COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III.
XXII Année 1929. Fascicule 7—9.

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematyczno-fizycznych

Rok XXII 1929 Zeszyt 7—9

[ABINET MATEMATY…]
Towarzystwa Naukowego Warsz…

INSTYTUT MAT. PAŃST. W.
BIBLIOTEKA

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1930

http://rcin.org.pl

Tłoczono w Zakł. Graf.-Introlig.
J. Dziewulski, Warszawa, Złota 29

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

TREŚĆ ZESZYTU 7—9.

(Table des matières).

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZ...
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematyczno-fizycznych.

Posiedzenie

z dnia 24 października 1929 r.

W. Sierpiński.

O mierzalności zbiorów analitycznych.

Komunikat, zgłoszony na posiedzeniu w dniu 24 października 1929 r.

Autor dowodzi twierdzenia Łuzina o mierzalności zbiorów analitycznych, wychodząc z definicji tych zbiorów, jako obrazów ciągłych zbioru wszystkich liczb niewymiernych.

W. Sierpiński.

Sur la mesurabilité des ensembles analytiques.

Mémoire présenté dans la séance du 24 Octobre 1929.

Le théorème de M. Lusin que tout ensemble (A) (analytique) est mesurable (L) [1]) a été démontré en 1918 par M. Lusin et par moi en partant de la définition des ensembles (A) au moyen des systèmes déterminants [2]). Une démonstration en partant de la définition des ensembles (A) au moyen du crible a été donnée par M. Lusin en 1927 [3]). Ici je donnerai une démonstration du théorème de M. Lusin en partant de la définition des ensembles (A) comme images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

---

[1]) Voir la note de N. Lusin du 8 janvier 1917 dans les *C. R.* t. 164.

[2]) *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 44.

[3]) *Fund. Math.* t. X, p. 25; aussi: *Recueil Math. de Moscou*, t. 33 (1926), p. 286.

http://rcin.org.pl

Lemme 1. *Si $F_1, F_2, F_3, \dots$ est une suite infinie d'ensembles fermés, dont le premier, F_1, est borné, et si Q est un ensemble ouvert, tel que*

(1) $$F_1 F_2 F_3 \dots \subset Q,$$

il existe un indice n, tel que

(2) $$F_1 F_2 \dots F_n \subset Q.$$

Dém. D'après (1), nous avons

$$CQ \subset CF_1 + CF_2 + CF_3 + \dots$$

(où CE désigne le complémentaire de l'ensemble E) et, à plus forte raison:

(3) $$F_1 . CQ \subset CF_1 + CF_2 + CF_3 + \dots.$$

$F_1 CQ$ étant un ensemble fermé (comme produit de deux ensembles fermés) et borné (comme contenu dans l'ensemble borné F_1), et CF_k $(k = 1, 2, \dots)$ étant des ensembles ouverts, il existe, d'après (3) et en vertu du théorème de Borel, un indice n, tel que

$$F_1 . CQ \subset CF_1 + CF_2 + \dots + CF_n,$$

ce qui donne, lorsqu'on passe aux complémentaires:

$$Q + CF_1 \supset F_1 F_2 \dots F_n,$$

et, en multipliant par F_1, d'après $F_1 . CF_1 = 0$:

$$Q \supset F_1 Q = F_1 (Q + CF_1) \supset F_1 F_2 \dots F_n,$$

ce qui donne la formule (2). Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. *Si $f(x)$ est une fonction définie et continue dans l'ensemble E, si $F \subset E$, et si V est un ensemble ouvert contenant $f(F)$, il existe un ensemble ouvert $Q \supset F$, tel que $f(QE) \subset V$.*

Dém. Soit x un point quelconque de F: on a donc $f(x) \varepsilon f(F) \subset V$, et, l'ensemble V étant ouvert et la fonction f étant continue dans E au point x, il existe un ensemble ouvert Q_x contenant x et tel que

(4) $$f(Q_x E) \subset V.$$

http://rcin.org.pl

Posons $Q = \Sigma Q_x$, la sommation s'étendant à tous les points x de l'ensemble F: ce sera évidemment un ensemble ouvert contenant F, et nous aurons, d'après (4) (pour $x \in F$):

$$f(QE) = \Sigma f(Q_x E) \subset V.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 3. *Si $f(x)$ est une fonction continue dans l'ensemble E, si $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ est une suite descendante d'ensembles fermés et bornés, telle que*

(5) $$m_e f(F_k E) \geqslant \alpha, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

(où $m_e H$ désigne la mesure lebesguienne extérieure de l'ensemble H), *et si*

(6) $$F = F_1 F_2 F_3 \ldots \subset E,$$

on a

(7) $$m_e f(F) \geqslant \alpha.$$

Dém. Supposons qu'on a, contrairement à (7):

$$m_e f(F) < \alpha.$$

Il existe alors un ensemble ouvert V, tel que $f(F) \subset V$ et $m(V) < \alpha$. D'après le lemme 2, il existe un ensemble ouvert Q contenant F et tel que

$$f(QE) \subset V,$$

ce qui donne

(8) $$m_e f(QE) \leqslant m(V) < \alpha.$$

Or, d'après $F \subset Q$, (6), et d'après le lemme 1, il existe un indice n, tel que

$$F_n = F_1 F_2 \ldots F_n \subset Q,$$

donc $F_n E \subset QE$ et $f(F_n E) \subset f(QE)$, ce qui donne, d'après (8):

$$m_e f(F_n E) < \alpha,$$

contrairement à (5).

La formule (7) est donc vraie, et notre lemme est démontré.

Soit maintenant E un ensemble $F_{\sigma\delta}$ linéaire, $f(x)$ — une fonction définie et continue dans l'ensemble E. Je prouverai que l'ensemble $f(E)$ est mesurable (L). L'ensemble de tous les nombres irrationnels étant un $F_{\sigma\delta}$, il en résultera tout de suite le théorème de M. Lusin.

http://rcin.org.pl

Posons $m_e f(E) = \mu$; μ sera donc un nombre réel $\geqslant 0$ et $\leqslant \infty$. Soit α un nombre réel donné quelconque $< \mu$: nous aurons donc

(9) $$m_e f(E) > \alpha .$$

L'ensemble E étant un $F_{\sigma\delta}$, nous pouvons poser

(10) $$E = H_1 H_2 H_3 \ldots ,$$

où $H_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles F_σ.

D'après (10), on a $E = H_1 E$ et parsuite $f(E) = f(H_1 E)$.

Or, l'ensemble H_1 étant un F_σ, nous pouvons poser $H_1 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$, où $\Phi_k (k = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés et bornés. On a donc

$$f(E) = f(H_1 E) = f(\Phi_1 E + \Phi_2 E + \ldots) = f(\Phi_1 E) + f(\Phi_2 E) + \ldots ,$$

donc, d'après une propriété connue de la mesure extérieure:

$$m_e f(E) = \lim_{n=\infty} m_e [f(\Phi_1 E) + f(\Phi_2 E) + \ldots + f(\Phi_n E)],$$

et, d'après (9), il existe un indice n, tel que

$$m_e [f(\Phi_1 E) + f(\Phi_2 E) + \ldots + f(\Phi_n E)] > \alpha .$$

En posant $\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = F_1$, nous aurons donc un ensemble fermé et borné $\subset H_1$, tel que

(11) $$m_e f(F_1 E) > \alpha .$$

D'après (10), on a $F_1 E = F_1 H_2 E$ et $f(F_1 E) = f(F_1 H_2 E)$. L'ensemble $F_1 H_2$ étant un F_σ, on déduit de (11), comme plus haut de (9), qu'il existe un ensemble fermé et borné $F_2 \subset F_1 H_2$, tel que

$$m_e (F_2 E) > \alpha .$$

En procédant ainsi de suite, on obtient une suite infinie d'ensembles fermés et bornés $F_1, F_2, F_3, \ldots$, tels que

(12) $$F_k \subset F_{k-1} H_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et

(13) $$m_e (F_k E) > \alpha \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

D'après (12) et (10), $F_1, F_2, F_3, \ldots$ est une suite descendente d'ensembles fermés et bornés et on a

(14) $$F = F_1 F_2 F_3 \ldots \subset E:$$

http://rcin.org.pl

d'après (13) et en vertu du lemme 3, on a donc

$$m_e f(F) \geqslant \alpha,$$

donc aussi

(15) $$m_i f(F) \geqslant \alpha,$$

puisque l'ensemble $f(F)$, comme image continue d'un ensemble fermé et borné, est fermé, donc mesurable.

De (15) et (14) résulte tout de suite l'inégalité

$$m_i f(E) \geqslant m_i f(F) \geqslant \alpha,$$

c'est-à-dire

$$m_i f(E) \geqslant \alpha.$$

Cette inégalité subsistant pour tout nombre $\alpha < \mu$, il en résulte que

$$m_i f(E) \geqslant \mu,$$

donc, d'après $m_i f(E) \leqslant m_e f(E) = \mu$:

$$m_i f(E) = m_e f(E),$$

ce qui prouve que l'ensemble $f(E)$ est mesurable.

Le théorème de M. Lusin est ainsi démontré.

http://rcin.org.pl

Kazimierz Kuratowski.

O pewnem równaniu funkcyjnem.

Przedstawił W. Sierpiński dn. 24 października 1929 r.

Autor dowodzi, że jedynem rozwiązaniem ciągłem równania funkcyjnego $f(x+f(x))=f(x)$ jest stała.

Casimir Kuratowski.

Sur une équation fonctionnelle.

Note présenté par M. W. Sierpiński dans la séance du 24 Octobre 1929.

Je me propose de prouver que *l'équation fonctionnelle* [1])

$$f(x+f(x))=f(x) \tag{1}$$

ne possède aucune autre solution continue que la constante.

Démonstration. Toute fonction qui satisfait à l'équation (1) satisfait aussi, comme on prouve facilement par induction, à l'équation plus générale

$$f(x+nf(x))=f(x) \tag{2}$$

n étant un entier positif arbitraire.

Pour démontrer notre théorème, il est légitime d'admettre qu'il existe un a tel que $f(a)>0$, car le cas contraire se ramène à celui-ci en remarquant que la fonction $-f(-x)$ vérifie également l'équation (1).

Or, cette hypothèse faite sur a, soit b un nombre tel que

$$a<b<a+f(a). \tag{3}$$

Je vais prouver que

$$a+f(a)<b+f(b)<a+2f(a). \tag{4}$$

[1]) On est conduit à cette équation fonctionnelle par un ancien problème de Gergonne: quelles sont les courbes telles que la longueur de la normale contenue entre la courbe et l'axe des x soit égale à la valeur de la fonction au point d'intersection de cette normale avec l'axe des x? Annales de Gergonne t. XIII.

http://rcin.org.pl

Supposons, par contre, qu'on ait: soit $b+f(b)<a+f(a)$, soit $a+2f(a)<b+f(b)$; donc que soit $b+f(b)<a+f(a)<$ $<a+2f(a)$, soit $a+f(a)<a+2f(a)<b+f(b)$.

La fonction $x+f(x)$ passe dans chaque intervalle d'une valeur à l'autre par toutes les valeurs intermédiaires; ceci appliqué aux intervalles $b \leqslant x \leqslant a+f(a)$ et $a \leqslant x \leqslant b$ resp., on en conclut l'existence d'un point c tel que $a<c<a+f(a)$ et qu'on a:

$$\text{soit } c+f(c)=a+f(a) \text{ soit } c+f(c)=a+2f(a). \tag{5}$$

En prenant la fonction f des deux membres des égalités (5), on en tire l'égalité: $f(c)=f(a)$, d'où résulte, selon (5), que: soit $c=a$, soit $c=a+f(a)$, — contrairement à l'hypothèse faite sur c.

La formule (4) établie, on la généralise facilement par induction (en tenant compte de (2)) de cette façon:

$$a+nf(a) \leqslant b+nf(b) \leqslant a+(n+1)f(a),$$

d'où

$$a-b \leqslant n[f(b)-f(a)] \leqslant a+f(a)-b$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on en conclut que $f(b)-f(a)=0$.

Cela veut dire que la fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant a+f(a)$. Il en résulte aussitôt qu'elle est constante pour tout $x \geqslant a$.

Il en est de même encore pour $x<a$. Car dans le cas contraire, en désignant par l la borne inférieure des x tels que $f(x)=f(a)$, l serait un nombre fini et on aurait, en vertu du raisonnement précédent, $f(x) \leqslant 0$ pour $x<l$. Mais alors la fonction f serait discontinue au point l.

On a donc $f(x)=f(a)$ quel que soit x.

Remarque. L'hypothèse, que la fonction f soit *continue*, peut être remplacée, sans que l'on ait à modifier la démonstration, par l'hypothèse moins restrictive, à savoir, que la fonction $x+f(x)$ possède la propriété de Darboux, c'est à dire qu'elle passe d'une valeur à l'autre par toutes les valeurs intermédiaires.

Cependant cette dernière hypothèse ne pourrait être omise. La fonction f définie par les conditions: pour $x<0$, $f=-1$, pour $x>0$, $f=1$, $f(0)=0$, — est bien une solution de l'équation (1).

http://rcin.org.pl

Mieczysław Wolfke.

Rola przypadku w zjawiskach promieniotwórczych.

Komunikat zgłoszony dn. 24 października 1929 r.

Referat ten będzie wydrukowany w Sprawozdaniach 5-go Zjazdu Niemieckiego Tow. Fizycznego w Pradze oraz w „Physikalische Zeitschrift" 1929.

Mieczysław Wolfke.

Über eine neue Deutung der Gesetzmässigkeiten des radioaktiven Zerfalls.

Mémoire présenté le 24 Octobre 1929.

Vortrag gehalten in dem V-em Physikertag der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Prag. S. auch „Physikalische Zeitschrift" 1929.

http://rcin.org.pl

Posiedzenie

z dnia 28 listopada 1929.

W. Sierpiński.

O pewnej operacji na rodzinach zbiorów.

Komunikat przedstawiony dn. 28 listopada 1929 r.

W. Sierpiński.

Sur une opération sur les familles d'ensembles.

Note présentée le 28 Novembre 1929.

M. S. Saks m'a posé le problème suivant: *Qu'est ce qu'on sait sur l'opération* $\Gamma(F)$ *sur les familles* F *d'ensembles, définie comme il suit:*

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, $\Gamma(F)$ *désigne la famille de tous les ensembles E de la forme*

$$E = \sum E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 \alpha_2} E_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \ldots\ldots, \tag{1}$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies formées des nombres 0 *et* 1, *et où* $E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ *est* (pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres 0 et 1) *un ensemble de la famille F.*

Dans cette Note je déduirai une identité pour la somme (1), de laquelle il résultera tout de suite la proposition suivante:

Si F est une famille d'ensembles, telle que la somme et le produit de deux ensembles de F appartiennent toujours à F, la famille $\Gamma(F)$ *coïncide avec la famille* $P(F)$ *de tous les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille F.*

http://rcin.org.pl

L'identité que nous démontrerons est la suivante:

$$\sum E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 \alpha_2} E_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}, \tag{2}$$

où la somme $\sum\limits_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}$ s'étend à tous les 2^n systèmes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de n nombres égaux à 0 ou 1.

Posons, pour abréger:

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \tag{3}$$

et

$$S_n = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}. \tag{4}$$

On voit sans peine que pour toute suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ formée de nombres 0 ou 1, et pour tout n naturel on a

$$E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 \alpha_2} E_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \ldots \subset P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \subset S_n,$$

d'où résulte tout de suite que le côté gauche de la formule (2) est un ensemble contenu dans le côté droit de cette formule.

Or, soit p un élément du côté droit de la formule (2). On a donc, d'après (3) et (4), $p \varepsilon S_n$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et d'après (4), il existe pour tout n naturel (au moins) un système d'indices $\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$, tel que

$$p \varepsilon P_{\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

Les nombres de la suite infinie

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots \tag{6}$$

sont égaux à 0 ou à 1: un au moins de ces deux nombres, soit β_1, figure donc dans la suite (6) une infinité de fois. On a donc

$$\alpha_1^n = \beta_1 \tag{7}$$

pour une infinité d'indices n.

Or, considérons les termes de la suite $\alpha_2^n (n = 1, 2, \ldots)$, dont les indices n satisfont à la condition (7): il y en a donc une infinité et, les nombres α_2^n étant égaux à 0 ou à 1, nous concluons qu'il existe un nombre β_2, tel qu'on a, pour une infinité d'indices n les égalités

$$\alpha_1^n = \beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2^n = \beta_2. \tag{8}$$

http://rcin.org.pl

Pareillement, en considérant les termes de la suite $\alpha_3^n (n=1,2,3,\ldots)$, dont les indices n satisfont aux égalités (8), nous concluons qu'il existe un nombre β_3, tel qu'on a pour une infinité d'indices n les égalités

$$\alpha_1^n=\beta_1, \quad \alpha_2^n=\beta_2 \quad \text{et} \quad \alpha_3^n=\beta_3 .$$

En raisonnant ainsi de suite on obtient une suite infinie

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots ,$$

formés des nombres 0 et 1, telle que, pour tout nombre k naturel il existe une infinité d'indices n qui satisfont aux égalités

$$\alpha_1^n=\beta_1, \; \alpha_2^n=\beta_2, \ldots , \; \alpha_k^n=\beta_k . \tag{9}$$

Pour tout nombre k naturel il existe donc un indice $n \geqslant k$, pour lequel on a les égalités (9). Or, on a (pour $n \geqslant k$), d'après (3):

$$P_{\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n} \subset E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_k^n} ,$$

donc, d'après (5):

$$p \varepsilon E_{\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_k^n} ,$$

et parsuite, d'après (9):

$$p \varepsilon E_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k} . \tag{10}$$

La formule (10) étant établie pour tout nombre k naturel, on voit que p est un élément de l'ensemble constituant le côté gauche de la formule (2).

L'identité (2) est ainsi démontrée.

Soit maintenant F une famille donnée quelconque d'ensembles, jouissant de cette propriété qu'elle contient les sommes et les produits de deux ensembles qu'elle contient.

Soit E un ensemble de la famille $\Gamma(F)$. D'après la définition de la famille $\Gamma(F)$, il existe donc un système $\{E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ d'ensembles de la famille F, tel qu'on a la formule (1). Des propriétés de la famille F résulte que les ensembles (3) et (4) appartiennent à F, et la formule (2) prouve que E est un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F, donc un ensemble de la famille $P(F)$.

Or, soit E un ensemble de la famille $P(F)$: on a donc

$$E = H_1 H_2 H_3 \ldots , \tag{11}$$

http://rcin.org.pl

où $H_n (n=1,2,3,\ldots)$ sont des ensembles de la famille F. Posons, pour tout système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de n indices égaux à 0 ou à 1:

$$E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = H_n \, ; \tag{12}$$

d'après (11), on aura évidemment la formule (1), ce qui prouve (d'après (12), H_n appartenant à F, pour $n=1,2,\ldots$) que E appartient à la famille $\Gamma(F)$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

En particulier, si F est la famille d'ensembles fermés (d'un espace métrique), on a $\Gamma(F)=F$ (puisque $P(F)=F$, le produit d'une infinité d'ensembles fermés étant fermé).

Remarque I. Soit $m_2, m_3, m_4, \ldots$ une suite infinie donnée quelconque de nombres naturels >1, et désignons par $Q(F)$ la famille de tous les ensembles de la forme

$$\sum E_{n_1} E_{n_1 n_2} E_{n_1 n_2 n_3} \ldots, \tag{13}$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels

$$n_1, n_2, n_3, \ldots \tag{14}$$

satisfaisant aux conditions: $n_1=2$ et $2 \leqslant n_k \leqslant m_k$, pour $k=2,3,4,\ldots$, et où les ensembles $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ appartiennent à la famille F. On pourrait démontrer sans peine qu'on a (pour toute famille F d'ensembles):

$$Q(F)=\Gamma(F).$$

Or, si l'on étend la somme (13) à toutes les suites infinies (14) de nombres naturels sans aucune restriction, l'ensemble (13) est, comme on sait, le résultat de l'opération (A) effectuée sur les ensembles du système $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ [1]). Cette opération est, comme on sait, plus générale que l'opération (1).

Remarque II. On pourrait démontrer sans peine que si F est une famille quelconque d'ensembles satisfaisant seulement à cette condition qu'elle contient un ensemble qui est le plus grand (c'est-à-dire contenant chacun autre ensemble de la fa-

---

[1]) Quant à l'opération (A), voir p. e. N. Lusin et W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 48 et *Fund. Math.* t. XI p. 16.

http://rcin.org.pl

mille F), $\Gamma(F)$ est la plus petite famille Φ d'ensembles satisfaisant à trois conditions suivantes:

1) $F \subset \Phi$.

2) La somme de deux ensembles de la famille Φ est un ensemble de la famille Φ.

3) Le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ est un ensemble de la famille Φ.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

E. Rybka.

Gwiazda zmienna R S Orionis.

Przedstawił M. Kamieński dn. 28 listopada 1929 r.

Streszczenie.

Gwiazda ta należy do gwiazd zmiennych typu δ Cephei. Autor obserwował ją metodą ocen wizualnych na refraktorze Heydego w czasie od 9 września 1926 r. do 26 marca 1928 r. Na podstawie 205 obserwacyj z tego okresu czasu zbudowana została krzywa blasku, której kształt zgadza się całkowicie z kształtem krzywej, wyznaczonej przez E. Hertzsprunga (B. A. N. 4 169). Normalne maximum blasku z obserwacyj autora wynikło:

(1) $$J.D.\ 2424978^d\cdot 25\,.$$

W stosunku do elementów, przyjętych przez katalog gwiazd zmiennych na r. 1929:

(2) $$Max.\ Gr.\ M.\ T. = J.\ D.\ 2418274^d\cdot 65 + 7^d\cdot 566699\,E$$

otrzymałem $O - C = -0^d\cdot 495$. Różnica ta oraz analogiczna różnica ($-0^d\cdot 456$) z obserwacyj F. C. Jordana wskazuje, że epoka wyjściowa wymaga poprawki $= -0^d\cdot 47$. Elementy więc zmiany blasku *R S Orionis* przyjmą kształt:

$$Max.\ (Gr.\ M.\ T.) = J.\ D.\ 2418274^d\cdot 18 + 7^d\cdot 566699\,E\,.$$

http://rcin.org.pl

E. Rybka.

Observations of R S Orionis.

Note présenté par M. M. Kamieński dans le séance du 28 Novembre 1929.

Abstract.

This star was observed by the author in the period 1926.IX.9 —1928.III.26. The mean light-curve constructed from 205 visual estimates, collected during this time, is of the same shape as the photographic light-curve given by E. Hertzsprung.

The normal maximum derived from the mean light-curve is $J.D.\ 2424978^d \cdot 25$. Assuming for the period the value of E. Hertzsprung: $7^d \cdot 566699$, it shows from the observations of F. C. Jordan and mine the maximum of M. Luizet needs a correction $= - 0^d \cdot 47$. Therefore the elements of *R S Orionis* will take the form:

$$Max. (Gr. M. T.) = J. D.\ 2418274^d \cdot 18 + 7^d\ 566699\ E.$$

Antoni Morawiecki.

Studja mineralogiczno-petrograficzne nad fosforytami Rachowskiemi.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 28 listopada 1929 r.

Streszczenie.

Fosforyty występujące w warstwach cenomańskich w okolicach Rachowa nad Wisłą tworzą zazwyczaj nieregularne lub owalne konkrecje, zawierające znaczne niekiedy ilości substancyj ilastych i piaszczystych, jak również węglanu wapniowego. Często spotykamy gąbki i drzewa sfosforytyzowane, odlewy muszli, kręgi i kości ssaków, zęby i t. d. Do rzadkości należą utwory naciekowe postaci kulistej i groniastej, narosłe na fosforycie włóknistym, będące zaś w swej istocie *quercite'm* [1]).

Zwykle poszczególne konkrecje fosforytowe są spojone w większe bryłki substancją fosforytową późniejszej generacji. Na niektórych kawałkach drzewa sfosforytyzowanego, podziurawionego przez skałotocze, substancja fosforytowa późniejszej generacji tworzy powłoki i naskorupienia.

[1]) Do sprawy tej powrócę w innym komunikacie.

http://rcin.org.pl

Badania mikroskopowe cienkich płytek, wykonanych z poszczególnych konkrecyj, wykazały, iż substancja fosforytowa, biorąca udział w ich budowie, spaja w charakterze lepiszcza ziarna minerałów obcych. W odlewach muszli zawiera ona niewielkie ilości drobnych ziarn minerałów obcych i jest zmięszana ze znacznemi ilościami węglanu wapniowego, występującego w postaci krystalicznej lub w stanie rozproszonym. W gąbkach, kręgach i kościach ssaków, jak również w zębach odtwarza ona niekiedy nadzwyczaj dokładnie budowę tych utworów. Drzewo składa się prawie wyłącznie z substancji fosforytowej, zawierającej niewielkie ilości węglanu wapniowego oraz substancyj iłowych.

W budowie konkrecyj biorą udział substancje fosforytowe bezpostaciowe i krystaliczne. Te wykształcone są zazwyczaj włóknisto, wypełniają drobne szczeliny i pory w konkrecjach, tworzą także otoczki dookoła ziarn substancyj bezpostaciowych i minerałów obcych, niekiedy zaś wypełniają drobne ułamki drzewa, rzadko zresztą w cienkich płytkach spotykane. Substancje fosforytowe bezpostaciowe spajają przeważnie ziarna minerałów obcych, wypełniają drobne muszelki, otwornice i inne resztki organiczne, spotykane miejscami w znacznych ilościach. Bliższe wyodrębnienie i określenie poszczególnych odmian krystalicznych i bezpostaciowych jest utrudnione z powodu nieznacznych wymiarów poszczególnych włókien i ich skupień, jak również z powodu braku metod ich wydzielenia i oczyszczenia.

Na światło spolaryzowane substancje bezpostaciowe nie działają prawie zupełnie, substancje zaś krystaliczne w różnym stopniu. Najsilniejszą dwójłomność ujawniają substancje krystaliczne, zawarte w kościach, kręgach, zębach i drzewie sfosforytyzowanem.

Z minerałów obcych, zauważonych w konkrecjach fosforytowych, wymienić należy przedewszystkiem bardzo liczne zaokrąglone ziarna allogenicznego kwarcu, zawierającego wrostki gazowe i płynne, a także wrostki cyrkonu, apatytu, rutylu i brunatnawego spinelu. Mniej liczne są ziarna kwarcu autogenicznego, wykazującego kontury krystalograficzne, niekiedy faliste znikanie światła i zmętnienia wywołane zawartością substancyj ilastych. Do pospolitych należą zwietrzałe lub świeże ziarna glaukonitu. Dostrzegamy też ziarna krystalicznego kalcytu z prążkami bliźniaczemi.

Z minerałów rzadziej spotykanych dostrzeżono magnetyt, częściowo rozłożony i otoczony wodorotlenkami żelaza piryt,

http://rcin.org.pl

rutyl, cyrkon, turmalin, amfibole (hornblenda, arfwedsonit), skalenie czasem dobrze zachowane, czasem skaolinizowane, mikroklin, zazwyczaj schlorytyzowany biotyt, muskowit, wodorotlenki żelaza i substancje ilaste.

Z pozostałości organicznych zauważono drobne sfosforytyzowane, wypełnione kalcytem lub glaukonitem, muszelki, skorupki otwornic, utworzone z bezpostaciowej krzemionki (opal?) lub substancji fosforytowej, ułamki wiązań szkieletów gąbek, drobne kawałki drzewa sfosforytyzowanego i t. p. Niektóre utwory są bardzo dobrze zachowane.

Wymiary poszczególnych włókien krystalicznych substancji fosforytowej nie przynoszą 0,01 mm. Z minerałów wchłoniętych największą średnicę wykazują ziarna kwarcu allogenicznego, dochodzące do 0,7 mm. Ziarna cyrkonu, rutylu, turmalinu, arfwedsonitu i muskowitu rzadko przekraczają wielkość 0,2 mm. Ziarna innych minerałów mają średnicę, dochodzącą niekiedy do 0,4 mm. Większe wymiary wykazują jedynie ziarna kalcytu i glaukonitu. W odlewach muszli, kręgach i kościach ssaków, zębach i drzewie sfosforytyzowanem ziarna minerałów obcych są zazwyczaj drobne i nie przenoszą w średnicy 0,1 mm.

Skład chemiczny konkrecyj fosforytowych jest zależny od wzajemnego stosunku poszczególnych składników mineralnych. Im więcej występuje ziarn minerałów obcych w konkrecji, tem mniej zawiera ona substancji fosforytowej. Dlatego też, gdy w konkrecjach silnie piaszczystych ilość kwasu fosforowego nie przenosi 7%, inne, zawierające mniej minerałów obcych, wykazują go do 24%. Zależność ta nie pozostaje bez wpływu także na inne składniki chemiczne fosforytów. Ilość SiO_2 dochodzi w niektórych przypadkach do 65%, ilość CaO waha się w granicach 13,5—60,0%, ilość CO_2 w granicach 4,2—18%. Pozostałe składniki występują w mniejszych ilościach. A więc Fe_2O_3 znajduje się w ilości 2—3%, Al_2O_3 w ilości 0,1—0,9%, MgO 0,1—0,5%, F i Cl 0,5—2,5%, SO_3 0,0—0,5% i H_2O (105° C) do 0,8%. Zastanawia znaczna ilość substancyj organicznych, wynosząca w niektórych okazach do 3%.

Odlewy muszli zawierają do 26% P_2O_5, gąbki sfosforytyzowane do 24% P_2O_5, kości i kręgi ssaków do 28% P_2O_5, zaś drzewo sfosforytyzowane i zęby do 32% P_2O_5. W nich wzrasta także ilość CaO, CO_2 oraz substancyj bituminicznych.

http://rcin.org.pl

SO_3 występuje częściowo w postaci siarczanów (gipsu), częściowo zaś pochodzi z pirytu.

Badania fosforescencji w temperaturze podniesionej wykazały, iż fosforyty Rachowskie fosforyzują dość silnie światłem żółtem i pomarańczowem do czerwonego. Do sprawy tej powrócę w następnym komunikacie, przyczem uwzględnione zostaną fosforyty polskie z innych okolic.

Praca wykonana częściowo w Pracowni Mineralogicznej Muzeum Historji Naturalnej w Paryżu, częściowo w Zakładzie Mineralogicznym Uniwersytetu Warszawskiego.

Antoni Morawiecki.

Etudes minéralogiques et pétrographiques des phosphorites des environs de Rachów sur Vistule (Pologne).

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 28 Norembre 1929.

Résumé.

Les phosphorites des environs de Rachów sur Vistule sont en réalité principalement des concrétions sablonneuses et des pseudomorphoses d'après les débris organiques.

Les observations microscopiques montrent que la substance phosphatée, couleur brun clair, est tantôt cristalisée, tantôt amorphe.

Les grains des minéraux accessoires, les moins nombreux dans les pseudomorphoses et le plus nombreux dans les concrétions sablonneuses, sont suivants: le quartz allogenique et autogenique, la glauconite, la calcite, les tourmalines, les rutiles, les zircons, les amphiboles, les pyroxènes, les feldspaths, le fer magnétique, la pyrite etc.

Les analyses chimiques des différentes concrétions phosphatées sont suivantes:

P_2O_5	7—24%	Al_2O_3	0,1—0,9%
SiO_2	31—65%	MgO	0,1—0,5%
CaO	13,5—60%	F et Cl	0,5—2,5%
CO_2	4,2—18%	SO_3	0,0—0,5%
Fe_2O_3	2—3%	H_2O (105° C)	0,1—0,8%
	perte au feu (— CO_2 et — H_2O) (substance organique)		0,3—3,0%

Les phosphorites montrent la phosphorescence.

http://rcin.org.pl

Antoni Morawiecki.

Termoluminescencja i fosforescencja fosforytów polskich.

Przedstawił St. J. Thugutt dn. 28 listopada 1929 r.

Streszczenie.

Przeprowadzone w Zakładzie Mineralogicznym Uniwersytetu Warszawskiego studja nad znaczną liczbą fosforytów polskich wykazały, iż przeważana ich część ujawnia termoluminescencję. Do studjów użyto fosforytów pochodzących z Niżniowa, Niezwisk, Harasymowa, Rakowca, Semenówki, Horodenki, Czernelicy, Repużyniec, Potoczysk, Rachowa i Nasiłowa nad Wisłą, Grodna (Pyszki, Miały, Grandzice), Wołkowyska (Roś), Gdyni, Pełczy na Wołyniu, Wolbromia i t. d. Próbom poddano pseudomorfozy po gąbkach i innych organizmach zwierzęcych, kości, kręgi, zęby, drzewa sfosforytyzowane, odlewy muszli, konkrecje piaszczyste i t. d., słowem wszystkie możliwe odmiany fosforytów spotykane w wymienionych wyżej miejscowościach.

Rozdrobniony materjał, o mniej więcej jednakowej średnicy ziarn, umieszczony w środowisku ogrzanego powietrza, wykazywał w temperaturze 118—175^0 C mniej lub bardziej wyraźną luminescencję, trwającą niekiedy kilka minut. Nie wykazały jej jedynie fosforyty z pod Nasiłowa, Grodna, Wołkowyska i Gdyni. Bardzo słabą luminescencję wykazały fosforyty z Pełczy, Horodnicy i kilku innych miejscowości. Najsilniejszą termoluminescencję wykazywały ułamki drzewa sfosforytyzowanego i niektóre zęby rybie z Horodenki. Zresztą nie wszystkie okazy, pochodzące nawet z tej samej miejscowości, wykazują zjawisko termoluminescencji.

Studja wykonane w Zakładzie Chemji Nieorganicznej Uniwersytetu Warszawskiego, dotyczące wyników naświetlania fosforytów przy pomocy promieni ultrafioletowych, ujawniły, iż znaczna część fostorytów posiada również własność fosforescencji.

Do naświetlania użyto promieni ultrafioletowych, otrzymanych przy pomocy lampy rtęciowej, zasilanej prądem 120 V i 3,2—3,4 Amp., której światło zostało następnie przepuszczone przez filtr Heraeusa. Otrzymano w ten sposób długość fali 300—400 $\mu\mu$.

Okazało się, że wszystkie fosforyty, wykazujące termoluminescencję, wykazują również fosforescencję. Dalej, że nawet fos-

http://rcin.org.pl

foryty pochodzące z Korniowa i Kazimierza nad Wisłą, a więc te, w których nie dostrzeżono termoluminescencji, wykazują bardzo słabą fosforescencję.

Najsilniejszą fosforescencję wykazywały ułamki drzewa sfosforytyzowanego i zęby rybie z Horodenki oraz konkrecje fosforytowe z Niezwisk. Świeciły one srebrzysto-zielonawem światłem, a po usunięciu źródła promieni ultrafioletowych fosforescencja trwała jeszcze około 10 sek., gdy naświetlanie wykonywano w ciągu 0,5—1,0 min. Po naświetlaniu dłuższem fosforyty traciły swą fosforescencję. Jedynie w nielicznych przypadkach (drzewo sfosforytyzowane z Horodenki, gąbki z Niezwisk, zęby z Horodenki) po upływie pewnego czasu udało się ją otrzymać kilkakrotnie wszakże już słabszą. Rzecz możliwa, iż wraca ona po upływie dłuższego czasu.

Zjawisko fosforescencji i termoluminescencji jest prawdopodobnie związane z obecnością w fosforytach pewnych substancyj organicznych, soli złożonych lub zespolonych, a także drobnych ilości ziem rzadkich. Możliwe jest również, iż zjawiska powyższe mają swój związek ze swoistą budową substancyj fosforytowych.

Antoni Morawiecki.

La phosphorescence et la thermoluminescence des phosphorites polonaises.

Mémoire présenté par M. St. J. Thugutt dans la séance du 28 Norembre 1929.

Résumé.

Les différentes phosphorites polonaises possèdent la phosphorescence et la thermoluminescence. Ce phénomène dépend probablement de la présence dans les phosphorites des certaines substances organiques, ou des combinaisons des éléments des terres rares. Peut-être on le doit aussi attribuer à la grande complication de la structure chimique des phosphorites.

http://rcin.org.pl

Posiedzenie

z dnia 12 grudnia 1929 r.

W. Sierpiński.

O pewnem uogólnieniu operacji (A).

Komunikat, zgłoszony dn. 12 grudnia 1929 r.

W. Sierpiński.

Sur une généralisation d'opération (A).

Présenté le 12 Décembre 1929.

Si à toute suite finie $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de nombres naturels correspond un ensemble $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, on dit qu'on a un *système déterminant* d'ensembles $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$.

N étant un ensemble donné de suites infinies de nombres naturels $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, nous appellerons *résultat de l'opération de Souslin caractérisée par l'ensemble N et effectuée sur le système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ d'ensembles, l'ensemble*

$$S_N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\} = \sum_N E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

où la sommation s'étend à toutes les suites $n_1, n_2, n_3, \ldots$ formant l'ensemble N.

Dans le cas particulier, où N est l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels, l'opération de Souslin S_N coïncide avec l'opération (A).

http://rcin.org.pl

On voit sans peine que les opérations de Souslin se réduisent aux opérations de M. Hausdorff[1]). En effet, l'ensemble N de suites étant donné, désignons par Q l'ensemble de toutes les suites infinies

$$q_k = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \ldots + 2^{n_1+n_2+\ldots+n_k-1}, \; (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

correspondant aux suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N.

$F_1, F_2, F_3, \ldots$ étant une suite infinie donnée d'ensembles, nous appellerons *résultat de l'opération de M. Hausdorff* caractérisée par l'ensemble Q de suites et effectuée sur la suite $F_1, F_2, F_3, \ldots$ d'ensembles, l'ensemble

$$H_Q(F_1, F_2, F_3, \ldots) = \sum_Q F_{q_1} F_{q_2} F_{q_3} \ldots.$$

On voit sans peine qu'en posant (pour toute suite finie d'indices $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$)

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = F_{2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \ldots + 2^{n_1+n_2+\ldots+n_k-1}},$$

nous aurons

$$S_N\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\} = H_Q(F_1, F_2, F_3, \ldots) \quad ^{2)}.$$

Le système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ d'ensembles d'un espace métrique sera dit *régulier par rapport à l'ensemble N de suites,* si l'on a, quelle que soit la suite infinie $n_1, n_2, n_3, \ldots$ appartenant à N:

(1) $\quad 0 \neq E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad$ (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$)

et

(2) $$\lim_{k=\infty} \delta(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = 0,$$

où $\delta(F)$ désigne le diamètre de l'ensemble F.

Désignons par $\chi(N)$ et appelons ensemble caractéristique de l'opération S_N l'ensemble de tous les nombres (irrationnels)

(3) $$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots,$$

correspondant aux suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ qui constituent l'ensemble N.

---

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89 et 90.
[2]) Cf. F. Hausdorff l. c., p. 93.

http://rcin.org.pl

Théorème. *Pour qu'un ensemble linéaire soit le résultat d'une opération S_N de Souslin effectuée sur un système déterminant régulier par rapport à N d'ensembles linéaires fermés, il faut et il suffit qu'il soit une image continue de l'ensemble caractéristique $\chi(N)$ de cette opération.*

Démonstration. Soit N un ensemble de suites donné, $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système déterminant d'ensembles linéaires fermés, régulier par rapport à N, et posons

$$E = \sum_N E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \cdots \tag{4}$$

Soit x un nombre donné quelconque de l'ensemble $X = \chi(N)$, (3) — son développement en fraction continue: la suite infinie $n_1, n_2, n_3, \ldots$ appartient donc à N et parsuite l'ensemble

$$E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \cdots \tag{5}$$

est un terme de la série (4), donc est contenu dans E.

Or, le système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ étant régulier par rapport à N, on a les formules (1) et (2), d'où résulte, d'après le théorème connu de Cantor, que l'ensemble (4) n'est pas vide. D'autre part, d'après (2), l'ensemble (4) ne peut pas contenir plus qu'un point.

L'ensemble (4) se réduit donc à un seul point: désignons le par $f(x)$. La fonction $f(x)$ est donc définie pour tous les nombres de l'ensemble X. Je dis qu'elle est continue sur X et que $f(X) = E$.

En effet, soit x_0 un point donné de X,

$$x_0 = \frac{1|}{|n_1^0} + \frac{1|}{|n_2^0} + \frac{1|}{|n_3^0} + \cdots$$

son développement en fraction continue. ε étant un nombre positif donné, il existe, d'après (2), un nombre naturel k, tel que

$$\delta(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) < \varepsilon. \tag{6}$$

Comme on sait, il existe pour le nombre k un nombre $\eta > 0$ (dépendant de k et de x_0), tel que pour tout nombre (3) satisfaisant à l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a

$$n_i = n_i^0, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

donc

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}. \tag{7}$$

http://rcin.org.pl

Or, si $x \varepsilon X$, $f(x)$ est le point unique de l'ensemble (5), et on a

$$f(x) \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{et} \quad f(x_0) \varepsilon E_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}:$$

la formule (7) donne donc, d'après (6):

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pour tout nombre x de X, tel que $|x - x_0| < \eta$. La fonction $f(x)$ est donc continue dans l'ensemble X.

De la définition de la fonction $f(x)$ et de (4) résulte immédiatement que $f(x) \varepsilon E$, pour $x \varepsilon X$, c'est-à-dire que

(8) $$f(X) \subset E.$$

Or, soit y un point de E. D'après (3), il existe donc une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle que y appartient à l'ensemble (5). Or, soit x le nombre (3): d'après la définition de $f(x)$ on trouve sans peine $f(x) = y$, d'où résulte que $y \varepsilon f(X)$. On a donc $E \subset f(X)$, et la formule (8) donne $f(X) = E$, c. q. f. d.

La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Or, soit $f(x)$ une fonction définie et continue sur l'ensemble X, et posons $E = f(X)$. Désignons, pour tout système fini $p_1, p_2, \ldots, p_k$ d'indices, par $Y_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ l'ensemble de tous les nombres $f(x)$, correspondant aux nombres (3) de X, tels que

$$n_i = p_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Posons

(9) $$E_{p_1, p_2, \ldots, p_k} = \overline{Y}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$$

(où $\overline{Y} = Y + Y'$ est la fermeture de l'ensemble Y): ce seront des ensembles fermés. Je dis qu'on a la formule (4).

En effet, soit $y \varepsilon E$, donc $y = f(x)$, où $x \varepsilon X$, et soit (3) le développement du nombre x. D'après la définition des ensembles $Y_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ et d'après (9), nous aurons $f(x) \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte que $f(x)$ appartient à l'ensemble (5). Or, d'après (3), $x \varepsilon X$ et la définition de l'ensemble X, $(n_1, n_2, n_3, \ldots,)$ est une suite de N: l'ensemble (5) est donc un terme de la série (4). Le nombre $y = f(x)$ est donc un point du côté droit de la formule (4).

Or, soit y un point du côté droit de la formule (4). Il existe donc une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telle que y appar-

http://rcin.org.pl

tient à l'ensemble (5). Définissons le nombre x par la formule (3): ce sera donc un élément de l'ensemble X. Je dis que $y = f(x)$.

En effet, d'après la définition des ensembles (9), on a $f(x) \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte que $f(x)$ appartient à l'ensemble (4). Or, la fonction $f(x)$ étant continue dans X, il existe pour le nombre x et pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$, tel que

(10) $$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout nombre x' de X, tel que $|x' - x| < \eta$. D'après une propriété connue des fractions continues, il existe donc (pour x et η) un indice μ, tel que tout nombre x' de X, dont le développement en fraction continue coïncide en $k > \mu$ premiers dénominateurs avec celui de x, satisfait à l'inégalité $|x' - x| < \eta$, et parsuite aussi à l'inégalité (10). Cela prouve, d'après (9), que

(11) $$\delta(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad k > \mu$$

et parsuite, y et $f(x)$ appartenant à l'ensemble (5):

$$|y - f(x)| < \varepsilon.$$

Le nombre positif ε étant quelconque, nous en concluons que $y = f(x)$, donc que $y \varepsilon f(X) = E$.

La formule (4) est ainsi démontré, ce qui prouve que l'ensemble $f(X)$ est un résultat d'opération S_N de Souslin effectuée sur le système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. Or, on voit sans peine que ce système est régulier par rapport à N.

En effet, soit $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ une suite de N. De la définition des ensembles (9) et des ensembles $Y_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ résulte tout de suite qu'on a les formules (1). Or, nous avons démontré plus haut qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N un indice μ, tel qu'on a les inégalités (11), donc aussi la formule (2).

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

En particulier, si N est l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels, $X = \chi(N)$ est l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0,1) et S_N est l'opération (A). Or, les résultats d'opération (A) sur les systèmes déterminants

http://rcin.org.pl

d'ensembles fermés, réguliers (par rapport à N) coïncident avec les ensembles analytiques. Dans ce cas notre théorème donne donc la proposition suivante, due à M. N. Lusin[1]):

Pour qu'un ensemble linéaire soit un ensemble analytique, il faut et il suffit qu'il soit une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0,1).

Edward Szpilrajn.

O pewnej klasie zbiorów linjowych.

Przedstawił W. Sierpiński na posiedzeniu dn. 12 grudnia 1929 r.

Streszczenie.

W komunikacie niniejszym rozważam klasę zbiorów linjowych, spełniających warunek:

(C) Do każdego ciągu nieskończonego $\{a_n\}$ liczb dodatnich istnieje ciąg $\{\delta_n\}$ przedziałów, pokrywający dany zbiór i taki, że długość każdego przedziału δ_n jest a_n,

oraz klasę zbiorów, spełniających następujący warunek p. Koźniewskiego:

(C^*) Do każdego ciągu nieskończonego $\{a_n\}$ liczb dodatnich takiego, że suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest większa od miary zewnętrznej danego zbioru, istnieje ciąg $\{\delta_n\}$ przedziałów o długościach $\{a_n\}$ pokrywający dany zbiór.

Udowadniam następujące

Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by zbiór E spełniał warunek (C^*) jest istnienie przedziału I, zbioru N miary wewnętrznej zero, oraz zbioru M spełniającego warunek (C) — takich, że*

$$E = (I - N) + M.$$

---

1) *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 163.

http://rcin.org.pl

Edward Szpilrajn.

Sur une classe d'ensembles linéaires.

Présenté le 12 Décembre 1929 par M. W. Sierpiński.

Dans deux Notes publiées dans le journal *Fundamenta Mathematicae*[1]) la condition suivante pour les ensembles linéaires a été considérée:

(C) Pour une suite infinie quelconque $\{a_n\}$ de nombres positifs, il existe une suite $\{\delta_n\}$ d'intervalles couvrant l'ensemble donné E et telle que la longueur de δ_n est a_n pour $n=1,2,\ldots$

M. Koźniewski a formulé une condition (C^*) qui est une extension de la condition (C) aux ensembles de mesure extérieure positive (finie). Un ensemble linéaire E satisfait à la condition (C^*), si

(C^*) Pour une suite infinie quelconque $\{a_n\}$ de nombres positifs telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > m_e E,$$

il existe une suite $\{\delta_n\}$ d'intervalles couvrant E et telle que la longueur de l'intervalle δ_n est a_n pour $n=1,2\ldots$

Je désigne par **C** et **C*** les classes des ensembles qui satisfont respectivement à la condition (C) et (C^*).

Je me propose de démontrer ici le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E satisfasse à la condition (C^*) est l'existence d'un intervalle I*[2]), *d'un ensemble N de mesure intérieure nulle et d'un ensemble M satisfaisant à la condition (C) — tels que*

$$E=(I-N)+M. \tag{1}$$

---

[1]) W. Sierpiński: Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle. *Fund. Math.* XI, p. 302.

E. Szpilrajn: Sur une hypothèse de M. Borel. *Fund. Math.* XV, p. 126.

[2]) qui — dans un cas particulier — peut être vide.

http://rcin.org.pl

Démonstration. I. La condition est nécessaire. Soit E un ensemble satisfaisant à la condition (C^*). On peut supposer que $m_e E > 0$. Considérons tous les intervalles Δ de longueur égale à $m_e E$. Soit k la borne inférieure de tous les nombres $m_e(E - \Delta)$.

Nous allons démontrer que $k = 0$. Soit ε un nombre positif quelconque et $\{a_n\}$ une suite infinie de nombres positifs telle que

$$a_1 = m_e E$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leqslant \varepsilon . \tag{2}$$

Il existe par conséquent une suite $\{\delta_n\}$ d'intervalles couvrant E et telle que la longueur de δ_n est a_n (pour $n = 1, 2 \ldots$). La suite $\delta_2, \delta_3, \ldots$ couvre ainsi l'ensemble $E - \delta_1$.

En vertu de (2), on a

$$m_e(E - \delta_1) \leqslant \varepsilon .$$

ε étant un nombre positif quelconque, nous avons

$$k = 0 .$$

Il existe donc une suite $\{\Delta_n\}$ d'intervalles de longueur égale à $m_e E$ et telle que

$$\lim_{n \to \infty} m_e(E - \Delta_n) = 0 . \tag{3}$$

Nous démontrerons que cette suite est bornée. A cet effet observons d'abord qu'il existe un indice ν tel qu'on ait

$$m_e(E - \Delta_n) < \frac{1}{2} m_e E \quad \text{pour} \quad n \geqslant \nu . \tag{4}$$

Il en résulte immédiatement que tout intervalle Δ_n, où $n \geqslant \nu$, possède un point commun avec Δ_ν. Supposons en effet qu'il existe un indice $\nu_1 > \nu$ tel que $\Delta_\nu \cdot \Delta_{\nu_1} = 0$. On a donc

$$E - \Delta_{\nu_1} \supset E \Delta_\nu ,$$

ce qui donne

$$m_e(E - \Delta_{\nu_1}) \geqslant m_e E \Delta_\nu . \tag{5}$$

Mais il résulte de (4) que

$$m_e E \Delta_\nu = m_e E - m_e(E - \Delta_\nu) > \frac{1}{2} m_e E ,$$

http://rcin.org.pl

donc, en vertu de (5)

$$m_e(E-\Delta_{\nu_1}) > \frac{1}{2} m_e E,$$

ce qui est incompatible avec (4).

Tous les intervalles $\Delta_{\nu+1}, \Delta_{\nu+2}, \ldots$ ayant des points communs avec Δ_ν, la suite $\{\Delta_n\}$ est bornée. La suite $\{\gamma_n\}$ des centres de ces intervalles possède donc un point limite γ qui est la limite d'une suite partielle $\{\gamma_{k_n}\}$. Examinons maintenant l'intervalle I dont les extrémités sont: $\xi = \gamma - \frac{1}{2} m_e E$ et $\eta = \gamma + \frac{1}{2} m_e E$. et observons que

(6) $$m(E-I) = 0.$$

En effet, on a

$$E - I \subset (E - \Delta_{k_n}) + (\Delta_{k_n} - I) \text{ pour } n = 1, 2 \ldots,$$

donc

$$m_e(E-I) \leqslant m_e(E-\Delta_{k_n}) + m_e(\Delta_{k_n} - I),$$

d'où il résulte (6) en vertu de (3) et de la définition de la suite $\{\Delta_{k_n}\}$.

Soit ensuite

(7) $$N = I - E.$$

En vertu de (6) nous avons

$$m_e EI = m_e E = m I,$$

donc

(8) $$m_i N = 0.$$

Posons enfin

(9) $$M = E - I.$$

Nous allons prouver que

(10) $$M \varepsilon \mathbf{C}.$$

Soit d un nombre positif $< mI$, et appellons J l'intervalle dont les extrémités sont: $\xi - d$ et $\eta + d$. Nous démontrerons d'abord que $E - J \varepsilon \mathbf{C}$. Soit donc $\{a_n\}$ une suite arbitraire infinie de nombres positifs. Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_n < d.$$

http://rcin.org.pl

Posons $a_0 = mI = m_e E$. La condition (C^*) garantit l'existence d'une suite $\delta_0, \delta_1, \delta_2 \ldots$ d'intervalles telle que

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \supset E$$

et

$$m\,\delta_n = a_n \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

On peut démontrer que

(13) $$\delta_0 \subset J.$$

Supposons en effet qu'il n'en est pas ainsi. Par conséquent δ_0 est disjoint d'un au moins des intervalles: $(\xi, \xi + d)$, $(\eta - d, \eta)$, d'où il résulte que

$$m(I - \delta_0) \geqslant d,$$

ce qui donne

$$m_e(I - N - \delta_0) \geqslant d.$$

Mais on a en même temps

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\,\delta_n < d$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \supset E - \delta_0 \supset I - N - \delta_0.$$

Les trois dernières relations étant incompatibles, la relation (13) est démontrée.

Il résulte de (12) et (13) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \supset E - J,$$

donc $E - J \varepsilon \mathbf{C}$.

Désignons par J_n l'intervalle $\left(\xi - \frac{1}{n}, \eta + \frac{1}{n}\right)$ pour $n = 1, 2 \ldots$ On a

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} (E - J_n) + (\xi) + (\eta)$$

et — en remarquant que la relation $Z_n \varepsilon \mathbf{C}$ (pour $n = 1, 2 \ldots$) entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \varepsilon \mathbf{C}$ — on obtient la relation (10).

http://rcin.org.pl

Les relations (7), (8), (9) et (10) nous donnent en effet la décomposition (1).

II. La condition est suffisante. Soit

$$E=(I-N)+M,$$

où I est un intervalle, $m_i N=0$ et $M \varepsilon \mathbf{C}$.

Il est évident que $I-N \varepsilon \mathbf{C}^*$.

Démontrons encore que si $Z \varepsilon \mathbf{C}^*$ et $Z_1 \varepsilon \mathbf{C}$, alors $Z+Z_1 \varepsilon \mathbf{C}^*$.

Soit donc $\{a_n\}$ une suite infinie de nombres positifs telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n > m_e(Z+Z_1)=m_e Z.$$

Décomposons la suite $\{a_n\}$ en deux suites infinies $\{a_{k_n}\}$ et $\{a_{l_n}\}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} > m_e Z,$$

ce qui est évidemment possible.

Or, il existe deux suites $\{\delta_{k_n}\}$ et $\{\delta_{l_n}\}$ d'intervalles couvrant respectivement Z et Z_1 et dont les longueurs sont respectivement $\{a_{k_n}\}$ et $\{a_{l_n}\}$. La réunion de ces deux suites d'intervalles nous fournit une suite $\{\delta_n\}$ d'intervalles couvrant $Z+Z_1$ et telle que la longueur de δ_n est a_n (pour $n=1,2..$).

Donc $Z+Z_1 \varepsilon \mathbf{C}^*$.

Par conséquent tout ensemble (1) satisfait à la condition (C^*).

Remarque. On pourrait appliquer nos considérations concernant les conditions (C) et (C^*) aux ensembles de l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions. Il faudrait à cet effet remplacer les intervalles par les sphères et modifier la démonstration en quelques points.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl