

- 7.72 — lepkoplastyczność
7.77 — przewodzenie ciepła, wpływ
temperatury na materiały
5.52 — fizyczne i mechaniczne
własności metali

Jacek Litoński

**NUMERYCZNA ANALIZA PROCESÓW
PLASTYCZNEGO SKRĘCANIA
PRZY UWZGLĘDNIENIU CIEPŁA
GENEROWANEGO PODCZAS ODKSZTAŁCANIA**

33/1985

WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 października 1984 r.

56916



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,93 Ark.druk. 3

Oddano do drukarni we wrześniu 1985 r.

Nr zamówienia 691/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Jacek Litoński
Zakład Mechaniki
Ośrodków Ciągłych
IPPT PAN Warszawa

NUMERYCZNA ANALIZA PROCESÓW PLASTYCZNEGO SKRĘCANIA PRZY
UWZGLĘDNIENIU CIEPŁA GENEROWANEGO PODCZAS ODKSZTAŁCANIA *)

Streszczenie

W pracy bada się numerycznie procesy skręcania rurki i tarczy z materiału umacniającego się, czułego na prędkość odkształcenia i temperaturę, przy uwzględnieniu generacji ciepła, jego przepływu wewnątrz materiału i ucieczki na zewnątrz na drodze przewodnictwa cieplnego do części chwytowych i na drodze konwekcji swobodnej. Przyjęto, że materiał rurki i tarczy wykazuje związek $\tau = C(1 - aT)(1 + b\dot{\phi})^m(\phi_0 + \phi)^n$, gdzie τ - naprężenie styczne, T - temperatura, $\dot{\phi}$ - prędkość odkształcenia przy ścinaniu, ϕ - plastyczne, ścinające odkształcenie i C, a, b, ϕ_0, m, n - stałe. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla wybranych wymiarów g, r, L rurki, i g, r_0, R tarczy, przy wartościach średniej prędkości odkształcenia $\dot{\phi}_p = 10^{-2}, 10^{-1}, 1$ i $10s^{-1}$. Przy najmniejszej z nich procesy skręcania są prawie izotermiczne. Przy największej - w rurce i w tarczy, przez pewien okres czasu, istnieją obszary prawie adiabatycznego odkształcania. Przy wartościach $\dot{\phi}_p = 1$ i $10s^{-1}$ występuje zjawisko wyraźnej koncentracji plastycznego płynięcia na części długości rurki i na wąskim pierścieniu w tarczy. Porównano ze sobą oba procesy skręcania. Zwrócono uwagę na ich zależność od długości rurki i od promienia zewnętrznego tarczy. Określono także wpływ konwekcji swobodnej na te procesy.

*) Część obecnej pracy została wykonana podczas 5-cio miesięcznego pobytu na Uniwersytecie w Nagoya, Japonia w ramach stypendium JSPS.

1. WSTĘP

Podczas plastycznego odkształcania ciała niemal cała praca plastyczna zamienia się w ciepło. To generowane ciepło rozprzyska się w odkształcanym materiale, przy czym pewna jego część ucieka do otoczenia. Istnienie generacji ciepła niekiedy ujawnia się bardzo wyraźnie. Na przykład obserwowano regularne linie świecące jaśniej niż otoczenie w miękkiej stali podczas kucia [1], a także linie martenzytu towarzyszące obszarom zlokalizowanej, plastycznej deformacji w stali uprzednio odkształconej dynamicznie [2]. O tych zjawiskach nieco szerzej pisze Johnson [3]. Przegląd na ogół innych, wyraźnych przejawów generacji ciepła podaje Dillon [4]. Dawniejsze prace z tej dziedziny omawia Bell [5]. Nowszy i obszerny przegląd opracował Rogers [6].

Uważa się [7,8], że w celu uwzględnienia wpływu generacji ciepła - i towarzyszących jej zjawisk przepływu i ucieczki ciepła - na wybrany proces plastycznego płynięcia, w równaniach tego procesu należy uwzględnić równanie bilansu cieplnego, inaczej - równanie przewodnictwa cieplnego. Znanych jest kilka prac, w których tak postąpiono w odniesieniu do interesujących nas procesów plastycznego skręcania ciała umacniającego się, czułego na prędkość odkształcenia i temperaturę [9-12]. I tak, praca [9] dotyczy skręcania stożkowej rurki, [10] - skręcania fizycznie niejednorodnej rurki, bez uwzględnienia ucieczki ciepła do otoczenia, a [11] - adiabatycznego skręcania geometrycznie niejednorodnej rurki.

W ostatniej pracy [12] rozważa się skręcanie rurki w sposób bardziej pełny, przy uwzględnieniu przepływu ciepła w dwóch kierunkach i zmienności temperatury części chwytowych. Układ równań opisujących proces skręcania - w pracy nie podany - rozwiązano metodą elementów skończonych przy niezbyt gęstej siatce. Metodę tę zastosowano do symulacji zachowania się szeregu metali [12-14] przy większych średnich prędkościach odkształcenia, przy jednej, rzadko dwóch wartościach ostatniej. Tylko dla jednego materiału, przy jednej wartości średniej prędkości odkształcenia i w jednym stadium skręcania podano

wyznaczone numerycznie rozkłady: temperatury, odkształcenia i prędkości odkształcenia [12].

Istnieją także szczegółowe wyniki numeryczne dla skręcania rurki z materiału czułego na temperaturę i prędkość odkształcenia, jednak nie umacniającego się [15].

Celem obecnej pracy jest analiza numeryczna procesów skręcania rurki i tarczy z materiału umacniającego się, czułego na prędkość odkształcenia i temperaturę, przy uwzględnieniu generacji, przepływu i ucieczki ciepła do otoczenia - w dosyć szerokim zakresie prędkości odkształcenia. Przy tym położony jest nacisk na zrozumienie zjawisk występujących w tych procesach.

Należy dodać, że oba rozważane procesy są często spotykane w badaniach plastycznych własności metali, np. [16-19].

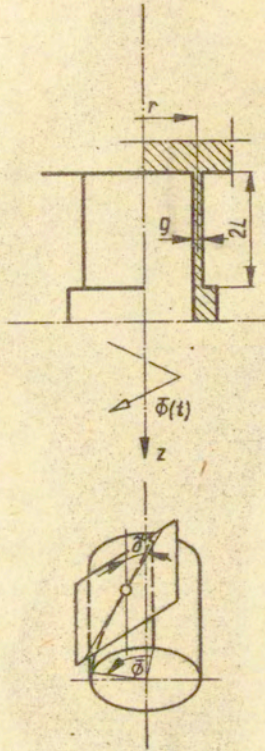
2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I PODSTAWOWE RÓWNANIA

Rozważmy skręcanie cienkościennej rurki o wymiarach g, r , $2L$ (Rys.1), której jeden koniec jest nieruchomy podczas gdy drugi jest poddany obrotowi, przy czym kąt obrotu $\bar{\varphi}$ jest pewną funkcją czasu $\bar{\varphi}(t)$. Rozważmy także skręcanie tarczy (Rys.2), której krawędź zewnętrzna o promieniu R jest nieruchoma natomiast wewnętrzna, o promieniu r_0 , doznaje obrotu o kąt $\bar{\varphi}(t)$.

Przyjmujemy następujące założenia:

a) Podczas skręcania przekroje rurki normalne do osi z , i przekroje walcowe tarczy o promieniach $r, r_0 \leq r < R$, doznają tylko sztywnych obrotów, którym towarzyszy proste ścinanie z kątem ścinania γ . Odkształcenie ścinające φ definiujemy jako $\varphi = \text{tg} \gamma / \sqrt{3}$, przy czym zmianę φ wzdłuż grubości rurki i tarczy pomijamy. Przy tych założeniach (patrz Uzupełnienia A i B) można wprowadzić pojęcia średniego odkształcenia φ_p dla rurki i tarczy, które zgodnie z wzorami (A.3) i (B.3) zależą liniowo od $\bar{\varphi}$

$$\varphi_p = \frac{r}{2\sqrt{3} L} \bar{\varphi} \quad (1)$$



Rys.1

$$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{3} \ln \frac{R}{r_0}} \bar{\dot{\varphi}} \quad (2)$$

Dalej zakładamy, że $\varphi_p = \dot{\varphi}_p t$, gdzie $\dot{\varphi}_p$ - średnia prędkość odkształcenia - jest zadaną stałą wartością. Zatem φ_p jest proporcjonalne do $\bar{\dot{\varphi}}$ i do t , $\varphi_p \propto \bar{\dot{\varphi}} t$; ponadto $\bar{\dot{\varphi}}$ - prędkość kątowa skręcania - jest stała (patrz związki (A.5) i (B.5)).

b) Nieznikającą składową tensora naprężenia jest $\tau \equiv \tau_{z\dot{\varphi}} = \tau_{\dot{\varphi}z}$ - w przypadku rurki i $\tau = \tau_{r\dot{\varphi}} = \tau_{\dot{\varphi}r}$ - w przypadku tarczy, gdzie $r, \dot{\varphi}$, z oznaczają odpowiednio: kierunek promieniowy, obwodowy i osiowy. Zmianę τ wzdłuż grubości rurki i tarczy pomijamy.

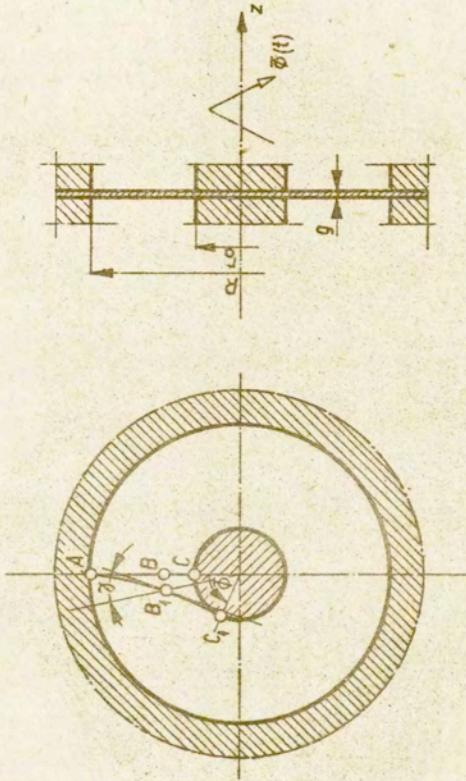
c) Sztywno - plastyczny materiał rurki i tarczy jest opisany związkiem wziętym z prac [11,20]

$$\tau = C(1 - aT)(1 + b\dot{\varphi})^m(\varphi_0 + \varphi)^n \quad (3)$$

gdzie T - temperatura w $^{\circ}\text{C}$, φ - plastyczne, ścinające odkształcenie i $\dot{\varphi}$ - prędkość odkształcenia w s^{-1} . Wartości stałych w równaniu (3) są następujące: $C = 52 \text{ kGmm}^{-2}$, $a = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $b = 10^5 \text{ s}$, $m = 0.1$, $n = 0.2$ i $\varphi_0 = 0.01$. Z uwagi na sposób ich wyznaczania można oczekiwać, że związek (3) w przybliżeniu opisuje zachowanie się miękkiej stali przy skręcaniu w przedziałach $T = 400 - 600^{\circ}\text{C}$, $\varphi = 0.02 - 0.2$ i $\dot{\varphi} = 10^{-5} - 1 \text{ s}^{-1}$. Zależnością (3) posługiwać się będziemy także przy większych wartościach T, φ i $\dot{\varphi}$.

Materiał opisany związkiem (3) posiada statyczny związek naprężenie-temperatura-odkształcenie, $\tau_{\text{stat}} = \tau(T, \dot{\varphi}, \varphi)_{\dot{\varphi}=0}$. W zakresie naprężeń $\tau \leq \tau_{\text{stat}}$ przyjmujemy $\varphi = \text{const}$.

Związku (3), przy zmienionych stałych, użyto już do opisu zachowania się dwóch stali [21], a związku zbliżonego do (3), przy różnych stałych - do opisu zachowania się szeregu metali [12-14] - w temperaturze normalnej.



Rys.2

d) Cała praca plastycznego ścinania przekształca się w ciepło. Oznacza to, że zachodzi związek

$$dQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau d\phi, \quad (4)$$

gdzie dQ jest elementarnym ciepłem wytworzonym w jednostce objętości, a $J = 427 \text{ kGm/kcal}$ jest mechanicznym równoważnikiem ciepła. Związek (4) wynika z równości $dL = JdQ$, gdzie $dL = \tau dtg\gamma = \sqrt{3} \tau d\phi$ jest elementarną pracą plastycznego ścinania w jednostce objętości.

e) Ciepło jest tracone do otoczenia dwoma sposobami:

- 1) Droga przewodzenia do części chwytowych przez końcowe przekroje poprzeczne rurki i przez cylindryczne przekroje tarczy o promieniach r_0 i R . Przyjmujemy, że w przekrojach tych temperatura jest stała i równa temperaturze otoczenia T_0 . Wspomniane straty uwzględnimy przez przyjęcie odpowiedniego warunku brzegowego w równaniu bilansu cieplnego.
- 2) Droga konwekcji swobodnej do otaczającego powietrza przez zewnętrzną powierzchnię boczną rurki i przez obie powierzchnie boczne tarczy. Straty te są opisane prawem Newtona

$$f = H(T - T_0), \quad (5)$$

gdzie f - prędkość przekazywania ciepła przez jednostkę powierzchni bocznej, H - średni współczynnik powierzchniowej wymiany ciepła, a T - temperatura powierzchni rurki lub tarczy.

f) Temperatury rurki i tarczy zmieniają się tylko w jednym kierunku; wzdłuż osi z - w rurce i wzdłuż osi r - w tarczy.

Z rurki skręcanej, jak pokazano na Rys.1., wyodrębnimy myślowo element ograniczony przekrojami poprzecznymi z i $z+dz$. Wtedy $s = \pi[(r+0.5g)^2 - (r-0.5g)^2]$, $dV = s dz$ i $p = 2\pi(r+0.5g)$ oznaczają odpowiednio, pole przekroju poprzecznego rurki, objętość elementu rurki i obwód poprzecznego

przekroju zewnętrznej powierzchni rurki. Oznaczmy jeszcze przez $k, c,$ i ρ - odpowiednio, współczynnik przewodnictwa cieplnego, ciepło właściwe i gęstość materiału rurki. Dla rozważanego elementu mamy następujący bilans cieplny odniesiony do czasu dt

$$dQ_1 - dQ_2 + dQ_3 = dQ_4, \quad (6)$$

gdzie $dQ_1 = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} s dz dt$ - ciepło uzyskane przez element na drodze przewodnictwa cieplnego; $dQ_2 = H(T - T_0) p dz dt$ - ciepło tracone przez powierzchnię boczną elementu na drodze konwekcji; $dQ_3 = \sqrt{3} \pi / J \cdot \partial \varphi / \partial t dt dV$ - ciepło wytworzone w elemencie przy wzroście odkształcenia o $d\varphi = \partial \varphi / \partial t dt$; $dQ_4 = c \rho dV \partial T / \partial t dt$ - ciepło odpowiadające wzrostowi temperatury elementu o $dT = \partial T / \partial t dt$.

Z zależności (6) i podanych wyżej związków, określających $dQ_1, dQ_2, dQ_3, dQ_4, s, dV$ i p uzyskujemy następujące równanie bilansu cieplnego rurki

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{H(r + 0.5g)}{rg} (T - T_0) + \frac{\sqrt{3}}{J} \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7)$$

Z kolei z tarczy, skręcanej w sposób pokazany na Rys.2., wydzielimy myślowo element ograniczony powierzchniami $r, r+dr$ i $\varphi, \varphi+d\varphi$. W tym przypadku $ds = r d\varphi dr$ i $dV = r d\varphi dr g$ są odpowiednio, polem podstawy i objętością rozpatrywanego elementu; składowe dQ_3 i dQ_4 zależności (6) wyrażają się tak samo jak dla elementu rurki, natomiast $dQ_1 = k dr (1/r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}) \times r d\varphi g dt$ i $dQ_2 = H(T - T_0) 2 ds dt$. Równanie bilansu cieplnego jest wtedy następujące

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) - \frac{2H}{g} (T - T_0) + \frac{\sqrt{3}}{J} \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8)$$

Człony występujące w związkach (7) i (8) mają następującą interpretację: $c\varrho \partial T/\partial t$ - całkowita prędkość uzyskiwania ciepła przez element rurki lub tarczy, posiadający jednostkową objętość, $k \partial^2 T/\partial z^2$ i $k(1/r \partial T/\partial r + \partial^2 T/\partial r^2)$ - prędkość uzyskiwania ciepła przez jednostkowy element, odpowiednio, rurki i tarczy na drodze przewodnictwa cieplnego,

$H(r+0.5g)(T-T_0)/rg$ i $2H(T-T_0)/g$ - prędkość utraty ciepła przez powierzchnię boczną jednostkowego elementu, odpowiednio, rurki i tarczy, $\sqrt{3}\tau/J \cdot \partial \varphi/\partial t$ - prędkość generacji ciepła w jednostkowym elemencie rurki lub tarczy.

W dalszych obliczeniach, zarówno dla rurki jak i dla tarczy, przyjmuje się wartości $c = 0.16 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$, $\varrho = 7700 \text{ kgm}^{-3}$ i $k = 37.8 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, które odpowiadają żelazu w temperaturze 500°C [22].

Moment skręcający M występujący przy skręcaniu rozważanej rurki czy tarczy zależy od czasu, $M(t)$. Istnienie równowagi wymaga by w dowolnym przekroju z rurki i przekroju r tarczy moment sił wewnętrznych był równy $M(t)$. Prowadzi to do warunku równowagi

$$\tau(z, t) = \frac{M(t)}{2\pi gr^2} \quad (9)$$

dla rurki i do podobnego warunku

$$\tau(r, t) = \frac{M(t)}{2\pi gr^2} \quad (10)$$

dla tarczy, gdzie r jest zmienną, $r_0 \leq r \leq R$. Rozkład naprężenia $\tau(z, t) = \tau(t)$ opisany związkiem (9), spełnia odpowiednie

różniczkowe równania równowagi $\partial\tau/\partial z = 0$ i $\partial\tau/\partial r = 0$. Także rozkład naprężenia $\tau(r,t)$, opisany związkem (10), spełnia odpowiednie różniczkowe równania równowagi $\partial\tau/\partial z = 0$ i $\partial\tau/\partial r + 2\tau/r = 0$.

Dla procesu skręcania rurki mamy następujący układ równań

$$C(1-aT)(1+b\dot{\varphi})^m(\varphi_0 + \varphi)^n = \frac{M(t)}{2\pi r^2} \quad (11)_1$$

$$c\dot{T} = kT_{,zz} - \frac{H(r+0.5g)}{rg}(T-T_0) + \frac{\sqrt{3}C}{J}(1-aT)(1+b\dot{\varphi})^m\dot{\varphi}(\varphi_0 + \varphi)^n, \quad (11)_2$$

$$\dot{\varphi}_p = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{\varphi} dz, \quad (11)_3$$

gdzie $\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}$ i $T_{,zz} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

Równania (11)₁ i (11)₂ są odpowiednio, równaniem równowagi (9) i równaniem bilansu cieplnego (7), w które podstawiono związek (3). Natomiast równanie (11)₃ jest związkiem (A.6). Równania (11)₁₋₃ stanowią układ złożony z dwóch równań różniczkowych, cząstkowych i równania różniczkowo-całkowego na trzy nieznane funkcje: $T(z,t)$, $\varphi(z,t)$ i $M(t)$. Warunkami początkowymi układu są $T(z,0) = T_0$, $\varphi(z,0) = 0$, a warunkami brzegowymi $T(-L,t) = T_0$, $T(L,t) = T_0$. Układ równań (11)₁₋₃ rozwiązano numerycznie, metodą różnic skończonych, dla wartości stałych $C, a, b, \varphi_0, m, n, J, c, k$ podanych uprzednio, wymiarów rurki $g = 1$, $r = 4.5$, $L = 5$ mm, temperatury $T_0 = 400^\circ\text{C}$ i każdej z następujących par wartości $\dot{\varphi}_p$ (w s^{-1}), H (w $\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$): $10^{-2}, 5.9$; $10^{-1}, 8.3$; $1, 10.3$ i $10, 11.2$. Oprócz nieznanymi funkcji wyznaczono numerycznie także rozkłady prędkości płynięcia $\dot{\varphi}(z,t)$.

Dla procesu skręcania tarczy mamy następujący układ równań:

Przy tym, z równania (11)₃, uzyskuje się

$$(1 + b\dot{\varphi}_p)L = [1 + b\dot{\varphi}(0, t)] \int_0^L A(z, t) dz. \quad (14)$$

Zatem znajomość T i φ w przedziale $0 \leq z \leq L$, w pewnej chwili t , określa krzywą $A = A(z, t)$. Z ostatniej i ze związku (14) wynika $\dot{\varphi}(0, t)$ i sama zależność $\dot{\varphi}(z, t)$. Zauważmy, że $A(z, t) \approx \dot{\varphi}(z, t) / \dot{\varphi}(0, t)$ jeżeli wartości $\dot{\varphi}(z, t)$ i $\dot{\varphi}(0, t)$ nie są zbyt małe. Krzywa $A(z, t)$ jest wtedy geometrycznie podobna do krzywej $\dot{\varphi}(z, t)$.

Podobne uwagi dotyczą tarczy, przy czym wtedy, z równania (12)₁, napisanego dla $r = r_0$ i $r \neq r_0$, wynika

$$\frac{1 + b\dot{\varphi}(r, t)}{1 + b\dot{\varphi}(r_0, t)} = \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2/m} \left[\frac{1 - aT(r_0, t)}{1 - aT(r, t)} \right]^{1/m} \left[\frac{\varphi_0 + \varphi(r_0, t)}{\varphi_0 + \varphi(r, t)} \right]^{n/m}, \quad (15)$$

A
B
C

natomiast z równań (12)₃ i (15) uzyskuje się

$$(1 + b\dot{\varphi}_p) \ln \frac{R}{r_0} = [1 + b\dot{\varphi}(r_0, t)] \int_{r_0}^R A(r, t) \frac{dr}{r}. \quad (16)$$

Ze związków (13), (14) i (15), (16) korzystano przy wyznaczaniu wartości $\dot{\varphi}$ w przedziałach $0 \leq z \leq L$ i $r_0 \leq r \leq R$.

Zróźniczkujemy jeszcze równanie (11), względem t . Pamiętaj, że jego lewa strona jest naprężeniem τ uzyskujemy zależności

$$\tau_{,T}\dot{T} + \tau_{,\dot{\varphi}}\ddot{\varphi} + \tau_{,\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\tau}(t) = \frac{\dot{M}(t)}{2\pi gr^2} \quad (17)$$

z których, po podstawieniu pochodnych $\tau_{,T} = -a\tau/(1-aT)$, $\tau_{,\dot{\varphi}} = mb\tau/(1+b\dot{\varphi})$, $\tau_{,\varphi} = n\tau/(\varphi_0 + \varphi)$ obliczonych ze związku (3), wynikają równości

$$\tau\dot{\varphi} \left(\underbrace{-\frac{a}{1-aT}}_{v_1} \frac{\dot{T}}{\varphi} + \underbrace{\frac{mb}{1+b\dot{\varphi}}}_{v_2} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \underbrace{\frac{n}{\varphi_0 + \varphi}}_{v_3} \right) = \dot{\tau} = \frac{\dot{M}}{2\pi gr^2} \quad (18)$$

Sumę wyrazów $v_1 + v_2 + v_3$, z których każdy jest funkcją zmiennych z i t , oznaczamy dalej przez $s(z, t)$. Ze związków (18), po uwzględnieniu równania (9) uzyskujemy zależności

$$s(z, t) = \frac{\dot{\tau}}{\tau\dot{\varphi}} = \frac{\dot{M}}{M\dot{\varphi}} \quad (19)$$

Związki (17) - (19) obowiązują także dla skręcania tarczy z tym, że τ, v_1, v_2, v_3, s są wtedy funkcjami r i t .

3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH I ICH DYSKUSJA

3.1. Wyniki dla rurki

W oparciu o rozwiązanie układu równań (11)₁₋₃ lub (12)₁₋₃ - uzyskane dla każdej z par wartości $\dot{\phi}_p$, H - wykreślono zależność naprężenia τ od odkształcenia średniego ϕ_p (lub zależność τ przy $r=r_0$, τ_{r_0} od ϕ_p , w przypadku tarczy), a także rozkłady $\dot{\phi}$ (ściślej $\dot{\phi}/\dot{\phi}_p$), ϕ i T w kilku stadiach skręcania. Przy tym, jak pamiętamy, zachodzą proporcjonalności $\phi_p \propto \bar{v}, t$ i zgodnie z wzorami (9) i (10) proporcjonalności $\tau \propto M$ i $\tau_{r_0} \propto M$.

Na niektórych dalszych rysunkach skala liniowa na ośiach rzędnych $\dot{\phi}/\dot{\phi}_p$ i ϕ w pewnym punkcie zmienia się w skalę logarytmiczną. Miejsce zmiany wskazuje pozioma strzałka. Niekiedy także, liniami równoległymi do osi odciętych z lub r , zaznaczony jest zasięg strefy plastycznego płynięcia.

Wykresy zależności τ od ϕ_p i $\dot{\phi}/\dot{\phi}_p$, ϕ , T od z dla skręcania rurki ze średnią prędkością odkształcenia $\dot{\phi}_p = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ przedstawia Rys.3. W tym przypadku prędkość odkształcenia $\dot{\phi}$ w rurce jest mała, bliska $\dot{\phi}_p$ (Rys.3b), zatem także wielkość $\sqrt{3}\tau\phi/J$ (prędkość generacji ciepła w jednostkowym elemencie objętościowym rurki) jest niewielka. Ostatnia (jak można wnioskować w oparciu o wyznaczone funkcje $T(z,t)$) jest silnie kompensowana przez sumę wielkości $kT_{,zz} < 0$ i wielkości $-H(r+0.5g)(T-T_0)/rg$, odgrywającej małą rolę, lub inaczej - przez sumę prędkości utraty ^{ciepła} przez jednostkowy element na drodze przewodnictwa cieplnego $-kT_{,zz} > 0$ i prędkości utraty ciepła $H(r+0.5g)(T-T_0)/rg$. Kompensacja ta, prawie zupełna w pobliżu $z=L$ i nieco mniejsza w pobliżu $z=0$, w kolejnych stadiach 1,2,3 rośnie. Zgodnie z równaniem (11)₂ powoduje ona małą prędkość temperatury \dot{T} , największą w środku rurki i malejącą w kolejnych stadiach skręcania, co czyni zrozumiałym istnienie małych temperatur T , których rozkłady wykazują maksimum w $z=0$ i tendencją do zbiegania się przy wzroście t (Rys.3d). W omawianym przypadku człon $v_1 < 0$ we wzorze (18), dla różnych wartości z,t , jest pomijalnie mały wobec sumy $v_2 + v_3 > 0$. Zatem $s(z,t) > 0$ i zależność $\tau \propto M$ od t (a więc i od ϕ_p) jest rosnąca (Rys.3a).

Rozkłady $\dot{\phi}$ uzyskane z rozkładów T i ϕ przy użyciu

związków (13) i (14) przedstawia Rys.3b. Każdy z tych rozkładów jest w niewielkim stopniu niejednorodny; w zewnętrznych częściach rurki $\dot{\phi}$ biegnie nieco niżej $\dot{\phi}_p$, natomiast w centralnej części rurki, zgodnie z wzorem (11)₃ - nieco wyżej $\dot{\phi}_p$. Obniżenie $\dot{\phi}$ i zwiększenie $\dot{\phi}$ w kolejnych stadiach skręcania nieznacznie rosną. Oznacza to istnienie nieznacznej koncentracji prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ (koncentracji płynięcia) w centralnej części rurki. Przyczyną niejednorodności i pewnej koncentracji $\dot{\phi}$ (przy obecności równania (14)) są niejednorodne i wypiętrzające się rozkłady T, których wpływ na krzywe $\Lambda(z, t)$ (wzór 13), w $0 < z \leq L$ - reprezentowany przez człon $B < 1$ - przeważa nad wpływem wypiętrzania się rozkładów ϕ - reprezentowanym przez człon $C > 1$. Należy dodać, że także rozkład $\dot{\phi}$ poprzez związek (11)₂ wpływa na rozkład T.

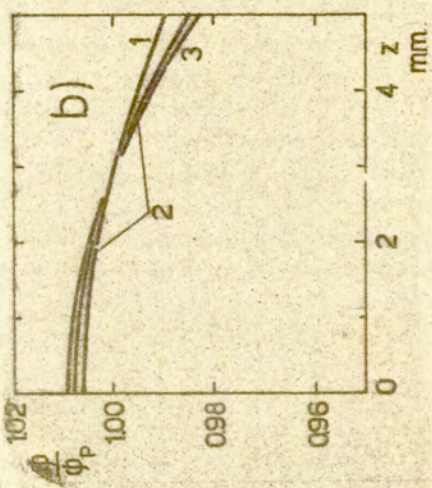
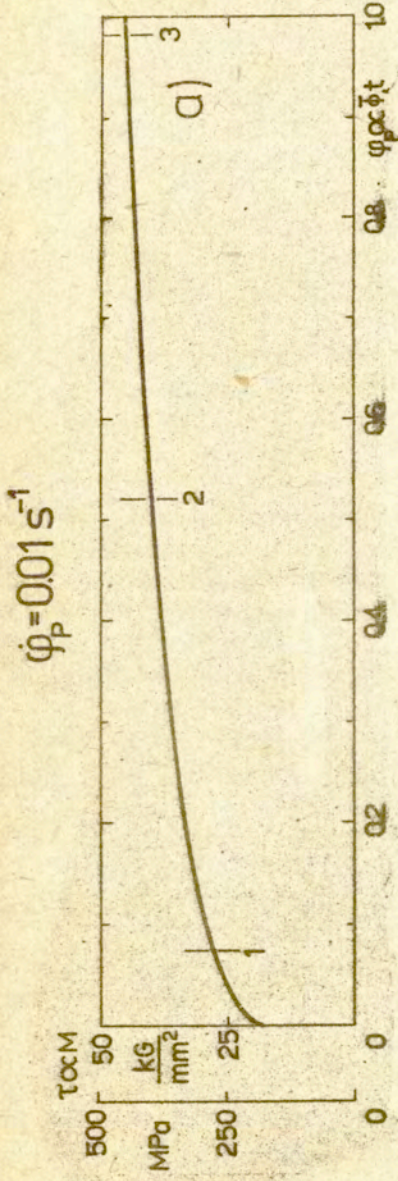
Nieznaczna zmiana odkształcenia ϕ wzdłuż z (Rys.3c), wynika z małych zmian $\dot{\phi}$ wzdłuż z.

Mała wielkość \dot{T} występująca w omawianym przypadku skręcania (rzędu 10^{-2} i 10^{-3} °Cs⁻¹ w stadiach, odpowiednio 1 i 3) pozwala uważać ten przypadek za bliski izotermicznemu, w którym $\dot{T} = 0$.

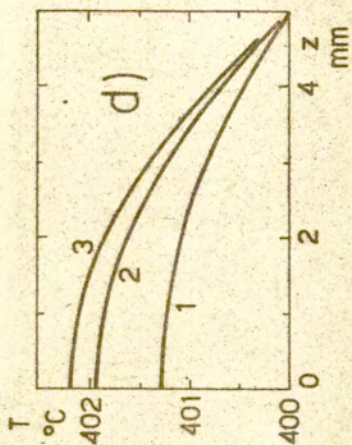
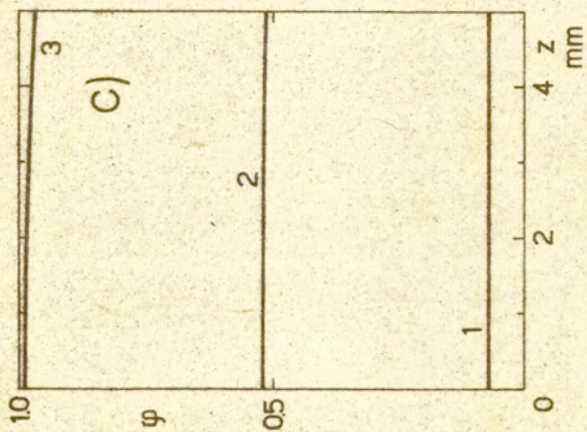
Przebieg skręcania rurki przy $\dot{\phi}_p = 10$ s⁻¹ jest odmienny (Rys.4). Prędkość odkształcenia $\dot{\phi}$ w rurce jest wtedy na ogół duża (np. w stadiach 1 i 2 zachodzi $\dot{\phi} \approx \dot{\phi}_p$ (Rys.4b)), co powoduje również na ogół dużą prędkość generacji ciepła $\sqrt{3} \tau \dot{\phi} / J$. Ostatnia, jeszcze bezpośrednio po stadium 2, jest w niewielkim stopniu kompensowana przez sumę prędkości strat ciepła $-kT_{,zz} + H(r + 0.5g)(T - T_0)/rg > 0$; tylko w pobliżu $z = L$ wyrażenie $-kT_{,zz} > 0$ odgrywa większą rolę. Zatem w znacznej, centralnej części rurki, w dość długiej, początkowej fazie skręcania, mamy zgodnie z wzorem (11)₂ dużą i bliską adiabatycznej prędkość uzyskiwania ciepła

$$c\dot{\phi} \approx \frac{\sqrt{3}}{J} \tau \dot{\phi} \quad (18)$$

która powoduje szybki wzrost temperatury w tej części rurki (Rys.4d linie 1 i 2).



Rys 3a|b|



Rys. 3c)/d)

Na początku skręcania w dowolnym punkcie rurki mamy $s(z, t) > 0$, gdyż ujemny człon v_1 nie może zrównoważyć sumy $v_2 + v_3 > 0$, której człon v_3 , przy małym φ , jest duży. Później, w miarę wzrostu T i φ człon $v_1 < 0$ maleje i w pewnym miejscu z , w chwili t , równowagę sumę $v_2 + v_3$ (z mniejszym członem v_3) co daje wartość $s(z, t) = 0$. Dalej suma $s(z, t)$ jest ujemna, gdyż człon v_1 dominuje nad pozostałymi. Zmiana funkcji $s(z, t)$ od wartości dodatnich do ujemnych oznacza, że w chwili t występują maksimum τ w punkcie z , a także, zgodnie z warunkiem równowagi - w całej rurce i jednocześnie maksimum momentu skręcającego $M(t)$, M_{\max} . Taka zmiana funkcji $s(z, t)$ jest wynikiem istnienia dużego stosunku $\dot{T}/\dot{\varphi}_{z=z}$ (do stadium 3 zachodzi $\dot{T}/\dot{\varphi}_{z=z} \approx \sqrt{3} \tau / Jc\varphi$), który dopiero przy końcu skręcania, od $\varphi_p = 0.855$, szybko maleje i nierówności $v_2 \ll v_1$ zachodzącej w z .

Należy podkreślić, że wartości $s(z, t) = 0$ towarzyszą wartości $s = 0$ w innych punktach rurki, jednak przy odmiennym udziale członów v_1 , v_2 i v_3 . W szczególności wystąpienie wartości $s(z, t) = 0$ może być w większym stopniu wynikiem członu v_2 niż v_1 .

Miejsce z odpowiedzialne za wystąpienie τ_{\max} i M_{\max} (tzw. najsłabsze miejsce rurki) nietrudno wyznaczyć. W miejscu tym, w każdej chwili $t - \varepsilon$ bezpośrednio poprzedzającej t wartość s jest mniejsza (bliższa $s = 0$) niż w pozostałych. Zatem $s(z, t - \varepsilon) < s(z, t)$ i wobec $\dot{M} \neq 0$ i związku (19) mamy $\dot{\varphi}(z, t - \varepsilon) > \dot{\varphi}(z, t)$. Czyli z jest miejscem, w którym tuż przed wystąpieniem M_{\max} prędkość odkształcenia $\dot{\varphi}$ jest największa. Wobec płaskiego maksimum funkcji $\dot{\varphi}(z, t - \varepsilon)$ najsłabszym miejscem rurki jest przekrój $s = 0$ i jego najbliższe otoczenie.

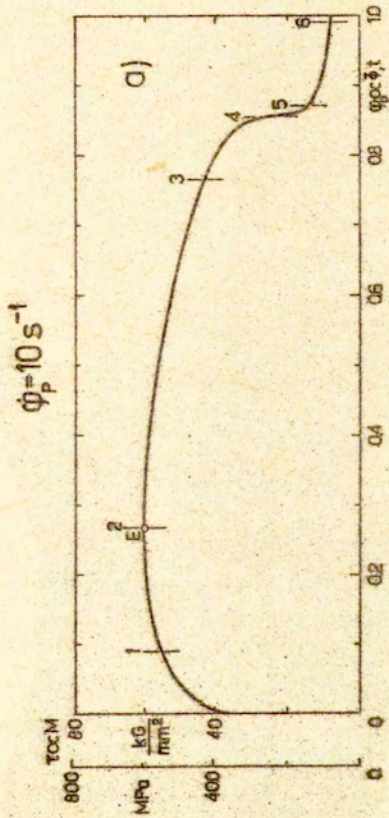
Również w miejscu z , tuż przed wystąpieniem M_{\max} wyrażenie $\dot{\tau}/\dot{\varphi} = d\tau/d\varphi$ jest najmniejsze, zatem i umocnienie $d\tau/d\varphi$ jest najmniejsze.

Rozkłady $\dot{\varphi}$ uzyskane z rozkładów T i φ (Rys. 4d i c) przy użyciu związków (13) i (14) przedstawia Rys. 4b. Początkowo, do wystąpienia M_{\max} , niejednorodność rozkładu $\dot{\varphi}$ i jej wzrost, świadczący o istnieniu koncentracji $\dot{\varphi}$ w centralnej części rurki - są niewielkie. Od wystąpienia M_{\max} wzrost niejednorodności $\dot{\varphi}$ i koncentracja $\dot{\varphi}$ są już wyraźne. Towarzyszy im zanik $\dot{\varphi}$

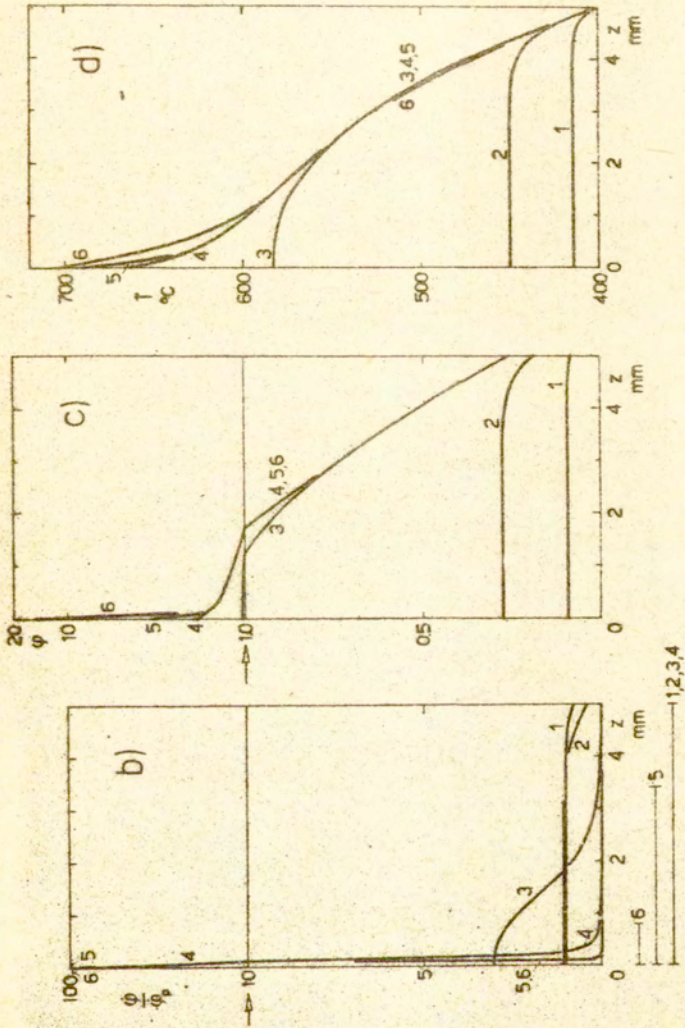
postępujący od skrajów rurki ku jej środkowi. W końcowym stadium skręcania 6, plastyczne płynięcie zachodzi już tylko na niewielkiej części długości rurki, przy czym rozkład $\dot{\phi}$ jest praktycznie podobny do igły. Przyczyną omawianych niejednorodności i koncentracji $\dot{\phi}$, do stadium 5, (przy obecności związku (14)) są coraz wyżej biegnące i zasadniczo coraz mniej jednorodne rozkłady temperatury (Rys.4d), których wpływ we wzorze (13) silnie przeważa nad wpływem coraz bardziej niejednorodnych rozkładów odkształcenia (Rys.4c). Od stadium 5 prędkość odkształcenia w przekroju $z=0$, $\dot{\phi}(0,t)$, dotychczas rosnąca - nieznacznie maleje. Mniej więcej jednocześnie $\dot{\phi}$ w przekroju $z_1 = \Delta z$, najbliższym do $z=0$, a później także w przekroju $z_2 = 2\Delta z$ - nieco rośnie (wzrost ten nie jest widoczny na Rys. 4b, linia 6).

W stadium 4, dotychczas rosnąca funkcja $\dot{T}(0,t)$ osiąga największą wartość podczas skręcania, po czym maleje, najpierw szybko, a następnie coraz wolniej. Również od stadium 4 - wskutek wcześniejszego występowania znacznych i rosnących wartości $\dot{\phi}$ na coraz węższej części długości rurki - rozkład $\dot{T}(z,t)$ jest wklęsły w otoczeniu $z=0$ (Rys.4d). Oznacza to, że w tym otoczeniu zachodzi $\dot{T} > \sqrt{3} \tau \dot{\phi} / Jc_0$ czyli - nagrzewanie materiału przy dopływie ciepła od miejsc cieplejszych. W miarę spadku $\dot{T}(0,t)$ występują nawet nierówności $\dot{T}(0,t) < \dot{T}(z_1,t)$ - krótko przed stadium 5, $\dot{T}(0,t) < \dot{T}(z_1,t) < \dot{T}(z_2,t)$ - krótko po stadium 5 itd. Ich konsekwencją jest wzrost jednorodności temperatury w otoczeniu $z=0$. Jednocześnie z nagrzewaniem się przekrojów najbliższych $z=0$ wskutek dopływu ciepła, dalsze części rurki stygną. Stygnięcie rurki postępujące od jej końców ku środkowi zaczyna się jeszcze przed stadium 3.

Szybki spadek $\dot{T}(0,t)$ od stadium 4 jest głównym powodem, że w przekroju z_1 człon $B < 1$ zbyt wolno maleje by przeważać wzrost członu $C > 1$ i wartość $A(z_1,t)$ wtedy nieco rośnie. Skutkiem tego a) dotychczas malejąca wartość całki $\int_0^z A(z,t) dz$, od stadium 5 zaczyna rosnąć, czyli zgodnie z wzorem (14) - w stadium 5 występuje maksimum $\dot{\phi}(0,t)$, i b) mniej więcej jednocześnie wzrasta $\dot{\phi}(z_1,t)$. Dalszy spadek $\dot{\phi}(0,t)$ i wzrost $\dot{\phi}(z_1,t)$ a potem i $\dot{\phi}(z_2,t)$ jest wynikiem wspomnianego wzrostu jednorodności \dot{T} w otoczeniu $z=0$, który najpierw w przekroju z_1 ,



Rys. 4a)



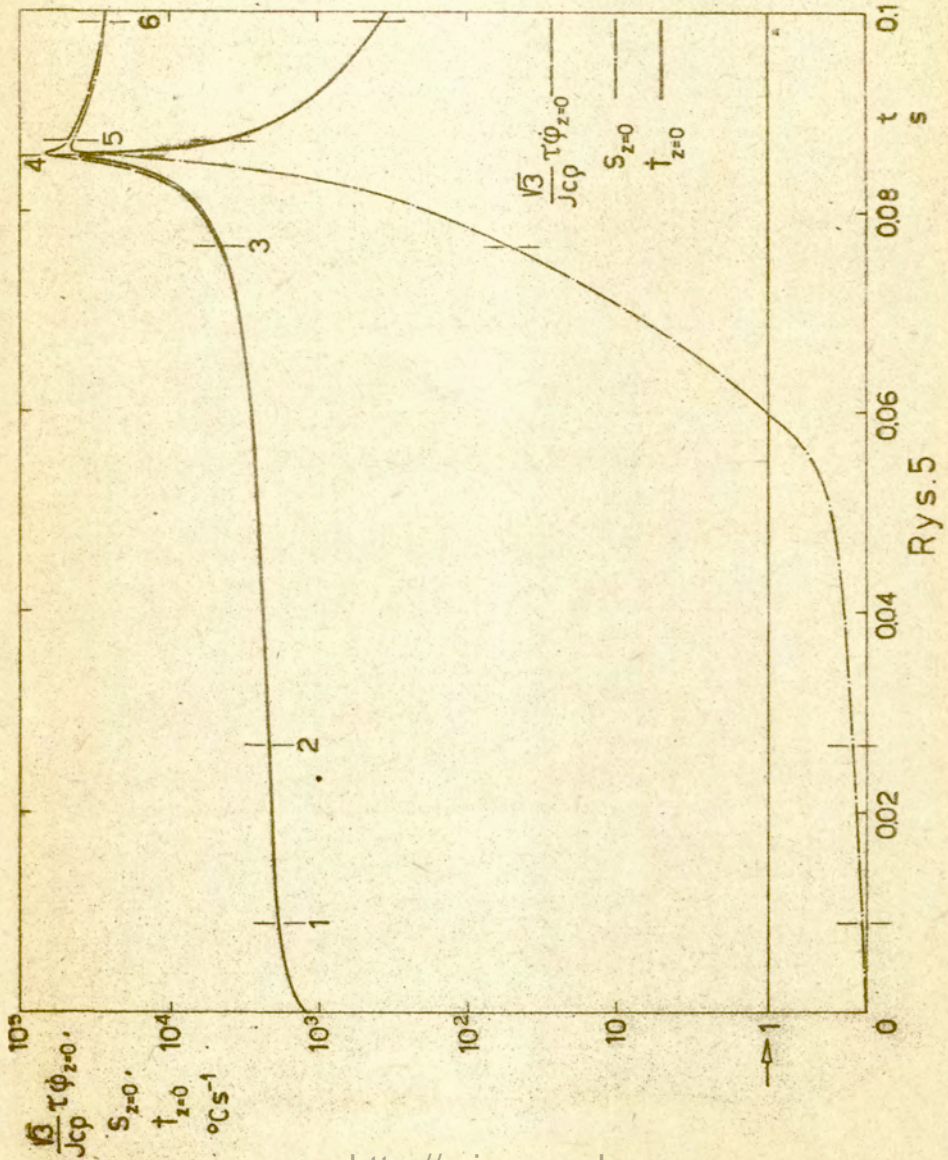
Rys. 4 b), c), d)

a potem także w z_2 powoduje mniejszy spadek członu B niż istniejący wzrost członu C.

Zwiększona koncentracja ϕ w środkowej części rurki, po wystąpieniu M_{\max} , jest wynikiem wymuszania przez malejące naprężenie τ spadku ϕ w miejscach gdzie wartości \dot{T} są obniżone względem chwilowej wartości $\dot{T}(0,t)$ (w miejscach tych także wartości ϕ są obniżone względem chwilowej wartości $\phi(0,t)$).

Wspomniana zwiększona koncentracja ϕ jest przyczyną istnienia silnie niejednorodnych odkształceń, zlokalizowanych (tj. wykazujących największe wartości) w środkowej części rurki, przy spadku M (Rys.4c).

Rys.5 przedstawia wykresy funkcji $\sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$, $\{-kT_{,zz} + [H(r+0,5g)(T-T_0)] / rg\}_{z=0/c\varrho} = S(0,t)$ i $\dot{T}(0,t)$, czyli wykresy: funkcji proporcjonalnej do prędkości generacji ciepła, funkcji proporcjonalnej do sumy prędkości strat ciepła i prędkości temperatury - w przekroju $z=0$. Funkcja $\sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$ do stadium 2 rośnie głównie wskutek wzrostu τ , przy nieznacznym wzroście $\phi(0,t)$. Później funkcja ta rośnie wskutek wzrostu $\phi(0,t)$, spowodowanego koncentracją ϕ , który przeważa nad spadkiem τ . Bezpośrednio po stadium 4 funkcja $\sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$ zaczyna maleć z powodu spadku τ przy $\phi(0,t)$ wolno rosnącym, a później - nieznacznie malejącym. Z kolei funkcja $S(0,t)$ rośnie początkowo wyłącznie wskutek strat ciepła przez konwekcję i w przybliżeniu od stadium 2, w coraz większym stopniu - wskutek wzrostu niejednorodności temperatury w otoczeniu $z=0$, powodującego zwiększenie się wyrażenia $-kT_{,zz}$. Poza stadium 3 straty ciepła przez konwekcję są już pomijalne wobec strat przez przewodnictwo. Przed stadium 5 funkcja $S(0,t)$ zaczyna maleć wskutek wspomnianego już zmniejszania się niejednorodności rozkładu T w otoczeniu $z=0$. Natomiast wykres funkcji $\dot{T}(0,t) = -S(0,t) + \sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$ początkowo niemal pokrywający się z wykresem funkcji $\sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$ (bowiem $S(0,t)$ początkowo jest nieznaczne i wolno rośnie) - w miarę wzrostu $S(0,t)$, coraz wyraźniej od niego odbiega. Gdy wzrost wielkości $S(0,t)$, spowodowany wyostreniem się rozkładu $T(z,t)$ w przekroju $z=0$, zaczyna być szybszy niż wzrost wielkości $\sqrt{3} \tau \phi(0,t) / Jc\varrho$ to funkcja $\dot{T}(0,t)$ osiąga wspomniane uprzednio maksimum (w stadium 4) i zaczyna



maleć. Od chwili tuż po stadium 4 poczynając dalszy spadek $\dot{T}(0,t)$ zachodzi przy spadku wielkości $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$ i przy $S(0,t)$ początkowo rosnącym, a potem malejącym wolniej niż $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$ (Rys.5).

Rosnące odstępstwo krzywej $\dot{T}(0,t)$ od krzywej $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$, wskutek wzrostu kompensacji wielkości $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$ przez $S(0,t)$, ilustruje fakt, że w stadium 3, $\dot{T}(0,t)$ jest równe $0.99\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$, a w stadium 6 - tylko $0.014\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$. W zakresie nieznacznej kompensacji, w przybliżeniu do stadium 3, odkształcanie w przekroju $z=0$ praktycznie jest adiabatyczne. W innych przekrojach odkształcanie prawie adiabatyczne kończy się wcześniej.

Wzrostowi i następnemu spadkowi funkcji $\dot{T}(0,t)$ zachodzącym poza M_{\max} (Rys.5) odpowiadają spadek i następny wzrost funkcji $-a\dot{T}(0,t)/[1-aT(0,t)]$ oraz (dzięki przewodze członu v_1 nad sumą v_2+v_3 we wzorze (18)) spadek i następny wzrost funkcji $\dot{\phi}(0,t)z(0,t) < 0$. Taka zmiana ostatniej, jest przyczyną początkowo coraz większego, a potem coraz mniejszego spadku krzywej $\tau(t)$ poza τ_{\max} , czyli - obecności punktu przecięcia (praktycznie w stadium 4) na Rys.4a. Zmiana \dot{t} bowiem jest zmianą funkcji $\dot{\phi}(0,t)z(0,t)$, skorygowaną przez malejące τ , zgodnie z wzorem $\dot{t} = \tau\dot{\phi}(0,t)z(0,t)$, wynikającym z zależności (18).

Krzywe uzyskane dla skręcania rurki z $\dot{\phi}_p = 10^{-1} s^{-1}$ mają przebieg podobny do tych z Rys.3, z tym, że rozkłady $\dot{\phi}/\dot{\phi}_p$ wykazują większą niejednorodność i bardziej wyraźną tendencję do koncentracji. Towarzyszy temu większa niejednorodność rozkładów ϕ . Także rozkłady T są bardziej niejednorodne. Najwyższa temperatura podczas skręcania, $T(0,t)$ przy $\dot{\phi}_p \approx 1$, wynosi wtedy ok. $427^\circ C$.

Krzywe dla $\dot{\phi}_p = 1 s^{-1}$ mają przebieg podobny do tych z Rys.4. Przy tym rozkłady $\dot{\phi}/\dot{\phi}_p$, ϕ i T , początkowo, do wystąpienia M_{\max} , są mniej jednorodne, natomiast później, przy $\dot{\phi}_p \approx 1$, - bardziej jednorodne niż dla $\dot{\phi}_p = 10 s^{-1}$. Koncentracja ϕ prowadzi wtedy tylko do znacznego zmniejszenia $\dot{\phi}$ (a nie do jego zaniku jak na Rys.4) w zewnętrznych częściach rurki. Przy $\dot{\phi}_p = 1 s^{-1}$ zakres prawie adiabatycznego odkształcania jest mniejszy; wielkość \dot{t} jest równa $0.99\sqrt{3}\tau\dot{\phi}(0,t)/JcQ$ już

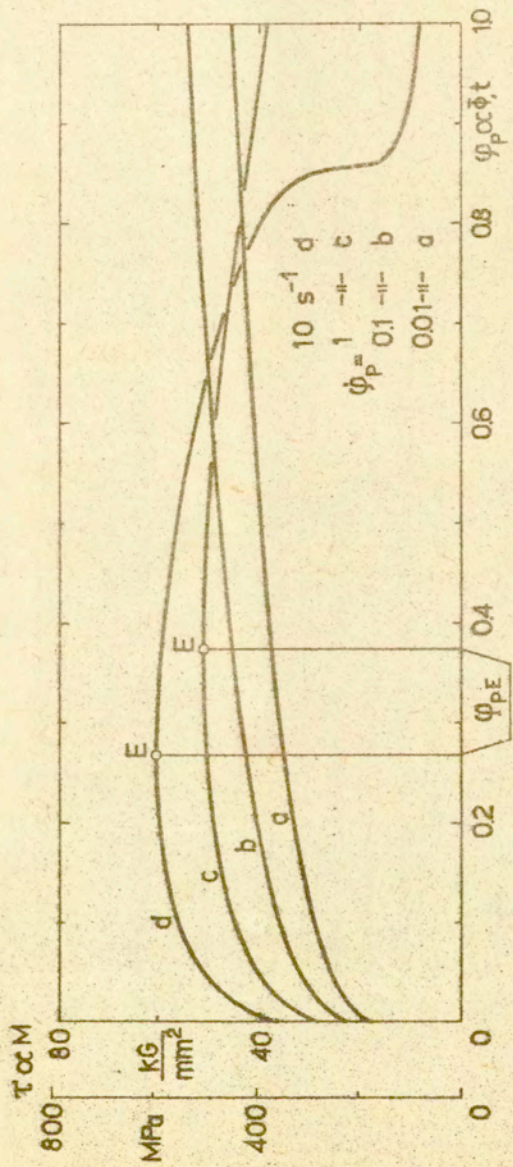
przy $\varphi_p = 0.18$. Najwyższa temperatura $T(0, t)$ przy $\varphi_p \approx 1$, wynosi wtedy 593°C .

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że przy tych samych wartościach φ_p wzrost temperatury rurki $T(z, t) - T_0$, przy coraz większych wartościach $\dot{\varphi}_p$ - jest coraz większy.

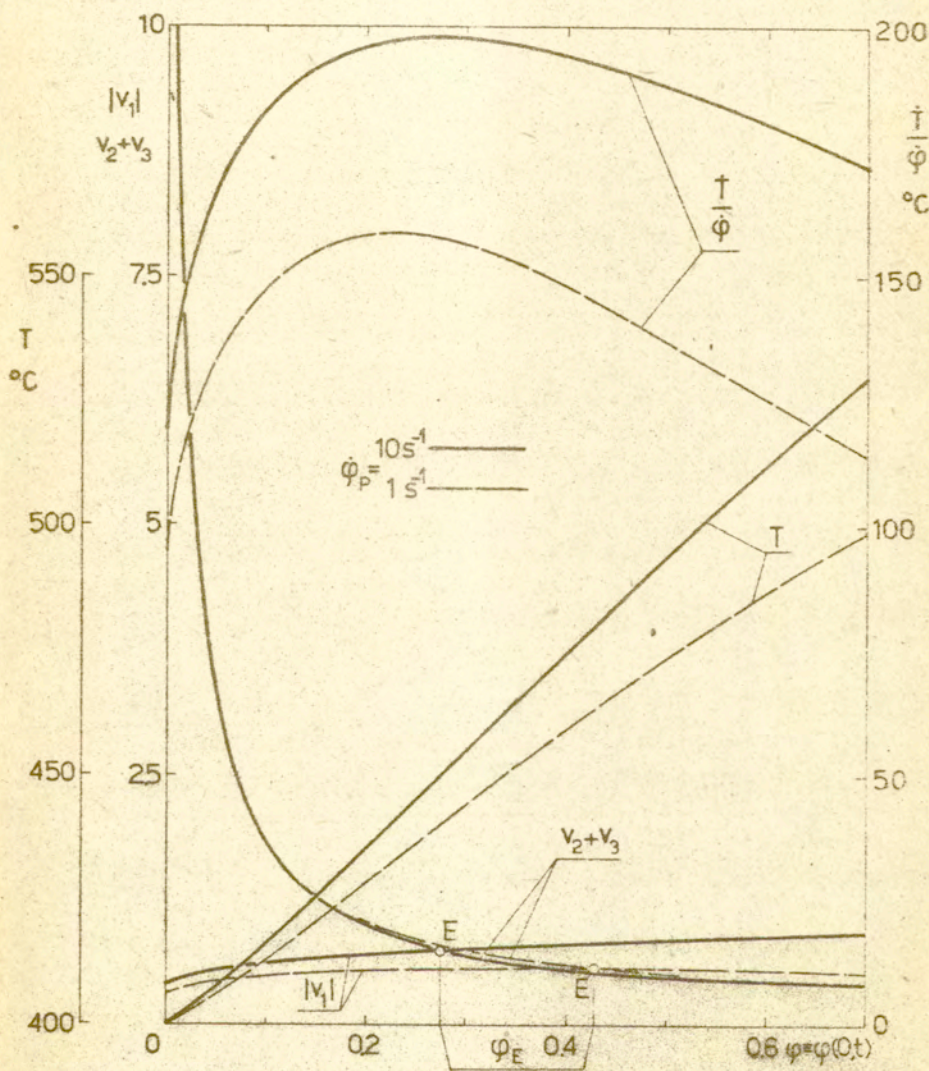
Rys.6 przedstawia porównanie zależności $\tau \propto M$ od φ_p uzyskanych z obliczeń prowadzonych przy $\dot{\varphi}_p = 10^{-2}, 10^{-1}, 1$ i 10 s^{-1} dla rurki. Jak widać, czym większa wartość $\dot{\varphi}_p$ tym wyżej, przynajmniej początkowo, biegnie krzywa $\tau - \varphi_p$. Taki przebieg krzywych można tłumaczyć obecnością większych wartości funkcji $\dot{\varphi}(0, \varphi_p)$ dla większych wartości $\dot{\varphi}_p$ - zapewniających wtedy większe wartości członu $[1 + b\dot{\varphi}(0, \varphi_p)]^m$ w związku (3) zapisanym dla $\varphi = \varphi_p$ - w warunkach niezbyt silnej jeszcze ingerencji malejącego członu $1 - aT(0, \varphi_p)$ w tym związku. Z Rys.6 widać także, że maksimum τ przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ występuje przy mniejszym odkształceniu φ_{pE} niż przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$. Jest to wynik obecności w przekroju $z=0$ wyższych wartości stosunku $\dot{T}/\dot{\varphi} = dT/d\varphi_{z=0}$ jako funkcji $\varphi = \varphi(0, t)$, lub inaczej - wynik większego wzrostu funkcji $T(\varphi)$ w $z=0$ przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ niż przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$ (Rys.7). Dzięki bowiem tym wyższym wartościom funkcji $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi)$ i związanym z nimi większym wzrostem funkcji $T(\varphi)$, człon $v_1 < 0$, odpowiadający $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ równoważy sumę $v_2 + v_3 > 0$ (słabo zależną od $\dot{\varphi}_p$) przy mniejszej wartości φ_E (Rys.7), której z kolei odpowiada mniejsza wartość φ_{pE} (przyjmujemy, że v_1, v_2 i v_3 obecnie zależą od φ).

Wyższe wartości $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi)$ są wynikiem większych wartości naprężenia $\tau(\varphi)$ i mniejszych wartości sumy prędkości strat ciepła $S(\varphi)$ przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ niż przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$ - w rozważanym zakresie φ .

Dla rozważanej rurki przeprowadzono także obliczenia numeryczne dla $\dot{\varphi}_p = 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10 \text{ s}^{-1}$ i przy założeniu, że $H=0$. Punkty uzyskane z tych obliczeń układają się na omawianych wyżej krzywych w rodzaju tych z Rys.3 i Rys.4. Wskazuje to na pomijalnie mały wpływ konwekcji swobodnej na proces skręcania rurki.



Rys.6



Rys.7

3.2. Wyniki dla tarczy

W przypadku skręcania tarczy, w każdej chwili t , naprężenie τ zależy od r , $\tau \propto r^{-2}$ (wzór 10). To powoduje, że rozkłady $\dot{\phi}$, $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$ oraz ϕ i T w każdej chwili t są wyraźnie niejednorodne. Także, wskutek przyjęcia warunków $T(r_0, t) = T(R, t) = T_0$, rozkład temperatury wykazuje maksimum T_{\max} przy pewnym promieniu $\bar{r} > r_0$. Konsekwencją tego maksimum jest istnienie w tarczy przepływu ciepła w dwóch kierunkach; od \bar{r} do R i od \bar{r} do r_0 . Podczas skręcania położenie T_{\max} zwykle przesuwają się w kierunku $r = R$ gdyż maksimum prędkości temperatury T_{\max} występuje przy pewnym promieniu \underline{r} na ogół nieco większym niż \bar{r} . Należy dodać, że chwilowa wartość \underline{r} jest określona przez związek (12)₂ i chwilowe rozkłady T i $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$.

Rys.8 przedstawia krzywe uzyskane na drodze obliczeń numerycznych dla skręcania tarczy przy $\dot{\phi}_p = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. W tym przypadku prędkość odkształcenia $\dot{\phi}$ jest niewielka. Największą jej wartość, występującą przy $r = r_0$, w stadiach 1, 2 i 3 jest rzędu $\dot{\phi}_p$ (Rys.8b). W związku z tym prędkość generacji ciepła $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$ - również największa przy $r = r_0$ i szybko malejąca ze wzrostem r - jest niewielka. Prędkość ta, w stadium 3, dla różnych wartości r , jest silnie kompensowana przez sumę prędkości strat ciepła na drodze przewodnictwa i konwekcji $c\varrho S(r, t) = -k(T_r/r + T_{rr}) + 2H(T - T_0)/g > 0$. Największa kompensacja występuje w pobliżu $r = r_0$ i przy $r = R$. Zasadniczo podobnie jest w stadiach 1 i 2 z tym, że kompensacja jest wtedy mniejsza i przy większych r , w miejscach gdzie krzywa $T(r, t)$ jest wklęsła, występuje $S(r, t) < 0$ czyli $\dot{T} > \sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$. To znaczy, że w miejscach tych wzrost temperatury zachodzi przy dopływie ciepła od bardziej nagrzanym części tarczy. We wszystkich jednak stadiach 1, 2 i 3 rząd wielkości \dot{T} wynosi odpowiednio $10^{-4} + 10^{-1}$, $10^{-3} + 10^{-2}$ i $10^{-4} + 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{Cs}^{-1}$ przy czym $\underline{r} > \bar{r}$ w stadiach 1 i 2 i $\underline{r} = \bar{r}$ w stadium 3. Podane wartości \dot{T} są przyczyną niewielkiego wzrostu temperatury (Rys.8d) i pozwalają uważać, że obecny przypadek skręcania jest bliski izotermicznemu. W omawianym przypadku człon $v_1 < 0$ dla różnych wartości r i t , odgrywa małą rolę wobec wyrażenia $v_2 + v_3 > 0$ i suma $s(r, t)$ występująca we wzorze (18) jest dodatnia. Zatem

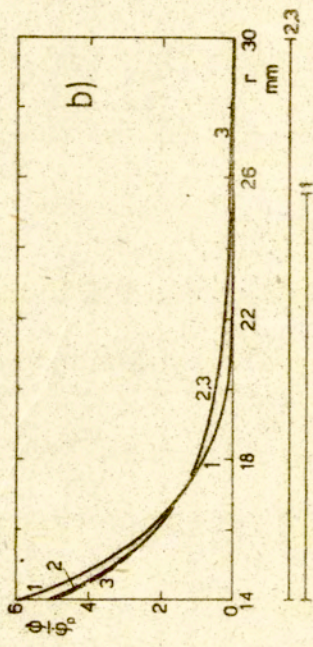
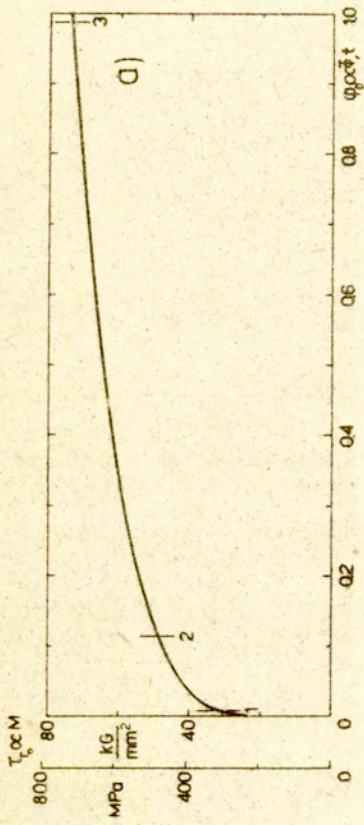
zależność $\tau_{r_0} \propto M$ od czasu t , a także od φ_p i \bar{r} - jest rosnąca (Rys.8a).

Rys.8b przedstawia rozkłady prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$. Jak widać, w stadium 1 plastyczne pівнічcie nie obejmuje jeszcze zewnętrznych części tarczy, w których wówczas $\tau < \tau_{stat}$. Również widać pewne wyrównywanie się prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ wzdłuż tarczy, zachodzące w miarę skręcania. Przy obecności związków (15) i (16) wyrównywanie $\dot{\phi}$ jest wynikiem wzrostu stosunku A (wzór (15)) dla różnych r przy wzroście t . Wzrost stosunku A jest spowodowany wzrostem członu B (dla różnych r , przy wzroście t) wynikającym z wypiętrzania się rozkładu T i, częściowo, wzrostem członu C , zachodzącym w zakresie większych wartości r . Przedział wartości r , w którym C rośnie, w miarę wzrostu \bar{r} zwęża się i krótko przed stadium 3 obejmuje tylko wartości r bliskie R .

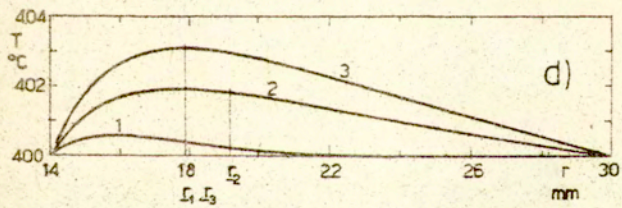
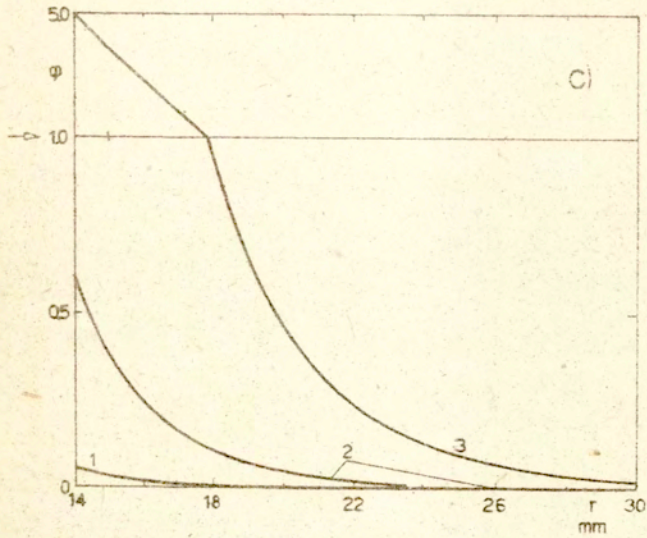
Niejednordodne rozkłady odkształcenia ϕ będące wynikiem niejednorodnych rozkładów $\dot{\phi}$ przedstawia Rys.8c.

Wyniki obliczeń numerycznych dla tarczy skręcanej z $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ przedstawia Rys.9. Przypadek ten charakteryzuje się wysokimi wartościami prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ i prędkości generacji ciepła $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$, które występują w dość wąskim obszarze wartości r , początkowo przylegającym do $r=r_0$, a później nieco odsuniętym od $r=r_0$. Na zewnątrz tego obszaru, przy r rosnącym, wartości $\dot{\phi}$ i $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$ szybko maleją. Wielkość $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$ jest dosyć słabo kompensowana przez sumę prędkości strat ciepła - lub inaczej przez wielkość $S(r,t)$. I tak na przykład, w początkowych stadiach skręcania (do stadium 2), oprócz pełnej kompensacji występującej przy $r=r_0$ i $r=R$ istnieje znaczna kompensacja przy r bliskim r_0 i niewytłumiona przy r bliskim \bar{r} . Natomiast przy $r > \bar{r}$, w obszarze wklęskiego przebiegu rozkładu $T(r,t)$, występują niewytłumione duże wartości $S(r,t) < 0$ to znaczy zachodzi tam wzrost temperatury przy dopływie ciepła od bardziej nagrzaných części tarczy.

Dzięki niedużej kompensacji wielkości $\sqrt{3}\tau\dot{\phi}/J$ podczas skręcania tarczy występuje prędkość temperatury $\dot{T}(r,t)$ o lokalnie dużych wartościach, co jest przyczyną rozkładów temperatury $T(r,t)$ wykazujących szybko rosnące i znaczne wartości T_{max} (Rys.9d).



Rys. 8a), b)



Rys.8c),d)

W początkowych stadiach skręcania w całej tarczy wielkość $s(r, t)$ jest dodatnia, bowiem człon $v_1 < 0$ nie kompensuje jeszcze sumy $v_2 + v_3 > 0$. Zależność $M(t)$ jest wtedy rosnąca. W pewnej chwili \underline{t} jednak, w najskłabszym miejscu \underline{r} , przy wartościach: $v_3(\underline{r}, \underline{t})$ - bliskiej najmniejszej, $v_2(\underline{r}, \underline{t})$ - należącej do większych i $v_1(\underline{r}, \underline{t})$ - należącej do mniejszych w tarczy zachodzi $s(\underline{r}, \underline{t}) = 0$, czemu towarzyszą wartości $s(r, \underline{t}) = 0$ dla każdego r . Później, $s(\underline{r}, t)$ przybiera ujemne, malejące wartości. Taka zmiana $s(\underline{r}, t)$ powoduje wystąpienie maksimum momentu skręcającego M_{\max} na krzywej $M(t)$ w chwili \underline{t} (Rys.9a).

Promień \underline{r} jest tym, przy którym w chwilach bezpośrednio poprzedzających \underline{t} wartości $d\tau/d\phi$ są najmniejsze natomiast wartości $\dot{\phi}$ są największe. Również w chwili \underline{t} , to znaczy przy $M = M_{\max}$, największa wartość $\dot{\phi}$ tarczy występuje przy $r = \underline{r}$, co pozwala łatwo wyznaczyć \underline{r} .

Rozkłady prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ przedstawia Rys.9b. Na samym początku skręcania rozkład $\dot{\phi}$ jest funkcją malejącą promienia r (linia 0). Przy tym $\dot{\phi}$ wykazuje spadek w pobliżu $r = r_0$ oraz wzrost przy większych r ; to znaczy, $\dot{\phi}$ wyrównuje się wzdłuż tarczy podobnie jak przy $\dot{\phi}_p = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Rys.8b). Krótco po rozpoczęciu skręcania, przy $r \approx r_0$, zaczyna się tworzyć pewne maksimum $\dot{\phi}$, $\dot{\phi}_{\max}$, które przesuwa się w kierunku $r = R$ przy czym maksimum to, początkowo nieznaczące i obniżające się, stopniowo staje się coraz wyraźniejsze i rosnące. W przybliżeniu od stadium 1 rozwijającemu się $\dot{\phi}_{\max}$ towarzyszy już spadek $\dot{\phi}$ po obu jego stronach, czyli koncentracja $\dot{\phi}$, z tym, że do wystąpienia M_{\max} (w stadium 2) w zewnętrznych, posiadających największy promień r , częściach tarczy, $\dot{\phi}$ jeszcze rośnie. Od wystąpienia M_{\max} prędkość odkształcenia $\dot{\phi}$ w zewnętrznych częściach tarczy stopniowo zanika, natomiast koncentracja $\dot{\phi}$ w tarczy jest wyraźnie większa. Prowadzi ona do rozkładu $\dot{\phi}$ podobnego do igły o szerokiej podstawie (linia 4).

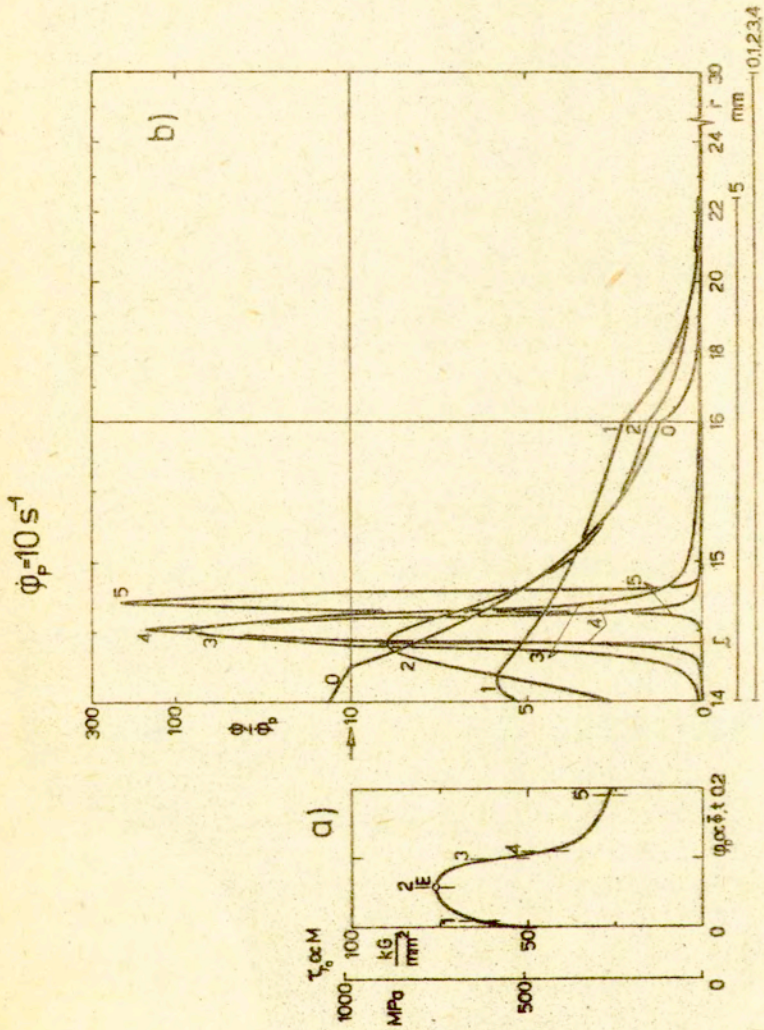
Przy obecności związków (15) i (16) występowanie przesuwanego się $\dot{\phi}_{\max}$, początkowo niewielkiego i opadającego, a później rosnącego, jak również istnienie koncentracji $\dot{\phi}$ - są wynikiem wystąpienia coraz wyżej biegnących krzywych stosunku $A(r, t) = 1 + b\dot{\phi}(r, t) / [1 + b\dot{\phi}(r_0, t)]$ posiadających rosnące

i przesuwające się maksimum, przy rosnącym parametrze t . Krzywe te, w zakresie małych r , są wynikiem przewagi w związku (15) wpływu rozkładów temperatury $T(r, t)$ - wykazujących wypiętrzanie się i przesuwanie się maksimum \dot{T}_{\max} (Rys. 9d) - nad wpływem rozkładów $\phi(r, t)$ (Rys. 9c). W zakresie większych r , $r > 15 \div 17$ mm, na podnoszenie się krzywych $A(r, t)$ wywierają decydujący wpływ rozkłady $\phi(r, t)$. Należy dodać, że każda z krzywych $A(r, t)$ jest praktycznie geometrycznie podobna do odpowiedniej krzywej z tych, które przedstawione są na Rys. 9b.

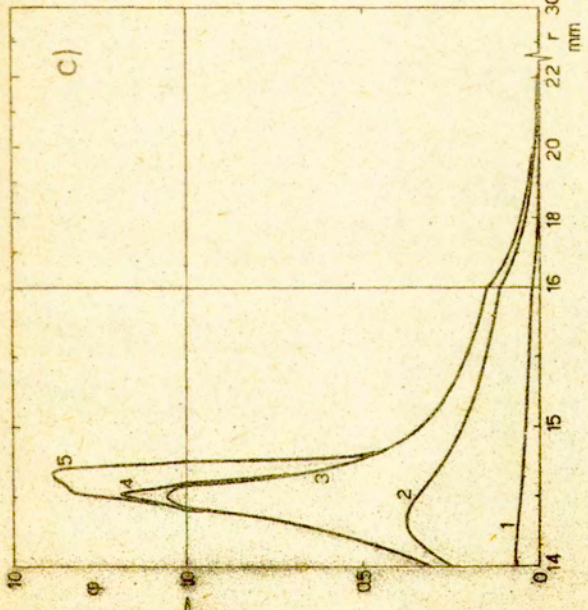
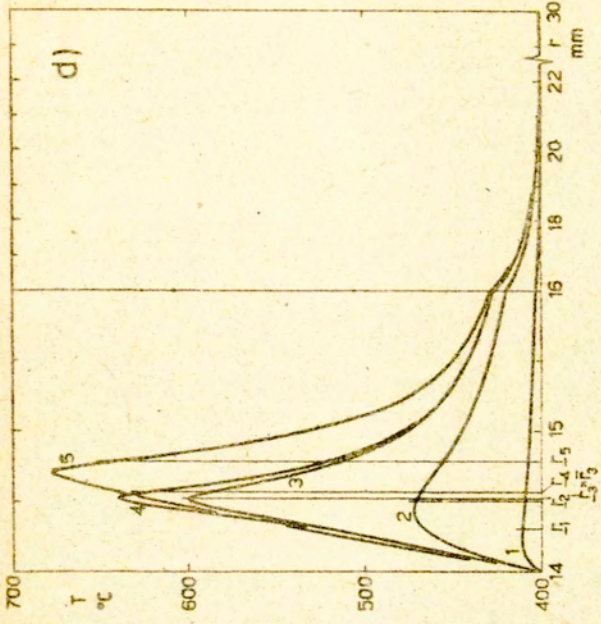
Oznaczmy przez $r_{3,4}$ promień, przy którym w stadiach 3 i 4 występuje $\dot{\phi}_{\max}$. Podczas koncentracji $\dot{\phi}$ prędkość temperatury w tym punkcie $\dot{T}(r_{3,4}, t)$ początkowo rośnie dzięki szybszemu wzrostowi wielkości $\sqrt{3} \tau(r_{3,4}, t) \dot{\phi}(r_{3,4}, t) / JcQ$ niż wielkość $S(r_{3,4}, t)$ (dalej, te ostatnie dwie wielkości będą pisane bez argumentów $r_{3,4}$ i t). Później jednak, dzięki coraz szybszemu wzrostowi S , spowodowanemu przez wyostanie się profilu temperatury, gdy prędkość wzrostu S zrównuje się z prędkością wzrostu wielkości $\sqrt{3} \tau \dot{\phi} / JcQ$, funkcja $\dot{T}(r_{3,4}, t)$ osiąga największą wartość podczas skręcania \dot{T}_{\max} (w stadium 3) i następnie spada. Od chwili, która nieco poprzedza stadium 4, $\dot{T}(r_{3,4}, t)$ spada przy wielkości $\sqrt{3} \tau \dot{\phi} / JcQ$ już malejącej, a od stadium 4 zaś - przy szybszym spadku $\sqrt{3} \tau \dot{\phi} / JcQ$ niż spadek S , co prowadzi ostatecznie do $\dot{T}(r_{3,4}, t) < 0$ czyli do stygnięcia w punkcie $r_{3,4}$.

Spadek $\dot{T}(r_{3,4}, t)$ zachodzący od stadium 3 powoduje, że w iloczynie $1 + b\dot{\phi}(r_{3,4}, t) = A(r_{3,4}, t) [1 + b\dot{\phi}(r_0, t)]$ wynikającym ze wzoru (15), wzrost stosunku $A(r_{3,4}, t)$ w pewnej chwili t (w stadium 4) staje się niewystarczający by dłużej przeważać nad spadkiem członu $1 + b\dot{\phi}(r_0, t)$. Skutkiem tego w stadium 4 prędkość odkształcenia $\dot{\phi}(r_{3,4}, t)$ osiąga maksimum i dalej maleje.

Przebieg odkształcania po stadium 4 jest ściśle związany z występowaniem największych chwilowych wartości $\dot{T}(r, t)$ dla wartości r nieco większych niż \bar{r} . I tak od stadium 4, niezbyt szybki wzrost $T(r, t)$ występujący dla $r < r_{3,4}$ i dla r wyraźnie większych od $r_{3,4}$ zapewnia niewystarczający już



Rys. 9a), b)



Rys.9c),d)

wzrost $A(r, t)$ tak, że $\dot{\phi}(r, t)$ dla tych r spada. Natomiast najszybszy wzrost $T(r, t)$, występujący w zakresie r nieco większych od $r_{3,4}$, prowadzi do stopniowego wypiętrzania się nowego T_{\max} przy najbliższym większym promieniu $r_{3,4} + \Delta r$. Ponadto powoduje on wzrost $A(r, t)$, zapewniający wzrost $\dot{\phi}(r, t)$ dla r nieco większych od $r_{3,4}$ i wypiętrzanie się nowego $\dot{\phi}_{\max}$ przy $r_{3,4} + \Delta r$. To nowe $\dot{\phi}_{\max}$ (wobec spadku w czasie wielkości $\dot{T}(r_{3,4} + \Delta r, t)$, spowodowanego wypiętrzaniem się nowego T_{\max}) rośnie do chwili, w której wzrost stosunku $A(r_{3,4} + \Delta r, t)$ przestanie przeważać nad spadkiem członu $1 + b\dot{\phi}(r_0, t)$. Później, podobnie jak bezpośrednio po stadium 4, $\dot{\phi}(r, t)$ maleje dla $r \leq r_{3,4} + \Delta r$ i dla r wyraźnie większych od $r_{3,4} + \Delta r$, natomiast $\dot{\phi}(r, t)$ rośnie, a $T(r, t)$ rośnie najszybciej - w zakresie r nieco większych od $r_{3,4} + \Delta r$ - przy jednoczesnym stopniowym wypiętrzaniu się nowych T_{\max} i $\dot{\phi}_{\max}$ w $r = r_{3,4} + 2\Delta r$ itd. Ostatecznie więc, od stadium 4 ma miejsce pewnego rodzaju przesuwanie się profilu $\dot{\phi}(r, t)$ w kierunku $r = R$, prowadzące do linii 5 (Rys. 9b). Towarzyszy mu i jest jego przyczyną pewnego rodzaju wypiętrzanie i przesuwanie się profilu $T(r, t)$ w kierunku $r = R$, prowadzące do linii 5 na Rys. 9d.

Krótko po stadium 4, przy $r \approx r_{3,4}$ występuje $\dot{T} < 0$ czyli lokalne stygnięcie tarczy. Przy dalszym odkształcaniu strefa stygnięcia rozszerza się i jeszcze przed stadium 5 obejmuje całą lewą stronę profilu temperatury, powodując jej obniżanie się.

Omawiane przesuwanie się profilu $\dot{\phi}(r, t)$ jest przyczyną stałego rozszerzania się strefy największych odkształceń, występującego po stadium 4 (porównaj linie 4 i 5 na Rys. 9c).

Zasadniczą przyczyną występowania największych wartości \dot{T} dla r nieco większych niż \bar{r} jest obecność zmniejszonych wartości $S(r, t)$ przy tych r , wynikająca z mniejszej wypukłości rozkładu $T(r, t)$ bezpośrednio poza T_{\max} niż przed T_{\max} . Taką niesymetrię rozkładu $T(r, t)$ jest konsekwencją zmienności naprężenia τ wzdłuż r i przyjętych warunków brzegowych i początkowych.

Należy dodać, że moment M , malejący od stadium 2, poprzez spadek τ w każdym punkcie tarczy, powoduje spadek $\dot{\phi}$ w miejscach, gdzie chwilowe wartości \dot{T} są zmniejszone

(w stosunku do chwilowego \dot{T}_{\max}), gdzie również chwilowe wartości $\dot{\phi}$ są zmniejszone. Ta okoliczność jest przyczyną bardziej wyraźnej koncentracji $\dot{\phi}$ po wystąpieniu M_{\max} , a także stopniowego zaniku $\dot{\phi}$ w zewnętrznych częściach tarczy po stadium 4 (np. w stadium 5 znaczna, zewnętrzna część tarczy jest już sztywna (Rys.9b)).

Wzrost i następny spadek prędkości temperatury $\dot{T}(r_{3,4}, t)$, zachodzący po wystąpieniu M_{\max} , powodują podobną zmianę w czasie wyrażenia $a\dot{T}/(1-a\dot{T})$ w $r = r_{3,4}$, która dzięki przewodze członu $-a\dot{T}/(1-a\dot{T})$ nad sumą $mb\dot{\phi}/(1+b\dot{\phi}) + n\dot{\phi}/(\phi_0 + \phi)$ w $r_{3,4}$ (patrz wzór 18) jest przyczyną, początkowo rosnącego, a potem malejącego spadku τ_{r_0} poza maksimum τ_{r_0} , czyli istnienia punktu przegięcia (stadium 3) na Rys.9a.

Krzywe uzyskane dla skręcania tarczy z $\dot{\phi}_p = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ mają przebieg podobny do tych z Rys.8, z tym, że rozkłady prędkości odkształcenia wykazują bardziej wyraźne wyrównywanie się $\dot{\phi}$ wzdłuż tarczy podczas skręcania, natomiast rozkłady $T(r, t)$ osiągają maksima wyższe i bardziej wyraźnie przesunięte względem siebie. Największa temperatura, która występuje przy $\dot{\phi}_p \approx 1.0$ dla $r = 18 \text{ mm}$ wynosi ok. 437°C .

Krzywe dla skręcania tarczy z $\dot{\phi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$ mają przebieg podobny do krzywych z Rys.9 z tym, że a) maksimum na krzywej zależności τ_{r_0} od $\dot{\phi}_p$ jest mniej wypiętrzone i b) maksima rozkładów $\dot{\phi}(r, t)$ i $T(r, t)$ przy $\dot{\phi}_p \approx 1.0$ są bardziej przesunięte w kierunku $r = R$ względem maksimów tych rozkładów przy M_{\max} - niż przy $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$. Największa temperatura, która występuje przy $\dot{\phi}_p \approx 1.0$ dla $r = 17.25 \text{ mm}$ wynosi ok. 628°C .

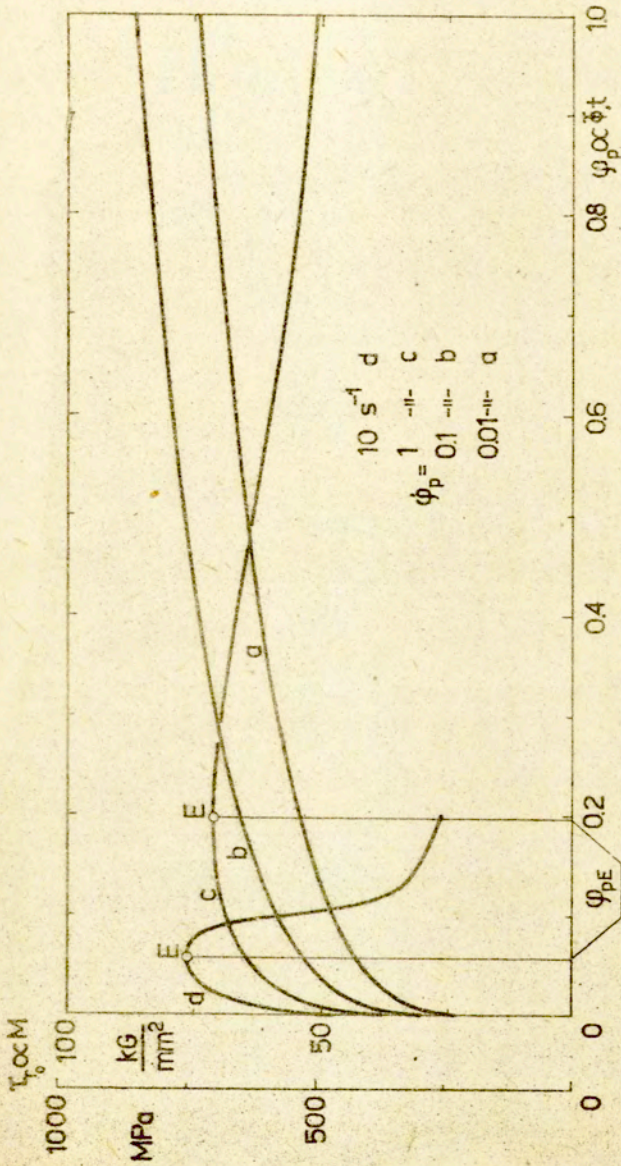
Rys.10 przedstawia wykresy zależności τ_{r_0} od $\dot{\phi}_p$ dla tarczy, uzyskane z obliczeń numerycznych, prowadzonych dla różnych wartości $\dot{\phi}_p = \text{const}$. Coraz wyższy, przynajmniej dla początkowych $\dot{\phi}_p$, przebieg krzywych a, b, c, d można tłumaczyć większymi (w przybliżeniu stałymi lub wzrastającymi dla początkowych $\dot{\phi}_p$) wartościami $\dot{\phi}(r, \dot{\phi}_p)$ dla większych $\dot{\phi}_p$, przy wybranych r ($r = r_{3,4}$ dla $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ i $r = 16$ dla pozostałych $\dot{\phi}_p$). Poprzez większe wartości $[1 + b\dot{\phi}(r, \dot{\phi}_p)]^m$ w związku (3) zapisanym dla $\phi = \dot{\phi}_p$, przy niezbyt dużej jeszcze roli malejącego członu $1 - a\dot{T}(r, \dot{\phi}_p)$, powodują one wyższy lub początkowo wyższy bieg krzywych $\tau_{r_0}(\dot{\phi}_p) = 2\mu g(r/r_0)^2 \tau(r, \dot{\phi}_p)$, przy większych $\dot{\phi}_p$.

Wykresy zależności $|v_1|$, $v_2 + v_3$ i $\dot{T}/\dot{\varphi}$ - od odkształcenia φ w najbliższym miejscu tarczy $r = \underline{r}$, $\varphi = \varphi(\underline{r}, t)$, przebiegają podobnie jak odpowiednie krzywe dla rurki pokazane na Rys.7. Tak więc, dla tarczy przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ krzywa $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi) = dT/d\varphi(\varphi)$ i wynikająca z niej krzywa $|v_1(\varphi)|$ przebiegają wyżej niż te dla $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$. Przy tym, podobnie jak dla rurki, wyżej przebiegająca krzywa $|v_1(\varphi)|$ przecina krzywą $v_2(\varphi) + v_3(\varphi)$ dla $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ (w punkcie przecięcia jest spełniony warunek $s(\varphi) = v_1 + v_2 + v_3 = 0$ wystąpienia τ_{\max} i M_{\max}) przy mniejszym odkształceniu $\varphi = \varphi_E$ niż dla $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$. Temu mniejszemu odkształceniu φ_E odpowiada również mniejsza wartość φ_{pE} przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ niż ta przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$. Inaczej mówiąc, bardziej stromy bieg krzywej $T(\varphi)$ w przekroju $r = \underline{r}$ przy większej wartości $\dot{\varphi}_p$, jest przyczyną mniejszej wartości φ_{pE} na Rys.10. Należy dodać, że promień \underline{r} przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ jest różny (nieco mniejszy) niż \underline{r} przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$, a krzywa $v_2(\varphi) + v_3(\varphi)$ dla $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ bliska tej dla $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$.

Wspomniane wyżej większe wartości funkcji $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi)$ przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$, które w $r = \underline{r}$ istnieją przynajmniej do $\varphi = 0.8$, są zasadniczo wynikiem większych wartości $\tau(\varphi)$ przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ niż przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$.

Dla tarczy wykonano także obliczenia numeryczne przy założeniu, że $H = 0$ dla $\dot{\varphi}_p = 10^{-2}$ i 10 s^{-1} . Punkty uzyskane z tych obliczeń z dużą dokładnością układają się na odpowiednich krzywych uzyskanych przy założeniu, że $H \neq 0$. Wskazuje to na pomijalny wpływ konwekcji swobodnej na proces skręcania tarczy.

W tarczy, przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$, istnieje strefa, w której $\dot{T} \approx \sqrt{3} \tau \dot{\varphi} / Jc\varrho$ tj. strefa prawie adiabatycznego odkształcania. I tak np., strefa z $\dot{T} \approx (0.99 \div 1.01) \cdot \sqrt{3} \tau \dot{\varphi} / Jc\varrho$ początkowo występuje na prawie całej szerokości $R - r_0$ tarczy, z wyjątkiem części $r \approx r_0$ i $r = R$. Następnie strefa zwęża się w kierunku $r = R$ - np. w stadium 1 (Rys.9) istnieje ona dla $R > r > 14.35$ - i zanika przed stadium 2. Omawiana strefa jest zasadniczo wynikiem obecności na rozkładzie temperatury części nieznacznie wklęsłej, której szerokość zanika w miarę skręcania.



Rys.10

4. Porównanie wyników dla rurki i tarczy oraz uwagi końcowe

Rys. 11 przedstawia porównanie krzywych uzyskanych dla skręcania rurki z krzywymi dla skręcania tarczy przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$. Przy tym krzywe dla tarczy na Rys. 11b, c, d, dotyczą tylko najważniejszego zakresu niedużych wartości r . Rysunek ilustruje istnienie w przypadku tarczy: a) bardziej niejednorodnych rozkładów φ , $\dot{\varphi}$ i T , b) przesuwu strefy skoncentrowanych, tj. największych wartości $\dot{\varphi}$ w kierunku $r = R$, c) bardziej wyraźnej koncentracji $\dot{\varphi}$ przed wystąpieniem M_{\max} . Mniejsza wartość odkształcenia φ_{pE} w przypadku tarczy, widoczna na Rys. 11a, jest zasadniczo wynikiem istnienia większej prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}$ w przekroju $r = \underline{r}$ tarczy do wystąpienia $M = M_{\max}$ niż jednoczesna prędkość odkształcenia $\dot{\varphi}$ w przekroju $z = 0$ rurki. Ta większa bowiem prędkość odkształcenia $\dot{\varphi}$, poprzez szybszy wzrost φ powoduje szybszy spadek członu $v_3(\underline{r}, t)$ i wcześniejsze wystąpienie warunku $s(\underline{r}, t) = v_1 + v_2 + v_3 = 0$ w przypadku tarczy, niż warunku $s(0, t) = v_1 + v_2 + v_3 = 0$ w przypadku rurki. Wpływ samej sumy $v_1(\underline{r}, t) + v_2(\underline{r}, t)$ na wcześniejsze wystąpienie warunku $s(r, t) = 0$ jest drugorzędny.

Omawiane mniejsze odkształcenie φ_{pE} oznacza, że moment M_{\max} i następująca po nim faza intensywnej koncentracji plastycznego płynięcia występują wcześniej w przypadku tarczy niż rurki.

Przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ przebiegi funkcji $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi)$ i $|v_1(\varphi)|$ w przekroju $r = \underline{r}$ tarczy do $\varphi \approx 0.4$ są niezbyt odległe od analogicznych funkcji w przekroju $z = 0$ rurki (Rys. 12). W przypadku tarczy jednak funkcja $\dot{\varphi}(\varphi)$ odgrywa znacznie większą rolę niż w rurce powodując, że malejąca funkcja $v_2(\varphi) + v_3(\varphi)$ dla tarczy przybiera wyższe wartości niż ta funkcja dla rurki. Prowadzi to do przecięcia się krzywych $|v_1(\varphi)|$ i $v_2(\varphi) + v_3(\varphi)$ dla tarczy przy większym odkształceniu $\varphi = \varphi_E$ niż dla rurki (Rys. 12). Większa wartość odkształcenia φ_E dla tarczy (czyli odkształcenia φ w $r = \underline{r}$ w stadium 2) niż φ_E dla rurki (czyli odkształcenia φ w $z = 0$ w stadium 2) jest widoczna także na Rys. 11c.

Większa wartość φ_E dla tarczy, przy wspomnianych wyżej, porównywalnych wartościach funkcji $\dot{T}/\dot{\varphi}(\varphi)$ w $r = \underline{r}$ i $z = 0$

- które prowadzą do zbliżonych, rosnących krzywych $T(\varphi)$ w tych przekrojach - jest przyczyną wyższej temperatury T_E dla tarczy niż dla rurki (Rys. 12 i Rys. 11d).

W skręcanej rurce przy $\dot{\varphi}_p = 1$ i 10 s^{-1} i w tarczy przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$, występują strefy prawie adiabatycznego odkształcania. W rurce np., strefa, w której \dot{T} różni się od $\sqrt{3} \tau \dot{\varphi} / J c \rho$ do 1 %, początkowo obejmuje prawie całą jej długość (z wyjątkiem $z \approx \pm L$), następnie zwęża się w kierunku $z = 0$ i zanika przed wystąpieniem M_{\max} - przy $\dot{\varphi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$ i poza M_{\max} przy $\dot{\varphi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$. W tarczy strefa taka początkowo obejmuje prawie całą jej szerokość (z wyjątkiem $r \approx r_0$ i $r = R$), następnie zwęża się w kierunku $r = R$ i zanika przed wystąpieniem M_{\max} . Obecność stref jest wynikiem istnienia na rozkładach temperatury części prawie jednorodnej, w przypadku rurki i części zasadniczo nieznacznie wklęsłej, w przypadku tarczy, - których szerokość zanika w miarę skręcania.

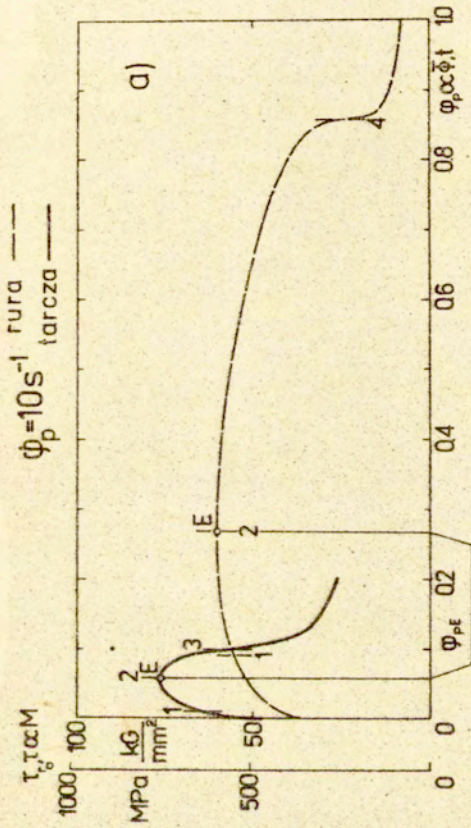
Rozważmy teraz wpływ wymiarów rurki na proces jej skręcania. W tym celu w układzie równań (11)₁₋₃ zamienimy zmienną z , przez zmienną bezwymiarową $\xi = z/L$. Przy tym, wobec danych wskazujących na pomijalny wpływ konwekcji swobodnej na skręcanie rozważanej rurki (punkt 3.1), przyjmijmy $H = 0$. Z równań (11)₂ i (11)₃ uzyskujemy

$$c \rho \dot{T} = \frac{k}{L^2} T_{,\xi\xi} + \frac{\sqrt{3}}{J} \tau \dot{\varphi} \quad (19)_2$$

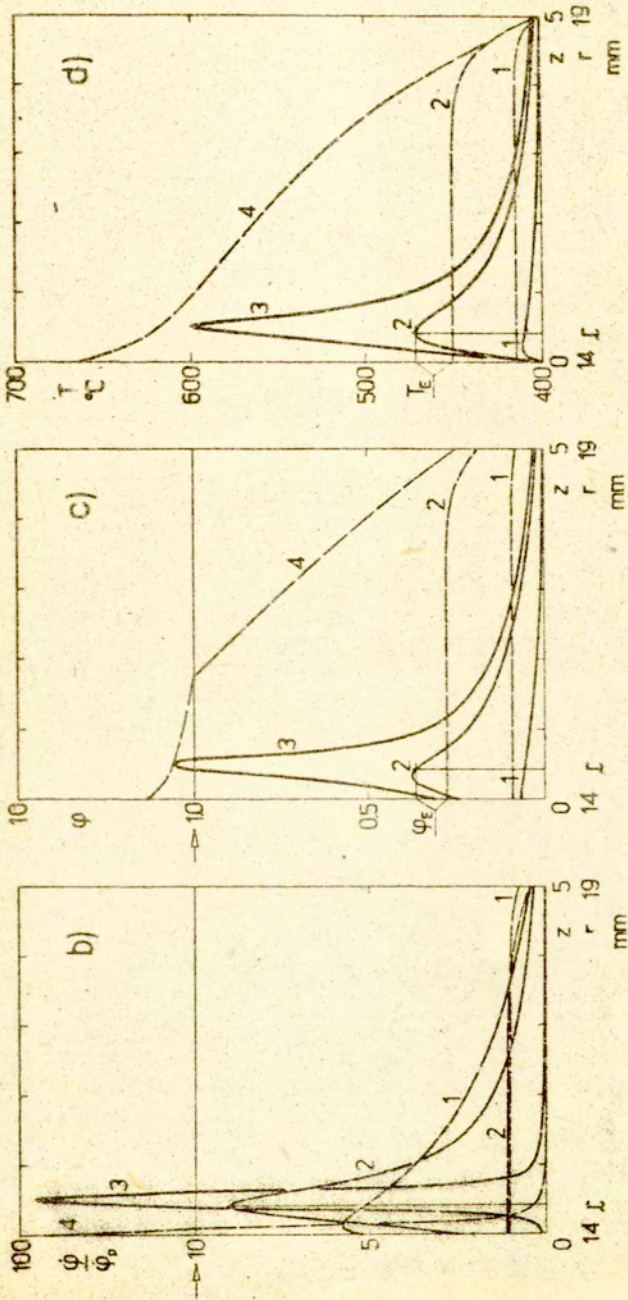
$$\dot{\varphi}_p = \int_0^1 \dot{\varphi} d\xi \quad (19)_3$$

natomiast równanie (11)₁ pozostaje bez zmian jako (19)₁. Warunki początkowe i brzegowe są odpowiednio $T(\xi, 0) = T_0$, $\varphi(\xi, 0) = 0$ i $T(-1, t) = T_0$, $T(1, t) = T_0$. Spośród równań (19)₁₋₃ tylko (19)₃ nie zawiera wymiaru rurki.

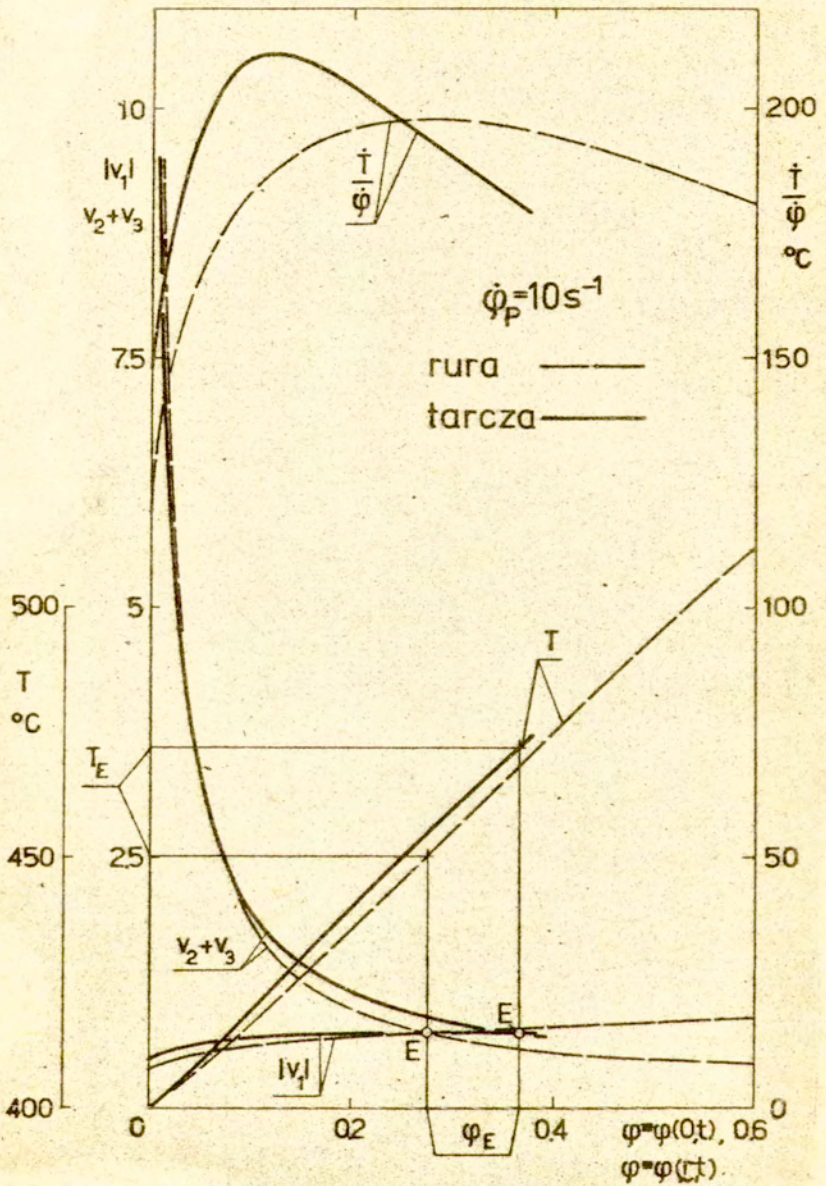
Ze związku (19)₁ = (11)₁ wynika tylko, że wymiary g i r wpływają na $M(t)$. Samo bowiem naprężenie τ w dowolnym miejscu



Rys.11a)



Rys.11b),c),d)



Rys.12

rukki (tj. lewa strona równania $(11)_1$) nie zależy bezpośrednio od jej wymiarów. Natomiast z równania $(19)_2$ wynika, że w przypadku dłuższej rurki współczynnik przy $T_{,rr}$ jest mniejszy (równy k/L_1^2 gdzie $L_1 > L$), co prowadzi do nowego rozwiązania układu $(19)_{1-3}$. Ponieważ zmniejszenie tego współczynnika oznacza zmniejszenie roli przepływu ciepła podczas odkształcania - nowe rozwiązanie układu $(19)_{1-3}$ czy $(11)_{1-3}$ będzie bliższe rozwiązaniu dla skręcania adiabatycznego niż rozwiązanie dla wymiaru L . W przypadku rurki krótszej, tj. dla $L_2 < L$ rozwiązanie układu $(19)_{1-3}$ będzie bliższe rozwiązaniu dla skręcania izotermicznego.

Podobne rozważania i wnioski dotyczą procesu skręcania tarczy. Głównym źródłem zależności tego procesu od wymiarów tarczy jest równanie $(12)_2$, w którym występuje suma $T_{,r}/r + T_{,rr}$ zależna od R ; $T_{,r}/r + T_{,rr} = (T_{,q}/q + T_{,qq})/R^2$ gdzie $q = r/R$ jest zmienną bezwymiarową.

Odmienne wyniki numeryczne dla skręcania rurek o różnych długościach, podane już przez Wadę i innych [15] wydają się być wynikiem korzystania z jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego zawierającego człon $T_{,xx}$ zależny od L .

Z obliczeń numerycznych omawianych w punkcie 3 wynika m.in., że przy tym samym odkształceniu ϕ_p wzrost temperatury rurki $T(z,t) - T_0$ - nieznaczny przy małej średniej prędkości odkształcenia $\dot{\phi}_p = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ - powiększa się gdy wartość $\dot{\phi}_p$ rośnie. Na istnienie takiej prawidłowości wskazują np. wyniki prób skręcania rurek z mosiądzu 35% Zn i stali 0.15% C przy różnych prędkościach odkształcenia [9]. Uzyskane także z tych prób krzywe umocnienia, w przypadku stali, przebiegają zasadniczo podobnie jak linie a, b i c na Rys. 6. Natomiast uzyskane numerycznie w punkcie 3.1: a) rosnąca krzywa $\tau - \phi_p$ i obecność w przybliżeniu jednorodnego odkształcenia wzdłuż rurki, przy powolnym skręcaniu oraz b) początkowo rosnąca, a potem malejąca krzywa $\tau - \phi_p$ i obecność w zakresie $d\tau < 0$ - wyraźnie bardziej niejednorodnego odkształcenia wzdłuż rurki (zlokalizowanego w jej centralnej części), przy szybkim skręcaniu - zaobserwowano dla stali 1018 CRS [21] i miedzi OFHC [17]. Także obecność bardziej niejednorodnego (zlokalizowanego)

ścianaającego odkształcenia w dynamicznie skręconych rurkach, niż odkształcenie w statycznie skręconych rurkach - stwierdzono w przypadku miękkiej stali, aluminium 6061-T6 i tytanu ATL-55 [23]. Z kolei krzywe naprężenie ścinające - odkształcenie ścinające, które przy coraz większych prędkościach odkształcenia przebiegają zasadniczo podobnie jak linie a, b, c i d na Rys.6, stwierdzono przy skręcaniu rurek ze stali AMS 6418 [24], miedzi OFHC [17] oraz mosiądzu 30% Zn i żelaza IP Armco [13].

Próby skręcania tarczy, jak się wydaje, prowadzono do-tychczas tylko przy małych prędkościach skręcania. Wyniki tego rodzaju prób dla miedzi [18], a także dla miedzi, mosiądzu, aluminium i stali [25] wskazują, że największe odkształcenie ścinające w tarczy istnieje przy jej wewnętrznym promieniu r_0 i zanika ze wzrostem r - co jest jakościowo zgodne z krzywymi 1, 2 i 3 na Rys.8c.

Tak więc uzyskane wyniki numeryczne w szeregu przypadków wykazują jakościową zgodność z wynikami doświadczalnymi.

5. WNIOSKI

W rozważanych procesach skręcania (dla wybranych wymiarów g, r, L rurki i g, r_0, R tarczy), przy wartości średniej prędkości odkształcenia $\dot{\phi}_p = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ występują nieznaczne przyrosty temperatury $T(z, t) - T_0$ rurki i $T(r, t) - T_0$ tarczy, tzn. procesy te są prawie izotermiczne. Przy rosnących wartościach $\dot{\phi}_p$ maksymalne przyrosty temperatury (dla tych samych wartości średniego odkształcenia ϕ_p) - rosną. Przy $\dot{\phi}_p = 1$ i 10 s^{-1} w rurce i przy $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ w tarczy występują obszary prawie adiabatycznego odkształcania, przez pewien okres czasu po rozpoczęciu skręcania.

Przy $\dot{\phi}_p = 10^{-2}$ i 10^{-1} s^{-1} momenty skręcające M rurki i tarczy rosną ze wzrostem ϕ_p . Przy tym, w rurce występuje tendencja do koncentracji $\dot{\phi}$, która powoduje niewielkie odstępstwa od jednorodności odkształcenia wzdłuż rurki. Przy

$\dot{\phi}_p = 1$ i 10 s^{-1} momenty skręcające rurki i tarczy początkowo rosną, osiągają maksimum i potem maleją. Występująca wtedy w rurce i w tarczy koncentracja $\dot{\phi}$ w stadium $dM < 0$ staje się wyraźnie większa i prowadzi do skupienia prawie całego plastycznego płynięcia na wąskiej, środkowej części rurki i na wąskim pierścieniu o szerokości Δr w tarczy, przy r bliskim r_0 . W przypadku rurki, zwiększona koncentracja $\dot{\phi}$ przy $dM < 0$ jest źródłem coraz bardziej niejednorodnego odkształcenia, zlokalizowanego w jej środkowej części.

W przypadku tarczy, przy $\dot{\phi}_p = 1$ i 10 s^{-1} strefa koncentracji $\dot{\phi}$ przesuwają się podczas skręcania w kierunku $r = R$. Przy tym, koncentracja $\dot{\phi}$ w zakresie $dM > 0$ jest większa, a jej bardziej intensywne stadium przy $dM < 0$ występuje wcześniej niż te w rurce.

Przy wartości $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ maksimum momentu przy skręcaniu rurki (a także tarczy) występuje przy mniejszym odkształceniu średnim ϕ_{pE} niż to przy $\dot{\phi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$. Jest to wynik większego wzrostu krzywej temperatura-odkształcenie w najsłabszym miejscu rurki (a także tarczy) przy $\dot{\phi}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ niż przy $\dot{\phi}_p = 1 \text{ s}^{-1}$.

Należy oczekiwać zależności procesów skręcania rurki i tarczy od długości rurki i promienia zewnętrznego tarczy, odpowiednio. Przy tej samej wartości $\dot{\phi}_p$ wzrost L i R powinien zbliżać te procesy do procesów adiabatycznych, a spadek L i R - do izotermicznych.

Przeprowadzone obliczenia wskazują na powijalnie mały wpływ konwekcji swobodnej na procesy skręcania rurki i tarczy.

Uzyskane wyniki numeryczne w szeregu przypadków wykazują jakościową zgodność z wynikami doświadczalnymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. Johnson, G.L. Baraya, R.A.C. Slater, On heat lines or lines of thermal discontinuity, *Int. J. Mech. Sci.*, 6, 6, 409-414, (1964)
2. C. Zener, *The micromechanism of fracture, Fracturing of Metals*, ASM, Cleveland, (1948)

3. W.Johnson, Impact Strength of Materials, Arnold Publ., London, (1972)
4. O.W.Dillon, Jr., Some experiments in thermoviscoplasticity, Constitutive Equations in Viscoplasticity: Phenomenological and Physical Aspects, AMD - Vol.21, ASME, New York, (1976)
5. J.F.Bell, The experimental foundations of solid mechanics, Encyclopedia of Physics, chief editor S.Flügge, Vol.VIa/1, Mechanics of Solids I, Springer Verlag, Berlin, (1973)
6. H.C.Rogers, Adiabatic plastic deformation, Annual Review of Materials Science, eds. R.A.Huggins, 9, 283-311, (1979)
7. А.А.Ильшин, Некоторые вопросы теории пластического течения, Изв.Акад.Наук СССР, Отделение Технических Наук, 2, 64-86, (1958)
8. W.Frager, Einführung in die Kontinuumsmechanik, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, (1961)
9. H.Kudo, M.Tsubouchi, Strain concentration due to heat generation in fast plastic deformation, Annals of the CIRP, 19, 225-230, (1971)
10. M.Kamiński, Sprzężenie pola odkształceń z polem temperatur w zagadnieniu skręcania cienkościennej rurki, Rozpr.Inżyn., 24, 1, 185-199, (1976)
11. J.Litoński, Plastic flow of a tube under adiabatic torsion, Bull.Acad.Polon.Sci., Série Sci.Techn., 25, 1, 1-8, (1977)
12. G.R.Johnson, Dynamic analysis of a torsion test specimen including heat conduction and plastic flow, Trans.ASME, J.Engng Mater.Technol., 103, 3, 201-206, (1981)
13. G.R.Johnson, J.M.Hoegfeldt, U.S.Lindholm, A.Nagy, Response of various metals to large torsional strains over a large range of strain rates - Part 1: Ductile metals, Trans. ASME, J.Engng Mater.Technol., 105, 1, 42-47, (1983)
14. G.R.Johnson, J.M.Hoegfeldt, U.S.Lindholm, A.Nagy, Response of various metals to large torsional strains over a large range of strain rates - Part 2: Less ductile metals, Trans.ASME, J.Engng Mater.Technol., 105, 1, 48-53, (1983)
15. M.Wada, T.Nakamura, N.Kinoshita, Distribution of temperature, strain rate and strain in plastically deforming metals at high strain rates, Philos.Mag.A, 38, 2, 167-185, (1978)
16. R.S.Culver, Torsional-impact apparatus, Exp.Mechanics, 12, 9, 398-405, (1972)

17. U.S.Lindholm, A.Nagy, G.R.Johnson, J.M.Hoegfeldt, Large strain, high strain rate testing of copper, Trans.ASME, J.Engng Mater.Technol., 102, 4, 376-381, (1980)
18. Z.Marciniak, Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion, Arch.Mech.Stos., 13, 6, 743-752, (1961)
19. Z.Marciniak, K.Kuczyński, J.Kołodziejcki, Wyznaczanie niektórych plastycznych własności blachy metodą skręcania. Obróbka Plastyczna, 12, 2, 61-66, (1973)
20. J.Litoński, Badanie niestateczności przy plastycznym skręcaniu wykorzystujące sprzężenie termomechaniczne. Niestateczność lokalna, 24, 4, 713-729, (1976)
21. L.S.Costin, E.E.Crisman, R.H.Hawley, J.Duffy, On the localisation of plastic flow in mild steel tubes under dynamic torsional loading, Mechanical Properties at High Rates of Strain, (1979); Conference Series No 47, The Institute of Physics, Bristol-London, (1980)
22. K.W.Lange, Zur Temperaturleitfähigkeit des Eisens, Archiv für das Eisenhüttenwesen, 41, 6, 559-562, (1970)
23. R.S.Culver, Thermal instability strain in dynamic plastic deformation, Metallurgical Effects at High Strain Rates, eds. R.W.Rohde, Plenum Press, New York-London, (1973)
24. U.S.Lindholm, Review of dynamic testing techniques and material behaviour, Mechanical Properties at High Rates of Strain, Conference Series No 21, The Institute of Physics, London and Bristol, (1974)
25. Z.Marciniak, Wyznaczanie tężyczności blachy z próby skręcania, Obróbka Plastyczna, 5, 3, 363-372, (1964)
26. B.Stefanowski, B.Staniszewski, Termodynamika techniczna, PWN, Warszawa, 194, (1959)
27. М.А. Михеев, И.М.Михеева, Основы теплопередачи, Энергия, Москва, (1973)

UZUPEŁNIENIE A

Weźmy pod uwagę element powierzchni walcowej o promieniu r i długości dz (Rys. A1), należący do omawianej, skręcającej rurki. Przyjmijmy, że w pewnej chwili skręcania t elementarny odcinek AB początkowej tworzącej jest przekształcony w elementarny odcinek A_1B_1 linii spiralnej w wyniku sztywnych obrotów poprzecznych przekrojów rurki o kąt $\varphi(z, t)$, gdzie z - odległość przekroju od zamocowania i t - parametr. W przekroju o współrzędnej $z + dz$ mamy $\varphi(z + dz, t) = \varphi(z, t) + d\varphi(z, t)$. Ponieważ kąt ścinania $\gamma = \angle B'A_1B_1$, łuk $\overline{B'B_1} = rd\varphi(z, t)$ i $\text{tg}\gamma = \overline{B'B_1}/A_1B_1$ to

$$\text{tg}\gamma(z, t) = r \frac{d\varphi(z, t)}{dz} \quad (A1)$$

Podstawiając związek (A1) do wyrażenia $\varphi = \text{tg}\gamma/\sqrt{3}$ uzyskujemy równość $d\varphi(z, t) = \sqrt{3} \varphi(z, t) dz/r$, z której, po scałkowaniu w granicach $0, \varphi(L, t) = \bar{\varphi}(t)$ i $0, 2L$ wynika wzór

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{\sqrt{3}}{r} \int_0^{2L} \varphi(z, t) dz \quad (A2)$$

Definiując średnie odkształcenie rurki $\varphi_p(t)$ jako wielkość stałą w chwili t , zastępującą $\varphi(z, t)$ pod znakiem całki, uzyskujemy związek

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{2\sqrt{3}L}{r} \varphi_p(t) \quad (A3)$$

Porównanie wzorów (A2) i (A3) prowadzi do zależności

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \varphi(z,t) dz ,$$

z której, z uwagi na to, że górna i dolna część rurki odkształcają się identycznie, wynika równość

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(z,t) dz . \quad (A.4)$$

Związki (A1) - (A4) obowiązują dla każdej chwili skręcania t . Różniczkując względem t wzory (A3) i (A4) uzyskujemy zależność pomiędzy prędkością kątową skręcania $\dot{\xi}$ i średnią prędkością odkształcenia $\dot{\varphi}_p$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{2\sqrt{3}L}{r} \dot{\varphi}_p(t) \quad (A5)$$

oraz zależność pomiędzy $\dot{\varphi}_p$ i rozkładem prędkości odkształcenia wzdłuż rurki $\partial\varphi(z,t)/\partial t$

$$\dot{\varphi}_p(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t} dz . \quad (A6)$$

UZUPEŁNIENIE B

Weźmy pod uwagę tarczę skręcaną jak na Rys.2. Przyjmijmy, że w pewnej chwili skręcania t początkowy, promieniowy odcinek ABC tarczy jest przekształcony w odcinek krzywoliniowy AB_1C_1 , który jest opisany przez funkcję $\varphi(r, t)$, gdzie r - promień tarczy, t - parametr, i ξ - kąt sztywnego obrotu przekroju tarczy posiadającego $r = \text{const}$. W oparciu o Rys.B1 można wprowadzić zależność

$$\text{tg}\gamma(r, t) = - \frac{rd\varphi(r, t)}{dr} \quad (B1)$$

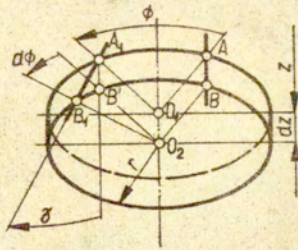
Podstawiając wzór (B1) do wyrażenia $\varphi = \text{tg}\gamma/\sqrt{3}$ uzyskujemy związek $d\varphi(r, t) = -\sqrt{3} \varphi(r, t) dr/r$, którego całkowanie w granicach $\varphi(r_0, t) = \bar{\varphi}(t)$, $\varphi(R, t) = 0$ i r_0, R daje wzór

$$\bar{\varphi}(t) = \sqrt{3} \int_{r_0}^R \varphi(r, t) \frac{dr}{r} \quad (B2)$$

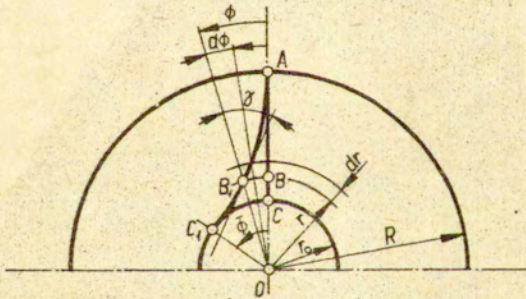
Definiując średnie odkształcenie tarczy $\varphi_p(t)$ jako wielkość stałą w chwili t , zastępującą $\varphi(r, t)$ pod znakiem całki, uzyskujemy zależność

$$\bar{\varphi}(t) = \sqrt{3} \varphi_p(t) \ln \frac{R}{r_0} \quad (B3)$$

Porównanie wzorów (B2) i (B3) prowadzi do związku



Rys. A1



Rys. B1

$$\varphi_p(t) = \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}} \int_{r_0}^R \varphi(r, t) \, d\ln r . \quad (B4)$$

Związki (B1) - (B4) obowiązują dla każdej chwili skręcania t . Różniczkując względem t wzory (B3) i (B4) uzyskujemy zależność pomiędzy prędkością kątową skręcania $\dot{\varphi}$ i średnią prędkością odkształcenia $\dot{\varphi}_p$

$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{3} \dot{\varphi}_p(t) \ln \frac{R}{r_0} \quad (B5)$$

i zależność pomiędzy $\dot{\varphi}_p$ i rozkładem prędkości odkształcenia wzdłuż rurki

$$\dot{\varphi}_p(t) = \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}} \int_{r_0}^R \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} \, d\ln r . \quad (B6)$$

UZUPEŁNIENIE C

Wartości średniego współczynnika powierzchniowej wymiany ciepła H wyznaczone ze związku

$$H = Nu_i \frac{k_1}{h} \quad (C1)$$

dla $i = m$ i zależności

$$Nu_m = 1.18(Gr_m Pr_m)^{0.125}, \quad (C2)$$

a także ze związku (C1) dla $i = o$ i zależności

$$Nu_o = 0.76(Gr_o Pr_o)^{0.25}. \quad (C3)$$

Związki (C2) i (C3) opisują zjawisko wymiany ciepła przy konwekcji swobodnej. Związek (C2) obowiązuje m.in. dla rur poziomych i pionowych oraz ścianek pionowych przy $10^{-2} < Gr_m Pr_m < 5 \cdot 10^2$ [26]. Natomiast związek (C3) obowiązuje dla powierzchni pionowych (rur i płyt) przy $10^3 < Gr_o Pr_o < 10^9$ [27]. Przy tym, $Gr_i = g_i h^3 g(T_w - T_o) / \nu_i^2$ i $g_i = 1 / (273 + T_i)$, gdzie $i = m, o$. W podanych związkach:

a) wskaźniki m i o oznaczają, że własności ośrodka (powietrza) są wybrane, odpowiednio, dla średniej temperatury warstwy przysiennej T_m i dla temperatury otaczającego ośrodka T_o ; przy tym, $T_m = (T_w + T_o) / 2$, gdzie T_w - temperatura ściany oddającej ciepło;

b) Nu , Gr i Pr są bezwymiarowymi liczbami podobieństwa, odpowiednio Nusselta, Grashofa i Prandtla;

c) ν , k , β , g i h oznaczają odpowiednio lepkość kinematyczną ośrodka w m^2/s , przewodność cieplną ośrodka w $\text{kcal}/\text{mh}^\circ\text{C}$, współczynnik rozszerzalności objętościowej ośrodka w K^{-1} , przyspieszenie ziemskie w m/s^2 i wymiar charakterystyczny ciała w m. Ten ostatni przyjęto $h = 2L$ dla rurki i $h = [\pi(R^2 - r_0^2)]^{0.5}$ dla tarczy. Jako temperaturę T_w przyjmowano średnią temperaturę rurki lub tarczy podczas skręcania, którą określano na podstawie uprzedniego rozwiązania numerycznego układu (11)₁₋₃ i (12)₁₋₃ dla każdej z wartości $\dot{\phi}_p = 10^{-2}$, 10^{-1} , 1 i 10 s^{-1} przy orientacyjnie przyjętej wartości T_w . Ostateczne wartości T_w dla $\dot{\phi}_p = 10^{-2}$, 10^{-1} , 1 i 10 s^{-1} wynosiły odpowiednio 401, 415, 480, 544°C dla rurki i 401.5, 428, 470, 538°C dla tarczy. Uzyskane na ich podstawie ostateczne wartości H były równe odpowiednio 5.9, 8.3, 10.3, 11.2 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ dla rurki i 2.4, 6.7, 8.4, 10 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ dla tarczy. Wartości H dla rurki i $H = 2.4$ dla tarczy uzyskano przy użyciu związku (C2). Pozostałe wartości H dla tarczy - przy użyciu wzoru (C3).

W prowadzonych obliczeniach korzystano z wartości k , ν i Pr podanych przez Michiejewów [27] dla suchego powietrza przy podwyższonych temperaturach.