $f(x)$ définie dans intervalle I, il existe toujours une fonction $\varphi(x)$ de la classse $\leqslant 2$, telle que l'on a

$$(14) \qquad m_e \mathcal{E}(\varphi(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon) = m I,$$

quel que soit le nombre positif ε.

Démonstration. Vu le théorème de M. Vitali [ou, si l'on veut, le théorème *I*], il suffit de construire une fonction *mesurable* satisfaisant à la condition ci-dessus. A cet effet considérons les ensembles

$$(15) \quad P_0 = \mathcal{E}(f(x) = +\infty), \; P_n = \mathcal{E}(f(x) \leqslant n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et définissons les fonctions auxiliaires $\psi_n(x)$ comme il suit:

$$(16) \quad \begin{cases} \psi_n(x) = f(x), \text{ si } x \in P_n \\ \psi_n(x) = -\infty \text{ partout ailleurs dans } I. \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

L'hypothèse du théorème *II* étant remplie évidemment pour chaque fonction $\psi_n(x)$, il existe donc des fonctions mesurables $\varphi_n(x)$ $[n = 0, 1, 2, 3, \ldots]$, telles que l'on a

$$(17) \qquad \psi_n(x) \leqslant \varphi_n(x)$$

et, quel que soit $\varepsilon > 0$, pris à volonté,

$$(18) \qquad m_i \mathcal{E}(\psi_n(x) < \varphi_n(x) - \varepsilon) = 0.$$

---

[1]) *Fund. Math.* 11 (1928) p. 105.

Soit

(19) $$X_n^* = \mathcal{E}(\varphi_n(x) > -\infty) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

et

$$X_0 = X_0^*,\ X_n = X_n^* - (X_0^* + X_1^* + \ldots + X_{n-1}^*) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$
$$X = C(X_0^* + X_1^* + \ldots).$$

Définissons maintenant la fonction cherchée $\varphi(x)$, en posant

(20) $$\begin{cases} \varphi(x) = \varphi_n(x), \text{ si } x \varepsilon X_n & (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ \varphi(x) = -\infty, \text{ si } x \varepsilon X. \end{cases}$$

L'ensemble $A = C\mathcal{E}(\varphi(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon)$ peut être décomposé de la manière suivante:

$$A = AX + \sum_{n=0}^{\infty} AX_n.$$

D'ailleurs, le premier component est vide. En effet, dans X on a, par définition, $\varphi(x) = -\infty$, [v. (20)]. D'autre part, si $x \varepsilon X$, on aura $x \varepsilon P_n$ pour une valeur convenable de n [v. (15)], de sorte que $f(x) = \psi_n(x) \leqslant \varphi_n(x)$ [d'après (17)]; or, x n'appartenant pas à X_n^*, on aura [vu (19)] $\varphi_n(x) = -\infty$ et *a fortiori* $f(x) = -\infty$. Donc, dans X on a $\varphi(x) = f(x) = -\infty$, ce qui montre que l'ensemble AX est vide.

Considérons un des ensembles AX_n; si $x \varepsilon AX_n$, on a, par définition [v. (20)],

(21) $$\varphi(x) = \varphi_n(x).$$

Nous allons distinguer deux cas: 1) $x \varepsilon P_n$, alors on a [v. (16)] $\psi_n(x) = f(x)$, de sorte que [v. (21), (17)] $\psi_n(x) < \varphi_n(x) - \varepsilon$; 2) $x \varepsilon CP_n$, $\psi_n(x) = -\infty$ [v. (16)], tandis que [d'après (19)] $\varphi_n(x) > -\infty$. Donc l'ensemble AX_n est compris dans l'ensemble $\mathcal{E}(\psi_n(x) < \varphi_n(x) - \varepsilon)$, et l'on a [en vertu de (18)]

(22) $$m_i AX_n = 0.$$

Comme les ensembles AX_n sont contenus dans les ensembles X_n, *mesurables* et *disjoints*, on conclut de (22) qu'on aura également $m_i A = 0$, c. q. f. d.

Je termine par remercier M. le Prof. Gr. Fichtenholz à qui je dois des conseils précieux concernant la rédaction de cette Note.

Antoni Łaszkiewicz.

O nowem polskiem złożu zeolitowem.

Przedstawił St. J. Thugutt d. 31 maja 1929.

Jakkolwiek wśród skał wybuchowych zeolity spotykają się dość często, w Polsce dostrzeżono zeolitów stosunkowo niewiele. Dopiero rozwój kamieniołomów udostępnił badaczom partje głębiej położone i bardziej obfitujące w złoża mineralne. Stało się to np. z górą Wżar w Kluszkowcach powiatu nowotarskiego. Szczyt i znaczną część zboczy Wżaru tworzy potężny masyw andezytowy, uznawany dawniej za lakkolit powstały *in situ*, dziś — za utwór nasunięty z południa wraz z otaczającym go fliszem [1]). Andezyt ten został zbadany pod względem petrograficznym przez St. Małkowskiego [2]) i J. Morozewicza [3]), zarówno co do składu mineralnego, jak i wartości technicznej. Dzięki założeniu kamieniołomu w Wżarze w roku bieżącym zostały odsłonięte wielkie partje andezytu typu drugiego [4]), zawierające gniazda chabazytu. Podczas zjazdu Polskiego Towarzystwa Geologicznego w Pieninach zebrałem nieco okazów, których opis podaję poniżej. Chabazyt tworzy gniazda w próżniach oraz przenika skałę w postaci żyłek i drobnych skupień. Skalenie w pobliżu chabazytu są zwietrzałe i w znacznej części skaolinizowane, co dowodzi, że one właśnie przyczyniły się głównie do wytworzenia zeolitu. Kryształy chabazytu mają postać romboedru zasadniczego, o długości krawędzi osiągającej 9 mm., pospolite są bliźniaki według dwuścianu podstawowego. Ściany kryształów wykazują prążkowania bliźniacze i szwy właściwe kryształom mimetycznym. Zali-

---

[1]) Z. Kowalski. Przyczynek do znajomości występowania andezytu na górze Wżar w Kluszkowcach w powiecie nowotarskim. Roczn. Pol. Tow. Geol. **6** (1929).

[2]) St. Małkowski. Andezyty okolic Pienin. Prace Polsk. Inst. Geolog. **1** (1921—4) 3. 58.

[3]) J. Morozewicz. O technicznej wartości andezytu Krościenka i Szczawnicy. Ibidem str. 69—92.

[4]) Wżar II por. Małkowski op. cit. str. 19.

czany zazwyczaj do klasy skalenoedru dytrygonalnego, ujawnia chabazyt anomalje optyczne. W przekrojach prostopadłych do osi z, dostrzegamy, że kryształ składa się z kilku przerastających się osobników dwuosiowych; zamiast osi optycznej mamy tu do czynienia z pierwsza ujemną dwusieczną znacznego kąta osi optycznych, którego pomiar w mikroskopie wykazał $2E = 41^0$, $2V = 26^0$. Optyczne anomalje chabazytu dostrzegano wielokrotnie, tak znacznej dwuosiowości nie zauważono wszakże nigdy. Chabazyt w geodach jest utworem najmłodszym. Wcześniejszym od niego jest kalcyt w dwóch występujący generacjach: pierwszą z nich stanowi kalcyt włóknisty, obfitujący w tlenki żelaza, będący prawdopodobnie paramorfozą po aragonicie. Na nim dopiero osiadła główna masa kalcytu z wyraźną łupliwością romboedryczną. Pozatem trafiają się niewyraźne skalenoedryczne kryształki, a całość pokrywa krystaliczny chabazyt. Obecność kalcytu w andezytach stwierdził już St. Małkowski i uznał go za przekrystalizowany porwak skały wapiennej [1]), więc za kalcyt pierwotny [2]). Według J. Morozewicza [3]) kalcyt stanowi produkt rozkładu skaleni. Warunki występowania kalcytu oraz otoczenie wspomnianych geod potwierdzają pogląd Morozewicza. Wody, przenikające skałę i obfitujące w CO_2 musiały oddziaływać na zasadowe plagjoklazy andezytu. Występowanie w bliskiem sąsiedztwie andezytów pienińskich szczaw alkalicznych czyni przypuszczenie powyższe bardzo prawdopodobnem. Temperatura wód musiała być zrazu nieco wyższa, gdyż ustępujący wapń, łącząc się z dwutlenkiem węgla krystalizował w postaci aragonitu. Równocześnie ustępowały tlenki żelazowe, powlekając igły aragonitu limonitem. W miarę obniżania się temperatury krystalizować mógł kalcyt, ustępujący zaś ze skaleni obok wapnia sód unoszony był przez wody dalej. Dopiero w końcowem stadjum wytworzył się glinoczterokrzemian wapniowo-sodowy czyli chabazyt, należący w geodach do najmłodszej generacji. Wspomniane geody są zatem pochodzenia neptunicznego, czy też hydrotermalnego, a minerałem wyjściowym był plagjoklaz.

---

[1]) S. Małkowski. Op. cit. str. 30.
[2]) „ Op. cit. str. 36.
[3]) J. Morozewicz. Op. cit. str. 76—77.

Antoni Łaszkiewicz.

Sur un nouveau gîte des zeolithes polonais.

Note présentée par M. St. J. Thugutt.

Résumé.

Examinant l'andésite de Wżar, district Nowy Targ, j'ai aperçu une géode contenante deux génerations de calcite couvertes de chabasite. Les plagioclases à l'entour de la géode se sont transformés sous l'action de l'eau saturée par acide carbonique en caolin. Le carbonate de chaux qui prit d'abord naîssance était aragonite fibreuse, mêlée d' oxide de fer. En suite l'aragonite se transforma en calcite (paramorphose). La température des eaux, qui parcouraient la roche, surpassait sans doute 29^0 puis elle se baissa, déposant au lieu de l'aragonite la calcite scalenoédrique. La chabasite pseudoromboédrique se déposa la dernière. Elle présente des mâcles à basopinacoïde. Les faces sont strieées, rappelant aux cristaux mimétiques. Les lamelles taillés perpendiculairement vers l'axe verticale sont biaxes et leur angle axial $2\,V = 26^0$.

Antoni Łaszkiewicz.

Blödyt z Kałusza.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 31 maja 1929 r.

Patrz Archiwum Mineralogiczne T. V.

Blödite de Kałusz.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt le 31 mai 1929.

Voir — Archiwum Mineralogiczne T. V.

St. J. Thugutt.

O rozpuszczalności lublinitu w wodzie przekroplonej.

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 31 maja 1929 r.

(Streszczenie).

Badając rozpuszczalności kalcytu i aragonitu w wodzie przekroplonej bez dostępu powietrza, stwierdziłem, że każdy z tych minerałów przechodzi do roztworu w postaci koloidalnej, bez zmiany ustroju wewnętrznego, i odwrotnie może z pomienionego roztworu wydzielić się w dawnej swej postaci przez proste odparowanie fazy ciekłej (Arch. Miner. T. N. W. **4** (1928), 143).

Eksperyment wykonany z lublinitem, poczytywanym przez jednego za kalcyt o swoistym pokroju, przez innych za samodzielny jednoskośny minerał, wykazał, że i on przechodzi do roztworu w postaci koloidalnej. Z roztworu wodnego po odparowaniu fazy ciekłej wydziela się faza stała w postaci romboedrów z kątem krawędziowym $= 109^0 18'$ (pow. 625-krotne). Kąt krawędziowy kalcytu mierzy $109^0 8'$. Z azotanem kobaltawym zabarwia się osad na kolor wody morskiej. Nie ulega więc wątpliwości, że lublinit nie stanowi jakiejś nowej polimorficznej odmiany węglanu wapniowego, jak to sądził R. Lang, lecz jest, zgodnie z przypuszczeniem J. Morozewicza, szczególnie w kierunku osi trygonalnej wydłużonym kalcytem. Niska wzg. temperatura, w której krystalizuje lublinit, sprzyja, jak wiadomo (J. Königsberger. Zeits. f. Krist. **63** (1926), 159), wytwarzanie się kryształków włoskowatych.

Badania krystalograficzne, wykonane przez Opolskiego, przemawiają również na korzyść poglądów Morozewicza, są jednak skomplikowane i nie tak bezpośrednie, jak przytaczany powyżej eksperyment.

St. J. Thugutt.

Sur la solubilité de la lublinite dans l'eau distillée.

Communication présentée le 31 mai 1929.

(Résumé).

La lublinite traitée avec l'eau distillée à 200°C. donne un liquide coloïdal neutre, qui dépose après évaporation des rhom-

boèdres avec l'angle $109^{0}18'$. Voilà une preuve immédiate que la lublinite est tout simplement une calcite élongée dans la direction de l'axe trigonale et formée dans une température bien basse.

Michał Kamieński.

O obiegu komety perjodycznej Wolfa w okresie 1884—1919.

Komunikat zgłoszony na posiedzeniu dn. 31 maja 1929 r.

W referacie powyższym autor podał wyniki prowizoryczne swoich badań nad kometą Wolfa w tym okresie. Z badań tych wynika, że w okresie wymienionym kometa Wolfa nie uległa żadnym postronnym wpływom, jak to np. występuje u komety Enckego. Szczegółowe opracowania są w toku i będą ogłoszone w wydawnictwie Obserwatorjum Warszawskiego.

Michał Kamieński.

Sur le mouvement de la comète periodique—Wolf durant la periode 1884—1919.

Note préliminaire présentée dans la séance du 31 mai 1929.

Voir „Publications of the Astronomical Observatory of the Warsaw University."