

P. 167

COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

XXI Année 1928. Classe III. Fascicule 6.

# SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

## TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III  
nauk matematycznych i przyrodniczych.

Rok XXI 1928

Zeszyt 6.



---

WARSZAWA  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIĘKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO  
1928



COMPTES RENDUS DES SÉANCES  
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XXI Année 1928.

Fascicule 6.

**SPRAWOZDANIA**  
z posiedzeń  
**TOWARZYSTWA NAUKOWEGO**  
**WARSZAWSKIEGO**

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych.

Rok XXI 1928

Zeszyt 6.



---

WARSZAWA  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1 9 2 3

TŁCZONO W ZAKŁADACH GRAFICZNO-INTROLIG.  
I. DZIEWULSKI, Sp. z o. o., WARSZAWA, ŻŁOTA 29

TREŚĆ ZESZYTU 6.  
(Table de matières).

---

	Str.
<b>M. Wolfke i W. H. Keesom.</b> Dalsze pomiary stałej dielektrycznej ciekłego helu w zależności od temperatury . . . . .	137
<b>J. Roliński.</b> Badania nad asocjacją w ciekłych dielektrykach. . . . .	142
<b>H. Milicer-Grużewska.</b> Przyczynek do zagadnienia wahań na zbiorach typu ( $H$ ) . . . . .	157
<b>H. Milicer-Grużewska.</b> O ciągłości wahaní . . . . .	165
<b>E. Rybka.</b> Badania nad gwiazdą zmienną TU Cassiopeiae. . . . .	178

---

	Page
<b>M. Wolfke et W. H. Keesom.</b> Sur la constante diélectrique de l'hélium liquide en fonction de la température. . . . .	141
<b>J. Roliński.</b> Sur l'association des liquides diélectriques . . . . .	156
<b>H. Milicer-Grużewska.</b> Une contribution à la question des variations sur les ensembles du type ( $H$ ) . . . . .	157
<b>H. Milicer-Grużewska.</b> Sur la continuité de la variation . . . . .	166
<b>E. Rybka.</b> TU Cassiopeiae. The exact period of the light variation	178

INDEX

(continued)

1. Introduction. The present study is a continuation of the work done by the author in his previous publications. It is a study of the history of the Polish people in the United States, from the first immigrants in 1846 to the present time. The author has collected a vast amount of material, and has endeavored to present it in a clear and concise manner. The book is intended for the general reader, as well as for the student of Polish history and American immigration.

2. The first immigrants. The first Polish immigrants to the United States were the "Catholic Poles" who came to the country in 1846. They were mostly from the province of Galicia, and were seeking better living conditions and religious freedom. They were welcomed by the American people, and soon became an integral part of the American population.

3. The growth of the Polish population. The Polish population in the United States has grown steadily since 1846. It is now one of the largest ethnic groups in the country. This growth is due to the fact that many Polish immigrants have remained in the United States, and have had large families. In addition, many more Poles have immigrated to the United States in recent years.

4. The Polish contribution to American society. The Polish immigrants have made a significant contribution to American society. They have brought with them their rich cultural heritage, and have helped to enrich the American culture. They have also made a valuable contribution to the American economy, and have helped to build the American nation.

5. The Polish struggle for civil rights. The Polish immigrants have often faced discrimination and prejudice in the United States. They have fought hard for their civil rights, and have succeeded in many instances. Their struggle has been a noble one, and has helped to advance the cause of civil rights for all people in the United States.

6. The Polish diaspora. The Polish diaspora is the community of Poles living outside of Poland. It is a large and diverse community, and is an important part of the Polish nation. The Polish diaspora has played a significant role in the history of Poland, and continues to play an important role in the present.

7. The future of the Polish people in the United States. The future of the Polish people in the United States is bright. They are an integral part of the American population, and will continue to make a valuable contribution to American society. They are proud of their Polish heritage, and are committed to the American way of life.

SPRAWOZDANIE Z POSIEDZEŃ  
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO  
Wydział III nauk matematycznych i przyrodniczych.

---

**Posiedzenie**

z dn. 14 czerwca 1928 r.

M. Wolfke i W. H. Keesom.

**Dalsze pomiary stałej dielektrycznej ciekłego helu  
w zależności od temperatury.**

Przedstawił M. Wolfke dn. 14 czerwca 1928.

Pierwsze pomiary nad zależnością stałej dielektrycznej ciekłego helu od temperatury wykonaliśmy w roku zeszłym<sup>1)</sup>.

Pomiary te były prowizoryczne, aczkolwiek w zupełności wystarczały do określenia ogólnego charakteru zjawiska: wykazały one niespodziewany skok stałej dielektrycznej w pobliżu temperatury 2<sup>o</sup>3 K. Fakt ten posłużył nam za punkt wyjścia do dalszych badań nad innymi własnościami ciekłego helu w powyższej temperaturze i doprowadził nas w ten sposób do odkrycia dwóch różnych modyfikacji ciekłego helu<sup>2)</sup>.

W roku bieżącym przystąpiliśmy do powtórzenia omawianych pomiarów z większą dokładnością w celu ostatecznego wyznaczenia wartości stałej dielektrycznej ciekłego helu w różnych temperaturach. W pomiarach tych posilkowaliśmy się metodą i aparaturą opisaną w poprzedniej naszej pracy<sup>3)</sup>.

---

<sup>1)</sup> M. Wolfke i W. H. Keesom, Król. Akad. Nauk w Amsterdamie. XXXI. Str. 81. 1927. Comm. Leiden No. 190a. Sprawozd. T. N. W. XX. Wydz. III. str. 3. 1928.

<sup>2)</sup> W. H. Keesom i M. Wolfke, Król. Akad. Nauk w Amsterdamie. XXXI. Str. 90. 1927. Comm. Leiden No. 190b. C. R. de l'Acad. de Sciences, Paris. 185. Str. 1465. 1927. Sprawozd. T. N. W. XX. Wydz. III. Str. 11. 1928.

<sup>3)</sup> M. Wolfke i W. H. Keesom, loc. cit.

Pierwsza serja pomiarów, wykonana w dniu 15.III b. r. wykazała, że temperatura ciekłego helu w kryostacie, w którym zanurzony jest kondensatorek mierniczy, niedostatecznie się wyrównywuje, co zmniejsza dokładność pomiarów i uniemożliwia szybkie ustalenie żądanej temperatury. Zazwyczaj przy pomiarach cieplnych umieszcza się w kryostatatach automatyczne mieszadełko, poruszane przy pomocy elektromagnesu od zewnątrz. W tym jednak wypadku nastęrczały się wielkie trudności konstrukcyjne ze względu na brak miejsca w naczyniu Dewar'a, zawierającym kondensatorek mierniczy, jak również ze względu na obawę wpływu ruchomych części mieszadełka na pojemność kondensatora mierniczego. Trudności te zostały pokonane dzięki użyciu nowego mieszadełka, skonstruowanego, w tym celu przez p. G. J. Flim'a, technicznego kierownika warsztatów mechanicznych Laboratorium Kryogenicznego w Lejdzie. Mieszadełko to tak było urządzone, że wszystkie ruchome jego części znajdowały się w osłonie metalowej, sztywnie związanej z uziomioną częścią kondensatora mierniczego. W ten sposób ruchy mieszadełka nie wpływały zupełnie na pojemność kondensatora, co zostało skostatowane doświadczalnie.

Dalsze pomiary, wykonane dn. 23.III r. b., nie były jeszcze dość zadawalniające, gdyż, jak się okazało, zmieniał się stan drgań w obwodach prądów szybkozmiennych przy każdorazowym przełączeniu w obwodzie 2 kondensatorów normalnego  $C_2$  i mierniczego  $K^1$ ). Aby to źródło niedokładności wyeliminować, połączono na stałe kondensator mierniczy  $K$  wraz z mikrokondensatorkiem  $M$  z obwodem 2 i jednocześnie zastąpiono w obwodzie 1 kondensator obrotowy  $C_1$  przez precyzyjniejszy kondensator normalny (przedtem używany w obwodzie 2, jako kondensator porównawczy  $C_2$ ).

Po przeprowadzeniu tych ulepszeń zbadano aparaturę i sprawdzono jej czułość, która nie uległa zmianie. Pojemność kondensatora mierniczego wzrosła cokolwiek wskutek zmian w kryostacie w związku z dodaniem mieszadełka. Pomiar tej pojemności został wykonany przez porównanie jej z pojemnością znaną normalnego kondensatora stałego.

---

<sup>1)</sup> Porówn. M. Wolfke i W. H. Keesom, loc. cit. Rys. 1.



Ostateczna serja pomiarów została uskuteczona d. 29.III b. r. Pomiary te trwały z górą 5 godzin, w którym to czasie stan aparatury nie okazał żadnych tendencji kierunkowych, które mogłyby spowodować systematyczny błąd.

Wyniki pomiarów zostały obliczone na podstawie wzorów, podanych w poprzedniej naszej, kilkakrotnie tu cytowanej, pracy. Dokładne wyznaczenie ciśnień pary nasyconej helu w kryostacie i obliczenie odnośnych temperatur zawdzięczamy p. H. van Dijk'owi.

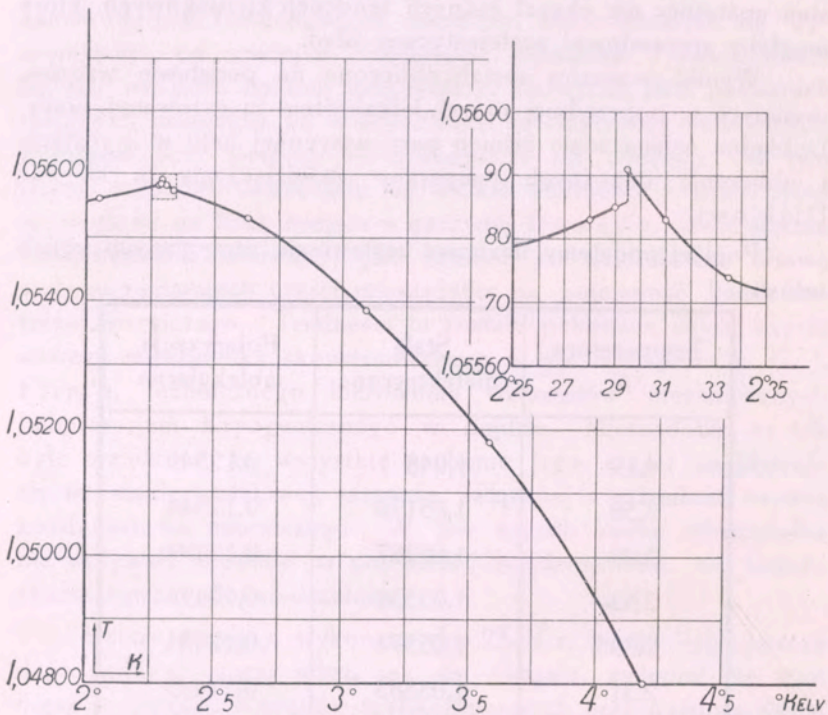
Poniżej podajemy liczbowe zestawienie otrzymanych rezultatów:

Temperatura $^{\circ}K$	Stała dielektryczna	Polaryzacja molekularna
4,19	1,048 <sup>1)</sup>	0,12549
3,58	1,05170	0,12544
3,09	1,05387	0,12499
2,63	1,05530	0,12499
2,335	1,05574	0,12484
2,31	1,05583	0,12495
2,295	1,05591	0,12513
2,29	1,05585	0,12509
2,28	1,05583	0,12504
2,05	1,05562	0,12499

Przebieg stałej dielektrycznej ciekłego helu w zależności od temperatury przedstawiony jest stosownie do tych pomiarów na podanym niżej rysunku. Widzimy, że w temperaturze pomiędzy  $2^{\circ}29$  i  $2^{\circ}295 K$  występuje skok stałej dielektrycznej, który odpowiada punktowi przemiany dwóch przez nas odkrytych różnych modyfikacji ciekłego helu; ostatnie te pomiary umożliwiły dokładniejsze wyznaczenie temperatury tego punktu. Przebieg krzywej w oto-

<sup>1)</sup> M. Wolfke i H. Kamerlingonnes, Comm. Leiden No. 171b

czeniu punktu przemiany przedstawiony jest na podanym rysunku z prawej strony powiększony 10-ciokrotnie.



Z powyższego zestawienia widzimy, że polaryzacja molekularna, obliczona według wzoru Clausius-Mosotti'ego, jest wielkością stałą, od temperatury niezależną i posiada dla obydwóch modyfikacji ciekłego helu, powyżej i poniżej punktu przemiany, tę samą wartość; średni błąd średniej arytmetycznej tej wielkości wynosi według tych pomiarów około 0,05%.

Niezależność polaryzacji molekularnej od temperatury dla obydwóch modyfikacji ciekłego helu jest zrozumiała ze względu na zupełną symetrię molekuly helu i braku w niej wobec tego elektrycznego dipolu. Fakt zaś, że wartość tej polaryzacji dla obydwóch modyfikacji jest ta sama, wskazuje na to, że w punkcie przemiany ciekłego helu I na ciekły hel II cząsteczka helu nie ulega zmianie, w każdym razie więzy elektronów polaryzacyjnych pozostają te same.

## STRESZCZENIE.

Pomiary nad zależnością stałej dielektrycznej ciekłego helu od temperatury zostały powtórzone w sposób bardziej dokładny. Ogólny charakter krzywej, wyrażającej tę zależność jest ten sam, co w poprzedniej, pracy, lecz przebieg krzywej bardziej regularny.

Temperatura punktu przemiany, ściślej wyznaczona, znajduje się pomiędzy  $2^{\circ}29$  i  $2^{\circ}295$  K.

Pozatem skonstatowana została niezależność polaryzacji molekularnej ciekłego helu od temperatury i od modyfikacji, z czego wynika, że w punkcie przemiany molekula helu nie ulega zmianie.

M. Wolfke et W. H. Keesom.

### **Sur la constante diélectrique de l'hélium liquide en fonction de la température.**

Présenté par M. Wolfke le 14 juin 1928.

Résumé.

Les auteurs ont répété leurs mesures antérieures de la variation de la constante diélectrique de l'hélium liquide avec la température cette fois d'une manière plus exacte. Ils ont déterminé avec une précision plus grande qu'auparavant la température du point de transformation des deux états différents de l'hélium liquide, qu'ils avaient découvert auparavant; elle est égale à  $2^{\circ}295$  Kelv. En même temps ils ont constaté, que la structure de la molécule de l'hélium ne change pas au passage de l'He I à l'He II.

J. Roliński.

## Badania nad asocjacją w ciekłych dielektrykach.

Przedstawił M. W o l f k e, dn. 14 czerwca 1928 r.

W związku z teorią dielektryków Debye'a<sup>1)</sup> ukazały się w ostatnich czasach liczne prace nad zależnością stałej dielektrycznej od temperatury, w mieszaninach zaś — od koncentracji. Debye zakłada w swej teorii, iż molekuly wielu dielektryków pod względem układu swych ładunków elektrycznych stanowią tak zwane „dipole” o stałych momentach elektrycznych. W takich dielektrykach, zwanych dipolowemi, na polaryzację molekularną składają się z jednej strony przesunięcia elektronów związanych, z drugiej zaś strony orientacja dipoli molekularnych. Opierając się na tych założeniach, Debye wyprowadził następujący wzór na polaryzację molekularną  $P$ :

$$(1) \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{4}{3} \Pi N \left( \gamma' + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza stałą dielektryczną,  $M$  — ciężar molekularny,  $\rho$  — gęstość dielektryka,  $N$  — stałą Avagadry,  $\gamma'$  — polaryzację przesunięciową jednej molekuly,  $\mu$  — moment dipolu,  $k$  — stałą Boltzmana i  $T$  — temperaturę dielektryka w skali bezwzględnej.

Zgodność wzoru powyższego z doświadczeniem stwierdzoną została wielokrotnie, dały się jednak zauważyć także wyraźne odchylenia od niego, szczególnie przy badaniach polaryzacji molekularnej mieszanin w różnych koncentracjach, przy stałej temperaturze. Odchylenia te dają się według Debye'a<sup>2)</sup> wytłumaczyć asocjacją molekuł, która wpływa na średnią wartość momentu dipolowego, gdyż grupa molekuł zasocjowanych posiada inny moment wypadkowy, niż każda molekula zosobna. Te zjawiska asocjacji są jednakże dotychczas niedostatecznie wyjaśnione, gdyż

1) P. Debye Phys. ZS. **3**. 97. 1912 i zbiorowy artykuł w „Handbuch der Radiologie” Marxa, VI.597.1925.

2) P. Debye, Hdb. d. Rad. loc. cit. str. 633.

zaledwie kilku badaczy je uwzględniło<sup>1)</sup>, dlatego też celem pracy niniejszej było systematyczne zbadanie ich drogą wyznaczania polaryzacji szeregu mieszanin cieczy dipolowych i niedipolowych.

Jako zasadniczą ciecz niedipolową, mającą nam służyć za główny rozpuszczalnik, obrano benzol<sup>2)</sup>. Stała dielektryczna jego była wielokrotnie wyznaczana i stosuje się on do wzoru Clausius-Mosottiego, co dowodzi, iż jest on substancją niedipolową. Jako dalsze dwie substancje niedipolowe, użyto dwusiarczek węgla<sup>3)</sup> i czterochlorek węgla<sup>3)</sup>. Co się tyczy substancyj dipolowych, to przy wyborze ich kierowano się asymetrią molekularnej struktury chemicznej, która warunkuje również asymetrię elektryczną molekuly<sup>4)</sup>; użyto przytem dwie bliżej niebadane dotychczas pod względem asocjacji substancje: chlorobenzol ( $C_6H_5Cl$ ) i chinolinę ( $C_9H_7N$ ), a także wielokrotnie badany eter etylowy ( $C_4H_{10}O$ ), który uważany był dotychczas za ciecz nieasocjującą<sup>5)</sup>.

Wszystkie substancje badane starannie przedtem oczyszczono metodą chemiczną<sup>6)</sup>. Z powyżej wymienionych cieczy zestawione były następujące mieszaniny w różnych koncentracjach, dobierając je mniej więcej co 10%:

1) M. Jona, Phys. ZS. **20**. 14. 1919.

L. Lange, ZS. f. Phys. **33**. 169. 1925.

C. T. Zahn, Phys. Rev. **27**. 329. 1926.

2) P. Lertes, ZS. f. Phys. **6**. 56. 1921.

H. Isnardi, ZS. f. Phys. **9**. 161. 1922.

W. Graffunder, An. d. Phys. **70**. 225. 1923.

3) H. Isnardi, ZS. f. Phys. **9**. 161. 1922.

4) J. Errera, Phys. ZS. **23**. 764. 1926.

R. Saenger, Phys. ZS. **27**. 550. 1926.

5) P. Debye, Phys. ZS. **3**. 97. 1912.

P. Lertes, ZS. f. Phys. **6**. 56. 1921.

J. Herweg, ZS. f. Phys. **3**. 36. 1920.

L. Lange, ZS. f. Phys. **33**. 169. 1925.

J. Williams, Phys. ZS. **6**. 174. 1928.

6) Na tem miejscu pragnę podziękować P. Prof. L. Szperlowi Kierownikowi Zakładu Chemii Organicznej Politechniki Warszawskiej, jak również P. T. Pytaszowi, Adjunktowi tegoż Zakładu, za danie mi możliwości wykonania tych prac chemicznych w wymienionym Zakładzie i za cenne w tym kierunku udzielone mi wskazówki.

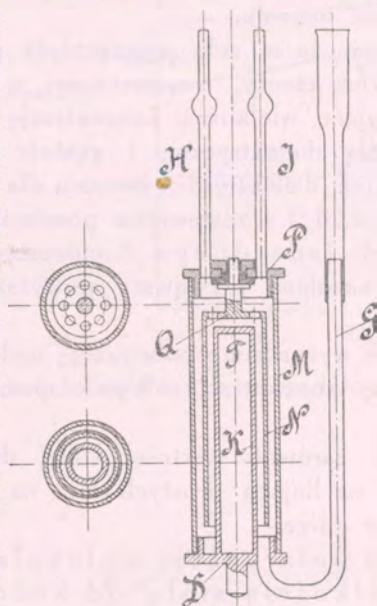
- 1) niedipolowa w niedipolowej: siarczek węgla — benzol, czterochlorek węgla — benzol i czterochlorek węgla — siarczek węgla;
- 2) dipolowa w niedipolowej: chlorobenzol — benzol, chinolina — benzol i eter — benzol;
- 3) dipolowa w dipolowej: chinolina — chlorobenzol, chlorobenzol — eter i chinolina — eter.

Dla wyznaczenia polaryzacji należało wymierzyć koncentrację, stałą dielektryczną oraz gęstość. Wszystkie pomiary robiono przy temperaturze pokojowej 18<sup>o</sup> C. Koncentrację wyznaczano przez ważenie każdego składnika z dokładnością do 1 mg. Do pomiarów stałej dielektrycznej użyto metody rezonancyjno-kompensacyjnej<sup>1)</sup>, przy długości fali 770 metrów. Pojemność kondensatora do cieczy badanych wyznaczano przez zmniejszenie pojemności obrotowego kondensatora mierniczego, na osi którego umocowano zwierciadełko. Zmiany pojemności kondensatora mierniczego mierzono z odczytań na skali o promieniu 4 metry i długości 5 metrów. Czułość aparatury była taką, że przy obrocie kondensatora o 1 mm skali (odpowiadało to zmianie pojemności 0,095 cm C) galwanometr wychylał się z zerowego położenia o 14 cm skali, odległej od niego o 7 metrów.

Na rys. 1 przedstawiony jest kondensator do mierzenia stałej dielektrycznej cieczy badanych. Składał się on z 3-ch rurek mosiężnych, poniklowanych, *M*, *N* i *K*. Zewnętrzna *M* i wewnętrzna *K* są połączone ze sobą mosiężnym denkiem *D* i stanowią jedną parę składek. Są one połączone z uziemioną okładką kondensatora mierniczego. Wewnętrzna okładka *N* jest zawieszona na przykrywie *P*. Dwie tulejki z izolatorów powyżej i poniżej przykrywy izolują okładkę *N* i zabezpieczają mocne jej osadzenie. Przykrywa okładki *N* ma 8 otworów, rozmieszczonych na okręgu, umożliwiających całkowite napełnienie kondensatora cieczą. Rurka *G* służy do napełniania kondensatora cieczą, a rurki *H* i *I* służą do odprowadzenia powietrza przy nalewaniu cieczy, a także potrzebne są przy przedmuchiwanu kondensatora

<sup>1)</sup> M. Jeżewski, Rozprawy Polsk. Ak. Um. III. 20 A. 73. 1921.  
M. Wolfke i H. Kamerlingh Onnes Król. Akad. Amsterdam. XXVII. str. 623. 1924. 4. Com. Leiden Nr. 171 b. Sprawozd. i Prace Warsz. T-wa Polit. III.8.1924.

suchem powietrzem. Wyloty rurek szklanych były przykrywane koreczkami w celu uniemożliwienia parowania cieczy podczas pomiarów stałej dielektrycznej. Połączenie okładki wewnętrznej z obwodem drgań uskuteczmano przy pomocy iglicy, którą opuszczano na srebrny kołpaczek w górnej części trzpienia od okładki *N*. Pojemność kondensatora badanego, napełnionego suchym powietrzem, wynosiła 37,7 cm *C*.



Rys. 1.

Błąd średni średniej arytmetycznej przy pomiarze pojemności wynosił od 0,2 do 0,6 mm skali, co stanowiło od 0,01% do 0,1%. Błąd średni stałej dielektrycznej wynosił około 0,5%.

Gęstość wyznaczono metodą hydrostatyczną. Błąd możliwy gęstości wynosił około 0,05%.

Opierając się na tem, że benzol jest ciałem niedopolowem i cieczą nieasocjującą, zakładamy, że polaryzacja jego w mieszaninach (gdzie użyto go za podstawowy rozpuszczalnik przy badaniach) dodaje się addytywnie do polaryzacji cieczy rozpuszczonej. Wówczas polaryzacja molekularna *P* tej cieczy w nim rozpusz-

czoney wyrazi się, na podstawie reguły mieszaniny, następującym wzorem:

$$(2) \quad P = \frac{M}{c} \left[ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\rho} - (1 - c) \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho_2} \right]$$

gdzie  $P$  jest polaryzacją molekularną cieczy rozpuszczonej,  $M$  jej ciężar molekularny,  $c$  jej gramowa koncentracja,  $\varepsilon$  stała dielektryczna mieszaniny,  $\rho$  gęstość mieszaniny,  $\varepsilon_2$  stała dielektryczna benzolu i  $\rho_2$  gęstość benzolu.

Widzimy zatem, że w celu wyznaczenia polaryzacji molekularnej jakiegokolwiek cieczy, rozpuszczonej w benzolu, należy wymierzyć następujące wielkości: koncentrację gramową cieczy rozpuszczonej, stałą dielektryczną i gęstość mieszaniny oraz gęstość benzolu. Stałą dielektryczną benzolu dla temperatury 18°C przyjęto za równą 2,28<sup>1)</sup> z zestawienia pomiarów B. Turner'a P. Drudeg'o i H. Isnardi'ego Kondensator badany wycechowano także benzolem, przyjmawszy powyższą wartość stałej dielektrycznej.

W taki sposób wyznaczono polaryzację molekularną siarczku węgla, jako funkcję koncentracji. Wyniki pomiarów i obliczeń zawiera rys. 2.

Widzimy, że zarówno wartości stałej dielektrycznej jak i gęstości nie leżą na liniach prostych lecz na liniach krzywych lekko wklęsłych ku górze.

Obliczona zaś polaryzacja molekularna siarczku węgla jest wielkością stałą, od koncentracji niezależną.

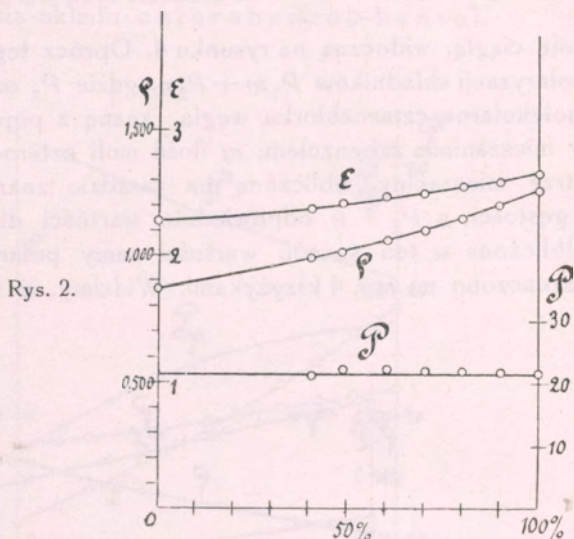
Podobny wynik otrzymano dla czterochloru węgla, badanego w mieszaninie z benzolem, jak to widać z rys. 3.

Stała dielektryczna mieszaniny ma przebieg prostoliniowy, natomiast gęstości leżą na linii krzywej. Wartości polaryzacji molekularnej czterochloru węgla leżą na linii prostej, równoległej do osi odciętych, co wskazuje, że i dla czterochloru węgla polaryzacja molekularna jest wartością stałą, niezależną od koncentracji.

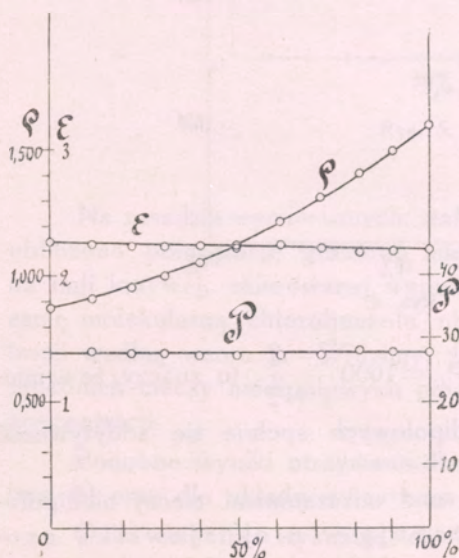
1) P. Drude, ZS. ph. Ch. **23**. 269. 1897.  
B. B. Turner, ZS. ph. Ch. **35**. 385. 1900.  
H. Isnardi, ZS. f. Phys. **9**. 161. 1922.



Wobec tego, że w zbadanych układach przyjęto założenie o addytywności polaryzacji, należało potwierdzić doświadczalnie,

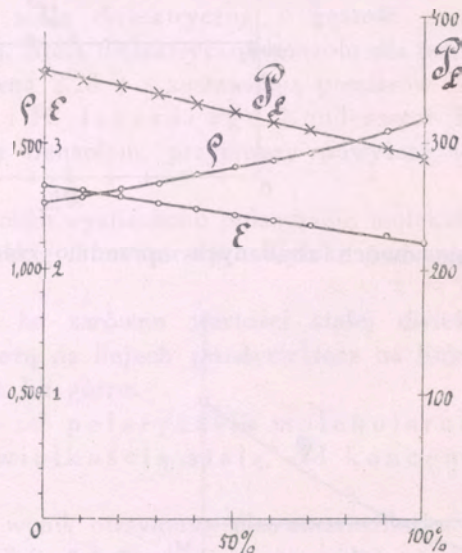


iz w mieszaninie dwóch zbadanych uprzednio cieczy niedipolo-



wych: siarczku węgla i czterochlorku węgla — stosuje się to samo prawo addytywności polaryzacji molekularnej.

W tym celu obliczono polaryzację 1 litra mieszaniny według wzoru  $P_L = 1000 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$  i na zasadzie tych wartości poprowadzono linię ciągłą, widoczną na rysunku 4. Oprócz tego obliczono sumę polaryzacji składników  $P_1 m + P_2 n$ , gdzie  $P_1$  oznacza polaryzację molekularną czterochlorku węgla, znaną z poprzedniego badania w mieszaninie z benzolem,  $m$  ilość moli czterochlorku węgla w 1 litrze mieszaniny, obliczoną na zasadzie znanych koncentracji i gęstości, a  $P_2$  i  $n$  odpowiednie wartości dla siarczku węgla. Obliczone w ten sposób wartości sumy polaryzacji składników zaznaczono na rys. 4 krzyżykami. Widzimy, iż leżą one dokładnie

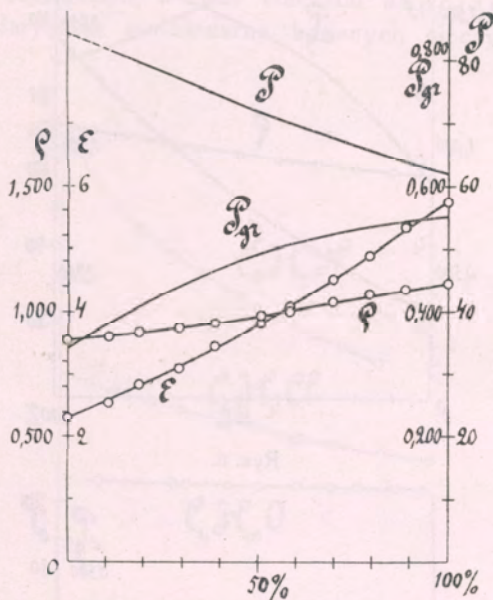


Rys. 4.

na linii polaryzacji 1 litra  $P_L = 1000 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ , to znaczy, że w mieszaninie dwóch cieczy niedipolowych spełnia się addytywność polaryzacji składników.

Z badań, wykonanych nad mieszaninami cieczy niedipolowych, wynika, iż nie występują w nich zjawiska asocjacji, i że stosuje się do nich prawo addytywności polaryzacji molekularnej.

W taki sam sposób, jak poprzednio, zostały potraktowane mieszaniny cieczy dipolowych w benzolu. Na rys. 5 widzimy wyniki pomiarów dla układu chlorobenzol-benzol.

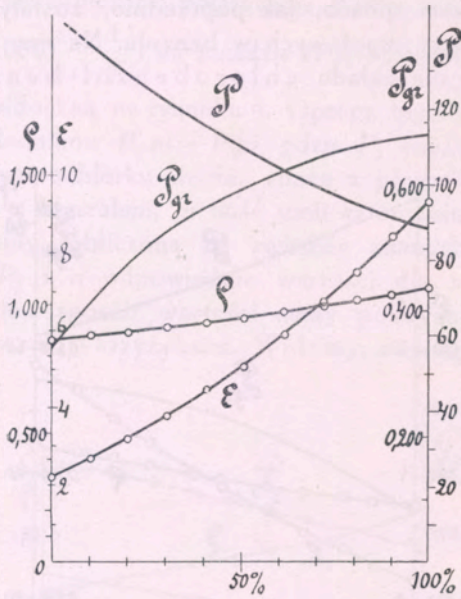


Rys. 5.

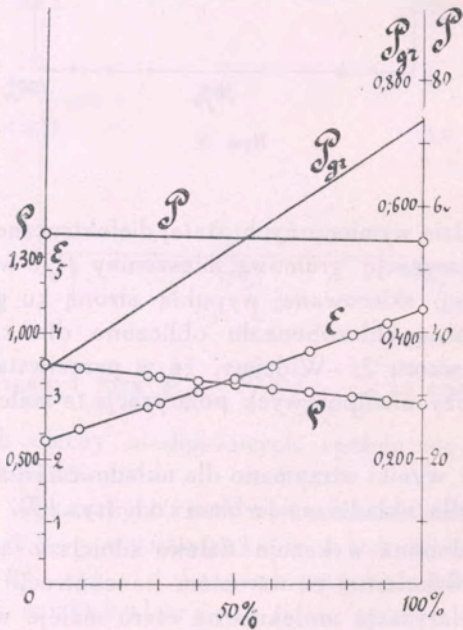
Na zasadzie wymierzonych; stałej dielektrycznej i gęstości — obliczono polaryzację gramową mieszaniny  $P_{gr}$ ; wartości te leżą na linii krzywej, skierowanej wypukłą stroną ku górze. Polaryzację molekularną chlorobenzolu obliczono dla każdej koncentracji według wzoru 2. Widzimy, że w przeciwstawieniu do poprzednich cieczy niedipolowych polaryzacja ta maleje ze wzrostem koncentracji.

Podobne wyniki otrzymano dla układu chinolina-benzol, (rys. 6) oraz dla układu eter-benzol (rys. 7).

O ile chinolina wykazuje daleko silniejszy spadek krzywej polaryzacji molekularnej ze wzrostem koncentracji niż chlorobenzol, o tyle polaryzacja molekularna eteru maleje w słabym tylko stopniu, jednakże zupełnie wyraźnie.

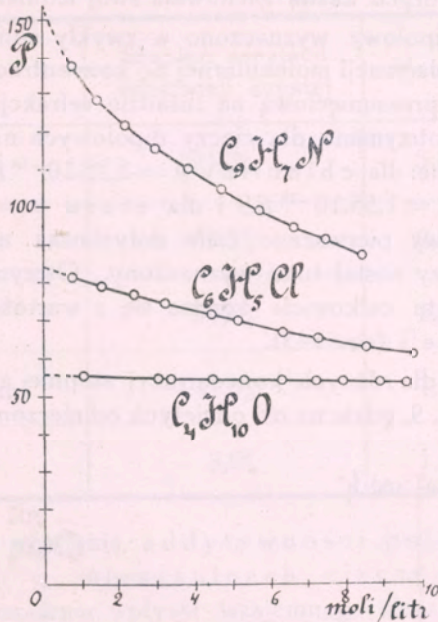


Rys. 6.



Rys. 7.

Na rys. 8 przedstawione są polaryzacje molekularne tych 3-ch cieczy dipolowych, jako funkcje koncentracji w molach na 1 litr mieszaniny. Zmiana polaryzacji molekularnej ze wzrostem koncentracji przy stałej temperaturze, według teorii Debye'a, wskazuje na zachodzącą w tych cieczach asocjację. Wobec tego, że polaryzacja molekularna badanych cieczy dipolowych



Rys. 8.

maleje ze wzrostem koncentracji, przyjęto najprostsze założenie, że moment wypadkowy 2-ch zasocjowanych molekuł dipolowych jest równy 0, czyli że przy asocjacji zubożniają one swoje dipole. Dla określenia ilościowej miary asocjacji wprowadzono wielkość  $K$ , którą nazwano stopniem asocjacji, i która oznacza stosunek ilości molekuł zasocjowanych do całkowitej ilości molekuł w 1 molu danej substancji. Wyraża się ona wzorem następującym:

$$(3) \quad K = 1 - \frac{N_0}{N}$$

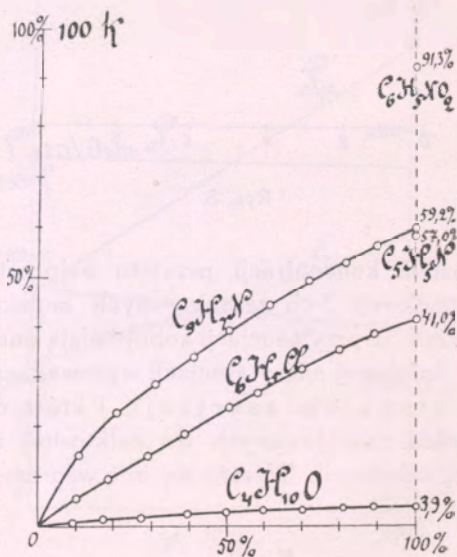
gdzie  $N_0$  oznacza ilość niezasocjowanych molekuł w 1 molu, a  $N$  stałą Avogadry. Wartość  $N_0$  można obliczyć ze wzoru Debye'a na polaryzację molekularną:

$$(4) \quad P = \frac{4}{3} \Pi N \gamma' + \frac{4}{3} \Pi N_0 \frac{\mu^2}{3kT}$$

gdzie w drugim wyrazie figuruje tylko ta ilość molekuł niezasocjowanych, z których każda zachowała swój moment dipolowy  $\mu$ .

Moment dipolowy wyznaczono w zwykły sposób, ekstrapolując krzywą polaryzacji molekularnej do koncentracji 0, i obliczając polaryzację przesunięciową na zasadzie refrakcji molekularnej. W ten sposób otrzymano dla cieczy dipolowych następujące momenty elektryczne: dla chinoliny  $\mu = 2,25 \cdot 10^{-18}$  ES, dla chlorobenzolu  $\mu = 1,55 \cdot 10^{-18}$  ES i dla eteru  $\mu = 1,22 \cdot 10^{-18}$  ES. Moment dipolowy pierwszego ciała dotychczas nie był znany i po raz pierwszy został tutaj wyznaczony. Otrzymana dla eteru wartość momentu całkowicie zgadza się z wartością, otrzymaną przez L. Lange<sup>5)</sup> (str. 143).

Obliczone dla różnych koncentracji stopnie asocjacji przedstawiono na rys. 9, gdzie na osi odciętych odmierzone końcentracje



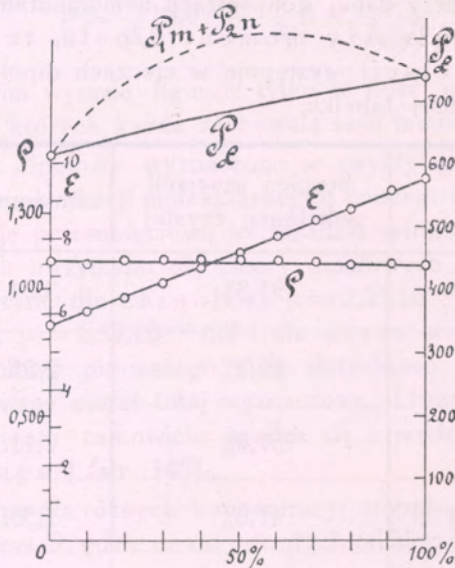
Rys. 9.

gramowe. W ten sam sposób dla porównania obliczono stopień asocjacji dla czystego nitrobenzolu i czystej pirydyny, wzięwszy dane z pomiarów L. Lange<sup>5)</sup> (str. 143). Z zestawienia wszystkich tych wyników widzimy wyraźną zależność pomiędzy stopniem asocjacji przy danej koncentracji a momentem dipolu; mianowicie — im większy moment dipolu, tem większy stopień asocjacji występuje w cieczach dipolowych, jak to wynika z poniższej tabelki:

Ciało	Stopień asocjacji substancji czystej	Moment dipolowy
Nitrobenzol	91,3%	$3,84 \cdot 10^{-18}$ ES
Chinolina	59,2%	$2,25 \cdot 10^{-18}$ ES
Pirydyna	57,9%	$2,11 \cdot 10^{-18}$ ES
Chlorobenzol	41,0%	$1,55 \cdot 10^{-18}$ ES
Eter	3,9%	$1,22 \cdot 10^{-18}$ ES

W celu zbadania addytywności polaryzacji molekularnej w mieszaninach cieczy dipolowych, a także dla ustalenia wpływu wzajemnego cieczy dipolowych na asocjację, użyto tych samych, co poprzednio, cieczy dipolowych korzystając ze znanych ich własności polaryzacyjnych. Wyniki tych pomiarów podano na rys. 10 oraz na rysunkach 11 i 12. Rys. 10 odnosi się do układu chinolina-chlorobenzol, rys. 11 — do układu chinolina-eter, wreszcie rys. 12 — do układu chlorobenzol-eter. Podano tam oprócz stałej dielektrycznej i gęstości także polaryzację 1 litra mieszaniny  $P_L = 1000 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$  i dla porównania linią przerywaną sumę iloczynów polaryzacji molekularnych każdego ze składników przez ilość moli w 1 litrze  $P_1 m + P_2 n$ , przytem wartość polaryzacji molekularnej w każdym wypadku brano z krzywych polaryzacji (rys. 8), uwzględniając każdorazowo odpowiednią

koncentrację. Widzimy, iż te dwie krzywe odbiegają od siebie znacznie, przytem polaryzacja rzeczywista mieszaniny jest mniejszą od tej, jaka powinna być według prawa addytywności.

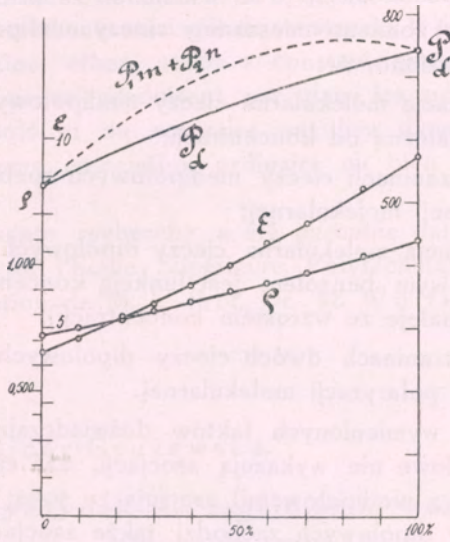


Rys. 10.

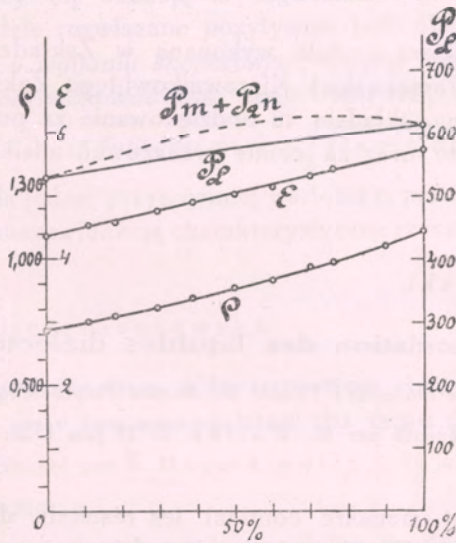
Zjawisko to daje się wytłumaczyć dodatkową asocjacją mieszaną, zachodzącą pomiędzy molekułami różnych składników. Asocjacja mieszana występuje najsilniej w mieszaninach chinoliny z chlorobenzolem, słabiej w mieszaninach każdej z tych cieczy z eterem; w ostatnim wypadku asocjacja mieszana chinoliny z eterem jest silniejszą niż w mieszaninie chlorobenzolu z eterem.

W związku z tym wynikiem należałoby ustalić nomenklaturę mieszanin ciekłych dielektryków, i nazywać normalnemi te, w których zachodzi addytywność polaryzacji molekularnej. Będą to zatem mieszaniny cieczy niedipolowych z niedipolowemi i dipolowych z niedipolowemi. Mieszaniny zaś cieczy dipolowych należałoby nazywać nienormalnemi, gdyż zachodzi w nich asocjacja mieszana i ztracają się w nich indywidualne własności każdego ze składników.





Rys. 11.



Rys. 12.

## Wyniki.

W pracy tej zbadano mieszaniny cieczy niedipolowych i dipolowych, i znaleziono, że:

1) polaryzacja molekularna cieczy niedipolowych jest wartością stałą, niezależną od koncentracji;

2) w mieszaninach cieczy niedipolowych spełnia się addytywność polaryzacji molekularnej;

3) polaryzacja molekularna cieczy dipolowych w mieszaninach z niedipolowym benzolem jest funkcją koncentracji (w naszym wypadku maleje ze wzrostem koncentracji);

4) w mieszaninach dwóch cieczy dipolowych nie spełnia się addytywność polaryzacji molekularnej.

Z powyżej wymienionych faktów doświadczalnych wynika, że ciała niedipolowe nie wykazują asocjacji, zaś ciała dipolowe (w mieszaninach z niedipolowemi) asocjują ze sobą; w mieszaninach 2-ch cieczy dipolowych zachodzi także asocjacja mieszana.

Oprócz tego zostały wyznaczone w pracy niniejszej momenty dipolowe dla chinoliny  $\mu = 2,25 \cdot 10^{-18}$  ES i chlorobenzolu  $\mu = 1,55 \cdot 10^{-18}$  ES.

---

Praca niniejsza została wykonaną w Zakładzie Fizycznym I Politechniki Warszawskiej. Kierownikowi tego Zakładu, P. Prof. Dr. M. Wolfkemu, składam tu podziękowanie za podanie mi tak ciekawego tematu oraz za cenne wskazówki, udzielane mi podczas pracy.

J. Rolinski.

### Sur l'association des liquides diélectriques.

Extrait de thèse de doctorat à l'École Supérieure Polytechnique de Varsovie.

Présenté par M. Wolfke. le 14 juin 1928.

Résumé.

Le présent mémoire contient les résultats de recherches sur la constante diélectrique et sur les phénomènes d'association dans les mélanges de liquides diélectriques.

On a étudié différents mélanges de substances dépourvues de dipols électriques, notamment du benzène, du sulfure de carbone et du tétrachlorométhane ainsi que de substances à dipols: chlorobenzène, quinoléine, ether, et on a constaté que les phénomènes d'association ne se produisent pas dans les substances dépourvues de dipols et au contraire ont lieu dans les substances à dipols, comme association ordinaire ou bien comme association mixte.

La présente recherche a été exécutée dans le Laboratoire de Physique de l'Ecole Supérieure Polytechnique de Varsovie, sous la direction de M. le Prof. Dr. M. Wolfke.

H. Milicer-Grużewska.

### Przyczynek do zagadnienia wahań na zbiorach typu $(H)$ .

Przedstawił S. Mazurkiewicz dn. 14 czerwca 1928 r.

Streszczenie.

W pracy tej okazuję iż zagadnienie wahań na zbiorach typu  $(H)$  będzie rozwiązane pozytywnie jeśli okaże się, iż *każdej* funkcji  $f(x)$  o wahanii skończonym, ciągłej i o odchyleniu  $\neq 0$  można przyporządkować taki zbiór typu  $(H)$ , zawarty w przedziale  $\leq 0, 2\pi \gg$ , iż funkcja:  $\varphi(x) = \int_0^x \tau(x+t) df(x)$  jest o odchyleniu  $\neq 0$  dla jednej przynajmniej wartości  $t_0$  przedziału  $\leq 0, 2\pi \gg$ , gdzie  $\tau(x)$  oznacza funkcję charakterystyczną rzeczzonego zbioru  $(H)$ .

H. Milicer-Grużewska.

### Une contribution à la question des variations sur les ensembles du type $(H)$ .

Présenté par S. Mazurkiewicz le 14 juin 1928.

#### Introduction.

En nous appuyant sur la possibilité de décomposer chaque fonction à variation bornée et à l'écart nul en différence des

deux fonctions nondécroissantes et à l'écart nul<sup>1)</sup> M<sup>r</sup> A. Rajchman et moi nous avons obtenu le resultat suivant: „Pour chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée et à l'écart nul, et  $\tau(x)$  la fonction caractéristique de segments, en nombre fini, situés dans l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ , on a:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau(nx) df(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx [f(2\pi) - f(0)]$$
 <sup>2)</sup>.

Je me demande combien l'écart nul de la fonction  $f(x)$  est essentiel, et je reçois le:

**Lemme I.** Si la fonction  $f(x)$  est à variation bornée, continue et à l'écart non nul, et  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique d'un nombre fini de segments, situés dans l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ , et telle que:

$$\int_0^{2\pi} \tau(x) e^{ix} dx \neq 0$$

alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t)) df(x) \neq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx [f(2\pi) - f(0)]$$

pour une au moins valeurs  $t$  de l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ .

Au cas d'une fonction  $f(x)$  nondécroissante nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t)) df(x) > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx [f(2\pi) - f(0)].$$

Ces deux résultats permettent de réduire la question des variations sur les ensembles  $(H)$  à la question suivante: *Question (S)*: „peut on faire correspondre à chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée, continue et à l'écart non nul un tel ensemble  $(H)$ , situé dans l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ , que la fonction:

1) „Sur les fonctions à variation bornée et à l'écart Hadamardien nul”, théorème III. H. Milicer-Grużewska. C. R. de la Soc. d. Sc. de Varsovie, 1928.

2) Ce résultat ne fût pas publié.

$$\varphi(x) = \int_0^x \tau(x+t) df(x)$$

soit à l'écart non nul, pour une au moins valeur  $t_0$  de l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \geq$ , si  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique de cet ensemble  $(H)$ ".

Je démontre, en effet, le:

**Théorème I.** Si la condition (S) a lieu, la condition nécessaire et suffisante pour que la variation de chaque fonction à variation bornée soit nulle sur chaque segment d'un ensemble  $(H)$  est que cette fonction soit à l'écart nul<sup>1)</sup>.

Un théorème, pareil à la proposition (S), fût démontré pour les ensembles  $(B)$  et de mesure  $\neq 0$ <sup>2)</sup>. Cela augmente la possibilité de la proposition (S). Mais d'autre part, il est évident, qu'elle est en défaut si l'on se réduirait aux ensemble  $(H)$ , composés d'un nombre fini ou dénombrable des points.

**Remarque.** La longueur et la position de l'intervalle, qui contient les intervalles ou les ensembles desquels il fût question, n'est pas essentiel. L'essentiel est qu'il soit fini.

### § 1. La démonstration du lemme I.

Posons:

$$a_n - i b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} df(x)$$

et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n - i b_n| = \alpha > 0 \quad (\text{d'après la prémisse}).$$

Soit  $\{n_k\}$  une telle suite des entiers positifs que:

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - i b_{n_k}| = \alpha.$$

1) M<sup>r</sup> A. Rajchman a démontré que la variation de la fonction à variation bornée et à l'écart nul est nulle sur chaque ensemble  $(H)$ . La preuve que je présente est toute différente et plus courte; elle donne la possibilité d'intervertir le théorème.

2) Voir la note cité sous 1) page 1, (théorème II).

Posons encore:

$$(2) \quad \overline{\lim} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \tau(n_k(x+t)) df(x) \right]^2 dt = w$$

$$(2') \quad \int_0^{2\pi} \tau(x) dx = 2\pi \theta \quad (2'') \quad \left| \int_0^{2\pi} \tau(x) e^{ix} dx \right| = 2\pi \theta_1.$$

Soit maintenant  $\{n_{k_l}\}$  une telle suite choisie de la suite  $\{n_k\}$  que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \tau(n_{k_l}(x+t)) df(x) \right]^2 dt = w.$$

On a donc aussi:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |\alpha_{n_{k_l}} - i b_{n_{k_l}}| = \alpha.$$

Faisons correspondre à  $\varepsilon > 0$  et tel que:

$$(3) \quad \varepsilon < \min [\alpha, 2\pi \theta, 2\pi \theta_1]$$

un entier  $L$  de façon qu'on ait pour  $n_{k_L} = n_0$ :

$$(3') \quad \left| \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \tau(n_0(x+t)) df(x) \right]^2 - w \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(4) \quad ||\alpha_{n_0} - i b_{n_0}| - \alpha| \leq \varepsilon.$$

Je définis maintenant la fonction  $\bar{\tau}(x)$  comme il suit:

1<sup>o</sup>  $\bar{\tau}(x)$  est différentiable 4 — fois

2<sup>o</sup>  $\bar{\tau}(x)$  est de période  $2\pi$

$$3^o \quad \left| \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} \bar{\tau}(n_0(x+t)) df(x) \right]^2 - \left[ \int_0^{2\pi} \tau(n_0(x+t)) df(x) \right]^2 \right\} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$4^0 \left| \int_0^{2\pi} e^{ix} \tau(x) dx - \int_0^{2\pi} e^{ix} \bar{\tau}(x) dx \right| \leq \varepsilon;$$

$$4^1 \left| \int_0^{2\pi} \tau(x) dx - \int_0^{2\pi} \bar{\tau}(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Une telle définition de la fonction  $\bar{\tau}(x)$  est toujours possible, à cause de la continuité de la fonction  $f(x)$ .

Mais on sait que si l'on pose:

$$(5) \quad \bar{\tau}(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_p - i\beta_p) e^{ipx}$$

on a:

$$\int_0^{2\pi} \bar{\tau}(n_0(x+t)) df(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_p - i\beta_p) (a_{n_0 p} + i b_{n_0 p}) e^{ipt}$$

d'où:

$$\int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \bar{\tau}(n_0(x+t)) df(x) \right]^2 dt = \frac{\pi^3}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_p^2 + \beta_p^2) (a_{n_0 p}^2 + b_{n_0 p}^2)$$

donc:

$$(6) \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \bar{\tau}(n_0(x+t)) df(x) \right]^2 dt \geq \frac{\pi^3}{2} [a_0^2 a_0^2 + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) (a_{n_0 p}^2 + b_{n_0 n}^2)].$$

Il résulte des expressions: (2') à (6) et (3<sup>0</sup>) à (4<sup>0</sup>) que.

$$(7) \quad w \geq \frac{\pi^3}{2} [(2\theta - \varepsilon)^2 a_0^2 + (\theta_1 - \varepsilon)^2 (a - \varepsilon)^2] - \varepsilon.$$

Mais la fonction  $\bar{\tau}(x)$  ainsi que l'entier  $n_0$  sont éliminés de l'expression (7) donc  $\varepsilon$  peut être aussi petit que l'on veut et nous avons:

$$(8) \quad w \geq 2\pi^3 (\theta^2 a_0^2 + \theta_1^2 a^2)$$

c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t)) df(x) \right]^2 dt \geq 2\pi^3 (\theta^2 a_0^2 + \theta_1^2 a^2)$$

Mais alors, pour une au moins valeur  $t_0$  de l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \geq$  il doit être:

$$\left[ \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t_0)) df(x) \right]^2 \geq \pi^2 (\theta^2 a_0^2 + \theta_1^2 a^2)$$

ou:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t_0)) df(x) \right| \geq \pi \sqrt{\theta^2 a_0^2 + \theta_1^2 a^2}$$

Nous avons donc:

$$\overline{\lim} \left| \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t_0)) df(x) \right| - \pi \theta |a_0| \geq \pi \theta_1 a$$

c. à d.:

$$(9) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} \tau(n(x+t_0)) df(x) \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx \cdot |f(2\pi) - f(0)| \geq \\ \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} e^{ix} \tau(x) dx \right| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} e^{inx} df(x) \right|$$

De l'expression (9) ainsi que des prémisses du lemme résultent ses thèses: celle du cas général et celle du cas où la fonction  $f(x)$  est nondécroissante.

**Remarque I.** L'expression (1) de l'introduction subsiste pour les fonctions  $\tau(x)$  qui sont les fonctions caractéristique des ensembles fermés de mesure nulle ou de leurs complémentaires, de même pour les ensembles fermés qui comprennent des ensembles ouverts de la même mesure, et pour leurs complémentaires. Je ne sais pas comment est il en général? Il est seulement évident qu'il est inutile d'essayer d'élargir l'égalité (1) de de l'introduction au delà de fonctions  $\tau(x)$  mesurables ( $B$ ) car les termes de cette suite pourraient perdre leurs sens précis. La question d'élargissement de l'égalité (1) fût posée par M<sup>r</sup> A. Rajchman:

## § 2. Démonstration du théorème I.

A. Si  $f(x)$  est une fonction à variation bornée et à l'écart nul, sa variation est nulle sur chaque segment d'un ensemble ( $H$ ).



Démonstration.

Il suffit de prouver que la variation dite est nulle sur chaque ensemble  $(H)^1$ .

L'ensemble  $(H)$  est, comme on le sait, défini par un segment (soit  $\tau(x)$  sa fonction caractéristique) et par une suite des entiers positifs croissants  $\{n_k\}$ .

Soit  $\lambda(x)$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $(H)$ . On a:

$$(1) \quad \lambda(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \tau(n_k \cdot x)$$

et pour chaque entier positif  $l$  on peut écrire:

$$(2) \quad \tau(n_l x) \lambda(x) = \lambda(x)$$

d'où

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \tau(n_l x) \lambda(x) df(x) = \int_0^{2\pi} \lambda(x) df(x)$$

mais  $\lambda(x)$  est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable  $(B)$ , donc la fonction:

$$\varphi(x) = \int_0^x \lambda(y) df(y)$$

est à l'écart nul<sup>1)</sup>, mais elle est à variation bornée et, outre cela:

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \lambda(x) \tau(n_l x) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau(n_l x) d\varphi(x) \cdot 2)$$

Des expressions (3) et (5) vient:

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \lambda(x) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau(n_l x) d\varphi(x) \cdot$$

<sup>1)</sup> Loc cit. <sup>1)</sup> page 1 (Théorème 1).

<sup>2)</sup> En effet: soient  $x_i, y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n_l$ ) les extrémités des intervalles définis par  $\tau(n_l x)$ . On a:

$$\int_0^{2\pi} \tau(n_l x) d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n_l} \int_{x_i}^{y_i} \lambda(x) df(x) = \sum_{i=1}^{n_l} \int_{x_i}^{y_i} \tau(n_l x) \lambda(x) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau(n_l x) \lambda(x) df(x).$$

Mais, d'après l'égalité (1) de l'introduction, on a

$$(7) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau(n_l, x) d\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx \int_0^{2\pi} \lambda(x) df(x).$$

Les expressions (6) et (7) donnent:

$$(8) \quad \left[ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx \right] \cdot \int_0^{2\pi} \lambda(y) df(y) = 0.$$

Dans la définition des ensembles (H) il est essentiel que:

$$(9) \quad 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx \neq 0$$

il doit donc être:

$$\int_0^{2\pi} \lambda(y) df(y) = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

B. Si la proposition (S) a lieu on peut faire correspondre à chaque fonction  $f(x)$  continue<sup>1)</sup>, à variation bornée, et à l'écart non nul un segment d'un ensemble (H) sur lequel la variation de  $f(x)$  ne s'annule pas.

En effet. Soit  $H_1$  un tel ensemble (H), situé dans l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ , que la fonction:

$$\varphi_t(x) = \int_0^x \lambda(y+t) df(y)$$

est à l'écart non nul, pour une au moins valeur  $t$  de l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ , où  $\lambda(y)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $H_1$ . Soit  $t_0$  la valeur d'on-t-il sagit. La fonction:

$$\varphi(x) = \int_0^x \lambda_1(y) df(y),$$

où  $\lambda_1(y) = \lambda(y + t_0)$ , vérift les conditions du lemme I.

1) Le théorème est banal au cas des fonctions discontinues.

Soit  $\tau(y)$  la fonction caractéristique d'un intervalle quelconque qui vérifie les prémisses du lemme I.

Nous avons d'une part:

$$\int_0^{2\pi} \tau(n_l(y+t)) \lambda_1(y) df(y) = \int_0^{2\pi} \tau(n_l(y+t)) d\varphi(y)$$

pour chaque entier positif  $l$  (la démonstration est la même que dans A.) est de l'autre, d'après le lemme I:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} \tau(n_l(x+t)) d\varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} \lambda_1(x) df(x) \right| > 0$$

pour une au moins valeur  $t = t_1$  de l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \gg$ .

Il doit donc être pour un entier  $l_0$  assez élevé:

$$(\alpha) \quad \int_0^{2\pi} \tau(n_{l_0}(x+t_1)) \lambda_1(x) df(x) \neq 0$$

mais  $\tau(n_{l_0}(x+t_1)) \cdot \lambda_1(x)$  représente la fonction caractéristique d'une somme finie de segments d'ensemble  $H_1$ , et l'inégalité  $(\alpha)$  prouve que parmi ces segments il y a au moins un tel que la variation de la fonction  $f(x)$  sur ce segment est différente de zéro c. q. f. d.

**Remarque.** Si la fonction  $f(x)$  est monotone le théorème I peut être énoncé tout simplement pour les ensembles  $(H)$  et non pas pour leurs segments.

H. Milicer-Grużewska.

### O ciągłości wahania.

Przedstawił S. Mazurkiewicz dn. 14 czerwca 1928 r.

Streszczenie.

W pracy tej udowodniłam następujące twierdzenia:

Twierdzenie I:

założenia: 1)  $f(x)$  jest funkcją ciągłą o wahanii skończonym i o okresie  $= 2\pi$ ;

2)  $\tau(x)$  — funkcją charakterystyczną zbioru mierzalnego ( $B$ ), o mierze zero, zawartego w przedziale  $\leq 0, 2\pi \rangle$ .

teza: funkcja  $\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x)$  jest nieciągła w każdym punkcie gdzie jest  $\neq 0$ .

**Twierdzenie II:** warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by zbiór domknięty i o mierze zero był zbiorem jednoznaczności w sensie wspomnianym jest aby funkcja  $\varphi(t)$  (określona jak wyżej) była ciągła dla każdej funkcji  $f(x)$  o wahanu skończonym, o odchyleniu zero i o okresie  $= 2\pi$ .

Podaję następujące przykłady:

**Przykład I:** funkcji o wahanu skończonym, o okresie  $= 2\pi$  i o odchyleniu zero, i zbioru, który czyni zażość założeniu 2) twierdzenia I, takich iż funkcja  $\varphi(t)$  jest nieciągła dla  $t=0$ .

**Przykład II.** funkcji i zbioru spełniających założenia twierdzenia I (prócz założenia okresowości) takich iż  $\varphi(t)$  jest o wahanu nieskończonym.

H. Milicer-Grużewska.

### Sur la continuité de la variation.

Présenté par S. Mazurkiewicz le 14 juin 1928.

**Introduction.** Soit  $f(x)$  une fonction à variation bornée, définie dans l'intervalle  $\leq 0, 2\pi \rangle$  et  $B$  un ensemble mesurable ( $B$ ) contenu dans cet intervalle<sup>1)</sup>. La variation de  $f(x)$  sur l'ensemble  $B$  ( $V(f, B)$ ) peut s'écrire comme il suit:

$$V(f, B) = \int_0^{2\pi} \tau(x) df(x)$$

où  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique de  $B$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> La grandeur et la position de l'intervalle ne sont pas essentielles.

<sup>2)</sup> Voir ma note „Sur les fonctions à variation bornée et à l'écart Hadamardien nul”. C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie, 1928.

La translation de l'ensemble  $B$  (d'une longueur  $t$ ) fait varier  $V(f, B)$  et nous avons:

$$V(f, B_t) = \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x)$$

où  $\tau(x)$  est supposée de période  $2\pi$ .

Cette fonction peut être discontinue sans que  $f(x)$  le soit même si la fonction  $f(x)$  est à l'écart nul (Exemple 1 § 2). Cela résulte du:

**Théorème I.** Si  $B$  est de mesure nulle et  $f(x)$  continue et de période  $2\pi$ ,  $\varphi(t)$  est discontinue pour chaque  $t_0$  qui ne l'annule pas.

Je démontre aussi que  $\varphi(t)$  peut être à variation non bornée (Exemple 2 § 2).

Il est intéressant de pouvoir établir une liaison entre la continuité des fonctions  $\varphi(t)$  et la question de l'unicité au sens restreint<sup>1)</sup>.

**Théorème II.** La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ( $U_1$ ) fermé et de mesure nulle soit l'ensemble d'unicité au sens restreint est que  $\varphi(t)$  soit continue pour chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$  (§ 3).

Le § 4 contient quelques remarques qui rattachent les questions précitées à celle des variations des fonctions à variation bornée sur les ensembles du type ( $H$ )<sup>2)</sup>.

### § 1. Lemmes et remarques préliminaires.

**Lemme I.** Soient:  $f(x)$  une fonction à variation bornée, continue et de période  $2\pi$ ,  $\tau(x)$  et  $\varphi(t)$  les fonctions définies dans l'introduction. On a:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0.$$

<sup>1)</sup> C'est à dire: à la question d'unicité où l'on se borne à l'étude des ensembles fermés et des séries trigonométriques à coefficients  $o(1)$  et qui intégrés formellement représentent des fonctions à variation bornée.

<sup>2)</sup> As.: peut on affirmer, que la question nécessaire et suffisante pour que  $V(f(x), H) = 0$ , sur chaque ensemble du type ( $H$ ), est que  $f(x)$  soit à l'écart nul.  $f(x)$  est supposée à variation bornée et de période  $2\pi$ . Cette question fût posée par Mr A. Rajchman.

Démonstration.

On peut<sup>1)</sup> déterminer une telle suite  $\{\tau_n(x)\}$  des fonctions caractéristiques des ensembles ouverts  $O_n$  que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x).$$

On peut donc poser:

$$\int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x) + \varepsilon_n(t)$$

où  $\varepsilon_n(t)$  vérifie les conditions:

$$1/ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 0 \qquad 2/ |\varepsilon_n(t)| \leq \text{const}$$

De même je nomme par  $\{\tau_n^m(x)\}$  la suite des fonctions caractéristiques des ensembles, formés d'un nombre fini des intervalles, pour laquelle on a:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau_n^m(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x).$$

C'est pourquoi on peut poser:

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau_n^m(x+t) df(x) + \varepsilon_n^m(t)$$

où:

$$1'/ \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_n^m(t) = 0 \qquad 2'/ |\varepsilon_n^m(t)| \leq \text{const}$$

A cause de la continuité de  $f(x)$  dans l'intervalle  $\ll 0, 2\pi \gg$  on peut établir une telle suite des fonctions continues de période  $2\pi$   $\{\tau_n^{m,k}(x)\}$  que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \tau_n^{m,k}(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau_n^m(x+t) df(x).$$

1) Voir ma note loc. cit.

Nous pouvons donc écrire:

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \tau_n^m(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau_n^{m,k}(x+t) df(x) + \varepsilon_n^{m,k}(t)$$

où:

$$1''/ \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{m,k}(t) = 0 \qquad 2''/ \quad |\varepsilon_n^{m,k}(t)| \leq \text{const.}$$

Mais l'expression:  $\int_0^{2\pi} \tau_n^{m,k}(x+t) df(x)$  n'est autre chose que l'intégrale de Stieltjès-Reiman, on a donc:

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \tau_n^{m,k}(x+t) df(x) = \sum_{i=0}^l \tau_n^{m,k}(x'_i+t) [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \eta_l(t)$$

où:

$$x_i \leq x'_i \leq x_{i+1}; \quad x_0 = 0; \quad x_{l+1} = 2\pi$$

et:

$$1'''/ \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l(t) = 0 \qquad 2'''/ \quad |\eta_l(t)| \leq \text{const.}$$

Des équations (1) à (4) résulte:

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^l \tau_n^{m,k}(x'_i+t) [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \varepsilon_n(t) + \varepsilon_n^m(t) + \varepsilon_n^{m,k}(t) + \eta_l(t)$$

d'où:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \sum_{i=0}^l \int_0^{2\pi} \tau_n^{m,k}(x'_i+t) dt [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \\ + \int_0^{2\pi} [\varepsilon_n(t) + \varepsilon_n^m(t) + \varepsilon_n^{m,k}(t) + \eta_l(t)] dt$$

mais la fonction  $\tau_n^{m,k}(x)$  est de période  $2\pi$ , c'est pourquoi nous avons:

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \varepsilon_n(t) dt + \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^m(t) dt + \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^{m,k}(t) dt + \int_0^{2\pi} \eta_l(t) dt$$

pour chaque valeur  $l$  et  $n, m, k$  constants.

Mais il résulte des inégalités 1''' et 2''' que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \eta_l(t) dt = 0$$

et:

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \varepsilon_n(t) dt + \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^m(t) dt + \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^{m,k}(t) dt$$

pour chaque valeur  $k$  et  $n, m$  constants.

En raisonnant sur l'équation (6) d'une manière analogue que sur le (5), on arrive, a cause des inégalités 1/ à 2'', vers l'expression:

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

**Lemme II.** Si  $f(x)$  est une fonction à variation bornée on peut poser:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

où  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont nondécroissantes et  $1^0$  ne diffèrent des fonctions de période  $2\pi$  que des fonctions linéaires, dès que  $f(x)$  est de période  $2\pi$ ,  $2^0$  sont constantes dans les intervalles où  $f(x)$  l'est.

En effet; nous avons:

$$(8) \quad f(x) = \int_0^x \lambda(y) df(y) - \left\{ - \int_0^x [1 - \lambda(y)] df(y) \right\}$$

où  $\lambda(y)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble des points où l'un de nombre dérivée de Dini de  $f(x)$  est nonnégatif<sup>1)</sup>.

Soient:

$$(9) \quad f_1(x) = \int_0^x \lambda(y) df(y); \quad (9') \quad f_2(x) = - \int_0^x [1 - \lambda(y)] df(y).$$

<sup>1)</sup> Voir ma note p. 79.



1° On a :

$$f_1(x + 2\pi) - f_1(x) = \int_0^{2\pi} \lambda(y) df(y) = a_1$$

$$\bullet \quad f_2(x + 2\pi) - f_2(x) = - \int_0^{2\pi} [1 - \lambda(y)] df(y) = a_2.$$

Si je pose maintenant :

$$(10) \quad f_1(x) = F_1(x) + \frac{a_1 x}{2\pi}; \quad (10') \quad f_2(x) = F_2(x) + \frac{a_2 x}{2\pi}$$

j'ai :

$$F_1(x + 2\pi) - F_1(x) \equiv 0 \quad \text{et} \quad F_2(x + 2\pi) - F_2(x) \equiv 0$$

ce qui prouve la partie 1° du lemme.

2° Soient :  $\langle a, b \rangle$  l'intervalle où  $f(x)$  est constante et  $x_1, x_2$  deux valeurs quelconques de cet intervalle.

D'après les expressions (8), (9) et (9') on a :

$$f_1(x_2) - f_1(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(y) df(y) = f(x_2) - f(x_1) = 0$$

et

$$f_2(x_2) - f_2(x_1) = f_1(x_2) - f_1(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] = 0$$

ce qui prouve la partie 2° du lemme.

**Remarque I.** Les fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont continues si  $f(x)$  est continue et sont à l'écart nul si  $f(x)$  l'est <sup>1)</sup>.

**Remarque II.** Je garderai, dans tout le mémoire, les indications fournies plus haut.

## § 2. Démonstration du théorème I.

Il résulte du lemme II et de la remarque I du § 1 qu'on peut écrire :

$$(1) \quad f(x) = \left\{ F_1(x) + \frac{a_1 x}{2\pi} \right\} - \left\{ F_2(x) + \frac{a_2 x}{2\pi} \right\}$$

où 1° les fonctions d'entre-crochet sont nondécroissantes et 2° les fonctions  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  vérifient les prémisses du lemme I du § 1.

<sup>1)</sup> Voir ma note loc. cit.

Nous avons donc, d'une part:

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_1(x) + \frac{\alpha_1 x}{2\pi} \right] \geq 0$$

et

$$(2') \quad \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_2(x) + \frac{\alpha_2 x}{2\pi} \right] \geq 0$$

et de l'autre:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d F_1(x) dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d F_2(x) dt = 0$$

Mais l'ensemble, dont il sagit, est de mesure nulle et nous pouvons écrire:

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_1(x) + \frac{\alpha_1 x}{2\pi} \right] dt = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_2(x) + \frac{\alpha_2 x}{2\pi} \right] dt = 0.$$

Mais cela peut avoir lieu, à cause des relations (2) et (2'), que si l'on a presque partout:

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_1(x) + \frac{\alpha_1 x}{2\pi} \right] = 0$$

et

$$(4') \quad \int_0^{2\pi} \tau(x+t) d \left[ F_2(x) + \frac{\alpha_2 x}{2\pi} \right] = 0$$

donc si l'on a presque partout:

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x) = 0 \quad (\text{à c. des: (1), (4) et (4')})$$

ce qui démontra le théorème I.

**Remarque I.** Il résulte de cette démonstration que le théorème I sera vrai pour chaque fonction qui ne diffère de la fonction à variation bornée, continue et de période  $2\pi$ , que d'une fonction absolument continue.

**Exemple I.** Soit  $P$  le produit de l'ensemble de Menchoff,  $P$ , défini sur l'intervalle  $\ll 0, 2\pi \gg$ , et de l'intervalle  $\ll 0, \pi \gg$ . La fonction  $F(x)$  de Menchoff constituera l'exemple cherché. En effet:

- 1<sup>o</sup>  $F(x)$  est à variation bornée
- 2<sup>o</sup>  $F(x)$  est à l'écart nul
- 3<sup>o</sup>  $\int_0^{2\pi} \tau(x) dF(x) = 1$  où  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique

de l'ensemble  $P_1$ .

La fonction  $\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) dF(x)$  est donc discontinue pour  $t=0$ .

**Exemple II.** Soit  $C$  l'ensemble de Cantor situé sur l'intervalle  $\ll 0, 2\pi \gg$  et  $f(x)$  la fonction de Lebesgue définie pour cet ensemble. Je démontrerai que la fonction  $\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x)$ , où  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $C$ , est à variation nonbornée.

$$\text{Soit } t_{2i}^n = 2\pi \cdot \frac{i}{3^n} \text{ pour } \begin{matrix} i=0, 1, 2, \dots, 3^n \\ n=0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

Il est évident qu'on peut trouver dans l'intervalle  $\ll 0, 2\pi \gg$  au moins un intervalle  $\ll \alpha_i^n, \beta_i^n \gg$  de longueur  $\frac{2\pi}{3^n}$  tel que

$$\int_{\alpha_i^n}^{\beta_i^n} \tau(x+t_{2i}^n) df(x) = \frac{1}{3^n} \text{ pour chaque } t_{2i}^n \text{ où } i \text{ est premier avec } 3^n.$$

[En effet: le théorème a lieu pour  $n=0$ , il aura lieu aussi pour  $(n+1)$  si on peut l'affirmer pour  $n$ , et cela à cause de la construction de l'ensemble  $C$  et de la fonction  $f(x)$ ].

Nous pouvons donc écrire:

$$(6) \quad \varphi(t_{2i}^n) \geq \frac{1}{3^n}$$

dès que  $i$  est premier avec  $3^n$ . Mais parmi les  $3^n$  points  $t_{2i}^n$  ( $i=1, 2, \dots, 3^n$ ) il y a  $3^{k-1} \cdot 2$  points des coordonnées de la forme:

$2\pi \frac{k}{3^n}$  où  $k$  est premier avec  $n$ . Nous avons donc, à cause de (6):

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{3^n} \varphi(t_{2i}^n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} 3^{k-1} 2 = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot n.$$

Posons:  $t_{2i-1}^n = t_{2i}^n - b_i^n$  où  $b_i^n$  est choisit de la sorte que

$$\varphi(t_{2i-1}^n) = 0 \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, 3^n \\ n=0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

La variation de la fonction  $\varphi(t)$  dans l'intervalle  $\ll 0, 2\pi \gg$  ne sera pas surpassée par:

$$V_n = \sum_{i=1}^{3^n} [\varphi(t_{2i}^n) - \varphi(t_{2i-1}^n)] = \sum_{i=1}^{3^n} \varphi(t_{2i}^n) \geq \frac{2}{3} n,$$

et  $V_n$  croit indéfiniment avec  $n$ . Donc la fonction  $\varphi(t)$  est à variation nonbornée.

§ 3. **Lemme I.** La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $Z$  fermé et de mesure nulle soit l'ensemble d'unicité au sens restreint (soit  $U_1$ ) est que la variation ( $V(Z)$ ) de chaque fonction à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$  soit nulle sur cet ensemble.

A. La condition est nécessaire:

Nous avons:

$$V(Z \cdot x) = \int_0^x \tau(x) df(x)$$

où  $\tau(x)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $Z$ . Mais  $V(Z \cdot x)$  est  $1^0$  à l'écart nul et à variation bornée<sup>1)</sup>,  $2^0$  ne diffère de la fonction de période  $2\pi$  que d'une fonction linéaire (la démonstration est identique à celle de la  $1^0$  partie du lemme II du § 1)  $3^0$  elle est constante dans les intervalles contingues à  $Z$ .

Si on nomme par  $-\frac{b_n}{n}$  et  $\frac{a_n}{n}$  les coefficients de Fourier de la partie périodique de  $V(Z \cdot x)$ , on peut écrire:

$$V(Z \cdot x) = C + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

1) Voir ma not theoreme I.

(1) où: 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Nous avons donc:

$$V'_x(Z \cdot x) \equiv 0 \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

dans les intervalles contigus à  $Z$ .

Mais  $Z$  est un  $U_1$ , et les coefficients  $a_n, b_n$  sont  $o(1)$  (à cause de (1)) c'est pourquoi il doit être

$$\alpha_0 = a_n = b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

ce qui signifie que  $V(Z \cdot x) = \text{const}$ , mais  $V(Z \cdot 0) = 0$  donc  $V(Z \cdot 2\pi) = V(Z) = 0$  c. q. f. d.

B. La condition est suffisante.

Supposons que  $Z$  n'est pas  $U_1$ . Il existe donc une série trigonométrique:

(2) 
$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

telle que:

1<sup>o</sup>  $a_n$  et  $b_n$  sont  $o(1)$ , mais qu'elles ne sont pas tous nul.

2<sup>o</sup> la série (2) converge vers zéro en dehors de  $Z$ .

3<sup>o</sup> 
$$f(x) = c + \frac{\alpha_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

est à variation bornée.

Il résulte des conditions 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> ainsi que du lemme II du § 1 que:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

où  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont nondécroissantes, à l'écart nul et ne diffèrent des fonctions périodiques ( $2\pi$ ) que des fonctions linéaires. Leurs variations sur l'ensemble  $Z$  sont donc nulles (d'après la prémisse), mais elles sont constantes en dehors de  $Z$ , parceque  $f(x)$  y est (d'après le lemme II du § 1). Il doit donc être:

$$f_1(2\pi) = f_1(0) \quad \text{et} \quad f_2(2\pi) = f_2(0)$$

donc  $f_1(x) = \text{const}$  et  $f_2(x) = \text{const}$ , et alors  $f(x) = \text{const}$ . Nous avons:  $\alpha_0 = a_n = b_n = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ) ce qui contredit au 1<sup>o</sup>. L'ensemble  $Z$  est  $U_1$  c. q. f. d.

### Démonstration du théorème II.

Le théorème II est une conséquence immédiate du lemme précédent et du théorème I. En effet.

Si un ensemble  $Z$  est  $U_1$  la variation de chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$  est nulle sur cet ensemble, donc la fonction  $\varphi(t)$  est constamment nulle [ $\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x) = \int_0^{2\pi} \tau(x) df(x-t)$  et la fonction  $f(x-t)$  pour  $t = \text{const}$  jouit des mêmes propriétés que la fonction  $f(x)$ ].

Inversement:

Si  $\varphi(t)$  est continue pour chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$ , elle doit être nulle (d'après le lemme I), donc l'ensemble  $Z$  est un  $U_1$  (comme il résulte du lemme précédent).

**Remarque I.** Il est évident que le théorème II restera vrai si l'on exige de la fonction  $\varphi(t)$  à être continue seulement au point  $t=0$ .

**Remarque II.** Il est évident que tout ce qu'il fût dit dans ce § restera vrai pour les fonctions qui ne diffèrent d'une fonction à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$ , que d'une fonction absolument continue.

**Remarque III.** Soit:

$$(1) \quad \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \tau(x+t) df(x)$$

où  $\tau(x)$  est définie comme plus haut, et  $f(x)$  une fonction non-décroissante, à l'écart nul et qui ne diffère d'une fonction de période  $2\pi$  que d'une fonction absolument continue.

On peut écrire:

$$(2) \quad \varphi(t) = f(2\pi) - f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x)$$

où  $\tau_n(x)$  sont des fonctions caractéristique des intervalles contingents à l'ensemble  $Z$ . Mais la série:

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau_n(x+t) df(x)$$

est à termes positifs. Donc la condition nécessaire et suffisante de la continuité de la fonction  $\varphi(t)$  est la convergence uniforme de la série (3). Cette propriété est caractéristique pour les ensembles  $U_1$ .

§ 4. Il résulte du lemme I du § 3 est du fait, que les ensembles  $(H)$  sont des ensembles d'unicité<sup>1)</sup>, que la variation de chaque fonction à variation bornée, à l'écart nul et de période  $2\pi$  est nulle sur chaque ensemble  $(H)$ <sup>2)</sup>.

La question des variations sur les ensembles  $(H)$ , (voir l'introduction) sera résolue si l'on peut ou non assujettir à chaque fonction  $f(x)$  à variation bornée, à l'écart non nul et de période  $2\pi$  (où qui diffère d'une telle fonction que par une fonction absolument continue) un tel ensemble  $(H)$ , que la fonction  $\varphi(t)$  soit discontinue, où que la série (3) du § 3 ne converge pas uniformément.

---

1) A. Rajchman „Sur l'unicité du développement trigonométrique” Fundamenta Mathematicae, t. III, 1921.

2) C'est aussi Mr A. Rajchman qui a démontré par une méthode directe le théorème d'ont il est question. Cette démonstration ne fût pas publié.

E. Rybka.

**Badania nad gwiazdą zmienną TU Cassiopeiae.**

Przedstawił M. Kamiński dn. 14 czerwca 1928 r.

Autor przedstawia swe pierwsze wyniki badań nad gwiazdą TU Cassiopeiae.

E. Rybka.

**TU Cassiopeiae.**

**The exact period of the light variation.**

Présenté par M. Kamiński le 14 juin 1928.

Résumé.

The elements of TU Cassiopeiae, given by L. Casteels<sup>1)</sup>:

(1)  $\text{Max.} = 2419302^d \cdot 12 (1911.IX.22) + 2^d \cdot 139 E$

do not accord with my observations, made during 1926 June 16—1928 May 23. Taking into consideration 473 observations, which I performed during this interval of time, I formed the following normal maxima:

	I	J. D. hel.	Gr. M. T.	2424768 <sup>d</sup> · 02
	II	”	”	2424812 · 06
(2)	III	”	”	2425041 · 80
	IV	”	”	2425206 · 61
	V	”	”	2425332 · 78

The number of periods elapsed from Casteels' maximum to my observations being unknown, I formed the following new elements, using the normal maxima above mentioned (2) as well as a maximum of B. Kukarkin (2425319 · 984)<sup>2)</sup>:

(3)  $\text{Max. hel. Gr. M. T.} = \text{J. D. } 2425041^d \cdot 85 + 2^d \cdot 13943 E$

<sup>1)</sup> Ann. de l'Observ. Royal de Belgique, Tome XIII, fasc. II, pg. 184-191.

<sup>2)</sup> Veränderliche Sterne, Forschungs- und Informationsbekanntmachungen. Nischni-Novgorod. Nr. 1.



Computing with these elements the number of periods since Casteels' maximum to my own normal maxima, *I* have got the following definitives elements:

$$(4) \quad \text{Max. hel. Gr. M. T.} = \text{J. D. } 2425041^d \cdot 85 \pm 0^d \cdot 01 + \\ + (2^d \cdot 139296 \pm 0^d \cdot 000008) E.$$

During these last computations, which *I* performed by the method of least squares, *I* used the normal maximum of Casteels as well as the maxima mentioned above.

Warsaw, Observatory.

June 1928.

Comparing with the results of the other observations, I found that the results of the observations made on the 1st and 2nd of May are in good agreement with the results of the other observations.

The exact period of the first maximum is 2425310. The exact period of the second maximum is 2425310. The exact period of the third maximum is 2425310. The exact period of the fourth maximum is 2425310. The exact period of the fifth maximum is 2425310.

The exact period of the first maximum is 2425310. The exact period of the second maximum is 2425310. The exact period of the third maximum is 2425310. The exact period of the fourth maximum is 2425310. The exact period of the fifth maximum is 2425310.

The results of the observations made on the 1st and 2nd of May are in good agreement with the results of the other observations. The exact period of the first maximum is 2425310. The exact period of the second maximum is 2425310. The exact period of the third maximum is 2425310. The exact period of the fourth maximum is 2425310. The exact period of the fifth maximum is 2425310.

The results of the observations made on the 1st and 2nd of May are in good agreement with the results of the other observations. The exact period of the first maximum is 2425310. The exact period of the second maximum is 2425310. The exact period of the third maximum is 2425310. The exact period of the fourth maximum is 2425310. The exact period of the fifth maximum is 2425310.

(1)	1	2425310
(2)	2	2425310
(3)	3	2425310
(4)	4	2425310
(5)	5	2425310

The number of periods elapsed from the first maximum to the second maximum is 2425310. The number of periods elapsed from the second maximum to the third maximum is 2425310. The number of periods elapsed from the third maximum to the fourth maximum is 2425310. The number of periods elapsed from the fourth maximum to the fifth maximum is 2425310.

The exact period of the first maximum is 2425310. The exact period of the second maximum is 2425310. The exact period of the third maximum is 2425310. The exact period of the fourth maximum is 2425310. The exact period of the fifth maximum is 2425310.



Redaktor

**Edward Loth**

Adres Redakcji: Śniadeckich 8.

---

Zakłady Graficzno-Introligatorskie. **J. Dziewulski**. Ziota 29.

<http://rcin.org.pl>