

- 1.12 — metody numeryczne i komputerowe,
elementy skończone, probabilistyka.
4.45 — maszyny, części maszyn,
mechanizmy, diagnostyka.

Piotr Kazimierczyk

**PARAMETRYCZNA
IDENTYFIKACJA POJAZDÓW;
MODELE O ZMIENIEJ STRUKTURZE
METODA MOMENTÓW**

11/1990

P. 269



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 grudnia 1989 r.



56818



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 120 egz. Ark.wyd. 1,2 Ark.druk. 1,5

Oddano do drukarni w marcu 1990 r.

Nr zamówienia 87/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

**Parametryczna Identyfikacja Pojazdów;
Modele o Zmiennej Strukturze;
Metoda Momentów.**

STRESZCZENIE

Niniejsza praca poświęcona jest badaniu wpływu więzu w postaci ograniczenia przestrzeni stanu na wyniki identyfikacji układu dynamicznego modelującego wertykalne drgania pojazdu poruszającego się po drodze o nawierzchni aproksymowanej jednorodnym polem losowym o wymiernym widmie. Identyfikacji podlegają parametry drogi. Ograniczenie przestrzeni stanu wynika z istnienia w zawieszeniu pojazdu zderzaka uniemożliwiającego wzajemne przemieszczenie się elementów zawieszenia poza pewną regulowaną lecz ustaloną w trakcie ruchu wielkość. Poza zderzakiem rozważany model jest liniowy. Analiza takiego prostego modelu pozwala przedstawić w stosunkowo czytelny sposób tak problemy wynikające dla modelowania stochastycznego z istnienia więzów, jak i metody przybliżonego rozwiązywania problemów odwrotnych wynikających z wykorzystania do identyfikacji równań dla statystycznych momentów odpowiedzi układu. Przedstawiono stosunkowo ogólne podejście do modelowania układów z ograniczeniami, stosowne również dla szerszej klasy obiektów — układów o zmiennej, również losowej, strukturze. Wyniki wskazują, że nawet w przypadku, gdy więzy ingerują ze znikomym prawdopodobieństwem (rzadko) ich wpływ na identyfikację jest istotny. Zastosowanie metody przedstawionej w pracy pozwala w efektywny sposób uwzględnić tego rodzaju efekty.

1. WSTĘP

W opracowaniu [1] wskazano, że drgania pojazdów poruszających się po losowych powierzchniach dróg dogodnie jest opisywać za pomocą modeli przyjmujących postać układu stochastycznych równań różniczkowych Itô. Identyfikację parametryczną tego typu modeli za pomocą metody największej wiarygodności rozważano w [2]. Metoda ta pozwala estymować *on line* parametry charakteryzujące zarówno pojazd jak i zmienne warunki drogowe na podstawie jednej trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej. Niedogodnością tej metody jest to, że wymaga ona obserwowalności całego wektora stanu lub możliwości wyrażenia nieobserwowalnych współrzędnych w postaci mierzalnych funkcjonałów od trajektorii obserwowanych współrzędnych wektora stanu. Klasa modeli spełniających te wymagania scharakteryzowana została w [2]. Na to, jakie ze współrzędnych wektora stanu można uznać za obserwowalne zasadniczy wpływ ma poziom rozwoju metod pomiarowych. W przypadku, gdy monitorowanie odpowiednich zmiennych ma się odbywać w trakcie ruchu pojazdu w warunkach drogowych (nie w laboratorium), dostępny *hardware* ogranicza wybór obserwabli do składowych ("skutecznego" — uśrednionego) przyspieszenia elementów pojazdu względem inercjalnego układu odniesienia oraz, ewentualnie, względnych przemieszczeń elementów pojazdu. Ponieważ już sama rejestracja takich wielkości (szczególnie przyspieszeń), a także ich dalsza obróbka statystyczna za pomocą urządzeń pokładowych, wiążą się zazwyczaj z uśrednianiem chwilowych wartości wzdłuż trajektorii czasowych, w naturalny sposób narzuca się użycie dla celów identyfikacji równań opisujących związki pomiędzy średnimi (ogólniej — statystycznymi momentami) obserwowanych i nieobserwowanych współrzędnych wektora stanu. W ostatnim okresie metody identyfikacyjne wyrosły z analizy kowariancyjnej czy,

ogólniej, bazujące na równaniach dla momentów zyskały znaczne zainteresowanie w zastosowaniach związanych z mechanicznymi układami drgającymi (patrz na przykład [3-8]). Zależności wiążące momenty tak obserwowanych jak i nieobserwowanych współrzędnych wektora stanu procesu opisującego ewolucję tak uogólnionych współrzędnych pojazdu jak i losowego obciążenia pozwalają często otrzymać wyrażenia dla interesujących nas parametrów w terminach liczby obserwacji mniejszej niż wymagana przez metodę najmniejszej wiarygodności opisaną w [2] (w przypadku, gdy nie jesteśmy w stanie efektywnie dokonywać filtracji nieobserwowanych współrzędnych — por. [2] str. 38). Dlatego metoda momentów winna być traktowana jako ważna komplementarna (dla metody największej wiarygodności) technika identyfikacyjna. Ma ona, jak to wynika z powyższych uwag, tę cenną zaletę, że dane, których wymaga — średnie czasowe — w przypadku quasistacjonarnych warunków ruchu (gdy na odcinkach czasowych dłuższych niż czas estymacji momentów wymagany przy zadanej dokładności można przyjąć założenie o jednorodności nawierzchni i ustalonej prędkości podróży) odpowiadają bardzo dobrze istniejącym urządzeniom pomiarowym od lat projektowanym z nastawieniem na mierzenie skutecznych, uśrednionych wielkości.

Istniejące metody identyfikacyjne oparte na metodzie momentów okazały się szczególnie efektywne w przypadkach stacjonarnych układów liniowych (por. [3-8]). Układ równań różniczkowych dla momentów otrzymany w wyniku pomnożenia równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa związanego z danym równaniem Itô przez odpowiedni produkt współrzędnych stanu i scałkowania po całej przestrzeni stanów jest w tym przypadku nie tylko zamknięty (ze względu na momenty danego rzędu) ale też redukuje się do układu równań algebraicznych.

W bardziej realistycznych modelach pojazdów założenie liniowości daje się zazwyczaj utrzymać jedynie w ograniczonych obszarach w przestrzeni stanów. W ogólnym przypadku, o ile przeprowadza się linearyzację to dokonuje się jej w kilku rozłącznych obszarach i po przejściu stanu układu z jednego obszaru do drugiego obowiązujące równanie liniowe zmienia swoją postać a przynajmniej zmieniają się wartości pewnych parametrów występujących w opisie. Podobna konieczność — nagłej zmiany opisu ewolucji układu — ma miejsce w wielu innych sytuacjach. Jest tak na przykład w przypadku okresowej zmiany reżimu pracy pewnych podzespołów. Oczywiście zmiana modelu w trakcie ruchu pojazdu i w trakcie identyfikacji wyprowadza poza wspomnianą wyżej klasę liniowych stacjonarnych modeli. Szereg zasadniczych własności układu równań dla momentów nie obowiązuje w szerszej klasie modeli. W szczególności, układ równań przestaje zazwyczaj być układem algebraicznym i przestaje być zamknięty.

W niniejszym opracowaniu (por. [9]) rozważamy uogólnienie metody momentów na przypadek układów ze zmienną strukturą. Metoda ta jest następnie zastosowana w problemie identyfikacji pojazdu, w którego zawieszeniu znajduje się nieliniowy element — zderzak. Dyskutowane są różnice w stosunku do przypadku liniowego — gdy działanie zderzaka jest pominięte. Wskazuje się efektywne sposoby pokonania opisanych powyżej trudności wynikających z nieliniowości modelu i jego zmiennej struktury.

2. MODELOWANIE UKŁADÓW ZE ZMIENNĄ STRUKTURĄ.

Niech ewolucja układu będącego przedmiotem modelowania będzie opisywana (w każdej chwili czasu) parą $(i; X^i)$, gdzie $i = i_t \in I$ jest numerem opisu ($I = \{1, 2, \dots, N\}$, N - liczba opisów), zaś X^i jest procesem stochastycznym reprezentującym stan układu w przypadku, gdy obowiązującym jest opis (model) o numerze i (por. [10]). Będziemy mówili, że układ znajduje się w danej chwili czasu t w trybie j -tym, jeżeli $i_t = j$.

W typowych sytuacjach przestrzeni, do której należy wektor X^i nie zależy od i , zaś zmienia się w zależności od i jedynie równanie, jakie spełnia proces X^i (zmianie podlegają jedynie wartości parametrów lub także postać równania). Jest tak na przykład wówczas, gdy postać modelu musimy zmieniać w zależności od obszaru przestrzeni fazowej, do jakiego należy aktualny stan układu.

Poniższą metodologię można jednak stosować również do modelowania takich obiektów, które wymagają stosowania opisów o całkowicie różnej strukturze (przy różnych i) a nawet różnych przestrzeniach fazowych, zaś przejście od jednego opisu do drugiego (na przykład spowodowane przejściem z jednego trybu pracy do drugiego) nie koniecznie wiąże się z tym, do jakiego obszaru przestrzeni fazowej należy aktualnie stan układu.

Zakładamy, że najwyższy z wymiarów przestrzeni fazowych niezbędnych dla opisu danego procesu jest skończony i wynosi n . Rozważamy następującą klasę modeli. Niech $\mathcal{X} = R^n \cup \{\infty\}$ będzie jedno-punktowym uzupełnieniem przestrzeni R^n . Niech dla każdego $i \in I$ proces X^i będzie dyfuzyjnym procesem Markowa o współczynnikach przenoszenia i dyfuzji

odpowiednio:

$$A^i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{i} \quad B^i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}(R^{*}; \mathcal{X}),$$

przyjmującym w chwili początkowej $t_0 = 0$ wartość $X_{i,0}$. O zmiennych losowych $X_{i,0}$ zakładamy, że są mierzalne względem σ -ciała $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ oraz spełniają warunek:

$$\mathcal{P}(X_{i,0}^{-1}(\infty) \cap B) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(B \setminus X_{i,0}^{-1}(\infty)) = 0,$$

dla wszystkich $i \in I$ wszystkich zdarzeń z σ -ciała początkowego — $B \in \mathcal{F}_0$ oraz $j \in I \setminus \{i\}$.

Wówczas globalny opis X stanu procesu można przedstawić za pomocą poniższych formuł

$$X_t(\omega) = \sum_{i \in I} X_t^i(\omega) \chi_{\Omega_t^i}(\omega)$$

$$dX_t^i = \tilde{A}^i(X_t^i) dt + \tilde{B}^i(X_t^i) dW_t^i + dD_t^i + dC_t^i \quad (1i)$$

$$X_0^i(\omega) = X^{i,0} \chi_{\Omega_t^i}(\omega) + (1 - \chi_{\Omega_t^i}(\omega)) \infty \quad (2i)$$

$$\tilde{A}^i = \tilde{A}_{t,\omega}^i(x) = A^i(x) \chi_{\Omega_t^i}(\omega)$$

$$\tilde{B}^i = \tilde{B}_{t,\omega}^i(x) = B^i(x) \chi_{\Omega_t^i}(\omega)$$

gdzie $\omega \in \Omega$, $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ — jest przestrzenią probabilistyczną która w każdej chwili czasu t rozkłada się na zdarzenia Ω_t^i (że w chwili t układ jest w trybie i) spełniające następujące warunki:

$$\Omega_t^i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_t^w, \quad \Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_t^i, \quad \Omega_t^i \cap \Omega_t^j = \emptyset.$$

Dla każdego $i \in I$ równanie (1i) jest równaniem Itô z procesem Wienera $W^i = W_t^i(\omega) \in R^{k_i}$, przy czym oprócz składników opisujących przenoszenie i dyfuzję pojawiają się w tym równaniu składniki odpowiedzialne za "znikanie" (człon dC^i) oraz "pojawianie się" (człon dD^i) realizacji procesu w trybie i -tym. Proces D^i ma przyrosty jedynie w chwili, gdy układ przestaje ewoluować zgodnie z opisem i . Przyrost ten jest zawsze równy ∞ — proces D przenosi czasowo proces X^i w stan ∞ , w którym, zgodnie z definicją funkcji \tilde{A} oraz \tilde{B} pozostaje do momentu, gdy zadziała proces C mający przyrosty jedynie w chwilach, gdy układ wchodzi w tryb i .

Przez rozwiązanie zagadnienia początkowego (1) (2) należy w ogólnym przypadku rozumieć znalezienie nie tylko procesów X^i ale także procesów C i D . Aby zadanie to było dobrze postawione należy sformułować warunki, w jakich następuje zmiana trybu. Nie istnieją twierdzenia dotyczące istnienia czy jednoznaczności rozwiązań takich zagadnień początkowych w ogólnym przypadku. Dla procesów dyfuzyjnych (ich trajektorie są ciągłe — chodzi więc o przypadek, gdy na granicy obszaru dopuszczalnego zachodzi odbicie, pochłanianie lub dyfuzja na obszarze mniejszego wymiaru) głębokie wyniki zawarte są w pracach [11÷20]. Dla opisu odbicia sprężystego, jak w przykładzie opisanym we wstępie, prędkości względne dwu części zderzaka nie mogą być funkcjami ciągłymi — analizowany proces doznaje skoków i nie jest procesem dyfuzyjnym (jest nim tylko kawałkami — na losowych odcinkach czasu). W tym przypadku wyniki cytowane powyżej nie stosują się. Aby wykorzystać aparat procesów Markowa do zagadnień tego rodzaju wykorzystamy idee z [10] do ścisłego sformułowania odpowiedniego wyniku dotyczącego rozważanej szczególnej klasy zagadnień. Ograniczymy się do rozważenia sytuacji, gdy zmiana trybu następuje jedynie na granicach obszarów dopuszczalnych dla stanu procesów

X^t oraz właśnie w wyniku osiągnięcia przez X^t takich granic. Dla naszych potrzeb wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy granice, o których mowa są powierzchniami o równaniach

$$\Gamma_j^t(x) = \gamma_j^t,$$

gdzie Γ_j^t , ($j \in I_c^t \cup I_d^t$) są funkcjami rzeczywistymi klasy C^∞ spełniającymi warunek

$$\nabla^T \Gamma_j^t B^t = 0.$$

W powyższym wzorze oraz wszędzie poniżej, dla ułatwienia zapisu oraz dla jednoznaczności przyjmujemy zasadę, że znak w definicji funkcji Γ_j^t dobieramy zawsze tak, by unormowany gradient

$$\nu = \nabla \Gamma_j^t$$

był zawsze wektorem normalnym *zewnątrznym* dla obszaru dopuszczalnego. Powierzchnię będziemy w dalszym ciągu oznaczać tym samym symbolem (Γ_j^t) co i funkcję występującą w definicji danej powierzchni.

Założymy także, że zachowanie się układu po osiągnięciu granicy Γ_j^t , $j \in I_d^t$ w chwili τ zależy jedynie od wartości $\lim_{t \rightarrow \tau} X_t^t$ przy czym (i_t, X_t) jest jednoznacznie określoną zmienną losową niezależną od przeszłości procesu X oraz przyjmującą wartości w zbiorze

$$\Gamma_c = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in I_c^t} (i; \Gamma_j^t)$$

(w ogólności zatem $i_t \neq i_t$ w takich chwilach).

STWIERDZENIE

Przy powyższych założeniach dla istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1) (2) wystarczy aby funkcje A^i oraz B^i spełniały lokalny warunek Lipschitza oraz by

$$\nabla^T \Gamma_i A^i < 0 \quad (*)$$

dla wszystkich $i \in I$, na wszystkich granicach, na których zachodzi kreacja realizacji w trybie i — dla wszystkich $j \in I_i^*$.

Szkic dowodu.

Założenia stwierdzenia są wystarczające dla istnienia i jednoznaczności rozwiązań każdego z zagadnień początkowych (1i), (2i) na przestrzeni stanów \mathcal{X} , przy czym rozwiązania te nie osiągają stanu ∞ prawie napewno przed upływem czasu, który jest momentem Markowa i jest dodatni na zbiorze tych realizacji, dla których wartość początkowa była różna od ∞ . Każde z tych (skończonej liczby) rozwiązań jest procesem mocno markowskim a zatem również czas pierwszego dojścia każdego z tych procesów do jakiegokolwiek z pochłaniających granic jest momentem Markowa. Tę samą własność można wykazać również dla minimum tych zmiennych losowych (ponieważ mamy do czynienia ze skończoną, liczbą procesów łatwo skonstruować uniwersalną filtrację względem której każde z rozwiązań jest procesem Markowa). Zgodnie z założeniem, że zachowanie na brzegach pochłaniających jest jednoznacznie opisane przez proces niezależny od przeszłości, rozważając produktową przestrzeń probabilistyczną można przedłużyć rozwiązanie globalne do następnego momentu Markowa pierwszego dojścia któregośkolwiek z procesów składowych do jakiegokolwiek granicy pochłaniającej. Takie przedłużanie rozwiązania można prowadzić

ad infinitum definiując rozwiązanie na całej pół-osi czasu dzięki założeniu (*) gwarantującemu, że każdy z procesów punktowych złożonych z ciągu kolejnych momentów osiągania granicy pochłaniającej jest procesem pojedynczym. Wynika to z faktu, że (*) oznacza w istocie iż rzut trajektorii osiągającej granicę pochłaniającą na normalną do tej granicy jest (jako funkcja czasu) funkcją absolutnie ciągłą. Jednoznaczność rozwiązania wynika z tego, że lokalna własność Lipschitza gwarantuje mocną jednoznaczność w sensie trajektorii dla każdego z zagadnień (1i), (2i) z osobna (patrz [21]) oraz z powyższej konstrukcji rozwiązania globalnego.

Każdy z procesów X^i spełniających zagadnienie (1i) (2i) jest w ogólności procesem stochastycznym mogącym przyjmować wartość ∞ (jest ona przyjmowana, gdy układ nie jest w trybie i lub po eksplozji rozwiązania). Ten składnik rozkładu procesu X^i , który jest absolutnie ciągły względem miary Lebesguea na R^n ($n_i \leq n$) posiada względem tej miary gęstość p^i spełniającą następujące uogólnione równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} = -\text{div}\Pi^i + c^i - a^i \quad (3)$$

gdzie

$$\Pi^i = A^i p^i - 1/2 \text{div}[B^i (B^i)^T p^i]$$

jest strumieniem prawdopodobieństwa,

$$\begin{aligned} c^i(x, t) &= \sum_{j=1}^N c^{ij}(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \Gamma_j^i} \int \nu^T \Pi^j(y, t) \delta(\Gamma_k^i(x, t) - \gamma_k^i) q_{j,i}^i(x|y) dy \end{aligned}$$

jest intensywnością pojawiania się realizacji w trybie i -tym; $q'_{j,i}(x|y)$ w powyższym wzorze jest uogólnioną gęstością prawdopodobieństwa przejścia do punktu brzegowego x w trybie i pod warunkiem, że w chwili t realizacja procesu w trybie j osiągnęła punkt brzegowy y ;

$$a^i(x, t) = \sum_{j \in I'_i} \nu^j \Pi^j(x, t) \delta(\Gamma^j_i(x, t) - \gamma^j_i)$$

we wzorze (3) jest intensywnością dochodzenia — a następnie anihilacji trajektorii procesu w punktach brzegowych obszaru dopuszczalnego dla trybu i .

Ponieważ prawdopodobieństwo przyjmowania przez proces wartości ∞ może być w ogólności dodatnie, zatem gęstość p występująca w (3) nie musi całkować się do jedności. Ewolucję prawdopodobieństwa znajdowania się w trybie i opisuje poniższe równanie bilansu:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_i(\mathcal{X}) = \int_{R^*} c^i(x, t) dx - \int_{R^*} a^i(x, t) dx. \quad (4)$$

Równania dla momentów, stanowiące podstawę dla wyprowadzania estymatorów parametrów występujących w modelu przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_i^j &= -m_i^j \frac{d}{dt} \ln \mathcal{P}_i(\mathcal{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{P}_i^j(\mathcal{X})}{\mathcal{P}_i(\mathcal{X})} \int_{R^*} y c^{j,i}(y, t) dy \\ &\quad - \int_{R^*} y a^i(y, t) dy + \int_{R^*} \Pi_i^j(y, t) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

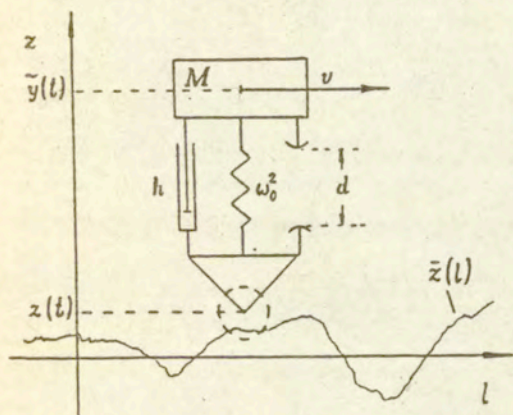
gdzie m_i^j oznacza średnią wartość zmiennej losowej X_i^j względem regularnego składnika rozkładu tego procesu, to znaczy względem miary \mathcal{P}_i .

Równania dla momentów wyższych rzędów można otrzymać podobnie jak (5) przez pomnożenie stronami równania (3) przez odpowiedni produkt oraz wycalkowanie po całej przestrzeni (a także wykorzystaniu wzorów na całkowanie przez części i twierdzenia Stokesa). Inny sposób polega na wykorzystaniu lematu Itô dla wyprowadzenia równań bezpośrednio dla właściwego produktu a następnie na zastosowaniu wzoru (5) do tego równania.

Zauważmy, że w odróżnieniu od sytuacji, gdy mamy do czynienia z układem o tylko jednym, liniowym opisie, w obecnie rozważanym zadaniu równania dla momentów nie stanowią zamkniętego układu. Nawet w przypadku stacjonarnym równanie (5) jest sprzężone z (3) poprzez (4) i poprzez wielkości Π , a , c (wszystkie czony zawierające pochodne czasowe — oznaczane kropką znikają w tym przypadku). Tak więc, w miejsce zamkniętego, liniowego, algebraicznego równania dla momentów mamy do czynienia z nieliniowym problemem cząstkowo-różniczkowo-całkowym. W pewnych przypadkach, gdy efekty nieliniowości o ograniczeń nie są zbyt wielkie, można to bardzo złożone zadanie aproksymować prostszym, wykorzystującym rozwiązanie zagadnienia liniowego. Technika taka przedstawiona zostanie na przykładzie prostego modelu pojazdu.

3. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW DROGI W TRAKCIE RUCHU POJAZDU.

Rozważmy przedstawiony na rysunku prosty model opisujący wertykalne drgania pojazdu poruszającego się z ustaloną szybkością podróżną v , po nawierzchni drogi, której wzniesienie \bar{z} w stosunku do ustalonego



poziomu traktowane jest jako jednorodne gaussowskie pole losowe o zerowej średniej i funkcji korelacji postaci $\sigma^2 e^{-\alpha|v\tau|}$. Ze względu na własności opony wymuszenia kinematyczne z wywoływane przez nawierzchnię i działające na oś koła modelowane są jako wynik przejścia procesu stochastycznego $\bar{z}(vt)$ przez filtr dolno- przepustowy o zna-

nym parametrze θ . Zawieszenie pojazdu składa się z liniowego elementu tłumiącego (o stałej h) i z liniowego resora (charakteryzowanego stałą częstotliwości drgań własnych ω_0^2) oraz ze zderzaka, o którym zakładamy dla uproszczenia, że jest doskonale elastyczny.

Oznaczmy przez y odległość pomiędzy elementami zderzaka, pomniejszoną o d — rozwartość zderzaka w stanie równowagi statycznej. Zakładamy, że odległość ta jest wielkością obserwowaną wraz ze swoją pierwszą pochodną w punktach jej ciągłości. Zadanie polega na identyfikacji stałych σ i α .

Znajomość powyższych parametrów drogi pozwala na optymalizację doboru regulowanych parametrów pojazdu, takich jak stała tłumienia h

w amortyzatorze czy rozwartość zderzaka d ze względu na tzw. kryterium maksymalnego komfortu jazdy wyrażające się poprzez wariancję przyspieszeń pionowych środka masy pojazdu.

Przyjmując oznaczenia:

$$y_1 = \bar{z}, \quad y_2 = z, \quad y_3 = y - z, \quad y_4 = \dot{y} - \dot{z},$$

$$Y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$$

i wykorzystując bilans sił działających na środek masy pojazdu, możemy zapisać następujące równanie ruchu dla układu pojazd - droga:

$$dY = AYdt + e_1\sigma\sqrt{2\alpha}dW + e_4 dS, \quad (6)$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \theta & -\omega_0^2 & -h \end{pmatrix},$$

$$e_1 = [1, 0, 0, 0]^T, \quad e_4 = [0, 0, 0, 1]^T,$$

zaś S jest procesem opisującym odbicie w zderzaku. Przy przyjętych założeniach odbicie to polega na natychmiastowej zmianie znaku y_4 . Proces S jest więc różnicą procesu anihilacji D w chwili gdy dwie części zderzaka zbliżą się do siebie uniemożliwiając dalszy ich wzajemny ruch i stosowanie opisu (6) oraz procesu kreacji nowej realizacji w opisie (6) — realizacji startującej z punktu o współrzędnej $-y_4$. W naszym przypadku mamy więc do czynienia z dwiema powierzchniami ograniczającymi dopuszczalny obszar w przestrzeni stanów procesu: powierzchnię anihilacji Γ_a : $y_3 = -d$, $y_4 > 0$

oraz powierzchnię kreacji Γ_c : $y_3 = -d$, $y_4 < 0$. Do pełnej charakteryzacji procesu wystarcza tu jeden opis — układ pracuje w jednym trybie. Aby lepiej zilustrować metodologię przedstawioną w poprzednim punkcie zauważmy, że odbicie w zderzaku można by interpretować również poprzez wprowadzenie dwu identycznych trybów — układ przechodził by w momencie odbicia z jednego trybu do drugiego. Oczywiście, obydwa tryby pracy układu można w tym przypadku opisać za pomocą takiego samego modelu (6).

Równanie (3) przyjmuje w naszym przypadku postać:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div}\Pi + y_4\delta(y_3 - d)p \quad (7)$$

gdzie

$$\pi = AYp - [\sigma^2\alpha \frac{\partial p}{\partial y_1}, 0, 0, 0]^T$$

gdź

$$c = y_4 p(y_1, y_2, y_3, -y_4) \delta(y_3 - d) \chi_{R_+}(y_4)$$

$$a = y_4 p(y_1, y_2, y_3, y_4) \delta(y_3 - d) \chi_{R_-}(y_4).$$

Powyższe założenia dotyczące zderzaka mają swój wyraz w następującym warunkiem brzegowym dla równania (7):

$$p(y_1, y_2, y_3, -y_4) = p(y_1, y_2, y_3, y_4). \quad (8)$$

Oznaczamy przez p_3 brzegową gęstość otrzymaną przez wycalkowanie p względem y_1, y_2, y_4 . Niech również

$$m_i = Ey_i, \quad C_i = p_3(-d)E[y_i y_4 | y_3]_{|y_3 = -d},$$

$$v_{ij} = E y_i y_j, \quad C_{ij} = E[y_i y_j y_k | y_3]_{|y_3 = -s}.$$

Przy powyższych oznaczeniach równania dla stacjonarnych momentów pierwszego i drugiego rzędu są następujące

$$0 = -\alpha m_1 + C_1$$

$$0 = m_1 - \theta m_2 + C_2$$

$$0 = m_4 + C_3$$

$$0 = -m_1 + \theta m_2 - \omega_0^2 m_3 - h m_4 + C_4$$

$$0 = -\alpha v_{11} + \sigma^2 \alpha + C_{11}$$

$$0 = v_{11} - (\theta + \alpha) v_{12} + C_{12}$$

$$0 = 2(v_{12} - \theta v_{22}) + C_{22}$$

$$0 = -\alpha v_{13} + v_{14} + C_{13}$$

$$0 = -v_{11} + \theta v_{12} - \omega_0^2 v_{13} - (h + \alpha) v_{14} + C_{14}$$

$$0 = v_{13} - \theta v_{23} + v_{24} + C_{23}$$

$$0 = -v_{12} + v_{14} + \theta v_{22} - \omega_0^2 v_{23} - (h + \theta) v_{24} + C_{24}$$

$$0 = 2v_{34} + C_{33}$$

$$0 = -v_{13} + \theta v_{23} - \omega_0^2 v_{33} - h v_{34} + v_{44} + C_{34}$$

$$0 = 2[-v_{14} + \theta v_{24} - \omega_0^2 v_{34} - h v_{44}] + C_{44}.$$

Równania powyższe różnią się od tych, z jakimi mielibyśmy do czynienia w przypadku układu liniowego powstałego na skutek zaniedbania zderzaka jedynie członami C_i oraz C_{ij} . Jednak, jak wynika z definicji tych członów, są one skomplikowanymi funkcjonalami rozwiązania równania (7). Aby wyznaczyć interesujące nas α i σ za pomocą danych możliwych do wyestymowania na podstawie obserwacji — w naszym przypadku za pomocą m_3, v_{33}, v_{44} (teoretycznie dysponujemy jeszcze m_4 i v_{34} ale z powyższych

równań wynika, że winny one być równe zero), należałoby rozwiązać (7), wyznaczyć C_i, C_{ij} za pomocą zmiennych poszukiwanych α, σ , wyrugować z układu dla momentów wszystkie momenty oprócz m_3, v_{33}, v_{44} i, w końcu, rozwiązać tak powstały układ ze względu na α i σ .

Otrzymanie powyższego rozwiązania jest bardzo trudne, a w bardziej skomplikowanych przypadkach niemal niemożliwe nawet przy użyciu najszybszych maszyn liczących. Dlatego, zastosujemy metodę przybliżoną. Polega ona na zastąpieniu gęstości p gęstością, jaką uzyskalibyśmy z układu, w którym nie ma zderzaka. Przybliżenie to jest uzasadnione, ponieważ stałą d dobiera się ze względu na komfort jazdy tak, aby zderzenia występowały z małym prawdopodobieństwem. Zauważymy później, że powyższe przybliżenie nie kłóci się z koncepcją uwzględnienia wpływu zderzaka na jakość identyfikacji — choć gęstość p nie zmienia się znacznie z wprowadzeniem zderzaka, jego wpływ na wyniki identyfikacji, nawet przy zastosowaniu powyższego przybliżenia, jest istotny.

Zauważmy, że wobec warunku brzegowego (8) nie znikają jedynie

$$C_3 = \omega_0^2 m_3 > 0$$

oraz C_{14}, C_{24}, C_{34} , dla aproksymacji których wykorzystujemy powyższe uproszczenie prowadzące do takich związków tych stałych z momentami, jak w przypadku gaussowskim. Wprowadzając oznaczenia

$$W_0 = \omega_0^2 + \alpha(h + \alpha) \qquad W_1 = \omega_0^2 + \theta(h + \theta)$$

$$D = d\omega_0^2 m_3 \qquad Q = \sigma^2 \alpha / (\alpha + \theta)$$

$$D_0 = D + v_{33} W_0 \qquad D_1 = D - v_{33} W_1$$

otrzymujemy dla C_i , następujące wyrażenia:

$$C_{14} = D \frac{v_{13}}{v_{33}}, \quad C_{24} = \frac{v_{23}}{v_{33}}, \quad C_{34} = D.$$

Wstawiając je do układu równań dla momentów i traktując w tym układzie v_{33} i v_{44} jako dane ($v_{34} = 0$ — patrz wyż.), zaś α i σ jako niewiadome (obok pozostałych momentów) otrzymujemy dla nieinteresujących nas (rugowanych z układu) zmiennych poniższe formuły.

$$\begin{aligned} v_{11} &= \sigma^2 & v_{12} &= \frac{\sigma^2}{\alpha + \theta} \\ v_{22} &= \frac{\sigma^2}{\theta(\alpha + \theta)} & v_{13} &= -\frac{Qv_{33}}{D\alpha} \\ v_{14} &= -\frac{Qv_{33}}{D} & v_{23} &= \frac{Qv_{33}^2}{D_e D_i} \\ v_{24} &= \frac{Qv_{33}}{D_e D_i} (D + v_{33}(\theta\alpha - \omega_0^2)) & v_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Poniższe dwa związki (powstałe w trakcie rugowania powyżej wyznaczonych zmiennych) wykorzystujemy natomiast dla wyznaczania pozostałych niewiadomych — czyli dla interesujących nas α i σ .

$$\begin{aligned} v_{44} &= \frac{1}{h} \frac{Qv_{33}}{D_e D_i} \{ \theta [D + v_{33}(\theta\alpha - \omega_0^2)] + \alpha D_i \} \\ 0 &= D_e D_i (D - \omega_0^2 h) + \theta v_{33} [\theta\alpha - \omega_0^2 + h(h + \theta + \alpha)] + D_i (h + \alpha) + \theta D \end{aligned}$$

Dla α otrzymujemy poniższe równanie kwadratowe:

$$\alpha^2 A + \alpha B + C = 0, \quad (9)$$

gdzie

$$A = v_{33} v_{44} D D_e$$

$$B = v_{33}\{v_{44}(DD_i h + \theta h) - \omega_0^2[D - v_{33}(\omega_0^2 + \theta h)]\}$$

$$C = [D - v_{33}(\omega_0^2 + \theta h)][\theta v_{44} - \theta v_{33}\omega_0^2 + D - v_{33}(\omega_0^2 + \theta h)]$$

$$+ v_{44}D_i(D^2 + Dv_{33}\omega_0^2 + hv_{44}) + v_{33}v_{44}\theta h(h + \theta).$$

Dla parametru σ słuszny jest następujący wzór:

$$\sigma^2 = \frac{v_{44}}{v_{33}} \frac{h}{\alpha} \frac{D_s D_i (\alpha + \theta)}{\alpha D_i + \theta [D + v_{33}(\theta \alpha - \omega_0^2)]}.$$

Ponieważ (9) jest równaniem kwadratowym, może mieć niejednoznaczne rozwiązanie. Rzeczywiście, dla realnych wielkości parametrów równanie to okazuje się mieć dwa pierwiastki. Dla wyboru właściwego pierwiastka można stosować różnorodne techniki. Przykładowo, można zmieniać wartość jednego z poddających się regulacji parametrów (jak h) oraz porównywać wpływ tych zmian na oba rozwiązania. Jednak w zakresie realistycznych wartości parametrów leży zazwyczaj jeden tylko pierwiastek równania (9). Dla potwierdzenia właściwości wyboru rozwiązania można też wykorzystać rozwiązanie, jakie wynika z zaniedbania wpływu zderzaka — z analizy układu dla momentów przy zaniedbaniu C_{ij} . Rozwiązanie to ma postać:

$$\alpha = \frac{v_{33}\omega_0^2\theta - v_{44}(\theta + h)}{v_{44} - \omega_0^2v_{33} - \theta hv_{33}}$$

$$\sigma^2 = \frac{v_{33}hW_s W_i (\alpha + \theta)}{\alpha(\alpha + \theta + h)}.$$

co wynika z poniższego rozwiązania układu dla momentów przy zaniedbaniu członów C_{ij} (podajemy to rozwiązanie ponieważ warto nie tylko porównać same rozwiązania układu przy uwzględnieniu i przy zaniedbaniu więzów, ale

też aby podkreślić nową jakościowo trudność wynikającą z faktu, że układ przestaje być autonomiczny i liniowy).

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= \sigma^2 & v_{12} &= \frac{\sigma^2}{\alpha + \theta} \\
 v_{22} &= \frac{\sigma^2}{\theta(\alpha + \theta)} & v_{13} &= -\frac{Q}{W_s} \\
 v_{14} &= -\frac{Q\alpha}{W_s} & v_{23} &= -\frac{Q}{W_s W_t} (h + \theta + \alpha) \\
 v_{24} &= -\frac{Q}{W_s W_t} (\theta\alpha - \omega_0^2) & v_{33} &= \frac{1}{h} \frac{Q}{W_s W_t} (h + \theta + \alpha) \\
 v_{34} &= 0 & v_{44} &= \frac{1}{h} \frac{Q}{W_s W_t} [h\theta\alpha\omega_0^2(\theta + \alpha)]
 \end{aligned}$$

4. UWAGI KOŃCOWE.

Warto podkreślić, że podobnie, jak w rozważanym przykładzie, wpływ nieliniowości na wyniki identyfikacji jest istotny nawet wówczas, gdy niewiele zmienia się w stosunku do przypadku liniowego rozwiązanie równania F-P-K. Dlatego, przybliżona technika polegająca na wykorzystaniu rozwiązania równania F-P-K dla układu liniowego dla zamknięcia układu równań dla momentów rozwiązania systemu ze złożoną strukturą, może okazać się efektywna (tak jak w to miało miejsce w powyższym przykładzie).

Na zakończenie wypada dać przykład ilościowego wpływu rozważanych nieliniowości na wyniki identyfikacji. Przeprowadzono obliczenia według wzorów z poprzedniego paragrafu dla silnie tłumionego zawieszenia, przy takim doborze stałej d , by średnia energia kinetyczna drgań pionowych pojazdu w momencie zderzenia była rzędu 0.0017 średniej energii kinetycznej

tych drgań w okolicach punktu równowagi statycznej. Różnica pomiędzy wynikami dla parametru α przy uwzględnieniu zderzaka i bez jego uwzględnienia, wyniosła w tych warunkach 10% prawdziwej wartości, podczas gdy wzór (9) dawał aproksymację o rząd dokładniejszą.

5. BIBLIOGRAFIA.

1. Kazimierczyk P., Sobczyk K. *Stochastyczna Dynamika Pojazdów Drogowych*, Raport CPBP 02.19 t. 03.28/1987.
2. Kazimierczyk P. *Identyfikacja parametrów modeli pojazdów i wymuszeń w warunkach losowych*, IFTR Reports, 8/89, 43 pp., 1989.
3. Wedig W. *Fast algorithms in the parameter identification of dynamic systems*, Proc. IUTAM Symp. Random Vibr. and Reliability, pp. 217-227, Akad. Vlg., Bln. 1983.
4. P. Kazimierczyk *Identification of parametric noises in physical systems via equations for moments*, Arch. Mech., 37, 1-2, pp. 49-74, 1985.
5. Kozin F. and Natke H.G. *System identification techniques*, Structural Safety, 3, 3+4, pp. 269-317, 1986.
6. Schiehlen, W. *Probabilistic analysis of vehicle vibrations*, Prob. Eng. Mech., 1, 2, pp. 99-104, 1986.
7. Kozin, F. *Lectures on Structural Parameter Identification Techniques*, Proc. CISM Course Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems, Udine, June 15-19, 1987.
8. Kazimierczyk P. *Identyfikacja Parametryczna Układów Dynamicznych Opisywanych Stochastycznymi Dyfuzyjnymi Procesami Markowa*, Rozprawa Doktorska, IFTR Reports, 17/88, 324 pp., 1988.
9. Kazimierczyk P. *Parametric identification of diffusions with constraints; applications in fracture mechanics and vehicle dynamics*, Proc.

Conference on Stochastic Methods in Experimental Sciences, Szklarska Poręba, Sept. 1989, to be published by World Scientific Inc.

10. Kazakov I.E., Artem'ev V.M. *Optimizacija dinamičeskich sistem slučajnoj struktury*, Mir, 1980.
11. Hasminskij R.Z. *Diffusion processes and elliptic operators degenerated at the boundary*, Teor. Veroj. Primen., 3, 4. pp. 430-451, (in Russian) 1958.
12. Ventzel A.D. *On boundary conditions for multidimensional diffusions*, Teor. Veroj. Primen., 4, 2, pp. 172-185, (in Russian) 1959.
13. Skorohod A.V. *Stochastic equations for diffusion processes with boundaries*, Teor. Veroj. Primen., parts 1+2, 6/7, 3/1, pp. 287-298/5-25 (in Russian), 1961/62.
14. Freidlin M.I. *Diffusion Processes with reflection and the problem with normal derivative on a manifold with boundary*, Teor. Veroj. Primen., 8, 1, pp. 80-88, (in Russian), 1963.
15. Sato K. and Ueno T. *Multidimensional diffusions and Markow processes on the boundary*, J. of the Math. Kyoto Univ., 4, , pp. 529-605, 1965.
16. Watanabe S. *On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions*, J. of the Math. Kyoto Univ., 11, , pp. 169-180, 1971.
17. Strook D.W. and Varadhan S.R.S *Diffusion processes with boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., 24, , pp. 147-225, 1971.
18. Gikhman I.I. and Skorohod A.V., *Stochastic Differential Equations and Their Applications*, Naukova Dumka (in Russian), 1982.
19. Kree P., Soize Ch. *Mathematics of Random Phenomena*, Kluwer, 1983.
20. Poiron F. *Bounded random oscillations: model and numerical resolution for an airfoil*, proc. IUTAM Symp. Innsbruck/Igls, June 1987, pp. 243-251, 1988.
21. Ikeda N. and Watanabe Sh. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland/Kodansha, 1981.