

1.11 — równania różniczkowe
3.32 — plazma

Włodzimierz Laprus

ASYMPTOTYCZNE WYRAŻENIA
DLA FALI AKUSTYCZNEJ JONOWEJ
W PLAZMIE
32/1986

P. 269

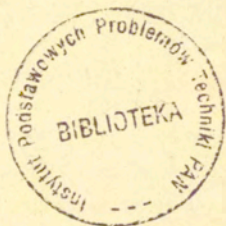


WARSZAWA 1986

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 grudnia 1985 r.



56890



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,52 Ark.druk. 1

Oddano do drukarni w lipcu 1986 r.

Nr zamówienia 437/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

ASYMPTOTYCZNE WYRAŻENIA
DLA FALI AKUSTYCZNEJ JONOWEJ W PLAZMIE

1. WPROWADZENIE

Fala akustyczna jonowa propaguje się w plazmie bezzderzeniowej złożonej z gorących elektronów i zimnych jonów. Równania opisujące propagację w takiej plazmie zostaną zbadane przy użyciu metody fal biegnących opracowanej dla równań dyspersyjnych /patrz [1] i [2]/. Dla dużych wartości zmiennych x i t uzyskane zostaną rozwiązania asymptotyczne z dokładnością do wyrazów rzędu drugiego względem $1/x$ i $1/t$. Na koniec przeanalizujemy równania plazmy w postaci typowego układu dyspersyjnego, otrzymane w wyniku przekształcenia zmiennych niezależnych i zmiennych zależnych.

2. UKŁAD RÓWNAŃ I RÓWNANIE DYSPERSYJNE

Rozważamy równania plazmy

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + v \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - E = 0,$$

/2.1/

$$\frac{\partial n_e}{\partial x} + n_e E = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} + n_e - n_i = 0,$$

gdzie n_e jest koncentracją elektronów, n_i koncentracją jonów, v prędkością płynu jonowego, E polem elektrycznym;

zmienne niezależne i zmienne zależne są wielkościami bezwymiarowymi /por. H. Washimi and T. Taniuti [3]/. Metoda fal biegnących stosuje się do układu równań dyspersyjnych postaci

$$/2.2/ \quad A_{ik}^k(u, x) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + p B_i(u, x) = 0$$

dla $k=0, 1, \dots, m$ oraz $i, k=1, \dots, n$, przy czym $A_{ik}^0 = I_{ik}$ /macierz jednostkowa/, $x_0 = t$. Widać, że w równaniach /2.1/ nie występuje parametr dyspersyjny p , czyli że mają one postać

$$/2.3/ \quad A_{ik}^k(u, x) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + B_i(u, x) = 0.$$

Jak pokazano w pracy [4], problem początkowy dla układu /2.3/ z danymi początkowymi niezależnymi od parametru p jest równoważny problemowi początkowemu dla układu /2.2/ z danymi początkowymi "szybkozmiennymi", tj. będącymi funkcją iloczynu px_k . Zatem rozwiązanie drugiego problemu początkowego dla $p \rightarrow \infty$ zachowuje się tak jak rozwiązanie pierwszego problemu początkowego dla $x_k \rightarrow \infty$. Z tego powodu możemy wprowadzić do równań /2.1/ parametr p . Mamy

$$/2.4/ \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_i \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - pE &= 0, \\ \frac{\partial u_e}{\partial x} + p u_e E &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} + p(u_e - u_i) &= 0. \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania tego układu równań w postaci rozwinięcia fali biegnącej

$$/2.5/ \quad u_i(x) = u_i^0(x) + \sum_{\nu=1}^N g_i^\nu(x) S_\nu(\varphi) + R_i(x)$$

z funkcjami $S_\nu(\varphi) = (i\nu)^{-\nu} \exp i\nu\varphi$. Rozwinięcie /2.5/ ogra-

niczone do pierwszych dwóch wyrazów daje wyrażenie asymptotyczne rozwiązanie układu równań /2.4/ przy $p \rightarrow \infty$ albo wyjściowego układu równań /2.1/ przy $x_k \rightarrow \infty$.

Niech $(u_i) = (n_i, v, n_e, E)$. Wtedy równania /2.4/ przyjmują postać /2.2/ ze współczynnikami

$$/2.6/ \quad (A_{ik}^1) = \begin{bmatrix} v & n_i & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (B_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ n_e E \\ n_e - n_i \end{bmatrix}.$$

Stąd można wyliczyć macierz dyspersyjną $\mathcal{A}_{ik} = -\omega J_{ik} + \bar{\mathcal{A}}_{ik}$, gdzie $\bar{\mathcal{A}}_{ik} = k A_{ik}^1 - i B_i^k$, $k = k_1$, J_{ik} jest macierzą o dwóch elementach różnych od zera: $J_{12} = J_{21} = 1$. Pochodna $B_i^k = \partial B_i / \partial u_k$ wynosi

$$/2.7/ \quad (B_i^k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & E & n_e \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

zatem macierz dyspersyjna ma postać

$$/2.8/ \quad (\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega + kv & kn_i & 0 & 0 \\ 0 & -\omega + kv & 0 & i \\ 0 & 0 & k - iE & -in_e \\ i & 0 & -i & k \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że $(u_i^0) = (n, v_0, n, 0) = \text{const}$ /jest to rozwiązanie równań /2.4//. Dla $u_i = u_i^0$ macierz dyspersyjna przybiera postać

$$/2.9/ \quad (t_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega + kv_0 & kn & 0 & 0 \\ 0 & -\omega + kv_0 & 0 & i \\ 0 & 0 & k & -in \\ i & 0 & -i & k \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy wynosi

$$/2.10/ \quad \det(t_{ik}) \equiv Q(-\omega, k) = (-\omega + kv_0)^2 (k^2 + n) - k^2 n$$

i równanie dyspersyjne $Q(-\omega, k) = 0$ ma dwa pierwiastki

$$/2.11/ \quad \omega_1 = kv_0 + k\zeta, \quad \omega_2 = kv_0 - k\zeta,$$

gdzie $\zeta = \sqrt{n/(k^2 + n)}$. Pierwiastki odpowiadają fali akustycznej jonowej.

3. PROMIENIE I FUNKCJA FAZOWA

Z równaniem dyspersyjnym, które jest równaniem różniczkowym dla funkcji fazowej $\psi(t, x)$, wiąże się układ równań kanonicznych Hamiltona z hamiltonianem

$$/3.1/ \quad \mathcal{H}(k) = kv_0 \pm k\zeta$$

/znak górny dla ω_1 , znak dolny dla ω_2 /. Prędkość grupowa

$$/3.2/ \quad \gamma(k) = \partial \mathcal{H} / \partial k = v_0 \pm \zeta^3,$$

tak jak hamiltonian, jest niezależna od t i x . Zatem rozwiązując równania kanoniczne

$$/3.3/ \quad \dot{x} = \gamma(k), \quad \dot{k} = 0$$

otrzymujemy wstęgi promieniowe postaci

$$/3.4/ \quad x = \gamma t + x^0, \quad k = k^0,$$

gdzie x^0 i k^0 są wartościami początkowymi funkcji $x(t)$ i $k(t)$ dla $t=0$. Oprócz funkcji $k(t)$, stałe na promieniach są także \mathcal{K} , γ oraz lagrangian

$$/3.5/ \quad \mathcal{L}(k) = -\mathcal{K} + k \partial \mathcal{K} / \partial k = \mp k^3 \zeta^3 / n.$$

Zatem funkcja fazowa, określona na promieniu /3.4/ całką

$$/3.6/ \quad \varphi(t) = \int_0^t \mathcal{L} ds + \varphi^0(x^0),$$

wynosi po prostu

$$/3.7/ \quad \varphi(t) = \mathcal{L} t + \varphi^0(x^0)$$

/ $\varphi^0(x^0) = \varphi(0, x)$ jest wartością początkową/.

Niech $k^0(x^0)$ oznacza wartość początkową funkcji $k(t)$ na promieniu o wartości początkowej x^0 . Funkcja $k^0(x^0)$ jest związana z wartością początkową $\varphi^0(x^0)$:

$$/3.8/ \quad k^0(x^0) = d\varphi^0(x^0) / dx^0$$

Wziąwszy to pod uwagę stwierdzamy, że w pewnym otoczeniu osi x dla $t > 0$ funkcja fazowa dana jest formułą /3.7/. Istotnie, podstawiając $x^0 = x - \gamma t$ otrzymujemy

$$/3.9/ \quad \varphi(t, x) = \mathcal{L} t + \varphi^0(x - \gamma t)$$

z funkcją $k(t, x)$ zdefiniowaną w sposób uwikłany przez zależność

$$/3.10/ \quad k = k^0(x - \gamma(k)t)$$

gdzie $k^0(x^0)$ jest wyliczone ze związku /3.8/.

4. WSPÓŁCZYNNIKI ROZWINIECIA

Ograniczymy się do obliczenia pierwszego współczynnika rozwinięcia fali biegnącej /2.5/, tj.

$$/4.1/ \quad g_i^1(t, x) = \sigma(t, x) r_i$$

W tym celu rozwiążemy pierwsze równanie transportu

$$/4.2/ \quad \dot{\sigma} + a e^{i p \tau} \sigma + b \sigma = 0$$

na promieniach, a następnie znajdziemy funkcję $\sigma(t, x)$ w pewnym otoczeniu osi x dla $t > 0$.

Wektory zerowe, lewy i prawy, macierzy dyspersyjnej /2.9/ mają postać

$$/4.3/ \quad (l_i) = (\pm 1, n \bar{\zeta}^{-1}, \zeta, -i k \zeta),$$

$$(r_i) = (n \bar{\zeta}^{-1}, \pm 1, n \bar{\zeta}, -i k \zeta),$$

ze znakiem górnym dla ω_1 i dolnym dla ω_2 . Współczynnik w równaniu /4.2/ można znaleźć posługując się relacją

$$/4.4/ \quad l_i r_i a = l_i \bar{x}_{il}^k r_i r_k,$$

gdzie $\bar{x}_{il}^k = \partial \bar{x}_{il} / \partial u_k$ dla $u_i = u_i^0$. Biorąc pod uwagę /2.8/ i wyliczając odpowiednie pochodne stwierdzamy, że

$$/4.5/ \quad \bar{x}_{12}^1 = k, \quad \bar{x}_{11}^2 = \bar{x}_{22}^2 = k, \quad \bar{x}_{34}^3 = -i, \quad \bar{x}_{33}^4 = -i$$

i że pozostałe elementy macierzy $\bar{x}_{il}^1, \bar{x}_{il}^2, \bar{x}_{il}^3, \bar{x}_{il}^4$ są równe zero. Ostatecznie otrzymujemy

$$/4.6/ \quad a = \frac{2k\bar{\zeta}^{-1} - 2k\bar{\zeta}^3 + i\bar{\zeta}^{-2}}{\pm 2\bar{\zeta}^{-1} + 1 - 2\bar{\zeta}^2}$$

Współczynnik b w równaniu /4.2/ określa relacja

$$/4.7/ \quad l_i r_i b = l_i D_{ik} v_k$$

dla $u_k = u_k^0$, gdzie $D_{ik} = J_{ik} \partial/\partial t + A_{ik}^1 \partial/\partial x$. Mamy

$$/4.8/ \quad l_i D_{ik} v_k = \pm \left(\frac{\partial k}{\partial t} + v_0 \frac{\partial k}{\partial x} \right) k \zeta - 2k \zeta^4 \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Funkcja $k(t, x)$ jest stała na promieniu, tj. $\dot{k} = 0$, czyli

$$/4.9/ \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \gamma \frac{\partial k}{\partial x} = 0.$$

Korzystając z tej równości dostajemy

$$/4.10/ \quad b = \frac{-3k\zeta^4}{\pm 2\zeta^{-1} + 1 - 2\zeta^2} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Pochodna $\partial k/\partial x$ jest związana z kształtem powierzchni fazowej w chwili początkowej. Istotnie, zróżniczkowanie równości /3.10/ daje

$$/4.11/ \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \phi / \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial k} t \right),$$

gdzie $\phi = d^2 \varphi^0(x^0)/dx^{0^2}$. Ponieważ ϕ i $\partial \gamma/\partial k$ są stałe na promieniu, to pochodna $\partial k/\partial x$ zmienia się wzdłuż promienia.

Przechodzimy do rozwiązania równania transportu /4.2/. Stosując standartowe podstawienie $\sigma = 1/\rho$ otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne

$$/4.12/ \quad \dot{\rho} - b\rho - a e^{i\rho\varphi} = 0,$$

którego rozwiązanie łatwo znajdujemy metodą uzmiennienia stałej z rozwiązania równania jednorodnego. W ten sposób dostajemy funkcję $\sigma(t)$ określoną na promieniu o wartości początkowej x^0 . Aby znaleźć funkcję $\sigma(t, x)$ określoną w pewnym otoczeniu osi x dla $t > 0$, należy podstawić $x^0 = x - \gamma t$ do wartości

początkowych $\sigma^*(x^*)$ i $\psi^*(x^*)$.

Rozpatrzmy prosty przypadek, kiedy wartość początkowa funkcji fazowej zależy liniowo od x^* : $\psi^*(x^*) = k^*x^*$. Wtedy $b = 0$ i rozwiązanie równania transportu ma postać

$$/4.13/ \quad \sigma(t) = \left[\frac{a}{ipL} (e^{ip\ell} - e^{ip\ell^*}) + \frac{1}{\sigma^*} \right]^{-1},$$

gdzie $\sigma^* = \sigma^*(x^*)$ jest wartością początkową funkcji $\sigma(t)$ na promieniu o wartości początkowej x^* . Funkcja fazowa, określona w pewnym otoczeniu osi x dla $t > 0$, jest liniowa względem zmiennych t i x :

$$/4.14/ \quad \psi(t, x) = L(k)t + k^*x = (-\omega^* + \gamma k^*)t + k^*(x - \gamma t) = -\omega^*t + k^*x,$$

przy czym $\omega^* = \mathcal{H}(k^*)$. Po podstawieniu /4.14/ do /4.13/ i zastąpieniu x^* przez $x - \gamma t$ dostajemy funkcję

$$/4.15/ \quad \sigma(t, x) = \left[\frac{a}{ipL} (e^{ipL t} - 1) e^{ipk^*x} + \frac{1}{\sigma^*} \right]^{-1}$$

określoną w otoczeniu osi x .

Rozwiązanie asymptotyczne równań /2.4/ dla $p \rightarrow \infty$ z dokładnością do wyrazów rzędu $1/p^2$ ma postać

$$/4.16/ \quad \begin{aligned} n_i &\sim n + n \zeta^{-1} \sigma(t, x) \frac{1}{ip} \exp ip(-\omega^*t + k^*x), \\ v &\sim v_0 \pm \sigma(t, x) \frac{1}{ip} \exp ip(-\omega^*t + k^*x), \\ n_e &\sim n + n \zeta \sigma(t, x) \frac{1}{ip} \exp ip(-\omega^*t + k^*x), \\ E &\sim -ik \zeta \sigma(t, x) \frac{1}{ip} \exp ip(-\omega^*t + k^*x), \end{aligned}$$

gdzie należy położyć $k = k^*$. Jeżeli $\sigma^*(x^*)$ jest funkcją stałą, to pierwszy składnik sumy w /4.15/ jest do pominięcia względem drugiego dla $p \rightarrow \infty$ i wtedy $\sigma(t, x) = \text{const}$ w wyrażeniach /4.16/.

Ogólnie biorąc kształt funkcji $\sigma^*(x^*)$ wynika z warunku początkowego dla równań /2.4/. Najprostszy warunek początkowy, tzw. oscylacyjny, ma w rozważanym przypadku postać

$$/4.17/ \quad u_i(0, x) = u_i^*(0, x) + \frac{1}{ip} \sigma(0, x) r_i(k^*) \exp ipk^*x$$

z funkcją $\sigma(0, x) = \sigma^*(x)$. Ponieważ $u_i^*(0, x) = \text{const}$, to dla $\sigma^*(x) = \text{const} \cdot p$ dane początkowe /4.17/ są "szybkozmienne". Wówczas obydwa składniki sumy w /4.15/ są tego samego rzędu dla $p \rightarrow \infty$, czyli

$$/4.18/ \quad \sigma(t, x) = ipF, \quad F = [aL^{-1}(e^{ipLt} - 1)e^{ipk^*x} + i \cdot \text{const}^{-1}]^{-1}.$$

Po podstawieniu /4.18/ do /4.16/ i po zamianie zmiennych $t \rightarrow t/p$ i $x \rightarrow x/p$ otrzymujemy

$$/4.19/ \quad \begin{aligned} u_i &\sim u + u\zeta^{-1} F \exp(-i\omega^2 t + ik^*x), \\ v &\sim v_0 \pm F \exp(-i\omega^2 t + ik^*x), \\ n_e &\sim n + u\zeta F \exp(-i\omega^2 t + ik^*x), \\ E &\sim -ik\zeta F \exp(-i\omega^2 t + ik^*x). \end{aligned}$$

Jest to rozwiązanie asymptotyczne równań /2.1/ dla $t, x \rightarrow \infty$.

5. INNA POSTAĆ RÓWNAŃ PLAZMY

Dwa ostatnie spośród równań /2.1/ nie zawierają pochodnej względem t . Tę osobliwość układu równań można usunąć stosując przekształcenie zmiennych niezależnych i zależnych

$$/5.1/ \quad t' = t + x/c, \quad x' = x, \quad u_i'(x', t') = u_i(x, t),$$

gdzie c jest liczbą rzeczywistą. Wtedy

$$/5.2/ \quad \partial u_i / \partial t = \partial u_i' / \partial t', \quad \partial u_i / \partial x = \frac{1}{c} \partial u_i' / \partial t' + \partial u_i' / \partial x'$$

i zamiast /2.1/ mamy /po opuszczeniu primów/

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \alpha v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{c} &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha E &= 0, \\
 \frac{\partial u_e}{\partial t} + c \frac{\partial u_e}{\partial x} + c n_e E &= 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} + c (n_e - u_i) &= 0.
 \end{aligned}$$

/5.3/

Wprowadziliśmy oznaczenia: $\alpha = (1+v/c)^{-1}$, $\beta = \alpha n_i - \alpha^2 v/c$.
 Po wymnożeniu przez p wyrazów nie zawierających pochodnych
 otrzymujemy układ równań postaci /2.2/ ze współczynnikami

$$/5.4/ \quad (A_{ik}^1) = \begin{bmatrix} \alpha v & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (B_i) = \begin{bmatrix} \alpha^2 E/c \\ -\alpha E \\ c n_e E \\ c(n_e - u_i) \end{bmatrix}.$$

Pochodna $\partial B_i / \partial u_k$ wynosi

$$/5.5/ \quad (B_i^k) = \begin{bmatrix} 0 & -2\alpha^3 E/c^2 & 0 & \alpha^2/c \\ 0 & \alpha^2 E/c & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & c E & c n_e \\ -c & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz dyspersyjna $-\omega I_{ik} + k A_{ik}^1 - i B_i^k$ dla $u_i = u_i^0$ ma postać

$$/5.6/ \quad (\alpha_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega + k\alpha_0 v_0 & k\beta_0 & 0 & -i\alpha_0^2/c \\ 0 & -\omega + k\alpha_0 v_0 & 0 & i\alpha_0 \\ 0 & 0 & -\omega + kc & -icn \\ ic & 0 & -ic & -\omega + kc \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy,

$$/5.7/ \quad Q(-\omega, k) = (-\omega + k\alpha_0 v_0)^2 \times \\ \times [(-\omega + kc)^2 + c^2 n] - (-\omega + kc)[\alpha_0 \beta_0 kc + \alpha_0^2 (-\omega + k\alpha_0 v_0)],$$

jest wielomianem czwartego stopnia względem ω , który nie faktoryzuje się w widoczny sposób /i nie jest wielomianem dwukwadratowym/. Jedynie dla $\beta_0 = 0$ wyrażenie /5.7/ rozkłada się na dwa czynniki, z których jeden jest wielomianem pierwszego stopnia, a drugi wielomianem trzeciego stopnia:

$$/5.8/ \quad Q(-\omega, k) = (-\omega + k\alpha_0 v_0) \times \\ \times [(-\omega + k\alpha_0 v_0)(-\omega + kc)^2 + c^2 n(-\omega + k\alpha_0 v_0) - \alpha_0^2 (-\omega + kc)]$$

Dzieje się tak wtedy, gdy $c = (1/n - 1)v_0$.

6. KONKLUZJA

W rozwinięciu asymptotycznym /4.19/ rozwiązania równań plazmy /2.1/ z warunkiem początkowym /4.17/ występuje współczynnik α , co dowodzi, że to rozwinięcie uwzględni efekty nieliniowe /dla liniowych równań $\alpha \equiv 0$ /. Dyspersja uwidacznia się w postaci wektora v_i , który jest zależny od współczynników B_i w równaniach /2.1/.

LITERATURA

- [1] W. LAPRUS, Metoda fal biegnących dla równań quasi-liniowych dyspersyjnych, Prace IPPT 3/1981
- [2] W. LAPRUS, Rozwiązania asymptotyczne równań quasi-linio-

wych dyspersyjnych, Prace IPPT 27/1982

- [3] H. WASHIMI and T. TANIUTI, Phys. Rev. Letters 17, /1966/
996
- [4] W. LAPRUS, Rozwiązania nieliniowych równań teorii magneto-
jonowej, Prace IPPT 20/1983

STRESZCZENIE

Dla równań opisujących propagację fali akustycznej jonowej w plazmie bezzderzeniowej znaleziono rozwiązania w postaci wyrażań asymptotycznych dla dużych wartości zmiennej czasowej i zmiennej przestrzennej. Zbadano także możliwość przekształcenia równań plazmy do postaci typowych równań dyspersyjnych.